

**Министерство образования Российской Федерации**

**Владимирский государственный университет**

**С.В. ФЕДОРОВ**

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Учебное пособие**

**Владимир 2002**

УДК 517.91(075.8)

Ф 33

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики Владимирского государственного педагогического университета

В.Г. Рау

Кафедра теоретической физики Владимирского педагогического университета

Печатается по решению редакционно-издательского совета

Владимирского государственного университета

**Федоров С.В.**

Ф 33 Методы математической физики: Учеб. пособие/ Владим. гос. ун-т. Владимир, 2002. 108с.

ISBN 5-89368-318-8

Подготовлено в соответствии с программой курса "Методы математической физики", читаемого студентам вузов специальности 071500. Излагаются некоторые разделы математики, широко используемые в решении многих теоретических и практических задач радиофизики и радиотехники.

Может быть полезно всем студентам, магистрам и аспирантам, изучающим вопросы применения методов математической физики в радиофизике и радиотехнике.

Библиогр.: 7 назв.

ISBN5-89368-318-8

© Владимирский государственный университет, 2002

**ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

*С. В. ФЕДОРОВ*

**МЕТОДЫ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ**

Учебное пособие

**ВЛАДИМИР 2002**

Учебное издание

ФЕДОРОВ Сергей Владимирович

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Редактор А.П. Володина

Корректор В.В. Гурова

ЛР № 020275. Подписано в печать 21.04.02.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Times.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 7,09. Тираж 75 экз.

Заказ

Редакционно-издательский комплекс

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
<b>1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ.....</b>	<b>5</b>
1.1. Асимптотическое разложение.....	5
1.2. Гиперболические функции.....	7
1.3. Обратные гиперболические функции.....	7
1.4. Интегральный синус и интегральный косинус.....	7
1.5. Гамма-функция.....	8
1.6. Связь между эйлеровыми интегралами первого и второго рода.....	11
1.7. Функции Бесселя.....	11
<b>2. ПРОСТРАНСТВА.....</b>	<b>22</b>
2.1. Точечные множества в $R^n$ .....	22
2.2. Классы функций $C^p(G)$ и $C^p(\bar{G})$ .....	24
2.3. Пространство непрерывных функций $C(T)$ .....	24
2.4. Интеграл Лебега.....	25
2.5. Пространство функций $L^2(G)$ .....	28
2.6. Ортонормальные системы.....	29
2.7. Полные ортонормальные системы.....	30
2.8. Линейные операторы и функционалы.....	31
2.9. Линейные уравнения.....	33
2.10. Эрмитовы операторы.....	34
<b>3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.....</b>	<b>35</b>
3.1. Уравнение колебаний.....	35
3.2. Уравнение диффузии.....	37
3.3. Стационарное уравнение.....	37
3.4. Уравнения Максвелла.....	37
3.5. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в точке.....	38
3.6. Характеристические поверхности.....	40
3.7. Канонический вид уравнения с двумя независимыми переменными.....	40
3.8. Постановка основных краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка.....	45
3.9. Корректность постановки задач.....	47
3.10. Теорема Ковалевской.....	47
3.11. Классические и обобщенные решения.....	48

<b>4. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ</b> .....	49
4.1. Основные и обобщенные функции.....	49
4.2. Пространство основных функций.....	50
4.3. Пространство обобщенных функций $D'$ .....	51
4.4. Носитель обобщенной функции.....	51
4.5. Регулярные обобщенные функции.....	52
4.6. Сингулярные обобщенные функции.....	52
4.7. Линейная замена переменных в обобщенных функциях.....	53
4.8. Умножение обобщенных функций.....	53
4.9. Дифференцирование обобщенных функций.....	54
<b>5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b> .....	55
5.1. Метод последовательных приближений.....	56
5.2. Теоремы Фредгольма.....	63
5.3. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром.....	70
5.4. Теорема Гильберта-Шмидта и ее следствия.....	71
<b>6. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ</b> .....	77
6.1. Классификация и определения.....	77
6.2. Одномерные дискретные блуждания.....	81
6.3. Дискретный марковский процесс.....	89
6.4. Полумарковские процессы.....	91
6.5. Марковские последовательности.....	94
6.6. Непрерывный марковский процесс.....	101
Библиографический список.....	107

Радиотехника и радиофизика – область технических дисциплин, очень часто использующих достижения математики не только в области вычислительных алгоритмов, но также и аналитические способы решения прикладных задач. Широко применяются методы анализа, характерные для различных областей современной математики – от теории специальных функций до марковских процессов.

Компьютеризация научных исследований дает возможность получать результаты решения математических задач как в числовом, так и в аналитическом виде. Поэтому техника аналитических преобразований, жизненно необходимая для специалиста в области радиофизики в недавнем прошлом, в нынешних условиях становится менее актуальной. Однако грамотная постановка математической задачи, адекватной реально рассматриваемой технической проблеме, требует владения понятийным аппаратом и знания методов ее решения хотя бы в общем виде.

Материал, изложенный в пособии, построен таким образом, чтобы, не вдаваясь в чисто математические аспекты проблемы, можно было максимально приблизиться к пониманию сути ее аналитического решения. Вопросы, изучаемые студентами в других дисциплинах достаточно подробно, изложены очень кратко – уравнение колебаний, уравнения Максвелла и др. Разделы математики, с которыми учащиеся встречаются впервые, представлены по возможности подробно – интегральные уравнения, процессы Маркова.

## 1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

### 1.1. Асимптотическое разложение

Рассмотрим, вообще говоря, расходящийся ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots$$

Ряд представляет асимптотическое разложение (АР) функции  $f(z)$  в определенной области изменения аргумента  $z$ , если выражение

$$R_n(z) = z^n [f(z) - S_n(z)],$$

где  $S_n(z)$  – сумма первых  $n+1$  членов ряда удовлетворяет условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} R_n(z) = 0 \quad (n \text{ фиксировано}),$$

даже если при этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(z) - S_n(z)] \neq 0 \quad (z \text{ фиксировано}).$$

Согласно определению для  $\varepsilon > 0$  при достаточно больших  $z$  ( $n$  фиксировано)

$$|z^n [f(z) - S_n(z)]| < \varepsilon.$$

Если в определенной области изменения  $z$  функция допускает АР, то оно определяется единственным образом. Действительно, полагая последовательно  $n = 1, 2, \dots$ , получим:

$$a_0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z); \quad a_1 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z[f(z) - a_0]; \quad a_2 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} z^2[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}]; \dots$$

Напротив, две различные функции могут иметь одно и то же АР. Пример – две функции, отличающиеся на  $\exp(-\beta z)$  (при  $R(\beta) > 0$ ), так как АР  $\exp(-\beta z)$  при  $z > 0$  тождественно равно 0.

**Свойства асимптотического разложения.** Пусть существуют АР функций  $f(z)$  и  $g(z)$

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n},$$

тогда:

1. Первый член АР  $\alpha f(z) + \beta g(z)$  равен  $\frac{\alpha a_n + \beta b_n}{z^n}$ .
2. Общий член АР произведения  $f(z)g(z)$  равен  $\frac{1}{z^n} \sum a_k b_{n-k}$ . Если  $b_n \neq 0$ , то можно делить на АР  $g(z)$ .
3. Если функция  $\psi(f)$  разложима в степенной ряд, сходящийся при  $|f| < \rho$ , то АР функции  $\varphi(z) = \psi(f(z))$  получается непосредственной подстановкой в степенной ряд  $\psi(f)$  АР функции  $f(z)$  при условии  $|a_0| < \rho$ .
4. Если  $f(z)$  и  $f'(z)$  допускают АР, то АР  $f'(z)$  получается почленным дифференцированием соответствующего разложения  $f(z)$ .
5. Если  $f(z) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$  ( $a_0 = a_1 = 0$ ), то АР  $\int_z^{\infty} f(z) dz$  получается почленным интегрированием соответствующего разложения  $f(z)$ .

Иногда функция  $f(z)$  не имеет АР, но существует функция  $g(z)$  такая, что  $f(z)/g(z)$  допускает АР, тогда

$$f(z) \sim g(z) \left( a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right)$$

и произведение  $a_0 g(z)$  называется главным членом АР  $f(z)$ .

## 1.2. Гиперболические функции

Гиперболические функции определяются следующим образом:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{- гиперболический косинус } x;$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{- гиперболический синус } x;$$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{- гиперболический тангенс } x.$$

Полагая  $\xi = \operatorname{ch}(x)$ ,  $\zeta = \operatorname{sh}(x)$ , имеем:  $\xi^2 - \zeta^2 = 1$  (для круговых функций -  $\xi^2 + \zeta^2 = 1$ ). Точки с координатами  $\xi$  и  $\zeta$  расположены на окружности для круговых функций и на равносторонней гиперболы для гиперболических.

Используя определения гиперболических функций, можно вывести следующие соотношения:

$$\cos(x) = \operatorname{ch}(ix); \quad \operatorname{ch}(x) = \cos(ix); \quad i\sin(x) = \operatorname{sh}(ix); \quad ish(x) = \sin(ix);$$

$$\operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) \pm \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b); \quad \operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) \pm \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b);$$

$$\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(a); \quad \operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2(a) + \operatorname{sh}^2(a) = 1 + 2\operatorname{sh}^2(a) = 2\operatorname{ch}^2(a) - 1.$$

Гиперболические функции имеют период  $2\pi i$ , совпадающий с периодом функции  $\exp(x)$ .

## 1.3. Обратные гиперболические функции

Пусть  $x = \operatorname{sh}(u)$ , тогда  $u = \operatorname{Arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  – ареасинус  $x$ . Аналогично при  $x = \operatorname{ch}(u)$  функция  $u = \operatorname{Arch}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$  называется ареакосинус  $x$ . Ареатангенс  $x$  определяется как  $u = \operatorname{Arth}(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

## 1.4. Интегральный синус и интегральный косинус

Функции определяются как

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt; \quad \operatorname{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

Часто функция интегрального синуса определяется иначе:

$$\operatorname{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad \text{и, так как } \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \text{то } \operatorname{Si}(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{si}(x).$$

### 1.4.1. Разложение в ряд

Интегрируя в пределах от 0 до  $x$  разложение в ряд  $\sin(t)/t$ , получим:

$$\text{Si}(x) = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \dots$$

Разложение в степенной ряд интегрального косинуса имеет вид

$$\text{Ci}(x) = \ln(x) + \gamma - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n)!} + \dots,$$

где  $\gamma$  – постоянная Эйлера, равная  $0,57721566490\dots$ , которая определяется как  $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} 1 + 1/2 + \dots + 1/m - \ln(m)$ .

Так как  $\frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n)!} + \dots = \int_0^x \frac{1 - \cos(t)}{t} dt$ , то

$$\text{Ci}(x) = \ln(x) + \gamma - \int_0^x \frac{1 - \cos(t)}{t} dt.$$

Для малых значений аргумента  $\text{Si}(x)$  практически совпадает с  $x$ , а  $\text{Ci}(x)$  с функцией  $\gamma + \ln(x)$ .

### 1.4.2. Разложение в асимптотический ряд

Повторно интегрируя по частям линейную комбинацию

$$\text{Ci}(x) + j\text{Si}(x) = - \int_x^\infty \frac{e^{jt}}{t} dt$$

и приравнивая линейные части, получим

$$\text{Si}(x) \propto \frac{\pi}{2} - \frac{\cos(x)}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\sin(x)}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}},$$

$$\text{Ci}(x) \propto \frac{\sin(x)}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\cos(x)}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}.$$

С помощью этих соотношений можно изучить поведение функций при больших значениях аргумента.

## 1.5. Гамма-функция

Для всех вещественных и комплексных значений переменной  $z$  гамма-функцию можно определить как

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m} \right\}. \quad (1.1)$$

Другое определение

$$\Gamma(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! \cdot m^z}{z(z+1)\cdots(z+m)}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{z} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m! \cdot m^z}{(z+1)\cdots(z+m)} = \frac{1}{z} \lim_{m \rightarrow \infty} \left( m^z - \frac{1}{z+1} \cdot \frac{2}{(z+2)} \cdots \frac{m}{z+m} \right) = \frac{1}{z} \lim_{m \rightarrow \infty} m^z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1},$$

откуда

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right).$$

Умножим правую часть на  $\lim_{m \rightarrow \infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})z} \prod_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{z}{m}} = 1$ , тогда

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{m \rightarrow \infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m})z} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}.$$

Величина  $1 + 1/2 + \cdots + 1/m - \ln(m) \rightarrow \gamma$ , и мы приходим к соотношению (1.1).

Можно определить гамма-функцию как

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \text{ если } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.2)$$

Для доказательства вычислим  $I = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt$ . Положим  $t/n = \tau$ , тогда

$I = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau$ . Интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \left[ \frac{(1 - \tau)^n \tau^z}{z} \right]_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 \tau^z (1 - \tau)^{n-1} d\tau,$$

где внеинтегральный член при  $\operatorname{Re}(z) > 0$  равен нулю. Поэтому

$$\int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \frac{n}{z} \int_0^1 (1 - \tau)^{n-1} \tau^z d\tau,$$

$$\int_0^1 (1 - \tau)^{\tau^{z+n-2}} d\tau = \frac{1}{z+n-1} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau = \frac{1}{(z+n-1)(z+n)},$$

то есть 
$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$
 следовательно

$$I = \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z).$$

### Свойства гамма-функции

$$1. \Gamma(z+1) = z \Gamma(z). \quad (1.3)$$

$$\Gamma(z+1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{z+1} m!}{(z+1)(z+2)\cdots(z+m+1)}; \quad \Gamma(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^z m!}{z(z+1)\cdots(z+m)},$$

следовательно,  $\Gamma(z+1) = \Gamma(z) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{mz}{z+m+1}$ , отсюда соотношение (1.3).

$$2. \Gamma(n+1) = n! \quad (n - \text{целое положительное число}). \quad (1.4)$$

Повторно примененная формула (1.3) при  $z = n$  дает

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1), \quad \text{но} \quad \Gamma(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^z m!}{z(z+1)\cdots(z+m)} = 1,$$

поэтому справедливо утверждение (1.4).

$$3. \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (1.5)$$

Справедливость утверждения можно показать следующим образом:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = (-z)z e^{\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}} \right\} \cdot e^{-\gamma z} \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{m}\right) e^{\frac{z}{m}} \right\}.$$

По формуле (1.3)  $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ , поэтому  $\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right)$ , но из-

вестно, что  $\sin(z) = z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2 \pi^2}\right)$ , поэтому легко получаем (1.5). Заменяя

в (1.5)  $z$  на  $z+1/2$ , найдем, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}.$$

## 1.6. Связь между эйлеровыми интегралами первого и второго рода

Эйлеров интеграл 1-го рода (бета-функция) определяется как

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0,$$

Эйлеров интеграл 2-го рода – гамма-функция.

Полагая  $x = \cos^2(\theta)$ , можно бета-функцию записать в следующем виде:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\theta) \sin^{2q-1}(\theta) d\theta. \quad (1.6)$$

В выражении (1.2) заменим  $z$  на  $n$ ,  $t$  на  $y^2$ , а затем  $z$  на  $m$ ,  $t$  на  $x^2$ , в результате получим

$$\Gamma(n) = 2 \int_0^{\infty} y^{2n-1} e^{-y^2} dy; \quad \Gamma(m) = 2 \int_0^{\infty} x^{2m-1} e^{-x^2} dx.$$

Перемножим полученные выражения

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Интеграл распространен на 1-й квадрант плоскости и в полярных координатах выглядит следующим образом:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}(\theta) \sin^{2n-1}(\theta) d\theta \cdot 2 \int_0^{\infty} \rho^{2(m+n)-1} e^{-\rho^2} d\rho.$$

Согласно (1.6) первый удвоенный интеграл равен  $B(m, n)$ : согласно (1.2) второй удвоенный интеграл равен  $\Gamma(m+n)$ . Таким образом,

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

## 1.7. Функции Бесселя

### 1.7.1. Уравнение Бесселя

При решении многих задач математической физики рассматривается линейное дифференциальное уравнение (уравнение Бесселя)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (1.7)$$

где  $\nu$ - постоянная. Так как уравнение имеет особую точку  $x = 0$ , то частное решение следует искать в виде обобщенного ряда

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_0 \neq 0). \quad (1.8)$$

Подставляя выражение (1.8) в (1.7), получим:

$$(\rho^2 - \nu^2) a_0 x^\rho + [(\rho + 1)^2 - \nu^2] a_1 x^{\rho+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ [(\rho + k)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2} \right\} x^{\rho+k} = 0.$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при различных степенях  $x$ , имеем:

$$\rho^2 - \nu^2 = 0, [(\rho + 1)^2 - \nu^2] a_1 = 0, [(\rho + k)^2 - \nu^2] a_k + a_{k-2} = 0.$$

Из первого равенства находим:  $\rho_1 = \nu$ ,  $\rho_2 = -\nu$ , подставляя эти значения во 2-е и 3-е равенства, получим:

$$a_1 = 0; a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu + k)} \quad (k = 2, 3, 4, \dots).$$

Откуда  $a_{(2k+1)} = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) – нечетные коэффициенты. Четные коэффициенты соответственно

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)!}, a_4 = \frac{a_0}{2^4(\nu + 1)(\nu + 2)2!}, \dots, a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(\nu + 1) \cdots (\nu + k)k!}.$$

Выберем  $a_0$  следующим образом:

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},$$

где  $\Gamma(\nu + 1)$  – гамма-функция, определяемая с помощью формулы (1.2). При таком выборе  $a_0$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu} k!(\nu + 1) \cdots (\nu + k) \Gamma(\nu + 1)}. \quad (1.9)$$

Используя 1-е и 2-е свойства гамма-функции, а также то, что  $\Gamma(1) = 1$ , можно получить:

$$\Gamma(\nu + k + 1) = (\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k) \Gamma(\nu + 1). \quad (1.10)$$

С помощью этого выражения формулу (1.9) можно преобразовать к виду

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu + k + 1)}.$$

Внося найденные коэффициенты  $a_{2k+1}$  и  $a_{2k}$  в ряд (1.8), получим частное решение уравнения (1.7) – функцию Бесселя 1-го рода  $\nu$ -го порядка:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}. \quad (1.11)$$

Ряд (1.11) сходится при любом значении  $x$ . Второе частное решение (1.7) можно получить, используя второй корень  $\rho_2 = -\nu$ , оно находится с помощью простой замены в (1.11)  $\nu$  на  $-\nu$ . Так как (1.7) содержит только  $\nu^2$  и не изменится при указанной подстановке, то

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{-\nu+2k}}{k! \Gamma(-\nu+k+1)}. \quad (1.12)$$

Если  $\nu$  не равно целому числу, то частные решения  $J_{\nu}$  и  $J_{-\nu}$  уравнения Бесселя будут линейно независимы, так как разложения в правых частях формул (1.11) и (1.12) начинаются с разных степеней  $x$ . Если же  $\nu$  – целое положительное число, то  $J_{\nu}$  и  $J_{-\nu}$  линейно зависимы вследствие того, что при отрицательных или нулевых значениях величины  $\nu+k+1$  функция  $\Gamma(-\nu+k-1) = \infty$  ( $\Gamma(m) = \frac{\Gamma(m+1)}{m}$ ), и первые  $n$  членов выражения (1.12) превращаются в нуль. Поэтому

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{-n+2k}}{\Gamma(l+1) \Gamma(-n+k+1)}$$

или, положив  $k = n+l$ , получим последовательно:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (x/2)^{n+2l}}{\Gamma(l+1) \Gamma(n+l+1)},$$

$$J(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (n - \text{целое число}). \quad (1.13)$$

Чтобы получить общее решение уравнения (1.7) при  $n$  целом, необходимо найти второе линейно независимое от  $J_{\nu}(x)$  частное решение. Введем новую функцию

$$Y_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (1.14)$$

Эта функция также является решением уравнения (1.7), так как представляет линейную комбинацию  $J_{\nu}(x)$  и  $J_{-\nu}(x)$ . При  $\nu$ , равном целому числу, правая часть выражения (1.14) представляет из себя неопределенность типа  $0/0$ , при раскрытии которой по правилу Лопиталья получим:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} I_n(x) \ln(x/2) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} (x/2)^{-n+2k} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!} \left[ \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)} \right].$$

При  $n = 0$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} I_0(x) \ln(x/2) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{(k!)^2} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

$Y_{\nu}(x)$  – функция Бесселя 2-го рода  $\nu$ -го порядка (функция Вебера), являющаяся решением уравнения Бесселя и при  $\nu$  равном целому числу.

