

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

Е. Н. Талицкий

# МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ И ЗАЩИТА ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

Учебное пособие  
В 3 частях

Часть 2

Владимир 2005

УДК 621.396.2  
ББК 32.844 – 021.1  
Т16

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук,  
профессор, заведующий кафедрой ИУ-4 Московского государственного  
технического университета им. Н.Э. Баумана  
*В.А.Шахнов*

Доктор технических наук,  
профессор Московского авиационного института  
(государственного технического университета)  
*А.В.Назаров*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Владимирского государственного университета.

**Талицкий, Е.Н.** Механические воздействия и защита электронной аппаратуры: учеб. пособие: в 3 ч. Ч. 2. / Е. Н. Талицкий; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2005. –124 с. – ISBN 5-89368-563-6.

В первой части пособия, вышедшей в 2004 г., дана общая характеристика механических воздействий и способов защиты электронной аппаратуры; рассмотрены вопросы моделирования и расчета конструкций, приводимых к системам с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Во второй части рассмотрены аналитические методы расчёта вибраций ячеек электронной аппаратуры. Особое внимание уделено проектированию и расчёту конструкций ячеек с полимерными демпферами.

Предназначено для студентов специальностей 200800 – проектирование и технология радиоэлектронных средств, 220500 – проектирование и технология электронно-вычислительных средств и магистрантов по направлению 551100 – проектирование и технология электронных средств. Может быть полезно студентам приборостроительных специальностей, а также аспирантам и инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами вибро-, ударозащиты изделий.

Табл. 7 Ил. 68. Библиогр.: 18 назв.

УДК 621.396.2  
ББК 32.844 – 021.1

ISBN 5-89368-563-6

© Владимирский государственный  
университет, 2005

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения .....	4
Список сокращений .....	4
<b>Г л а в а 5. Анализ колебаний конструкций типа пластин.....</b>	<b>5</b>
5.1. Свободные изгибные колебания конструкций типа пластин.....	5
5.2. Частотная отстройка как способ борьбы с резонансными колебаниями .....	21
5.3. Вынужденные изгибные колебания конструкций типа пластин .....	23
Контрольные вопросы .....	33
<b>Г л а в а 6. Виброзащита ЭА полимерными демпферами .....</b>	<b>34</b>
6.1. Общая характеристика полимерных демпферов.....	34
6.2. Основные механизмы и характеристики демпфирования.....	39
6.3. Характеристика вибропоглощающих материалов .....	43
6.4. Способы создания вибропоглощающих полимеров .....	45
6.5. Основы теории конструкций ЭС с полимерными демпферами .....	52
Контрольные вопросы .....	58
<b>Глава 7. Теоретические основы расчета ячеек ЭА с распределенными полимерными демпферами .....</b>	<b>59</b>
7.1. Ячейки с внешним демпфирующим слоем .....	59
7.2. Ячейки с внутренним демпфирующим слоем .....	68
7.3. Ячейка с полимерными демпферами в виде демпфирующего ребра .....	82
Контрольные вопросы .....	88
<b>Глава 8. Теоретические основы расчета ячеек ЭА с сосредоточенными полимерными демпферами .....</b>	<b>89</b>
8.1. Двухъячеечная конструкция с одной демпфирующей вставкой .....	89
8.2. Методы приведения распределенных параметров ячеек к сосредоточенным параметрам .....	95
8.3. Конструкции электронных средств с n ячейками .....	104
8.4. Динамический гаситель колебаний с демпфированием .....	107
Контрольные вопросы .....	113
Приложение .....	114
Рекомендательный библиографический список .....	121

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$z$ – перемещение (расстояние);	$E$ – модуль продольной упругости;
$Z$ – амплитуда виброперемещения;	$G$ – модуль сдвига;
$\dot{Z}$ – амплитуда виброускорения;	$E', G'$ – динамический модуль продольной упругости и динамический модуль сдвига;
$w(x, y)$ – деформация изгиба в точке с координатами $x$ и $y$ ;	$A$ – показатель использования ВП материалов в конструкции;
$u, v$ – продольная деформация вдоль осей $x$ и $y$ соответственно;	$\xi_w(x, y), \xi_{\ddot{w}}(x, y)$ – показатели уменьшения резонансных амплитуд, виброперемещения и виброускорения в точке платы с координатами $x$ и $y$ ;
$a, b, H$ – длина, ширина и толщина платы (пластины) соответственно;	$D$ – цилиндрическая жесткость;
$h$ – относительная толщина платы (слоя);	$H(j\omega)$ – передаточная функция;
$W$ – полная энергия колебаний;	$k_x, k_y$ – волновые числа в направлении осей $x$ и $y$ ;
$\Pi$ – потенциальная энергия;	$K_i$ – абсолютное значение продольной жесткости $i$ -го слоя;
$T$ – кинетическая энергия;	$k_i$ – относительное значение продольной жесткости $i$ -го слоя;
$\Delta W$ – энергия, рассеиваемая за цикл колебаний;	$\rho_x, \rho_y$ – радиусы кривизны платы в направлении осей $x$ и $y$ ;
$\sigma$ – нормальное напряжение;	$K_s$ – абсолютное значение продольной жесткости $i$ -го слоя;
$\tau$ – касательное напряжение;	$\varphi_x$ – угол изгиба пластины в направлении оси $x$ ;
$k$ – коэффициент жесткости;	$\rho$ – радиус кривизны, плотность;
$\eta$ – коэффициент механических потерь;	$g$ – ускорение силы тяжести;
$\varepsilon$ – относительная продольная деформация;	индекс "н" – начальное значение;
$\omega$ – угловая частота, рад/с;	индекс "к" – конечное значение.
$\omega_0, p$ – собственная частота колебаний, рад/с;	
$f$ – частота, Гц;	
$f_0$ – собственная частота колебаний, Гц;	
$\nu$ – коэффициент Пуассона;	
$m$ – масса;	
$m_3$ – масса элементов;	

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ЭА – электронная аппаратура;	ДС – демпфирующий слой;
АРК – амплитуда резонансных колебаний;	КМП – коэффициент механических потерь;
АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;	КП – коэффициент передачи;
ВП – вибропоглощающий;	ПД – полимерный демпфер;
ДВ – демпфирующая вставка;	ППУ – пенополиуретан;
ДГК – динамический гаситель колебаний;	РЭС – радиоэлектронные средства;
ДМУ – динамический модуль упругости;	СФК – собственная форма колебаний;
ДР – демпфирующее ребро;	СЧК – собственная частота колебаний;
	ЭРЭ – электрорадиоэлементы;
	ЭС – электронное средство;

## Глава 5

# АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ПЛАСТИН

### 5.1. СВОБОДНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ПЛАСТИН

#### Собственные частоты колебания пластинчатых конструкций.

При расчете пластин (рис.5.1) обычно принимают следующие допущения:

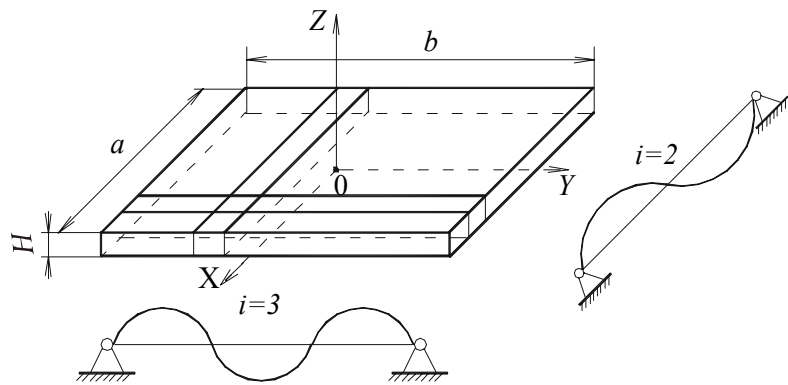
- изгибные деформации пластин при колебаниях малы по сравнению с её толщиной, упругие деформации подчиняются закону Гука;

- пластина имеет постоянную толщину;

- в пластине имеется нейтральный слой, который при изгибных колебаниях пластины не подвержен деформациям растяжения – сжатия;

- материал пластины идеально упругий, однородный и изотропный;

- справедлива гипотеза прямых нормалей, согласно которой все прямые, нормальные к среднему слою пластины до деформирования остаются прямыми и нормальными к нему и после деформации.



$$\left( \iint W_{,c}(x, y) ds \right)^2$$

При составлении уравнений движения можно использовать уравнение изгиба пластины при действии распределенной статической нагрузки  $q(x, y)$  [12]

$$D \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = q(x, y), \quad (5.1)$$

где  $W = W(x, y)$  – прогиб пластины в точке с координатами  $x$  и  $y$ ;  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины:

$$D = \frac{EH^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (5.2)$$

В (5.2)  $E$  и  $\nu$  – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины, а  $H$  – её толщина.

Заменяя в (5.1) в соответствии с принципом Д'Аламбера статическую нагрузку силой инерции  $m(\partial^2 z / \partial t^2)$ , получим уравнение свободных незатухающих (собственных) колебаний пластины:

$$m \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) + D \left( \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) = 0, \quad (5.3)$$

где  $z = z(x, y, t)$ .

Наибольшее распространение для решения задач о собственных колебаниях получили точные методы, основанные на непосредственном решении уравнения (5.3), а также приближенные энергетические методы, основанные на законе сохранения энергии. В дальнейшем необходимо знать формулы для вычисления максимальных значений кинетической  $T_{\max}$  и потенциальной  $\Pi_{\max}$  энергии пластины:

$$T_{\max} = \frac{\rho H \omega_0^2}{2} \iint_{S_n} w^2 dx dy; \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} = \frac{D}{2} \iint_{S_n} & \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \times \right. \\ & \left. \times \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy, \quad (5.5) \end{aligned}$$

где  $S_n$  – площадь пластины;  $\rho$  – плотность материала.

**Точный метод расчета собственных частот колебаний пластин.** Известно точное решение задачи о собственных колебаниях конструкции типа прямоугольных пластин, когда две противоположные стороны свободно оперты при любых граничных условиях на двух других краях. Наиболее простое решение получается, когда все края пластины свободно оперты. Решение уравнения собственных колебаний (5.3) в этом случае имеет вид

$$z(x, y, t) = w(x, y) \cdot e^{j\omega_0 t}.$$

Амплитудная функция  $w(x, y)$ , называемая собственной формой колебаний пластины, определяется выражением

$$w(x, y) = A_{if} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{f\pi y}{b}\right),$$

где  $a$  и  $b$  – размеры сторон пластины;  $i, f$  – число полуволн синусоиды в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Нетрудно убедиться, что это решение удовлетворяет граничным условиям на контуре

$$z = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a;$$

$$z = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b,$$

которые означают равенство нулю прогибов и изгибающих моментов на краях пластины.

Подставляя решение  $z(x, y, t)$  в (5.3), получаем:

$$\left(\frac{i\pi}{a}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{f\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{f\pi}{b}\right)^4 = \omega_0^2 \frac{\rho H}{D},$$

отсюда собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \pi^2 \left[ \left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{f}{b}\right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho H}}. \quad (5.6)$$

**Приближенные методы расчета собственных частот колебаний пластин.** Рассмотренный выше точный метод расчета собственных частот колебаний применим только для однородных прямоугольных пластин, свободно опертых на двух других противоположных краях. На практике часто необходимо определить собственные частоты колебаний конструкций, не удовлетворяющих этим требованиям. В таких случаях применяются приближенные методы Рэлея, Ритца, Бубнова-Галеркина и др.

*Метод Рэлея.* По методу Рэлея собственная частота  $\omega_0$  определяется из сопоставления выражений для кинетической и потенциальной энергии колебаний системы.

Максимальные значения кинетической и потенциальной энергий пластин, совершающих одно из главных колебаний

$$z(x, y, t) = w(x, y) \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

определяются по формулам (5.4), (5.5), тогда для  $\omega_0$  получим

$$\omega_0 = \frac{D}{\rho H} \cdot \frac{\int_0^a \int_0^b \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy}{\int_0^a \int_0^b w^2 dx dy},$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Собственная форма колебаний пластины запишется в виде

$$w_{if}(x, y) = w_i(x)w_f(y), \quad (5.7)$$

где  $w_i(x)$ ,  $w_f(y)$  – базисные функции. Наиболее часто функции  $w_i(x)$ ,  $w_f(y)$  представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} w_i(x) &= \sin k_i x + \bar{A}_i \cos k_i x + \bar{B}_i \operatorname{sh} k_i x + \bar{C}_i \operatorname{ch} k_i x \\ w_f(y) &= \sin k_f y + \bar{A}_f \cos k_f y + \bar{B}_f \operatorname{sh} k_f y + \bar{C}_f \operatorname{ch} k_f y \end{aligned} \right\}; \quad (5.8)$$

где  $k_i = \lambda_i/a$ ;  $k_f = \lambda_f/b$ .

Коэффициенты  $\bar{A}_i, \bar{A}_f, \bar{B}_i, \bar{B}_f, \bar{C}_i, \bar{C}_f$  и параметры  $\lambda_i, \lambda_f$ , как было показано в 4.1(ч.1), для балки, находятся из граничных условий.

Если на плате есть элементы, которые необходимо рассматривать как сосредоточенные массы  $m_n$ , то значение максимальной кинетической энергии находится по формуле

$$T_{\max} = \frac{m_0 \omega_0}{2} \iint_{(S)} w^2(x, y) dS + \sum_{n=1}^S m_n w_n^2(x, y),$$

где  $w_n(x, y)$  – максимальный прогиб в точке сосредоточения  $n$ -й массы.

В ЭА часто используются платы, закрепленные в отдельных точках (рис 5.2). Если плата крепится на колонках винтами, то такому креплению наиболее точно соответствует схема свободного опирания в этих точках. Базисные функции в этом случае должны удовлетворять геометрическим и

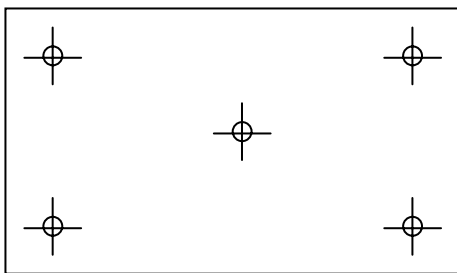


Рис. 5.2. Плата, закрепленная в пяти точках

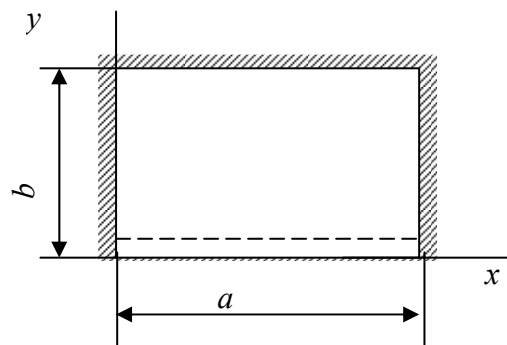


Рис. 5.3. Расчетная модель платы, у которой три края защемлены

динамическим условиям, как в точках крепления, так и на контуре. Для рассматриваемого случая, например, в точках крепления  $w = 0$ ,  $\partial^2 w / \partial x^2 = \partial^2 w / \partial y^2 = 0$ .



На краях 
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Приведем примеры определения собственных частот колебаний методом Рэлея.

**Пример 5.1.** Получить формулу для определения первой собственной частоты колебаний ячейки, состоящей из прямоугольной платы с равномерно расположенными по площади платы электрорадиоэлементами с общей приведенной массой  $m_{\text{э}} = m_0$ .

Способ крепления платы позволяет считать три её края жестко закрепленными и один свободно опертым (рис.5.3).

**Решение.** В качестве первого приближения собственную форму колебаний представим в виде [3]

$$w_1 = w_1(x, y) = w_1(x)w_1(y), \quad (5.9)$$

где  $w_1(x), w_1(y)$  - базисные функции типа (5.8), удовлетворяющие соответствующим краевым условиям для балки, жестко защемленной по концам, и балки с жестким креплением одного конца и свободным опиранием на другом.

Учитывая выражение (3.40, ч. 1), формулы для определения максимальных кинетической и потенциальной энергий приведем к виду

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{(m_{\text{э}} + m_0)\omega_{01}^2}{2} \int_0^a \int_0^b w_1 dx dy = \frac{(m_{\text{э}} + m_0)\omega_{01}^2}{2} \int_0^a w_1^2(x) dx \int_0^b w_1^2(y) dy; \\ \Pi_{\max} &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \frac{D}{2} \int_0^a w_1''^2(x) dx \times \\ &\times \int_0^b w_1^2(y) dy + D \int_0^a w_1(x) w_1''(x) dx \int_0^b w_1(y) w_1''(y) dy + \\ &+ \frac{D}{2} \int_0^a w_1^2(x) dx \int_0^b w_1''^2(y) dy. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Значения интегралов для соответствующих способов крепления концов находим в табл. П.4. Получим

$$\begin{aligned} 2T_{\max} &= 1,04 \cdot 0,5(m_{\text{э}} + m_0)ab\omega_{01}^2 = 0,52(m_{\text{э}} + m_0)ab\omega_{01}^2; \\ 2\Pi_{\max} &= D \left( \frac{518,52 \cdot 0,5b}{a^3} + 2 \frac{12,78 \cdot 5,57}{ab} + \frac{1,04 \cdot 118,8a}{b^3} \right) = 259,26 \times \\ &\times \left( \frac{b}{a^3} + \frac{0,549}{ab} + \frac{0,475a}{b^3} \right). \end{aligned}$$

Из равенства  $T_{\max} = \Pi_{\max}$  найдем

$$\omega_{01} = \frac{\alpha_1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{(m_{\text{э}} + m_0)}},$$

где  $\alpha_1 = 22,372 \sqrt{1 + 0,549\beta^2 + 0,475\beta^4}$ ,  $\beta = a/b$ .

Используя эту методику можно получить формулы для определения частотного коэффициента  $\alpha$  с другими способами крепления. Некоторые из них приведены в приложении П.3.

**Пример 5.2.** Получить формулу для расчета основной собственной частоты колебаний шасси в виде прямоугольной пластины, нагруженной сосредоточенной массой  $M$  (рис.5.4). Способ крепления сторон соответствует шарнирному закреплению.

Потенциальная энергия пластины с сосредоточенной массой, как и для пластины без сосредоточенной массы, будет находиться по формуле (5.5). В формуле для кинетической энергии необходимо учесть и кинетическую энергию сосредоточенной массы, равную  $(M\omega_0^2/2)w_m(x, y)$ . Получим

$$T = \frac{m_0\omega_0^2}{2} \int_0^a \int_0^b w_1(x, y) dx dy + \frac{M\omega_0^2}{2} w_m(x, y) \quad (5.11)$$

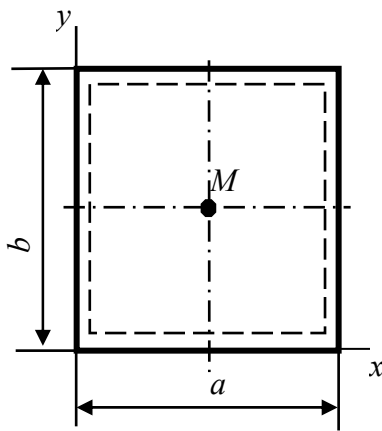


Рис. 5.4. Расчетная модель шасси, нагруженного сосредоточенной массой

где  $w_m$  - прогиб пластины в точке расположения сосредоточенной массы.

В первом приближении форму колебаний, как и в предыдущем примере, представим в виде  $w_1 = w_1(x, y) = w_1(x)w_1(y)$ . Используя (3.41, ч. 1) и табл. П.4, найдем:

$$2\Pi_{\max} = D \left( \frac{48,705 \cdot 0,5b}{a^3} + \frac{2 \cdot 4,934^2}{ab} + \frac{48,705 \cdot 0,5a}{b^3} \right) = \frac{D\pi^4}{4a^2\beta} (1 + 2\beta^2 + \beta^4),$$

где  $\beta = a/b$ .

Так как для шарнирного крепления (см. 5.8. и табл. П.2)

$$w_1(x) = \sin(\pi x/a) \text{ и } w_1(y) = \sin(\pi y/b),$$

то для координат  $x = a/2, y = b/2$  получим  $w_1(a/2, b/2) = 1$ .

Максимальная кинетическая энергия

$$2T_{\max} = \frac{m_0\omega_0^2 ab}{4} + \frac{M\omega_0^2}{2} = \omega_0^2 \left( \frac{m_0 ab}{4} + \frac{M}{2} \right).$$

Из равенства максимальных кинетической и потенциальной энергий найдем

$$\omega_0^2 = \frac{D\pi^4 (1 + 2\beta^2 + \beta^4)}{4a^2\beta (m_0 ab/4 + M/2)}.$$

После несложных преобразований получим

$$\omega_0 = (\alpha/a^2) \sqrt{D/m_0 K_m},$$

Где  $\alpha = \pi^2 \sqrt{1 + 2\beta^2 + \beta^4}$ ,  $\beta = a/b$ ;  $K_m = \sqrt{1 + 2M/m_0 ab}$ .

Коэффициент  $K_m$  учитывает влияние сосредоточенной массы на собственную частоту колебаний. Метод Рэлея дает хорошие приближения для основного тона пластины, с ростом номера обертона точность уменьшается.

*Метод Ритца.* Этот метод является развитием метода Рэлея, поэтому его часто называют методом Рэлея–Ритца.

Для пластин собственная форма колебаний ищется в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i, f=1}^n a_{if} w_{if}(x, y),$$

где  $w_{if}(x, y)$  – базисные функции, выбираемые в соответствии с граничными условиями, а коэффициенты  $a_{if}$  определяются из условия экстремума функционала ( $T_{\max} - \Pi_{\max}$ ), т.е. из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_{if}} (T_{\max} - \Pi_{\max}) = 0.$$

Взяв производную, найдем систему из  $n$  алгебраических уравнений. Приравнявая к нулю определитель, составленный из коэффициентов при  $a_i$ , получаем частотное уравнение, решая которое, найдем  $n$  собственных частот колебаний. С помощью этого метода получены формулы расчета пластин с различными способами крепления.

Широко распространены формулы

$$\omega_i = (\alpha_i / a^2) \sqrt{D / m K_{\text{ЭРЭ}}}, \text{ рад/с}; \quad (5.12)$$

$$f_i = (\alpha_i / 2\pi a^2) \sqrt{D / m K_{\text{ЭРЭ}}}, \text{ Гц}, \quad (5.13)$$

где  $K_{\text{ЭРЭ}}$  – коэффициент, учитывающий массу ЭРЭ;

$\alpha_i$  – коэффициент, зависящий от способа крепления пластины, соотношения ее сторон, номера обертона и определяемый из таблицы ПЗ.

Формулу (5.12) иногда приводят к виду

$$f = 10^5 K_m K_{\text{ЭРЭ}} B H / a^2, \quad (5.14)$$

где  $K_m = \sqrt{E \rho_c / E_c \rho}$ ;  $E, E_c$  – модули упругости применяемого материала и стали;  $\rho, \rho_c$  – их плотности;

$$K_{\text{ЭРЭ}} = 1 / \sqrt{1 + m_{\text{Э}} / m_{\text{П}}},$$

$m_{\text{Э}}$  – масса элементов, равномерно размещенных на плате;  $m_{\text{П}}$  – масса платы; частотный коэффициент  $B = (\alpha / 2\pi) \sqrt{D / m_0}$ ;  $H$  – толщина;  $a$  – длина платы. Значения коэффициентов  $K_m, K_{\text{ЭРЭ}}$  и  $B$  даны в [9].

Для приближенных расчетов спектра собственных частот при различных граничных условиях коэффициент  $\alpha$ , входящий в формулы (5.12, 5.13), можно рассчитать по выражению [5]

$$\alpha = \pi^2 \sqrt{A_i^4 + A_f^4 \beta^4 + 2\beta^2 [\sigma B_i B_f + (1 - \sigma) C_i C_f]}. \quad (5.15)$$

Коэффициенты  $A_i, A_f, B_i, B_f, C_i, C_f$  находятся при помощи табл. 5.1 для различных сочетаний краевых условий на противоположных сторонах пластины ( $C$  – заземленный,  $S$  – опертый,  $F$  – свободный края).

Т а б л и ц а 5.1

Значения постоянных  $A, B, C$

Граничные условия	$i=1$			$i=2$			$i \geq 3$		
	$A$	$B$	$C$	$A$	$B$	$C$	$A$	$B$	$C$
$S-S$	0	0	0	1	1	1	$i-1$	$A^2$	$A^2$
$S-C$	0	0	0	1.25	$A(A-1/\pi)$	$B$	$i-0.75$	$A(A-1/\pi)$	$B$
$S-F$	0	0	$3/\pi^2$	1.25	$A(A-1/\pi)$	$A(A+3/\pi)$	$i-0.75$	$A(A-1/\pi)$	$A(A+3/\pi)$
$C-C$	0	0	0	1.506	1.248	1,248	$i-0.5$	$A(A-2/\pi)$	$B$
$C-F$	0.597	0.087	0.471	1.494	1.347	3.284	$i-0.5$	$A(A-2/\pi)$	$A(A+2/\pi)$
$F-F$	0	0	$12/\pi^2$	1.506	1.248	5.017	$i-0.5$	$A(A-2/\pi)$	$A(A+6/\pi)$

**Пример 5.3.** Рассчитать первые две собственные частоты колебаний жестко заземленной по контуру прямоугольной платы с размерами  $a=0,16$ м,  $b=0,17$ м и толщиной  $H=0,0015$ м. Материал платы – стеклотекстолит,  $E=3 \cdot 10^{10}$ Па,  $\sigma=0,22$ ,  $\rho=2,05 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Масса ЭРЭ на плате равна 0,093 кг.

**Р е ш е н и е.** По формуле (5.2) находим цилиндрическую жесткость

$$D = \frac{3 \cdot 10^{10} (1,5 \cdot 10^{-3})^3}{12(1 - 0,22^2)} = 8,87 \text{ Н/м}.$$

Учитывая, что на первой СЧК в направлениях  $X$  и  $Y$  имеются по две узловые линии (в местах крепления), по формуле (5.15), используя табл. 5.1 для случая  $i=f=2$ , находим

$$\alpha_{22} = 3,14^2 \sqrt{1,506^4 + 1,506^4 \cdot \left(\frac{0,16}{0,17}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{0,16}{0,17}\right)^2 \times \dots}$$

$$\dots \times [0,22 \cdot 1,248^2 + (1 - 0,22) \cdot 1,248^2] = 34,07.$$

По формуле (5.13) находим

$$f_{01} = \frac{34,91}{2\pi \cdot 0,16^2} \sqrt{\frac{8,87}{2,05 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} + \frac{0,093}{0,16 \cdot 0,17}}} = 352,8 \text{ Гц}$$

Для второй СЧК  $i=2, f=3$ . Находим

$$\alpha_{23} = \pi^2 \sqrt{1,25^4 + 2,25^4 \cdot 0,94^4 + 2 \cdot 0,94^2 \times \dots}$$

$$\dots \times [0,22 \cdot 1,248 \cdot 4,66 + (1 - 0,22) \cdot 1,248 \cdot 4,66] = 56,46$$

$$f_{02} = 56,46 \cdot 7,4 = 417,8 \text{ Гц}.$$

Как отмечалось в 1.2(ч.1), способы крепления конструкций плат часто отличаются от принимаемых моделей в виде свободного опирания, жесткого защемления и т.п. Наиболее точно реальным условиям обычно соответствует упругое закрепление с тем или иным коэффициентом упругости защемления  $C$ , который, как правило, неизвестен.

На рис.5.5. показана зависимость коэффициента  $\alpha$  от безразмерного коэффициента защемления [5]  $C_* = Ca/2D$  для прямоугольной пластины.

Причем случай, когда  $C_* = 0$  соответствует свободному опиранию, а при  $C_* \rightarrow \infty$  имеем случай жесткого защемления. На основе рис. 5.5 можно сделать следующий вывод: если коэффициент упругости защемления неизвестен, целесообразно принять  $1/C_* = 0,25$ . В этом случае относительная ошибка определения собственной частоты колебаний не превысит 50% при низких собственных частотах

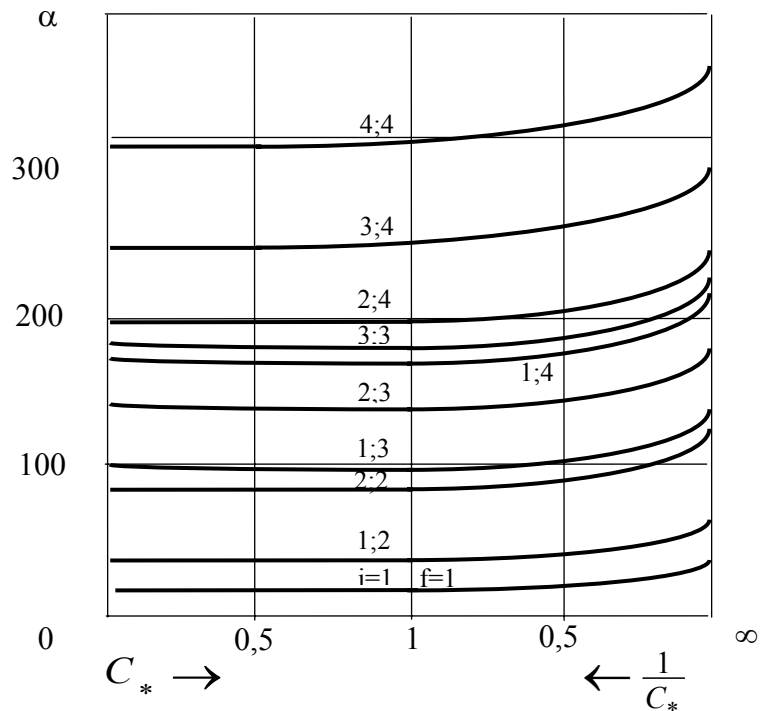
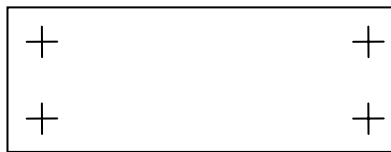


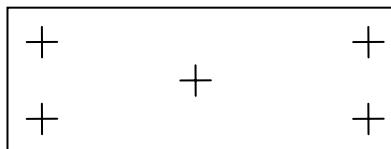
Рис. 5.5. Зависимость частотного коэффициента  $\alpha$  от безразмерного коэффициента защемления  $C_*$  ( $i, f$ —число полувольт в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно)

( $i = 1; f = 1$ ) и 15% при высоких собственных частотах ( $i = 4; f = 4$ ). Можно определить интервал, в котором будет находиться собственная частота колебаний, сделав расчет для случая свободного опирания (нижний предел) и жесткого защемления (верхний предел). Если указанная точность недостаточна, собственную частоту колебаний определять экспериментально, в других случаях, когда сосредоточенная масса расположена не в центре платы или их несколько, необходимо обратиться к специальной литературе [5]. Там же можно найти расчет СЧК пластин, свободно опертых по контуру и в отдельных точках внутри области, а также прямоугольных пластин переменной толщины.



В случае точечного крепления плат (рис. 5.6) СЧК рассчитывается по формуле [15].

$$f_0 = 1,57 \left( A + \frac{1}{b^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$$



где  $A=1/a^2$ , для четырехточечного закрепления;  $A=4/(a^2+b^2)$ , пятиточечного закрепления;  $A=2,5/a^2$ , шеститочечного закрепления. Для расчета прямоугольной пластины, жестко защемленной по контуру, можно использовать табл. 5.2. [5]. Для расчета собственных частот колебаний съемных оснований электронных модулей (ЭМ), крепящихся в направляющих, можно использовать формулы из табл. 5.3 [15].

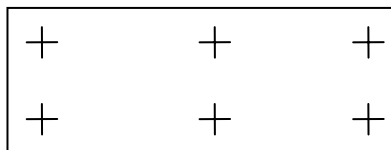


Рис. 5.6. Точечное крепление плат

**Пример 5.4.** Рассчитать собственные частоты колебаний ЭМ, вставляемого в направляющие, в диапазоне до 800 Гц. Материал печатной платы стеклотекстолит марки СТЭФ. Общая масса ЭРЭ, равномерно расположенных по площади ПП с размерами ( $1,22 \times 140 \times 140$ ) мм, равна 0,05 кг.

Для стеклотекстолита СТЭФ из табл. П.1 находим  $E=3,02 \cdot 10^{10}$  Па,  $\rho=2,05 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu=0,22$ . Рассчитываем по формуле (5.2) цилиндрическую жесткость:

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} \cdot (1,22 \cdot 10^{-3})^3}{12(1-0,22^2)} = 4,8 \text{ Н/м};$$

Приведенная к единице площади масса платы и ЭРЭ

$$m = \rho H + \frac{m_{\text{э}}}{ab} = 2,05 \cdot 10^3 \cdot 1,22 \cdot 10^{-3} + \frac{0,05}{0,14^2} = 5,05 \text{ кг/м}^2.$$

Так как на сторонах платы, не входящих в направляющие, расположены колодка и вилка разъема, жесткости которых значительно больше жесткости ПП, то создается.

Т а б л и ц а 5.2

Частотный коэффициент  $\alpha_i$  заземленной по контуру  
прямоугольной пластины

Число полуволн по оси Y $m_2$	Отношение сторон $a/b$	Число полуволн по оси X $m_1$		
		1	2	3
1	1	36.0	73.4	131.9
	1.5	27.0	65.5	126
	2	24.6	64.1	124
2	1	73.4	108.2	165
	1.5	41.7	79.8	138.6
	2	31.8	71.1	130.4
3	1	131.9	165	220.1
	1.5	66.5	103	161.2
	2	44.8	83.2	142.4

Т а б л и ц а 5.3

## СЧК прямоугольных плат в направляющих

Размер основания $a \times b$ , мм	Собственная частота, Гц	Размер основания $a \times b$ , мм	Собственная частота, Гц
170 × 75	$\frac{2 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + \frac{m_3}{m_n}}}$	170 × 200	$\frac{0,65 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + \frac{m_3}{m_n}}}$
170 × 150	$\frac{1,17 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + \frac{m_3}{m_n}}}$	170 × 280	$\frac{0,33 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + \frac{m_3}{m_n}}}$

неопределенность в выборе расчетной модели. В этом случае целесообразно провести расчет СЧК для крайних случаев – свободного опирания и жесткого заземления.

Истинные значения СЧК будут находиться между расчетными значениями СЧК. По формуле (5.6) для свободного опирания найдем:

$$\alpha_1=9,87(1+1)=19,74; \alpha_2=9,87(2^2+1)=49,35; \alpha_3=9,87(2^2+2^2)=78,96;$$

и СЧК  $f_{01} = \frac{19.74}{6.82 \cdot 0.14^2} \sqrt{\frac{4.8}{5.05}} = 144 \text{ Гц}; f_{02} = 360 \text{ Гц}; f_{03} = 576 \text{ Гц}$

Используя табл.5.2 для случая жесткого защемления по контуру, получим

$$\alpha_1(m_1 = 1, m_2 = 1) = 36,0; \alpha_2(2,1) = 73,4; \alpha_3(2,2) = 108,2,$$

и СЧК

$$f_{01} = 36 \cdot 7,29 = 263 \text{ Гц}; f_{02} = 73,4 \cdot 7,29 = 535 \text{ Гц}; f_{03} = 789 \text{ Гц}.$$

Следовательно, для рассчитываемой конструкции получим следующие значения:

$$\begin{aligned} 144 &\leq f_{01} \leq 263 \text{ Гц}; & f_{01\text{ср}} &= 204 \text{ Гц}; \\ 360 &\leq f_{02} \leq 535 \text{ Гц}; & f_{02\text{ср}} &= 448 \text{ Гц}; \\ 576 &\leq f_{03} \leq 789 \text{ Гц}; & f_{03\text{ср}} &= 683 \text{ Гц}. \end{aligned}$$

Для сложных случаев расчета, не описанных в настоящем пособии, необходимо применить машинные системы расчета, основанные на методе конечных разностей (МКР), или методе конечных элементов (МКЭ). Широко известны, например, системы "ANSYS", "COSMOS" и др.

**Однослойные ортотропные пластины.** СЧК ортотропных прямоугольных пластин рассчитывается по формуле

$$f_0 = \frac{1,57\alpha}{b^2} \sqrt{\frac{D_1}{m}},$$

где частотные коэффициенты  $\alpha$  находятся по формулам из табл. 5.4. [10].

$$D_1 = E_1 H^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2); \quad D_3 = D_2 \nu_1 + 2D_k;$$

$$D_2 = E_2 H^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2); \quad D_k = GH_3 / 12;$$

$$\xi = b/a,$$

В этих формулах:

где  $E_1, E_2$  – модули упругости в направлении осей  $X$  и  $Y$ ;  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона в направлении осей  $X$  и  $Y$ ;  $G$  – модуль сдвига.

**Платы с ребрами жесткости.** Пример конструкции платы с ребром жесткости приведен на рис. 5.7. Необходимо учитывать, что ребра жесткости эффективны только при правильном их использовании. Главное требование – ребра жесткости должны жестко крепиться не только к плате, жесткость которой они повышают, но и к опорам конструкции.

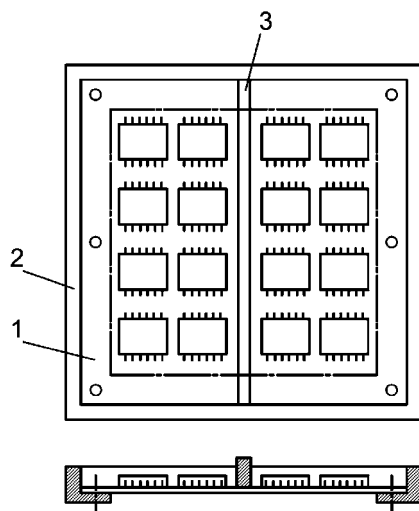


Рис. 5.7. Ячейка с ребром жесткости:

1 – плата; 2 – рама;

3 – ребро жесткости.

В [12] приведены формулы, полученные энергетическим методом, для расчета собственных частот пластин с ребрами жесткости. Для прямоугольной пластины, свободно опертой по контуру и имеющей ребра жесткости, параллельные осям координат,



$$\omega^2 = \frac{\pi^4 B_y}{b^3 M_y} \frac{n^4 + \frac{r+1}{k+1} \mu^4 m^4 \frac{B_x}{B_y} + \frac{\alpha_1}{k+1} (m^2 \mu^2 + n^2)^2}{1 + \frac{r+1}{k+1} \frac{M_x}{M_y} + \frac{m_{\Pi}}{(k+1)M_y}},$$

где  $\alpha_1 = aD/B_y$ ;  $\mu = b/a$ ;  $a, b$  – длина и ширина пластины;  $B_x, B_y$  – жесткости ребер, параллельных осям  $x$  и  $y$  соответственно;  $M_x, M_y$  – их массы;  $r, k$  – число ребер параллельных осям  $x$  и  $y$  соответственно;  $m_{\Pi}$  – массы пластины;  $m, n$  – числа полуволн в направлении осей  $x$  и  $y$ ;  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины.

Если ребра, параллельные оси  $y$ , отсутствуют, то:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4 B_x}{a^3 M_x} \frac{m^4 + \frac{aD}{B_x(r+1)\mu^3} (m^2 \mu^2 + n^2)^2}{1 + \frac{m_{\Pi}}{(r+1)M_x}}. \quad (5.16)$$

Для оценки эффективности применения ребер жесткости, рассмотрим пример.

**Пример 5.5.** Определить, во сколько раз повысится первая собственная частота колебания свободно опертой по контуру ячейки, показанной на рис. 5.8, если для повышения ее жесткости применено ребро жесткости из дюралюминия Д16 с размерами поперечного сечения  $2 \times 5$  мм. Плата, имеющая размеры  $1 \times 100 \times 100$  мм, выполнена из стеклотекстолита. Для дюралюминия модуль упругости  $E = 7,2 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, плотность  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; для стеклотекстолита  $E = 3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho = 2,05 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,22$ . Масса элементов  $m$ , равна массе платы  $m_{\Pi}$ . Собственная частота платы без ребер жесткости  $f = 297$  Гц.

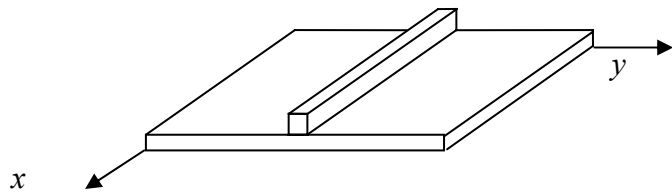


Рис. 5.8. Плата с ребром жесткости

*Решение.* Рассчитываем  $B_x, D$ :

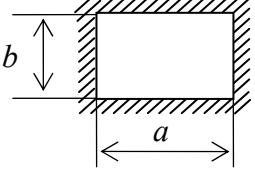
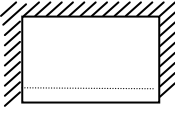
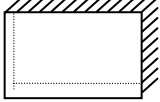
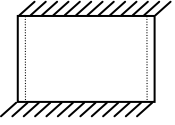
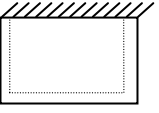

$$B_x = E \frac{b \cdot H^3}{12} = 7,2 \cdot 10^{10} \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot (5 \cdot 10^{-3})^3}{12} = 1,5 \text{ Н/м}^2$$

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot (10^{-3})^3}{12(1-0,22^2)} = 2,63 \text{ Н/м}^2$$

$$M_x = \rho H b a = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$m_{\Pi} = \rho H a b = 2,05 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} = 0,021 \text{ кг}$$

Частотный коэффициент  $\alpha$ 

Схема крепления	$\alpha$
	$\left\{ 4,5\xi^4 + 2\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 4,5 \frac{D_2}{D_1} \right\}^{0,5}$
	$\left\{ 4,5\xi^4 + 4\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 7 \frac{D_2}{D_1} - 2 \left[ 5,5 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 + \xi^4 + \left( \frac{D_k}{D_1} \right)^2 + 4,25\xi^2 \frac{D_k D_1}{D_1^2} \right] \right\}^{0,5}$
	$\left\{ 1,44 \left[ \xi^4 + \xi^2 \frac{D_k}{D_1} + \frac{D_2}{D_1} \right] \right\}^{0,5}$
	$\left\{ \xi^4 + 2\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 4,5 \frac{D_2}{D_1} \right\}^{0,5}$
	$\left\{ \xi^4 + 4\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 7 \frac{D_2}{D_1} - 2 \left[ 5,5 \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 + \xi^4 \frac{D_k}{D_1} + 4,25\xi^2 \frac{D_k D_2}{D_1^2} \right] \right\}^{0,5}$
	$\left\{ 1,1\xi^4 + 2,09\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + \frac{D_2}{D_1} \right\}^{0,5}$

$$\omega^2 = \frac{3,14^4 \cdot 1,5}{0,1 \cdot 2,7 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1 + \frac{0,1 \cdot 2,63}{1,5 \cdot 2} \cdot 4}{1 + \frac{2 \cdot 0,021}{2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-3}}} = 8,5 \cdot 10^6$$

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{8,5 \cdot 10^6}}{2 \cdot 3,14} = 464 \text{ Гц.}$$

Расчет для сравнения по формуле (5.13) показывает, что применение ребра жесткости повышает первую собственную частоту в 1,56 раза.

**Многослойные пластины.** Расчет ведется по формуле (5.13). Особенности расчета заключаются в определении цилиндрической жесткости  $D$  и плотности, которая приводится к однородной однослойной пластине [9].

Приведенная цилиндрическая жесткость пластины определяется по формуле

$$D = \frac{1}{3 \cdot (1 - \nu^2)} \sum_{i=1}^n \bar{E}_i \left[ \left( Z_0 - \sum_{k=1}^{i-1} h_k \right)^3 - \left( Z_0 - \sum_{k=1}^i h_k \right)^3 \right],$$

где  $Z_0$  – расстояние нейтральной поверхности платы от верхней граничной поверхности, определяемой по формуле:

$$Z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{E}_i h_i \left( 2 \sum_{k=1}^i h_k - h_i \right)}{2 \sum_{i=1}^n \bar{E}_i h_i}, \quad (5.17)$$

где  $\nu = \frac{\sum_{i=1}^n \nu_i \bar{E}_i h_i}{\sum_{i=1}^n \bar{E}_i h_i}$  – приведенный коэффициент поперечного сжатия;  $\bar{E}_i = E_i (1 - \nu_i^2)$  – эффективный модуль упругости слоя;  $E_i$ ,  $\nu_i$ ,  $h_i$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина слоя материала  $i$ -го слоя.

Приведенная плотность пластины определяется по формуле:

$$\bar{\rho} = \sum \rho_i h_i / \sum h_i,$$

где  $\rho_i$  – плотность материала  $i$ -го слоя.

**Пример 5.6.** Вычислить собственную частоту четырехслойной платы, имеющей схему поперечного сечения, показанную на рис.5.9. Прямоугольная плата с размерами  $170 \times 110 \times 1,4$  мм, закрепляемая в углах четырьмя шпильками М3, с трех сторон поддерживается пружинами - теплоотводами, к четвертой стороне подсоединены плоские

кабели, имеющие малую жесткость. Поэтому четвертую сторону можно считать свободной.

В первом приближении такую конструкцию можно считать прямоугольной пластиной, опертой по трем сторонам и свободной по четвертой (рис. 5.10). Такое допущение

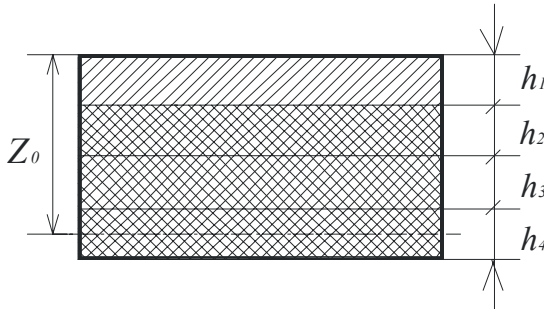


Рис. 5.9. Поперечное сечение платы

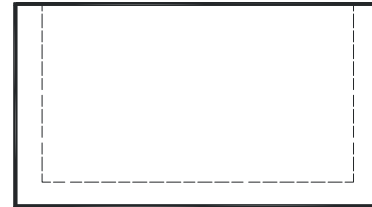


Рис. 5.10. Схема крепления платы

ние позволяет вычислить первую собственную частоту, значение которой будет приближенным, но достаточно точным для практики.

Плата состоит из четырех слоев, содержащих два материала - медь и стеклотекстолит, имеющих следующие характеристики:

- для меди:  $E_1 = 13,2 \cdot 10^6$  Н/см<sup>2</sup>;  $\nu_1 = 0,3$ ;  $\rho_1 = 8,9 \cdot 10^{-3}$  кг/см<sup>3</sup>;  $h_1 = 0,2$  мм;
- для стеклотекстолита:  $E_{2,3,4} = 3,3 \cdot 10^6$  Н/см<sup>2</sup>;  $\nu_{2,3,4} = 0,25$ ;  $\rho_{2,3,4} = 2,4 \cdot 10^{-3}$  кг/см<sup>3</sup>;  $h_2 = h_3 = 0,1$  мм;  $h_4 = 1$  мм.

Расчетные значения эффективного модуля упругости будут:

$$\bar{E}_1 = \frac{13,2 \cdot 10^6}{1 - 0,3^2} = 14,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2;$$

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_3 = \bar{E}_4 = \frac{3,3 \cdot 10^6}{1 - 0,25^2} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2.$$

Приведенный коэффициент поперечного сжатия

$$\nu = \frac{0,3 \cdot 14,5 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 3,5 \cdot (0,01 + 0,01 + 0,1)}{(14,5 \cdot 0,02 + 3,5 \cdot 0,12) \cdot 10^6} = 0,27.$$

Расстояние  $Z_0$  до нейтральной поверхности вычисляется по формуле (5.17), которую в рассматриваемом примере запишем в развернутом виде:

$$Z_0 = \frac{\bar{E}_1 h_1^2 + \bar{E}_2 [2h_1(h_2 + h_3 + h_4) + 2h_2(h_3 + h_4) + 2h_3 h_4 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2]}{2[\bar{E}_1 h_1 + \bar{E}_2 (h_2 + h_3 + h_4)]}.$$

Подставив в это выражение расчетные значения величин и произведя арифметические вычисления, найдем

$$Z_0 = \frac{(5,7 + 67) \cdot 10^{-4}}{(58 + 84) \cdot 10^{-3}} \approx 0,052 \text{ см.}$$

Соответственно значение приведенной изгибной жесткости будет равно:

$$D = \frac{1}{3 \cdot 0,927} [14,5 \cdot 114 + 3,5 \cdot (23,8 + 10 + 662,2)] = 1470 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

Приведенная плотность платы вычисляется для двух материалов - меди и стеклотекстолита:

$$\rho = \frac{8,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,02 + 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,12}{0,14} = 3,34 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3.$$

Для пластины, показанной на рис. 5.9, с учетом данных табл. ПЗ «Частотный коэффициент», найдем:

$$\alpha = 9,87 \sqrt{1 + 0,43 \frac{a^2}{b^2}} = 9,87 \sqrt{1 + 0,43 \left(\frac{179}{110}\right)^2} = 14,43$$

Первая собственная частота по формуле (5.13)

$$f_{01} = \frac{14,06}{2\pi \cdot 0,17^2} \sqrt{\frac{14,7}{3,34 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-3}}} = 140,97 \text{ Гц.}$$

## 5.2. ЧАСТОТНАЯ ОТСТРОЙКА КАК СПОСОБ БОРЬБЫ С РЕЗОНАНСНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Как отмечалось в 1.3(ч.1), повышение жесткости элементов конструкции РЭА необходимо для смещения спектра собственных частот колебаний в более высокочастотную область. Из формулы Рэлея – Ритца видно, что влиять на спектр собственных частот колебаний можно изменением геометрических размеров плат, способов их крепления, материала, конфигурации и массы конструкции. Наибольшее применение в настоящее время находит изменение способов крепления, площади и толщины плат, а также применение ребер жесткости. Дадим оценку эффективности этих способов.

**Влияние способов крепления.** Для оценки возможностей этого способа рассмотрим, например, влияние способов крепления на квадратные платы. На рис. 5.11 приведено четыре способа крепления плат и соответствующие им частотные коэффициенты  $\alpha$ . Видно, что изменение свободного опирания на жесткое заземление увеличивает первую собственную частоту колебаний примерно в 1,8 раза.

Влияние способов крепления, в том числе и точечного, на три первые собственные частоты колебаний прямоугольных плат из эпоксидного

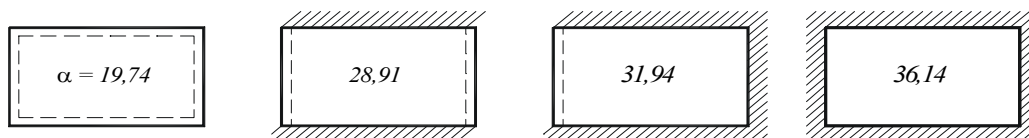


Рис. 5.11. Коэффициенты  $\alpha$  для различных способов крепления плат

стеклопластика размером  $2,54 \times 10 \times 15,25$  мм показано на рис.5.12 [4]. Видно, что увеличение точек крепления с четырех (случай 6) до семи (случай 13) повышает первую собственную частоту колебаний немногим более чем в три раза. Влияние увеличения точек крепления на вторую и третью частоты еще меньше.

**Влияние площади и толщины плат.** Для оценки влияния площади электромонтажных плат на собственные частоты приведем пример из [1], где даны графики, показывающие зависимость частот собственных колебаний различных плат от их площади при 4-точечном закреплении. На рис.5.13 для примера приведен такой график для квадратных стеклотекстолитовых плат толщиной  $1,5 \cdot 10^{-3}$  м.

Из графика на рис.5.13 видно, что при уменьшении площади платы с

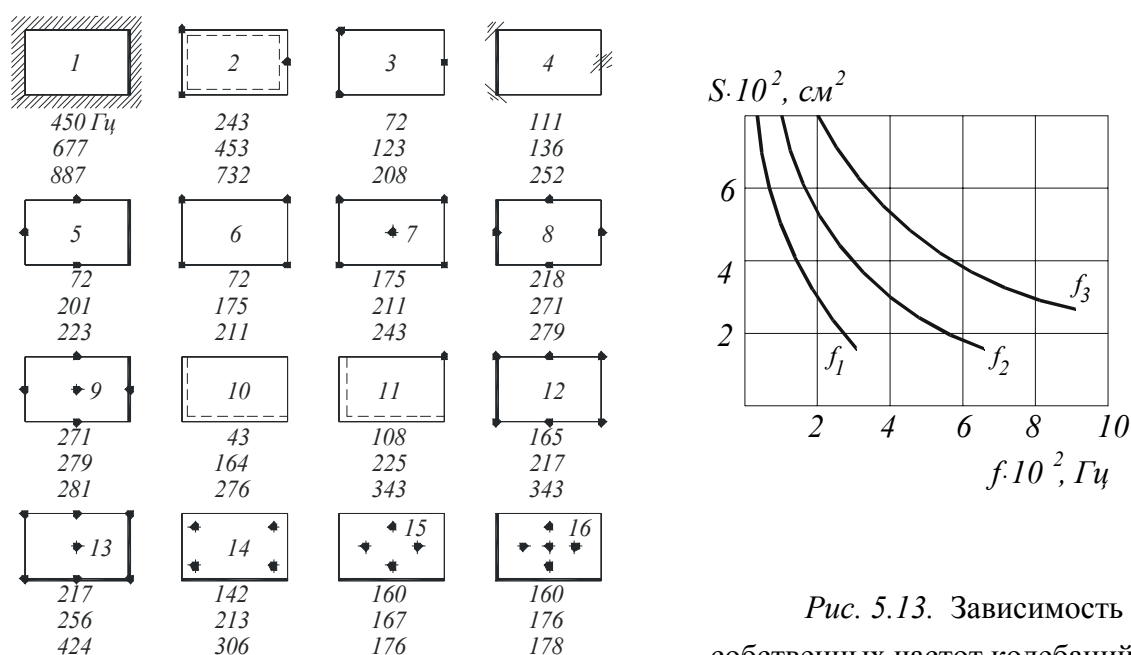


Рис. 5.12. Способы крепления плат

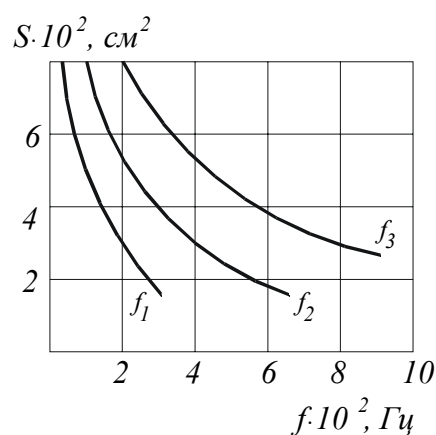


Рис. 5.13. Зависимость собственных частот колебаний от площадей плат

500 до 200  $\text{см}^2$  частота первого тона увеличивается с 100 до 250 Гц, частота второго тона с 200 до 550 Гц. Это связано с увеличением жесткости платы.

Таким образом, уменьшая площадь платы, мы смещаем весь спектр собственных частот в более высокую область.

Для монтажных плат с установленными на них микросхемами сохраняется примерно та же зависимость собственных частот от площадей плат, что и рассмотренная выше. Следовательно, при конструировании плат с высокими собственными частотами конструктор сталкивается с нежелательным уменьшением монтажного пространства, необходимого для размещения элементов монтажа.

Рассмотрим влияние толщины плат на собственные частоты колебаний, для чего воспользуемся формулой Рэлея – Ритца. Как отмечалось ранее, формулу Рэлея – Ритца можно записать в виде (5.14)

$$f = 10^5 K_m K_{ЭРЭ} BH / a^2.$$

Из формулы следует, что увеличение толщины платы изменяет в сторону увеличения собственную частоту. Однако при этом увеличивается масса платы, что является нежелательным, особенно для аппаратуры летательных аппаратов.

На рис. 5.14 приведен график зависимости относительной собственной частоты от относительной толщины платы.

Видно, что увеличение толщины платы существенно повышает собственную частоту, но при этом значительно возрастает и масса конструкции. Так, в рассмотренном примере повышение толщины платы в четыре раза увеличит массу ячейки в три раза.

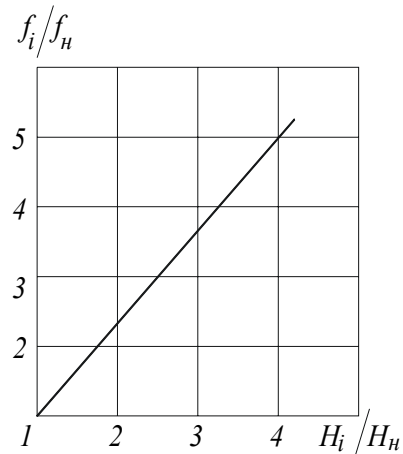


Рис. 5.14. Зависимость относительного повышения собственной частоты колебаний от относительного увеличения толщины платы ( $f_n, H_n$  – начальные значения собственной частоты и толщины платы)

### 5.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ПЛАСТИН

**Определение амплитуд колебаний при гармоническом воздействии.** Уравнение вынужденных колебаний конструкций типа пластин зависит от принимаемой гипотезы о силе неупругого сопротивления. Если эти силы принимаются пропорциональными деформации, то уравнение движения имеет вид [12]

$$m_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + D(1 + j\eta) \left( \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) = P(x, y, t), \quad (5.18)$$

где  $m_0$  – масса, приходящаяся на единицу площади платы.

Решим уравнение (5.18), используя метод разложения функций в ряд по собственным формам колебаний. В соответствии с этим методом форму колебаний можно представить в виде:

$$z = z(x, y, t) = \sum_{i, f=1}^{\infty} a_{if}(t) w_{if}(x, y), \quad (5.19)$$

где коэффициенты  $a_{if}(t) = A_{if} e^{j\omega t}$ , а  $w_{if}(x, y)$  – собственные формы колебаний, удовлетворяющие однородному уравнению:

$$-m_0 \omega_0^2 w + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0. \quad (5.20)$$

Функцию  $P(x, y, t)$  также разложим в ряд по собственным формам колебаний:

$$P(x, y, t) = \sum_{i, f=1}^{\infty} b_{if}(t) w_{if}(x, y), \quad (5.21)$$

где  $b_{if}(t) = B_{if} e^{j\omega t}$ .

Величину  $B_{if} e^{j\omega t}$  найдем из следующих соображений. Умножим обе части выражения  $P(x, y, t) = \sum_{i, f=1}^{\infty} b_{if}(t) w_{if}(x, y)$  на собственную форму колебаний  $w_{if}(x, y)$  и проинтегрируем их по площади пластины:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} P(x, y) w_{if}(x, y) dS &= \iint_{(S)} B_{if} w_{if}(x, y) w_{if}(x, y) dS + \dots + \\ &+ \iint_{(S)} B_{if} w_{if}^2(x, y) dS + \dots \end{aligned}$$

Из условия ортогональности собственных форм колебаний следует, что при  $if \neq mn$  имеем

$$\iint_{(S)} w_{if}(x, y) w_{mn}(x, y) dS = 0.$$

Следовательно,

$$B_{if} = \frac{\iint_{(S)} P(x, y) w_{if}(x, y) dS}{\iint_{(S)} w_{if}^2(x, y) dS}. \quad (5.22)$$

Подставив (5.19) и (5.20) в уравнение (5.18) вынужденных колебаний, после несложных преобразований получим



$$\begin{aligned}
& m_0 \sum_{i,f=1}^{\infty} (j\omega)^2 a_{if}(t) w_{if}(x,y) + D(1+j\eta) \times \\
& \times \left[ \sum_{i,f=1}^{\infty} k_i^4 a_{if}(t) w_{if}(x,y) + 2 \sum_{i,f=1}^{\infty} k_i^2 k_f^2 a_{if}(t) w_{if}(x,y) + \sum_{i,f=1}^{\infty} k_f^4 a_{if}(t) w_{if}(x,y) \right] = \\
& = \sum_{i,f=1}^{\infty} b_{if}(t) w_{if}(x,y).
\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых  $w_{if}(x,y)$  справа и слева, найдем:

$$m_0 a_{if}(t) \left[ -\omega^2 + (D/m_0)(1+j\eta)(k_i^2 + k_f^2)^2 \right] = b_{if}(t).$$

Учитывая, что  $k_{if}^2 = k_i^2 + k_f^2$  и круговая  $if$ -я собственная частота колебаний  $\omega_{0if} = k_{if}^2 \sqrt{D/m}$ , получим:

$$a_{if}(t) = \frac{b_{if}(t)}{m_0(\omega_{0if}^2 - \omega^2 + j\eta_{if}\omega_{0if}^2)}. \quad (5.23)$$

Подставляя выражение (5.23) в разложение (5.19) найдем:

$$z(x,y,t) = \sum_{i,f=1}^{\infty} \frac{b_{if}(t) w_{if}(x,y)}{m_0(\omega_{0if}^2 - \omega^2 + j\eta_{if}\omega_{0if}^2)}. \quad (5.24)$$

Считая, что пластина возбуждается кинематически, и применяя те же рассуждения, что и в 4.2 (ч.1), получим следующие выражения для коэффициентов передачи по перемещению и ускорению:

$$\mu_{if,z/\ddot{Z}}(x,y) = \frac{z(x,y,t)}{\ddot{Z}_A(t)} = \sum_{i,f=1}^{\infty} \frac{K_{if}(x,y)}{\omega_{0if}^2 \sqrt{(1-v_{if}^2)^2 + \eta_{if}^2 v_{if}^2}}; \quad (5.25)$$

$$\mu_{if,z/\ddot{Z}}(x,y) = \frac{\ddot{z}(x,y,t)}{\ddot{Z}_A(t)} = \sum_{i,f=1}^{\infty} \frac{K_{if}(x,y)}{\sqrt{(1-v_{if}^2)^2 + \eta_{if}^2 v_{if}^2}}, \quad (5.26)$$

где  $v_{if} = \omega/\omega_{0if}$ .

При резонансе:

$$\mu_{if,z/\ddot{Z}}(x,y) = \frac{K_{if}(x,y)}{\omega_{0if}^2 \eta_{if}}; \quad (5.27)$$

$$\mu_{if,z/\ddot{Z}}(x,y) = \frac{K_{if}(x,y)}{\eta_{if}}. \quad (5.28)$$

Заметим, что формулы (5.25), (5.26) справедливы и в случае, если сила неупругого сопротивления принимается пропорциональной скорости.

В (5.23) – (5.26) коэффициент

$$K_{if}(x,y) = \frac{\iint_{(S)} w_{if}(x,y) dS}{\iint_{(S)} w_{if}^2(x,y) dS} w_{if}(x,y) \quad (5.29)$$

можно найти по формуле

$$K_{if}(x,y) = K_i(x)K_f(y),$$

где  $K_i(x)$  и  $K_f(y)$  берутся из табл. П.5.

Для абсолютного ускорения, по аналогии с формулой (4.32) для балок получим

$$\mu_{if} = \ddot{Z}_{\text{абс}} / \ddot{Z}_0(x) = \sqrt{\frac{K_{if}^2(x,y)}{\eta_{if}^2} + 1} \quad (5.30)$$

**Пример 5.7.** Определить первую собственную частоту колебаний и виброускорение на этой частоте в точке ячейки (рис.5.15) с координатами  $\xi_x = x/a = 0,25$  и  $\xi_y = y/b = 0,35$ . На ячейку, вставляемую в пазы корпуса блока, действует в направлении, перпендикулярном плоскости платы, гармоническая вибрация с ускорением  $5g$ . Материал платы стеклотекстолит марки СТЭФ-1, общая масса элементов  $0,05$  кг. Коэффициент механических потерь  $\eta=0,05$ .

**Решение.** Так как на двух противоположных сторонах расположены колодка

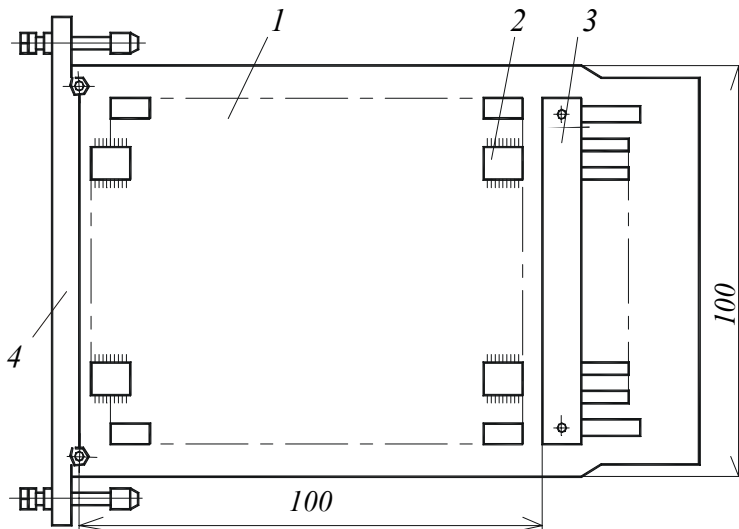


Рис. 5.15. Ячейка РЭА:

1 – плата печатная; 2 – микросхема; 3 – вилка разъема; 4 – колодка для контроля

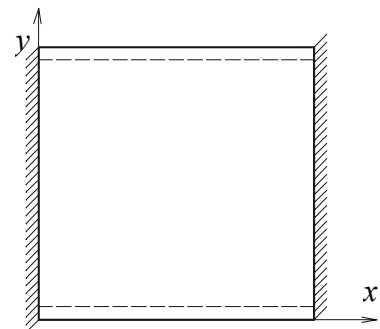


Рис. 5.16. Расчетная модель ячейки РЭА

и вилка разъема, жесткость которых значительно больше жесткости платы, а две другие стороны соприкасаются с направляющими, то в качестве модели для расчета можно принять пластину, у которой две противоположные стороны жестко заземлены, а две свободно оперты (рис. 5.16).

Для расчета воспользуемся формулой Рэлея–Ритца (5.13):

$$f_1 = (\alpha_1 / 2\pi a^2) \sqrt{D / m_0} K_{\text{ЭРЭ}}$$

Для указанного способа крепления  $\alpha_1 = 29$ . Для материала СТЭФ с печатной схемой (табл. П1):

$$H = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}, E = 3,02 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \rho = 2,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

Рассчитываем цилиндрическую жесткость

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\sigma^2)} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} (1,22 \cdot 10^{-3})^3}{12(1-0,22^2)} = 4,8 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Масса ЭРЭ, приведенная к единице площади платы

$$m_{\text{э}} = 0,05 / ab = 0,05 / (0,1 \cdot 0,1) = 5 \text{ кг/м}^2.$$

Коэффициент, учитывающий массу ЭРЭ,

$$K_{\text{ЭРЭ}} = 1 / \sqrt{1 + \frac{m_{\text{э}}}{m_0}} = 1 / \sqrt{1 + \frac{5}{2,05 \cdot 10^3 \cdot 1,22 \cdot 10^{-3}}} = 0,58.$$

Находим первую собственную частоту колебаний:

$$f_1 = \frac{29 \cdot 0,58}{6,28 \cdot 0,1^2} \sqrt{\frac{4,8}{2,5}} = 371 \text{ Гц}.$$

Коэффициент передачи на первой собственной частоте рассчитывается по формуле (5.30)

$$\mu_{11}(x, y) = \frac{\sqrt{\ddot{Z}_{01}(x, y) + \ddot{Z}_{0A}}}{\ddot{Z}_{0A}} = \sqrt{\frac{K_{11}^2(x, y)}{\eta_{11}^2} + 1},$$

$$\text{где } K_{11}(x, y) = \frac{\iint_{(S)} w_{11}(x, y) dS}{\iint_{(S)} w_{11}^2(x, y) dS} \quad \omega_{11}(x, y) = \frac{\int_0^a w_1(x) dx \int_0^b w_1(y) dy}{\int_0^a w_1^2(x) dx \int_0^b w_1^2(y) dy} w_1(x) w_1(y)$$

Из табл. П.4 находим:

$$\int_0^a w_1(x) dx = 0,84a; \int_0^b w_1(x) dx = 0,64b;$$

$$\int_0^a w_1^2(x) dx = 1,04a; \int_0^b w_1^2(x) dx = 0,5b.$$

Для точки платы с заданными координатами, используя табл.П.2, получим:

$$w_1(x/a) = w_1(0,25) = \sin 1,183 - 1,018 \cos 1,183 - \text{sh}1,183 + 1,018 \text{ch}1,183 = 0,88$$

$$w_1(x/b) = w_1(0,35) = \sin 1,1 = 0,89; w_{11}(x, y) = 0,88 \cdot 0,89 = 0,784$$

Значения этих функций могут выбираться также из табл. П. 6.

$$\text{Находим коэффициент передачи: } \mu_{11}(0,25;0,35) = \sqrt{\left(\frac{0,84 \cdot 0,64 \cdot 0,784}{0,05 \cdot 0,52}\right)^2 + 1} = 16,2,$$

и виброускорение:

$$\ddot{z}_{0,abc}(0,25;0,35) = 5g \cdot 16,2 = 81g.$$

Как видно из допущений, принимаемых при выводе формул (5.27), (5.28), они могут быть использованы для расчета конструкций типа прямоугольных пластин, имеющих однородные краевые условия, типа свободно-опирания по всему краю, жесткого защемления и т.п. Анализ конструктивных форм и способов крепления плат в ячейке РЭА, многие из которых приведены в [15], показывает, что прямоугольная форма монтажной платы наиболее типична. Однородность краевых условий также часто выполняется, но способы крепления плат (например, винтами к раме по всему контуру или путем установки в направляющие) не соответствуют строго типовым – свободному опиранию или жесткому защемлению. Как отмечалось, замена реальных условий крепления краев идеализированными приведет к ошибке определения собственной частоты колебаний, значение которой было оценено в 4.1 (ч.1) и к ошибке определения коэффициента формы колебаний.

Анализ показывает, что наибольшая ошибка определения коэффициента  $K(x,y)$  возможна в том случае, если на краях способы крепления различны и трудно ответить на вопрос о том, у какого края жесткость защемления больше. Это обусловлено тем, что форма колебаний будет несимметрична – происходит смещение максимума амплитуды виброперемещения в сторону края с меньшей жесткостью защемления. В этом случае расчет амплитуд целесообразно вести при максимально возможных, т.е. наилучших для предполагаемых способов крепления коэффициентах  $K(x,y)$ .

В заключение отметим, что аналитические методы расчета собственных частот и резонансных амплитуд колебаний имеют преимущества перед другими способами, так как решение получается в виде математического выражения, удобного для анализа и решения оптимизационных задач. Расчет на ЭВМ при этом, как правило, не требует больших затрат машинного времени. Эти методы удобны при расчете прямоугольных плат, имеющих равномерное размещение элементов по площади платы и однородные по каждому из краев способы крепления. Равномерно расположенные по площади платы микросхемы не искажают существенно ее собственную форму колебаний. Влияние на СЧК повышения жесткости платы за счет жесткости ЭРЭ в значительной степени компенсируется тем, что ЭРЭ увеличивают и массу ячейки. Следует учитывать, что повышение же-

сткости ячейки зависит от способа крепления электрорадиоэлементов на плате – только за выводы или же корпус дополнительно крепится к плате.

Аналитические методы расчета можно успешно также применить при расчете колебаний конструкций типа плоских или коробчатых экранов, обшивки корпусов блоков, стоек и других плоских конструкций.

Если конструкция имеет сложную форму, неравномерное расположение элементов, неоднородные способы крепления, вырезы, аналитические методы не всегда применимы, так как не удастся подобрать собственную форму колебаний, удовлетворяющую граничным условиям. В этих случаях широко применяют методы конечных разностей, конечных элементов и экспериментально-теоретические методы.

**Определение реакции пластин при случайном воздействии.** Если при воздействии гармонической вибрации можно найти стационарное значение амплитуды колебаний при резонансе  $\ddot{V}(x, y)$  и проверить выполнение условия  $V(x, y) < V_{дон}$ , то при воздействии случайной вибрации в виде нормального процесса можно по формуле Релея

$$P\left(\frac{Y_p}{\sqrt{\bar{Y}^2}}\right)^2 = \exp\left(\frac{Y_p^2}{2\bar{Y}^2}\right)$$

найти вероятность  $P$  превышения пиковым значением  $Y_p$  среднеквадратического значения виброперемещения  $\sqrt{\bar{Y}^2}$ , или виброускорения  $\sqrt{\ddot{Y}^2}$ .

Определить СК значения можно на основе методов спектральных представлений и интегральных оценок. Интегральный метод основан на замене суммы вкладов каждой формы колебаний, как это делается в методе спектральных представлений, интегралом по некоторой области в пространстве волновых чисел. Обычно он применяется в условиях значительной корреляции собственных форм колебаний. Ответ на вопрос о взаимной корреляции собственных форм зависит от величины демпфирующих свойств конструкции взаимного расположения собственных частот и характера спектральной плотности внешней нагрузки типа «белого шума». Корреляцией можно пренебречь, если выполняются условия:

$$\eta_i^2 \ll 4\left|1 - \frac{f_{0i}^2}{f_{0k}^2}\right|; \eta_k^2 \ll 4\left|1 - \frac{f_{0i}^2}{f_{0k}^2}\right|, \quad (5.31)$$

где  $f_{0i}, f_{0k}$  –  $j$ -я,  $k$ -я собственные частоты колебаний.

В табл.5.5 приведены значения частотного коэффициента  $\alpha$  для первых шестнадцати СЧК у пластин со свободным опиранием и жестким за-

щемлением по контуру при соотношении длины  $a$  и ширины  $b$  в соотношении  $2(a/b=2)$ .

Проверим выполнение условия (5.31) для наиболее близко расположенных частот. Им соответствуют частотные коэффициенты 651,2 и 672.

Определение частот можно провести по формуле:

$$f_{oi} = \frac{\alpha_i}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

но так как все параметры в этой формуле, кроме  $\alpha$ , не изменяются, получим

$$4 \left| 1 - \left( \frac{651.2}{672} \right) \right| \gg \eta_i^2,$$

или

$$0.24 \gg \eta_i^2.$$

КМП ячеек, даже с ПД, как правило не превышает 0,3. Поэтому условие (5.31) в большинстве случаев выполняется. Это дает возможность применить спектральный метод, по крайней мере, в диапазоне до 2000 Гц.

Применение спектрального метода к конструкциям типа балок подробно рассмотрено в работе [8]. Применим его к анализу конструкций типа пластин.

Среднеквадратическое отклонение точки пластины, имеющей координаты  $x, y$ , находится по формуле

$$\sqrt{\bar{v}^2(x, y)} = \sqrt{\int_0^\infty |\Phi(i, \omega)|^2 S(\omega) d\omega},$$

где  $S(\omega)$  – спектральная плотность возмущающих колебаний.

Учитывая (5.26) и принимая во внимание

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\pi\omega_0}{2\eta},$$

получаем

$$\sqrt{\bar{v}^2(x, y)} = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty \frac{K_k^2(x, y) S(\omega) \pi}{2\omega_{0k}^3 \eta_k}}.$$

Первое слагаемое, соответствующее перемещению на первой собственной частоте колебаний, значительно превышает все остальные, и поэтому:

$$\sqrt{\bar{v}^2(x, y)} \approx K_k^2(x, y) \sqrt{\frac{\pi S(\omega)}{2\omega_{0k}^3 \eta_k}}.$$

Т а б л и ц а 5.5

Число полуволин		Частотный коэффициент		Число полуволин		Частотный коэффициент	
$m_1$	$m_2$	$\alpha$		$m_1$	$M_2$	$\alpha$	
(по $a$ )	(по $b$ )	ж.з.	св.оп.	(по $a$ )	(по $b$ )	ж.з.	св.оп.
1	1	95,2	49,3	3	1	155,5	366,3
1	2	161,6	79,2	3	2	173,2	396,0
1	3	323,2	129,7	3	3	207,4	445,5
1	4	651,2	197,2	3	4	251,2	514,8
2	1	672	168,3	4	1	420,3	643,5
2	2	825,6	197,2	4	2	449,0	673,2
2	3	1130	246,5	4	3	548,0	722,7
2	4	1658	316,8	4	4	580,8	792,0

Учитывая, что  $f=\omega/2\pi$  и  $S(\omega)2\pi/g^2$ , найдем:

$$\sqrt{\bar{v}^2(x, y)} \approx K_k^2(x, y) \sqrt{\frac{S(f)g^2}{32\pi^3 f^3 \eta_k}}. \quad (5.32)$$

Средний квадрат относительного ускорения  $\bar{v}_k^2(x, y)$  на  $k$ -й резонансной частоте

$$\bar{v}_k^2(x, y) = K_k^2(x, y) \frac{S(f)g^2 \pi f_k}{2\eta_k}.$$

В отличие от перемещения средний квадрат ускорения существенно зависит от средних квадратов ускорения на всех резонансных частотах.

Поэтому

$$\sqrt{\bar{v}^2(x, y)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \bar{v}_k^2(x, y)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{K_k^2(x, y) S(f) g^2 \pi f_k}{2\eta_k} + \bar{Z}^2} \quad (5.33)$$

Если  $S(f)$  постоянна в рассматриваемом диапазоне частот, то

$$\bar{Z}^2 = g^2 S(f) (f_в - f_н), \quad (5.34)$$

где  $f_в$  и  $f_н$  – нижняя и верхняя частоты рассматриваемого диапазона и коэффициент передачи

$$\mu(x, y) = \frac{\sqrt{\ddot{v}^2 + \ddot{z}^2}}{\sqrt{\ddot{z}^2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{K_k^2(x, y) \pi f_{ok}}{2\eta_k (f_g - f_n)} + 1}. \quad (5.35)$$

Формулы (5.26), (5.32), (5.35) позволяют рассчитать коэффициенты передачи по перемещению и ускорению в различных точках ячейки при кинематическом гармоническом и случайном воздействиях.

Однако расчет по указанным формулам возможен, если известны, кроме частотного диапазона, параметр формы колебаний  $K(x, y)$  и КМП. Разработка ММ для определения КМП конструкций с ПД рассматривается в главах 7, 8 настоящего пособия. Определение параметра  $K(x, y)$  проводится по формуле (5.29) и для прямоугольных пластин с простейшими способами крепления краев типа защемления, свободного опирания или незащемленного края не представляет труда [1].

**Пример 5.8.** Определить среднеквадратическое значение ускорения в точке платы с относительными координатами  $\xi_x = 0,3$ ;  $\xi_y = 0,4$ , если случайная вибрация со спектральной плотностью ускорения  $S(f) = 0,1 \text{ г}^2/\text{Гц}$  в диапазоне частот от 10 до 800 Гц передается от точек крепления. Способ крепления платы и остальные данные, как в примере 5.3.

**Решение.** Из примера 5.3 видно, что в диапазоне частот до 800 Гц резонансные колебания возникают на трех частотах. Их средние значения 219,9; 484,3; 738,1 Гц, т.е. в формуле (5.33)  $n=3$ . Найдем, используя табл. П.5, коэффициенты формы колебаний для свободного опирания:

$$k_1(x, y) = k_1(x) \cdot k_1(y) = 1,03 \cdot 1,21 = 1,25; \quad k_2(x, y) = 1,21 \cdot 0,75 = 0,91; \\ k_3(x, y) = 0,39 \cdot (-0,75) = -0,29,$$

и для жесткого защемления

$$k_1(x, y) = 0,9 \cdot 1,21 = 1,09; \quad k_2(x, y) = 1,29 \cdot 0,89 = 1,15; \\ k_3(x, y) = 0,76 \cdot (-0,55) = -0,42.$$

Используя результаты расчета для свободного опирания из примера (5.3), найдем КМП:

$$\eta_1 = (\sqrt{155,7})^{-1} = 0,08; \quad \eta_2 = (\sqrt{389,4})^{-1} = 0,051; \quad \eta_3 = (\sqrt{622,5})^{-1} = 0,04,$$

а для жесткого защемления

$$\eta_1 = (\sqrt{284})^{-1} = 0,06; \quad \eta_2 = (\sqrt{579,4})^{-1} = 0,042; \quad \eta_3 = (\sqrt{853,7})^{-1} = 0,034.$$

По формуле (5.33) для свободного опирания:

$$\ddot{v}^2(x, y) = \left\{ 1,25 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 155,7}{2 \cdot 0,08}} + 0,91 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 389,4}{2 \cdot 0,051}} - \right. \\ \left. - 0,29 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 622,5}{2 \cdot 0,04}} \right\}^{0,5} = 19,4 \text{ м/с}^2.$$



Для жесткого защемления

$$\tilde{V}^2(x, y) = \left\{ 1,09 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 284}{2 \cdot 0,06}} + 1,55 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 579,1}{2 \cdot 0,042}} - \right. \\ \left. - 0,034 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 853,7}{2 \cdot 0,034}} \right\}^{0,5} = 31,34 \text{ М/с}^2.$$

Для конструкции сложной конфигурации со сложными граничными условиями, имеющими переменную жесткость и сосредоточенные нагрузки, для расчета применяются численные методы конечных разностей, конечных элементов, вариационно-разностные и другие.

Современные системы расчета на ЭВМ, основанные на этих методах позволяют рассчитывать СЧК сложных конструкций, определять их формы колебаний, но не всегда предусматривают определение амплитуд резонансных колебаний.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Напишите уравнение свободных колебаний пластины. Какие силы входят в это уравнение?
2. Какие виды граничных условий для пластин наиболее часто рассматриваются?
3. Как выглядит общее решение уравнения свободных колебаний балки?
4. Напишите уравнение вынужденных колебаний пластины при силовом и кинематическом возбуждении.
5. Какой метод применяется при решении уравнения вынужденных колебаний пластины?
6. Как можно приближенно рассчитать СЧК и АРК пластин, если граничные условия точно неизвестны?
7. Какие применяются методы расчета СЧК пластин?
8. Что лежит в основе методов Релея и Ритца?
9. Какие способы применяют для повышения СЧК пластин?
10. Как рассчитывается коэффициент передачи в точках пластины при резонансе?