Функции  $J_\nu(x)$  и  $Y_\nu(x)$  линейно независимы, поэтому при любом значении  $\nu$  образуют фундаментальную систему решений

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x), \quad (1.15)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – произвольные постоянные.

Справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x); & Y'_\nu(x) &= Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x); \\ J'_\nu(x) &= -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x); & Y'_\nu(x) &= -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x); \\ J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x); & Y_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x). \end{aligned} \quad (1.16)$$

### 1.7.2. Частные случаи функций Бесселя

В практических задачах часто встречаются функции Бесселя целого и «полуцелого» порядка –  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ ,  $Y_0(x)$  и  $J_{\pm n/2}$ , где  $n$  – целое число.

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots; \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} \left( 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right). \end{aligned}$$

Из формул (1.16) можно получить значения  $J_2(x)$ ,  $J_3(x)$  и т.д.

Рассмотрим  $J_{\pm n/2}(x)$ . Из разложения (1.11) видно, что

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+k}}{k! \Gamma(3/2 + k)},$$

но из (1.10) вытекает, что

$$\Gamma(3/2 + k) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}{2^{k+1}} \Gamma(1/2),$$

где  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , поэтому

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Сумма в полученном выражении – разложение  $\sin(x)$  в степенной ряд, откуда

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x).$$

Аналогично из (1.12) вытекает, что

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x).$$

$J_{3/2}(x), J_{5/2}(x), \dots$  можно получить с помощью формул (1.16).

Вообще  $J_{n+1/2}(x)$  при целом  $n$  выражается через элементарные функции

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ P_n(1/x) \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + Q_{n-1}(1/x) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \right],$$

где  $P_n(1/x)$  – многочлен степени  $n$  относительно  $1/x$ , а  $Q_{n-1}(1/x)$  – многочлен степени  $n-1$ , причем  $P_n(0) = 1, Q_{n-1}(0) = 0$ . Отсюда следует асимптотическое представление функции Бесселя при больших значениях  $x$

$$J_\nu(x) \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-1}) \right], \quad (x > 0),$$

где  $O(x^{-1})$  – величина порядка  $1/x$ . Асимптотическая формула справедлива при всех значениях  $\nu$  (не только при  $\nu = n+1/2$ ).

### 1.7.3. Ортогональность функций Бесселя и их корни

При  $\nu > -1$  функции Бесселя не имеют комплексных (и чисто мнимых) корней, все корни – вещественные, попарно одинаковые по абсолютной величине и обратные по знаку. Можно показать, что уравнение

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J_\nu'(x) = 0 \quad (\nu > -1), \quad (1.17)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – заданные вещественные числа, при  $\alpha/\beta + \nu \geq 0$  также имеет только вещественные корни.

Функции Бесселя обладают свойством ортогональности

$$\int_0^l x J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) J_\nu(\mu_j \frac{x}{l}) dx = 0, \quad (i \neq j),$$

где  $\mu_i$  и  $\mu_j$  – два различных положительных корня уравнения  $J_\nu(x) = 0$ .

Если  $\mu$  – положительный корень уравнения (1.17), то справедлива формула, позволяющая вычислять некоторые интегралы, содержащие  $J_\nu^2(\cdot)$ :

$$\int_0^l x J_\nu^2(\mu \frac{x}{l}) dx = \frac{l^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 \nu^2}{\beta^2 \mu^2}\right) J_\nu^2(\mu). \quad (1.18)$$

### 1.7.4. Разложение произвольной функции в ряд по функциям Бесселя

Пусть произвольная функция  $f(x)$  представима в виде ряда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) \quad (\nu > -1), \quad (1.19)$$

где  $\mu_i$  – положительные корни уравнения  $J_\nu(x) = 0$ , расположенные в порядке возрастания.

Для определения  $a_i$  умножим обе части (1.19) на  $xJ_\nu(\mu_i x/l)$  и проинтегрируем по отрезку  $[0, l]$ , считая возможным почленное интегрирование. Приняв во внимание

$$\int_0^l x J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) J_\nu(\mu_j \frac{x}{l}) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i, \\ \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i) = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_j) & \text{при } j = i, \end{cases}$$

найдем, что

$$a_i = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x) J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) dx.$$

Разложение (1.19) с найденными коэффициентами называется разложением в ряд Фурье – Бесселя.

Рассмотрим аналогичное предыдущему разложение

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}), \quad (1.20)$$

где  $\mu_i$  – положительные корни уравнения  $\alpha J_\nu(x) + \beta x J_\nu'(x) = 0$ , расположенные в порядке возрастания, при условии  $\alpha/\beta + \nu > 0$ . Коэффициенты  $b_i$  в силу ортогональности функций Бесселя и формулы (1.18) можно определить

$$b_i = \frac{2}{l^2 (1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 \nu^2}{\beta^2 \mu_i^2}) J_\nu^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x) J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) dx. \quad (1.21)$$

Разложение (1.20) с коэффициентами (1.21) называется разложением в ряд Дини – Бесселя.

Если  $\alpha/\beta + \nu = 0$ , то функция  $x^\nu$  ортогональна  $J_\nu(\mu_i x/l)$  с весом  $x$  на отрезке  $[0, l]$ , поэтому выражение (1.20) должно быть заменено следующим:

$$f(x) = b_0 x^\nu + \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}). \quad (1.22)$$

В этом случае уравнение (1.17) можно записать:  $J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x)$  или в силу соотношений (1.15)  $[J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x)]$ , имеем

$$J_{\nu+1}(x) = 0, \quad (1.23)$$

То есть  $\mu_i$  являются корнями уравнения (1.23).

Для определения  $b_0$  умножим обе части (1.22) на  $x^{\nu+1}$  и проинтегрируем по  $x$  на отрезке  $[0, l]$ . Получим

$$\int_0^l x^{\nu+1} f(x) dx = \frac{b_0 l^{2\nu+2}}{2\nu+2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^l x^{\nu+1} J_\nu(\mu_i x/l) dx. \quad (1.24)$$

Но  $x^{\nu+1} J_\nu(x) = \frac{d}{dx} [x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)]$  или  $x^{\nu+1} J_\nu(xt) = \frac{1}{t} \frac{d}{dx} [x^{\nu+1} J_{\nu+1}(xt)]$ . Интегрируя это тождество, получим:

$$\int_0^l x^{\nu+1} J_\nu(xt) dx = \frac{l^{\nu+1}}{t} J_{\nu+1}(tl).$$

Полагая  $t = \mu_i/l$ , где  $\mu_i$  - корень уравнения (1.23), имеем:

$$\int_0^l x^{\nu+1} J_\nu(\mu_i x/l) dx = 0; \quad (1.25)$$

тогда из (1.24) в силу (1.25) вытекает, что

$$b_0 = \frac{2(\nu+1)}{l^{2(\nu+1)}} \int_0^l x^{\nu+1} f(x) dx.$$

Коэффициенты определяются по формуле (1.21).

### 1.7.5. Интегральные представления функций Бесселя

Наиболее простое представление принадлежит Пуассону

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}. \quad (1.26)$$

Умножив числитель и знаменатель общего члена ряда на  $\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(k+1/2)$  и учтя, что  $\Gamma(k+1/2)\Gamma(k+1/2) = \sqrt{\pi} 2^{-2k} (2k)!$ , получим:

$$\frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \frac{(-1)^k x^{2k} \Gamma(\nu+1/2)\Gamma(k+1/2)}{(2k)! \Gamma(\nu+k+1)}$$

или, принимая во внимание, что

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m(\varphi) \sin^n(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n+2}{2})},$$

получим:

$$\frac{(-1)^k (x/2)^{v+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(v+k+1)} = \frac{2(x/2)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+1/2)} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\pi/2} \cos^{2v}(\varphi) \sin^{2k}(\varphi) d\varphi. \quad (1.27)$$

Вследствие соотношения (1.27) ряд (1.26) принимает вид

$$J_\nu(x) = \frac{2(x/2)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+1/2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^{\pi/2} \cos^{2v}(\varphi) \sin^{2k}(\varphi) d\varphi.$$

Переставив знаки интеграла и суммы (ряд сходится равномерно), получим:

$$J_\nu(x) = \frac{2(x/2)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2v}(\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} \sin^{2k}(\varphi)}{(2k)!} d\varphi.$$

Ряд под знаком интеграла легко суммируется и равен  $\cos[x\sin(\varphi)]$ , поэтому окончательно формула Пуассона выглядит следующим образом:

$$J_\nu(x) = \frac{2(x/2)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos[x\sin(\varphi)] \cos^{2v}(\varphi) d\varphi.$$

Для сходимости интеграла при любом  $x$  должно выполняться  $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ . Обозначив  $t = \sin(\varphi)$ , получим:

$$J_\nu(x) = \frac{2(x/2)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+1/2)} \int_0^1 (1-t^2)^{v-1/2} \cos(xt) dt.$$

Ввиду четности подынтегральной функции и нечетности  $(1-t)^{v-1/2} \sin(xt)$  –

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+1/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{v-1/2} e^{ixt} dt.$$

С помощью формулы Пуассона можно легко оценить функцию Бесселя. Учитывая, что  $|\cos(x\sin\varphi)| \leq 1$ , получим:

$$|J_\nu(x)| \leq \frac{2|x/2|^v}{\sqrt{\pi}\Gamma(v+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2v}(\varphi) d\varphi.$$

Правая часть полученного неравенства с учетом (1.27) – не что иное, как модуль первого члена разложения  $J_\nu(x)$ . Таким образом, при любом вещественном  $x$  и  $\nu > -1/2$

$$|J_\nu(x)| \leq \frac{2|x/2|^\nu}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Приведем еще одно интегральное представление для функций Бесселя целого порядка, основанное на равенстве

$$e^{1/2x(t-1/2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m,$$

где левая часть равенства называется производящей функцией для функции Бесселя с целым значком:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[x \sin(\varphi) - n\varphi] d\varphi.$$

Формула справедлива только для целых значений  $n$ .

### 1.7.6. Функции Ханкеля

Другими частными решениями уравнения Бесселя являются функции Ханкеля 1-го и 2-го рода (функции Бесселя 3-го рода):

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x); \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x).$$

При вещественных значениях  $x$  и  $\nu$  функции Ханкеля имеют комплексно сопряженные значения:  $H_\nu^{(2)}(x) = H_\nu^{(1)*}(x)$ .

При  $\nu$  не равном целому числу заменим  $Y_\nu(x)$  ее выражением (1.14) и получим

$$H_\nu^{(1)}(x) = i \frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}; \quad H_\nu^{(2)}(x) = -i \frac{J_\nu(x)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}. \quad (1.28)$$

Формулы остаются в силе и для целых значений  $\nu$ , если под правой частью понимать предел, к которому она стремится при  $\nu \rightarrow n$ . Если  $\nu = n+1/2$ , то функция Ханкеля выражается через элементарные функции

$$H_{1/2}^{(1)}(x) = i \left[ -iJ_{1/2}(x) - J_{1/2}(x) \right] = -i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} [\cos(x) + i \sin(x)] = -i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix}.$$

Аналогично

$$H_{1/2}^{(2)}(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix}.$$

Из (1.28) следует

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(x), \quad H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(x).$$

Функции Ханкеля выражаются линейно через  $J_\nu(x)$  и  $Y_\nu(x)$ , поэтому для них справедливы аналогичные рекуррентные формулы

$$\begin{aligned}
H_{\nu}^{(1)'}(x) &= -H_{\nu+1}^{(1)}(x) + \frac{\nu}{x}H_{\nu}^{(1)}(x), & H_{\nu}^{(2)'}(x) &= -H_{\nu+1}^{(2)}(x) + \frac{\nu}{x}H_{\nu}^{(2)}(x), \\
H_{\nu}^{(1)'}(x) &= H_{\nu-1}^{(1)}(x) - \frac{\nu}{x}H_{\nu}^{(1)}(x), & H_{\nu}^{(2)'}(x) &= H_{\nu-1}^{(2)}(x) - \frac{\nu}{x}H_{\nu}^{(2)}(x), \\
H_{\nu+1}^{(1)}(x) &= H_{\nu}^{(1)}(x) - H_{\nu-1}^{(1)}(x), & H_{\nu+1}^{(2)}(x) &= H_{\nu}^{(2)}(x) - H_{\nu-1}^{(2)}(x).
\end{aligned}$$

Асимптотическое представление функций Ханкеля выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_{\nu}^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(x^{-1})], \\
H_{\nu}^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] [1 + O(x^{-1})].
\end{aligned} \quad (x > 0)$$

### 1.7.7. Функции Бесселя мнимого аргумента

В математической физике часто встречается уравнение

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0, \quad (1.29)$$

которое получается при замене в уравнении Бесселя  $x$  на  $ix$ , поэтому  $J_{\nu}(ix)$  есть частное решение уравнения (1.29). Так как уравнение однородно, то  $aJ_{\nu}(ix)$ , где  $a$  – произвольная постоянная, является решением этого уравнения. Введем обозначение

$$I_{\nu}(x) = i^{-\nu} J_{\nu}(ix), \quad (1.30)$$

где  $I_{\nu}(x)$  модифицированная функция Бесселя 1-го рода  $\nu$ -го порядка. Тогда

$$I_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}.$$

Если  $\nu$  не целое число, то  $I_{\nu}(x)$  и  $I_{-\nu}(x)$  – суть два линейно-независимых решения уравнения (1.29). Если  $\nu$  – целое число, то  $I_{\nu}(x)$  и  $I_{-\nu}(x)$  линейно зависимы и

$$I_{\nu}(x) = I_{-\nu}(x),$$

что вытекает из выражений (1.30) и (1.13).

Другое частное решение уравнения (1.29), необходимое для получения общего решения, берется в виде:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \sin(\nu\pi)}$$

и носит название функции Макдональда (модифицированная функция Бесселя 2-го рода).

При целом  $\nu$  правая часть принимает неопределенный вид (0/0), после применения правила Лопиталья

$$K_n(x) = -I_n(x) \ln(x/2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!} (x/2)^{-n+2k} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(k+n)!} \left[ \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(k+n+1)} \right].$$

При  $n = 0$

$$K_0(x) = -I_0(x) \ln(x/2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

При  $x \rightarrow 0$  функция  $K_\nu(x) \rightarrow \infty$ .

Так как  $I_\nu(x)$  и  $K_\nu(x)$  – линейно-независимые решения уравнения (1.29) при любых значениях  $\nu$ , то общее решение можно написать в виде:

$$y = c_1 I_\nu(x) + c_2 K_\nu(x),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – произвольные постоянные.

При стремлении  $x$  к бесконечности функция  $I_\nu(x)$  неограниченно растет, а  $K_\nu(x)$  стремится к нулю, как это видно из асимптотических представлений

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} [1 + O(x^{-1})], \quad K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} [1 + O(x^{-1})]; \quad (x > 0).$$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Чем асимптотическое разложение отличается от обычного разложения функций в ряд?
2. Приведите две формы представления интегрального синуса.
3. Почему гамма-функцию иногда называют факториальной?
4. Определите бета-функцию.
5. Как соотносятся функция Бесселя 1-го рода и уравнение Бесселя?
6. При каком условии  $J_\nu$  и  $J_{-\nu}$  линейно-независимы?

7. Как соотносятся функция Вебера и уравнение Бесселя?
8. Чем отличается ряд Фурье-Бесселя от ряда Дини-Бесселя?
9. Определите функцию Ханкеля.
10. Какая функция является решением уравнения Бесселя при замене в нем  $x$  на  $ix$ ?

## 2. ПРОСТРАНСТВА

### 2.1. Точечные множества в $R^n$

$R^n$  – обозначение  $n$ -мерного вещественного пространства, в котором определена норма вектора по формуле

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

где  $x_1, \dots, x_n$  – компоненты элемента  $x$  пространства. Такое пространство еще называют  $n$ -мерным евклидовым пространством. Понятие нормы в евклидовом пространстве совпадает с понятием модуля (длины) элемента (вектора). В любом пространстве норма, введенная в нем, должна обладать следующими свойствами:

1.  $\|x\| \geq 0$ , для любого  $x$ ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  - неравенство треугольника.

Введем понятие скалярного произведения

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

обладающего следующими свойствами в  $R^n$ :

1.  $(x, y) = (y, x)$  – свойство коммутативности;
2.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$  – свойство ассоциативности;
3.  $(x, \lambda y + z) = \lambda(x, y) + (x, z)$  – распределительный закон.

Последние два свойства можно объединить:  $(x, \lambda y + \mu z) = \lambda(x, y) + \mu(x, z)$ . Из определения скалярного произведения следует  $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = |x|$ . Таким образом, евклидово расстояние между точками  $x$  и  $y$  есть  $|x - y| = \|x - y\|$ .

Множество точек  $x$  из  $R^n$ , удовлетворяющих условию  $|x - x_0| < R$ , называется **открытым шаром** радиуса  $R$  с центром в точке  $x_0$ . Будем его обозначать  $U(x_0; R)$ , если  $x_0 = 0$ , то просто  $U_R$ .

Последовательность точек  $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$ ,  $k = 1, 2, \dots$  называется **сходящейся** к точке  $x$  в  $R^n$  ( $x \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$ ), если  $|x_k - x| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . После-

довательность называется *сходящейся в себе* в  $R^n$ , если  $|x_k - x_p| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$ .

Свойство *полноты* пространства  $R^n$  (принцип сходимости Коши) заключается в том, что необходимым и достаточным условием сходимости последовательности точек в  $R^n$  является ее сходимость в себе в  $R^n$ .

Множество называется *ограниченным* в  $R^n$ , если существует шар, содержащий это множество. Свойство *компактности* пространства  $R^n$  (теорема Больцано-Вейерштрасса) заключается в том, что из всякого бесконечного ограниченного множества в  $R^n$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Точка  $x_0$  называется *внутренней* точкой множества, если существует шар  $U(x_0; R)$ , содержащийся в этом множестве. Множество называется *открытым*, если все его точки – внутренние. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной линией, лежащей в этом множестве. Связное открытое множество называется *областью*. Точка  $x_0$  называется *предельной точкой* множества  $A$ , если существует последовательность  $x_k, k = 1, 2, \dots$ , такая, что  $x_k \in A, x_k \rightarrow x_0, k \rightarrow \infty$ . Если к множеству  $A$  добавить все его предельные точки, то полученное множество будет называться *замыканием* множества  $A$ , его обозначение –  $\bar{A}$  ( $A \subset \bar{A}$ ). Если множество совпадает со своим замыканием, то оно называется *замкнутым*. Замкнутое ограниченное множество называется *компактом*. Окрестностью множества  $A$  называется всякое открытое множество, содержащее  $A$ ;  $\varepsilon$ -окрестностью ( $A_\varepsilon$ ) множества  $A$  называется объединение шаров  $U(x; \varepsilon)$ , когда  $x$  пробегает множество  $A$ :  $A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} U(x; \varepsilon)$ .

Функция  $\chi_A(x)$ , равная 1 при  $x \in A$  и 0 при  $x \notin A$ , называется *характеристической* функцией множества  $A$ .

*Лемма* (Гейне-Бореля о покрытии). Если компакт  $K$  покрыт системой открытых шаров, то из этого покрытия можно выбрать конечную подсистему, покрывающую  $K$ .

Пусть  $G$  – область. Точки замыкания  $\bar{G}$ , не принадлежащие  $G$ , образуют замкнутое множество  $S$ , называемое *границей* области  $G$ , так, что  $S = \bar{G} \setminus G$ . Границей открытого шара  $U(x_0; R)$  является *сфера*, описываемая уравнением  $|x - x_0| = R$ , будем обозначать ее  $S(x_0; R)$  и  $S_R$  если  $x_0 = 0$ .