## Глава 6

# ВИБРОЗАЩИТА ЭА ПОЛИМЕРНЫМИ ДЕМПФЕРАМИ

### 6.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИМЕРНЫХ ДЕМПФЕРОВ

Полимерные демпферы (ПД) как средство уменьшения амплитуд резонансных колебаний. Для устранения резонансных колебаний ячеек ЭА или других элементов конструкций частотной отстройкой необходимо, чтобы первая собственная частота колебаний не менее чем в два раза превышала максимальную частоту возбуждения. Если максимальная частота имеет значение не менее 500 Гц, выполнить это условие сложно, а при максимальной частоте 1000 – 2000 Гц практически невозможно. Полная заливка электронных блоков полимерным компаундом хотя и решает эту задачу, приводит к резкому ухудшению теплового режима, ремонтнопригодности и другим отрицательным явлениям и применяется редко. Поэтому практически единственным путем уменьшения амплитуд резонансных колебаний при воздействии вибраций в широком диапазоне частот до 1000 Гц и выше является повышение демпфирующих свойств конструкций РЭС на основе применения специальных устройств – демпферов. Наиболее перспективными для ЭА в настоящее время являются полимерные демпферы (ПД), выполненные на основе так называемых вибропоглощающих (ВП) полимеров. Они могут создаваться в виде демпфирующих слоев, вставок, ребер и других конструктивных элементов.

Теории и практике полимерных демпферов в настоящее время посвящено несколько сотен работ исследователей из США, Германии, Японии, СССР и др. стран.

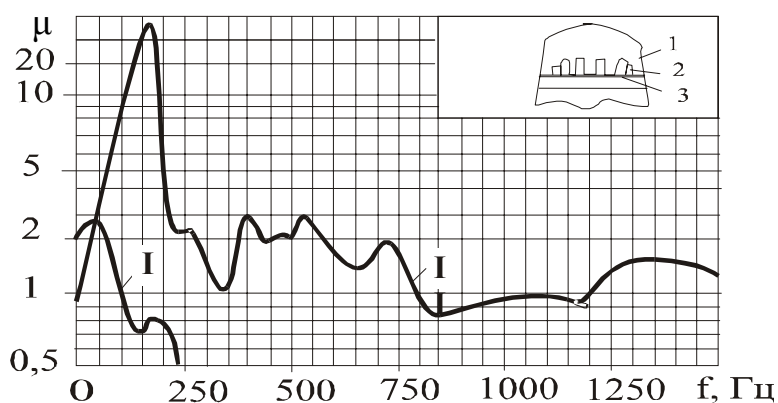


Рис 6.1. Виброзащита ЭС полимерным демпфером:  
1 – корпус ракеты; 2 – электрорадиоэлементы; 3 – шасси;  
I – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) шасси;  
II – АЧХ шасси с полимерным демпфером в виде слоя

Впервые практическое применение ВП полимеров для уменьшения амплитуд резонансных колебаний РЭС было показано в работе Ружички [18]. На рис. 6.1 приведена зависимость коэффициента передачи  $\mu$  в центре платы от частоты. Видно, что введение демпфирующего слоя в конструкцию шасси снижа-

ет амплитуды его резонансных колебаний в несколько раз.

Наиболее полно теория и практика полимерных демпферов в настоящее время рассмотрены в работах [6, 7, 11, 13].

**Конструкции и принципы работы ПД.** Применяемые в настоящее время для уменьшения АРК полимерные демпферы можно разделить на четыре вида:

1. Внешние и внутренние демпфирующие слои (ДС),
2. Демпфирующие ребра (ДР),
3. Демпфирующие вставки (ДВ),
4. Динамические гасители колебаний с демпфированием (ДГКД).

**Д е м п ф и р у ю щ и е с л о и.** Внешние и внутренние ДС для уменьшения вибраций конструкций были впервые применены в пятидесятых годах этого столетия И. Славиком, И. Немецем, П. Линардом, Г. Оберстом, Е. Кервином. У нас в стране большой вклад в развитие теории и практики таких конструкций внес Б.Д. Тартаковский и его сотрудники из Акустического института АН СССР, а также другие исследователи. Часто ДС называют жесткими и мягкими вибропоглощающими (ВП) покрытиями, армированными ВП покрытиями, слоеными ВП материалами, или "сэндвичами".

*Внешний ДС.* Внешний ДС можно выполнить из жесткого или мягкого ВП материала. Известно, что ДС из мягкого ВП ( $E < 10^8$  Па) материала становятся эффективными только при недопустимо больших толщинах ДС, когда появляются волны растяжения-сжатия в направлении поперечном поверхности демпфируемой платы. Это происходит обычно на частотах больше 1000 Гц. Поэтому такие конструкции в учебном пособии не рассматриваются. Схема конструкции ячейки с внешним ДС из жесткого ВП материала и характер его деформаций при изгибе пластины показан на рис. 6.2. Видно, что в ДС, который может наноситься как со стороны ЭРЭ, так и на свободной от ЭРЭ поверхности ячейки, происходят в основном деформации растяжения-сжатия. Многочисленные исследования таких конструкций показали, что эффект демпфирования увеличивается не только с повышением демпфирующих свойств ВП материала, что достигается увеличением толщины ДС или применением ВП материала с большим модулем упругости, но и при увеличении его жесткости. Эффективность демпфирования можно повысить и путем применения промежуточного слоя между конструкцией и ДС. Это приводит к значительному увеличению суммарной толщины ПД и некоторому усложнению технологического процесса изготовления ячеек РЭС.

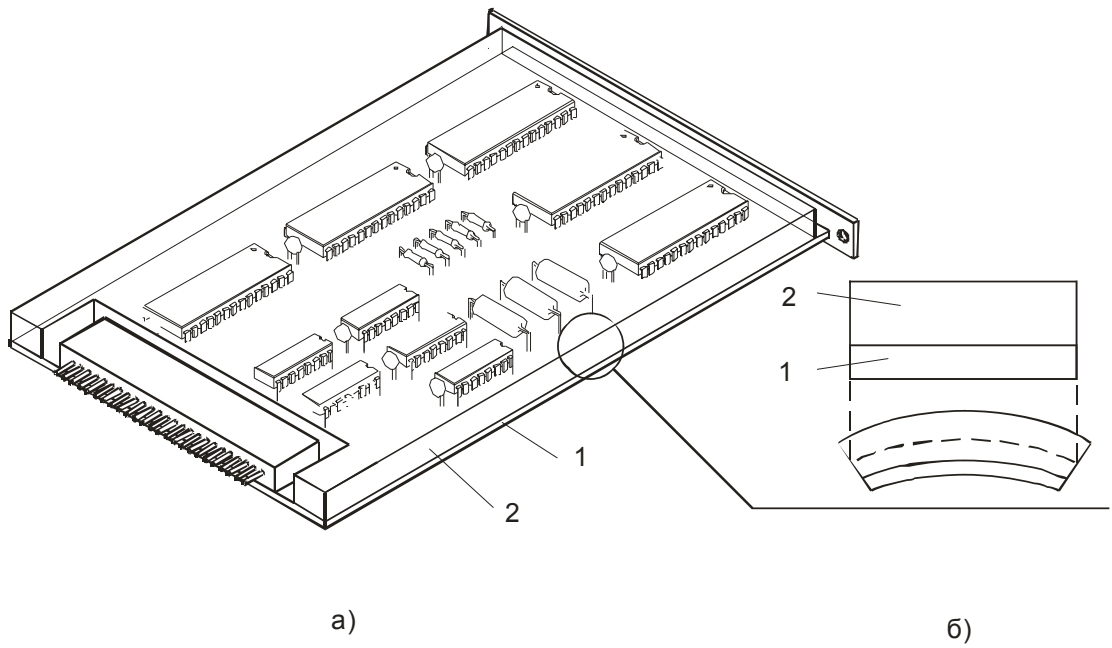


Рис.6.2. Ячейка с внешним ДС (а) и схема ее деформирования (б) при вибрации:  
1 – печатная плата; 2 – демпфирующий слой

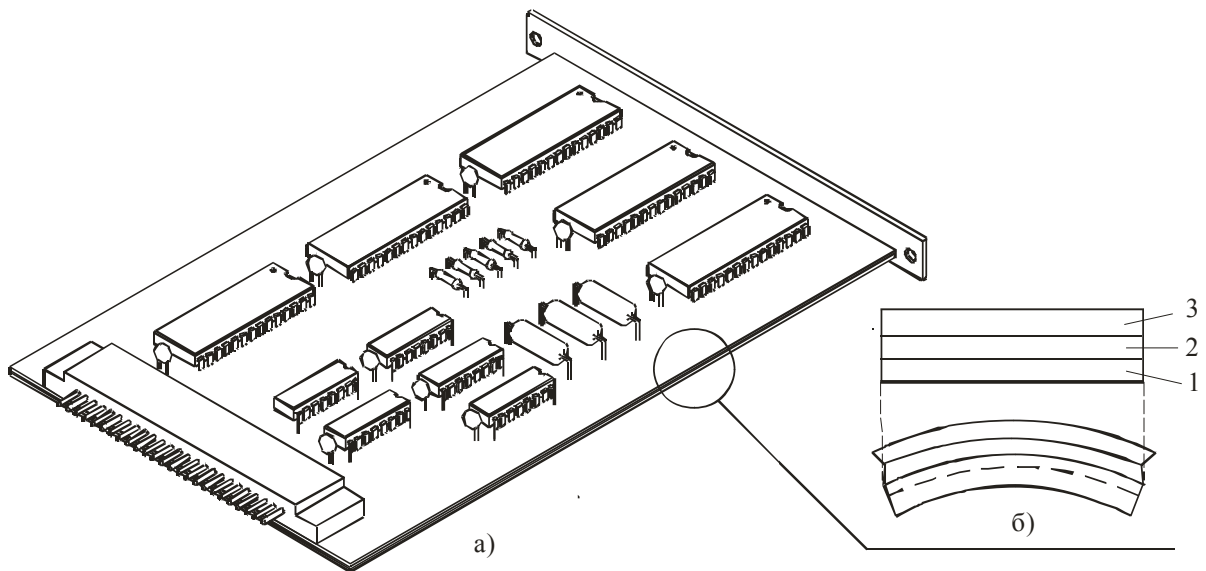


Рис. 6.3 Ячейка с внутренним ДС (а) и схема ее деформирования (б):  
1,3 – слои печатной платы; 2 – демпфирующий слой

*Внутренний ДС.* Конструкции с внутренним ДС (рис. 6.3) часто подразделяют на конструкции с армированным ВП покрытием и слоеные (типа "сэндвич") ВП конструкции.

Обычно под армированными ВП покрытиями понимают покрытия, состоящие из слоев ВП материала с наклеенным на них тонким слоем из жесткого (армирующего) материала. Часто их выполняют в виде лент, приклеиваемых за счет адгезионных свойств ВП материала к демпфируемой конструкции. Слоеные ВП конструкции часто выполняются в виде специальных материалов, которые затем используются для изготовления, например, печатных плат, состоящих из двух слоев стеклотекстолита, склеенных с тонким слоем (0,1 – 0,3мм) ВП материала. Механика деформирования, а следовательно, и математический аппарат, описывающий динамику таких конструкций, не имеют принципиальных отличий.

Исследования показали, что наибольшая эффективность проявляется при относительно небольшой жесткости ВП материала, когда происходит "проскальзывание" между слоями из конструкционных материалов и появление больших деформаций сдвига в ДС (рис. 6.3, б).

*Демпфирующие ребра.* Применение демпфирующего ребра схематически показано на рис. 6.4.

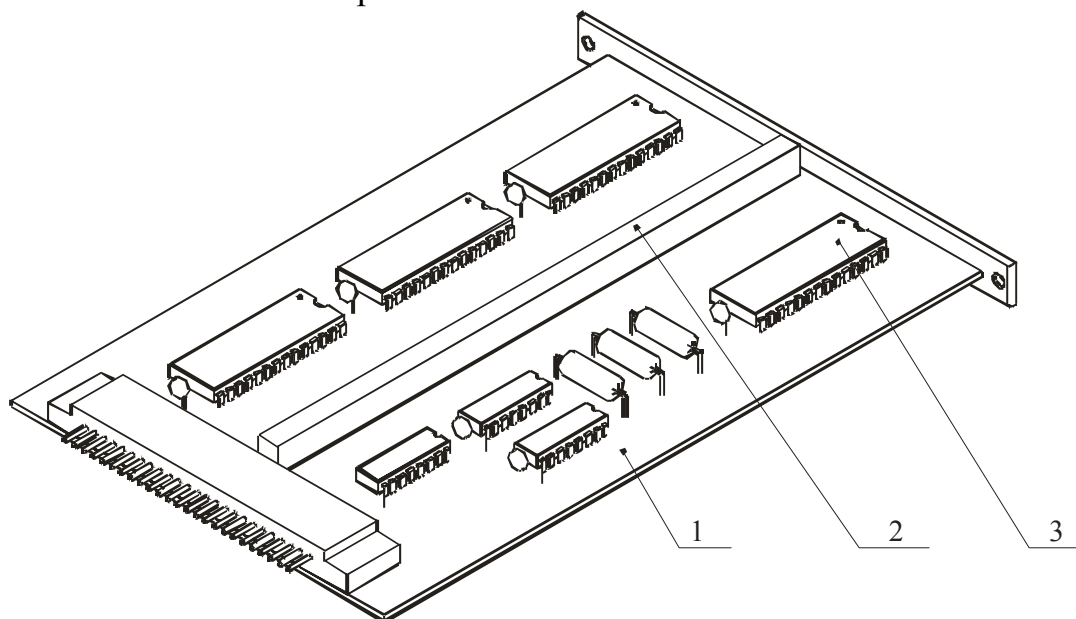


Рис. 6.4 Ячейка с демпфирующим ребром:

1 – печатная плата; 2 – демпфирующее ребро; 3 – электрорадиоэлементы

Принцип работы ДР схож с внешним ДС. Однако применение ДР вместо внешнего ДС позволяет решить две важные для электронных модулей задачи:

Обеспечить одинаковое с внешним слоем демпфирование при меньшей массе. Это достигается за счет того, что средний слой ребра удален на большое расстояние от демпфируемой конструкции. При этом увеличивается момент инерции сечения, а следовательно, и эффективность демпфирования.

ДР занимает лишь небольшую площадь ячейки и может располагаться между рядов ЭРЭ, например микросхем.

ДР целесообразно устанавливать вдоль условной линии наибольшей кривизны платы, проходящей через точку максимальной амплитуды колебаний ЭМ при резонансе. Эффективность ДР повышается с увеличением его жесткости на изгиб.

Демпфирующие вставки (рис 6.5). Для обеспечения эффективной работы ДВ необходимо, чтобы СЧК связанных ДВ ячеек существенно различались. Установлено, что СЧК ячеек должны различаться не менее чем в два раза. При этом ДВ должна устанавливаться в точке, где имеют место наибольшие деформации растяжения-сжатия. Разность СЧК ячеек обеспечивается выбором различных толщин печатных плат, применением на одной из ячеек ребер жесткости, различными способами крепления и другими способами.

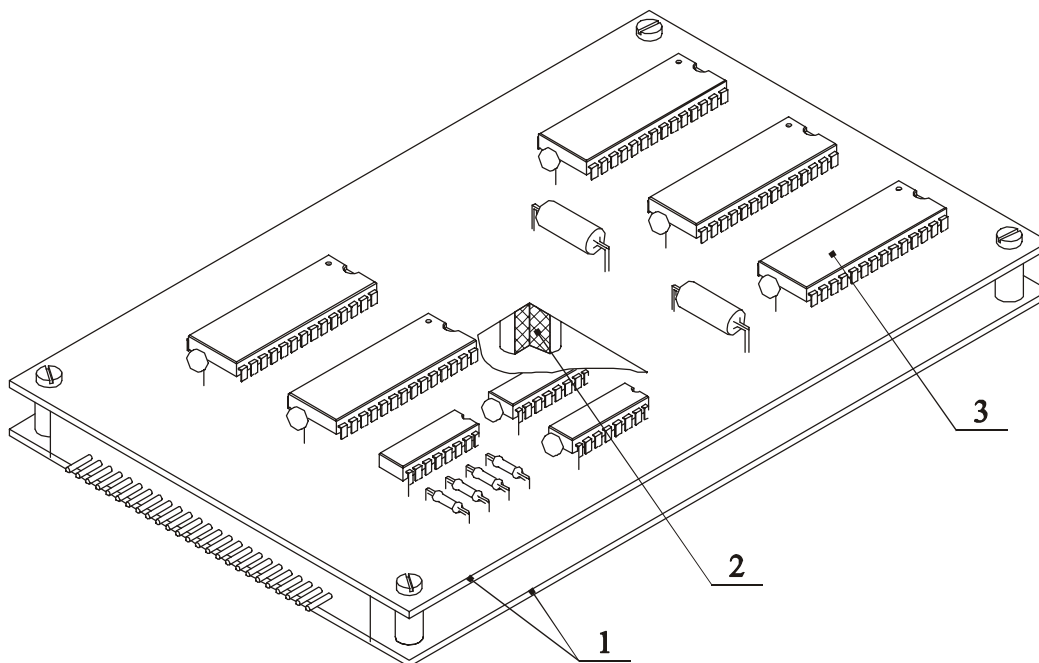


Рис. 6.5. Блок с демпфирующей вставкой:

1 – печатная плата; 2 – демпфирующая вставка; 3 – электрорадиоэлементы

Динамические гасители колебаний с демпфированием. Принцип работы ДГК был описан Фрамом еще в 1909 году. Ес-

ли применяется ДГК с демпфированием, то при изгибных колебаниях ячеек инерционный груз деформирует ВП материал, находящийся между платой и грузом (рис. 6.6). В зависимости от конструктивного решения в ВП материале могут происходить как деформации растяжения-сжатия, так и деформации сдвига.

Принципиальное отличие ДГКД от ДГК заключается в том, что в ДГКД используется свойство ВП материала уменьшать амплитуду резонансных колебаний за счет поглощения энергии механических колебаний, в то время как в ДГК используется свойство подавлять колебания конструкций на частоте, равной СЧК гасителя.

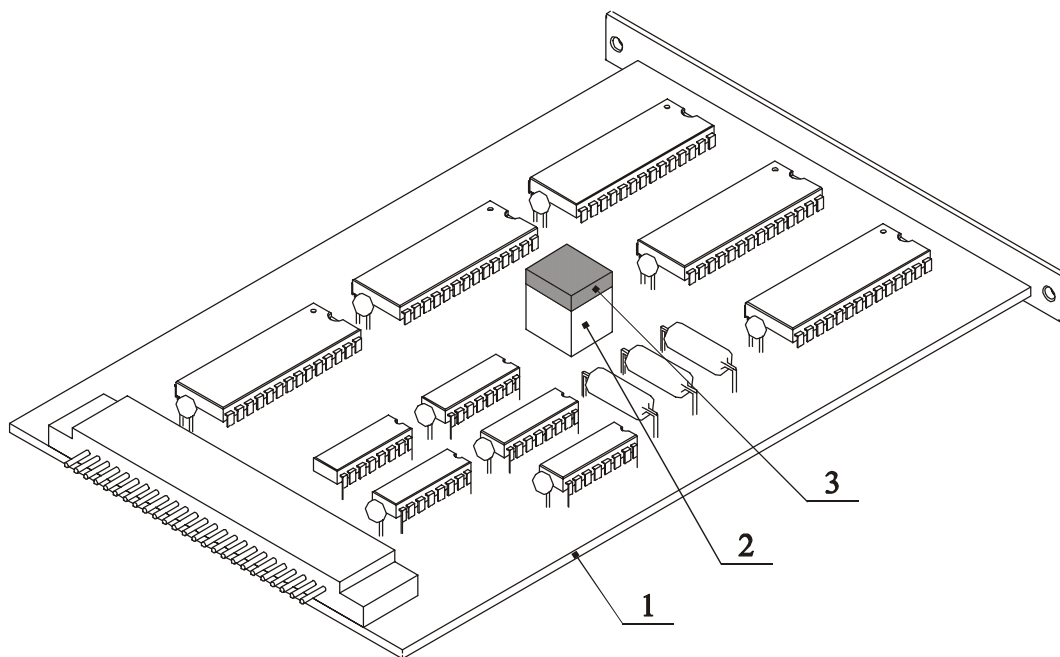


Рис. 6.6. Ячейка с ДГК с демпфированием:

1 – печатная плата; 2 – вязкоупругий элемент; 3 – инерционный груз

## 6.2. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕМПФИРОВАНИЯ

**Основные понятия и факторы, определяющие демпфирование колебаний.** Термины и определения, относящиеся к вибрации, даются в ГОСТ 24346-80 “Вибрация. Термины и определения”. В соответствии с указанным стандартом:

*Демпфер* – виброзащитное устройство или его часть, создающая демпфирование вибраций.

*Демпфирование вибраций* – уменьшение вибраций вследствие рассеивания механической энергии.

Под уменьшением вибрации понимают уменьшение значений каких-либо определенных величин, характеризующих вибрацию. Например, уменьшение амплитуд виброперемещения и виброускорения.

Демпфирование вибрации обусловлено действием диссипативной силы.

*Диссипативная сила* – сила, возникающая при движении механической системы и вызывающая рассеивание механической энергии.

Рассеивание механической энергии обусловлено переходом ее в тепло. Поэтому при вибрации может наблюдаться некоторое повышение температуры демпферов или их частей.

Демпфирование колебаний обусловлено следующими тремя факторами:

1. «Внешним» трением при колебаниях конструкции в окружающей среде.
2. «Внутренним трением» в материале.
3. Трением в подвижных и неподвижных соединениях.

Окружающей средой для ячеек обычно является воздух, обладающий небольшой вязкостью, поэтому «внешнее» трение обычно невелико. Обусловленное им аэродинамическое демпфирование, как правило, не превышает 5 % от общего демпфирования колебаний конструкции, и им при расчетах можно пренебречь.

«Внутреннее трение» в материалах имеет различную физическую природу. В кристаллических материалах оно обусловлено микропластическими деформациями по границам кристаллов и в объеме материала, в полимерах – преодолением сил молекулярного взаимодействия и т. д. В широко применяемых в конструкциях РЭС материалах – стеклотекстолите, алюминии, его сплавах и других – «внутреннее трение» обычно также невелико. Однако имеются полимеры, «внутреннее» трение которых в десятки и даже сотни раз превышает «внутреннее» трение обычных конструкционных материалов. Эти материалы получили название вибропоглощающих. Они и составляют основу полимерных демпферов, позволяющих существенно увеличить рассеяние энергии механических колебаний.

Трение в подвижных и неподвижных соединениях обуславливает большую часть общего демпфирования колебаний, если не применяются демпферы колебаний. Обычно это трение между поверхностями в кинематических парах, а также в соединениях прессовых, шлицевых, резьбовых, заклепочных и т.п. Несмотря на то что такие соединения называют неподвижными, при их динамическом нагружении возникают малые проскаль-



звания по контактными поверхностями. Возникающие при этом силы совершают работу, определяющую потери энергии механических колебаний.

**Характеристика демпфирования.** В литературе, посвящённой анализу колебаний конструкций, применяется значительное количество характеристик демпфирования. Остановимся подробнее на рассмотрении основных характеристик и взаимосвязей между ними. Отношение

$$\Psi = \frac{\Delta W}{W}, \quad (6.1)$$

где  $W$  – полная энергия системы за цикл колебаний получило название *коэффициента поглощения*. Так как энергия потерь  $\Delta W$  равняется работе, совершаемой системой за период колебаний, то

$$\Delta W = \int_0^T F(Z, \dot{Z}) dZ = \int_0^T F_D(\dot{Z}) \dot{Z} dt.$$

Для случая вязкоупругого сопротивления, когда  $F_D(\dot{Z}) = b\dot{Z}$ , и гармонических колебаний по закону  $Z = Z_0 \cos \omega t$ :

$$\Delta W = \int_0^T b\dot{z}^2 dt = bZ_0^2 \omega^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \pi \omega b Z_0^2. \quad (6.2)$$

Принимая полную энергию колебаний, равную  $W = \frac{kZ_0^2}{2}$ , т.е. максимальному амплитудному значению энергии, получим

$$\Psi = \frac{2\pi b \omega}{k}. \quad (6.3)$$

Широкое распространение получил *коэффициент механических потерь* (КМП), определяемый по формуле

$$\eta = \frac{b\omega_0}{k}. \quad (6.4)$$

Сравнивая (6.3) и (6.4), получим

$$\eta = \frac{\Psi \omega_0}{2\pi \omega}.$$

При резонансе, когда  $\omega = \omega_0$ ,

$$\eta = \frac{\Psi}{2\pi} = \frac{\Delta W}{2\pi W}. \quad (6.5)$$

Величина  $Q = 1/\eta$  получила название *добротности*. При резонансе системы с одной степенью свободы (рис. 3.1 ч.1) добротность численно равна коэффициенту передачи системы  $\mu$ .

Несовершенная упругость материала, определяющая диссипацию энергии колебаний, проявляется в сдвиге фаз между силой и обусловленной ею деформацией. Из векторной диаграммы сил (рис. 6.7), действующих на систему с одной степенью свободы, видно, что величина этого сдвига

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F''}{F'} = \frac{b\omega}{k}. \quad (6.6)$$

Сравнивая (6.4) и (6.6), определяем, что при резонансе  $\eta = \operatorname{tg}\varphi$ .

Ещё одной широко распространённой характеристикой является *логарифмический декремент колебаний*

$$\delta = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}},$$

где  $a_i, a_{i+1}$  – амплитуды колебаний (рис. 6.8).

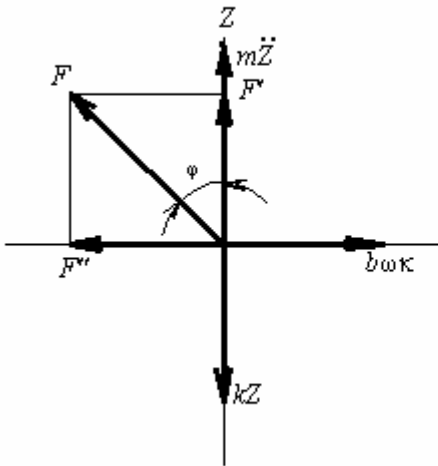


Рис. 6.7. Векторная диаграмма сил системы с одной степенью свободы.

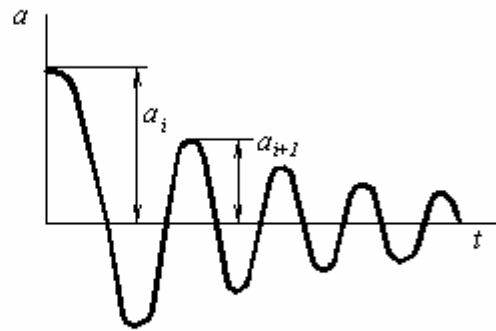


Рис. 6.8. Свободно затухающие колебания.

Учитывая, что коэффициент поглощения можно представить в виде

$$\Psi = - \int_{W_0}^{W_{t+T}} \frac{dW}{W},$$

принимая во внимание  $W = \frac{kZ_0^2}{2}$ , получим

$$\Psi = - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{2da}{a} = 2 \ln \frac{a_i}{a_{i+1}} = 2\delta.$$

Сравнивая с (6.5), найдём

$$\eta = \frac{\delta}{\pi}. \quad (6.7)$$

### 6.3. ХАРАКТЕРИСТИКА ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

Особенности физико-механических свойств полимеров. В качестве ВП материалов могут применяться различные материалы с большим внутренним рассеиванием энергии механических колебаний, но наиболее перспективными с учетом всех факторов (технологических, эксплуатационных и др.) являются полимеры. Особенность полимеров, резко выделяющая их из среды других материалов, – способность в зависимости от скорости приложения силы вести себя как жидкость или как твердое упругое тело, или же одновременно проявлять свойства того и другого.

Эта особенность определяется структурой полимеров, состоящих из длинных цепных молекул, участки которых, так называемые звенья, находятся в хаотическом тепловом движении. Приложение внешней силы приводит к некоторой ориентации звеньев в направлении внешней силы. Величина этой ориентации и, следовательно, деформация полимера зависят не только от величины силы, но и от ее скорости. Ориентация звеньев связана с преодолением сил межмолекулярного взаимодействия, которые тем слабее, чем энергичнее тепловое движение, т.е. чем выше температура. Эти обстоятельства обуславливают резкую зависимость механических свойств полимеров от скорости (частоты) деформирования и температуры. На рис. 6.9 приведены типичные зависимости динамического модуля упругости и коэффициента механических потерь полимеров от температуры и частоты колебаний. Можно выделить три зоны: высокоэластичного, стеклообразного (или кристаллического) состояния и переходную зону. Каждый аморфный полимер, в зависимости от температуры и частоты колебаний, может находиться в одном из этих состояний (или вязкотекучем). Например, жесткие пластмассы при нормальных условиях – это полимеры в области стеклообразного или кристаллического состояния, а резины и другие каучукоподобные материалы – полимеры в области высокоэластического состояния. наглядно показывает, что в качестве ВП материалов для ПД могут выбираться не любые полимеры, а только те, физико-механическое состояние которых соответствует переходной зоне, так как при этом полимер имеет максимальные демпфирующие свойства. Видно

также, что и упругие, и демпфирующие свойства полимеров в этой зоне резко изменяются.

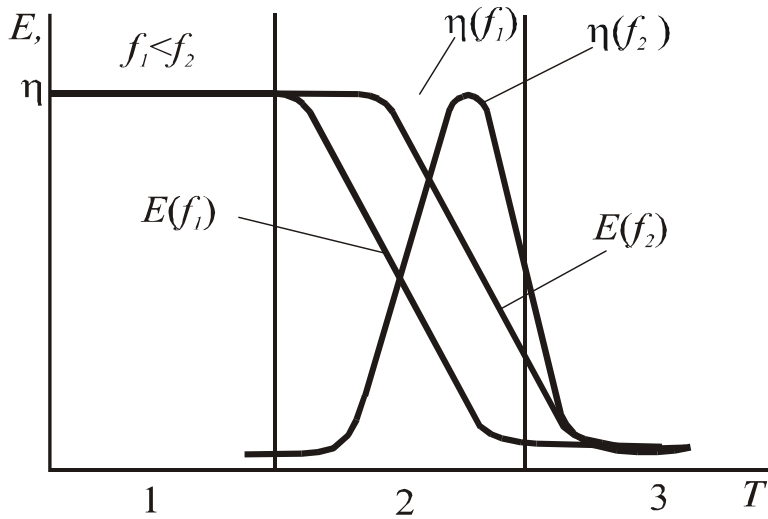


Рис. 6.9. Зависимости динамического модуля упругости и коэффициента механических потерь полимеров от температуры и частоты колебаний

1 – зона стеклообразного состояния; 2 – переходная зона; 3 – зона высокоэластичного состояния

Динамический модуль упругости обычно изменяется в пределах  $(10^5 - 10^9)$  Н/м<sup>2</sup>, а коэффициент механических потерь от 0,01 до  $1 \div 2$ . При использовании полимеров в качестве ВП материалов необходимо также учитывать зависимость физико-механических свойств полимеров от частоты вибраций и особенно от температуры.

Требования к вибропоглощающим

материалам. В предыдущем разделе показано, что в качестве ВП материалов могут применяться полимеры которые по своему физико-механическому состоянию соответствуют области перехода. На рис. 6.10. показаны области перехода для трех полимеров. Очевидно, что в качестве ВП материала может рассматриваться только полимер, область перехода которого совпадает с температурным диапазоном эксплуатации изделия. Однако этого требования недостаточно. У большинства полимеров область

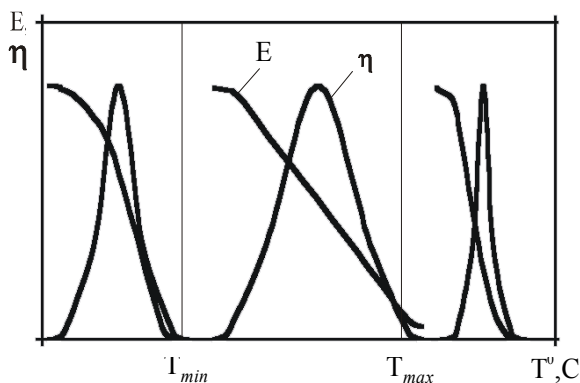


Рис. 6.10. Характеристики полимеров в различных температурных областях:  $T_{min}$  -  $T_{max}$  – температурный диапазон эксплуатации изделия

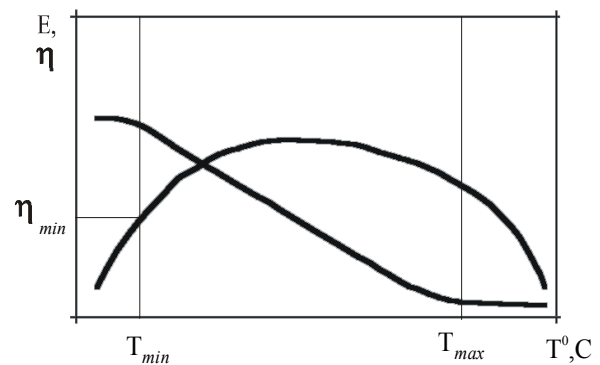


Рис. 6.11. Требуемые характеристики ВП полимера:

$T_{min}$  -  $T_{max}$  – температурный диапазон эксплуатации изделия

перехода лежит в сравнительно узком интервале температур (30 – 35 °С), в то время как температурный диапазон эксплуатации ЭС может лежать в пределах от  $T_{\min} = -40 \div -60$  °С до  $T_{\max} = +50 \div +80$  °С, то есть в интервале температур, равном 90 – 140 °С. Очевидно, что такие полимеры так же не могут быть применены в качестве ВП материалов ЭС (рис. 6.10). Следовательно, полимер может применяться в качестве ВП материала для конструкций ЭС, только если выполняются оба эти требования: совпадение переходной области полимера с температурным диапазоном эксплуатации и широкая температурная область перехода полимера, как показано на рис. 6.11. Это обычно требует специальной разработки таких полимеров.

#### 6.4 СПОСОБЫ СОЗДАНИЯ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ ПОЛИМЕРОВ

Рассмотрим факторы, которые влияют на свойства полимеров и могут быть положены в основу создания таких материалов.

*Химическое строение.* В качестве примера влияния химического строения на положение и ширину переходной зоны на рис. 6.12 даны зависимости динамического модуля сдвига  $G'$  и коэффициента потерь  $\eta$  от частоты, приведенные к 100 °С для трех полимеров Н – алкилметакрилатов, эфирные группы которых соответственно содержат 2, 4 и 12 атомов углерода. Как видно, с увеличением длины боковых групп переходная область сдвигается в сторону высоких частот почти на шесть порядков по логарифмической шкале частот. Наблюдается также некоторое изменение ширины переходной зоны.

*Сополимеризация.* В качестве примера на рис. 6.13 показаны зависимости  $E$  и  $\eta$  от температуры для сополимера винилхлорида и 2-этилгексилакрилата при различных их весовых соотношениях. Видно, что при сополимеризации наблюдаются две смежные переходные зоны, приводящие

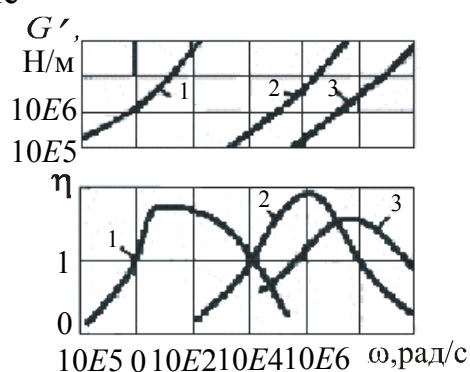


Рис. 6.12. Влияние химического строения полимера на переходную зону:

1 – этил; 2 – гексил; 3 – додецилметакрилат

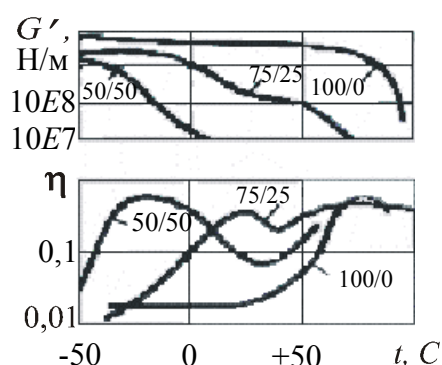


Рис. 6.13. Влияние сополимеризации на переходную зону.

к расширению температурного диапазона, в котором наблюдаются значительные величины коэффициента потерь  $\eta$ . Этот способ позволяет также смещать переходную зону в другой температурный диапазон.

**Пластификация.** В отличие от сополимеризации пластификация не приводит к образованию химических связей между полимером и растворителем. Введение пластификатора снижает силы когезии между макромолекулами полимера, вследствие чего ослабляется межмолекулярное взаимодействие. Это эквивалентно уменьшению частоты или повышению температуры. В качестве примера влияния пластификации на рис. 6.14 показаны зависимости  $G'$  и  $\eta$  от температуры, измеряемые на частоте 2 ГГц, для поливинилхлорида, пластифицированного диэтилсукцинатом. Как видно, пластификацией можно добиться значительного смещения и расширения переходной зоны.

**Наполнение и вулканизация.** Влияние твердых наполнителей и вулканизации показано на рис. 6.15. Видно, что эти факторы также существенно влияют на механические и динамические свойства полимеров. Исследование физико-химических свойств полимеров показало, что на положение и ширину переходной зоны влияют также степень полимеризации и молекулярный вес. Характеристики некоторых вибропоглощающих полимеров, которые могут быть использованы при конструировании РЭС, приведены в табл. П.7.

**Методы экспериментального определения динамических характеристик полимеров.** Применяемые методы можно разделить на *прямые*, основанные на непосредственно измерении величины энергии, рассеиваемой

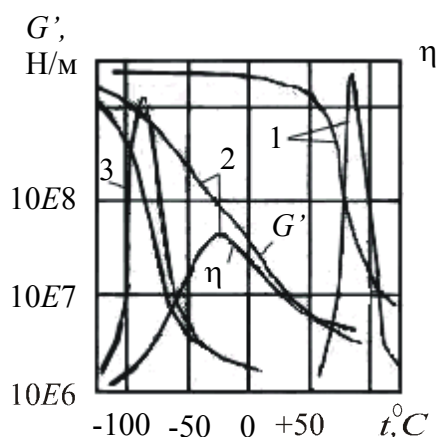


Рис. 6.14. Влияние пластификации на переходную зону: концентрация полимера: 1 – 100%; 2 – 60,7%; 3 – 40,8%

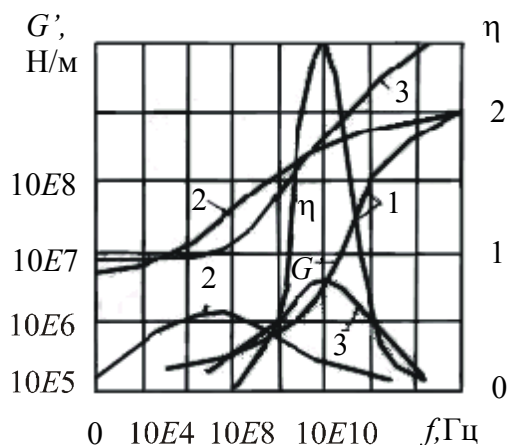


Рис. 6.15. Влияние наполнения и вулканизации на переходную зону: 1 – невулканизированная; 2 – вулканизированная; 3 – вулканизированная с наполнением

мой в образце, и *косвенные*, направленные на получение относительных характеристик рассеяния энергии.

К *прямым* методам относятся методы энергетический, термический, петли гистерезиса, к *косвенным* – метод резонансных колебаний, метод свободных затухающих колебаний, фазовый метод. Наибольшее распространение при исследовании демпфирующих свойств радио-технических материалов и конструкций в настоящее время нашли косвенные методы, которые более подробно рассмотрены в настоящем пособии.

*Метод резонансных колебаний.* Метод основан на зависимости ширины резонансной кривой от величины демпфирования. Коэффициент механических потерь можно найти по формуле [6].

$$\eta = K_{0,7} \frac{\Delta f_{0,7}}{f_0},$$

где  $\Delta f_{0,7}$  – ширина резонансной кривой на уровне 0,707 от максимальной амплитуды (рис. 6.16);

$f_0$  – резонансная частота,

$K_{0,7}$  – коэффициент нелинейности, определяемый по формуле

$$K_{0,7} = \sqrt{\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}}.$$

Параметр  $n$ , характеризующий зависимость демпфирующих свойств от амплитуды колебаний, находится по формуле

$$n = 1 - \frac{\ln \left[ \left( \frac{\Delta f_{0,5}}{\Delta f_{0,7}} \right)^2 - 2 \right]}{\ln 2},$$

где  $\Delta f_{0,5}$  – ширина резонансной кривой на уровне 0,5 от максимальной амплитуды (рис. 6.16).

Например, если демпфирование амплитудно независимо ( $n=1$ ), то  $K_{0,7}=1$  и

$$\eta = \frac{\Delta f_{0,7}}{f_0}. \quad (6.8)$$

Эта формула обычно используется для определения КМП вязкоупругих материалов.

Блок-схема экспериментальной

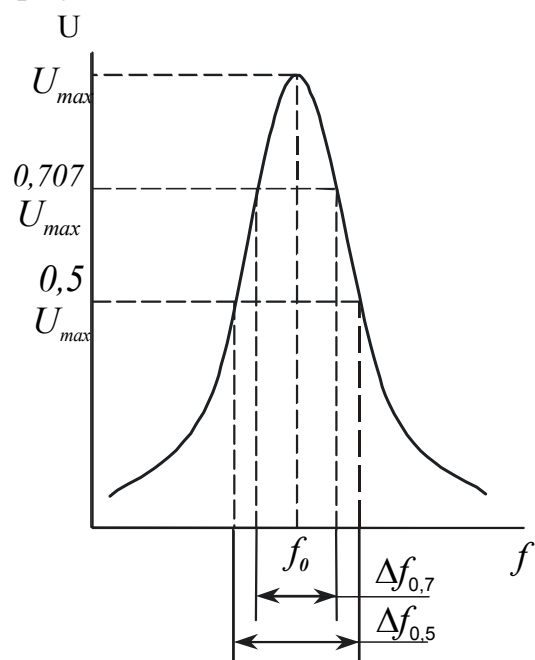


Рис. 6.16. Резонансная кривая

установки, в которой возбуждаются резонансные колебания консольно закрепленного образца, показана на рис. 6.17. Электромагнитный возбудитель колебаний позволяет возбуждать первую, вторую и последующие формы колебаний (рис. 6.18), т.е. можно определить КМП на нескольких частотах без изменения конструкции или расположения образца, возбудителя и датчика, что позволяет проводить испытания в температурном диапазоне. Для этого установка, за исключением измерительных приборов, помещается в термокамеру. Если испытываемый образец выполнен из жесткой пластмассы (модуль упругости  $E > 1 \cdot 10^8$  Па) то на него в районе возбудителя колебаний и напротив измерительного датчика наклеиваются тонкие пластинки из ферромагнитного материала. Этот метод позволяет определять и величину динамического модуля упругости (ДМУ), необходимую при расчетах конструкций РЭС с полимерными демпферами, по формуле [14]

$$E' = \frac{48\pi^2}{a_{on}} \rho \frac{l^4}{d^2} f_0^2,$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $l$ ,  $d$  – длина незакрепленной части и толщина образца;

$a_{on}$  – числовой коэффициент, который для первых трех собственных форм колебаний равен  $a_{01} = 1,875$ ;  $a_{02} = 4,694$ ;  $a_{03} = 7,855$ .

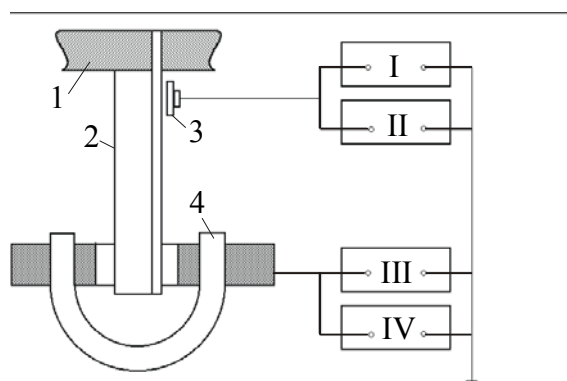


Рис. 6.17. Схема испытаний:

1 – держатель образца; 2 – образец;  
3 – датчик; 4 – возбудитель колебаний;  
I – осциллограф; II – милливольтметр;  
III – звуковой генератор; IV – частотомер

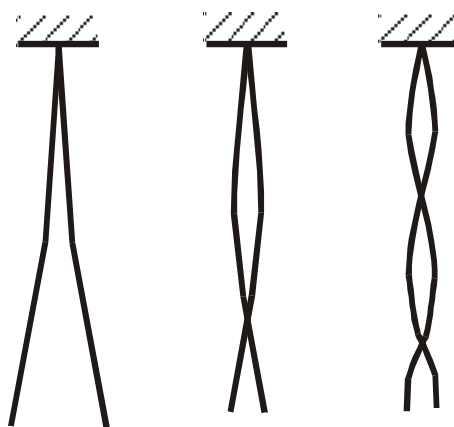


Рис. 6.18. Собственные формы колебаний консольно закрепленного образца

Для испытаний низко модульных материалов ( $E < 1 \cdot 10^7$  Па) их необходимо наклеивать на металлическую, обычно стальную основу. Образец



такого типа показан на рис. 6.19. КМП и ДМУ рассчитываются по формулам

$$\eta = \frac{\eta_k - \eta_n}{1 - \frac{B_1}{B}};$$

$$E_2 = E_1 = \frac{\frac{B_1}{B_2} - 1}{4h_2 + 6h_2^2 + 4h_2^3 - \frac{B_1}{B_2} h_2},$$

где  $\eta_n, \eta_k$  – КМП металлической подложки и составной конструкции, определяемые по формуле (6.8);

$$h_2 = \frac{H_2}{H_1} \text{ – относительная толщина}$$

испытываемого материала;

$B_1, B$  – жесткости на изгиб металлической линейки и составного образца. Отношение

$$\frac{B}{B_1} = \left( \frac{f}{f_1} \right)^2 \frac{m}{m_1}.$$

Резонансные частоты подложки  $f_1$  и составного образца  $f$ , масса подложки  $m_1$  и образца  $m$  находятся экспериментально.

*Фазовый метод.* Демпфирующие свойства определяются по величине сдвига фаз между возбуждающей гармонической силой и деформацией (перемещением) исследуемого образца. КМП определяется по формуле

$$\eta = \left( 1 - \frac{f^2}{f_0^2} \right) \operatorname{tg} \varphi,$$

где  $f, f_0$  – частота возбуждения и собственная частота колебаний образца;

$\varphi$  – угол сдвига фаз.

*Метод свободных колебаний.* Демпфирующие свойства определяются по скорости затухания свободных колебаний. Используя спектрограмму свободных затухающих колебаний (см. рис. 6.8), найдем

$$\eta = \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{a_i}{a_{i+1}} \right).$$

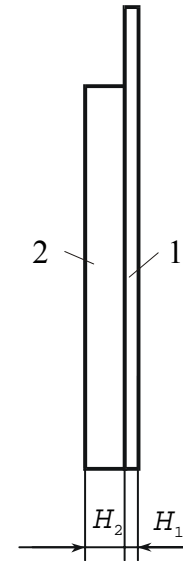


Рис. 6.19. Образец для испытаний:  
1 – стальная линейка;  
2 – исследуемый материал

Значение  $\eta$  для вязкоупругих полимеров не зависит от амплитуды колебаний и может определяться по любым двум смежным амплитудам. Свободные колебания возбуждаются или заданием предварительного изгиба конструкции, или приложением ударного импульса, или возбуждением резонансных колебаний с последующим снятием возбуждающей силы.

**Математические модели.** Для описания вязкоупругих материалов применяется несколько механических моделей, из которых простейшие модели Максвелла и Фохта показаны на рис.6.20. Связь между напряжением и деформацией для этих моделей представляется в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma E}{b}$$

для модели Максвелла и

$$\sigma = E_1 \varepsilon + b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (6.9)$$

для модели Фохта. Если напряжение изменяется по гармоническому закону, то у вязкоупругих тел наблюдается сдвиг фаз между напряжением и деформацией (рис. 6.21) на некоторый угол  $\varphi$ . Из рисунка видно, что напряжение можно представить в виде сумм двух составляющих:

$$\sigma = \sigma' + i\sigma'' \quad (6.10)$$

Составляющая напряжения  $\sigma'$  совпадает по направлению с деформацией и, как известно из теории колебаний, связана с упругой (запасаемой) энергией тела, вторая составляющая  $\sigma''$ , опережающая деформацию на  $90^\circ$ , связана с энергией, теряемой системой (энергией потерь).

Пусть деформация описывается выражением

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t},$$

тогда для модели Фохта получим

$$\sigma = E_1 \varepsilon + i b \omega \varepsilon \quad (6.11)$$

и соответственно

$$\sigma' = E_1 \varepsilon ; \quad \sigma'' = b \omega \varepsilon . \quad (6.12)$$

Величины

$$E' = E_1 ; \quad (6.13)$$

$$E'' = b \omega \quad (6.14)$$

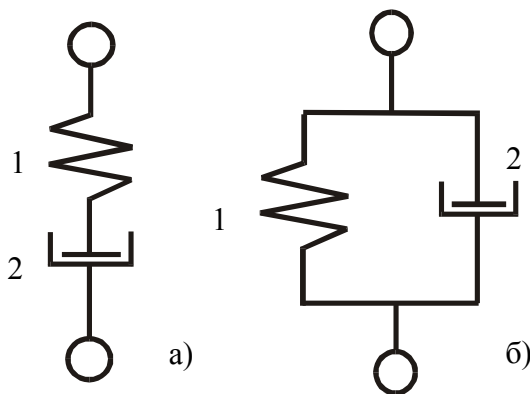


Рис. 6.20. Модели ВП материалов  
а – модель Максвелла; б – модель Фохта;  
1 – элемент с упругими свойствами;  
2 – элемент с вязкими свойствами.

получили название динамического модуля упругости  $E'$  и модуля потерь  $E''$ . Из диаграммы (рис.6.21) и выражений (6.12) – (6.14) получим

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b\omega}{E'} = \frac{E''}{E'}. \quad (6.15)$$

Это выражение по форме совпадает с выражением для коэффициента механических потерь  $\eta$  при  $\omega = \omega_0$ . Для модели Максвелла можно получить

$$E' = \frac{E_1 \omega^2 b^2}{E_1^2 + b^2 \omega^2};$$

$$E'' = \frac{E_1^2 \omega b}{E_1^2 + b^2 \omega^2};$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{E_1}{\omega b}.$$

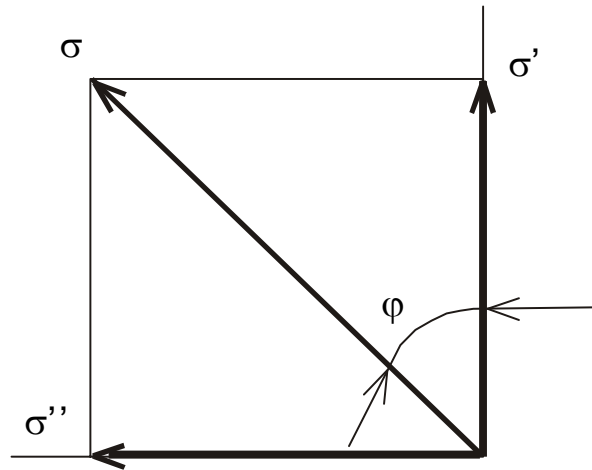


Рис. 6.21. Векторная диаграмма

В общем случае ни одна из указанных моделей не описывает достаточно точно поведение вязкоупругих материалов. Поэтому часто используют модель стандартного линейного тела, имеющего две разновидности, показанные на рис. 6.22; но и они не описывают частотно-температурную зависимость свойств вязкоупругих тел. Известны и другие механические модели, например Каргина–Слонимского, имеющая большую точность, но значительно усложняющая решение уравнений колебаний.

*Модель Больцмана – Вольтерра.* Наиболее точны модели, состоящие из набора вязкоупругих пружин с различными значениями вязкости и упругости. Использование кроме этого принципа суперпозиции Больцмана, предполагающего, что действие каждой деформации не зависит от других, позволяет отразить и частотно-температурную зависимость вязкоупругих тел при различных видах нагружения.

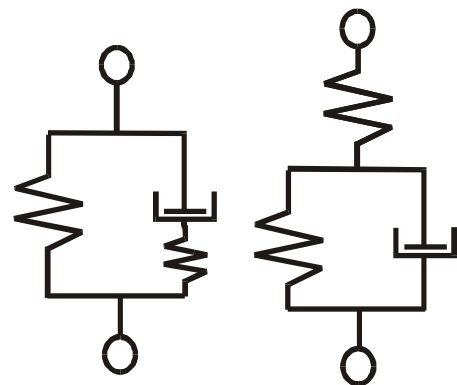


Рис. 6.22. Модель стандартного линейного тела

Математическое обоснование идеи Больцмана дал Вольтерра. Уравнение Вольтерра записывается в виде [6]

$$\sigma(t) = E[\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\xi)\varepsilon(\xi)d\xi(t)],$$

где  $R(t-\xi)$  – функция скорости релаксации полимера, называемая ядром релаксации.

Наиболее часто в качестве ядра релаксации принимается табулированная функция

$$R(t) = Ae^{-\frac{\beta t}{\alpha}-1},$$

где  $A$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры, которые определяют скорость релаксации материала.

Для решения динамических задач с использованием уравнения Вольтерра необходимо определить поправочные коэффициенты к ядру релаксации [6].

Как видим, анализ колебаний "больцмановского тела" приводит к сложной математической задаче, включающей решение интегродифференциального уравнения с частными производными.

Использование же модели Фохта в сочетании с частотно-температурными зависимостями параметров  $E'$  и  $\varphi$  эквивалентно описанию конкретного вязкоупругого материала при помощи более сложной модели. Именно такой подход нашел в настоящее время широкое распространение на практике, и он использован в данном пособии.

## 6.5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОНСТРУКЦИЙ ЭС С ПОЛИМЕРНЫМИ ДЕМПФЕРАМИ

**Общая формула коэффициента механических потерь конструкций с полимерными демпферами.** Конструкции РЭС с полимерными демпферами включают элементы, выполненные как из обычных конструкционных, так и виброупругих материалов. В конструкциях с малым демпфированием, которые характеризуются незначительным сдвигом фаз между силой и соответствующим перемещением, формулу для коэффициента потерь в общем виде можно представить так:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta\Pi_i}{2\pi \sum_{i=1}^n \Pi_i}, \quad (6.16)$$

где  $\Delta\Pi_i$  – потери энергии за цикл колебаний в  $i$ -ом слое,  $\Pi_i$  – амплитудное значение энергии в  $i$ -ом слое, определенное в момент максимальной деформации.

В высокодемпфированных конструкциях будет наблюдаться значительный сдвиг фаз в вибропоглощающих и конструкционных слоях, величина которого в разных слоях может быть существенно различной. Определение энергии колебаний таких конструкций в конкретный момент времени требует точного знания механизмов рассеяния и накопления энергии, а также предыстории нагружения, что, как правило, неизвестно, и в любом случае привело бы к сложным вычислительным методам. Поэтому целесообразно применять приближенные методы, которые бы достаточно хорошо отвечали условиям поставленной задачи.

Исходя из комплексного представления жесткости и модуля упругости, можно считать, что фактически любая линейная система при резонансе может быть аппроксимирована параллельно – последовательной комбинацией безмассовых вязкоупругих пружин с прикрепленными точечными массами, количество которых будет зависеть от точности желаемого приближения. При этом, определяя коэффициент потерь, систему можно рассматривать как безмассовую, состоящую только из вязкоупругих пружин. Для последовательного ряда вязкоупругих пружин сила, приложенная ко всему ряду, равна силе, приложенной к каждой  $i$ -й пружине, а деформация ряда равна сумме деформаций пружин.

Тогда, если  $\bar{F}$  – приложенная сила, а  $\bar{Z}_s$ ,  $\bar{Z}_i$  – прогибы всего ряда и  $i$ -й пружины соответственно, можем записать:

$$\bar{F} = \bar{K}_s \bar{Z}_s = \bar{K}_i \bar{Z}_i \quad ; \quad \bar{Z}_s = \sum \bar{Z}_i, \quad (6.17)$$

где  $\bar{K}_s = K'_s(1 + j\eta_s)$  – комплексная жесткость ряда;

$\bar{K}_i = K'_i(1 + j\eta_i)$  – комплексная жесткость  $i$ -й пружины.

Если  $x_s^*$  определяет сопряженные комплексные свойства, то  $\bar{Z}_s^* = \sum \bar{Z}_i^*$ , и из уравнения (6.17) можем получить

$$\bar{K}_s \bar{Z}_s \bar{Z}_s^* = \bar{K}_s \bar{Z}_s \sum \bar{Z}_i^* = \sum \bar{K}_i \bar{Z}_i \bar{Z}_i^*. \quad (6.18)$$

Для ряда параллельных пружин сила, приложенная к ряду, равна сумме сил, приложенных к индивидуальным пружинам, а деформация ряда и каждой пружины будет одинаковой. Тогда получим

$$\bar{F} = \bar{K}_s \bar{Z}_s = \sum \bar{K}_i \bar{Z}_i \quad ; \quad \bar{Z}_s = \bar{Z}_i. \quad (6.19)$$

Или, умножив выражение (6.19) на  $\bar{Z}_s^*$ , получим:

$$\bar{K}_s \bar{Z}_s \bar{Z}_s^* = (\sum \bar{K}_i \bar{Z}_i) \bar{Z}_s^* = \sum \bar{K}_i \bar{Z}_i \bar{Z}_i^*. \quad (6.20)$$

Сравнивая выражения (6.19) и (6.20), придем к выводу, что для любой комбинации пружин можем записать:

$$\bar{K}_s |\bar{Z}_s|^2 = \sum \bar{K}_i |\bar{Z}_i|^2.$$

Выделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{aligned} \bar{K}_s |\bar{Z}_s|^2 &= \sum K'_i |\bar{Z}_i|^2; \\ \eta_s K'_s |\bar{Z}_s|^2 &= \sum \eta_i K'_i |\bar{Z}_i|^2 \end{aligned}$$

Так как

$$\Pi_i = \frac{K'_i |\bar{Z}_i|^2}{2}; \quad \Pi_s = \frac{K'_s |\bar{Z}_s|^2}{2}; \quad \Pi_s = \sum \Pi_i,$$

получим

$$\eta_s = \frac{\sum \eta_i \Pi_i}{\sum \Pi_i}. \quad (6.21)$$

Так как  $\Delta \Pi_i = 2\pi \Pi_i \eta_i$ , то

$$\eta_s = \frac{\sum \Delta \Pi_i}{2\pi \sum \Pi_i}. \quad (6.22)$$

Сравнивая (6.16) и (6.22), можно заключить, что, несмотря на различие фаз колебаний в разных слоях, полная энергия колебаний может быть определена как сумма энергий всех слоев в момент их наибольшей деформации. Это соответствует принципу, применяемому и для легкодемпфируемых систем, но с той разницей, что энергия определяется с учетом только действительной части комплексной жесткости, соответствующей чисто упругим свойствам.

Формула (6.21) учитывает «внутреннее» трение во всех элементах, как упругих, так и демпфирующих. Для полной оценки демпфирующих свойств конструкции необходимо учесть также демпфирование в соединениях, т.е. конструкционное демпфирование. Учитывая различную природу демпфирования в материалах и соединениях, получим

$$\eta = \eta_k + \frac{\sum \eta_i \Pi_i}{\sum \Pi_i}, \quad (6.23)$$

где  $\eta_k$  – составляющая КМП, учитывающая конструкционное демпфирование.

Для конструкции, состоящей из одного демпфирующего элемента (см. рис. 6.2) и одного несущего, можем написать

$$\eta = \eta_k + 1 + \frac{\eta_1 \Pi_1 + \eta_2 \Pi_2}{\Pi_1 + \Pi_2} - \eta_1.$$

Обозначая  $\eta_H = \eta_k + \eta_1$ , после неложных преобразований получим

$$\eta = \eta_H + (\eta_2 - \eta_1)A, \quad (6.24)$$

где

$$A = \left(1 + \frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right)^{-1} \quad (6.25)$$

показатель использования демпфирующих свойств ВП материала в конструкции:  $\eta_H$ - КМП, определяющий начальное демпфирование, т.е. демпфирование, которым обладала система до применения ВП элемента.

Для трехслойных конструкций (рис. 6.3)

$$A = \left(1 + \frac{\Pi_1 + \Pi_3}{\Pi_2}\right)^{-1}. \quad (6.26)$$

Как видим из формулы (6.25), для увеличения показателя  $A$  необходимо уменьшать отношение  $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$ , т.е. стремиться, чтобы энергия колебаний демпфирующего элемента  $\Pi_2$  превышала энергию колебаний конструктивного элемента  $\Pi_1$ .

**Показатели эффективности конструкций РЭС с полимерными демпферами.** Так как полимерные демпферы в конструкциях РЭС применяются для уменьшения АРК, их эффективность целесообразно оценивать показателем уменьшения резонансной амплитуды виброперемещения

$$\xi_w(x,y) = \frac{W_H(x,y)}{W_K(x,y)} \quad (6.27)$$

и показателем уменьшения резонансной амплитуды виброускорения

$$\xi_{\ddot{w}}(x,y) = \frac{\ddot{W}_H(x,y)}{\ddot{W}_K(x,y)} \quad (6.28)$$

В этих выражениях  $W(x,y)$  и  $\ddot{W}(x,y)$  – резонансные амплитуды виброперемещения и виброускорения в точках с координатами  $x, y$ , индекс "н" означает амплитуду до применения ПД, индекс "к" – после применения ПД. Например,  $\xi_w(x,y)=3$  означает, что амплитуда виброперемещения после применения ПД уменьшилась в 3 раза.

Учитывая формулу (6.28), получим

$$\xi_{\ddot{w}}(x,y) = \xi_z \xi_k(x,y) \xi_\eta \quad (6.29)$$

где  $\xi_{\ddot{z}} = \frac{\ddot{Z}_{OH}}{\ddot{Z}_{OK}}$  – показатель, учитывающий изменение амплитуды виброускорения входного воздействия;

$\xi_K(x, y) = \frac{K_H(x, y)}{K_K(x, y)}$  – показатель, учитывающий изменение формы колебаний;

$\xi_\eta = \frac{\eta_K}{\eta_H}$  – показатель, учитывающий изменение демпфирования.

Часто  $\xi_{\ddot{z}}$  и  $\xi_K(x, y)$  равны единице и

$$\xi_{\dot{w}}(x, y) = \xi_\eta, \quad (6.30)$$

т.е. в этом случае изменение амплитуды виброускорения при резонансе зависит только от изменения демпфирующих свойств конструкции. На основе формулы (6.27) можем написать

$$\xi_w(x, y) = \xi_z \xi_K(x, y) \xi_\eta, \quad (6.31)$$

где  $\xi_z = \frac{Z_{OH}}{Z_{OK}}$  – показатель, учитывающий изменение амплитуды виброперемещения входного воздействия.

Если входное воздействие характеризуется амплитудой виброускорения, используя соотношение  $Z_o = (2\pi f)^2 Z_o$ , получим

$$\xi_z = \frac{\ddot{Z}_{OH} f_K^2}{\ddot{Z}_{OK} f_H^2}. \quad (6.32)$$

Учитывая формулу Релея – Ритца

$$f = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

получим

$$\xi_z = \xi_{\ddot{z}} \xi_\alpha \xi_D \xi_a \xi_m,$$

где  $\xi_\alpha = \alpha_H / \alpha_K$  – показатель, учитывающий изменение частотного коэффициента  $\alpha$ ;

$\xi_D = D_H / D_K$  – показатель, учитывающий изменение цилиндрической жесткости  $D$ ;

$\xi_a = a_K / a_H$  – показатель, учитывающий изменение длины (ширины) платы  $a$ ;

$\xi_m = m_K / m_H$  – показатель, учитывающий изменение массы.



При использовании ПД в виде слоя можно считать, что  $\alpha$ ,  $a$  не изменяются. Если амплитуда виброперемещения входного воздействия также не изменяется, получим

$$\xi_{\ddot{w}}(x, y) = \xi_{\eta} \xi_D \xi_m. \quad (6.33)$$

Примеры использования указанных показателей приведены ниже.

Учитывая (6.24) и (6.30), получим

$$\xi_{\ddot{w}}(x, y) = \frac{\eta_H}{\eta'_H} + \chi A, \quad (6.34)$$

где  $\chi = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta'_H}$ .

Заметим, что  $\eta'_H$  – КМП конструкции до применения ДП,  $\eta_H$  – КМП той же части конструкции, но после применения ПД. Их величины не совпадают из-за различных амплитуд колебаний до и после применения ПД. Так как  $\eta_2 \gg \eta_H$  и  $\eta_2 \gg \eta_K$  в конструкциях с ПД можно принимать  $\eta_H = \eta'_H$ .

Как видно из приведенных формул, величины показателей  $\xi_{\ddot{w}}(x, y)$  и  $\xi_w(x, y)$  зависят не только от координат  $x, y$  точки платы, но и от жесткости конструкции, а следовательно, и модуля упругости и КМП ВП материала, которые могут изменяться в несколько раз в диапазонах частот и температур эксплуатации РЭС.

Возникают вопросы, какой показатель ( $\xi_w$  или  $\xi_{\ddot{w}}$ ) принимать для оценки эффективности применения полимерного демпфера, в какой точке платы и при каких условиях эксплуатации его рассчитывать.

Ответ на первый вопрос дается в зависимости от наблюдаемых или прогнозируемых видов отказов РЭС. Если отказы обусловлены разрушением конструкции, то их причины объясняются большими амплитудами виброперемещения, а следовательно, механического напряжения в материале конструкции. В этом случае полимерные демпферы должны снижать амплитуды виброперемещения при резонансе, и их эффективность необходимо оценивать показателем  $\xi_w(x, y)$ . Если отказы параметрические, т.е. обусловлены недопустимым изменением выходных параметров РЭС, это свидетельствует о недопустимо больших перегрузках на ЭРЭ и необходимо уменьшить амплитуды виброускорения. В этом случае необходимо применять показатель  $\xi_{\ddot{w}}(x, y)$ . Очевидно, что если могут возникать отказы того и другого вида, то и эффективность ПД следует оценивать обоими показателями.

Ответ на второй вопрос можно дать в зависимости от последствий отказа. Если отказ РЭС не допустим, то эффективность ПД целесообразно

оценивать минимальным, т.е. наихудшим значением показателей  $\xi_{\dot{w}}(x, y)$  или  $\xi_w(x, y)$ . Если в основу оценки системы положен общий экономический эффект от применения РЭС данного типа, то эффективность ПД целесообразно оценивать по среднему в условиях эксплуатации системы значениям  $\bar{\xi}_{\dot{w}}(x, y)$  и  $\bar{\xi}_w(x, y)$ .

Указанные показатели могут определяться как для точки максимальной амплитуды колебаний, так и усредняться по площади платы.

## Контрольные вопросы

1. Дайте определение демпфера, демпфирования вибраций, диссипативной силы.
2. Какие факторы влияют на демпфирование колебаний?
3. Как можно определить энергию потерь в соединениях?
4. Назовите особенности демпфирования в соединениях конструкций.
5. Какие гипотезы используются для учёта демпфирования в материалах? Их сущность.
6. Что понимается под коэффициентом поглощения? Его связь с параметрами системы.
7. Что понимается под коэффициентом механических потерь? Его связь с параметрами системы и другими характеристиками демпфирования.
8. Как определяется логарифмический декремент колебания?
9. Какие виды полимерных демпферов применяются в РЭС?
10. Дайте краткую характеристику полимерных демпферов в виде ДС, ДР, ДВ.
11. Как определяется КМП через энергии потерь и потенциальные энергии элементов конструкций РЭС?
12. Дайте вывод общей формулы КМП конструкций с полимерными демпферами.
13. Как зависит КМП конструкции от КМП и потенциальных энергий отдельных конструктивных элементов?
14. Напишите общую формулу КМП конструкций РЭС.
15. Расскажите о показателе использования демпфирующих свойств ВП материала в конструкции.
16. Каков смысл и как определяются показатели уменьшения резонансных амплитуд виброперемещения и виброускорения конструкций РЭС?
17. В чем причина различия в показателях уменьшения резонансных амплитуд виброперемещения и виброускорения?
18. Расскажите о принципах выбора показателей для оценки эффективности применения ПД.

## Глава 7

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА ЯЧЕЕК ЭА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОЛИМЕРНЫМИ ДЕМПФЕРАМИ

### 7.1. ЯЧЕЙКИ С ВНЕШНИМ ДЕМПФИРУЮЩИМ СЛОЕМ

При изгибных колебаниях конструкций ячеек с внешним ДС (рис. 7.1) основными видами деформации слоев являются изгиб и растяжение [11]. Деформации сдвига значи-

тельно меньше и ими обычно пренебрегают. При нанесении ВП материала на основную конструкцию, например плату или шасси, нейтральный слой конструкции смещается в направлении ДС. Вид деформации конструкции показан на рис. 7.2. Так как основными видами деформации являются изгиб и растяжение – сжатие, то потенциальная энергия каждого слоя:

$$P_i = P_{iu} + P_{ip}, \quad (7.1)$$

где  $P_{iu}$ ,  $P_{ip}$  — составляющие потенциальной энергии в  $i$ -м слое, обусловленные деформациями изгиба и растяжения-сжатия соответственно.

Величины  $P_{iu}$  и  $P_{ip}$  можно найти по известным формулам теории упругости [3]

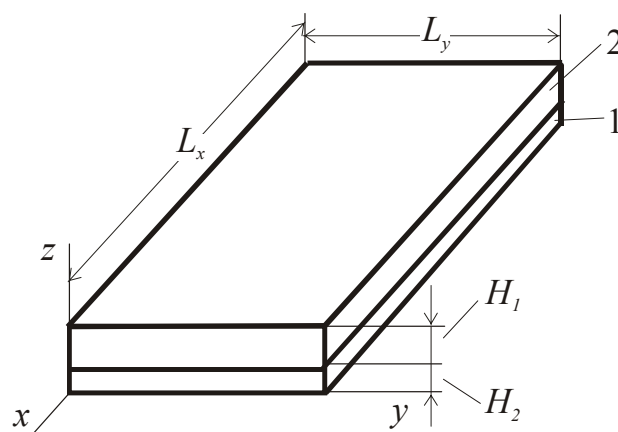


Рис. 7.1. Плата с внешним демпфирующим слоем: 1 – несущий слой, 2 – демпфирующий слой

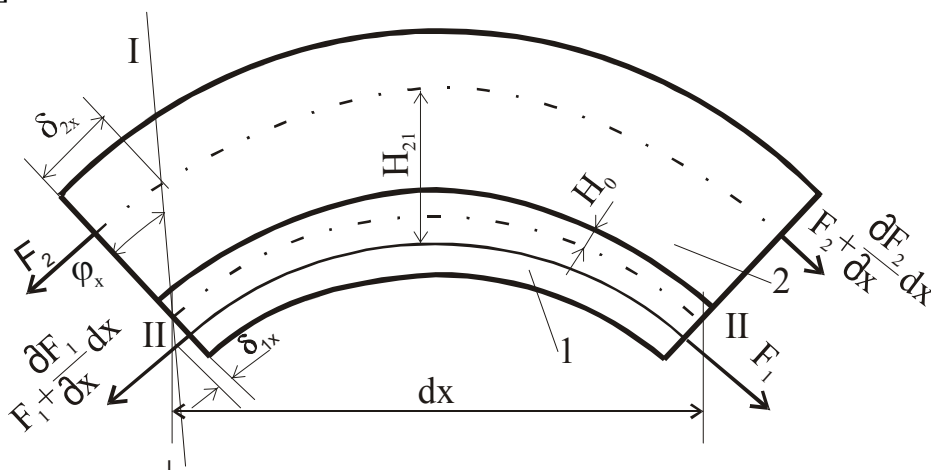


Рис. 7.2. Вид деформации платы:  
1 – несущий слой; 2 – демпфирующий слой;  
I-I – положение торца платы до изгиба;  
II-II – нейтральный слой

$$\Pi_{iu} = \frac{D_2}{2} \iint_{00}^{ab} \left\{ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu_i) \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (7.2)$$

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i H_i}{2(1-\nu_i)} \iint_{00}^{ab} \left[ \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_i}{\partial y} \right)^2 + 2\nu_i \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial V_i}{\partial y} \right] dx dy, \quad (7.3)$$

где  $W = W(x, y)$  – деформация изгиба;

$U_i, V_i$  – продольные деформации  $i$ -го слоя в направлении  $x$  и  $y$  соответственно.

Так как для прямоугольных плат, свободно опертых по всем краям, форма колебаний при резонансе определяется выражением

$$W(x, y) = A_{if} \sin k_x x \sin k_y y, \quad (7.4)$$

где волновые числа  $k_x = l\pi/a$ ,  $k_y = f\pi/b$ , то выражение в формуле (7.2)

$$\iint_{00}^{ab} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

Представим связь между деформациями изгиба  $W(x, y)$  и растяжения – сжатия  $U_i, V_i$  в виде

$$U_i = R_{ix} \frac{\partial W}{\partial x}; \quad V_i = R_{iy} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad (7.5)$$

где  $R_{ix}, R_{iy}$  – неизвестные коэффициенты связи деформаций.

Подставляя (7.4) и (7.5) в (7.2) и (7.3), получаем:

$$\Pi_{iu} = \frac{D_i}{8} (k_x^2 + k_y^2)^2 A_{if} ab; \quad (7.6)$$

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i H_i}{8(1-\nu_i^2)} (R_{ix}^2 k_x^4 + R_{iy}^2 k_y^4 + 2\nu_i R_{ix} R_{iy} k_x^2 k_y^2) A_{if} ab. \quad (7.7)$$

Коэффициенты связи деформаций найдем из статических и геометрических соотношений при изгибе. Для изгиба в направлении оси  $X$  можно записать

$$U_1 + U_2 = \varphi_x H_{21}; \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial F_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial x} = 0. \quad (7.9)$$

Продольные силы  $F_{ix}$  найдем из следующих соображений. В каждом слое, как показано на рис. 7.3, действуют нормальные напряжения  $\sigma_x$ , обусловленные продольными и изгибными деформациями.

Силу  $F_{ix}$  найдем интегрированием этих напряжений по площади поперечного сечения:

$$F_i = \int_0^{H_{i1}} \int_{-H_{i2}}^{l_y} \sigma_x dy dx.$$

Подставляем в это выражение формулу обобщенного закона Гука

$$\sigma_x = -\frac{E_i Z}{1 - \nu_i} \left( \frac{1}{\rho_x} + \nu_i \frac{1}{\rho_y} \right)$$

где  $\rho_x, \rho_y$  – радиусы кривизны плит в направлении осей  $X$  и  $Y$ ;  $Z$  – расстояние от некоторого слоя до нейтрального слоя.

Интегрируя получаем:

$$F_i = -\frac{E_i b}{1 - \nu_i^2} \left( \frac{1}{\rho_x} + \nu_i \frac{1}{\rho_y} \right) \left( \frac{H_{i1}^2 - H_{i2}^2}{2} \right) \quad (7.10)$$

Для малых прогибов справедливы соотношения:

$$\frac{1}{\rho_x} \approx \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\rho_y} \approx \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Учитывая выражение (7.4), получаем:

$$\frac{1}{\rho_x} = -k_x^2 W; \quad \frac{1}{\rho_y} = -k_y^2 W.$$

Подставим их в (7.10). Замечая, что  $H_{i1} + H_{i2} = H_i$ , и обозначая  $k_i = \frac{E_i H_i}{(1 - \nu_i^2)}$ , выражение (7.10) приведем к виду:

$$F_i = K_i b \frac{H_{i1} - H_{i2}}{2\rho_x} \left( 1 - \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right).$$

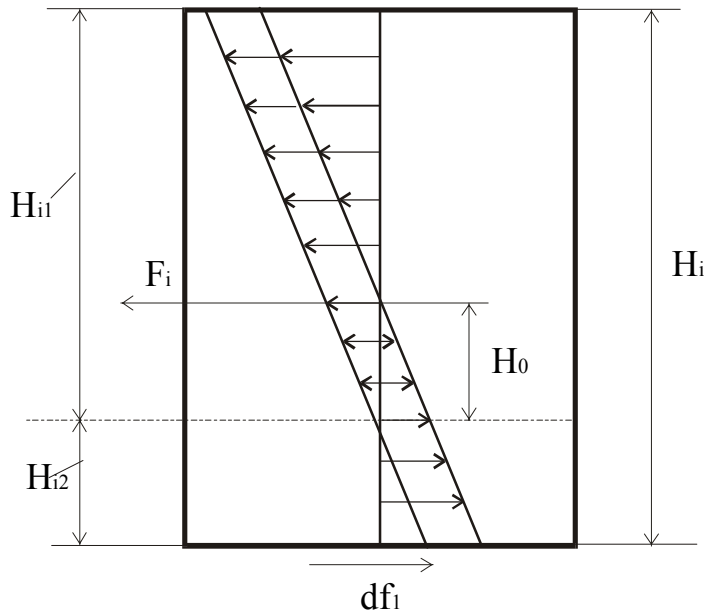


Рис. 7.3. Силы, действующие в  $i$ -м слое при изгибе двухслойной плиты

Заметим, что выражение  $H_{i1} - H_{i2}/2\rho_x$  определяет относительную продольную деформацию  $\varepsilon_{ix} = \partial U_i / \partial x$  средней плоскости  $i$ -го слоя при действии силы  $F_i$ .

Учитывая соотношение  $\partial^2 U_i / \partial x^2 = -k_x^2 U_i$ , получаем:

$$\frac{\partial F_{ix}}{\partial x} = -k_i b k_x^2 U_i \left( 1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right).$$

Подставляя это выражение в (7.10), запишем:

$$k_1 U_1 \left( 1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right) - k_2 U_2 \left( 1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right) = 0. \quad (7.11)$$

Решая совместно уравнения (7.8) и (7.11), находим:

$$U_1 = \frac{H_{21} k_{2x}}{1 + k_{2x}} \varphi_x; U_2 = \frac{H_{21}}{1 + k_{2x}} \varphi_x, \quad (7.12)$$

где

$$k_{2x} = \frac{E_2 H_2 (1 + \nu_1^2) (1 + \nu_2 k_y^2 / k_x^2)}{E_1 H_1 (1 + \nu_2^2) (1 + \nu_1 k_y^2 / k_x^2)}. \quad (7.13)$$

Сравнивая (7.12) и (7.5) и принимая во внимание, что  $\varphi_x = \partial W / \partial x$ ,

$$R_{1x} = \frac{H_{21} k_{2x}}{1 + k_{2x}}; \quad R_{2x} = \frac{H_{21}}{1 + k_{2x}}. \quad (7.14)$$

Выражения (7.1), (7.6), (7.7), (7.14) совместно с (6.24), (6.25) являются математической моделью однородной прямоугольной платы, свободно опертой по краям, с внешним демпфирующим слоем.

**Приближенные формулы.** Математическая модель, полученная в предыдущем разделе, использована для исследования влияния собственной формы колебаний, определяемой в основной способом крепления, на

величину отклонения  $\Delta = \frac{A_i - A_1}{A_1} \cdot 100\%$ . Здесь  $A_i$  обозначен коэффициент

$A$ , определенный при некотором соотношении волновых чисел  $\frac{K_y}{K_x}$ , а  $A_1$

— коэффициент  $A$  при  $\frac{K_y}{K_x} = 1$ . При вычислениях принимались

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.4$ ;  $k_2 = 10$ . Результаты исследования представлены на рис. 7.4.

Видно, что влияние собственной формы колебаний на коэффициент  $A$  зависит от  $k_2$ : оно может быть несущественным при большой величине и

значительным (30 %) при малой величине  $k_2$ . В связи с тем, что  $k_2$  ВП материалов в значительной степени зависит от температуры и для одного и того же материала в заданном интервале температур, например от  $-60\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+70\text{ }^{\circ}\text{C}$ , может изменяться на несколько порядков, расчет демпфирующих свойств целесообразно вести с учетом влияния собственной формы колебаний.