Поверхность  $S$  принадлежит классу  $C^p, p \geq 1$ , если в некоторой окрестности каждой точки  $x \in S$  она представляется уравнением  $w_{x_0}(x) = 0$ , причем  $\text{grad}[w_{x_0}(x)] \neq 0$  и функция  $w_{x_0}(x)$  непрерывна вместе со всеми про-

изводными до порядка  $p$  включительно в упомянутой окрестности. Поверхность  $S$  называется **кусочно-гладкой**, если она состоит из конечного числа поверхностей класса  $C^1$ . Окрестностью точки  $x_0$  на поверхности  $S$  называется связная часть множества  $S \cap U(x_0; R)$ , которая содержит точку  $x_0$ .

Ограниченная область  $G'$  называется **подобластью**, строго лежащей в области  $G$ , если  $\overline{G'} \subset G$ . В силу леммы Гейне-Бореля существует такое  $\varepsilon > 0$ , что  $G_\varepsilon'$  является подобластью, строго лежащей в  $G$ .

## 2.2. Классы функций $C^p(G)$ и $C^p(\overline{G})$

Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  – целочисленный вектор с неотрицательными составляющими. Обозначим производную функции  $f(x)$  порядка  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 f(x) = f(x).$$

Множество в общем случае комплексных функций  $f(x)$ , непрерывных вместе с производными  $D^\alpha f(x)$   $|\alpha| \leq p$  ( $0 \leq p \leq \infty$ ) в области  $G$ , образует класс функций  $C^p(G)$ . Функции  $f$  класса  $C^p(G)$ , у которых все производные допускают непрерывное продолжение на замыкание  $\overline{G}$ , образуют класс функций  $C^p(\overline{G})$ . Для краткости записи  $C^0(G) = C(G)$ ;  $C^0(\overline{G}) = C(\overline{G})$ .

Введенные классы функций – линейные множества, то есть любые линейные комбинации функций, принадлежащих какому-либо из этих классов, также принадлежат этому же классу.

Пусть  $\varphi \in C(R^n)$ . **Носителем** кусочно-непрерывной функции  $\varphi$  называется замыкание множества точек, где  $\varphi(x) \neq 0$ , и обозначается –  $\text{supp } \varphi$ . Если носитель – ограниченное множество, то функция  $\varphi$  называется **финитной**. Множество финитных функций класса  $C^\infty(G)$  с носителем в области  $G$  обозначим  $\mathcal{D}(G)$ .

## 2.3. Пространство непрерывных функций $C(T)$

Пусть  $T$  – замкнутое множество. Обозначим  $C(T)$  – класс непрерывных и ограниченных на  $T$  функций. Определим норму в  $C(T)$ :

$$\|f\|_C = \max_{x \in T} |f(x)|, \quad f \in C(T),$$

превращая тем самым  $C(T)$  в линейное нормированное пространство. Вообще всякое линейное множество, снабженное нормой со свойствами 1 – 3 (см. подразд. 2.1), называется **линейным нормированным пространством**.

Последовательность функций  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  из  $C(T)$  называется **сходящейся** к функции  $f \in C(T)$  в пространстве  $C(T)$ , если  $\|f_k - f\|_C \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Эта сходимость эквивалентна равномерной сходимости  $f_k \rightarrow f$  на множестве  $T$ . Последовательность функций  $f_k$  называется **сходящейся в себе**, если  $\|f_k - f_p\|_C \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow \infty$ .

Свойство полноты пространства  $C(T)$  заключается в следующем утверждении (теорема Коши): для того, чтобы последовательность функций из пространства  $C(T)$  сходилась в нем, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась в себе в  $C(T)$ .

Справедливы следующие предложения, которые потребуются нам в дальнейшем.

**Теорема Вейерштрасса.** Если  $G$  – ограниченная область и функция  $f \in C^p(\overline{G})$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует полином  $P$  такой, что

$$\|D^\alpha f - D^\alpha P\|_C < \varepsilon \text{ при всех } |\alpha| \leq p.$$

**Лемма Дини.** Если монотонная последовательность непрерывных функций на компакте  $K$  сходится в каждой точке к непрерывной функции на  $K$ , то она сходится равномерно на  $K$ .

Ряд из функций  $u_k \in C(T)$  **регулярно сходится** на  $T$ , если ряд  $|u_k|$  сходится в  $C(T)$ , то есть равномерно сходится на  $T$ .

Множество  $M \subset C(T)$  называется **равностепенно-непрерывным** на  $T$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta_\varepsilon$ , что при всех  $f \in M$  имеет место неравенство  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ , как только  $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ .

## 2.4. Интеграл Лебега

Введем некоторые понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем. Множество  $A \subset R^n$  имеет **меру нуль**, если для любого  $\varepsilon > 0$  оно может быть покрыто открытыми шарами суммарного объема меньше  $\varepsilon$ . Отсюда всякое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль; объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль также имеет меру нуль.

Некоторое свойство выполняется **почти везде** в области  $G \subset R^n$ , если множество точек области  $G$ , которое не обладает этим свойством, имеет меру нуль. Функция  $f$  называется **измеримой**, если она совпадает почти везде с пределом почти везде сходящейся последовательности кусочно-непрерывных функций. Множество  $A \subset R^n$  называется измеримым, если его характеристическая функция  $\chi_A(x)$  измерима. Отсюда: если функции  $f$  и  $g$  измеримы, то функции  $f+g$ ,  $fg$ ,  $\max(f,g)$ ,  $\min(f,g)$ ,  $|f|$ ,  $f/g$  ( $g \neq 0$ ) также измеримы. Всякая функция, совпадающая почти везде с пределом почти везде

сходящейся последовательности измеримых функций, измерима. Неизмеримые функции и множества существуют только в теоретических построениях, поэтому можно условиться, все рассматриваемые множества измеримы, функции измеримы и почти везде конечны.

Неотрицательная (измеримая и почти везде конечная) функция  $f(x)$  называется **интегрируемой по Лебегу**, если она совпадает почти везде с пределом неубывающей последовательности финитных кусочно-непрерывных функций  $f_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  с ограниченной последовательностью интегралов. Предел последовательности этих интегралов называется **интегралом Лебега** функции  $f(x)$  и обозначается

$$\int f(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x)dx .$$

### **Свойства интеграла Лебега**

1.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x)dx \geq 0$ .

2. Интеграл Лебега от функции  $f(x) \geq 0$  не зависит от последовательности  $\{f_k\}$ , с пределом которой почти везде совпадает  $f(x)$ , то есть если существует другая такая последовательность  $\{g_k\}$ , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x)dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k(x)dx = \int f(x)dx .$$

3. Для того чтобы функция  $f(x) \geq 0$  была равна нулю, почти везде необходимо и достаточно, чтобы интеграл Лебега от этой функции равнялся нулю.

Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего обзора свойств интеграла Лебега. Прежде всего, понятие неотрицательной функции

$$f^+(x) = \max[f(x), 0]; \quad f^-(x) = \max[-f(x), 0].$$

Очевидно, что произвольная функция и ее модуль с помощью неотрицательной функции могут быть представлены в следующем виде:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x); \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

**Вещественная** функция  $f(x)$  называется интегрируемой по Лебегу, если  $f^+(x)$  и  $f^-(x)$  интегрируемы по Лебегу

$$\int f(x)dx = \int f^+(x)dx + \int f^-(x)dx.$$

**Комплексная** функция интегрируема по Лебегу, если ее мнимая и действительная части интегрируемы по Лебегу

$$\int f(x)dx = \int \operatorname{Re} f(x)dx + i \int \operatorname{Im} f(x)dx.$$

Функция  $f(x)$  интегрируема по Лебегу на **измеримом множестве**  $A$ , если функция  $f(x)\chi_A(x)$  интегрируема по Лебегу

$$\int_A f(x)dx = \int f(x)\chi_A(x)dx.$$

Функция **локально** интегрируема по Лебегу в области  $G$ , если она интегрируема по Лебегу на любой подобласти  $G' \subset G$ .

Из приведенных определений следует, что всякая кусочно-непрерывная финитная функция интегрируема по Лебегу и ее интегралы Римана и Лебега совпадают.

4. Функции  $f$  и  $|f|$  одновременно интегрируемы по Лебегу, причем

$$\left| \int f(x)dx \right| \leq \int |f(x)|dx.$$

5. Интеграл Лебега линеен относительно функции  $f$

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$$

6. Замена переменных в интеграле Лебега. Пусть преобразование  $x = x(y)$  класса  $C^1(\bar{G}) - xk = xk(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $xk \in C^1(\bar{G})$  взаимно однозначно отображает область  $G$  на область  $G_1$  и  $D(x/y)$  – якобиан преобразования. Для того чтобы функция  $f(x)$  была интегрируема по Лебегу на области  $G$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $f[x(y)] |D(x/y)|$  была интегрируема по Лебегу на области  $G_1$ . При этом справедливо

$$\int_G f(x)dx = \int f[x(y)] \left| D\left(\frac{x}{y}\right) \right| dy.$$

Утверждение верно для кусочно-непрерывных функций.

7. Если функции  $f(x)$  и  $|f(x)|$  интегрируемы по Риману (возможно в несобственном смысле), то они интегрируемы по Лебегу, и оба интеграла совпадают.

8. Теорема Лебега. Пусть последовательность функций (измеримых)  $f_k(x)$  сходится почти везде к функции  $f(x)$ . Если существует такая интегрируемая функция  $g(x)$ , что при всех  $k$   $|f_k(x)| \leq g(x)$  почти везде, то функция  $f(x)$  также интегрируема и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x)dx = \int f(x)dx.$$

Отсюда: всякая ограниченная функция интегрируема по любому ограниченному (измеримому) множеству  $A$ . В частности, интеграл

$$\int_A dx = \int \chi_A dx$$

существует и называется **мерой Лебега множества  $A$** . Мера ограниченной области с кусочно-гладкой поверхностью совпадает с ее объемом.

9. **Теорема Фубини**. Если функция  $f(x,y)$ , заданная в пространстве  $R^{n+m}$ ,  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$ , измерима и существует повторный интеграл

$$\int [\int |f(x, y)| dx] dy < \infty,$$

то функция  $f(x, y)$  интегрируема, интегралы  $\int f(x, y) dx$ ,  $\int f(x, y) dy$  существуют почти везде и интегрируемы; справедливы равенства

$$\int f(x, y) dx dy = \int [\int f(x, y) dy] dx = \int [\int f(x, y) dx] dy.$$

Если функция  $f(x, y)$  неинтегрируема, то повторные интегралы могут и не существовать, либо не быть равными. Интеграл по кусочно-гладкой поверхности строится аналогично, для функций  $f(x, y)$ , заданных на множестве  $R^n \times S$ , теорема Фубини остается справедливой.

## 2.5. Пространство функций $L^2(G)$

Пространство функций  $L^2$  – это пространство функций  $f$ , для которых функция  $|f(x)|^2$  интегрируема на области  $G$ .

Множество функций  $L^2$  линейно. Для доказательства этого необходимо показать, что квадрат суммы функций, принадлежащих  $L^2$ , является измеримой функцией. Это следует из известного неравенства  $|f(x)g(x)| \leq f^2(x) + g^2(x)$ , с помощью которого суммируемость функции

$$[f(x) + g(x)]^2 = f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)$$

в пространстве  $L^2$  становится очевидной (правая часть равенства – сумма измеримых функций).

$$\text{Если } f, g \in L^2(G), \text{ то } \left| \int_G f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_G |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_G |g(x)|^2 dx}. \quad (2.1)$$

Это соотношение называется неравенством Коши-Буняковского. На самом деле, при всех действительных  $\lambda$   $|f| + \lambda|g| \in L^2(G)$ , поэтому

$$0 \leq \int_G (|f(x)| + \lambda|g(x)|)^2 dx = \int_G |f(x)|^2 dx + 2\lambda \int_G |f(x)||g(x)| dx + \lambda^2 \int_G |g(x)|^2 dx.$$

Следовательно, дискриминант этой квадратичной формы неположителен, то есть

$$\left[ \int_G |f(x)g(x)| dx \right]^2 - \int_G |f(x)|^2 dx \int_G |g(x)|^2 dx \leq 0,$$

откуда и вытекает неравенство (2.1).

Дискретный аналог неравенства Коши-Буняковского при комплексных  $a_k$  и  $b_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$  выглядит следующим образом:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2}.$$

Если  $f \in L^2(G)$  и  $G$  – ограниченная область, то функция  $f(x)$  интегрируема на  $G$ . Это следует из неравенства Коши-Буняковского при  $g(x) = 1$ .

Введем понятия скалярного произведения и нормы на  $L^2(G)$  по следующим формулам:

$$(f, g) = \int_G f(x)\bar{g}(x)dx; \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_G |f(x)|^2 dx}, \quad (2.2)$$

где  $\bar{g}(x)$  - функция, комплексно сопряженная с  $g(x)$ . Тем самым линейное пространство  $L^2$  превращается в нормированное со свойствами скалярного произведения

$$(f, g) = \overline{(g, f)} ; (\lambda f + \mu g, h) = \lambda(f, h) + \mu(g, h).$$

Используя вновь введенные понятия, можно записать неравенство Коши-Буняковского как

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|, f, g \in L_2(G) ,$$

из которого вытекает неравенство Минковского:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = (f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) \leq \\ &\leq \|f\|^2 + |(f, g)| + |(g, f)| + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + \|f\| \|g\| + \|g\| \|f\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 . \end{aligned}$$

Таким образом, норма (2.2) удовлетворяет всем условиям, перечисленным в подразд. 2.1.

Последовательность функций  $f_k, k = 1, 2, \dots$  из пространства  $L^2$  сходится к функции  $f \in L^2(G)$  (сходится в среднем в  $G$ ), если  $\|f_k - f\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ , то есть  $f_k \rightarrow f, k \rightarrow \infty$  в  $L^2(G)$ .

Пространство  $L^2$  обладает свойством **полноты** (теорема Рисса-Фишера). Если последовательность  $f_k, k = 1, 2, \dots$  из пространства  $L^2$  **сходится в себе**, то есть  $\|f_k - f_p\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$ , то существует функция  $f \in L^2(G)$  такая, что  $\|f_k - f\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ .

Множество  $M \subset L^2(G)$  называется **плотным** в  $L^2(G)$ , если для любой функции  $f \in L^2(G)$  существует последовательность функций из  $M$ , сходящаяся к  $f$ .

Пространство  $L^2(G)$  относится к классу **гильбертовых** пространств.

## 2.6. Ортонормальные системы

Функции  $f$  и  $g$  из  $L^2(G)$  называются **ортгоналичными**, если  $(f, g) = 0$ ; функция  $f$  из  $L^2(G)$  называется **нормированной**, если  $\|f\| = 1$ . Система функций  $\{\varphi_k\}$  из  $L^2(G)$  называется **ортонормальной** в  $L^2(G)$ , если  $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki}$  (символ Кронекера). Пример ортонормальной в  $L^2(-\pi, \pi)$  системы - тригонометрические функции  $\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad k = 0, \pm 1, \dots$

Всякая ортонормальная система состоит из линейнонезависимых

функций. Всякая система линейно независимых функций  $\phi_1, \phi_2, \dots$  из  $L^2(G)$  может быть преобразована в ортонормальную систему  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  с помощью процедуры ортогонализации Шмидта

$$\varphi_1 = \frac{\phi_1}{\|\phi_1\|}, \quad \varphi_2 = \frac{\phi_2 - (\phi_2, \varphi_1)\varphi_1}{\|\phi_2 - (\phi_2, \varphi_1)\varphi_1\|}, \dots, \varphi_k = \frac{\phi_k - (\phi_k, \varphi_{k-1})\varphi_{k-1} - \dots - (\phi_k, \varphi_1)\varphi_1}{\|\cdot\|}$$

. Пусть система  $\{\varphi_k\}$  ортонормальна в  $L^2(G)$  и  $f \in L^2(G)$ . Числа  $(f, \varphi_k)$  называются **коэффициентами Фурье**, а формальный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k \quad (2.3)$$

**рядом Фурье** функции  $f$  по системе функций  $\{\varphi_k\}$ .

Если система функций  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ортонормальна в  $L^2(G)$ , то для каждой функции  $f \in L^2(G)$  и любых (в том числе и комплексных) чисел  $a_1, a_2, \dots, a_N$ ,  $N = 1, 2, \dots$  справедливо равенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k) - a_k|^2, \quad (2.4)$$

из которого вытекает неравенство

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 \leq \left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|^2.$$

Полагая в (2.4)  $a_k = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , получаем равенство:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N |(f, \varphi_k)|^2, \quad (2.5)$$

из которого вытекает неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

Из равенства (2.5) и теоремы Рисса-Фишера (подразд. 2.5) следует: для того чтобы ряд Фурье (2.3) сходил к функции  $f$  в  $L^2(G)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство Парсеваля (уравнение замкнутости)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 = \|f\|^2.$$

## 2.7. Полные ортонормальные системы

Пусть система функций  $\{\varphi_k\}$  ортонормальна в  $L^2(G)$ . Если для любой функции  $f \in L^2(G)$  ее ряд Фурье по системе  $\{\varphi_k\}$  сходится к  $f$  в  $L^2(G)$ , то эта система называется **полной** (замкнутой) в  $L^2(G)$ .

**Теорема.** Для того чтобы ортонормальная система функций  $\{\varphi_k\}$  была полной в  $L^2(G)$ , необходимо и достаточно, чтобы каждую функцию  $f$  из множества  $M$ , плотного в  $L^2(G)$ , можно было сколь угодно точно приблизить в  $L^2(G)$  линейными комбинациями функций этой системы.

**Следствие.** Если  $G$  – ограниченная область, то в  $L^2(G)$  существует счетная полная ортонормальная система полиномов. Множество полиномов плотно в  $L^2(G)$  (см. подразд. 2.5), счетно и его можно сделать ортонормальным (процедура ортогонализации).

**Лемма.** Пусть области  $G \subset \mathbb{R}^n$  и  $D \subset \mathbb{R}^m$  ограничены, система функций  $\{\phi_j(y)\}$  ортонормальна и полна в  $L^2(D)$  и при каждом  $j = 1, 2, \dots$  система функций  $\{\varphi_{kj}(y)\}$  ортонормальна и полна в  $L^2(G)$ . Тогда система функций  $\{\chi_{kj}(x, y)\} = \{\varphi_{kj}(x), \phi_j(y)\}$ ,  $k, j = 1, 2, \dots$  ортонормальна и полна в  $L^2(G \times D)$ .

Все сказанное о пространстве  $L^2(G)$  переносится и на пространства  $L^2(G; \rho)$  или  $L^2(S)$  со скалярными произведениями

$$(f, g)_\rho = \int_G \rho(x) f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L_2(G; \rho),$$

$$(f, g) = \int_G f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L_2(S),$$

где  $\rho \in C(\overline{G})$ ,  $\rho(x) > 0$ ,  $x \in \overline{G}$  – весовая функция;  
 $S$  – кусочно-гладкая поверхность.

## 2.8. Линейные операторы и функционалы

Пусть  $M$  и  $N$  – линейные множества. Оператор  $L$ , преобразующий элементы множества  $M$  в элементы множества  $N$ , называется линейным, если для любых элементов  $f$  и  $g$  из  $M$  и комплексных чисел  $\lambda$  и  $\mu$  справедливо равенство

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda Lf + \mu Lg.$$

Множество  $M = M_L$  – область определения оператора  $L$ . Если при всех  $f \in M$   $Lf = f$ , то оператор  $L$  называется **тождественным** (единичным) и обозначается –  $I$ .

Пусть на линейных множествах  $M$  и  $N$  определена сходимость элементов. Линейный оператор  $L$ , переводящий  $M$  в  $N$ , называется **непрерывным** из  $M$  в  $N$ , если из непрерывности функции  $f$  в  $M$  следует непрерывность ее преобразования  $Lf$  в  $N$ .