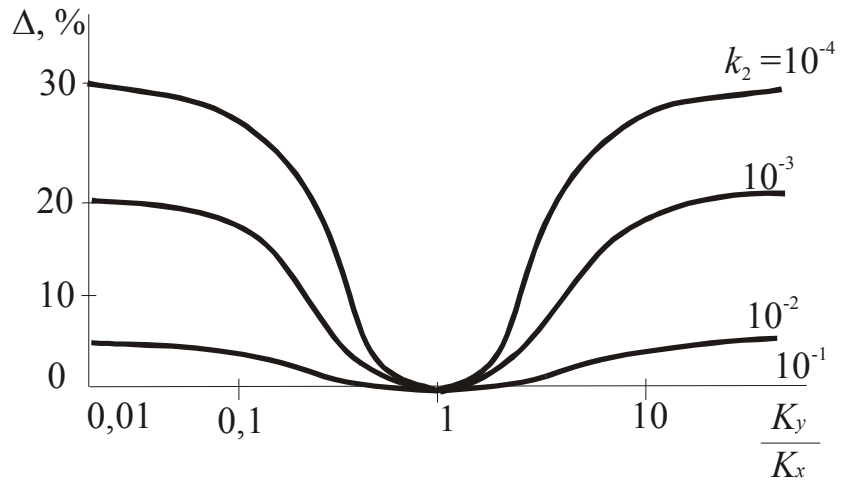


Рис. 7.4. Зависимость  $\Delta$  от соотношений волновых чисел

На практике обычно используются способы крепления плат, отличные от свободного опирания. В связи с чем собственные формы колебаний не могут быть строго описаны выражением (7.4) и определить волновые числа  $K_x$  и  $K_y$  не удастся. В этой ситуации расчет можно производить для крайних случаев, когда  $K_x=K_y$  и  $K_y=0$ . При  $K_y=0$ , преобразовав полученные соотношения, мы придем уже к известному выражению, а при  $K_x=K_y$ , вводя обозначения [11]

$$X = 2 \left[ \frac{C_v}{1+k_2 C_v} + \sigma_1 \frac{C_v^2}{(1+k_2 C_v)^2} \right]; \quad Y = 2 \left[ \frac{1}{1+k_2 C_v} + \sigma_1 \frac{1}{(1+k_2 C_v)^2} \right];$$

$$C_v = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1},$$

получим выражение

$$A = \frac{k_2 \cdot [h_2^2 + 0,75 \cdot (1+h_2)^2 Y]}{1+k_2 \cdot [h_2^2 + 0,75 \cdot (1+h_2)^2 \cdot (Y+k_2 x)]}. \quad (7.15)$$

Расчет по формуле (7.15) будет соответствовать наихудшему случаю. Для предварительных расчетов, учитывая, что  $C_v=1$  и  $1+k_2 \approx 1$ , можно использовать соответственно выражения

$$A_{\max} = \left\{ 1 + \frac{1}{k_2 [3(1+h_2)^2 + h_2^2]} \right\}^{0,5}. \quad (7.15a)$$

при  $K_y=0$  и

$$A_{\min} = \left\{ 1 + \frac{1}{k_2 [1,5(1+\nu_2)(1+h_2^2) + h_2^2]} \right\} \quad (7.15b)$$

при  $K_y = K_x$ .

Таким образом расчеты по формулам (7.15а) и (7.15б) позволяют найти интервал, в котором будут находиться значения КМП и КП независимо от формы колебаний.

На рис. 7.5 показана зависимость, рассчитанная по формуле (7.15а), показателя  $A$  от относительной толщины ДС  $h_2$  и относительного модуля упругости ВП материала  $e_2$ . Видно, что повышение толщины и модуля упругости ВП материала приводит к повышению показателя  $A$ , следовательно, и к увеличению демпфирующих свойств конструкции.

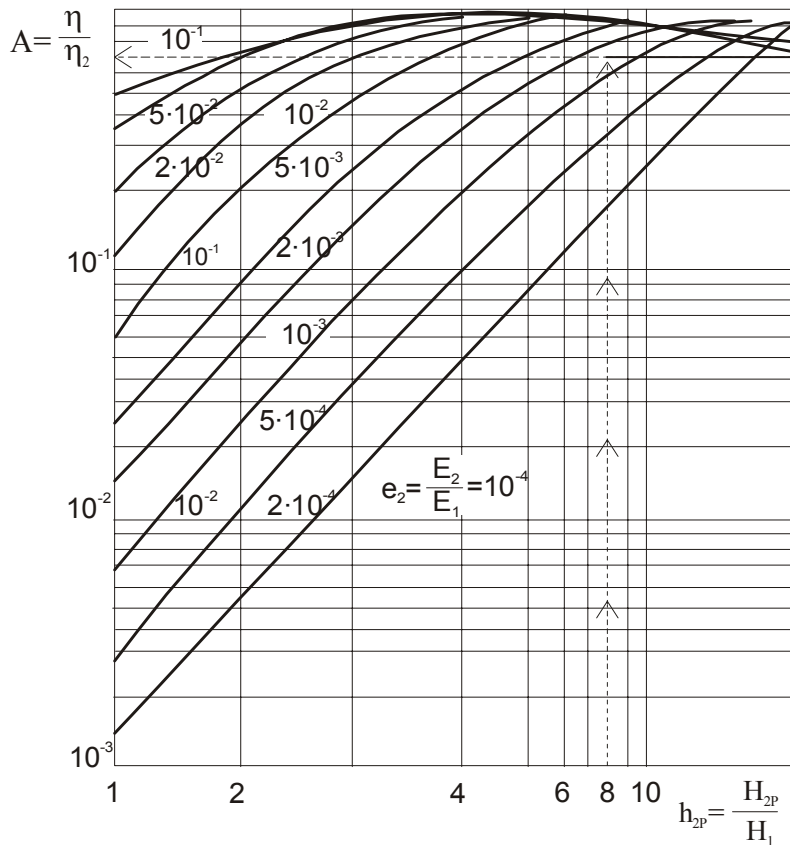


Рис. 7.5. Зависимость  $\frac{\eta}{\eta_2}$  относительных толщин  $h_2$  и модуля упругости  $E_2$  вибропоглощающего материала

найти из необходимости соблюдения равенства

$$m_k = N m_H, \tag{7.16}$$

где  $N$  – допустимый коэффициент увеличения начальной массы конструкции  $m_H$ , приведенной к единице площади;

$m_k$  – приведенная к единице площади масса конструкции после нанесения ДС.

Необходимость обеспечения большой относительной толщины ДС часто приводит к недопустимому увеличению массы конструкции РЭС.

Эту сложность можно преодолеть, если уменьшить первоначальную толщину ДС, выбираемую, как правило, из требований обеспечения статической жесткости конструкции, например, печатной платы. Нанесение ДС компенсирует уменьшение статической жесткости.

Если задается ограничение на массу конструкции, то максимально допустимую толщину ДС можно



Выражение (7.16) можно представить в виде

$$H_1\rho_1 + H_2\rho_2 + m_3 = NH_{1H}\rho_1 + m_3, \quad (7.17)$$

где  $\rho_1, \rho_2$  - плотность материала несущего и ДС;  $m_3$  - масса ЭРЭ.

Из (7.17) получим

$$H_{2\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(Nh_1 - 1)H_{1k}, \quad (7.18)$$

где  $h_1 = \frac{H_{1H}}{H_{1K}}$ .

Если ВП слой наносится, например заливкой со стороны ЭРЭ (рис. 7.6), толщина  $H_{2\rho}$  должна увеличиваться, так как часть объема будет занята ЭРЭ. Ее можно найти по выражению

$$H_2 = \frac{H_{2\rho}}{K_S}, \quad (7.19)$$

если  $H_{2\rho} \leq H_3$ , и по выражению

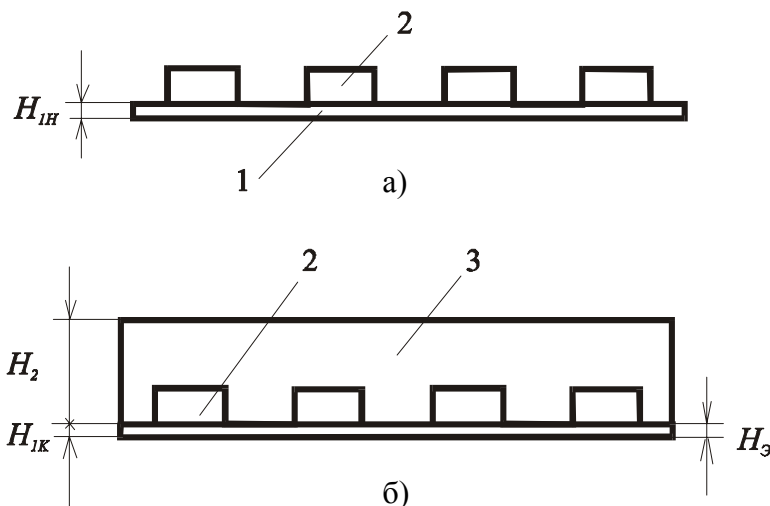


Рис. 7.6. Ячейка РЭС без демпфирующего (а) и с демпфирующим покрытием (б):

1 - плата; 2 - ЭРЭ; 3 - демпфирующее покрытие

$$H_2 = H_{2\rho} + H_3(1 - K_S), \quad (7.20)$$

если  $H_{2\rho} > H_3$

В этих выражениях  $K_S = \frac{v_{ВП}}{v_{ВП} + v_3}$  - коэффициент заполнения

ячейки в пределах высоты ЭРЭ ВП материалом;  $v_{ВП}, v_3$  - объемы, занимаемые ВП материалом и радиоэлементами.

**Пример 7.1.** Исходные данные. Для уменьшения резонансных колебаний на ячейку (рис. 7.7) нанесен слой пенополиуретана ППУ-202-2 толщиной 7 мм, динамические, механические характеристики которого приведены в табл. П.7. Плотность пенополиуретана  $\rho=220 \text{ кг/м}^3$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,45$ . Рассчитать коэффициент передачи  $\mu_1$  в центре ячейки при первом резонансе в диапазоне температур от  $-60$  до  $+70^\circ\text{C}$ . Плата ячейки выполнена из стеклотекстолита марки СТЭФ толщиной 0,5 мм. Коэффициент заполнения объема ВП пенополиуретаном  $K_S = 0,7$ . Общая масса радиоэлементов 0,0098 кг. Для стеклотекстолита СТЭФ

$$E = 3,02 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \rho = 2,05 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \nu = 0,22, \eta_1 = 0,02.$$

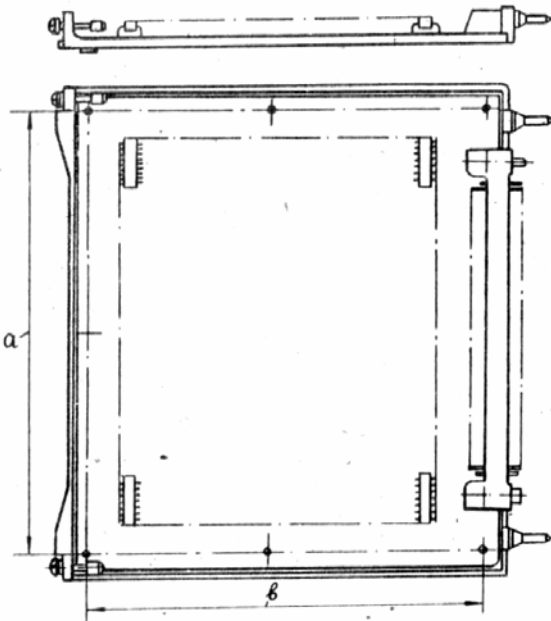
КМП ячейки до нанесения ВП слоя  $\eta_H = 0,056$ .

РЕШЕНИЕ. Выбираем расчетную модель в виде пластины, свободно опертой по контуру, с размерами  $a = b = 7 \cdot 10^{-2}$  м, находим ее цилиндрическую жесткость до нанесения вл слоя

$$D_1 = \frac{E_1 H_1^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} (0,5 \cdot 10^{-3})^3}{12(1-0,22^2)} = 0,33 \text{ Н/м}$$

и первую собственную частоту колебаний по формуле

$$f = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}} = 1,57 \left( \frac{1}{0,07^2} + \frac{1}{0,07^2} \right) \sqrt{\frac{0,33}{2,05 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}} = 363 \text{ Гц.}$$



Рассчитываем собственную частоту колебаний пластины с демпфирующим слоем методом последовательного приближения.

Так как после нанесения демпфирующего слоя можно предположить, что частота колебаний будет больше, чем  $f_1$ , в первом приближении выберем  $f_1' = 600$  Гц и для этой частоты и температуры  $t = -60^\circ\text{C}$  из табл. П.7 найдем

$$E^I = 1200 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Определив относительную расчетную толщину демпфирующего слоя (7.19)

$$h_{2p} = \frac{H_{2p}}{H_1} = h_{2p} \text{ вые. } \frac{7,70 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8}{0,5} \text{ РЭС} \quad (7.21)$$

и относительную жесткость (7.13) для наихудшего случая, когда  $k_y = k_x$

$$k_{2x} = \frac{E_2^I H_{2p} (1-\nu_1)}{E_1 H_1 (1-\nu_2)} = \frac{1200 \cdot 10^5 \cdot 9,8 (1-0,22)}{3,02 \cdot 10^{10} (1-0,45)} = 5,25 \cdot 10^{-2}$$

найдем коэффициент увеличения жесткости [6, с. 44]

$$d = 1 + k_{2x} h_{2p}^2 + \frac{3k_{2x} (1+h_{2p})^2}{1+k_{2x}} = 1 + 5,52 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8^2 + \frac{3 \cdot 5,52 \cdot 10^{-2} (1+9,8)^2}{1+5,52 \cdot 10^{-2}} \approx 24,6$$

цилиндрическую жесткость [11]

$$D = D_1 d = 0,33 \cdot 24,6 = 8,12 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Собственная частота во втором приближении, учитывая, что

$$m = \rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 + m_3 / S = 2,05 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3 + 0,22 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 10^{-3} + 9,8 \cdot 10^{-3} / (7 \cdot 10^{-2})^2 = 4,1 \text{ кг},$$

равна  $f_1^{II} = 640,8 \sqrt{8,12 / 4,1} = 902 \text{ Гц}$ .

Для частоты 902 Гц из табл. П.7 интерполированием находим

$$E_2^{II} = 1200 + \left( \frac{2200 - 1200}{1200 - 600} \right) (902 - 600) = 1703 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Находим третье приближение частот, последовательно вычисляя

$$k_{2x} = \frac{1703 \cdot 10^5 \cdot 9,8 \cdot (1 - 0,22)}{3,02 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0,45)} = 7,83 \cdot 10^{-2};$$

$$d = 1 + 7,83 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8^2 + \frac{3 \cdot 7,83 \cdot 10^{-2} (1 + 9,8)^2}{1 + 7,83 \cdot 10^{-2}} \approx 33,93;$$

$$D = 0,33 \cdot 33,93 = 11,2 \text{ Н/м};$$

$$f_1^{III} = 640,8 \sqrt{11,2 / 4,1} = 1959 \text{ Гц}.$$

Для частоты 1059 Гц интерполированием, используя табл. П.7, находим

$$E_2^{III} = 1200 + \left( \frac{2200 - 1200}{1200 - 600} \right) (1059 - 600) = 1965 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Находим четвертое приближение частоты, последовательно вычисляя

$$k_{2X} = 9,03 \cdot 10^{-2}; d = 38,66; D = 12,76 \text{ Н/м};$$

$$f_1^{IV} = 640,8 \sqrt{12,76 / 4,1} = 1130 \text{ Гц}.$$

Так как третье и четвертое приближения различаются меньше, чем на 10%, принимаем  $f_1 = 1130 \text{ Гц}$ . Для  $t = -60^\circ$  и  $f_1 = 1130 \text{ Гц}$  из табл. П.7. интерполированием  $\eta_2 = 0,1$ .

По формуле (7.15б) рассчитываем параметр  $A$

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{9,03 \cdot 10^{-2} [1,5(1 + 0,45)(1 + 9,8)^2 + 9,8^2]} \right\}^{0,5} = 0,95.$$

Находим коэффициент механических потерь по формуле (6.24):

$$\eta = 0,056 + (0,1 - 0,02)0,95 = 0,132.$$

Рассчитываем, используя табл. П5, коэффициент  $K(x, y)$ :

$$K(0,5; 0,5) = K^2(0,5) = 1,27^2 = 1,61.$$

Определяем коэффициент передачи в центре при первом резонансе по формуле (3.60, ч.1).

$$\mu_1(0,5; 0,5) = \sqrt{\frac{1,61^2}{0,132^2} + 1} = 12,2.$$

Находим по формуле (6.34) коэффициент уменьшения амплитуды колебаний

$$\xi_w(0,5; 0,5) = 1 + \frac{0,1 - 0,02}{0,056} \cdot 0,95 = 2,66.$$

Аналогично проводится расчет для других температур. Результаты расчета приведены в табл. 7.1.

Т а б л и ц а 7.1

Результаты расчета

$t^{\circ}, C$	$f, Гц$	$\mu$	$\xi_w$	$t^{\circ}, C$	$f, Гц$	$\mu$	$\xi_w$
-60	1130	12,2	2,56	+20	250	12,6	2,13
-40	550	7,2	4,00	+40	237	15,2	1,89
-20	400	11,1	2,63	+60	230	11,7	2,50
0	326	12,7	2,27	+70	224	10,7	2,70

Среднее значение коэффициента  $\bar{\xi}_w(0,5;0,5) = 2,57$ .

## 7.2. ЯЧЕЙКИ С ВНУТРЕННИМ ДЕМПИРУЮЩИМ СЛОЕМ

На рис. 7.8 показана трёхслойная плата. Используя формулу (7.26) и учитывая, что в ВП слое будут развиваться деформации изгиба, сдвига и растяжения, а в несущих слоях преимущественно – изгиба и растяжения [11], выражение для коэффициента  $A$  платы можно представить в виде

$$A = \left( 1 - \frac{\Pi_{1u} + \Pi_{1p} + \Pi_{3u} + \Pi_{3p}}{\Pi_{2u} + \Pi_{2p} + \Pi_{2c}} \right)^{0.5}, \quad (7.22)$$

где  $\Pi_{iu}, \Pi_{ic}, \Pi_{ip}$  – потенциальные энергии, определяемые деформациями изгиба, сдвига и растяжения  $i$ -го слоя. Для получения формулы пригодной

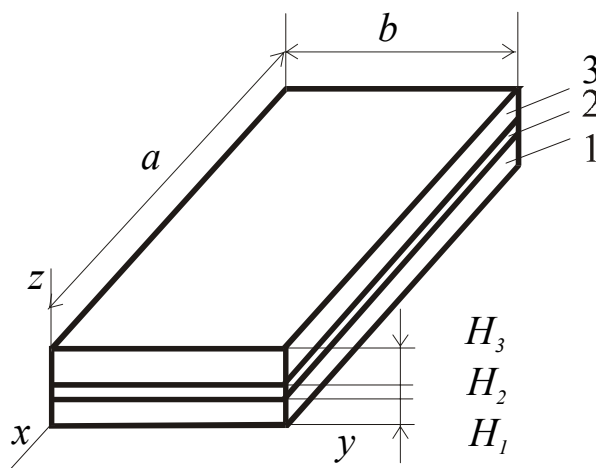


Рис. 7.8. Плата с внутренним демпфирующим слоем:  
1, 3 – несущие слои; 2 – демпфирующий слой

для практических расчётов, необходимо выразить коэффициент  $A$  через физические и геометрические параметры слоёв. С этой целью воспользуемся известными из теории упругости формулами для энергий изгиба, сдвига и растяжения-сжатия однородных пластин и будем считать, что форма колебаний описывается простейшим выражением (7.4), справедливым для пластины, свободно опертой по всем краям. Волновые числа  $k_x$  и  $k_y$  для прямоугольной пластины оп-

ределяются выражениями  $k_x = l\pi/a$ ,  $k_y = f\pi/b$  и связаны соотношением

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad (7.23)$$

где  $k = f_0^{0.5} \left( \frac{m}{D} \right)^{0.25}$  – волновое число.

Энергия изгиба определяется выражением (7.2). Производные, входящие в это выражение, после подстановки (7.4) равны

$$\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} = -k_x^2 W(x,y); \quad \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} = -k_y^2 W(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} = k_x A_{lf} \cos k_x x \cdot \cos k_y y.$$

После интегрирования получим

$$\Pi_{iu} = \frac{Di}{8} (k_x^2 + k_y^2)^2 A_{ef} ab. \quad (7.24)$$

Для определения энергий  $\Pi_{ic}$ ,  $\Pi_{ip}$  представим зависимости между деформацией изгиба  $W(x, y)$  и деформациями растяжения  $U_i$ ,  $V_i$  и сдвига  $\gamma_{ix}$ ,  $\gamma_{iy}$  в направлении осей  $x, y$  соответственно в виде:

$$U_i = R_{ix} \frac{\partial W(x,y)}{\partial x}; \quad \gamma_{ix} = Z_{ix} \frac{\partial W(x,y)}{\partial x}; \quad (7.25a)$$

$$V_i = R_{iy} \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}; \quad \gamma_{iy} = Z_{iy} \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}; \quad (7.25b)$$

где  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$ ,  $Z_{ix}$ ,  $Z_{iy}$  – коэффициенты связи деформации в  $i$ -м слое, а частные производные  $\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}$  определяют углы изгиба в направлении соответствующих осей.

Потенциальная энергия растяжения-сжатия прямоугольной пластинки, имеющей размеры сторон  $a$  и  $b$  и толщину  $H_i$ ,

$$\Pi_{ip} = \frac{H_i}{2} \int_0^a \int_0^b (\sigma'_{ix} \varepsilon_{ix} + \sigma'_{iy} \varepsilon_{iy}) dx dy,$$

где  $\sigma'_{xy}$ ,  $\sigma'_{iy}$  – действительные части напряжений,  $\varepsilon_{ix}$ ,  $\varepsilon_{iy}$  – относительные деформации растяжения - сжатия в направлении соответствующих осей.

Используя формулу закона Гука для растяжения-сжатия в двух направлениях

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x),$$

получим

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i' H_i}{2(1-\nu^2)} \iint_{00}^{ab} (\varepsilon_{ix}^2 + \varepsilon_{iy}^2 + 2\nu_i \varepsilon_{ix} \varepsilon_{iy}) dx dy. \quad (7.26)$$

Согласно выражениям (7.25), напишем

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = R_x \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = R_y \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}.$$

Подставляя эти выражения в (7.26) и интегрируя, найдём

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i H_i}{8(1-\nu_i^2)} (R_{ix}^2 k_x^4 + R_{iy}^2 k_y^4 + 2\nu_i R_{ix} R_{iy} k_x^2 k_y^2) A_{if} ab. \quad (7.27)$$

Потенциальная энергия сдвига в  $i$ -м слое

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i H_i}{8(1-\nu_i^2)} (R_{ix}^2 k_x^4 + R_{iy}^2 k_y^4 + 2\nu_i R_{ix} R_{iy} k_x^2 k_y^2) A_{if} ab. \quad (7.28)$$

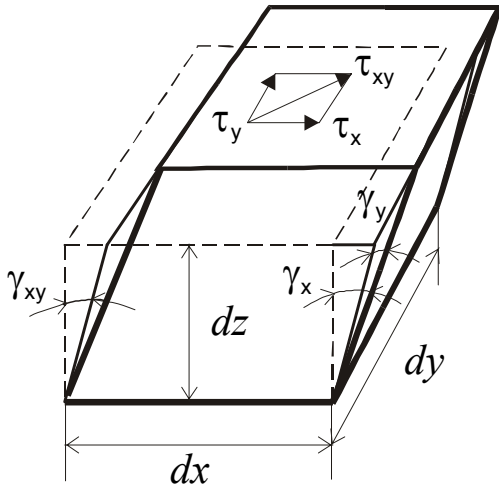


Рис. 7.9. Вид деформации элемента демпфирующего слоя

Потенциальная энергия сдвига в  $i$ -м слое

$$\Pi_{ic} = \frac{H_i}{2} \iint_{00}^{ab} \tau'_{ixy} \gamma_{ixy} dx dy, \quad (7.29)$$

где  $\tau'_{ixy}$  – действительная часть касательного напряжения. Смысл принятых обозначений виден из рис. 7.9. Учитывая соотношение  $\gamma_{xy} = (\gamma_{ix}^2 + \gamma_{iy}^2)^{0.5}$  и закон Гука для касательных напряжений  $\tau_{ixy} = G_i \gamma_{ixy}$ , выражение (7.29) приведём

к виду

$$\Pi_{ic} = \frac{G_i' H_i}{2} \iint_{00}^{ab} (\gamma_{ix}^2 + \gamma_{iy}^2) dx dy.$$

Подставляя в него соотношение (7.25) и учитывая, что

$$\iint_{00}^{ab} \left( \frac{\partial W(x,y)}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{k_x^2}{4} A_{if}^2 ab;$$

$$\iint_{00}^{ab} \left( \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} \right)^2 dx dy = \frac{k_y^2}{4} A_{if}^2 ab,$$

после интегрирования получим

$$\Pi_{ic} = \frac{G_i' H_i}{8} (L_{ix}^2 k_x^2 + L_{iy}^2 k_y^2) A_{if} ab. \quad (7.30)$$

С учётом выражений (7.23), (7.25), (7.27) и (7.30) формулу для коэффициента  $A$  представим в виде:

$$A = \left[ 1 + \frac{(D_1 + D_3)(k_x^2 + k_y^2)^2 + K_1(R_{1x}^2 k_x^4 + R_{1y}^2 k_y^4 + \dots + 2\nu_1 R_{1x} R_{1y} k_x^2 k_y^2) + K_3(R_{3x}^2 k_x^4 + R_{3y}^2 k_y^4 + 2\nu_3 R_{3x} R_{3y} k_x^2 k_y^2)}{D_2(k_x^2 + k_y^2)^2 + K_2(R_{2x}^2 k_x^4 + R_{2y}^2 k_y^4 + \dots + 2\nu_2 R_{2x} R_{2y} k_x^2 k_y^2) + G_2' H_2 (L_{2x}^2 k_x^4 + L_{2y}^2 k_y^4)} \right]^{0,5} \quad (7.31)$$

где  $K_i = \frac{H_i E_i}{(1 - \nu_i^2)}$ .

В формулу (7.31) входят коэффициенты  $R_{ix}, R_{iy}, L_{ix}, L_{iy}$ , определяющие связь деформаций растяжения-сжатия и сдвига во всех слоях. Они могут быть найдены анализом геометрических, физических и статических условий при изгибе трёхслойных плат.

При определении коэффициентов связи деформаций будем считать справедливой гипотезу Кирхгофа-Лява, принимаемую в теории колебаний при рассмотрении поперечных колебаний пластин. Кроме того, будем считать:

- 1) длины волн значительно больше толщин слоёв и все слои совершают одинаковые поперечные колебания;
- 2) проскальзывание между поверхностями упругих и демпфирующего слоя отсутствует;
- 3) жёсткость демпфирующего слоя значительно меньше упругих слоёв.

На рис. 7.10 показан вид деформаций элемента трёхслойной пластины в направлении оси  $x$ . Очевидно, что при жёсткости вибропоглощающего слоя, равного нулю, деформации  $u_1$  и  $u_3$ , вызываемые действием этого слоя, будут отсутствовать и слои займут положение, показанное пунктиром. Сдвиг между поперечными сечениями, которые в недеформированном состоянии расположены в одной плоскости  $O_1 O_2$ , будут максимальны.

При увеличении жёсткости вибропоглощающего слоя до некоторой величины возникнут продольные силы, действующие на упругие слои, и соответствующие им деформации сжатия и растяжения.

Из простых геометрических рассуждений можем получить:

$$-2u_1 = u_1 - u_3 - \varphi x \left( \frac{H_1 - H_3}{2} \right); \quad (7.32)$$

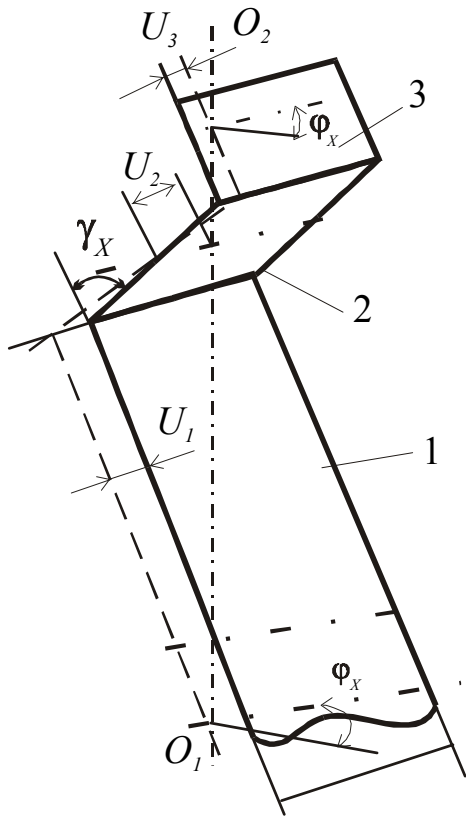


Рис. 7.10. Вид деформации элемента трехслойной платы

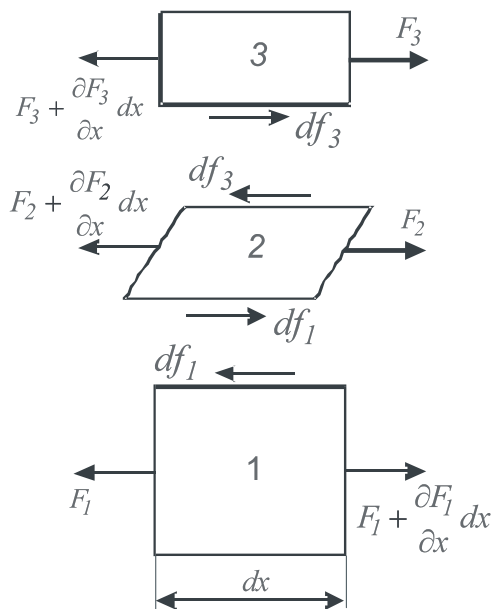


Рис. 7.11. Силы, действующие на элементы слоев платы

$$-H_2\gamma_x = u_1 + u_3 - \phi_x H_3, \quad (7.33)$$

где  $\gamma_x$  – угол сдвига;  $\phi_x$  – угол изгиба пластины;  $u_i$  – абсолютная деформация растяжения-сжатия  $i$ -го слоя.

Аналогичные уравнения можно получить, если рассматривать изгиб в направлении оси  $y$ . В дальнейшем индексы  $x$  будут опущены, так как результаты будут одинаковы для обоих направлений.

Под статическими условиями понимается равенство нулю всех внутренних и внешних сил, действующих как на пластину в целом, так и на каждый слой в отдельности. На основании рис. 7.11, на котором показаны силы, действующие на элементы слоёв пластины при максимальном изгибе, можно написать:

$$\begin{aligned} dF_2 &= df_1 - df_3; & dF_1 &= df_1; \\ dF_3 &= df_3; \end{aligned} \quad (7.34)$$

где  $dF_i = \frac{dF_i}{dx} dx$  – приращение силы  $F_i$ ,

действующей на  $i$ -й слой;

$df_i$  – приращение касательной силы, приложенной к поверхности 2-го слоя.

Касательная сила, определяющая сдвиг в вибропоглощающем слое,  $F_k = df_3$ . Учитывая (7.34), получим

$$F_k = \frac{dF_3}{dx} dx.$$

Используя закон Гука для касательных напряжений  $\tau = G_2\gamma$  и выражение

$$\tau = \frac{F_k}{dx} = \frac{dF_3}{dx}, \text{ с учётом (7.32) найдём}$$

$$\frac{dF_3}{dx} = -\frac{G_2}{H_2}(\sigma_1 + \sigma_3 - \phi H_3). \quad (7.35)$$



Применяя закон Гука для растяжения-сжатия в двух направлениях, получим

$$\sigma_x = -\frac{E_i Z}{1 - \nu_i^2} \left( \frac{1}{\rho_x} + \nu_i \frac{1}{\rho_y} \right); \quad \sigma_y = -\frac{E_i Z}{1 - \nu_i^2} \left( \frac{1}{\rho_y} + \nu_i \frac{1}{\rho_x} \right); \quad (7.36)$$

где  $\rho_x, \rho_y$  – радиусы кривизны пластины в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;

$Z$  – расстояние от нейтрального слоя;  $\nu_i$  – коэффициент Пуассона материала  $i$ -го слоя. Выразим силу  $F_3$  через соответствующую деформацию.

На рис. 7.3 показаны эпюры напряжений в слое при наличии продольной силы  $F_i$  и без неё. Видно, что появление силы приводит к смещению нейтральной плоскости на некоторую величину  $H_0$ .

Величину  $F_i$  можно найти интегрированием нормальных напряжений по поперечному сечению слоя:

$$F_i = \int_{-H_{i2}}^{H_{i1}} \sigma_x dz.$$

Учитывая выражение (7.36), после интегрирования получим

$$F_i = -\frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \left( \frac{1}{\rho_x} + \nu_i \frac{1}{\rho_y} \right) \left( \frac{H_{i1}^2 - H_{i2}^2}{2} \right).$$

Обозначив  $K_i = \frac{E_i H_i}{1 - \nu_i^2}$  и заметив, что  $H_i = H_{i1} + H_{i2}$ , найдём

$$F_i = -K_i \left( \frac{1}{\rho_x} + \nu_i \frac{1}{\rho_y} \right) \left( \frac{H_{i1} - H_{i2}}{2} \right). \quad (7.37)$$

Для малых прогибов справедливы соотношения :

$$\frac{1}{\rho_x} \approx \frac{d^2 W(x,y)}{dx^2}; \quad \frac{1}{\rho_y} \approx \frac{d^2 W(x,y)}{dy^2}.$$

Учитывая (7.4), приведём их к виду

$$\frac{1}{\rho_x} = -k_x^2 W(x,y); \quad \frac{1}{\rho_y} = -k_y^2 W(x,y).$$

Подставляя эти выражения в (7.37), получим

$$F_i = -K_i \frac{H_{i1} - H_{i2}}{2\rho_x} \left( 1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right).$$

Заметив, что выражение  $\frac{H_{i1} - H_{i2}}{2\rho_x}$  определяет деформацию  $\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$

растяжения-сжатия средней плоскости  $i$ -го слоя при действии силы  $F_{ix}$  и учитывая соотношение

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = -k_x^2 u_i,$$

найдем

$$\frac{dF_{ix}}{dx} = K_i k_x^2 u_i \left( 1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right). \quad (7.38)$$

Подставляя это соотношение в (7.35) и вводя обозначения

$$g_x = \frac{G_2}{K_3 H_2 k_y^2 \left( 1 + \nu_3 \frac{k_y^2}{k_x^2} \right)}, \quad (7.39)$$

после несложных преобразований получим

$$-u_1 = g_x (u_1 + u_3 - \varphi_x H_3). \quad (7.40)$$

Уравнение равновесия всей платы в направлении оси  $X$  в соответствии с рис. 7.8 можно представить в виде:

$$\left( -\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_3}{dx} \right) dx = 0$$

или

$$-\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_3}{dx} = 0.$$

Используя выражение (7.38) и вводя обозначения

$$k_{ix} = \frac{E_i H_i}{E_1 H_1} C_{\nu_i} C_{x_i}; \quad C_{\nu_i} = \frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_i^2}; \quad C_x = \frac{1 + \nu_i k_y^2 / k_x^2}{1 + \nu_i k_y^2 / k_x^2},$$

получим уравнение

$$-u_1 + u_2 k_{2x} + k_{3x} u_3 = 0. \quad (7.41)$$

Соотношения (7.32), (7.33), (7.40), (7.41) образуют систему уравнений, которую приведем к виду:

$$u_1 = R_{1x} \varphi_x;$$

$$u_2 = R_{2x} \varphi_x;$$

$$u_3 = R_{3x} \varphi_x;$$

$$\gamma_x = Z_{2x} \varphi_x,$$

где

$$\begin{aligned}
 R_{1x} &= \frac{\left[ k_2 \left( \frac{H_1 - H_3}{2} \right) (1 - g_x) - g_x H_{31} (k_2 + 2k_3) \right]}{\Delta x}; \\
 R_{2x} &= \frac{\left[ \left( \frac{H_1 - H_3}{2} \right) (1 - g_x - g_x k_3) - g_x H_{31} (1 - k_3) \right]}{\Delta x}; \\
 R_{3x} &= \frac{\left[ \left( \frac{H_1 - H_3}{2} \right) g_x k_2 - g_x H_{31} (2 + k_2) \right]}{\Delta x}; \\
 Z_{2x} &= \frac{\left[ H_{31} (2 + k_2) - k_2 \left( \frac{H_1 - H_3}{2} \right) \right]}{H_2 \Delta x}; \\
 \Delta x &= 2 + k_2 - 2g_x (k_3 + k_2 + 1).
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

Применяя аналогичные рассуждения при рассмотрении изгиба пластины в направлении оси  $y$ , найдем коэффициенты  $R_{1y}, R_{2y}, R_{3y}, Z_{2y}$ .

Эти коэффициенты могут быть получены из выражений (7.42) заменой индекса  $x$  на  $y$ .

Для определения цилиндрической жесткости трехслойной платы воспользуемся известным выражением из теории изгиба пластин [3]

$$D = M_x \frac{\partial x}{\partial \varphi_x},$$

которое для  $i$  – слоя можно представить в виде:

$$D_i = (M_{ii} + F_i H_{i0})_x \frac{\partial x}{\partial \varphi_x},$$

где  $M_{ii}$  – момент сил на  $i$ -й слой относительно собственной нейтральной оси;  $F_i$  – сила растяжения-сжатия  $i$ -го слоя,  $H_{i0}$  – расстояние от средней поверхности  $i$ -го слоя до нейтральной поверхности трехслойной платы.

Используя выражение

$$\begin{aligned}
 M_{ii} &= K_i \frac{H_i^2}{12} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; & F_1 &= K_1 H_{10} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; \\
 F_2 &= K_2 \left( H_{20} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{H_2}{2} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right);
 \end{aligned}$$

$$F_3 = K_3 \left( H_{30} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - H_2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right),$$

где  $H_{i0} = H_{i0} - H_0$ , после подстановки в выражение для  $D_i$  получим:

$$\begin{aligned} D_1 &= K_1 \left( \frac{H_1^2}{12} + H_0^2 \right); \\ D_2 &= K_2 \left( \frac{H_2^2}{12} - \frac{H_2^2}{12} \frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} + H_{20}^2 - \frac{H_2}{2} H_{20} \frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} \right); \\ D_3 &= K_3 \left( \frac{H_3^2}{12} + H_{30}^2 - H_{30} H_2 \frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} \right). \end{aligned} \quad (7.43)$$

В эти выражения входят неизвестные величины  $H_0$  и  $\frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x}$ . Из условия равенства нулю продольных сил, приложенных к пластине  $\sum_{i=1}^3 F_i = 0$ , найдем

$$H_0 = \frac{K_3 H_{31} + K_2 H_{21} - \left( \frac{K_2}{2} + K_3 \right) H_2 \frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x}}{K_1 + K_2 + K_3}. \quad (7.44)$$

Представляя  $\frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} = \frac{\partial \gamma_x / \partial x}{\partial \varphi_x / \partial x}$

и учитывая, что  $\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial \gamma_x / \partial x}{\partial \varphi_x / \partial x} = Z_{2x} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$ , получим

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} = Z_{2x}, \quad (7.45)$$

где  $Z_{2x}$  определяется выражением (7.42).

Формула (7.24) совместно с выражениями (7.35) – (7.38) позволяет рассчитать коэффициент  $A$  свободно опертой по всем краям платы с внутренним вибропоглощающим слоем. Недостатки ее в значительной сложности и ограниченности применения – только для плат свободно опертых по всем краям.

**Приближенные формулы.** На рис. 7.12 приведены зависимости КМП от соотношения волновых чисел для десяти различных конструкций.

Видно, что во всех случаях при соблюдении условия  $K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \text{const}$  наибольшие демпфирующие свойства имеют место

при  $K_y=0$ , т.е. когда деформации происходят преимущественно в одном направлении, что характерно для конструкций типа балок, и наименьшее при  $K_y=K_x$ . При этом разница составляет величину от нескольких процентов до нескольких десятков процентов (более 70%).

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- собственная форма колебаний ВП слоистой платы может существенно влиять на величину ее демпфирующих свойств.

- наименьшие демпфирующие свойства имеют место при равенстве изгибных деформаций в продольном и поперечном направлениях платы, наибольшие – при деформации только в одном направлении.

- в тех случаях, когда определение собственной формы колебаний не представляется возможным, можно найти предельные значения демпфирующих свойств (максимальное и минимальное), подставляя в полученные выражения соответственно  $K_x = K$ ,  $K_y = 0$  и  $K_x = P\sqrt{2}$ ,  $K_x = K_y$ .

Рассмотрим эти случаи.

Математическую модель ВП платы при  $K_y=0$  представим в виде

$$\eta = \frac{\eta_2 G'_2 H_2 L_{2x}^2}{DK_x^2}. \quad (7.46)$$

Значения  $L_{2x}$ ,  $D$  и  $K_x$  находятся из выражений:

$$L_{2x} = \frac{H_{31}}{H_2 [1 + g_x (1 + k_3)]}, \quad (7.47)$$

$$D = \frac{K_1 H_1^2}{12} + \frac{K_3 H_3^2}{12} + \frac{g_x H_{31}^2 K_3}{1 + g_x (1 + k_3)}, \quad (7.48)$$

где параметр сдвига

$$g_x = \frac{G'_2 \sqrt{1 + \eta_2^2}}{H_2 K_3 K_x^2}, \quad (7.49)$$

жесткость  $i$ -го слоя при растяжении-сжатии

$$K_i = E_i H_i / (1 - \nu_i^2),$$

относительная жесткость  $i$ -го слоя  $k_i = K_i / K_1$ ;

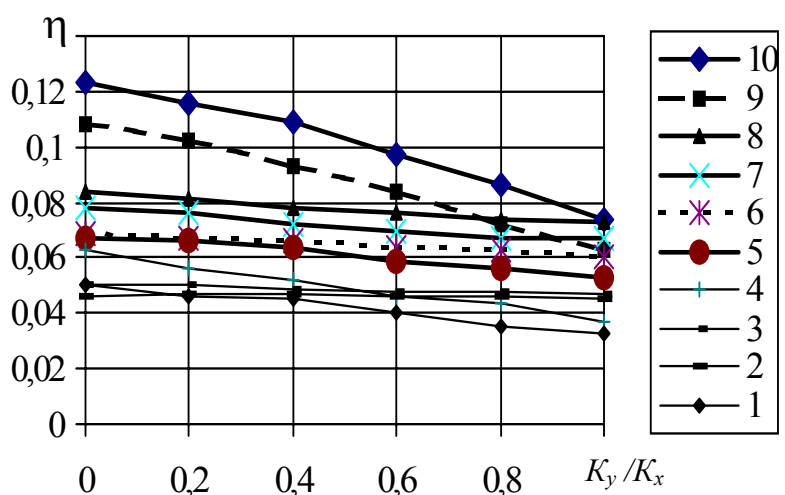


Рис. 7.12. Зависимость коэффициента механических потерь от соотношения волновых чисел

$$H_{31} = H_1/2 + H_2 + H_3/2.$$

В этих выражениях  $E_i, H_i, \nu_i$  – модуль упругости при растяжении-сжатии, толщина и коэффициент Пуассона материала  $i$ -го слоя соответственно.

Подставляя соотношения (7.47) – (7.49) в (7.46), после ряда преобразований найдём

$$\eta = \frac{\eta_2 Y G (1 + k_3)}{1 + g_x (1 + k_3) (2 + Y) + g_x^2 (1 + k_3)^2 (1 + Y)}, \quad (7.50)$$

где геометрический параметр

$$Y = \frac{12 k_3 h_{31}^2}{(1 + k_3) (1 + k_3 h_3^2)};$$

$$g = g_x / \sqrt{1 + \eta_{22}^2}; \quad h_3 = H_3 / H_1, \quad h_{31} = H_{31} / H_1.$$

Выражение (7.50), полученное при условии  $K_y = 0$ , практически совпадает с формулой [6] для расчёта конструкции типа балок.

Принимая  $K_y = K_x$ , математическую модель ВП плат представим в виде

$$\eta = \frac{\eta_2^2 G_2' H_2 L_{2x}^2}{2 D K_x^2}, \quad (7.51)$$

$$L_{2x} = \frac{H_{31} C_3}{H_2 [C_3 + g_x (1 + k_3 c_3)]}, \quad (7.52)$$

$$D = \frac{K_1 H_1^2}{12} + \frac{K_3 H_3^2}{12} + \frac{g_x H_{31} K_3}{c_3 + g_x (1 + k_3 c_3)}, \quad (7.53)$$

где

$$g_x = \frac{G_2' \sqrt{1 + \eta_{22}^2}}{K_3 H_2 P_X^2 (1 + \nu_1)}, \quad (7.54)$$

$$c_3 = (1 + \nu_3) / (1 + \nu_1).$$

Подставляя выражения (7.52) – (7.54) в (7.51), получим

$$\eta = \eta_{22} A = \frac{0.5 \eta_{22} Y c_3 g (1 + k_3 c_3) (1 + \nu_1)}{c_3^2 + g_x c_3 (1 + k_3 c_3) (2 + Y) + g_x^2 (1 + k_3 c_3)^2 (1 + Y)}, \quad (7.55)$$

где

$$g = g_x / \sqrt{1 + \eta_{22}^2},$$

$$Y = \frac{12k_3h_3^2}{(1+k_3c_3)(1+k_3h_3^2)}. \quad (7.55 \text{ a})$$

Расчеты по формулам (7.50) и (7.55) позволяют найти соответственно наибольшее и наименьшее значения коэффициента потерь, не принимая во внимание собственную форму колебаний платы

Волновое число  $K_x$  можно определить из выражения

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2,$$

где 
$$K = (2\pi f)^2 \left( \frac{m}{D} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Здесь  $f$  – собственная частота колебаний платы в герцах,  $m$  – масса её единицы площади.

Допущение о незначительной жесткости второго слоя по сравнению с жесткостью первого и третьего слоёв оправдано только в определенных пределах, так как динамический модуль упругости ВП полимера может увеличиваться на несколько порядков при понижении температуры и повышении частоты колебаний и стать соизмеримым с модулем упругости конструкционного материала. В качестве примера на рис. 7.13 показаны зависимости  $E'$  и коэффициента потерь  $\eta$  от температуры

и частоты для одного из лучших ВП материалов – высокомолекулярного полиизобутилена. Такие зависимости типичны и для других полимеров.

Результаты сравнения расчетов по точным и приближенным формулам показывают, что при определенных значениях  $K_2$  и  $K_3$  расхождение между точной и приближенными формулами может достигать 30% и более.

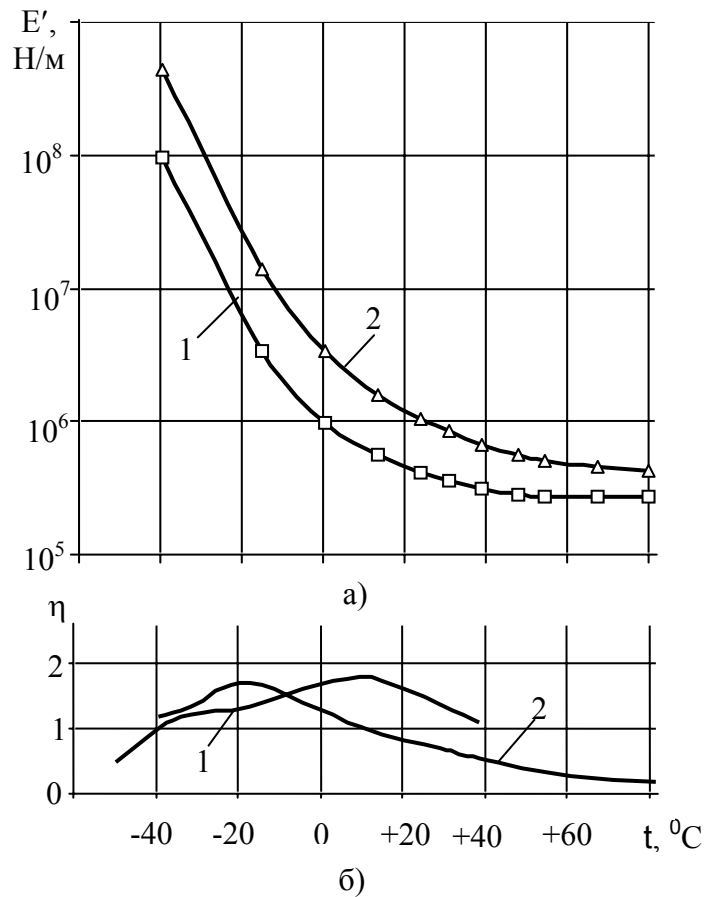


Рис. 7.13. Зависимость динамического модуля упругости  $E'$  (а) и коэффициента механических потерь  $\eta$  (б) от температуры и частоты для высокомолекулярного полиизобутилена: 1 – 100 Гц; 2 – 1000 Гц

Если считать допустимой ошибку в 20%, то необходимо выполнение условий  $k_2 \leq 10^{-5}$  и  $k_3 \leq 0.3$ . Это означает, например, что при толщинах слоев  $H_1=1 \cdot 10^{-3}$  м,  $H_2=1 \cdot 10^{-5}$  м,  $H_3=1 \cdot 10^{-4}$  м и модулях  $E_1=E_3=1 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, которые примерно соответствуют стеклотекстолитам, модуль упругости ВП материала не должен превышать  $1 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>. Из рис.7.13 видно, что это условие не выполняется при частотах больше 100 Гц и температуре ниже -40°C. В этом случае для расчета целесообразно использовать точную формулу.

**Пример 7.2 Исходные данные.** Рассчитать коэффициенты передачи  $\mu_1$  и уменьшения резонансных колебаний  $\xi_w(x,y)$  при первом резонансе в центре ячейки, показанной на рис. 7.7 в диапазоне температур от -25 до +65°C, если вместо обычной стеклотекстолитовой платы толщиной 2 мм применена плата, состоящая из двух слоев стеклотекстолита СТЭФ толщиной 0,5 мм каждая, склеенных высокомолекулярным полиизобутиленом плотностью 1100 кг/м<sup>3</sup> и толщиной 0,1 мм. На плате ячейки равномерно расположены ЭРЭ с общей массой 0,0098 кг. Механические динамические характеристики полиизобутилена приведены в табл. П.7. Остальные данные те же, что и в предыдущем примере.

**Решение.** В качестве примера подробно приведем расчет при температуре +15°C.

Рассчитываем первую собственную частоту колебаний субблока. Для этого необходимо знать ДМУ и КПМ, которые являются функцией частоты. Поэтому, учитывая, что для платы без демпфирующего слоя  $f = 363$  Гц в качестве начального значения принимают  $f_1^I = 400$  Гц., из табл. П.7. находим

$$\eta_2 = 1,33; \quad G_2' = 1,7 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Жесткость третьего слоя

$$K_3 = \frac{E_3 H_3}{1 - \nu_3^2} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{1 - 0,22^2} = 1,58 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Учитывая, что первый и третий слои одинаковы, т.е.  $K_1 = K_3$ , то

$$k_{3x} = \frac{K_3}{K_1} = 1; \quad C_{3x} = \frac{1 + \nu_3}{1 + \nu_1} = 1; \quad h_3 = \frac{H_3}{H_1} = 1;$$

$$h_{31} = \frac{H_3 + 2H_2 + H_1}{2H_1} = 1,2$$

Волновое число

$$k_{ij}^2 = \pi^2 \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) = 9,87 \left( \frac{1}{0,07^2} + \frac{1}{0,07^2} \right) = 4028,4.$$

Параметр сдвига в первом приближении

$$g^I = \frac{2G_2' \sqrt{1 + \eta_2^2}}{K_3 H_2 k_{11} (1 + \nu_3)} = \frac{2 \cdot 1,7 \cdot 10^6 \sqrt{1 + 1,33^2}}{1,58 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 4028,4 (1 + 0,22)} = 0,73.$$



Цилиндрическая жесткость

$$D_1 = \frac{E_1 H_1^3}{12(1 - \nu_1^2)} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} (0,5 \cdot 10^{-3})^3}{12(1 - 0,22^2)} = 0,33 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

$$d = 1 + k_{3x} h_3^2 + \frac{12 k_{3x} h_{31}^2 g}{1 + g(1 + k_{3x})} = 1 +$$

$$+ 1 + \frac{12 \cdot 1 \cdot [0,6 \cdot 10^{-3} / (0,5 \cdot 10^{-3})]^2 \cdot 0,73}{1 + 0,73(1 + 1)} = 7,12.$$

$$D = D_1 d = 0,33 \cdot 7,12 = 2,35 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Масса единицы площади субблока

$$m = \rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 + \rho_3 H_3 + m_s / S_{nl} = 2 \cdot 2,05 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} +$$

$$+ 1,1 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} + 9,8 \cdot 10^{-3} / 0,07^2 = 4,16 \text{ кг}.$$

Первая собственная частота колебаний в первом приближении

$$f_1^I = \frac{k_{11}^2}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{4028,4}{6,28} \sqrt{\frac{2,35}{4,16}} = 482 \text{ Гц}.$$

Интерполированием, используя данные табл. П.7, находим

$$G_2' = \left[ 1,7 + \frac{2,3 - 1,7}{600 - 400} (482 - 400) \right] \cdot 10^6 = 1,95 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$\eta_2 = 1,33 + \frac{1,49 - 1,33}{200} (482 - 400) = 1,4.$$

Параметр сдвига во втором приближении

$$g^{II} = \frac{2 \cdot 1,95 \cdot 10^6 \sqrt{1 + 1,4^2}}{7,8 \cdot 10^6} = 0,86.$$

Цилиндрическая жесткость

$$d = 1 + 1 + \frac{12 \cdot 1,2^2 \cdot 0,86}{1 + 0,86 \cdot 2} = 7,46; \quad D = 0,33 \cdot 7,46 = 2,46 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Частота во втором приближении

$$f_1^{II} = 641,5 \sqrt{2,46 / 4,16} = 493 \text{ Гц}.$$

Видим, что первое и второе приближения различаются менее чем на 5%, поэтому принимаем

$$f_1 = 493 \text{ Гц}; \quad G_2' = 1,95 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \quad \eta_2 = 1,4; \quad g = 0,86.$$

По формуле (7.55 а) рассчитываем геометрический параметр

$$Y = \frac{12 \cdot 1,2^2 \cdot 1}{(1 + 1)(1 + 1)} = 4,32.$$

Находим коэффициент использования демпфирующих свойств ВП материала, используя формулу (7.55)

$$A = \frac{0,5 \cdot 4,32 \cdot 0,86(1+1)(1+0,22)}{1 + 0,86(1+1)(2 + 4,32) + 0,86^2(1 + 4,32)(1+1)^2} = 0,164.$$

Определяем коэффициент механических потерь по формуле (6.24)

$$\gamma = 0,056 + (1,4 - 0,02) \cdot 0,164 = 0,282.$$

Рассчитываем коэффициент передачи на первом резонансе по выражению (5.30)

$$\mu_1(0,5; 0,5) = \sqrt{\frac{K_{11}^2(x, y)}{\eta_{11}^2} + 1} = \sqrt{\frac{1,61^2}{0,282^2} + 1} = 5,79.$$

Находим коэффициент уменьшения резонансных колебаний

$$\xi_{\ddot{w}}(0,5; 0,5) = 1 + \chi A = 1 + \frac{1,4 - 0,02}{0,056} \cdot 0,164 = 5,00, \quad \chi = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_H}.$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты передачи при других температурах. Результаты расчета приведены в табл. 7. 2

Т а б л и ц а 7. 2

Результаты расчета трехслойных конструкций

$t^\circ, C$	$f, Гц$	$\mu$	$\xi_{\ddot{w}}$	$t^\circ, C$	$f, Гц$	$\mu$	$\xi_{\ddot{w}}$
-25	546	18,4	1,57	+35	438	5,3	5,56
-5	536	12,2	2,42	+60	387	7,7	3,70
+15	493	5,8	5,00	+80	371	12,4	2,42

Среднее значение коэффициента  $\overline{\xi_{\ddot{w}}} = 2,78$ .

### 7.3. ЯЧЕЙКА С ПОЛИМЕРНЫМИ ДЕМПФЕРАМИ В ВИДЕ ДЕМПФИРУЮЩЕГО РЕБРА

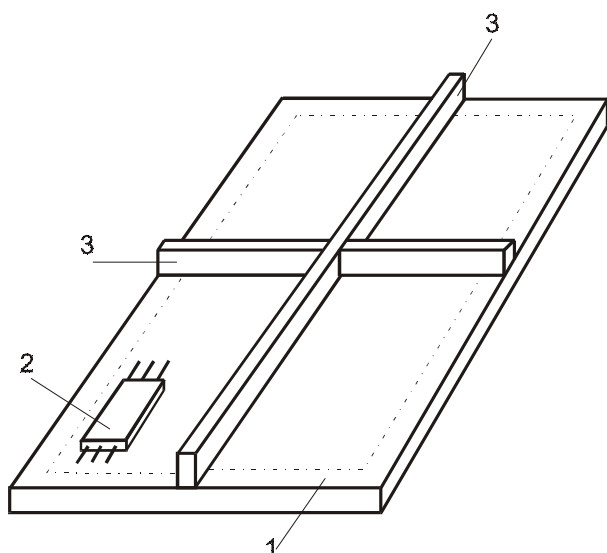


Рис. 7.14. Ячейка ЭС с демпфирующими ребрами:  
1 – плата; 2 – ЭРЭ; 3 – ДР

Математическую модель конструкции ячейки РЭС с демпфирующими ребрами (рис. 7.14) целесообразно представить в виде аналитической зависимости показателей изменения амплитуд виброперемещения  $\xi_w(x, y)$  и виброускорения  $\xi_{\ddot{w}}(x, y)$  от геометрических и физических параметров платы и демпфирующих ребер (ДР).

Примем следующие допущения:

Печатная плата ячейки – прямоугольная. Способ крепления ячейки – свободное опирание по контуру. Демпфирующие ребра расположены параллельно сторонам ячейки по всей длине и (или) ширине платы. Рассматривается только первый резонанс.

При первом резонансе и свободном опирании по контуру максимальные амплитуды резонансных колебаний  $w(x, y)$ ,  $\dot{w}(x, y)$  находятся в центре платы, и поэтому показатели  $\xi_w(x, y)$ ,  $\xi_{\dot{w}}(x, y)$  будем определять для этой точки.

Собственную частоту колебаний (СЧК) до применения ДР можно найти по формуле Релея-Ритца

$$f_0 = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

которую для случая свободного опирания платы по контуру, когда  $\alpha = \pi^2 (1 + a^2/b^2)$ , можно привести к виду:

$$f_0 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4a_0^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{D}{m}}, \quad (7.56)$$

где  $D = EH^3/12(1 - \nu^2)$  – цилиндрическая жесткость платы;

$E$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  – модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала платы.

Выражение для частоты платы с ребрами  $f_k$  получим с использованием энергетического метода, в соответствии с которым максимальные потенциальная и кинетическая энергии равны. Напишем выражения для кинетической и потенциальной энергии ребер и платы отдельно.

Потенциальная энергия изгиба платы определяется по формуле (7.2)

Форму колебаний  $w(x, y, t)$  можно представить в виде:

$$w(x, y, t) = w(x, y) \cos \omega t, \quad (7.57)$$

где  $w(x, y)$  – собственная форма колебаний, равная для случая свободного опирания прямоугольной платы

$$w(x, y) = W_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (7.58)$$

Максимальной потенциальной энергией плата обладает, когда  $\cos \omega t = 1$ .

Подставляя (7.58) в (7.57) и учитывая, что

$$\iint_{00}^{ab} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = W_0^2 \left( \frac{\pi}{a} \right)^4 \frac{ab}{4};$$

$$\iint_{00}^{ab} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = W_0^2 \left( \frac{\pi}{b_0} \right)^4 \frac{ab}{4}; \quad \iint_{00}^{ab} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy = W_0^2 \left( \frac{\pi}{ab_0} \right)^2 \frac{ab}{4},$$

получим из формулы (7.2)

$$\Pi_{n \max} = \frac{\pi^4 ab}{8} D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 W_0^2. \quad (7.59)$$

Кинетическая энергия платы

$$T_n = \frac{\rho h}{2} \iint_{00}^{ab} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy. \quad (7.60)$$

Подставляя (7.58) в (7.60), получим

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\rho h}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \iint_{00}^{ab} w^2(x, y) dx dy = \\ &= \frac{\rho h ab}{8} \omega^2 W_0^2 \sin^2 \omega t; \\ T_{n \max} &= \frac{\rho h ab}{8} \omega^2 W_0^2. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Потенциальная энергия всех ребер [12]

$$\Pi_p = \sum_{i=1}^p \int \frac{B_{ix}}{2} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right)_{x=x_i}^2 dy + \sum_{j=1}^r \int \frac{B_{iy}}{2} \left( \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \right)_{y=y_j}^2 dx, \quad (7.62)$$

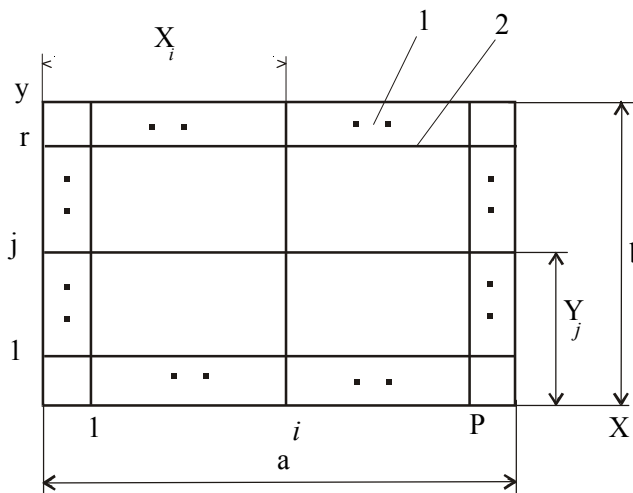


Рис. 7.15 Схема ячейки с демпфирующими ребрами:  
1 – плата; 2 – демпфирующие ребра

где  $B_{ix}, B_{iy}$  – жесткость на изгиб ребер, параллельных осям  $X$  и  $Y$  (рис.7.15);

$r, p$  – число ребер, параллельных осям  $X$  и  $Y$  соответственно;  
 $x_i, y_j$  – координаты ребер;

$w_i = w(x_i, t)$  – форма колебаний ребра.

Жесткости ребер с прямоугольным поперечным сечением на изгиб определяются по формулам

$$B_{xi} = \frac{b_i E_i H_i}{12};$$

$$B_{yj} = \frac{a_j E_j H_j}{12}$$

где  $E, H$  – модуль упругости материала ребра и его высота соответственно;  
 $a_i, b_i$  – ширина ребер, параллельных осям  $Y$  и  $X$  соответственно.

Для случая свободного опирания прямоугольной пластины по контуру формы свободных колебаний ребер, предполагая, что они незначительно влияют на форму колебаний, в первом приближении можно представить

$$\begin{aligned} w_i &= w_0 \sin \frac{\pi x_i}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ w_j &= w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y_j}{b} \end{aligned} \quad (7.63)$$

где  $w_0$  – амплитуда колебаний платы.

Подставляя выражение (7.63) в формулу (7.62) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=y_j}^2 dx &= \int_0^a \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( w_0 \sin \frac{\pi x_i}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) \right]^2 dy = \\ &= \left( \frac{\pi}{4} \right) w_0^2 \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} \int_0^b \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy = \frac{\pi^4}{2b^3} w_0^2 \sin^2 \frac{\pi x_i}{a}; \\ \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=x_i}^2 dy &= \frac{\pi^4}{2a^3} w_0^2 \sin^2 \frac{\pi y_j}{b}, \end{aligned}$$

получим

$$P_p = \left( \frac{Bx_i \pi^4}{4b^3} \sum_{i=1}^r \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \frac{By_j}{4a^3} \sum_{j=1}^p \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} \right) w_0 \cos^2 \omega t$$

или

$$P_{p \max} = \left( \frac{Bx_i \pi^4}{4b^3} \sum_{i=1}^r \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \frac{By_j}{4a^3} \sum_{j=1}^p \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} \right) w_0^2. \quad (7.64)$$

Кинетическая энергия ребер

$$T_p = \left[ \frac{Bx_i \pi^4}{4b^3} \sum_{i=1}^r \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \frac{By_j}{4a^3} \sum_{j=1}^p \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} \right] \omega^2 \sin \omega t.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^b w_i^2 dy = \int_0^b w_0^2 \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy = \frac{w_0^2 b}{2} \sin^2 \frac{\pi x_i}{a};$$

$$\int_0^a w_j^2 dx = \int_0^a w_0^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} dx = \frac{w_0^2 a}{2} \sin^2 \frac{\pi y_j}{b},$$

получим

$$T_{p \max} = \frac{\omega^2}{4} \left[ \sum_{i=1}^p Q_i \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \sum_{j=1}^r Q_j \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} \right] w_0^2, \quad (7.65)$$

где  $Q_i, Q_j$  – массы ребер в направлении осей  $Y$  и  $X$  соответственно.

Учитывая, что в соответствии с законом сохранения энергии

$$T_{n \max} + T_{p \max} = \Pi_{n \max} + \Pi_{p \max}$$

и учитывая формулы (7.59), (7.61), (7.64), (7.65), получим

$$f_k^2 = \frac{\frac{D_{ab}}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{1}{b^3} \sum_{i=1}^p B_i \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \frac{1}{a^3} \sum_{j=1}^r B_j \sin^2 \frac{\pi y_j}{a}}{\sum_{i=1}^p Q_i \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \sum_{j=1}^r Q_j \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} + \rho hab} \quad (7.66)$$

Показатель использования демпфирующих свойств  $A$  можно представить в виде  $A = \left( 1 + \Pi_{u \max} / \Pi_{p \max} \right)^{-1}$ .

Учитывая выражения (7.52), (7.57), получим

$$\frac{\Pi_{u \max}}{\Pi_{p \max}} = \frac{Db}{2} \frac{(1 + \xi^2)^2}{\sum_{i=1}^p B_i \sin^2 \frac{\pi y_i}{b} + \xi^3 \sum_{j=1}^r B_j \sin^2 \frac{\pi x_j}{a}}.$$

Поделив числитель и знаменатель на  $Db$  и используя формулы

$$D = EH^3/12(1 - \nu^2); B_{xi} = \frac{b_i E_i H_i}{12}; B_{yj} = \frac{a_j E_j H_j}{12},$$

получим

$$A = \left[ 1 + \frac{(1 + \xi^2)^2}{2(1 - \nu^2) \sum_{i=1}^p \left( \frac{E_i}{E} \right) \left( \frac{b_i}{b} \right) \left( \frac{H_i}{H} \right)^3 \sin^2 \frac{\pi y_i}{b} + \xi^3 \sum_{j=1}^r \left( \frac{E_j}{E} \right) \left( \frac{b_j}{b} \right) \left( \frac{H_j}{H} \right)^3 \sin^2 \frac{\pi x_j}{a}} \right]^{-1} \quad (7.67)$$

Если ребра выполнены из одного материала и имеют одинаковую толщину и высоту, формула (7.67) примет вид:

$$A = \left[ 1 + \frac{1}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{E}{E_1} \right) \left( \frac{b}{b_1} \right) \left( \frac{H}{H_1} \right) \frac{(1+\xi^2)^2}{\sum_{i=1}^p \sin^2 \frac{\pi y_i}{b} + \xi^3 \sum_{j=1}^r \sin^2 \frac{\pi x_j}{a}} \right]^{-1} \quad (7.68)$$

Формулы (7.24), (7.25), (7.56), (7.68) и составляют математическую модель ячейки ЭС с демпфирующими ребрами, свободно опертой по всем краям.

**Влияние различных факторов на эффективность демпфирования.** На рис. 7.16 и 7.17 приведены зависимости показателей уменьшения амплитуд виброускорения и виброперемещения при резонансе ячейки от относительной высоты и относительного модуля упругости материала ДР.

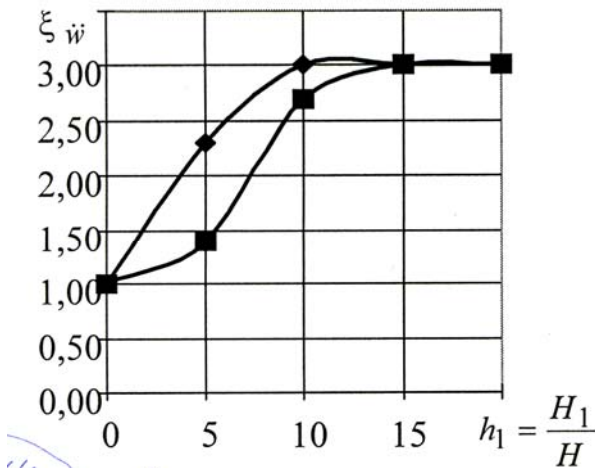


Рис. 7.16. График зависимости  $\xi_w = f(h_1)$

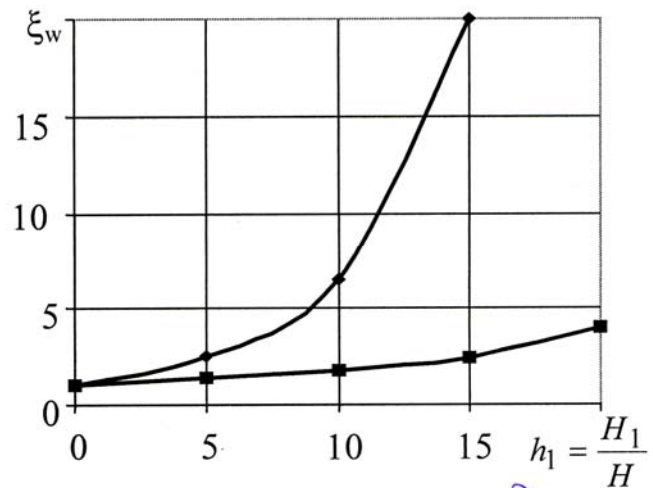


Рис. 7.17. График зависимости  $\xi_w = f(h_1)$

Размеры платы 1,5x150x200 мм, относительная ширина ребра 0,05, КМП ячейки до приклеивания ребра  $\eta_n = 0,05$ . Характеристики материалов платы:  $E = 2 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu = 0,3$ ;  $\eta_1 = 0,01$ ;  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup> и ребра:  $E_1 = 2 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1 = 0,3$ ;  $\eta_2 = 0,01$ ;  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>.

На основе анализа графиков можно сделать следующие выводы:

1. Амплитуда виброперемещения при резонансе с повышением относительной высоты и относительного модуля упругости материалов ДВ уменьшается неограниченно, а амплитуда виброускорения только до определенного уровня.

2. Уменьшить высоту ребер при заданном уменьшении АРК можно применением ВП материала с более высоким модулем упругости.

## Контрольные вопросы

1. Выведите формулу для потенциальных энергий изгиба и растяжения конструкции с внешними ДС.
2. Как находятся коэффициенты связи между деформацией изгиба и деформацией растяжения в конструкции с внешними ДС?
3. Как находится формула для определения предельных значений КМП в конструкциях с внешними ДС?
4. Приведите графики зависимости показателя  $A$  от относительных толщины и модуля упругости ДС.
5. Как рассчитывается толщина ДС при ограничениях на массу конструкции ячейки?
6. Какие деформации необходимо учитывать при выведении формулы для показателя  $A$  в конструкции с внешним ДС?
7. В каком виде устанавливается связь между деформацией изгиба и деформациями растяжения и сдвига в слоях конструкции с внутренним ДС.
8. Выведите формулы для энергии сдвига и растяжения в слоях конструкций с внутренним ДС.
9. Выведите формулы для коэффициентов связи деформаций конструкций с внутренним ДС.
10. Получите формулу для цилиндрической жесткости конструкции с внутренним ДС.
11. Как получаются приближенные формулы для расчета предельных значений показателя  $A$  в конструкциях с внутренним ДС?
12. В чем заключается принцип работы ячеек с ДВ?
13. Нарисуйте АЧХ ячеек без ДВ и с ДВ.
14. Приведите дискретные физические модели ячеек ЭА с ДВ:
  - в общем случае;
  - для расчета СЧК;
  - для расчета амплитуд резонансных колебаний.
15. Напишите дифференциальные уравнения собственных частот колебаний (СЧК) ячеек РЭС с ДВ.
16. Выведите формулу для расчета СЧК ячеек ЭА с ДВ.
17. Напишите дифференциальные уравнения движения ячеек ЭА с ДВ для случая кинематического возбуждения.
18. Выведите формулы для расчета коэффициентов передачи ячеек ЭА с ДВ.
19. Получите формулу для сосредоточенных массы и жесткости ячеек ЭА.



## Глава 8

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА ЯЧЕЕК ЭА С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПОЛИМЕРНЫМИ ДЕМПФЕРАМИ

### 8.1. ДВУХЪЯЧЕЕЧНАЯ КОНСТРУКЦИЯ С ОДНОЙ ДЕМПФИРУЮЩЕЙ ВСТАВКОЙ

**Принцип работы и физические модели.** Как отмечалось в разд. 7.1, для уменьшения амплитуд резонансных колебаний можно применять между ячейками РЭС демпфирующие вставки (см. рис. 6.5). Механика процесса заключается в следующем: при резонансных колебаниях ячеек, между которыми находится ДВ, в последней возникают продольные деформации растяжения-сжатия, как показано на рис. 8.1. Так как КМП ВП материала значительно превышает КМП плат, то КМП конструкции, связанной демпфирующей вставкой, в соответствии с формулой

$$\eta = \frac{\Delta W_1 + \Delta W_B + \Delta W_2}{W_1 + W_2 + W_B} =$$
$$= \frac{\eta_1 W_1 + \eta_B W_B + \eta_3 W}{W_1 + W_2 + W_B},$$

где  $\Delta W_1$  и  $\Delta W_2$ ,  $\Delta W_B$  – потери энергии колебаний в платах и вставке;  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_B$  – максимальные энергии колебаний в ячейке и вставке, значительно увеличится. Это приведет к уменьшению амплитуд резонансных колебаний (рис. 8.2).

Значительное уменьшение амплитуд будет наблюдаться только при выполнении двух условий:

- КМП ВП вставки должен быть большим;
- деформации вставки должны быть значительными.

Для выполнения второго условия платы должны иметь различные собственные частоты колебаний, так как в противном случае резонанс плат наступит одновременно, их колебания будут синхронными, и деформации вставки, а следовательно, и потери энергии  $\Delta W_B$  – минимальными.

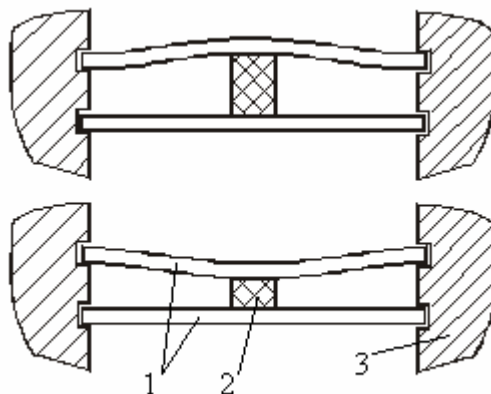


Рис.8.1. Вид деформации вставки при резонансе верхней ячейки:

1–ячейки; 2–вставка; 3–корпус блока

Физическую модель выберем из следующих соображений. Причиной отказа РЭА часто являются резонансные колебания ячеек на основной, первой, собственной частоте.

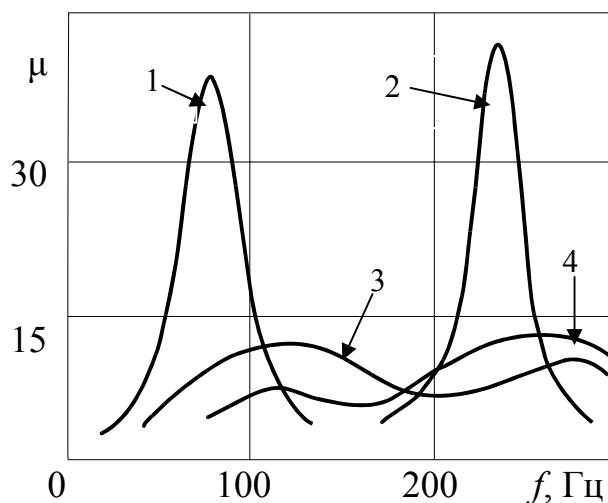


Рис. 8.2. Амплитудно-частотные характеристики ячеек РЭС: 1,2 – до установки вставки; 3,4 – после установки демпфирующей вставки

Возникающие при этом большие амплитуды виброперемещения приводят к усталостным явлениям в выводах ЭРЭ и других элементах конструкций и, как следствие, к отказам. Поэтому во многих случаях достаточно иметь модель, пригодную для анализа динамического поведения конструкции только в области первого резонанса, что позволяет представить реальную конструкцию моделью в виде системы всего лишь с двумя степенями сво-

боды (рис. 8.3,а).

В этой модели  $m_i$ ,  $k_d$ ,  $\eta_i$  ( $i = 1,2$ ) – сосредоточенные в центре ячейки масса, жесткость и КМП  $i$ -й платы;  $k_d$ ,  $\eta_d$  – коэффициент жесткости и КМП демпфера.

Определяя амплитуды резонансных колебаний, демпфирующие свойства плат можно не учитывать ввиду их малости ( $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ), и модель будет иметь вид, показанный на рис. 8.3, б.

При определении собственных частот колебаний демпфирующими свойствами конструкции можно пренебречь ( $\eta_1 = \eta_2 = \eta_d = 0$ ), и модель примет вид, показанный на рис. 8.3, в.

Вопросы приведения конструкций к системам с сосредоточенными параметрами рассмотрены ниже.

Математическую модель конструкции с ДВ представим в виде аналитических выражений, определяющих собственные частоты и амплитуды резонансных колебаний – основные динамические характеристики, интересующие конструктора РЭС.

Методы приведения распределенных характеристик к сосредоточенным, рассмотрены в разд. 8.2.