Пусть  $M$  и  $N$  – линейные нормированные пространства с нормами  $\| \cdot \|_M$  и  $\| \cdot \|_N$  соответственно, Линейный оператор  $L$ , переводящий  $M$  в  $N$ , называется *ограниченным* из  $M$  в  $N$ , если существует такое число  $c > 0$ , что для любой функции  $f \in M$  справедливо неравенство

$$\| Lf \|_N \leq c \| f \|_M.$$

Из определений вытекает: если линейный оператор  $L$  ограничен из  $M$  в  $N$ , то он и непрерывен из  $M$  в  $N$ . Действительно, если последовательность функций  $f_k$  сходится к функции  $f$  в  $M$ , то есть  $\| f - f_k \|_M \rightarrow 0$ , то в силу линейности и ограниченности оператора  $L$ ,

$$\| Lf_k - Lf \|_N = \| L(f_k - f) \|_N \leq c \| f_k - f \|_M$$

и  $Lf_k \rightarrow Lf$   $k \rightarrow \infty$  в  $N$ . Это и означает непрерывность оператора  $L$  из  $M$  в  $N$ .

Множество  $B$  линейного нормированного пространства  $M$  называется *ограниченным* в  $M$ , если существует такое число  $a$ , что  $\| f \|_M < a$  при всех  $f \in B$ .

Пусть линейный оператор  $K$  переводит  $M$  в  $N_1$  и линейный оператор  $L$  переводит  $N_1$  в  $N$ . Линейный оператор  $KLf = K(Lf)$ , переводящий  $M$  в  $N$ , называется произведением  $KL$  операторов  $L$  и  $K$ .

Частным случаем линейных операторов являются линейные функционалы. Если линейный оператор  $l$  преобразует множество элементов  $M$  во множество комплексных чисел  $lf, f \in M$ , то  $l$  называется *линейным функционалом* на множестве  $M$ . Обозначим линейный функционал как  $(l, f)$ .

### Примеры

1. Линейный оператор вида

$$Kf = \int_G K(x, y) f(y) dy, \quad x \in G$$

называется линейным интегральным оператором,  $K(x, y)$  – его ядро. Если ядро  $K \in L^2(G \times G)$  и

$$\int_{G \times G} (K(x, y))^2 dx dy = c^2 < \infty,$$

то оператор ограничен, а следовательно, и непрерывен, из  $L^2(G) = M$  в  $L^2(G) = N$ .

2. Линейный оператор

$$Lf = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha f(x), \quad \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha(x)| \neq 0, \quad m > 0$$

называется линейным дифференциальным оператором порядка  $m$ ,  $a_\alpha(x)$  – его коэффициенты. Если  $a_\alpha(x)$  – непрерывные функции в области  $\bar{G} \subset R^n$ ,

то оператор переводит пространство  $C^m(\bar{G}) = M$  в пространство  $C(\bar{G}) = N$ . Однако оператор  $L$  не является непрерывным из  $C^m(\bar{G})$  в  $C(\bar{G})$ . Действительно,

$$f_k(x) = \frac{1}{k} e^{ik(x,a)} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \text{ в } C(\bar{G}),$$

но функция, полученная в результате преобразования

$$L f_k = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha f_k(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (ia)^\alpha k^{|\alpha|} e^{ik(x,a)},$$

не имеет предела в  $C(\bar{G})$ . Оператор  $L$  определен не на всем пространстве  $C(G)$ , а лишь на его части  $C^m(\bar{G})$ .

### 3. Линейный оператор

$$L f = \sum_{|\alpha| \leq m} \left[ \int_G K_\alpha(x, y) D^\alpha f(y) dy + a_\alpha(x) D^\alpha f(x) \right]$$

называется линейным интегро-дифференциальным оператором.

4. Пример функционала – скалярное произведение  $(l, f) = (f, g)$  – линейный непрерывный функционал  $l$  на  $L^2(G)$ . Линейный – в силу определения скалярного произведения; в силу неравенства Коши-Буняковского он ограничен и, следовательно, непрерывен.

## 2.9. Линейные уравнения

Пусть  $L$  – линейный оператор с областью определения  $M_L$ . Уравнение

$$Lu = F \tag{2.6}$$

называется линейным (неоднородным) уравнением;  $F$  – свободный член (правая часть);  $u \in M_L$  – решение уравнения. Если  $F = 0$ , то

$$Lu = 0 \tag{2.7}$$

- однородное линейное уравнение, соответствующее уравнению (2.6). В силу линейности оператора  $L$  совокупность решений уравнения (2.7) является линейным множеством ( $u = 0$  – всегда является решением).

Всякое решение  $u$  неоднородного линейного уравнения (2.6), если оно существует, представляется в виде суммы частного решения  $u_0$  этого уравнения и общего решения  $\tilde{u}$  соответствующего однородного линейного уравнения (2.7)

$$u = \tilde{u} + u_0. \tag{2.8}$$

Пусть  $u$  – произвольное решение уравнения (2.6),  $u_0$  – частное решение, тогда в силу линейности  $L$ , их разность  $u - u_0 = \tilde{u} \in M_L$  удовлетворяет уравнению (2.7)

$$L\tilde{u} = L(u - u_0) = Lu - Lu_0 = F - F = 0,$$

отсюда справедливость (2.8). Продолжая, можно заключить: чтобы решение уравнения (2.6) было единственным в  $M_L$ , необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение (2.7) имело только нулевое решение.

Пусть уравнение (2.6) имеет единственное решение  $u \in M_L$ , тогда ему соответствует единственное значение оператора  $Lu = F \in R_L$ . Таким образом, возникает некий оператор, сопоставляющий каждому элементу  $F \in R_L$  элемент  $u \in M_L$ , который называется обратным оператором к оператору  $L$ , так что  $u = L^{-1}F$ . Оператор  $L^{-1}$  является линейным и преобразует  $R_L$  в  $M_L$ . Очевидно, что

$$LL^{-1}F = F, F \in R_L; L^{-1}Lu = u, u \in M_L; L^{-1}L = LL^{-1} = I.$$

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$Lu = \lambda u, \quad (2.9)$$

где  $\lambda$  - комплексный параметр. Уравнение имеет нулевое решение при всех  $\lambda$ . Но может быть, что при некоторых значениях  $\lambda$  оно имеет ненулевые решения из  $M_L$ . Комплексные значения  $\lambda$ , при которых уравнение (2.9) имеет ненулевые решения из  $M_L$ , называются **собственными значениями** оператора  $L$ , а соответствующие решения – **собственными функциями**. Полное число  $r$  ( $1 \leq r \leq \infty$ ) линейно независимых собственных функций, соответствующих данному собственному значению  $\lambda$ , называется **кратностью** этого собственного значения; если кратность  $r = 1$ , то  $\lambda$  называется простым собственным значением.

Если кратность собственного значения оператора конечна и  $u_1, u_2, \dots, u_r$  – линейно-независимые собственные функции, то любая их линейная комбинация также является собственной функцией, соответствующей этому собственному значению. Эта комбинация и дает общее решение уравнения (2.9). Отсюда и из (2.8) вытекает: если решение уравнения

$$Lu = \lambda u + f$$

существует, то его общее решение представляется формулой

$$u = u^* + \sum_{k=1}^r c_k u_k,$$

где  $u^*$  - частное решение и  $c_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , - произвольные постоянные.

## 2.10. Эрмитовы операторы

Линейный оператор  $L$ , переводящий  $M_L \subset L^2$  в  $L^2$ , называется **эрмитовым** (самосопряженным по Лагранжу), если для любых функций  $f$  и  $g$  из  $M_L$  справедливо

$$(Lf, g) = (f, Lg).$$

Выражения  $(Lf, g)$  и  $(Lf, f)$  называются соответственно билинейной и квадратичной формами, порожденными оператором  $L$ .

Для того чтобы оператор  $L$  был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы порожденная им квадратичная форма  $(Lf, f)$ ,  $f \in M_L$  принимала только вещественные значения. Действительно,

$$(Lf, f) = \overline{(f, Lf)} = \overline{(Lf, f)}, \quad f \in M_L.$$

Достаточность также легко доказывается.

Линейный оператор называется *положительным*, если порожденная им квадратичная форма принимает только неотрицательные значения. Из этого утверждения следует, всякий положительный оператор – эрмитов.

**Теорема.** Если оператор  $L$  эрмитов, то все его собственные значения вещественны (неотрицательны), а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Если система собственных функций  $\{u_k\}$  эрмитова оператора  $L$  не более чем счетна, то ее можно выбрать ортонормальной

$$(Lu_k, u_j) = \lambda_k (u_k, u_j) = \lambda_k \delta_{kj}.$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Определите  $n$ -мерное евклидово пространство.
2. Сформулируйте понятие сходимости в себе.
3. Определите класс функций  $C^p(G)$ .
4. Какое пространство называется линейным нормированным?
5. Сформулируйте понятие измеримости функции.
6. Дайте определение интеграла Лебега.
7. Как определяется мера Лебега множества  $A$ ?
8. Покажите, что пространство  $L^2$  линейно.
9. Из какого соотношения вытекает неравенство Минковского?
10. Дайте определение полной ортонормированной системы функций в  $L^2(G)$ .
11. Как соотносятся понятия оператора и функционала?
12. Какой оператор называется эрмитовым?

## 3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Весьма широкий класс физических задач сводится к линейным дифференциальным и интегральным уравнениям. Многие задачи решаются с помощью линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u + F(x).$$

### 3.1. Уравнение колебаний

Большинство задач механики, связанных с колебаниями (колебания струн, стержней, мембран...), приводят к **уравнению колебаний** вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \quad (3.1)$$

где  $u$  – искомая функция, зависящая от  $n$  пространственных координат и времени;

$\rho, p, q$  – коэффициенты, определяемые свойствами среды;

$F(x,t)$  – свободный член, выражает интенсивность внешнего возбуждения.

В уравнении (3.1) в соответствии с определением функций  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{grad}$

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Одномерный вариант уравнения (3.1) – уравнение малых поперечных колебаний струны

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F, \quad (3.2)$$

где  $\rho(x)$  – плотность струны;

$T_0$  – величина натяжения (по закону Гука, не зависящая от переменных  $x$  и  $t$ );

$F(x,t)$  – плотность внешних сил в рассматриваемой точке.

Уравнение (3.2) описывает также (с соответствующими коэффициентами) малые продольные колебания упругого стержня и называется одномерным волновым уравнением.

Двумерный вариант уравнения (3.1) описывает малые поперечные колебания мембраны

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F,$$

где смысл коэффициентов и свободного члена тот же, что и в уравнении (3.2). Это уравнение называется двумерным волновым.

Трехмерное волновое уравнение описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f.$$

Все волновые уравнения можно записать в единой форме

$$a u = f, \quad (3.3)$$

где  $a$  – волновой оператор (оператор Даламбера),  $a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$ ;

$\Delta$  - оператор Лапласа (лапласиан)  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ .

### 3.2. Уравнение диффузии

Общее уравнение для описания распространения тепла или диффузии частиц в среде выглядит следующим образом:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(p \text{grad} u) - qu + F(x, t). \quad (3.4)$$

Уравнение теплопроводности – частный случай уравнения (3.4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f,$$

где  $a^2 = k/c\rho$ ;  $f = F/c\rho$ ;  $\rho(x)$ ,  $c(x)$ ,  $k(x)$  – плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности избранной среды;  $F(x, t)$  – интенсивность источников тепла в точке  $x$  в момент  $t$ .

### 3.3. Стационарное уравнение

Для стационарных процессов справедливо  $F(x, t) = F(x)$ ,  $u(x, t) = u(x)$ , поэтому уравнения колебаний и диффузии принимают вид

$$-\text{div}(p \text{grad} u) + qu = F(x). \quad (3.5)$$

При  $p = \text{const}$  и  $q = 0$  (параметр поглощения среды) мы получаем уравнение Пуассона

$$\Delta u = -f, \quad f = F/p; \quad (3.6)$$

при  $f = 0$  – уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (3.7)$$

Если в волновом уравнении (3.3) внешнее возмущение  $f(x, t)$  периодическое, действующее с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $f_0(x)$ , то, предполагая решение уравнения  $u(x, t)$  как функцию, имеющую ту же частоту и неизвестную амплитуду, то есть  $u(x, t) = u_0(x)e^{i\omega t}$ , получаем уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = -\frac{f_0(x)}{a^2}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}.$$

### 3.4. Уравнения Максвелла

Пусть в некоторой среде имеется переменное электромагнитное поле. Обозначим  $\mathbf{E}(x,t)$  – напряженность электрического поля;  $\mathbf{H}(x,t)$  – напряженность магнитного поля;  $\rho(x)$  – плотность электрических зарядов,  $\varepsilon$  – диэлектрическая постоянная среды;  $\mu$  – коэффициент магнитной проницаемости среды;  $\mathbf{I}(x,t)$  – ток проводимости. Тогда эти величины удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений, называемых уравнениями Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) &= \rho, \quad \operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = 0, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mu\mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

#### *Частные случаи уравнений Максвелла*

1. При условии  $\rho = 0$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\lambda = \text{const}$ ,  $\mathbf{I} = \lambda\mathbf{E}$  (закон Ома) получаем из (3.8) телеграфное уравнение

$$a^2 u + \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

2. Вводя четырехкомпонентный электромагнитный потенциал  $(\varphi_0, \boldsymbol{\varphi})$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , при условии  $\mathbf{I} = 0$ ,  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$  можно представить решение уравнений Максвелла в виде

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi_0 - \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi},$$

при этом компоненты электромагнитного потенциала должны удовлетворять волновым уравнениям

$$a^2 \varphi_0 = -\frac{1}{\varepsilon^2 \mu} \rho, \quad a^2 \boldsymbol{\varphi} = 0$$

и условию Лоренца

$$\mu\varepsilon \frac{\partial\varphi_0}{\partial t} - \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = 0.$$

Если процесс стационарный, то уравнения Максвелла превращаются в уравнения электростатики

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$$

и уравнения магнитостатики

$$\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{I}.$$

### 3.5. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в точке

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с непрерывными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \text{grad } u) = 0. \quad (3.9)$$

Выясним закон преобразования коэффициентов  $a_{ij}(x)$  при произвольной замене независимых переменных  $y = y(x)$ ,  $D(y/x) \neq 0$  (якобиан преобразования). Нетрудно показать, что

$$\tilde{a}_{lk}(y_0) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \alpha_{li} \alpha_{kj}, \quad (3.10)$$

где  $\tilde{a}_{lk}$  - новые коэффициенты при вторых производных,  $\alpha_{li} = \frac{\partial y_l(x_0)}{\partial x_i}$ .

Выражение (3.10) совпадает с формулой преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x_0) p_i p_j \quad (3.11)$$

при линейном преобразовании

$$p_i = \sum_{l=1}^n \alpha_{li} q_l, \quad \det(\alpha_{li}) \neq 0, \quad (3.12)$$

переводящим форму (3.11) в форму

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{lk}(y_0) q_l q_k.$$

Чтобы упростить уравнение (3.9), именно в этом заключается цель преобразования, в точке  $x_0$  с помощью замены переменных, достаточ-

но упростить в этой точке квадратичную форму (3.11) с помощью линейного преобразования (3.12). Но в курсе линейной алгебры доказывается, что всегда существует преобразование (3.12), при котором квадратичная форма (3.11) принимает канонический вид

$$\sum_{l=1}^r q_l^2 - \sum_{l=r+1}^m q_l^2, \quad r, m \leq n \quad (3.13)$$

и целые числа  $r$  и  $m$  не зависят от преобразования (3.11). Это позволяет классифицировать дифференциальные уравнения (3.9) в зависимости от значений, принимаемых коэффициентами  $a_{ij}$  в точке  $x_0$ .

1. Если в квадратичной форме (3.13)  $m = n$  и все слагаемые одного знака (либо  $r = m$ , либо  $r = 0$ ), то уравнение (3.9) называется уравнением **эллиптического типа**;

2. Если  $m = n$ , но имеются слагаемые разных знаков ( $1 \leq r \leq n-1$ ), то уравнение (3.9) – **гиперболического типа** (при  $r = n-1$  – нормально-гиперболического типа);

3. Если  $m < n$ , то уравнение (3.9) – **параболического типа** (при  $r = n-1$  – нормально-параболического типа).

Определение типа уравнения согласно приведенной классификации зависит от положения точки  $x_0$ , так как от этого зависят значения  $r$  и  $m$  - уравнение Трикоми

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

смешанного типа: при  $y < 0$  – гиперболического, при  $y > 0$  – эллиптического, при  $y = 0$  – параболического типа.

Пусть коэффициенты  $a_{ij}$  в уравнении (3.9) не зависят от  $x$  и пусть преобразование (3.12) приводит квадратичную форму (3.11) к каноническому виду (3.13), тогда линейная замена независимых переменных

$$y_l = \sum_{i=1}^n \alpha_{li} x_i$$

преобразует уравнение (3.9) в канонический вид

$$\sum_{l=1}^r \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} - \sum_{l=r+1}^m \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_l^2} + \tilde{\Phi}(y, \tilde{u}, \text{grad} \tilde{u}) = 0. \quad (3.14)$$

### 3.6. Характеристические поверхности

Пусть функция  $w(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 2$  класса  $C^1$  такова, что на поверхности  $w(x) = 0$   $\text{grad} w(x) \neq 0$  и

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \frac{\partial w(x)}{\partial x_j} = 0. \quad (3.15)$$

Тогда поверхность  $w(x) = 0$  называется **характеристической поверхностью** (характеристикой) линейного дифференциального уравнения (3.9), а уравнение (3.15) – характеристическим уравнением.

Предположим: каждая поверхность семейства  $w(x) - c = 0$ ,  $a < c < b$  есть характеристика уравнения (3.9). Поскольку на каждой характеристике выполняется условие  $\text{grad} w \neq 0$ , то это семейство заполняет некоторую область  $G$ , через каждую точку которой проходит одна и только одна характеристика. Пусть  $w \in C^2(G)$ . Тогда, если в преобразовании замены переменных взять  $y = w(x)$ , то в силу (3.10) и (3.15) коэффициент  $\tilde{a}_{ll}$  обратится в нуль в соответствующей области  $G$ . Поэтому знание одного или нескольких семейств характеристик дифференциального уравнения дает возможность привести это уравнение к более простому виду.

### 3.7. Канонический вид уравнения с двумя

#### независимыми переменными

С помощью замены переменных можно привести уравнение (3.9) к каноническому виду (3.14) в достаточно малой окрестности каждой точки. Для этого необходимо, чтобы число условий

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{lk} &= 0, \quad l \neq k, \quad l, k = 1, 2, \dots, n, \\ \tilde{a}_{ll} &= \varepsilon_l \tilde{a}_{11}, \quad l = 2, 3, \dots, n, \quad \tilde{a}_{11} \neq 0, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_l = 0, \pm 1$  не превосходило числа неизвестных функций  $y_l$ , то есть  $n \leq 2$  в нашем случае.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \quad (3.16)$$

где  $a, b, c \in C^2$  в некоторой окрестности и нигде в ней не обращаются в нуль одновременно. При условии  $a \neq 0$  переходим к новым переменным

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \xi \in C^2, \quad D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) \neq 0. \quad (3.17)$$

Уравнение (3.16) приводится к следующему виду

$$\tilde{a} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + 2\tilde{b} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{c} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}) = 0, \quad (3.18)$$

где в силу (3.10)

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2, \\ \tilde{b} &= a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \tilde{c} &= a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Потребуем, чтобы функции  $\xi(x, y)$  и  $\eta(x, y)$  обращали в нуль коэффициенты  $\tilde{a}$  и  $\tilde{c}$ , то есть в силу (3.19) удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 &= 0 \\
a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 &= 0
\end{aligned}
\tag{3.20}$$

так как  $a \neq 0$ , то уравнения (3.20) эквивалентны линейным уравнениям

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda_1(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda_2(x, y)\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \tag{3.21}$$

где  $\lambda_1 = \frac{b - \sqrt{d}}{a}$ ,  $\lambda_2 = \frac{b + \sqrt{d}}{a}$ ,  $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\sqrt{d}}{a}$ ,  $d = b^2 - ac$ .

$$(3.22)$$

В зависимости от значения параметра  $d$  возможны три типа уравнений:

1. Гиперболический тип при  $d > 0$ ;
2. Параболический тип при  $d = 0$ ;
3. Эллиптический тип при  $d < 0$ .