**Собственные частоты колебаний.** На основе модели, показанной на рис. 8.3, б, уравнения движения масс  $m_1$  и  $m_2$  запишем в виде

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{Z}_1 + k_1 Z_1 + k_D (Z_1 - Z_2) &= 0; \\ m_2 \ddot{Z}_2 + k_2 Z_2 + k_D (Z_2 - Z_1) &= 0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

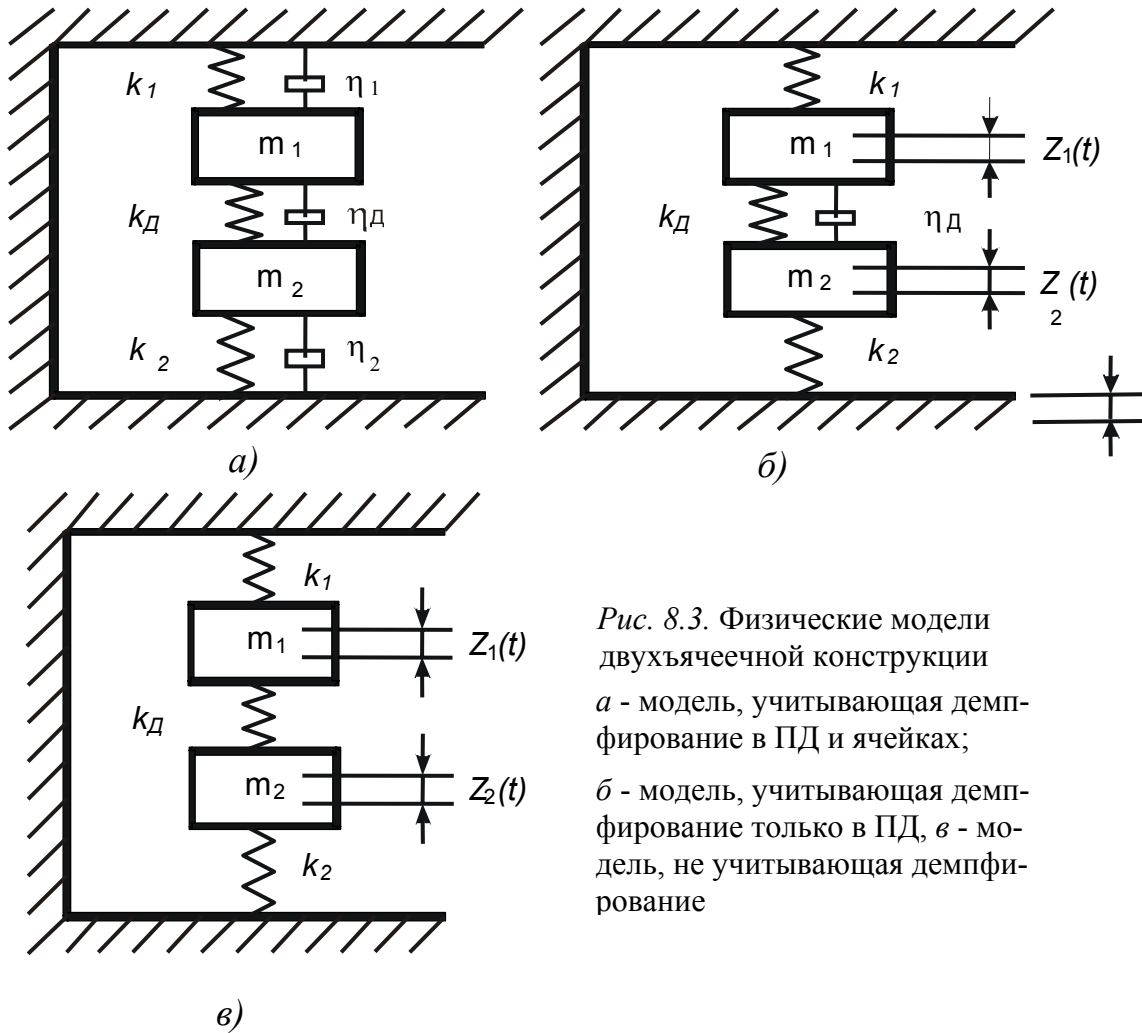


Рис. 8.3. Физические модели двухъячеечной конструкции  
 а - модель, учитывающая демпфирование в ПД и ячейках;  
 б - модель, учитывающая демпфирование только в ПД, в - модель, не учитывающая демпфирование

Так как свободные колебания масс можно описать гармоническими, например, синусоидальными функциями:

$$Z_1 = Z_1(t) = Z_{01} \sin \omega t;$$

$$Z_2 = Z_2(t) = Z_{02} \sin \omega t,$$

то после подстановки их в систему (8.1) получим

$$-m_1 \omega^2 Z_1 + (k_1 + k_D) Z_1 - k_D Z_2 = 0;$$

$$-m_2 \omega^2 Z_2 + (k_1 + k_D) Z_2 - k_D Z_1 = 0. \quad (8.2)$$

Система алгебраических уравнений (8.2) имеет решения, отличные от нуля, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_{\text{Д}} - m_1 \omega^2 & -k_{\text{Д}} \\ -k_{\text{Д}} & k_2 + k_{\text{Д}} - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим или после преобразований

$$\omega^4 - \left( \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_{\text{Д}}}{m_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{m_2} \right) \omega^2 + \left( \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{k_1 k_{\text{Д}}}{m_1 m_2} + \frac{k_2 k_{\text{Д}}}{m_1 m_2} \right) = 0.$$

Решая его, найдем собственные частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ячеек

$$\omega_{12} = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{k_1 + k_{\text{Д}}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{\text{Д}}}{m_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{k_1 + k_{\text{Д}}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{\text{Д}}}{m_2} \right)^2 - \left( \frac{k_1 k_2 + k_1 k_{\text{Д}} + k_2 k_{\text{Д}}}{m_1 m_2} \right)} \right]^{0.5} \quad (8.3)$$

**Коэффициенты передачи.** Уравнения вынужденных колебаний масс  $m_1$  и  $m_2$ , если пренебречь демпфированием в ячейках, при кинематическом возбуждении системы (см. рис. 8.3,в) имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{Z}_1 - k_1 (Z_0 - Z_1) + k_{\text{Д}} (1 + j\eta) (Z_1 - Z_2) &= 0; \\ m_2 \ddot{Z}_2 - k_2 (Z_0 - Z_2) - k_{\text{Д}} (1 + j\eta) (Z_1 - Z_2) &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Если кинематическое возбуждение описывается гармонической функцией

$$Z = Z_0 \sin \omega t, \quad (8.5)$$

то и колебания масс  $m_1$  и  $m_2$  также будут описываться гармоническими функциями

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{01} \sin(\omega t - \varphi_1); \\ Z_2 &= Z_{02} \sin(\omega t - \varphi_2). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Подставляя выражения (8.5) – (8.6) в систему (8.4), приведем ее к алгебраическому виду

$$Z_2 (k_2 + k_{\text{Д}} - m_2 \omega^3 + j k_{\text{Д}} \eta_{\text{Д}}) - Z_1 (k_{\text{Д}} + j k_{\text{Д}} \eta_{\text{Д}}) = k_2 Z_0. \quad (8.7)$$

$$Z_1 (k_1 + k_{\text{Д}} - m_1 \omega^3 + j k_{\text{Д}} \eta_{\text{Д}}) - Z_2 (k_{\text{Д}} + j k_{\text{Д}} \eta_{\text{Д}}) = k_1 Z_0. \quad (8.8)$$

Из уравнения (8.7) получим

$$Z_1 = \frac{k_1 Z_0 + (1 + j\eta_{\text{Д}}) Z_2 k_{\text{Д}}}{k_1 - m_1 \omega^2 + k_{\text{Д}} (1 + j\eta_{\text{Д}})}.$$

Подставляя последнее выражение в (8.8), получим

$$Z_2 = \frac{k_2 [k_1 - m_1 \omega^2 + k_D (1 + j\eta_D)] + k_1 k_D (1 + j\eta_D)}{(k_2 + k_D - m_2 \omega^2 + jk_D \eta_D)(k_1 + k_D - m_1 \omega^2 + jk_D \eta_D) - (k_D + jk_D \eta_D)^2}$$

или после ряда преобразований получим выражение для передаточной функции

$$H_2(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_0} = \frac{k_1 k_2 + k_2 k_D - k_2 m_1 \omega^2 + \dots}{k_1 k_2 + k_1 k_D + k_2 k_D - \omega^2 (k_2 m_1 + k_D m_1 + k_1 m_2 + k_D m_2) + \dots} \dots$$

$$\dots \frac{k_1 k_D + j\eta_D k_D (k_1 + k_2)}{+ (k_2 m_1 + k_D m_1 + k_1 m_2 + k_D m_2) + m_1 m_2 \omega^4 + j\eta_D k_D}$$

Коэффициент передачи

$$\mu_2 = \frac{Z_{20}}{Z_0} = \left\{ \frac{\left( 1 + \frac{k_D}{k_1} - \frac{m_1}{k_1} \omega^2 + \frac{k_D}{k_2} \right)^2 + \dots}{\left[ 1 + \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \omega^2 \left( \frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{k_D m_1}{k_1 k_2} + \frac{k_D m_2}{k_1 k_2} \right) + \frac{m_1 m_2}{k_1 k_2} \omega^4 \right]^2 + \dots} \dots \right\}^{0.5} \dots$$

$$\dots \frac{+ \eta_D^2 \left( \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} \right)^2}{+ \eta_D^2 \left( \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \frac{k_D m_1}{k_1 k_2} \omega^2 - \frac{k_D m_2}{k_1 k_2} \omega^2 \right)^2} \dots \quad (8.9)$$

Коэффициент передачи  $\mu_1$  найдем следующим образом. Из уравнения (8.8) получим

$$Z_2 = \frac{k_2 Z_0 + Z_1 k_D (1 + j\eta_D)}{k_2 + k_D - m_2 \omega^2 + jk_D \eta_D}$$

$$Z_1 = \frac{[k_1 (k_2 + k_D - m_1 \omega^2 + jk_D \eta_D) + k_2 k_D (1 + j\eta_D)] Z_0}{(k_1 + k_D - m_1 \omega^2 + jk_D \eta_D)(k_2 + k_D - m_2 \omega^2 + jk_D \eta_D) - (k_D + jk_D \eta_D)^2}$$

Подставляя это выражение в (8.7), найдем:

$$\mu_1 = \frac{Z_{01}}{Z_0} = \left\{ \frac{\left( 1 + \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \frac{m_2}{k_2} \omega^2 \right)^2 + \dots}{\left[ 1 + \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \omega^2 \left( \frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{k_D m_1}{k_1 k_2} + \frac{k_D m_2}{k_1 k_2} \right) + \frac{m_1 m_2}{k_1 k_2} \omega^4 \right]^2 + \dots} \dots \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \dots \frac{\left. + \eta_{\text{Д}}^2 \left( \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} \right)^2 \right\}^{0,5}}{\left. + \eta_{\text{Д}}^2 \left( \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} - \frac{k_{\text{Д}} m_1}{k_1 k_2} \omega^2 - \frac{k_{\text{Д}} m_2}{k_1 k_2} \omega^2 \right)^2 \right\}^2 \dots \end{aligned} \right\} \cdot \quad (8.10)$$

Амплитуды колебаний масс  $m_1$  и  $m_2$  при резонансе

$$Z_{10} = \mu_1 Z_0; \quad (8.11)$$

$$Z_{20} = \mu_2 Z_0. \quad (8.12)$$

Формулы (8.9) – (8.10) для случая резонансных колебаний, когда  $\omega = \omega_1$  и  $\omega = \omega_2$ , можно представить в виде:

$$\mu_1 = \left\{ \frac{\left( 1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} - \frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2} \right)^2 + \dots}{\left\{ 1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} - \frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} \left( 1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} \right) - \frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2} \left( 1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} \right) + \frac{\omega_1^4}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2} \right\}^2 + \dots} \right\}^{0,5}; \quad (8.12 \text{ а})$$

$$\left. \begin{aligned} & \dots \frac{\left. + \eta_{\text{Д}}^2 \left( \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} \right)^2 \right\}^{0,5}}{\left. + \eta_{\text{Д}}^2 \left[ \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} - \left( \frac{k_{\text{Д}} \omega_1^2}{k_2 \omega_{01}^2} + \frac{k_{\text{Д}} \omega_1^2}{k_1 \omega_{02}^2} \right) \right]^2 \right\}^2 \dots \end{aligned} \right\} ;$$

$$\mu_2 = \left\{ \frac{\left( 1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} - \frac{\omega_2^2}{\omega_{01}^2} \right)^2 + \dots}{\left\{ 1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} - \frac{\omega_2^2}{\omega_{02}^2} \left( 1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} \right) - \frac{\omega_2^2}{\omega_{01}^2} \left( 1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} \right) + \frac{\omega_2^4}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2} \right\}^2 + \dots} \right\}^{0,5}; \quad (8.12 \text{ б})$$

$$\left. \begin{aligned} & \dots \frac{\left. + \eta_{\text{Д}}^2 \left( \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} \right)^2 \right\}^{0,5}}{\left. + \eta_{\text{Д}}^2 \left[ \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} - \left( \frac{k_{\text{Д}} \omega_2^2}{k_2 \omega_{01}^2} + \frac{k_{\text{Д}} \omega_2^2}{k_1 \omega_{02}^2} \right) \right]^2 \right\}^2 \dots \end{aligned} \right\} ,$$

где

$$\omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1}; \quad \omega_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2};$$

$\omega_1, \omega_2$  – частоты резонансных колебаний ячеек при наличии ДВ.

При выводе формул (8.13) и (8.14) учитывались только потери энергии в ДВ, т.к. они значительно превышают потери за счет других факторов. Если ЭС эксплуатируется в широком диапазоне температур и переходная область ВП полимера не превышает ее, то эффективность ДВ может существенно уменьшиться и пренебрежение потерями в самих ячейках (конструкционным демпфированием) может привести к неправильным выводам.

Для модели на рис.8.3, а, учитывающей также и потери энергии в ячейках, можно записать следующую систему уравнений движения:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{Z}_1 + k_1(Z_1 - Z_0)(1 + j\eta_1) + k_D(Z_1 - Z_2)(1 + j\eta_D) &= 0 \\ m_2 \ddot{Z}_2 + k_D(Z_2 - Z_1)(1 + j\eta_D) + k_2(Z_2 - Z_0)(1 + j\eta_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Решая эту систему методом, описанным выше, можно получить аналитические выражения для коэффициентов передачи и амплитуд резонансных колебаний. Однако математические выражения в этом случае становятся чрезмерно громоздкими. Особенно это будет проявляться, если рассмотреть систему с тремя или бóльшим количеством ячеек (см. разд. 8.3). В этом случае целесообразно решать систему уравнений движения одним из методов непосредственного решения системы алгебраических уравнений, например методом Крамера.

## 8.2. МЕТОДЫ ПРИВЕДЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЯЧЕЕК К СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ПАРАМЕТРАМ

**Статический метод.** Жесткость демпфирующей вставки в общем виде

$$k_D = \frac{P}{\Delta H}, \quad (8.14)$$

где  $P$  – сила,  $\Delta H$  – деформация ДВ.

Учитывая, что сила

$$P = \sigma S,$$

где  $\sigma$  – нормальное напряжение в сечениях ДВ, а  $S$  – площадь, и принимая во внимание закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta H}{H},$$

где  $E$  – модуль упругости материала ДВ,  $\varepsilon$  – относительная деформация, а  $H$  – высота вставки,

получим

$$k_d = \frac{ES}{H}. \quad (8.15)$$

Приведенные значения коэффициентов жесткости и масс плат найдем из условия равенства собственных частот колебаний плат и соответствующих им приведенных масс  $m_1$  и  $m_2$ . Сравнивая формулу расчета собственных частот колебаний плат

$$\omega_i = \frac{\alpha_i}{a_i^2} \sqrt{\frac{D_i a_i b_i}{m_{пл.i}}},$$

где  $\alpha_i$  – частотный коэффициент;  $a_i, b_i$  – длина и ширина платы;  $D_i$  – цилиндрическая жесткость;  $m_{пл.i}$  – масса платы, с формулой расчета собственных частот колебаний систем с одной степенью свободы

$$\omega_{0i} = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}},$$

где  $k_i, m_i$  – приведенные к сосредоточенным значениям жесткости и массы плат, получим

$$k_i = \frac{m_i}{m_{пл.i}} \cdot \frac{\alpha_i^2 D_i}{a_i^2 \xi_i}. \quad (8.16)$$

Здесь 
$$D_i = \frac{E_i H_i^3}{12(1 - \nu_i^2)}; \quad \xi_i = \frac{a_i}{b_i}.$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  для различных способов крепления прямоугольных плат приведены в табл. П.3.

Связь между приведенной (сосредоточенной) массой  $m_i$  и массой платы  $m_{пл.i}$  устанавливается из предположения о равенстве статической и динамической жесткости плат, что будет приводить к некоторой ошибке.

Известно, что статический коэффициент жесткости в общем случае находится по формуле типа (8.14)

$$k = \frac{P}{\delta},$$

где  $P$  – сила,  $\delta$  – деформация.

Используя, например, известную формулу [16] для прогиба в центре прямоугольной пластины, свободно опертой по краям при действии в центре сосредоточенной силы  $P$ :



$$\delta = \frac{4Pa^3b^3}{\pi^4 D(a^2 + b^2)^2},$$

найдем

$$k_i = \frac{P_i}{\delta_i} = \frac{\pi^4 D_i (a_i^2 + b_i^2)^2}{4a_i^3 b_i^3}. \quad (8.17)$$

Сравнивая формулы (8.16) и (8.17), получим

$$m_i = \frac{m_{пл.i}}{4}. \quad (8.18)$$

Следовательно,

$$k_i = \frac{D_i \alpha_i^2}{4a_i^2 \xi_i}. \quad (8.19)$$

**Пример 8.1.** Для уменьшения амплитуд резонансных колебаний двух параллельно расположенных ячеек между ними в центре установлена ДВ. Размеры ячеек  $2 \times 100 \times 200$  мм и  $1 \times 100 \times 200$  мм, ДВ— $20 \times 10 \times 10$  мм. Материал плат – стеклотекстолит с характеристиками:  $E=2 \cdot 10^{10}$  Па;  $\rho=2000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\nu=0,3$ . ДВ выполнена из пенополиэтилена с характеристиками:  $E=1 \cdot 10^6$  Па,  $\eta=0,5$ . На каждой ячейке установлены ЭРЭ, равномерно расположенные по площади платы, с общей массой 0,04 кг. Рассчитать коэффициенты передачи при резонансе в центре каждой ячейки.

*Решение.* Расчет сосредоточенных параметров модели. Находим цилиндрические жесткости плат:

$$D_1 = \frac{EH_1^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^{10} (2 \cdot 10^{-3})^3}{12(1-0,3^2)} = 14,65 \text{ Н/м};$$

$$D_2 = \frac{EH_2^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^{10} (1 \cdot 10^{-3})^3}{12(1-0,3^2)} = 1,83 \text{ Н/м}.$$

Считая ячейку свободно опертой по краям, найдем

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 9,87 \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) = 9,87 \left( 1 + \frac{0,2^2}{0,1^2} \right) = 49,35.$$

По формуле (8.19) рассчитаем приведенные значения коэффициентов жесткости

$$k_1 = \frac{D_1 \alpha^2}{4a_1^2 \xi} = \frac{14,65 \cdot 49,35^2}{4 \cdot 0,2^2 \cdot 2} = 111,5 \cdot 10^3 \text{ Н/м};$$

$$k_2 = \frac{D_2 \alpha^2}{4a_2^2 \xi} = \frac{1,83 \cdot 49,35^2}{4 \cdot 0,1^2 \cdot 2} = 13,94 \cdot 10^3 \text{ Н/м}.$$

Приведенные массы ячеек рассчитаем по формуле (8.18)

$$m_{пр.i} = \frac{m_i}{4} (i = 1, 2),$$

где

$$m_1 = \rho abH_1 + m_{\text{exp}} = 2000 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 0,04 = 0,08 + 0,04 = 0,12 ;$$

$$m_2 = 2000 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 0,04 .$$

$$\text{Получим: } m_{\text{пр.1}} = \frac{0,12}{4} = 0,03 ; m_{\text{пр.2}} = \frac{0,08}{4} = 0,02 .$$

Коэффициент жесткости ДВ найдем по формуле (8.15)

$$k_{\text{д}} = \frac{ES}{H} = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 0,01^2}{0,02} = 5000 \text{ Н/м.}$$

*Расчет собственных частот колебаний.* Используя формулу (8.3), получим

$$\omega_{1,2}^2 = \left( \frac{111,5 \cdot 10^3 + 5000}{2 \cdot 0,03} + \frac{13,94 \cdot 10^3 + 5000}{2 \cdot 0,02} \right) \pm \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{111,5 \cdot 10^3 + 5000}{0,03} + \frac{13,94 \cdot 10^3 + 5000}{0,02} \right)^2 - \frac{111,5 \cdot 10^3 \cdot 13,94 \cdot 10^3 + 111,5 \cdot 10^3 \cdot 5000 + 13,94 \cdot 10^3 \cdot 5000}{0,03 \cdot 0,02} \right\}^{0,5} ;$$

$$\omega_1^2 = 3,898 \cdot 10^6 ; \quad \omega_2^2 = 9,328 \cdot 10^6 .$$

$$\omega_1 = 1974 \text{ рад/с} ; \quad \omega_2 = 966 \text{ рад/с.}$$

*Расчет коэффициентов передачи.* Проведем вспомогательные расчеты:

$$\frac{k_{\text{д}}}{k_1} = 0,045 ; \quad \frac{k_{\text{д}}}{k_2} = 0,36 ; \quad \omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1} = 3,7 \cdot 10^6 \text{ (рад/с)}^2 ;$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2} = 0,7 \cdot 10^6 \text{ (рад/с)}^2 ; \quad \frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2} = 5,4 ;$$

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} = 1,05 ; \quad \frac{\omega_1^4}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2} = 5,86 ;$$

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_{01}^2} = 0,251 ; \quad \frac{\omega_2^2}{\omega_{02}^2} = 1,34 ; \quad \frac{\omega_2^4}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2} = 0,34 .$$

Подставляя найденные значения в формулы (8.12а)–(8.12б), получим

$$\mu_1 = \left\{ \frac{(1 + 0,045 + 0,359 - 5,59)^2 + (1 + 0,045 + 0,359 - 1,049(1 + 0,359) - 5,59(1 + 0,045) + 5,865)^2 + 0,5^2(0,045 + 0,359)^2}{+ 0,5^2(0,045 + 0,359 - (0,359 \cdot 1,049 + 0,045 \cdot 5,593))^2} \right\}^{0,5} = 37,54 ;$$

$$\mu_2 = \left\{ \frac{(1 + 0,045 + 0,359 - 0,251)^2 + (1 + 0,045 + 0,359 - 1,338(1 + 0,045) - 0,251(1 + 0,359) + 0,336)^2 + 0,5^2(0,045 + 0,359)^2}{+ 0,5^2(0,045 + 0,359 - (0,359 \cdot 0,251 + 0,045 \cdot 1,338))^2} \right\}^{0.5} = 9,232;$$

На рис. 8.4 приведены зависимости коэффициентов передачи  $\mu_1$  и  $\mu_2$  от жесткости демпфера  $k_d$ . Видно, что, подбирая величину  $k_d$ , можно получить минимальное значение  $\mu_1$  или  $\mu_2$ . Наиболее часто требуется уменьшить амплитуды резонансных колебаний обеих ячеек, т.е.  $\mu_1 = \mu_2$ . В данном конкретном примере это достигается при  $k_d = 1,8 \cdot 10^4$  и  $\mu_1 = \mu_2 = 4,8$ .

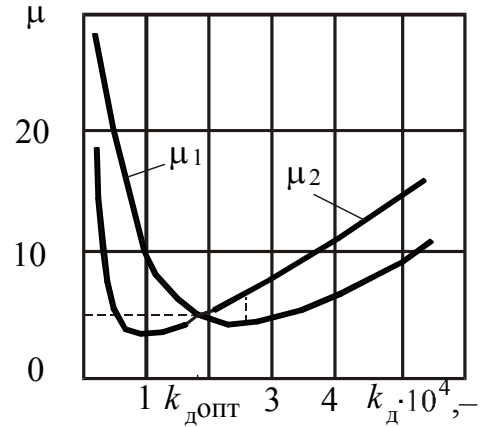


Рис. 8.4. Зависимость КП ячеек от жесткости ДВ

**Динамический метод.** Искомыми динамическими параметрами системы, как указывалось, являются циклическая частота и амплитуда колебаний. И поэтому выбранный метод приведения должен обеспечивать точное определение именно этих параметров.

При кинематическом возбуждении уравнение движения системы с одной степенью свободы (рис. 8.5)

$$\hat{m}(\ddot{\hat{Z}} - \ddot{Z}_A) + \hat{k}\hat{Z}(1 + j\hat{\eta}) = 0, \quad (8.20)$$

где знак « $\hat{\quad}$ » означает принадлежность к системе с сосредоточенными параметрами (ССП).

Считая ускорение основания  $\ddot{Z}_A$  изменяющимся по гармоническому закону  $\ddot{Z}_A(t) = \ddot{Z}_A e^{j\omega t}$ , из (8.20) найдем:

$$\hat{Z}(t) = -\frac{\omega^2 Z_A(t)}{\hat{\omega}_0^2 - \omega^2 + j\hat{\eta}\omega_0^2}. \quad (8.21)$$

Перемещение ячейки в области резонанса в точке с координатами  $X, Y$

$$Z(x, y, t) = -\frac{\omega^2 Z_A(t) K_{if}(x, y)}{\omega_{0if}^2 - \omega^2 + j\eta\omega_{0if}^2}, \quad (8.22)$$

где индексы  $i, f$  обозначают количество полуволин в направлениях оси  $X$  и  $Y$  соответственно и, следовательно, определяют форму колебаний ячейки,  $K_{if}(x, y)$  – по формуле (5.29).

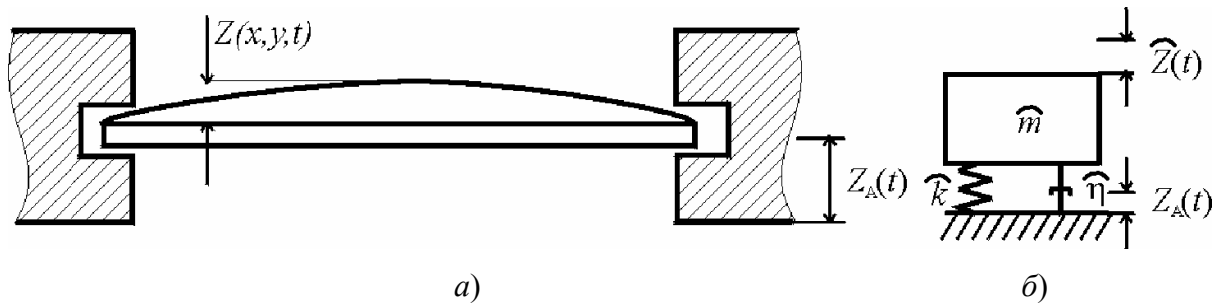


Рис. 8.5. Модель ячейки

Сравнивая выражения (8.21) и (8.22), нетрудно заметить, что при равенстве частот  $\omega_{0if}$  и  $\omega_0$  есть два пути приведения КМП:

1. Считать, что  $Z(x, y, t) = \widehat{Z}(t)$ . Тогда:

$$\widehat{\eta} = \frac{(\omega_{0if}^2 - \omega^2) \cdot [1 - K_{if}(x, y)] + j\eta\omega_{0if}^2}{jK_{if}(x, y)\omega_{0if}^2}.$$

2. Принимать, что  $\widehat{\eta} = \eta$ . В этом случае:

$$Z(x, y, t) = \widehat{Z}(t)K_{if}(x, y), \quad (8.23)$$

где  $\widehat{Z}(t)$  находится по формуле (8.21), а коэффициент формы колебаний  $K_{if}(x, y)$  – методами, изложенными в гл. 4, ч.1.

Второй путь более экономичен с точки зрения затрат машинного времени, особенно при решении оптимизационных задач.

*Приведение массы и жесткости ячейки.* Собственная форма колебаний ячейки известна. При приведении распределенных параметров к сосредоточенным необходимо выполнение условия: энергия ССП должна равняться энергии системы с распределенными параметрами (СРП) [3].

Кинетическая ( $T_c$ ) и потенциальная ( $P_c$ ) энергии ССП равны:

$$T_c = \frac{1}{2} \widehat{m} \dot{\widehat{Z}}^2(t); \quad P_c = \frac{1}{2} \widehat{K} \widehat{Z}^2(t). \quad (8.24)$$

После подстановки выражения (8.21), получим

$$T_c = \frac{1}{2} \frac{\widehat{m} \omega^4 \dot{Z}_A^2(t)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + j\widehat{\eta}\omega_0^2)^2}; \quad (8.25)$$

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \frac{\widehat{K} \omega^4 \widehat{Z}_A^2(t)}{\left(\widehat{\omega}_0^2 - \omega^2 + j\eta \omega_0^2\right)^2}. \quad (8.26)$$

Кинетическая энергия пластины описывается выражением

$$T = \frac{1}{2} \iint_S m_0 \dot{Z}^2(x, y, t) dx dy.$$

После подстановки выражения для перемещения ячейки  $Z(x, y, t)$  при кинематическом возбуждении (8.22) и ряда преобразования получим

$$T = \frac{1}{2} m_0 \omega^4 \dot{Z}_A^2(t) \frac{\left(\iint_S W_{if}(x, y) ds\right)^2}{\left(\omega_{oif}^2 - \omega^2 + j\eta \omega_{oif}^2\right)^2 \left(\iint_S W_{if}^2(x, y) ds\right)^2} \quad (8.27)$$

Потенциальную энергию пластины (4.40), (4.44):

$$\Pi = \frac{D}{2} \iint_{(s)} \left( \frac{\partial^2 W_{if}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{if}(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 dS,$$

после подстановки (8.22) можно привести к виду:

$$\Pi = \frac{D}{2} \frac{\omega^4 Z_A^2(t) \left[ \iint_{(S)} W_{if}(x, y) ds \right]^2}{\left(\omega_{oif}^2 - \omega^2 + j\eta \omega_{oif}^2\right)^2 \left[ \iint_S W_{if}^2(x, y) ds \right]^2} \iint_S [W''(x) + W''(y)]^2 ds. \quad (8.28)$$

Приравнявая выражения (8.25) и (8.27), а затем (8.26) и (8.28), найдем, что сосредоточенная масса

$$\widehat{m} = m_0 \frac{\left[ \iint_S W_{if}(x, y) ds \right]^2}{\iint_S W_{if}^2(x, y) ds}, \quad (8.29)$$

а сосредоточенная жесткость

$$\hat{K} = D \frac{\left[ \iint_S W_{if}(x, y) ds \right]^2}{\iint_S [W_{if}''(x) + W_{if}''(y)]^2 ds}. \quad (8.30)$$

Рассмотренный метод приведения легко применим для однородных прямоугольных пластин с классическими способами типа жесткого защемления, свободного опирания или незакрепленного края. Собственная форма колебаний  $W(x, y)$  таких пластин описывается выражением (5.7), (5.8).

С о б с т в е н н а я ф о р м а к о л е б а н и й н е и з в е с т н а. Приведение распределенных параметров к сосредоточенным параметрам ячеек, у которых неизвестно аналитическое выражение формы колебаний, необходимо проводить другими методами. Если предположить, что система с одной степенью свободы (рис. 8.6, б) адекватно моделирует колебания ячейки в точке с координатами  $x, y$ , то максимальные кинетические ( $T_{\text{макс}}$ ) и потенциальные ( $\Pi_{\text{макс}}$ ) энергии колебаний ячейки должны быть равны максимальной кинетической и потенциальной энергии системы с одной степенью свободы [3], т.е.

$$\Pi_{\text{макс}} = \frac{\hat{K} \hat{Z}_{\text{макс}}^2}{2}; \quad T_{\text{макс}} = \frac{\hat{m} \hat{Z}_{\text{макс}}^2 \omega_0^2}{2}, \quad (8.31)$$

где  $\hat{Z}_{\text{макс}} = Z(x, y, t) / K_{\text{фГ}}(x, y)$ ;

Если на ячейку в точку с координатами  $(x, y)$  установить дополнительный инерционный элемент массой  $m_2$  (рис. 8.6, а), то кинетическая энергия такой системы опишется формулой

$$T_{\text{смакс}} = T_{\text{пмакс}} + T_{\text{гмакс}} = \frac{\hat{m} \hat{Z}_{\text{макс}}^2 \omega_{0\Gamma}^2}{2} + \frac{m_{\Gamma} \hat{Z}^2(x, y) \omega_{0\Gamma}^2}{2}$$

где  $\hat{Z}_{\text{макс}} = Z(x, y, \omega_{0\Gamma}) / k_{\text{фГ}}(x, y)$ ;

$T_{\text{пмакс}}$  – максимальная кинетическая энергия ячейки;

$T_{\text{гмакс}}$  – максимальная кинетическая энергия дополнительного инерционного элемента;

$\omega_{0\Gamma}$  – круговая резонансная частота ячейки с дополнительным инерционным элементом. Если масса дополнительного инерционного элемента  $m_{\Gamma}$  много меньше сосредоточенной массы ячейки, то  $K_{\text{ф}}(x, y) = K_{\text{фГ}}(x, y)$ . Потенциальная энергия ячейки при установке точечного дополнительного инерционного элемента остается без изменения. Учитывая, что при резонансе

$\Pi_{\text{макс}} = T_{\text{макс}}$  для ячейки без дополнительного инерционного элемента и  $\Pi_{\text{смакс}} = T_{\text{смакс}}$  для ячейки с дополнительным инерционным элементом, правомерно записать систему уравнений

$$\begin{cases} \hat{K} - \hat{m}\omega^2 = 0, \\ \hat{K} - \hat{m}\omega_{0\Gamma}^2 = m_{\Gamma}^2 K_{\Phi}^2(x, y)\omega_{0\Gamma}^2. \end{cases}$$

Решение системы относительно неизвестных  $\hat{K}$  и  $\hat{m}$  дает выражения

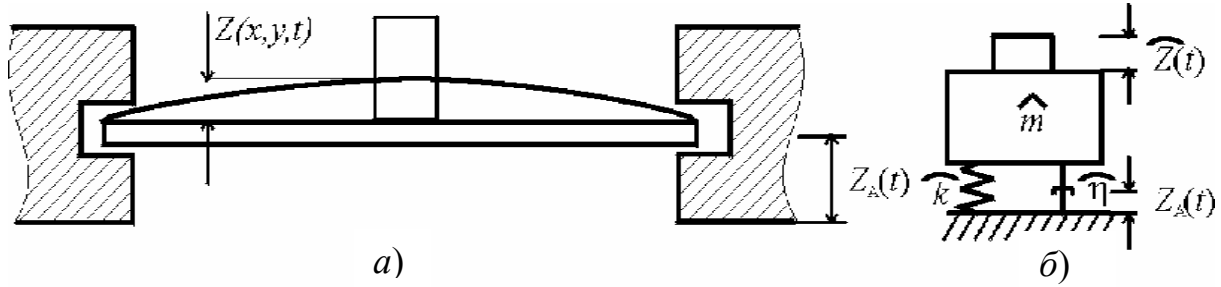


Рис. 8.6. Модель ячейки с дополнительным инерционным элементом

$$\hat{K} = \frac{m_{\Gamma} K_{\Phi}^2(x, y) f_0^2 f_{0\Gamma}^2 4\pi^2}{f_0^2 f_{0\Gamma}^2}; \quad (8.32)$$

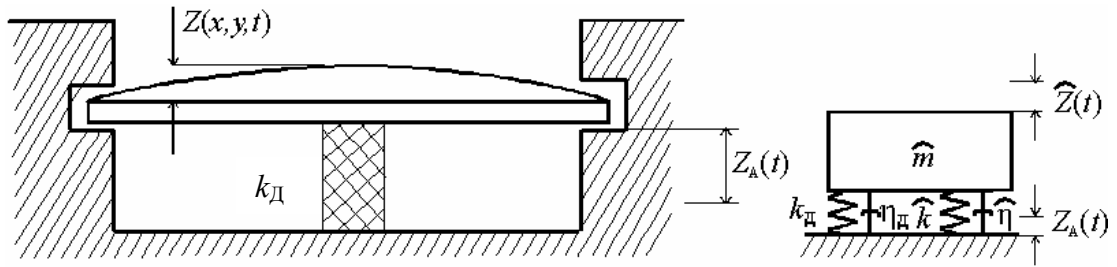
$$\hat{m} = \frac{m_{\Gamma} K_{\Phi}^2(x, y) f_{0\Gamma}^2}{f_0^2 f_{0\Gamma}^2}, \quad (8.33)$$

где  $f_0$  и  $f_{0\Gamma}$  – собственные частоты колебаний ячейки и ячейки с дополнительным инерционным элементом соответственно.

Собственные частоты колебаний  $f_0$  и  $f_{0\Gamma}$  находятся либо экспериментально, либо теоретически, например, определяются по программам, реализующим численные методы расчета колебаний пластинчатых конструкций.

*Определение сосредоточенной жесткости демпфирующей вставки.* Физическая модель конструкции, содержащая упругий элемент, установленный между основаниями ячейки и корпуса, может быть представлена в виде системы с одной степенью свободы (рис. 8.7). Потенциальная энергия конструкций с упругим элементом  $\Pi_c$  складывается из потенциальной энергии ячейки  $\Pi$ , рассчитываемой по выражению (8.31), и потенциальной энергии упругого элемента  $\Pi_d$ , рассчитываемой по формуле [3]

$$\Pi_d = \frac{K_d Z^2(x, y, t)}{2}.$$



После подстановки перемещения ячейки в точку крепления упругого элемента, учитывая (8.24), получим

$$\Pi_C = \Pi + \Pi_D = \frac{\hat{K}\hat{Z}^2}{2} + \frac{K_D [\hat{Z}k_{\phi D}(x,y)]^2}{2} = \frac{[\hat{K} + \hat{K}_D k_{\phi D}(x,y)]\hat{Z}^2}{2}.$$

Аналогично получим выражение для потенциальной энергии системы с одной степенью свободы

$$\Pi_C = \frac{(\hat{K} + \hat{K}_D)\hat{Z}^2}{2},$$

где  $\hat{Z}$  находится из выражения (8.21). Если  $K_D \ll \hat{K}$ , то  $k_{\phi D}(x,y) \approx k_{\phi}(x,y)$ . Условия равенства энергии будет выполняться только в случае, когда

$$\hat{K}_D = K_D k_{\phi}^2. \quad (8.34)$$

Жесткость упругой вставки находится из геометрических размеров и модуля упругости 1-го рода  $E$  материалов вставки по формуле

$$K_D = \frac{ES}{H}, \quad (8.35)$$

где  $S$  и  $H$  – площадь поперечного сечения вставки и ее высота соответственно.

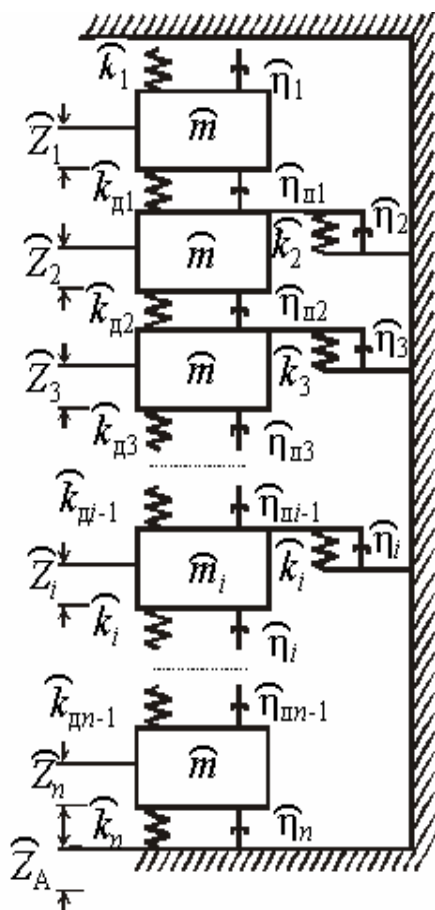


Рис. 8.8. Физическая модель  $n$ -ячеечной конструкции

### 8.3. КОНСТРУКЦИИ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ С $n$ ЯЧЕЙКАМИ<sup>1)</sup>

Если в блоке РЭС установлено  $n$  ячеек с  $n-1$  ДВ, физическую модель

<sup>1)</sup> Написан совместно с Г.Ф. Долговым



можно представить в виде, показанном на рис. 8.8.

Колебания ячеек в этом случае описываются системой  $n$  уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{m}\widehat{\ddot{Z}}_1 - \widehat{K}_1(Z_A - \widehat{\ddot{Z}}_1)(1 + j\widehat{\eta}_1) - P_{Д0} + P_{Д1} = 0; \\ \widehat{m}\widehat{\ddot{Z}}_2 - \widehat{K}_2(Z_A - \widehat{\ddot{Z}}_2)(1 + j\widehat{\eta}_2) - P_{Д1} + P_{Д2} = 0; \\ \widehat{m}\widehat{\ddot{Z}}_3 - \widehat{K}_3(Z_A - \widehat{\ddot{Z}}_3)(1 + j\widehat{\eta}_3) - P_{Д2} + P_{Д3} = 0; \\ \text{-----} \\ \widehat{m}\widehat{\ddot{Z}}_i - \widehat{K}_i(Z_A - \widehat{\ddot{Z}}_i)(1 + j\widehat{\eta}_i) - P_{Дi-1} + P_{Ди} = 0; \\ \text{-----} \\ \widehat{m}\widehat{\ddot{Z}}_n - \widehat{K}_n(Z_A - \widehat{\ddot{Z}}_n)(1 + j\widehat{\eta}_n) - P_{Дn-1} + P_{Дn} = 0; \end{array} \right.$$

где  $n$  – количество ячеек в блоке;

$i = \overline{1, n}$  – текущий номер ячейки;

$Z_i$  – перемещение инерционных элементов;

$Z_A$  – перемещение основания;

$P_{Ди}$  – силы, действующие со стороны  $i$ -й ДВ.

Указанные силы находятся по выражению

$$P_{Ди} = K_{Ди}(Z_i - Z_{i+1})(1 + j\eta_{Ди})$$

при  $1 \leq i \leq n-1$ , а  $P_{Д0} = P_{Дn} = 0$ .

Таким образом, существует система уравнений, позволяющая рассчитать колебания  $n$  ячеек с ДВ, у которых известны сосредоточенные параметры.

Если блок РЭА содержит двух- и трехъячеечные конструкции с ДВ, то система  $n$  уравнений разбивается на несколько подсистем из двух и трех уравнений. Так, подсистема уравнений, описавших колебания трехъячеечной конструкции с ДВ при кинематическом возбуждении, будет выглядеть

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{m}\widehat{\ddot{Z}}_1 - \widehat{K}_1(Z_A - \widehat{\ddot{Z}}_1)(1 + j\widehat{\eta}_1) - P_{Д0} + P_{Д1} = 0; \\ \widehat{m}\widehat{\ddot{Z}}_2 - \widehat{K}_2(Z_A - \widehat{\ddot{Z}}_2)(1 + j\widehat{\eta}_2) - P_{Д1} + P_{Д2} = 0; \\ \widehat{m}\widehat{\ddot{Z}}_3 - \widehat{K}_3(Z_A - \widehat{\ddot{Z}}_3)(1 + j\widehat{\eta}_3) - P_{Д2} + P_{Д3} = 0, \end{array} \right.$$

где

$$P_{Д1} = K_{Д1}(Z_1 - Z_2)(1 + j\eta_{Д1}),$$

$$P_{Д2} = K_{Д2}(Z_2 - Z_3)(1 + j\eta_{Д2}).$$

Так как свободные колебания масс описывается гармоническими функциями  $\widehat{Z}_i = \widehat{Z}_i(t) = \widehat{Z}_i e^{j(\omega t - \varphi)}$ , получим

$$\left\{ \begin{array}{l} -\widehat{m}_1 \omega^2 \widehat{Z}_1 + \widehat{K}_1 \widehat{Z}_1 (1 + j\widehat{\eta}_1) - \widehat{K}_1 \widehat{Z}_A (1 + j\widehat{\eta}_1) + \widehat{K}_{д1} \widehat{Z}_1 (1 + j\widehat{\eta}_{д1}) - \\ - \widehat{K}_{д1} \widehat{Z}_2 (1 + j\widehat{\eta}_{д1}) = 0, \\ -\widehat{m}_2 \omega^2 \widehat{Z}_2 + \widehat{K}_2 \widehat{Z}_2 (1 + j\widehat{\eta}_2) - \widehat{K}_2 \widehat{Z}_A (1 + j\widehat{\eta}_2) + \widehat{K}_{д1} \widehat{Z}_2 (1 + j\widehat{\eta}_{д1}) - \\ - \widehat{K}_{д1} \widehat{Z}_2 (1 + j\widehat{\eta}_{д1}) + \widehat{K}_{д2} \widehat{Z}_2 (1 + j\widehat{\eta}_{д2}) - \widehat{K}_{д2} \widehat{Z}_3 (1 + j\widehat{\eta}_{д3}) = 0, \\ -\widehat{m}_3 \omega^2 \widehat{Z}_3 + \widehat{K}_3 \widehat{Z}_3 (1 + j\widehat{\eta}_3) - \widehat{K}_3 \widehat{Z}_A (1 + j\widehat{\eta}_3) + \widehat{K}_{д2} \widehat{Z}_3 (1 + j\widehat{\eta}_{д2}) - \\ - \widehat{K}_{д2} \widehat{Z}_2 (1 + j\widehat{\eta}_{д2}) = 0. \end{array} \right.$$

После подстановки в эту систему уравнений выражения  $\widehat{K}_{д} = K_{д} k_{\Phi}$  и деления всех членов на  $Z_A(t)$  получим

$$\left\{ \begin{array}{l} -\widehat{m}_1 \omega^2 \Phi_1 + \widehat{K}_1 \Phi_1 (1 + j\eta_1) - \widehat{K}_1 (1 + j\eta_1) + K_{д1} k_{\Phi 1}^2 \Phi_1 (1 + j\eta_{д1}) - \\ - K_{д1} k_{\Phi 1}^2 \Phi_1 (1 + j\eta_{д1}) = 0, \\ -\widehat{m}_2 \omega^2 \Phi_2 + \widehat{K}_2 \Phi_2 (1 + j\eta_2) - \widehat{K}_2 (1 + j\eta_2) - K_{д1} k_{\Phi 1}^2 \Phi_1 (1 + j\eta_{д2}) - \\ - K_{д1} k_{\Phi 2}^2 \Phi_2 (1 + j\eta_{д1}) + K_{д2} k_{\Phi 2}^2 \Phi_2 (1 + j\eta_{д1}) - K_{д1} k_{\Phi 3}^2 \Phi_3 (1 + j\eta_{д2}) = 0, \\ -\widehat{m}_3 \omega^2 \Phi_3 + \widehat{K}_3 \Phi_3 (1 + j\eta_3) - \widehat{K}_3 (1 + j\eta_3) - K_{д1} k_{\Phi 3}^2 \Phi_3 (1 + j\eta_{д2}) - \\ - K_{д2} k_{\Phi 2}^2 \Phi_2 (1 + j\eta_{д2}) = 0. \end{array} \right.$$

где  $\Phi_i = Z_i(t)/Z_A(t)$  при  $i=1, 2, 3$ .