### 3.7.1. Гиперболический тип

Уравнение (3.16) в этом случае приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \Phi = 0. \tag{3.23}$$

Заменой переменных  $\rho = \xi + \eta$ ,  $\sigma = \xi - \eta$  в уравнении (3.10) можно получить другой эквивалентный канонический вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} + \Phi_1 = 0.$$

Для доказательства справедливости представления (3.23) установим существование хотя бы одной пары решений уравнений (3.21),

удовлетворяющих условиям (3.17). Установим связь этих решений с характеристиками уравнения (3.16).

Предположим, что существуют решения уравнений (3.21) такие, что  $\text{grad}\xi \neq 0$  и  $\text{grad}\eta \neq 0$  в рассматриваемой окрестности. Тогда по определению (характеристик) кривые

$$\xi(x,y) = c_1, \quad \eta(x,y) = c_2$$

задают два семейства характеристик уравнения (3.16).

**Лемма.** Пусть функция  $w(x,y)$  класса  $C^1$  такова, что  $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ . Для того чтобы семейство кривых  $w(x,y) = c$  давало характеристики уравнения (3.16), необходимо и достаточно, чтобы выражение  $w(x,y) = c$  было общим интегралом одного из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x,y), \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2(x,y) . \quad (3.24)$$

Эти уравнения называются дифференциальными уравнениями характеристик уравнения (3.16).

Пусть  $w(x,y) = c$  – семейство характеристик уравнения (3.16). Из условия  $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$  следует, что кривые заполняют всю рассматриваемую окрестность. Поэтому функция  $w$  удовлетворяет в этой окрестности одному из уравнений (3.21), превращая в нуль коэффициенты при вторых производных, например

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda_1(x,y) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 . \quad (3.21^*)$$

На каждой характеристике  $w(x,y) = c$  справедливо соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 0 . \quad (3.25)$$

Отсюда и из (3.21<sup>\*</sup>) заключаем, в силу условия  $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ , что  $w(x,y) = c$  есть общий интеграл первого из уравнений (3.24).

Обратно, если  $w(x,y) = c$  – есть общий интеграл одного из уравнений (3.24), например  $y' = \lambda_1(x,y)$ , то в силу соотношения (3.25) на каждой линии  $w(x,y) = c$  выполняется соотношение (3.21<sup>\*</sup>). Но по теореме существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений через каждую точку из рассматриваемой окрестности проходит одна интегральная кривая  $w(x,y) = c$  уравнения  $y' = \lambda_1$ . Поэтому уравнение (3.21<sup>\*</sup>) удовлетворяется во всех точках этой окрестности. Отсюда заключаем: поскольку  $w \in C^1$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ , то кривые  $w(x,y) = c$  являются характеристиками уравнения (3.16).

На основании доказанного можно утверждать, что общие интегралы уравнения (3.16)  $\xi(x,y) = c_1$  и  $\eta(x,y) = c_2$ , ( $\xi, \eta \in C^1$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0$ ) определяют два семейства характеристик уравнения (3.16). При этом, поскольку  $\lambda_i \in C^2$  и в силу (3.16) и (3.22)

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} (\lambda_2 - \lambda_1) = 2 \frac{\sqrt{d}}{a} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0. \quad (3.26)$$

Таким образом, семейства характеристик образуют семейства координатных линий и  $\xi(x,y)$ ,  $\eta(x,y)$  можно принять за новые переменные. При этом в уравнении (3.18)  $\tilde{a} \equiv \tilde{c} \equiv 0$  и в силу (3.19), (3.24)

$$\tilde{b} = [a\lambda_1\lambda_2 - b(\lambda_1 + \lambda_2) + c] \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{2d}{a} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0.$$

Разделив уравнение (3.18) на коэффициент  $2\tilde{b} \neq 0$ , получим уравнение в канонической форме (3.23).

### 3.7.2. Параболический тип

Пусть  $d = 0$  в некоторой окрестности, тогда уравнение (3.16) приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi = 0. \quad (3.27)$$

В этом случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = b/a$  и дифференциальные уравнения (3.21) совпадают и сводятся к одному

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{b}{a} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad . \quad (3.28)$$

Поэтому имеется одно семейство характеристик уравнения (3.16) ( $\xi(x,y) = c_1$ ), определяемое в силу леммы общим интегралом уравнения  $y' = b/a$ . В качестве второго семейства координатных линий выберем  $x = c_2$ , тогда

$$\xi = \xi(x,y) \quad , \quad \eta = x \quad , \quad D\left(\begin{matrix} \xi, \eta \\ x, y \end{matrix}\right) = -\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$$

и в силу (3.19) и (3.28)

$$\tilde{a} = 0, \quad \tilde{b} = a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \tilde{c} = a.$$

Разделив уравнение (3.18) на  $\tilde{c} = a \neq 0$ , получим (3.27).

### 3.7.3. Эллиптический тип

Пусть коэффициенты  $a$ ,  $b$ , и  $c$  уравнения (3.16) – аналитические функции переменных  $(x,y)$  в окрестности некоторой точки. Тогда это уравнение приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + \tilde{\Phi} = 0 \quad . \quad (3.29)$$

Аналитическими функциями являются  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Из теоремы Ковалевской (см. ниже) вытекает, что в достаточно малой окрестности существует аналитическое решение  $w(x,y)$  уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda_1(x,y) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad ,$$

удовлетворяющее условию  $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ . Положим

$$\xi = \frac{w(x, y) + \bar{w}(x, y)}{2}, \quad \eta = \frac{w(x, y) - \bar{w}(x, y)}{2i}, \quad (3.30)$$

где  $\bar{w}(x, y)$  - функция, сопряженная с  $w$  и удовлетворяющая второму из уравнений (3.21):

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \lambda_2(x, y) \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = 0 .$$

Функции  $\xi$  и  $\eta$  принадлежат пространству  $C^\infty$ , в силу (3.30) и (3.26) их якобиан отличен от 0

$$D\left(\frac{\xi, \eta}{x, y}\right) = D\left(\frac{\xi, \eta}{w, \bar{w}}\right) D\left(\frac{w, \bar{w}}{x, y}\right) = \frac{1}{2i} 2 \frac{\sqrt{d}}{a} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = \frac{\sqrt{-d}}{a} \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|^2 \neq 0 .$$

Поэтому  $\xi$  и  $\eta$  можно взять за новые переменные. По построению функция  $w$  удовлетворяет одному из уравнений (3.20). Отделяя в нем вещественную и мнимую части и пользуясь (3.30), получим:

$$\begin{aligned} a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 &= a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2, \\ a\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 . \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы (3.19), заключаем, что  $\tilde{a} = \tilde{c}$  и  $\tilde{b} = 0$  в переменных  $\xi$  и  $\eta$ . Так как  $d < 0$  и  $\frac{\partial \xi}{\partial y} \neq 0$ , то  $\tilde{a} = \tilde{c} \neq 0$ . Разделив (3.18) на  $\tilde{a} = \tilde{c}$ , получим канонический вид (3.29).

### 3.8. Постановка основных краевых задач

#### для дифференциального уравнения второго порядка

Согласно классификации уравнение колебаний относится к гиперболическому типу, уравнение диффузии – к параболическому и стационарное уравнение – к эллиптическому типу. Постановка краевых условий – начальных и граничных - связана с неединственностью решений диффе-

ренциальных уравнений, даже обыкновенных. В зависимости от поставленных краевых условий существуют три типа краевых задач для дифференциальных уравнений.

1. Задача Коши: для уравнений гиперболического и параболического типов задаются начальные условия, область определения  $G$  совпадает со всем пространством  $R^n$ , граничные условия отсутствуют.
2. Краевая задача для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе  $S$ , начальные условия отсутствуют.
3. Смешанная задача: для уравнений гиперболического и параболического типов задаются и начальные, и граничные условия,  $G \neq R^n$ .

**Задача Коши.** Для уравнения колебаний (гиперболический тип) ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$ , удовлетворяющую уравнению (3.1) и начальным условиям при  $t = 0$ ,

$$u|_{t=+0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=+0} = u_1(x). \quad (3.31)$$

При этом необходимо:  $F \in C(t > 0)$ ,  $u_0 \in C^1(R^n)$ ,  $u_1 \in C(R^n)$ .

Для уравнения диффузии (параболический тип) - найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ , удовлетворяющую уравнению (3.4) и начальному условию

$$u|_{t=+0} = u_0(x). \quad (3.32)$$

При этом необходимо, чтобы  $F \in C(t > 0)$ ,  $u_0 \in C(R^n)$ .

**Краевая задача для уравнений эллиптического типа.** Состоит в нахождении функции  $u(x)$  класса  $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ , удовлетворяющей в области  $G$  уравнению (3.5) и граничному условию на  $S$  вида

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_S = v, \quad (3.33)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ , и  $v$  – заданные непрерывные на  $S$  функции, причем  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta > 0$ .

Выделяют следующие типы граничных условий (3.33):

1. Граничные условия 1-го рода ( $\alpha = 1, \beta = 0$ ):  $u|_S = u_0$ ;
2. Граничные условия 2-го рода ( $\alpha = 0, \beta = 1$ ):  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_S = u_1$ ;
3. Граничные условия 3-го рода ( $\alpha > 0, \beta = 1$ )  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u|_S = u_2$ .

Соответственно возникают краевые задачи 1-го, 2-го и 3-го рода.

Для уравнений Лапласа (3.7) и Пуассона (3.6) краевая задача 1-го рода называется задачей Дирихле, а краевая задача 2-го рода – задачей Неймана.

**Смешанная задача.** Для уравнения колебаний (3.1) состоит в следующем: необходимо найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(\Pi_\infty) \cap C^1(\bar{\Pi}_\infty)$ , удовлетворяющую уравнению (3.1) в цилиндре  $\Pi_\infty$ , начальным условиям (3.31) при  $t = 0, x \in \bar{G}$  (на нижнем основании цилиндра  $\Pi_\infty$ ) и граничным условиям (3.33) при  $x \in S, t \geq 0$  (на боковой поверхности цилиндра). При этом должны быть выполнены условия гладкости

$$F \in C(\Pi_\infty), u_0 \in C^1(\bar{G}), u_1 \in C(\bar{G}), v \in C(S \times [0, \infty])$$

и условие согласованности

$$\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_S = v|_{t=0}.$$

Для уравнения диффузии (3.4) смешанная задача формулируется следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$  класса  $C^2(\Pi_\infty) \cap C(\bar{\Pi}_\infty)$ ,  $\text{grad}_x u \in C(\bar{\Pi}_\infty)$ , удовлетворяющую уравнению (3.4) в  $\Pi_\infty$ , начальному условию (3.32) и граничному условию (3.33).

### 3.9. Корректность постановки задач

Поскольку задачи математической физики описывают реальные физические процессы, то математическая постановка этих задач должна удовлетворять следующим естественным требованиям:

1. Решение должно существовать в каком-то классе функций  $M_1$ ;
2. Быть единственным в некотором классе функций  $M_2$ ;
3. Непрерывно зависеть от данных задачи.

Требование непрерывной зависимости решения обусловлено тем, что данные физической задачи определяются из эксперимента приближенно и поэтому необходима уверенность в том, что решение не будет существенно зависеть от погрешности измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям, называется корректно поставленной, а соответствующее множество функций, принадлежащее классу  $M_1 \cap M_2$ , - классом корректности.

### 3.10. Теорема Ковалевской

Теорема позволяет выделить обширный класс задач Коши, для которых решение существует и единственно. Определим необходимые понятия.

Система  $N$  дифференциальных уравнений с  $N$  неизвестными функциями

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i(x, t, u_1, u_2, \dots, u_N, \dots, \frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}} D_x^\alpha u_j, \dots), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.34)$$

называется **нормальной** относительно переменной  $t$ , если правые части уравнений не содержат производных порядка выше  $k_i$  и производных по  $t$  порядка выше  $k_i - 1$ , то есть  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k_i$ ,  $\alpha_0 \leq k_i - 1$ .

Функция  $f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется аналитической в точке  $x_0$ , если в некоторой окрестности этой точки она представляется в виде равномерно сходящегося степенного ряда

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - x_0)^\alpha = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

Точка  $x_0$  может быть и комплексной. Если функция  $f(x)$  аналитична в каждой точке области  $G$ , то она аналитична в области  $G$ .

Для нормальной относительно  $t$  системы уравнений (3.34) поставим следующую задачу Коши: найти решение  $u_1, u_2, \dots, u_N$  этой системы, удовлетворяющее начальным условиям при  $t = t_0$

$$\left. \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \right|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \quad k = 1, 2, \dots, k-1, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\varphi_{ik}(x)$  – заданные функции в некоторой области  $G \subset R^n$ .

**Теорема** (Ковалевской). Если все функции  $\varphi_{ik}(x)$  аналитичны в некоторой окрестности точки  $x_0$  и все функции  $\Phi_i(x, t, \dots, u_{j\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_n}, \dots)$  аналитичны в некоторой окрестности точки  $(x, t, \dots, D^\alpha \varphi_{0\alpha_0}(x_0), \dots)$ , то задача Коши имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки  $(x_0, t_0)$  и притом единственное в классе аналитических функций.

### 3.11. Классические и обобщенные решения

Изложенные выше постановки краевых задач характеризуются тем, что решения их предполагаются достаточно гладкими и удовлетворяющими уравнению в каждой точке внутри области задания этого уравнения. Такие решения можно назвать классическими, а постановку соответствующей краевой задачи – классической постановкой, которая уже предполагает, например, непрерывность правой части уравнения внутри его области задания. Однако в наиболее интересных задачах эти правые части (характеризуют интенсивность внешних воздействий) имеют довольно сильные особенности и классическая постановка оказывается недостаточной. Приходится отказываться (частично или полностью) от требования

гладкости решения внутри области, вводить так называемые *обобщенные решения*, использующие понятие обобщенной функции.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Напишите уравнение колебаний и дайте определение параметров, входящих в него.
2. Напишите уравнение диффузии и дайте определение параметров, входящих в него.
3. Чем отличается стационарное уравнение от уравнений колебаний и диффузии?
4. При каком условии уравнения Максвелла превращаются в уравнения электро- и магнитостатики?
5. В чем цель замены переменных в линейном дифференциальном уравнении 2-го порядка?
6. По какому признаку классифицируются линейные дифференциальные уравнения второго порядка в точке?
7. Напишите канонический вид уравнения с двумя независимыми переменными всех трех типов уравнений.
8. Что дает знание характеристик дифференциального уравнения?
9. С чем связана постановка краевых условий?
10. Перечислите типы краевых задач для дифференциальных уравнений и определите условия их постановки.
11. Каким условиям должна удовлетворять математическая постановка реальных физических задач?
12. Какую возможность в решении задач математической физики предоставляет теорема Ковалевской?

## 4. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

### 4.1. Основные и обобщенные функции

Рассмотрим задачу об определении плотности материальной точки массой 1. Расположение точки совпадает с началом координат. Обозначим искомую плотность -  $\delta(x)$ .

Разделим (размажем) массу 1 равномерно внутри шара  $U_\varepsilon$ , в результате получим среднюю плотность

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

Применим традиционный поточечный подход – найдем предел последовательности средних плотностей

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Потребуем, чтобы интеграл от  $\delta(x)$  по любому объему равнялся 1, то есть массе этого объема

$$\int_G \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \in G, \\ 0, & 0 \notin G. \end{cases}$$

Но в силу (4.1) левая часть равенства всегда равна нулю, поэтому поточечный подход неприменим.

Введем понятие *слабого предела* последовательности  $f_\varepsilon(x)$ , а именно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x) dx.$$

Покажем, что для любой непрерывной функции  $\varphi$  справедливо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Вследствие непрерывности  $\varphi(x)$  для любого  $\eta > 0$  существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что  $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$  при  $|x| < \varepsilon_0$ , откуда при всех  $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\left| \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x| < \varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq$$

$$\frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x| < \varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x| < \varepsilon} dx = \eta,$$

что и утверждалось. Таким образом, пределом рассмотренной последовательности является функционал, сопоставляющий каждой непрерывной функции  $\varphi(x)$  число  $\varphi(0)$  – значение ее в точке  $x = 0$ . Этот функционал и принимается за определение плотности  $\delta(x)$  – дельта-функции Дирака.

Итак,  $f_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в том смысле, что для любой непрерывной функции  $\varphi(x)$  справедливо соотношение

$$\int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \rightarrow (\delta, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где  $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$  – функционал  $\delta$  на функции  $\varphi$ .

Если в точке  $x = 0$  сосредоточена масса  $m$ , то соответствующая плотность –  $m\delta(x)$ , если в точке  $x_0$ , то –  $m\delta(x-x_0)$ . Если в разных точках сосредоточены массы  $m_k$ , то плотность равна

$$\sum_{k=1}^N m_k \delta(x - x_k).$$

## 4.2. Пространство основных функций

Обобщенные функции определяются посредством непрерывных функций как линейный непрерывный функционал на этих функциях. Произвольная обобщенная функция определяется как линейный непрерывный функционал на пространстве достаточно “хороших” (основных) функций.

Отнесем ко множеству основных функций  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R^n)$  все финитные бесконечно дифференцируемые в  $R^n$  функции. Сходимость в  $\mathcal{D}$  определим следующим образом: последовательность функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  из  $\mathcal{D}$  сходится к функции  $\varphi$ , если:

1. Существует такое число  $R > 0$ , что  $\text{supp} \varphi_k \subset U_R$ ;
2. При каждом  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$   $D^\alpha \varphi_k(x) \Rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $x \in R^n$ .

В этом случае  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  при  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}(U_R)$  — открытый шар радиуса  $R$  с центром в точке  $0$ ).

Операция дифференцирования  $D^\beta \varphi(x)$  непрерывна из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$ . Аналогично операции неособенной линейной замены переменных  $\varphi(Ax+b)$  и умножения на функцию  $a \in C^\infty(R^n)$  непрерывны из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$ .

## 4.3. Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'$

Обобщенной функцией в смысле Соболева-Шварца называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций  $\mathcal{D} - (f, \varphi)$ , где  $\varphi$  — основная функция. Формальная запись —  $f(x)$ , где  $x$  — аргумент основных функций. Обобщенные функции обладают следующими свойствами:

1. Обобщенная функция  $f$  есть **функционал** на  $\mathcal{D}$ , то есть каждой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  сопоставляется число  $(f, \varphi)$ ;
2. Обобщенная функция есть **линейный** функционал на  $\mathcal{D}$  — если  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\psi \in \mathcal{D}$  и  $\lambda, \mu$  — комплексные числа, то  $(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi)$ .
3. Обобщенная функция есть **непрерывный** функционал на  $\mathcal{D}$ : если  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}$ , то  $(f, \varphi_k) \rightarrow (f, \varphi)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Если линейную комбинацию  $\lambda f + \mu g$  обобщенных функций определить как функционал

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

то  $\mathcal{D}'$  — линейное и непрерывное множество.

Последовательность обобщенных функций  $f_1, f_2, \dots$  из  $\mathcal{D}'$  сходится к обобщенной функции  $f \in \mathcal{D}'$ , если для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  выполняется  $(f_k, \varphi) \rightarrow (f, \varphi)$  при  $k \rightarrow \infty$ , то есть  $f_k \rightarrow f$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{D}'$ . Этот вид сходимости, введенный нами ранее, называется слабой сходимостью. Линейное множество

$D'$  с введенной в нем сходимостью называется пространством обобщенных функций  $D'$ . Пространство  $D'$  - полное.

#### 4.4. Носитель обобщенной функции

Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках, но, тем не менее, можно говорить об обращении в нуль в области. Обобщенная функция  $f$  обращается в нуль в области  $G$ , если  $(f, \varphi) = 0$  для всех функций  $\varphi \in D(G)$ . Из этого определения следует, что обобщенные функции  $f$  и  $g$  называются равными в области  $G$ , если  $f - g = 0$  при  $x \in G$ . Также эти функции равны, если для всех функций  $\varphi \in D$  выполняется  $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ .

Обобщенная функция принадлежит классу  $C^p(G)$ , если в области  $G$  она совпадает с функцией  $f_0(x)$  класса  $C^p(G)$ , т.е. для любой функции  $\varphi \in D(G)$

$$(f, \varphi) = \int f_0(x)\varphi(x)dx.$$

**Лемма.** Пусть пространство  $R^n$  покрыто счетной системой окрестностей  $u(x_k, r_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  и в каждой окрестности обобщенная функция  $f$  совпадает с обобщенной функцией  $f_k$ . Тогда функция  $f$  однозначно определяется своими локальными элементами  $f_k$ .

Как следствие приведенной леммы можно заключить: для того чтобы обобщенная функция обращалась в нуль в области, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль в окрестности каждой точки этой области.

Носителем обобщенной функции называется множество таких точек, что ни в какой окрестности каждой из них обобщенная функция не обращается в нуль. Носитель обобщенной функции – замкнутое множество, если оно ограничено, то обобщенная функция называется финитной. В любой области, лежащей вне носителя обобщенной функции, последняя обращается в нуль:

$$(f, \varphi) = 0, \varphi \in D, \text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \emptyset.$$

#### 4.5. Регулярные обобщенные функции

Простейшим примером обобщенной функции является функционал, порождаемый локально интегрируемой в  $R^n$  функцией  $f(x)$

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D. \quad (4.2)$$

Из линейности интеграла следует линейность функционала; из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла следует его непрерывность в

Д. Таким образом, указанный функционал определяет обобщенную функцию из  $\mathcal{D}'$ .

Обобщенные функции, определяемые локально интегрируемыми в  $R^n$  функциями по формуле (4.2), называются **регулярными** обобщенными функциями. Остальные обобщенные функции называются **сингулярными**.

**Лемма** (дю Буа-Реймонда). Для того чтобы локально интегрируемая в  $G$  функция обращалась в нуль в области  $G$  в смысле обобщенных функций, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль почти везде в  $G$ .

**Следствие.** Всякая регулярная обобщенная функция определяется единственной локально интегрируемой в  $R^n$  функцией, т.е. в этом случае присутствует взаимно однозначное соответствие. В этом смысле “обычные” локально интегрируемые в  $R^n$  функции являются регулярными обобщенными функциями.

#### 4.6. Сингулярные обобщенные функции

Простейшим примером сингулярных функций является  $\delta$ -функция Дирака:  $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ ,  $\delta(x) = 0$  при  $x \neq 0$ ,  $\text{supp} \delta = [0]$ ,  $\delta \in \mathcal{D}'$ .

Обобщением  $\delta$ -функции является **простой слой на поверхности**. Пусть  $S$  – кусочно-гладкая поверхность и  $\mu(x)$  – кусочно-непрерывная функция, заданная на  $S$ . Введем обобщенную функцию  $\mu\delta_S$ , для которой

$$(\mu\delta_S, \varphi) = \int_S \mu(x)\varphi(x)dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очевидно  $\mu\delta_S(x) \in \mathcal{D}'$ ;  $\mu\delta_S(x) = 0$  при  $x \notin S$ , так, что  $\text{supp} \mu\delta_S \in S$ . Обобщенная функция  $\mu\delta_S$  называется **простым слоем** на поверхности  $S$  с плотностью  $\mu$ .

#### 4.7. Линейная замена переменных в обобщенных функциях

Пусть  $f(x)$  – локально интегрируемая в  $R^n$  функция и  $x = Ay + b$ ,  $\det A \neq 0$ , – неособенное линейное преобразование пространства  $R^n$  на себя. Тогда для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  справедливо

$$\begin{aligned} (f(Ay + b), \varphi) &= \int f(Ay + b)\varphi(y)dy = \frac{1}{|\det A|} \int f(x)\varphi[A^{-1}(x - b)]dx = \\ &= \frac{1}{|\det A|} (f, \varphi[A^{-1}(x - b)]) . \end{aligned}$$

Это равенство и примем за определение линейной замены переменных для любой обобщенной функции  $f(x) \in \mathcal{D}'$

$$(f(Ay + b), \varphi) = (f, \frac{\varphi[A^{-1}(x - b)]}{|\det A|}), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Так как операция  $\varphi[A^{-1}(x-b)]$  линейна и непрерывна из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$ , то функционал  $f(Ay+b)$  принадлежит  $\mathcal{D}'$ .

Обобщенная функция  $f(x+b)$  называется сдвигом обобщенной функции  $f(x)$  на вектор  $b$

$$(\delta(x - x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x + x_0)) = \varphi(x).$$

#### 4.8. Умножение обобщенных функций

Пусть  $f(x)$  – локально интегрируемая в  $R^n$  функция и  $a(x) \in C^\infty(R^n)$ , тогда для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}$  справедливо

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Так как операция умножения линейна и непрерывна из  $\mathcal{D}$  в  $\mathcal{D}$ , функционал  $af$  принадлежит  $\mathcal{D}'$ . Если  $f \in \mathcal{D}'$ , то справедливо равенство  $f = \eta f$ , где  $\eta$  – любая функция класса  $C^\infty(R^n)$ , равная 1 в окрестности носителя функции  $f$ .

Нельзя ли определить произведение любых обобщенных функций так, чтобы это произведение опять было обобщенной функцией? Для локально интегрируемых функций их произведение **не обязано быть таковым**. Подобное положение имеет место и для обобщенных функций. Показано, что произведение обобщенных функций, которое было бы ассоциативно и коммутативно, определить нельзя.

Чтобы определить произведение обобщенных функций  $f$  и  $g$ , нужно, чтобы “нерегулярность” одной из них “компенсировалась” регулярностью другой в окрестности произвольной точки.

#### 4.9. Дифференцирование обобщенных функций

При надлежащем обобщении понятия производной любая обобщенная функция оказывается бесконечно дифференцируемой, сходящиеся ряды из обобщенных функций можно почленно дифференцировать бесконечное число раз.

Пусть  $f \in C^p(R^n)$ . Тогда при всех  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq p$  и  $\varphi \in \mathcal{D}$  справедлива формула интегрирования по частям

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi).$$

Это равенство и примем за определение производной  $D^\alpha f$  обобщенной функции  $f \in \mathcal{D}'$

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in D.$$

Функционал  $D^\alpha f$  линеен и непрерывен, поэтому, если  $f \in D'$ , то и сам функционал также принадлежит  $D'$ .

Если обобщенная функция  $f \in C^p(G)$ , то

$$D^\alpha f = \{D^\alpha f(x)\}, \quad x \in G, \quad |\alpha| \leq p,$$

где  $\{D^\alpha f(x)\}$  – обозначение классической производной.

### **Свойства обобщенных производных**

1. Любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема

$$f \in D' \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in D' \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \in D' \text{ и т.д.};$$

2. Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования

$$D^{\alpha+\beta} f = D^\alpha (D^\beta f) = D^\beta (D^\alpha f);$$

3. Если  $f \in D'$  и  $a \in C^\infty(R^n)$ , то справедлива формула Лейбница

$$\frac{\partial (af)}{\partial x_i} = \frac{\partial a}{\partial x_i} f + a \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

4. Если обобщенная функция  $f = 0$ ,  $x \in G$ , то и  $D^\alpha f = 0$ ,  $x \in G$ , так что  $\text{supp } D^\alpha f \subset \text{supp } f$ ;

5. Операция дифференцирования непрерывна из  $D'$  в  $D'$ , т.е. если  $f_k \rightarrow f$  при  $k \rightarrow \infty$  в  $D'$ , то  $D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f$  при  $k \rightarrow \infty$  в  $D'$ ;

6. Если ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S(x)$ , составленный из локально интегрируемых

функций  $u_k(x)$ , сходится равномерно на каждом компакте, то его можно почленно дифференцировать любое число раз и полученные ряды будут сходиться в  $D'$ .

### **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ**

1. Определите пространство основных функций.
2. Определите пространство обобщенных функций.
3. Дайте определение понятия слабой сходимости.
4. Что называется носителем обобщенной функции?
5. Чем отличаются регулярные и сингулярные обобщенные функции?
6. Какие операции и с какими ограничениями возможны с обобщенными функциями?

7. В чем особенность определения произведения обобщенных функций?
8. Перечислите свойства производных от обобщенных функций.

## 5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интегральными уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестную функцию под знаком интеграла. Многие задачи математической физики сводятся к линейным интегральным уравнениям вида

$$\int_G K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad (5.1)$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y)\varphi(y)dy + f(x) \quad (5.2)$$

относительно неизвестной функции  $\varphi(x)$  в области  $G \subset R^n$ . Уравнения (5.1) и (5.2) называются интегральными уравнениями Фредгольма 1-го и 2-го рода соответственно. Известные функции  $K(x, y)$  и  $f(x)$  называются ядром и свободным членом интегрального уравнения;  $\lambda$  - комплексный параметр.

Будем рассматривать уравнения только 2-го рода. При  $f = 0$  уравнение (5.2)

$$\varphi(x) = \lambda \int_G K(x, y)\varphi(y)dy \quad (5.3)$$

называется однородным уравнением Фредгольма 2-го рода, соответствующим уравнению (5.2). Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x, y)\varphi(y)dy + g(x), \quad (5.2^*)$$

$$\varphi(x) = \bar{\lambda} \int_G K^*(x, y)\varphi(y)dy, \quad (5.3^*)$$

где  $K^*(x, y) = \bar{K}(y, x)$ , называются **союзными** (сопряженными) к уравнениям (5.2) и (5.3) соответственно. Ядро  $K^*(x, y)$  называется **эрмитово сопряженным** к ядру  $K(x, y)$ . Сокращенно в операторной форме уравнения (5.2) и (5.3) со своими союзными выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= \lambda K \varphi + f, & \varphi &= \lambda K \varphi, \\ &, \varphi &= \bar{\lambda} K^* \varphi + f, & \varphi &= \bar{\lambda} K^* \varphi, \end{aligned}$$

где интегральные операторы  $K$  и  $K^*$  определяются ядрами  $K(x, y)$  и  $K^*(x, y)$  соответственно

$$(K f)(x) = \int_G K(x, y)f(y)dy, \quad (K^* f)(x) = \int_G K^*(x, y)f(y)dy.$$

К интегральным операторам и уравнениям применимы все определения и сведения, изложенные во 2-м разделе. Комплексные значения  $\lambda$ , при которых однородное интегральное уравнение (5.3) имеет ненулевые решения из  $L^2(G)$ , называются **характеристическими числами** ядра  $K(x,y)$ , а соответствующие решения – **собственными функциями** этого ядра, соответствующими этим характеристическим числам.

### 5.1.Метод последовательных приближений

#### 5.1.1. Интегральные уравнения с непрерывным ядром

Предположим, область  $G$  ограничена в  $R^n$  и ядро  $K(x,y)$  непрерывно в  $\bar{G} \times \bar{G}$ . Напомним,

$$\|Kf\|_C \leq M\sqrt{V}\|f\|, f \in L^2(G); \|Kf\|_C \leq MV\|f\|_C, f \in C(\bar{G});$$

$$\|Kf\| \leq MV\|f\|, f \in L^2(G),$$

где  $M = \max_{x \in \bar{G}, y \in \bar{G}} |K(x,y)|$ ,  $V = \int_G dy$ .

Пусть  $f \in L^2(G)$ , тогда  $f$  – абсолютно интегрируемая функция на  $G$  и, поскольку ядро  $K(x,y)$  непрерывно в  $\bar{G} \times \bar{G}$ , функция  $(Kf)(x)$  непрерывна на  $\bar{G}$ . Поэтому оператор  $K$  переводит  $L^2(G)$  в  $C(\bar{G})$  и в силу неравенства Коши-Буняковского ограничен

$$\begin{aligned} \|Kf\|_C &= \max_{x \in \bar{G}} |(Kf)(x)| = \max_{x \in \bar{G}} \left| \int_G K(x,y)f(y)dy \right| \leq \\ &\leq \max_{x \in \bar{G}} \sqrt{\int_G |K(x,y)|^2 dy} \sqrt{\int_G |f(y)|^2 dy} \leq M\sqrt{V}\|f\|. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются и другие неравенства леммы.

Найдем решение уравнения (5.2) методом последовательных приближений, положив  $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$ ,

$$\varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G K(x,y)\varphi^{(p-1)}(y)dy + f(x) = \lambda K\varphi^{(p-1)} + f, \quad p = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Докажем, что

$$\varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (5.5)$$

где  $K^k$  – степени оператора  $K$ .

При  $p = 0$  формула (5.5) верна. Предполагая формулу верной при  $p$  и заменяя в рекуррентной последовательности (5.4)  $p$  на  $p+1$ , получим соотношение (5.5) для  $p+1$ :

$$\varphi^{(p+1)} = \lambda K \varphi^{(p)} + f = \lambda K \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f + f = f + \sum_{k=0}^p \lambda^{k+1} K^{k+1} f = \sum_{k=0}^{p+1} \lambda^k K^k f.$$

Что и требовалось доказать. Функции  $(K^p f)(x)$ ,  $p = 0, 1, \dots$  называются **итерациями** функции  $f$ . По доказанной лемме итерации  $f$  непрерывны в  $\bar{G}$  и в силу доказанных неравенств удовлетворяют соотношению

$$\|K^p f\|_C = \|K(K^{p-1} f)\|_C \leq MV \|K^{p-1} f\|_C \leq (MV)^2 \|K^{p-2} f\|_C \leq \dots \leq (MV)^p \|f\|_C,$$

Таким образом,  $\|K^p f\|_C \leq (MV)^p \|f\|_C$ ,  $p = 0, 1, \dots$ . Из этой оценки следует, что ряд Неймана

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad x \in \bar{G} \quad (5.6)$$

мажорируется числовым рядом

$$\|f\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k (MV)^k \leq \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda|MV},$$

сходящимся в круге  $|\lambda| < 1/MV$ . Следовательно, при этих значениях  $\lambda$  ряд (5.6) сходится равномерно по  $x$ , определяя непрерывную в  $\bar{G}$  функцию  $\varphi(x)$ . Поэтому последовательные приближения  $\varphi^{(p)}(x)$  при  $p \rightarrow \infty$  равномерно стремятся к  $\varphi(x)$

$$\varphi^{(p)}(x) \underset{x \in \bar{G}}{\Rightarrow} \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad p \rightarrow \infty.$$

При этом справедлива оценка

$$\|\varphi\|_C \leq \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda|MV}. \quad (5.7)$$

Функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению (5.2):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G K(x, y) \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^{(p-1)}(y) dy + f(x) = \\ &= \lambda \int_G K(x, y) \varphi(y) dy + f(x). \end{aligned}$$

Решение уравнения (5.2) в классе  $L^2(G)$  единственно при  $|\lambda| < 1/MV$ . Для доказательства этого достаточно установить, что однородное уравнение (5.3) имеет только нулевое решение в этом классе. Действительно, если функция  $\varphi_0 \in L^2(G)$  является решением уравнения (5.3), то по лемме  $\varphi_0 \in C(\bar{G})$  и  $\|\varphi_0\|_C \leq |\lambda|MV \|\varphi_0\|_C$ , откуда, учитывая  $|\lambda|MV < 1$ , следует

$\|\varphi_0\|_C = 0$ , т.е.  $\varphi_0(x) = 0$ , что и требовалось доказать. Подвести итог можно следующим утверждением.

**Теорема.** Всякое интегральное уравнение Фредгольма (5.2) с непрерывным ядром  $K(x,y)$  при  $|\lambda| < 1/MV$  имеет единственное решение  $\varphi$  в классе  $C(\bar{G})$  для любого свободного члена  $f$ . Это решение представляется в виде регулярно сходящегося в  $\bar{G}$  ряда Неймана (5.6) и удовлетворяет оценке (5.7). Иначе в круге  $|\lambda| < 1/MV$  существует и ограничен обратный оператор  $(I - \lambda K)^{-1}$ .

Изложенный метод можно использовать для решения уравнения (5.2) при достаточно малых значениях  $|\lambda|$ .

### 5.1.2. Повторные ядра. Резольвента

Убедимся в справедливости равенства

$$(Kf, g) = (f, K^*g), \quad f, g \in L^2(G).$$

В силу принадлежности функций  $f$  и  $g$  пространству  $L^2(G)$  функции  $Kf$  и  $K^*g$  по ранее доказанной лемме также принадлежат пространству  $L^2(G)$ , поэтому

$$\begin{aligned} (Kf, g) &= \int_G Kf \bar{g} dx = \int_G \left[ \int_G K(x,y)f(y)dy \right] \bar{g}(x) dx = \\ &= \int_G f(y) \left[ \int_G K(x,y)\bar{g}(x)dx \right] dy = \int_G \overline{fK^*g} dy = (f, K^*g). \end{aligned}$$

**Лемма.** Если  $K_i, i = 1, 2, \dots$  - интегральные операторы с непрерывными ядрами  $K_i(x,y)$  соответственно, то оператор  $K_3 = K_2K_1$  - интегральный с непрерывным ядром

$$K_3(x,y) = \int_G K_2(x,y')K_1(y',y)dy'.$$

При этом справедливо  $K_3^* = (K_2K_1)^* = K_1^*K_2^*$ .

Из леммы следует, что операторы  $K^p = K(K^{p-1}), p = 2, 3, \dots$  - интегральные и их ядра  $K_p(x,y)$  непрерывны и удовлетворяют рекуррентным соотношениям при  $K_1(x,y) = K(x,y)$

$$K_p(x,y) = \int_G K(x,y')K_{p-1}(y',y)dy' = \int_G K_{p-1}(x,y')K(y',y)dy'. \quad (5.8)$$

Ядра  $K_p(x,y)$  называются **повторными ядрами** ядра  $K(x,y)$ . Эти ядра удовлетворяют неравенству

$$|K_p(x,y)| \leq M^p V^{p-1}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

Из оценки (5.9) следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_{k+1}(x, y), \quad x \in \bar{G}, \quad y \in \bar{G} \quad (5.10)$$

мажорируется числовым рядом  $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k M^{k+1} V^k$ , сходящимся в круге  $|\lambda| < 1/MV$ . Поэтому ряд (5.10) сходится равномерно при  $x \in \bar{G}, y \in \bar{G}, |\lambda| \leq 1/MV - \varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Следовательно, его сумма непрерывна в области  $\bar{G} \times \bar{G} \times U_{1/MV}$  и аналитична по  $\lambda$ . Обозначим

$$R(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_{k+1}(x, y).$$

Функция  $R(x, y; \lambda)$  называется *резольвентой* ядра  $K(x, y)$ .

**Теорема.** Решение  $\varphi$  интегрального уравнения (5.2) с непрерывным ядром  $K(x, y)$  единственно в классе  $C(\bar{G})$  при условии  $|\lambda| \leq 1/MV$ , для любого свободного члена  $f \in C(\bar{G})$  оно представляется через резольвенту ядра по формуле

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G R(x, y; \lambda) f(y) dy. \quad (5.11)$$

Таким образом, справедливо операторное равенство

$$(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R, \quad |\lambda| \leq 1/MV,$$

где  $R$  – интегральный оператор с ядром  $R(x, y; \lambda)$ . Также справедливо

$$(K^*)^p(x, y) = K_p^*(x, y), \quad p = 1, 2, \dots, \quad R_*(x, y; \lambda) = \bar{R}(y, x; \bar{\lambda}), \quad |\lambda| < 1/MV,$$

где  $R_*(x, y; \lambda)$  – резольвента эрмитово сопряженного ядра  $K^*(x, y)$ . Из второго равенства несложно получить

$$R_*(x, y; \bar{\lambda}) = \bar{R}(y, x; \lambda) = R^*(x, y; \lambda) \rightarrow (I - \bar{\lambda} K^*)^{-1} = I + \bar{\lambda} R^*.$$

### 5.1.3. Интегральные уравнения Вольтерра

Пусть  $n = 1$ , тогда область  $G$  – интервал  $(0, a)$  и ядро  $K(x, y)$  обращается в нуль в треугольнике  $0 < x < y < a$ . Такое ядро называется ядром Вольтерра. Уравнения (5.1) и (5.2) принимают вид

$$\int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x), \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (5.12)$$

и называются интегральными уравнениями Вольтерра 1-го и 2-го рода соответственно. Интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода дифференцированием сводятся к уравнениям 2-го рода

$$K(x, x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \varphi(y) dy = f'(x),$$

поэтому рассматривать будем только уравнения 2-го рода.