Получилась система уравнений с тремя неизвестными  $\Phi_i$ , которая легко решается на ЭВМ при любом значении частоты  $\omega$ .

КП ячейки в точке с координатами  $(x, y)$  рассчитывается по формуле

$$\mu_i = |\Phi_i k_{тм}(x, y) - k_{тм}(x, y) + 1|.$$

Эта формула преобразует значение функции передачи колебания (которые вибрируют) к абсолютному КП ячейки (относительно неподвижного объекта, например Земли).

Подсистема уравнений, описывающих колебания двухъячеечной конструкции, получается из подсистемы трехъячеечной конструкции при  $m_3 = K_3 = K_{д2} = 0$ .

$$\begin{cases} -\hat{m}_1\omega^2\Phi_1 + \hat{K}_1\Phi_1(1 + j\hat{\eta}_1) - \hat{K}_1(1 + j\hat{\eta}_1) + K_{д1}k_{\Phi1}^2\Phi_1(1 + j\hat{\eta}_{д1}) - \\ - K_{д1}k_{\Phi2}^2\Phi_1(1 + j\hat{\eta}_{д1}) = 0, \\ -\hat{m}_2\omega^2\Phi_2 + \hat{K}_2\Phi_2(1 + j\hat{\eta}_2) - \hat{K}_2(1 + j\hat{\eta}_2) + K_{д1}k_{\Phi2}^2\Phi_2(1 + j\hat{\eta}_{д1}) - \\ - K_{д1}k_{\Phi1}^2\Phi_1(1 + j\hat{\eta}_{д1}) = 0. \end{cases}$$

Если  $k_{\Phi1} = k_{\Phi2} = 1$ , а  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , то получится подсистема уравнений

$$\begin{cases} \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_A} [-\hat{m}_1\omega^2 + \hat{K}_1 + K_{д1}(1 + j\eta_{д1})] + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_A} [-K_{д1}(1 + j\eta_{д1})] = \hat{K}_1, \\ \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_A} [-K_{д1}(1 + j\eta_{д1})] + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_A} [-\hat{m}_2\omega^2 + \hat{K}_2 + K_{д1}(1 + j\eta_{д1})] = \hat{K}_2, \end{cases}$$

аналогичная (8.4).

Разработанная математическая модель блока электронного средства с ДВ учитывает форму, потери энергии и рассчитывает амплитуды колебаний ячеек в точке приведения распределенных параметров к сосредоточенным.

#### 8.4. ДИНАМИЧЕСКИЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Теория динамического гасителя колебаний (ДГК) без демпфирования рассмотрена в гл. 3 (ч.1). Было показано, что такой гаситель устраняет резонансные колебания только на частоте, совпадающей с собственной частотой колебаний ДГК. Одновременно могут возникнуть резонансные колебания на двух других частотах. Это делает неприемлемым применение ДГК, когда требуется устранить резонансные колебания в широком диапазоне частот. Там же показано, что применение ДГК с демпфированием позволяет значительно уменьшить амплитуды резонансных колебаний и во многих случаях довести их до уровня, не превышающего допустимый. В этом случае ДГК используется уже как демпфер. Пример практической реализации такого ДГК с демпфированием показан на рис. 8.9. В качестве инерционного груза используется обычно стальная пластина, а в качестве упругодемпфирующего элемента – вибропоглощающий полимер. Площадь ДГК с демпфированием приблизительно равна площади, занимаемой одной микросхемой. При анализе динамического поведения такой системы (ячейка – ДГК) целесообразно представить ячейку в виде сосредоточенной массы, установленной на пружине, и расчетную модель конструкции (рис. 8.9.) можно представить в виде системы с двумя степенями свободы, как показано на рис. 8.10. В этой модели для упрощения анализа демпфированием в ячейке пренебрегаем.

**ДГК с демпфированием при кинематическом гармоническом воздействии.** Для системы, показанной на рис. 8.10, уравнения движения можно представить в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + b(\dot{z} - \dot{z}_0) + k(z - z_0) - b_1(\dot{z}_1 - \dot{z}) - k_1(z_1 - z) = 0; \\ m_1\ddot{z}_1 + b_1(\dot{z}_1 - \dot{z}) + k_1(z_1 - z) = 0, \end{cases}$$

где  $k, b$  – коэффициенты жесткости и сопротивления соответственно.

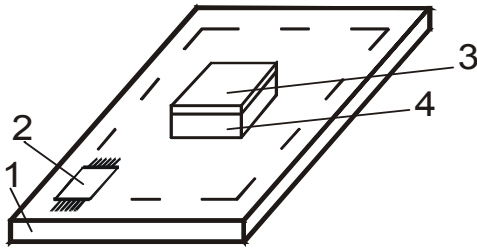


Рис. 8.9. Ячейка с ДГК с демпфированием:  
1 – печатная плата; 2 – ЭРЭ; 3,4 – ДГК (3 – инерционный груз, 4 – вибропоглощающий полимер)

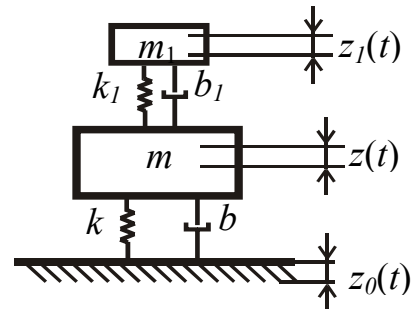


Рис. 8.10. Система с двумя степенями свободы

Будем считать, что колебания системы возбуждаются кинематически, то есть за счет колебаний основания по закону  $z_0 = z(t) = z_0 e^{i\omega t}$ . Тогда получим

$$z = z e^{(j\omega t - \varphi_1)}; \quad z_1 = z_1 e^{(j\omega t - \varphi_2)}.$$

Подставим эти решения в предыдущие уравнения, запишем:

$$\begin{cases} -m\omega^2 z + b(j\omega z - j\omega z_0) + kz - kz_0 - b_1(j\omega z_1 - j\omega z) - k_1 z_1 + k_1 z = 0; \\ -m_1 \omega^2 z_1 + b_1(j\omega z_1 - j\omega z) + k_1 z_1 - k_1 z = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} ((-m\omega^2 + k + k_1) + j\omega(b + b_1))z - (k_1 + j\omega b_1)z_1 - (k + j\omega b)z_0 = 0; \\ (k_1 + j\omega b_1)z + (m_1 \omega^2 - k_1 - j\omega b_1)z_1 = 0. \end{cases}$$

Разделим эти уравнения на  $k = m\omega_0^2$  и введем обозначения

$$\frac{k + k_1 - m\omega^2}{m\omega_0^2} = 1 + M\nu^2 - \Omega^2;$$

$$\frac{k_1 + j\omega b_1}{m\omega_0^2} = M\nu^2 + j\Omega M\nu\eta_1;$$

$$j \frac{\omega(b+b_1)}{m\omega_0^2} = j \frac{\omega}{\omega_0} \frac{b+b_1}{m\omega_0} = j\Omega(\eta + Mv\eta_1),$$

$$\frac{m_1\omega^2 + k_1 + j\omega b_1}{m\omega_0^2} = M\Omega^2 + Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1;$$

$$\frac{k + j\omega b}{m\omega_0^2} = 1 + j \frac{\omega b}{m\omega_0^2} = 1 + j\Omega \frac{b}{m\omega_0} =$$

$$= 1 + j\Omega \frac{\omega_0 b}{m\omega_0^2} = 1 + j\Omega\eta,$$

где

$$v = \frac{\omega_1}{\omega_0}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad M = \frac{m_1}{m}; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\eta = \frac{b\omega_0}{k}; \quad \eta_1 = \frac{b_1\omega_1}{k_1};$$

Получим систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} ((1 + Mv^2 - \Omega^2) + j\Omega(\eta + Mv\eta_1))z - (Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1)z_1 - (1 + j\Omega\eta)z_0 = 0, \\ (Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1)z + (M\Omega^2 - Mv^2 - j\Omega Mv\eta_1)z_1 = 0. \end{cases}$$

Разделим эти уравнения на  $z_0$ , учитывая, что основное рассеяние энергии будет в демпфере гасителя, т.е.  $\eta \ll \eta_1$ , и можно считать, что  $\eta = 0$ .

Получим

$$\begin{cases} (1 + Mv^2 - \Omega^2 + j\Omega Mv\eta_1)\mu - (Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1)\mu_1 = 1, \\ (Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1)\mu - (Mv^2 - M\Omega^2 + j\Omega Mv\eta_1)\mu_1 = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение относительно  $\mu_1$

$$\mu_1 = \frac{Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1}{Mv^2 - M\Omega^2 + j\Omega Mv\eta_1} \mu$$

и, подставив в первое уравнение, получим

$$\begin{aligned} & (1 + Mv - \Omega^2 + j\Omega Mv\eta_1)\mu - \\ & - (Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1) \frac{Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1}{Mv^2 - M\Omega^2 + j\Omega Mv\eta_1} \mu = 1, \end{aligned}$$

или

$$\mu \left[ \frac{1 + Mv - \Omega^2 + jMv\eta_1\Omega - (Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1)(Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1)}{Mv^2 - M\Omega^2 + j\Omega Mv\eta_1} \right] = 1$$

$$\mu = \frac{(v^2 - \Omega^2) + j\eta_1 v \Omega}{(1 + Mv^2 - \Omega^2 + jMv\eta_1\Omega) \left[ (v^2 - \Omega^2) + j\eta_1 v \Omega \right]} \dots$$

$$\dots \overline{-(Mv^2 + j\Omega Mv\eta_1)(v^2 + j\eta_1 v \Omega)}$$

Знаменатель в выражении для  $\mu$  будем преобразовывать частями. Перемножим комплексные числа  $(A \cdot B$  и  $C \cdot D)$ , вычтем произведения друг из друга  $(A \cdot B - C \cdot D)$ : Получим

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \left[ (1 + Mv^2 - \Omega^2) + jMv\eta_1\Omega \right] \left[ (v^2 - \Omega^2) + j\eta_1 v \Omega \right] = \\ &= \left( (1 + Mv^2 - \Omega^2)(v^2 - \Omega^2) - \Omega^2 \eta_1 v Mv\eta_1 \right) + \\ &+ j \left( (1 + Mv^2 - \Omega^2) \eta_1 v \Omega + \Omega (v^2 - \Omega^2) Mv\eta_1 \right) = \\ &= \left( (1 + Mv^2 - \Omega^2)(v^2 - \Omega^2) - Mv^2 \eta_1^2 \Omega^2 \right) + \\ &+ j \left( v \eta_1 \Omega - v \eta_1 \Omega^3 + 2Mv^3 \Omega \eta_1 - Mv \eta_1 \Omega^3 \right); \\ C \cdot D &= (Mv^2 + jM\eta_1\Omega v) (v^2 + j\eta_1 v \Omega) = \\ &= (Mv^4 - M\eta_1^2 v^2 \Omega^2) + j2Mv^3 \eta_1 \Omega. \end{aligned}$$

Решая  $A \cdot B - C \cdot D$ , найдем:

$$\begin{aligned} &\left( (1 + Mv^2 - \Omega^2)(v^2 - \Omega^2) - M\eta_1^2 v^2 \Omega^2 - Mv^4 + M\eta_1^2 v^2 \Omega^2 \right) + \\ &+ i \left( \eta_1 v \Omega - \eta_1 v \Omega^3 + 2M\eta_1 v^3 \Omega - M\eta_1 v \Omega^3 - 2M\eta_1 v^3 \Omega \right) = \\ &= \left( (\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - v^2) - Mv^2 \Omega^2 \right) + i \left( -\eta_1 v \Omega (\Omega^2 - 1 + M\Omega^2) \right) \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\mu = \sqrt{\frac{(v^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega v \eta_1)^2}{(\Omega v \eta_1)^2 ((\Omega^2 - 1) + M\Omega^2)^2 + (Mv^2 \Omega^2 + (1 - \Omega^2)(\Omega^2 - v^2))^2}}. \quad (8.36)$$

На рис. 8.11 приведены графики зависимости  $\mu$  от соотношения частот

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{при различном демпфировании} \quad \eta_1 = \frac{b_1 \omega_0}{k_1}. \quad \text{Принималось,}$$

что  $v=1$ ,  $M=0,05$ . Графики получены при помощи среды автоматизации отчетов Mathcad.

Видно, что при  $\eta_1=0,12$  АРК существенно уменьшается. Очевидно, также, что можно найти такое значение  $\eta_1$ , при котором обе резонансные амплитуды будут одинаковы и минимальны (оптимальная настройка).

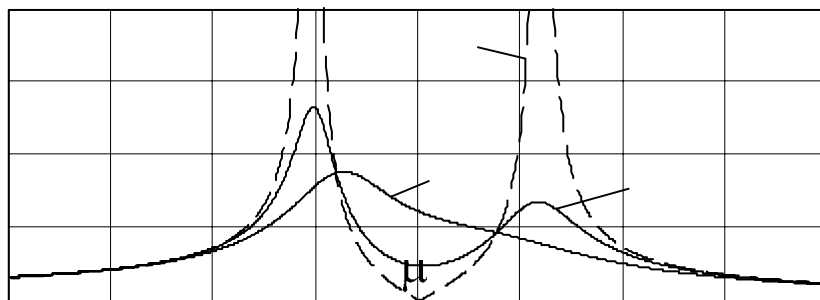


Рис. 8.11. Резонансные кривые системы

15

**Пример 8.2.** Для уменьшения амплитуд резонансных колебаний платы с размерами  $200 \times 100 \times 1,5$  мм на ней в центре установлен динамический гаситель колебаний (см. рис. 8.12). Коэффициент жесткости вибропоглощающего полимера  $8000 \text{ Н/м}$ , масса инерционного груза  $0,0035 \text{ кг}$ . Рассчитать коэффициент передачи платы с ДГК в интервале возмущающих колебаний  $(150\text{--}400) \text{ Гц}$  при различном демпфировании  $\eta_1 = 0,05; 0,1; 0,2; 0,4$ . Массу элементов принять равной половине массы платы. Материал платы – СТЭФ,  $H=1,33 \text{ мм}$  (табл. П.1). Результаты представить в графическом виде.

*Решение.* Решать задачу будем при помощи программного продукта Mathcad. Вначале следует ввести в рабочей области параметры плат и материалов:

$a = 0,2 \text{ м}; b = 0,1 \text{ м}; h = 0,0015 \text{ м}; m_I = 0,0024 \text{ кг}; \rho = 2470 \text{ кг/м}^3; \nu = 0,279;$   
 $k_I = 8000 \text{ Н/м}; E = 3,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \eta_{11} = 0,05; \eta_{12} = 0,1; \eta_{13} = 0,2; \eta_{14} = 0,4$

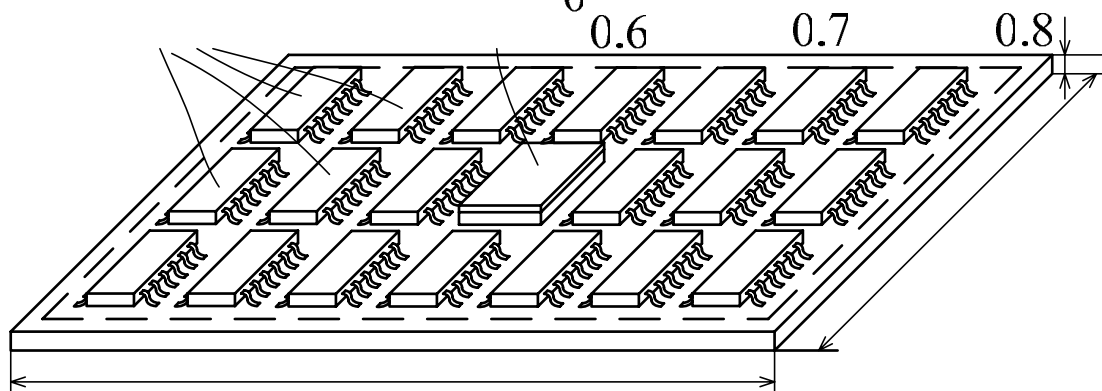


Рис. 8.12. Ячейка с динамическим гасителем колебаний

Определение массы платы:  $m = a \cdot b \cdot h \cdot \rho,$

Вывод массы платы:  $m = 0,074 \text{ кг}$

Так как расчетная модель представляется в виде модели с сосредоточенными параметрами, то следует перейти от распределенных параметров к сосредоточенным. При этом следует считать, что динамический гаситель колебаний является элементом с сосредоточенной массой, поэтому его параметры остаются неизменными.

Приведенная масса платы при свободном опирании платы по контуру находится по формуле (8.18):  $m_{\text{пр}} = (m + m_{\text{ЭРЭ}})/4, m_{\text{пр}} = 0,028 \text{ кг}.$

Коэффициент, учитывающий форму платы:  $\xi = a/b, \xi = 2.$

Коэффициент, учитывающий способ закрепления платы при свободном опирании (табл. П.3):  $\alpha = 9,87\left(1 + a^2 / b^2\right)$ ,  $\alpha = 49,35$ . Цилиндрическая жесткость платы:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D = 10,065 \text{ Н/м.}$$

По формуле 8.19 рассчитаем приведенное значение коэффициента жесткости:

$$k = \frac{D\alpha^2}{4a^2\xi}, \quad k = 7,66 \cdot 10^4 \text{ Н/м.}$$

Собственная частота колебаний платы:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_{ПП}}}$ ,  $\omega_0 = 1,66 \cdot 10^3$  рад/с.

Собственная частота колебаний груза:  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\omega_1 = 1,512 \cdot 10^3$  рад/с.

Зададим диапазон исследуемых частот от 200 до 450 Гц с шагом 5 Гц:  
 $f = 150,155..400$  Гц.

Определим  $\Omega$  как функцию от частоты  $f$ :  $\Omega(f) = 2\pi f / \omega_0$ .

Зададим частотное отношение:  $\nu = \omega_1 / \omega_0$ ,  $\nu = 0,911$ .

Зададим отношение масс:  $M = m_1 / m_{ПП}$ ,  $M = 0,126$ .

Используя выражение (8.36), определим коэффициенты передачи  $\mu_i$  как функцию от частоты  $f$ :

$$\mu_i(f) = \sqrt{\frac{[\nu^2 - \Omega^2(f)]^2 + [\Omega(f)\nu\eta_{li}]^2}{[\Omega(f)\nu\eta_{li}]^2 [\Omega(f)^2 - 1 + M\Omega^2(f)]^2 + [M\nu^2\Omega^2(f) + [1 - \Omega^2(f)(\Omega^2(f) - \nu^2)]^2]}}$$

Построим искомые зависимости коэффициента передачи от возмущающей частоты. Для этого выполним Insert/Graph/X-Y Plot

В появившейся форме зададим по вертикальной оси функции  $\mu_1(f)$ ,  $\mu_2(f)$ ,  $\mu_3(f)$ ,  $\mu_4(f)$  и их граничные условия 0 и 20. По горизонтальной оси зададим аргумент  $f$  и его граничные условия 150 и 400 Гц.

Получим графики, показанные на рис. 8.13.

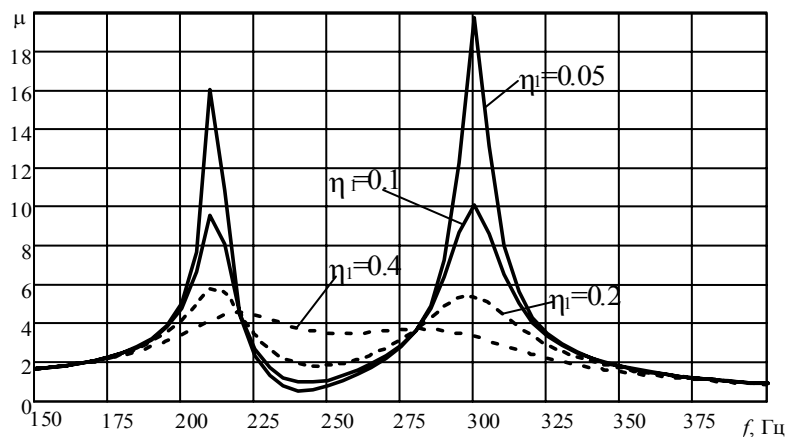


Рис. 8.13. Амплитудно-частотные характеристики



## Контрольные вопросы

1. В чем заключается принцип работы ячеек с ДВ?
2. Нарисуйте АЧХ ячеек без ДВ и с ДВ.
3. Приведите дискретные физические модели ячеек РЭС с ДВ:
  - в общем случае;
  - для расчета СЧК;
  - для расчета амплитуд резонансных колебаний.
4. Напишите дифференциальные уравнения собственных частот колебаний (СЧК) ячеек РЭА с ДВ.
5. Выведите формулу для расчета СЧК ячеек РЭА с ДВ.
6. Напишите дифференциальные уравнения движения ячеек РЭА с ДВ для случая кинематического возбуждения.
7. Выведите формулы для расчета коэффициентов передачи ячеек РЭС с ДВ.
8. Получите формулу для сосредоточенных массы и жесткости ячеек РЭС.
9. В чем заключается разница между классическим динамическим гасителем и ДГК с демпфированием?
10. Напишите дифференциальные уравнения СЧК ячейки РЭА с высокодемпфированным ДГК.
11. Выведите формулу коэффициента передачи ячейки РЭА с установленным на ней ДГК при гармоническом воздействии.
12. Опишите подход, используемый при определении дисперсии амплитуды отклонений ячейки.

# ПРИЛОЖЕНИЕ


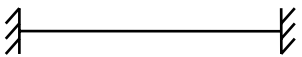
Т а б л и ц а П.1

Физические параметры материалов


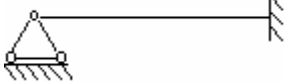
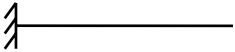
Материал	$E \cdot 10^{11}, \text{Н/М}^2$	$\rho \cdot 10^3, \text{кг/М}^3$	$\nu$	$[\sigma] \cdot 10^8, \text{Н/М}^2$
Сталь	2 – 2,2	7,8	0,24 – 0,3	1,6
Алюминий	0,68	2,7	0,32 – 0,36	0,3 – 0,8
Медь	1,27	8,9	0,31 – 0,34	0,3 – 1,2
Серебро	0,82	10,5	---	---
Золото	0,78	19,3	---	---
Дюралюминий	0,72	2,7	---	0,8 – 1,5
Стеклотекстолит				
СТЭФ (Н=1,33 мм)	0,33	2,47	0,279	---
СТЭ (Н=1,22 мм)	0,35	1,98	0,14	---
НФД (Н=0,92 мм)	0,345	2,32	0,238	---
СТЭФ (с печатной схемой, Н=1,22 мм)	0,302	2,05	0,22	---
Текстолит	0,06 – 0,1	---	---	0,3 – 0,4
Гетинакс	0,1 – 0,17	---	---	0,5 – 0,7

Т а б л и ц а П.2

Значения параметров  $\lambda_i$  и коэффициентов  $A_i, B_i, C_i$ , базисных функций

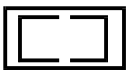
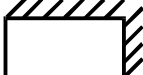
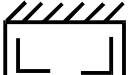
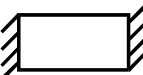
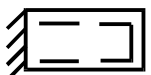
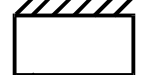
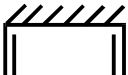
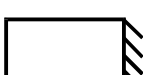
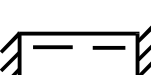
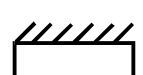
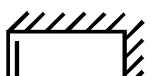
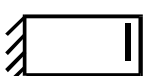
Условия закрепления	$i$	$\lambda_i$	$A_i$	$B_i$	$C_i$
	1	3,142	0	0	0
	2	6,283	0	0	0
	3	9,425	0	0	0
	4	12,566	0	0	0
	5	15,708	0	0	0
	1	4,730	-1,0178	-1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	-1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	-1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	-1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	-1	-1,0000001

Окончание табл. П.2

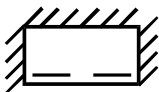
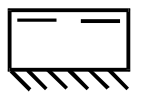
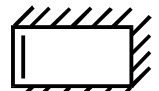

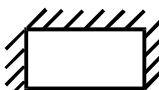

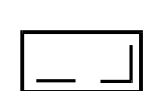
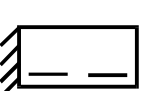
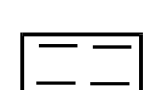
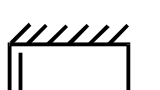
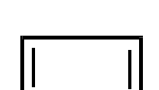
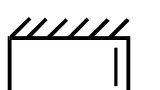
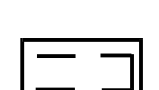

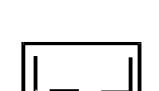
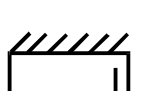
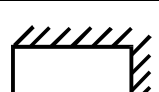

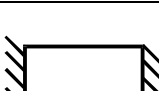
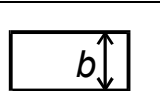
	1	4,730	-1,0178	1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	1	-1,0000001
	1	3,927	0	0,027875	0
	2	7,069	0	-0,0012041	0
	3	10,210	0	0,0000520	0
	4	13,352	0	-0,0000022	0
	5	16,494	0	0,0000001	0
	1	1,875	-1,3622	-1	1,3622
	2	4,694	-0,98187	-1	0,98187
	3	7,855	-1,000777	-1	1,000777
	4	10,996	-0,999965	-1	0,999965
	5	14,137	-1,0000015	-1	1,0000015

Т а б л и ц а П.3

## Частотный коэффициент


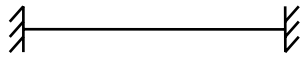


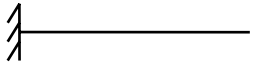
Эскизы	$\alpha$	Эскизы	$\alpha$
	$9.87 \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$		$3.52 \sqrt{1 + 2.48 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	$9.87 \sqrt{1 + 2.33 \frac{a^2}{b^2} + 2.44 \frac{a^4}{b^4}}$		22.37
	$15.42 \sqrt{1 + 0.95 \frac{a^2}{b^2} + 0.41 \frac{a^4}{b^4}}$		$22.37 \frac{a^2}{b^2}$
	$9.87 \sqrt{1 + 2.57 \frac{a^2}{b^2} + 5.14 \frac{a^4}{b^4}}$		3.52
	$22.37 \sqrt{1 + 0.48 \frac{a^2}{b^2} + 0.19 \frac{a^4}{b^4}}$		$3,52 \frac{a^2}{b^2}$
	$15.42 \sqrt{1 + 1.11 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		15.42

Окончание табл. П.3

Эскизы	$\alpha$	Эскизы	$\alpha$
	$22.37\sqrt{1+0.57\frac{a^2}{b^2}+0.47\frac{a^4}{b^4}}$		$15.42\frac{a^2}{b^2}$
	$22.37\sqrt{1+0.61\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$		$3.52\sqrt{1+5.56\frac{a^2}{b^2}+19.2\frac{a^4}{b^4}}$
	$22.37\sqrt{1+0.61\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$		$15.42\sqrt{1+0.29\frac{a^2}{b^2}+0.05\frac{a^4}{b^4}}$
	$3.52\frac{a}{b}$		$3.52\sqrt{1+1.58\frac{a^2}{b^2}}$
	$9.87\frac{a^2}{b^2}$		$3.52\sqrt{1.58\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$
	9.87		$22.37\sqrt{0.1\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$
	$9.87\sqrt{0.43\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$		$22.37\sqrt{1+0.1\frac{a^2}{b^2}}$
	$9.87\sqrt{1+0.43\frac{a^2}{b^2}}$		$15.42\sqrt{0.34\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}}$
	$3.52\sqrt{1+5.97\frac{a^2}{b^2}+40.5\frac{a^4}{b^4}}$		$15.42\sqrt{1+0.34\frac{a^2}{b^2}}$
	$22.37\sqrt{1+0.14\frac{a^2}{b^2}+0.02\frac{a^4}{b^4}}$		$a$ - длинная сторона $b$ - короткая сторона

Т а б л и ц а П. 4

Численные значения некоторых интегралов

Способ крепления	$i$	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i dx$	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i^2 dx$	$l \int_0^l x_i'^2 dx$	$l^3 \int_0^l x_i''^2 dx$
	1	0,6366	0,5	4,9348	48,70454
	2	0,6366	0,5	19,739	779,2727
	3	0,6366	0,5	44,413	3945,068
	4	0,6366	0,5	78,956	12468,36
	5	0,6366	0,5	123,37	30440,34
	1	0,8456	1,0358	12,748	518,4548
	2	0,8594	0,9985	45,975	3797,111
	3	0,8737	1,0026	98,664	14347,29
	4	0,8764	0,9976	172,08	39844,88
	5	0,9152	1,0447	256,77	93140,375
	1	0,8903	1,0357	51,250	518,4726
	2	0,8863	0,9984	108,75	3797,502
	3	0,8910	1,0000	186,85	14618,15
	4	0,8921	0,9973	283,14	39838,21
	5	0,9068	1,0448	436,23	93132,35
	1	0,6078	0,4995	5,7524	118,8525
	2	0,6208	0,4999	21,450	1248,754
	3	0,6256	0,4999	47,021	5432,763
	4	0,6334	0,4992	108,74	15865,02
	5	0,6309	0,5008	127,54	37076,88
	1	1,0664	1,8552	8,6228	22,93523
	2	0,8426	0,9639	31,248	468,0322
	3	0,8738	1,0017	77,461	3813,367
	4	0,8819	1,0026	143,85	14656,03
	5	0,8785	0,9814	215,65	39201,60

Т а б л и ц а П.5


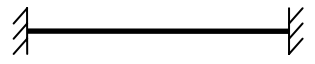



Коэффициенты формы колебаний  $K(x)$ <sup>1</sup>

Способ крепления	Относительная координата $X/L$											
	i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	1	0	0,393	0,748	1,03	1,21	1,27	1,21	1,03	0,748	0,393	0
	2	0	0,748	1,21	1,21	0,748	0	-0,74	-1,2	-1,2	-0,74	0
	3	0	1,03	1,21	0,393	-0,74	-1,2	-0,74	0,393	1,21	1,03	0
	1	0	0,157	0,514	0,910	1,20	1,31	1,20	0,910	0,514	0,156	0
	2	0	0,391	1,03	1,29	0,889	0	-0,88	-1,2	-1,0	-0,39	0
	3	0	0,668	1,31	0,766	-0,53	-1,2	-0,56	0,735	1,31	0,69	0
	1	-1,74	-0,93	-0,17	0,475	0,910	1,06	0,910	0,476	-0,17	-0,93	-1,74
	2	-1,77	-0,40	0,704	1,17	0,857	0	-0,85	-1,1	-0,70	0,403	-1,77
	3	-1,78	0,092	1,14	0,707	-0,58	-1,2	-0,58	0,707	1,14	0,092	-1,78
	1	0	0,479	0,889	1,17	1,29	1,24	1,03	0,729	0,391	0,115	0
	2	0	0,805	1,22	1,05	0,370	-0,50	-1,1	-1,3	-0,94	-0,33	0
	3	0	1,06	1,11	0,098	-1,0	-1,1	-0,18	0,992	1,30	0,610	0
	1	0	0,026	0,100	0,213	0,359	0,531	0,722	0,925	1,13	1,35	1,56
	2	0	0,158	0,516	0,903	1,17	1,22	1,01	0,544	-0,12	-0,89	-1,71
	3	0	0,398	1,05	1,32	0,918	0,034	-0,82	-1,1	-0,68	0,399	1,74

<sup>1</sup> Рассчитана Г.Ф. Долговым

Т а б л и ц а П.6

## Значения балочной функции

Способ крепления	Относительная координата $X/L$											
	$i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	1	0	,30901	,58778	,80901	,95105	1	,95105	,80901	,58778	,30901	0
	2	0	,58778	,95105	,95105	,58778	0	-,5877	-,9510	-,9510	-,5877	0
	3	0	,80901	,95105	,30901	-,5877	-1	-,5877	,30901	,95105	,80901	0
	1	0	,19246	,63040	1,1154	1,4813	1,6163	1,4812	1,1154	,63024	,19236	0
	2	0	,45536	1,2057	1,5043	1,0338	,00014	-1,033	-1,504	-1,206	-,4557	0
	3	0	,76708	1,5072	,87911	-,6132	-1,405	-,6508	,87896	1,5069	,76681	0
	1	-2,036	-1,093	-,1989	,55370	1,0590	1,2373	1,0591	,55385	-,1986	-1,093	-2,035
	2	-1,998	-,4545	,79383	1,3229	,96538	,00014	-,9651	-1,322	-,7940	,45433	1,9984
	3	-2,001	,10399	1,2857	,79375	-,6559	-1,422	-,6553	,79424	1,2858	,10384	-1,999
	1	0	,39391	,73132	,96486	1,0641	1,0212	,85283	,59956	,32191	,09455	0
	2	0	,64855	,98537	,84762	,29871	-,4034	-,9329	-1,057	-,7595	-,2700	0
	3	0	,85269	,89121	,07906	-,8074	-,9196	-,1446	,79335	1,0427	,48810	0
	1	0	,04569	,17399	,37179	,62623	,92490	1,2561	1,6096	1,9763	2,3493	2,7241
	2	0	,18189	,59117	1,0331	1,3421	1,4014	1,1576	,62273	-,1373	-1,028	-1,963
	3	0	,45651	1,2099	1,5136	1,0525	,03925	-,9483	-1,315	-,7898	,45830	2,0031

Т а б л и ц а П. 7

## Динамические характеристики вибропоглощающих полимеров

Температура °С	Вилад-13-1		ППЭ-Р3005			
	300 Гц		200 Гц		600 Гц	
	Е 10 <sup>5</sup> , Па	η	Е 10 <sup>5</sup> , Па	η	Е 10 <sup>5</sup> , Па	Н
-60	22000	0.01	152	0.02	156	0.02
-40	20000	0.02	134	0.03	136	0.03
-20	15500	0.05	103	0.06	103	0.1
0	8500	0.22	66	0.09	68	0.16
+20	2500	0.52	48	0.09	48	0.09
+40	500	0.20	34	0.08	34	0.09
+60	—	—	18	0.12	18	0.11
+70	—	—	—	—	—	—
Температура °С	Вилад-8П		ППУ 92		ППУ305А	
	200 Гц		200 Гц		200 Гц	
	Е 10 <sup>5</sup> , Па	η	Е 10 <sup>5</sup> , Па	η	Е 10 <sup>5</sup> , Па	η
-60	—	—	1100	0.24	1941	0.075
-40	—	—	600	0.21	1744	0.025
-20	160	0.7	370	0.24	1649	0.023
0	75	0.5	70	0.65	1557	0.040
+20	50	0.35	34	0.30	1364	0.030
+40	40	0.40	29	0.20	1261	0.033
+60	—	—	27	0.09	1150	0.034
+70	—	—	—	—	—	—
Температура °С	ППУ202-2					
	200 Гц		600 Гц		1200 Гц	
	Е 10 <sup>5</sup> , Па	η	Е 10 <sup>5</sup> , Па	η	Е 10 <sup>5</sup> , Па	η
-60	950	0.10	1200	0.10	2200	0.10
-40	350	0.17	500	0.10	1000	0.25
-20	200	0.12	250	0.13	450	0.17
0	120	0.11	150	0.11	180	0.14
+20	50	0.12	70	0.14	80	0.13
+40	40	0.11	50	0.12	60	0.11
+60	35	0.18	40	0.18	45	0.20
+70	30	0.23	35	0.22	40	0.25
Температура °С	ПОЛИИЗОБУТИЛЕН					
	200 Гц		400 Гц		600 Гц	
	G10 <sup>5</sup> , Па	η	G10 <sup>5</sup> , Па	η	G10 <sup>5</sup> , Па	η
-60	—	—	—	—	—	—
-45	—	—	3810	0,81	4330	0,70
-25	—	—	440	1,26	540	1,24
-5	46	1,48	73	1,57	97	1,52
+15	11	1,1	17	1,33	23	1,49
+35	4.2	0.69	5,8	0,88	6,9	0,98
+60	3,0	0.27	3,2	0,42	3,5	0,51
+80	3,0	0.15	3,0	0.22	3,0	0.28



## РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Токарев, М. Ф.** Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: учеб. пособие для вузов / М.Ф. Токарев, Е. Н. Талицкий, В.А.Фролов; под ред. В. А. Фролова. – М.: Радио и связь, 1984. – 224 с.
2. **Вибрации в технике:** справ.: в 6 т. / ред. совет: В. Н. Челомей [и др.]. – М.: Машиностроение, 1978 – 1981.
3. **Бабаков, И. М.** Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. Наука, 1968. – 560 с.
4. **Steinberg, D. S.** Vibrations analysis for electronic equipment. – New York, 1973. – 456 p.
5. **Прочность, устойчивость, колебания:** справ: в 3 т. / под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – т. 3 —568 с.
6. **Виброзащита радиоэлектронной аппаратуры полимерными компонентами** / Ю. В. Зеленева, А. А. Кирилин, Э. Б. Слободник, Е. Н. Талицкий; под ред. Ю. В. Зеленева. – М.: Радио и связь, 1984. – 120 с.
7. **Нашиф, А., Джоунс, Д., Хендерсон, Дж.** Демпфирование колебаний: пер. с англ. – М.: Мир, 1988. — 488 с.
8. **Случайные колебания:** пер. с англ. / под ред. А. А. Первозванцева. – М.: Мир, 1967. – 356 с.
9. **Карпушин, В. Б.** Виброшумы радиоаппаратуры. / В. Б. Карпушин. – М.: Сов. радио, 1977. – 320 с.
10. **Справочник конструктора РЭА:** Общие принципы конструирования / под ред. Р. Г. Варламова. – М.: Сов. радио, 1980. – 480 с.
11. **Талицкий, Е. Н.** Защита электронных средств от механических воздействий. Теоретические основы: учеб. пособие / Е. Н. Талицкий; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – 256 с. – ISBN 5-89368-232-7.
12. **Филиппов, А. П.** Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
13. **Никифоров, А. С.** Вибропоглощение на судах / А. С. Никифоров. Л.: Судостроение, 1979. – 184 с.
14. **Перепечко, И. И.** Акустические методы исследования полимеров / И. И. Перепечко. – М.: Химия, 1973. – 296 с.
15. **ОСТ 4 Г0.010.009-84.** Модули электронные первого и второго уровней радиоэлектронных средств. Конструирование.
16. **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – Киев.: Наук. Думка, 1988. – 536 с.
17. **Секулович, М.** Метод конечных элементов / М. Секулович; пер. с серб. Ю.Н. Зуева; под ред. В.Ш. Барбакадзе. – М.: Стройиздат, 1993. — 664 с.
18. **Ruzicka, J. E.** Vibration control: Application. Electro-Technology. — 1964. vol. 1, N 73, p. 75–82.

Учебное издание

ТАЛИЦКИЙ Евгений Николаевич

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ  
И ЗАЩИТА ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

Учебное пособие

В 3 частях

Часть 2

Редактор Е.В. Невская

Компьютерная верстка С. В. Шумарина

ЛР № 020275. Подписано в печать 27.04.05.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.

Печатать на ризографе. Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 7,71 Тираж 75 экз.

Заказ

Редакционно-издательский комплекс

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.