Предположим, что в уравнении (5.12)  $f \in C([0, a])$  и ядро  $K(x, y)$  непрерывно в замкнутом треугольнике  $0 \leq y \leq x \leq a$ , тогда  $|K(x, y)| \leq M$  и оператор  $(Kf)(x) = \int_0^x K(x, y)f(y)dy$  переводит  $C([0, a])$  в  $C([0, a])$ .

Определим последовательные приближения  $\varphi^{(p)}$  по формулам

$$\varphi^{(0)} = f, \quad \varphi^{(p)} = \sum_{k=0}^p \lambda^k K^k f = \lambda K \varphi^{(p-1)} + f, \quad p = 0, 1, \dots \quad (5.13)$$

Итерации  $K^p f \in C([0, a])$  и удовлетворяют оценке (несложно доказать методом индукции)

$$|(K^p f)(x)| \leq \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \quad x \in [0, a], \quad p = 0, 1, \dots \quad (5.14)$$

Из оценки (5.14) вытекает, что ряд Неймана (5.6) мажорируется на  $[0, a]$  сходящимся числовым рядом

$$\|f\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^k \frac{(Ma)^k}{k!} = \|f\|_C e^{|\lambda|Ma}. \quad (5.15)$$

и потому сходится равномерно по  $x$  на  $[0, a]$  при любом  $\lambda$ , определяя непрерывную функцию  $\varphi(x)$ . Таким образом, приближения  $\varphi^{(p)}$  при  $p \rightarrow \infty$  равномерно стремятся к  $\varphi$

$$\varphi^{(p)}(x) \underset{x \in [0, a]}{\Rightarrow} \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x), \quad p \rightarrow \infty. \quad (5.16)$$

При этом с учетом (5.15) справедлива оценка

$$\|\varphi\|_C \leq \|f\|_C e^{|\lambda|Ma} \quad (5.17)$$

Переходя к пределу при  $p \rightarrow \infty$  в (5.13) и пользуясь равномерной сходимостью  $\varphi^{(p)}$  к  $\varphi$ , получаем, что соответствующее однородное уравнение имеет в этом классе только нулевое решение. Результаты сформулируем в виде теоремы.

**Теорема.** Всякое интегральное уравнение Вольтерра (5.12) с непрерывным ядром  $K(x, y)$  при любом  $\lambda$  имеет единственное решение  $\varphi$  в классе  $C([0, a])$  для любого свободного члена  $f \in C([0, a])$ . Это решение представ-

ляется равномерно сходящимся рядом Неймана (5.16) и удовлетворяет оценке (5.17).

В качестве следствия можно отметить, что непрерывное ядро Вольterra не имеет характеристических чисел.

#### 5.1.4. Интегральные уравнения с полярным ядром

$$\text{Ядро } K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < n,$$

где  $H(x, y) \in C(\overline{G} \times \overline{G})$ , называется **полярным ядром**; если  $\alpha < n/2$ , то  $K(x, y)$  называется **слабо полярным ядром**.

Для того, чтобы ядро было полярным, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным при  $x \neq y$  и удовлетворяло оценке

$$|K(x, y)| \leq \frac{A}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < n, \quad x, y \in G.$$

Необходимость очевидна, а достаточность следует из представления

$$K(x, y) = \frac{K(x, y)|x - y|^{\alpha+\varepsilon}}{|x - y|^{\alpha+\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < n - \alpha,$$

где функция  $H(x, y) = K(x, y)|x - y|^{\alpha+\varepsilon}$  непрерывна на  $\overline{G} \times \overline{G}$ .

**Лемма 1.** Интегральный оператор  $K$  с полярным ядром  $K(x, y)$  переводит  $C(\overline{G})$  в  $C(\overline{G})$ ,  $L^2(G)$  в  $L^2(G)$  и ограничен

$$\|Kf\|_C \leq N \|f\|_C, \quad f \in C(\overline{G}),$$

$$\|Kf\| \leq \sqrt{NN^*} \|f\|, \quad f \in L^2(G),$$

где  $N = \max_{x \in \overline{G}} \int_G |K(x, y)| dy$ ,  $N^* = \max_{x \in \overline{G}} \int_G |K^*(x, y)| dy$ .

Пользуясь леммой, заключаем, что теорема п. 5.1.1 остается справедливой и для интегрального уравнения (5.2) с полярным ядром  $K(x, y)$  с заменой  $MV$  на  $N$ : если  $\lambda < 1/N$ , то в классе  $C(\overline{G})$  существует единственное решение для любой  $f \in C(\overline{G})$  и это решение представляется рядом Неймана, регулярно сходящимся в  $\overline{G}$ .

**Лемма 2.** Если  $K_i(x, y)$  – полярные ядра

$$|K_i(x, y)| \leq \frac{A_i}{|x - y|^{\alpha_i}}, \quad \alpha_i < n, \quad i = 1, 2,$$

то ядро  $K_3(x, y) = \int_G K_2(x, y') K_1(y, y') dy'$  – также полярное, причем

$$|K_3(x, y)| \leq \frac{A_3}{|x - y|^{\alpha_1 + \alpha_2 - n}}, \text{ если } \alpha_1 + \alpha_2 > n,$$

$$|K_3(x, y)| < A_4 |\ln|x - y|| + A_5, \text{ если } \alpha_1 + \alpha_2 = n,$$

$K_3(x, y)$  – непрерывно на  $\overline{G} \times \overline{G}$ .

Из леммы следует, что все повторные ядра полярного ядра  $K(x, y)$  – полярные и удовлетворяют оценкам

$$|K_p(x, y)| \leq \begin{cases} A_p |x - y|^{-p\alpha + (p-1)n} & \text{при } p\alpha - (p-1)n > 0; \\ A_p |\ln|x - y|| + B_p & \text{при } p\alpha - (p-1)n = 0. \end{cases}$$

Начиная с номера  $p_0 = \left[ \frac{n}{n - \alpha} \right] + 1$ , повторные ядра  $K_p(x, y)$  непрерывны [ $t$  означает целую часть числа  $t \geq 0$ ).

Отсюда, пользуясь леммой 1 и повторяя рассуждения п. 5.1.2, выводим, что резольвента полярного ядра  $K(x, y)$

$$R(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_{k+1}(x, y) = R_1(x, y; \lambda) + R_2(x, y; \lambda) \quad (5.18)$$

представляет собой сумму двух слагаемых: полярного слагаемого

$$R_1(x, y; \lambda) = \sum_{k=0}^{p_0-2} \lambda^k K_{k+1}(x, y)$$

и непрерывного слагаемого

$$R_2(x, y; \lambda) = \sum_{k=p_0-1}^{\infty} \lambda^k K_{k+1}(x, y). \quad (5.19)$$

Ряд (5.30) сходится равномерно при  $x, y \in \overline{G}$ ,  $|\lambda| < 1/N - \varepsilon$  для любого  $\varepsilon$ , определяя непрерывную функцию  $R_2(x, y; \lambda)$ , аналитическую по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < 1/N$ .

Из сказанного следует, что теорема п. 5.1.2 остается справедливой для интегрального уравнения (5.2) с полярным ядром  $K(x, y)$  при условии, что  $|\lambda| < 1/N$ . Формулы для  $(K_p^*)(x, y)$ ,  $R(x, y; \lambda)$  и  $(I - \bar{\lambda} K^*)^{-1}$  также сохраняются при  $|\lambda| < 1/N$ .

## 5.2. Теоремы Фредгольма

Рассмотрим теоремы разрешимости для интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi = \lambda K \varphi + f$$

с непрерывным ядром  $K(x, y)$  и союзного к нему уравнения

$$\phi = \bar{\lambda} K^* \phi + g.$$

### 5.2.1. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Ядро

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N f_i(x) g_i(y),$$

где  $f, g \in C(\bar{G})$ , называется **вырожденным**.

Будем считать, что системы функций  $\{f_i, 1 \leq i \leq N\}$  и  $\{g_i, 1 \leq i \leq N\}$  линейно независимы. Рассмотрим уравнение Фредгольма с вырожденным ядром

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N f_i(x) \int_G g_i(y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (5.20)$$

и союзное к нему

$$\phi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \bar{g}_i(x) \int_G \bar{f}_i(y) \phi(y) dy + g(x). \quad (5.20^*)$$

Решение этих уравнений будем искать в классе  $C(\bar{G})$ . Уравнения сводятся к системам линейных алгебраических уравнений и потому могут быть исследованы методами линейной алгебры. Перепишем уравнение (5.20) в виде

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x) + f(x), \quad (5.21)$$

где

$$c_i = \int_G \varphi(y) g_i(y) dy = (\varphi, \bar{g}_i) \quad (5.22)$$

неизвестные числа. Умножая (5.21) на  $g_k(x)$ , интегрируя по области  $G$  и пользуясь (5.22), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения чисел  $c_k$ :

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^N c_i \int_G g_k(x) f_i(x) dx + \int_G g_k(x) f(x) dx. \quad (5.23)$$

Обозначим

$$\alpha_{ki} = \int_G g_k(x) f_i(x) dx, \quad a_k = \int_G f(x) g_k(x) dx = (f, \bar{g}_k) \quad (5.24)$$

и перепишем систему (5.23):

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} c_i + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.25)$$

Введем матрицу  $A$  и векторы  $c$  и  $a$ :

$$A = (\alpha_{ki}), \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_N), \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_N).$$

Представим систему (5.38) в матричной форме

$$c = \lambda A c + a. \quad (5.26)$$

Интегральное уравнение (5.20) и алгебраическое уравнение (5.26) эквивалентны. Обозначим

$$D(\lambda) = (I - \lambda A) \quad (5.27)$$

определитель системы (5.26),  $M_{ki}(\lambda)$  – алгебраическое дополнение матрицы  $I - \lambda A$ ,  $D(\lambda)$  и  $M_{ki}(\lambda)$  – полиномы по  $\lambda$ , причем  $D(\lambda) \neq 0$ , так как  $D(0) = \det I = 1$ .

Пусть комплексное число  $\lambda$  таково, что  $D(\lambda) \neq 0$ . По теореме Крамера (если определитель системы не равен нулю, то она имеет единственное решение) решение системы (5.26) единственно и выражается формулой

$$c_k = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^N M_{ik}(\lambda) a_i, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.28)$$

Подставляя (5.28) в (5.21) и учитывая (5.24), получим решение уравнения (5.20) при  $D(\lambda) \neq 0$  в виде

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\lambda) f_i(x) \int_G g_k(y) f(y) dy + f(x).$$

С другой стороны, по теореме п. 5.1.2 при достаточно малых  $\lambda$  ( $D(\lambda) \neq 0$ ) это решение выражается через резольвенту по формуле (5.11). Следовательно,

$$R(x, y; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\lambda) f_i(x) g_k(y). \quad (5.29)$$

Таким образом, резольвента вырожденного ядра есть рациональная функция и, следовательно, допускает мероморфное продолжение на всю плоскость комплексного переменного  $\lambda$ .

### 5.2.2. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром

Союзное к уравнению (5.3) уравнение (5.3\*) приводится к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений

$$\phi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i \bar{g}_i(x) + g(x), \quad (5.21^*)$$

где  $d_i = (\phi, f_i)$  – неизвестные числа. Соответствующая система линейных уравнений имеет вид

$$d_k = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N \beta_{ki} d_i + b_k, \quad k = 1, 3, \dots, N, \quad (5.25^*)$$

где

$$\beta_{ki} = \int_G \bar{f}_k(x) \bar{g}_i(x) dx = \bar{\alpha}_{ik}, \quad b_k = (g, f_k). \quad (5.24^*)$$

Таким образом,

$$\mathbf{d} = \bar{\lambda} \mathbf{A}^* \mathbf{d} + \mathbf{b}, \quad (5.26^*)$$

где  $\mathbf{A}^* = (\beta_{ki}) = (\bar{\alpha}_{ik}) = \bar{A}'$ ,  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_N)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ .

Известно, что определители и ранги прямой и транспонированной матриц совпадают. Поэтому в силу (5.40)

$$\det(I - \bar{\lambda} \mathbf{A}^*) = \det(I - \bar{\lambda} \bar{A}') = \overline{\det(I - \lambda A')} = \overline{D(\lambda)}, \quad (5.30)$$

$$\text{rang}(I - \bar{\lambda} \mathbf{A}^*) = \text{rang}(\overline{I - \lambda A'}) = \text{rang}(I - \lambda A) = q.$$

Возможны два случая:

1.  $D(\lambda) \neq 0$ , тогда  $q = N$  и системы (5.26) и (5.26<sup>\*</sup>) однозначно разрешимы при любых  $a$  и  $b$ . Следовательно, уравнения (5.20) и (5.20<sup>\*</sup>) также однозначно разрешимы при любых  $f$  и  $g$  по формулам (5.21) и (5.21<sup>\*</sup>);
2.  $D(\lambda) = 0$ , тогда  $q < N$  и в силу (5.30) системы (5.26) и (5.26<sup>\*</sup>) имеют ровно по  $N-q$  линейно независимых решений. Уравнения (5.20) и (5.20<sup>\*</sup>) будут также иметь ровно по  $N-q$  линейно независимых решений по формулам (5.21) и (5.21<sup>\*</sup>).

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^N c_i^{(s)} f_i(x), \quad \phi_s(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^N d_i^{(s)} \bar{g}_i(x), \quad s = 1, 2, \dots, N - q. \quad (5.31)$$

Для разрешимости системы (5.26) при  $D(\lambda) = 0$  необходимо и достаточно выполнения следующих условий ортогональности:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{d}^{(s)}) = \sum_{i=1}^N a_i \bar{d}_i^{(s)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N - q.$$

Эти условия эквивалентны

$$(f, \phi_s) = \int_G f(x) \bar{\phi}_s(x) dx = 0,$$

поскольку в силу (5.31) и (5.24)

$$\int_G f(x) \bar{\phi}_s(x) dx = \lambda \sum_{i=1}^N \int_G f(x) g_i(x) dx \bar{d}_i^{(s)} = \lambda \sum_{i=1}^N a_i \bar{d}_i^{(s)} = \lambda (\mathbf{a}, \mathbf{d}^{(s)}).$$

Нами, таким образом, доказаны следующие теоремы Фредгольма:

**Теорема 1.** Если  $D(\lambda) \neq 0$ , то уравнение (5.20) и союзное к нему (5.20<sup>\*</sup>) однозначно разрешимы при любых свободных членах  $f$  и  $g$ .

**Теорема 2.** Если  $D(\lambda) = 0$ , то однородные уравнения (5.20) и (5.20\*) имеют одинаковое число линейно независимых решений, равное  $N-q$ , где  $q$  – ранг матрицы  $I-\lambda A$ .

**Теорема 3.** Если  $D(\lambda) = 0$ , то для разрешимости уравнения (5.20) необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был ортогонален ко всем решениям  $\phi_s, s=1,2,\dots, N-q$  однородного союзного уравнения (5.20\*).

Из теорем 1 и 2 следует, что характеристические числа вырожденного ядра совпадают с корнями полинома  $D(\lambda)$  и, следовательно, их конечное число. Из формулы (5.29) для резольвенты вытекает, что характеристические числа вырожденного ядра совпадают с полюсами его резольвенты.

### 5.2.3. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывным ядром

Воспользуемся ранее полученными результатами, представив произвольное непрерывное ядро в виде суммы вырожденного ядра и достаточно малого непрерывного ядра.

Ядро  $K(x,y)$ , непрерывное в  $G \times G$ , по теореме Вейерштрасса (п. 5.1.3) можно приблизить сколь угодно точно полиномами, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой полином

$$P(x,y) = \sum_{|\alpha+\beta| \leq N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (5.32)$$

что  $|K(x,y) - P(x,y)| < \varepsilon$ ,  $x \in \bar{G}$ ,  $y \in \bar{G}$  и ядро  $K(x,y)$  представляется в виде

$$K(x,y) = P(x,y) + H(x,y),$$

где  $P(x,y)$  – вырожденное ядро и  $H(x,y)$  – малое непрерывное ядро,  $|H(x,y)| < \varepsilon$ . Это приводит к следующему уравнению Фредгольма:

$$\phi = \lambda P\phi + \lambda H\phi + f, \quad (5.33)$$

где  $P$  и  $H$  – интегральные операторы с ядрами  $P(x,y)$  и  $H(x,y)$ , причем  $P+H = K$ .

Введем новую функцию

$$\Phi = \phi - \lambda H\phi,$$

через которую взаимно однозначно выражается функция  $\phi$  (теорема п. 5.1.2):

$$\phi = (I - \lambda H)^{-1} \Phi = (I - \lambda R) \Phi,$$

где  $R$  – интегральный оператор с ядром  $R(x,y;\lambda)$  – резольвентой ядра  $H(x,y)$ . Тогда уравнение (5.33) принимает следующий вид:

$$\Phi = \lambda P(I + \lambda R)\Phi + f = \lambda T\Phi + f, \quad (5.34)$$

где  $T = P + \lambda PR$ . Резолвента  $R(x, y; \lambda)$  непрерывна по  $(x, y; \lambda)$  в  $\bar{G} \times \bar{G} \times U_{1/\varepsilon V}$  и аналитична по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < 1/\varepsilon V$ . В этом случае оператор  $T$  – интегральный с непрерывным ядром

$$T(x, y; \lambda) = P(x, y) + \lambda \int_G P(x, y') R(y', y; \lambda) dy'.$$

Но из (5.32) вытекает, что это ядро вырожденное и аналитическое по  $\lambda$  в круге  $|\lambda| < 1/\varepsilon V$ .

С помощью аналогичных рассуждений уравнение (5.1\*) приводится к эквивалентному виду

$$\phi = \bar{\lambda} T^* \phi + Q, \quad (5.34^*)$$

где  $Q = (I + \bar{\lambda} R^*)g$ ,  $g = (I - \bar{\lambda} \eta^*) Q$ ,  $T^* = P^* + \bar{\lambda} R^* P^* = (P + \lambda PR)^*$ . Но для уравнений (5.34) и (5.34\*) (ядро  $T(x, y; \lambda)$  – вырождено) справедливы теоремы Фредгольма 1-3 и определитель  $D(\lambda)$  – аналитическая функция в круге  $|\lambda| < 1/\varepsilon V$ . Отсюда, пользуясь эквивалентностью (5.34), (5.34\*) и (5.1), (5.1\*), получаем совокупность теорем Фредгольма для интегральных уравнений с непрерывным ядром, называемую альтернативой Фредгольма.

**Теорема 1.** Если интегральное уравнение (5.1) с непрерывным ядром разрешимо в  $C(\bar{G})$  при любом свободном члене  $f \in C(\bar{G})$ , то и союзное к нему уравнение (5.1\*) разрешимо в  $C(\bar{G})$  при любом свободном члене  $g \in C(\bar{G})$ , причем решения эти единственны.

**Теорема 2.** Если интегральное уравнение (5.1) разрешимо в  $C(\bar{G})$  не при любом свободном члене  $f$ , то однородные уравнения (5.1) и (5.1\*) имеют одинаковое и притом конечное число линейно независимых решений.

**Теорема 3.** Для разрешимости уравнения (5.1) необходимо и достаточно, чтобы свободный член  $f$  был ортогонален ко всем решениям однородного союзного уравнения (5.2\*).

**Теорема 4.** В каждом круге  $|\lambda| \leq R$  может находиться лишь конечное число характеристических чисел ядра  $K(x, y)$ .

#### 5.2.4. Следствия из теорем Фредгольма

Множество характеристических чисел непрерывного ядра не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек, множество может быть и пустым – ядра Вольтерра.

Кратность каждого характеристического числа конечна. Поэтому можно пронумеровать все характеристические числа и соответствующие собственные функции ядра  $K(x, y)$

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots, \quad \varphi_k = \lambda_k K \varphi_k, \quad \phi_k = \bar{\lambda}_k K^* \phi_k,$$

где  $\bar{\lambda}_k$  и  $\phi_k$  – характеристические числа и собственные функции союзного уравнения.

Докажем, что если  $\lambda_k \neq \lambda_i$ , то

$$(\phi_k, \phi_i) = 0. \quad (5.35)$$

Это следует из

$$(\phi_k, \phi_i) = (\phi_k, \bar{\lambda}_i K^* \phi_i) = \lambda_i (K \phi_k, \phi_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} (\phi_k, \phi_i),$$

а так как  $\lambda_k \neq \lambda_i$ , то (5.33) верно.  $\lambda_k^p$  и  $\phi_k$  – характеристические числа и соответствующие собственные функции повторного ядра  $K_p(x, y)$

$$\phi_k = \lambda_k^p K^p \phi_k.$$

Обратно, если  $\mu$  и  $\phi$  – характеристическое число и соответствующая собственная функция повторного ядра  $K_p(x, y)$ , то по крайней мере один из корней  $\lambda_j, j = 1, 3, \dots, p$  уравнения  $\lambda^p = \mu$  является характеристическим числом искомого ядра  $K(x, y)$ .

Переформулируем альтернативу Фредгольма в терминах характеристических чисел и собственных функций:

Если  $\lambda \neq \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ , то интегральные уравнения (5.1) и (5.1\*) однозначно разрешимы при любых свободных членах.

Если  $\lambda = \lambda_k$ , то для разрешимости уравнения (5.1) необходимо и достаточно, чтобы  $(f, \phi_{k+i}) = 0, i = 0, 1, \dots, r_k - 1$ , где  $\phi_k, \phi_{k+1}, \dots, \phi_{k+r_k-1}$  – собственные функции, соответствующие характеристическому числу  $\bar{\lambda}_k$  ядра  $K^*(x, y)$  и  $r_k$  – кратность  $\lambda_k$  и  $\bar{\lambda}_k$ .

### 5.2.5. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с полярным ядром

Воспользуемся опробованным приемом и постараемся построить приближение полярного ядра вырожденным  $P(x, y)$  так, что при любом  $\varepsilon > 0$

$$\max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y) - P(x, y)| dy < \varepsilon, \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K^*(x, y) - P^*(x, y)| dy < \varepsilon.$$

Введем сначала непрерывное ядро  $L(x, y)$

$$L(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & |x - y| \geq 1/N, \\ H(x, y)N^\alpha, & |x - y| < 1/N, \end{cases}$$

для которого при достаточно большом  $N$  справедливо

$$\int_G |K(x, y) - L(x, y)| dy < \varepsilon/2, \quad x \in \bar{G}.$$

И, наконец,

$$|L(x, y) - P(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2V}, \quad x, y, \in \bar{G},$$

тогда

$$\begin{aligned} \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y) - P(x, y)| dy &\leq \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y) - L(x, y)| dy + \\ &+ \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y) - P(x, y)| dy < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2V} \int_G dy = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, для любого  $\varepsilon > 0$  полярное ядро  $K(x, y)$  представимо в виде  $K(x, y) = P(x, y) + H(x, y)$ , где  $P(x, y)$  – вырожденное ядро и  $H(x, y)$  – малое полярное ядро, удовлетворяющее оценкам

$$\max_{x \in \bar{G}} \int_G |H(x, y)| dy < \varepsilon, \quad \max_{x \in \bar{G}} \int_G |H^*(x, y)| dy < \varepsilon.$$

Пользуясь результатами подразд. 5.4 о разрешимости интегральных уравнений с малым полярным ядром, заключаем, что все теоремы Фредгольма и их следствия переносятся и на интегральные уравнения с полярным ядром.

Отметим: все собственные функции полярного ядра  $K(x, y)$ , принадлежащие  $L^2(G)$ , принадлежат  $C(\bar{G})$ :

$$\varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0, \quad \varphi_0 \in L^2(G) \rightarrow \varphi_0 = \lambda_0^p K^p \varphi_0.$$

При достаточно большом  $p$  ядро  $K_p(x, y)$  непрерывно (см. подразд. 5.4), следовательно,  $\varphi_0 = \lambda_0^p K^p \varphi_0 \in C(\bar{G})$ .

### 5.3. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром

Ядро называется эрмитовым, если оно совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром:  $K(x, y) = K^*(x, y)$ .

При вещественном  $\lambda$  уравнение (5.1) совпадает с (5.1<sup>\*</sup>), так как  $K^* = K$  и его удобно рассматривать в  $L^2(G)$ .

#### 5.3.1. Интегральные операторы с эрмитовым непрерывным ядром

Пусть  $K$  – интегральный оператор с эрмитовым непрерывным ядром  $K(x, y)$ . Этот оператор переводит  $L^2(G)$  в  $L^2(G)$  и является эрмитовым

$$(Kf, g) = (f, Kg), \quad f, g \in L^2(G).$$

Обратно, если интегральный оператор  $K$  с непрерывным ядром  $K(x, y)$  эрмитов, то это ядро – эрмитово.

Из п. 5.1.2 следует, что все повторные ядра  $K_p(x, y)$  эрмитова непрерывного ядра эрмитовы

$$K_p^*(x,y) = (K^*)_p(x,y) = K_p(x,y).$$

**Лемма.** Интегральный оператор  $K$  с непрерывным ядром  $K(x,y)$  переводит всякое ограниченное множество из  $L^2(G)$  во множество, ограниченное в  $C(\overline{G})$  и состоящее из равностепенно-непрерывных функций на  $\overline{G}$ .

**Лемма (Арчела).** Если множество  $B$  ограничено в  $C(K)$ , где  $K$  – компакт, и состоит из равностепенно-непрерывных функций на  $K$ , то из него можно выбрать сходящуюся в  $C(K)$  последовательность.

Лемма Арчела выражает свойство компактности любого ограниченного в  $C(K)$  множества, состоящего из равностепенно-непрерывных на  $K$  функций. По лемме интегральный оператор с непрерывным ядром переводит всякое ограниченное множество из  $L^2(G)$  во множество, компактное в  $C(\overline{G})$ . Всякий оператор, обладающий таким свойством, называется **вполне непрерывным** из  $L^2(G)$  в  $C(\overline{G})$ .

### 5.3.2. Интегральные уравнения с эрмитовым непрерывным ядром

Не всякое ядро имеет характеристические числа (ядро Вольтерра), однако:

**Теорема.** Всякое эрмитово непрерывное ядро  $K(x,y) \neq 0$  имеет по крайней мере одно характеристическое число и наименьшее из них по модулю удовлетворяет вариационному принципу

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L^2(G)} \frac{\|K f\|}{\|f\|}.$$

Принимая во внимание эту теорему и теоремы Фредгольма для уравнений с эрмитовым непрерывным ядром  $K(x,y) \neq 0$ , получаем следующие утверждения.

Множество характеристических чисел  $\{\lambda_k\}$  не пусто, расположено на вещественной оси, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек; каждое характеристическое число имеет конечную кратность; система собственных функций  $\{\varphi_k\}$  может быть выбрана ортонормальной,  $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki}$ .

Если  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то уравнение (5.1) однозначно разрешимо при любом свободном члене  $f \in C(\overline{G})$ . Если  $\lambda = \lambda_k$ , то для разрешимости уравнения (5.1) необходимо и достаточно, чтобы  $(f, \varphi_{k+i}) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, r_k - 1$ , где  $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+r-1}$  – собственные функции, соответствующие характеристическому числу  $\lambda_k$ , и  $r_k$  – кратность этого числа.

Все результаты, установленные для интегральных уравнений с эрмитовым непрерывным ядром, справедливы и для полярного эрмитова ядра.

#### 5.4. Теорема Гильберта-Шмидта и ее следствия

Введем последовательность эрмитовых непрерывных ядер

$$K^{(p)}(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^p \frac{\varphi_i(x)\bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i} \varphi_i, \quad p = 1, 2, \dots$$

Соответствующие интегральные операторы действуют по формуле

$$K^{(p)} f = K f - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i, \quad f \in L^2(G), \quad (5.36)$$

где  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots$  и  $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \dots$  образуют все характеристические числа и собственные функции ядра  $K^{(p)}(x, y)$ .

Действительно,

$$K^{(p)} \varphi_k = K \varphi_k - \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_k, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i = K \varphi_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k, \quad k \geq p+1,$$

так что  $\lambda_k$  и  $\varphi_k$  – характеристические числа и собственные функции ядра  $K^{(p)}(x, y)$ . Напомним, что  $\lambda_k$  и  $\varphi_k$  были введены как характеристические числа и собственные функции непрерывного ядра  $K(x, y) \neq 0$ ,  $(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki}$ .

Обратно, пусть  $\lambda_0$  и  $\varphi_0$  – характеристические числа и собственные функции ядра  $K^{(p)}(x, y)$  и в силу (5.58)

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)} \varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0 - \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i. \quad (5.37)$$

Отсюда при  $k = 1, 3, \dots, p$ ,

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_k) &= \lambda_0 (K \varphi_0, \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)(\varphi_i, \varphi_k)}{\lambda_i} = \\ &= \lambda_0 (\varphi_0, K \varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^p \frac{(\varphi_0, \varphi_i)}{\lambda_i} \delta_{ik} = \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k} (\varphi_0, \varphi_k) = 0, \end{aligned}$$

и потому в силу (5.37)  $\varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0$ . Это означает, что  $\lambda_0$  и  $\varphi_0$  – характеристические числа и собственные функции ядра  $K(x, y)$ . Поскольку  $\varphi_0$  ортогональна ко всем собственным функциям  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ , то  $\lambda_0$  совпадает с одним из характеристических чисел  $\lambda_{p+1}$  и  $\varphi_0$  можно считать равной  $\varphi_k$ .

Так как  $\|K f\| \leq \frac{1}{\lambda_i} \|f\|$ , то, учитывая (5.36), получаем:

$$\|K^{(p)} f\| = \left\| K f - \sum_{i=1}^p \frac{(f, \varphi_i)}{\lambda_i} \varphi_i \right\| \leq \frac{\|f\|}{|\lambda_{p+1}|}, \quad f \in L^2(G), \quad (5.38)$$

полагая при этом, что  $\lambda_{p+1}$  – наименьшее характеристическое число ядра  $K^{(p)}(x, y)$ .

Пусть ядро  $K(x, y)$  имеет конечное число характеристических чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ . По доказанному ядро  $K^{(N)}(x, y)$  не имеет характеристических чисел, а потому в силу теоремы п.5.3.2  $K^{(N)}(x, y) \equiv 0$ , так что

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\varphi_i(x) \bar{\varphi}_i(y)}{\lambda_i}, \quad (5.39)$$

т.е. ядро  $K(x, y)$  – вырожденное. Поэтому для того чтобы эрмитово непрерывное ядро было вырожденным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело конечное число характеристических чисел.

Функция **истокообразно представима** через ядро  $K(x, y)$ , если существует функция  $h \in L^2(G)$  такая, что

$$f(x) = \int_G K(x, y) h(y) dy, \quad x \in G.$$

**Теорема Гильберта-Шмидта.** Если функция истокообразно представима через эрмитово непрерывное ядро  $K(x, y)$ ,  $f = Kh$ , то ее ряд Фурье по собственным функциям ядра  $K(x, y)$  сходится регулярно, а, значит, и равномерно на  $\bar{G}$  к этой функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x). \quad (5.40)$$

Так как  $f = Kh$ ,  $h \in L^2(G)$ , то по лемме п. 5.1.1  $f \in C(G)$  и коэффициенты Фурье функций  $f$  и  $h$  по собственным функциям ядра  $K(x, y)$  связаны соотношением

$$(f, \varphi_k) = (K h, \varphi_k) = (h, K \varphi_k) = \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k}. \quad (5.41)$$

Если ядро  $K(x, y)$  имеет конечное число характеристических чисел, то в силу (5.39)

$$f(x) = Kh = \sum_{k=1}^N \frac{(h, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь ядро  $K(x, y)$  имеет бесконечное число характеристических чисел. В этом случае  $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому, в силу (5.38) и (5.41), ряд (5.40) сходится к  $f$  в  $L^2(G)$ .

Пользуясь неравенствами Коши-Буняковского, Бесселя и соотношением

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leq \int_G |K(x, y)|^2 dy, \quad x \in \bar{G},$$

нетрудно доказать, что ряд (5.63) сходится регулярно на  $\bar{G}$ .

#### 5.4.1. Биномиальное разложение повторных ядер

Повторное ядро  $K_p(x, y)$  эрмитова непрерывного ядра разлагается в билинейный ряд по собственным функциям этого ядра

$$K_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k^p}, \quad p = 2, 3, \dots, \quad (5.42)$$

регулярно сходящийся на  $\bar{G} \times \bar{G}$ .

В силу соотношения (5.14) при каждом  $y \in \bar{G}$  ядро  $K_p(x, y)$  истокообразно представимо через ядро  $K(x, y)$ , поэтому по теореме Гильберта-Шмидта оно разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям этого ядра

$$K_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (K_p(x, y), \varphi_k) \varphi_k(x).$$

Так как ядро эрмитово, то

$$\begin{aligned} (K_p(x, y), \varphi_k) &= \int_G K_p(x, y) \bar{\varphi}_k dx = \\ &= \int_G \bar{K}_p(y, x) \bar{\varphi}_k dx = \overline{(K^p \varphi_k)(y)} = \frac{\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k^p}, \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

Равенство (5.65) доказано. И этот ряд сходится регулярно по  $x \in \bar{G}$  при каждом  $y \in \bar{G}$ .

На основе доказанного при  $p = 2$ ,  $x = y$  и с учетом (5.14) можно получить формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_G \int_G |K(x, y)|^2 dx dy.$$

#### 5.4.2. Билинейное разложение эрмитова непрерывного ядра

Эрмитово непрерывное ядро  $K(x, y)$  разлагается в билинейный ряд по своим собственным функциям

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k}, \quad (5.43)$$

сходящийся в  $L^2(G)$  равномерно по  $y \in \bar{G}$ , т.е.

$$\left\| K(x, y) - \sum_{k=1}^p \frac{\varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k} \right\|_{y \in \bar{G}} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty.$$

Для билинейной формы  $(Kf, g)$  справедлива формула

$$(Kf, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \overline{(g, \varphi_k)},$$

при  $f = g$  превращающаяся в представление квадратичной формы:

$$(Kf, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k}, \quad f \in L^2(G). \quad (5.44)$$

#### 5.4.3. Решение неоднородного интегрального уравнения с эрмитовым непрерывным ядром

Если  $\lambda \neq \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  и  $f \in C(\bar{G})$ , то решение (единственное)  $\varphi$  интегрального уравнения  $\varphi = \lambda K\varphi + f$  представляется в виде равномерно сходящегося в  $G$  ряда (формула Шмидта)

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x). \quad (5.45)$$

Резольвента рассматриваемого ядра  $K(x, y)$  представляется как

$$R(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)},$$

а с учетом билинейного разложения ядра по формуле (5.43) –

$$R(x, y; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\bar{\varphi}_k(y)}{\lambda_k - \lambda}.$$

Формула (5.45) остается справедливой и при  $\lambda = \lambda_j$ , если в соответствии с 3-й теоремой Фредгольма  $(f, \varphi_{j+i}) = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, r_j - 1$ . В этом случае решение не единственно и общее решение дается формулой

$$\varphi(x) = \lambda_j \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_j}}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda_j} \varphi_k(x) + f(x) + \sum_{i=0}^{r_j-1} c_i \varphi_{j+i}(x),$$

где  $c_i$  – произвольные постоянные.

#### 5.4.4. Положительные ядра

Ядро называется **положительным**, если соответствующий оператор положителен, т.е.  $(Kf, f) \geq 0, f \in L^2(G)$ . Всякое положительное ядро – эрмитово.

Для того чтобы эрмитово непрерывное ядро было положительным, необходимо и достаточно, чтобы все его характеристические числа были положительными. Действительно, если  $\lambda_k > 0$ , то в силу (5.44)  $(Kf, f) \geq 0, f \in L^2(G)$ , так как ядро  $K(x, y)$  положительное. Обратно, если ядро положительное, то  $\frac{1}{\lambda_k} = (K\varphi_k, \varphi_k) \geq 0 \rightarrow \lambda_k > 0$ . Если  $K(x, y)$  положительное не-

прерывное ядро, то справедлив вариационный принцип

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup_{\substack{f \in L^2(G) \\ (f, \varphi_i) = 0, i=1,2,\dots,k-1}} \frac{(Kf, f)}{\|f\|^2}, \quad k=1,2,\dots,$$

причем  $\sup$  достигается на любой собственной функции, соответствующей характеристическому числу  $\lambda_k$ .

#### 5.4.5. Распространение теории Гильберта-Шмидта на интегральные уравнения с эрмитовым полярным ядром

Теорема Гильберта-Шмидта и следствия из нее для интегральных уравнений с эрмитовым непрерывным ядром переносятся и на интегральные уравнения с эрмитовым слабо полярным ядром

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad \alpha < \frac{n}{2}, \quad H(x, y) = H^*(x, y).$$

Для доказательства справедливости этого утверждения достаточно установить лемму – интегральный оператор  $K$  со слабополярным ядром  $K(x, y)$  переводит  $L^2(G)$  в  $C(\bar{G})$  и ограничен:

$$\|Kf\|_C \leq E\|f\|, \quad \text{где } E^2 = \max_{x \in \bar{G}} \int_G |K(x, y)|^2 dy.$$

Для полярных ядер ( $\alpha < n$ ) формула Шмидта (5.69) остается справедливой с заменой равномерной сходимости на сходимость в  $L^2(G)$ . Теория Гильберта-Шмидта переносится и на интегральные уравнения с неэрмитовым ядром  $\rho(y)K(x, y)$ , если его рассматривать в  $L^2(G; \rho)$  со скалярным произведением  $(f, g)_\rho$ .

#### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие уравнения называются уравнениями Фредгольма?

2. Какие ядра называются союзными?
3. Как определяются характеристические числа и собственные функции ядра интегрального уравнения?
4. В чем заключается метод последовательных приближений?
5. Что такое повторные ядра?
6. Какая функция называется резольвентой ядра?
7. Чем отличаются интегральные уравнения Вольтерра от уравнений Фредгольма?
8. Какое ядро называется полярным?
9. Какое ядро называется вырожденным?
10. Сформулируйте теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром.
11. Что такое альтернатива Фредгольма?
12. Каковы следствия из теорем Фредгольма?
13. В чем особенность рассмотрения интегральных уравнений с полярным ядром?
14. Какое ядро называется эрмитовым?
15. Какая функция может быть истокообразно представима через ядро  $K(x, y)$ ?
16. Сформулируйте теорему Арчела.
17. Какой оператор называется вполне непрерывным?
18. Сформулируйте теорему Гильберта-Шмидта.
19. Какие возможности открывает формула Шмидта?
20. Как определяются положительное ядро и ядро положительного типа?

## **6. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ**

Частный вид случайных процессов занимает важное место в анализе радиотехнических систем вследствие хорошо разработанного математического аппарата, позволяющего решать многие содержательные задачи.

### **6.1. Классификация и определения**

Рассмотрим случайную величину (случайный процесс), зависящую только от одного параметра –  $t$  (время). Какое-либо значение  $x$  является *возможным значением* (состоянием) случайного процесса (СП)  $X(t)$ , если на отрезке  $[0, T]$  имеется такое время  $t$ , что  $\{x: P(x-h < X(t) < x+h) > 0\}$  для любого  $h > 0$ , где  $P(\bullet)$  – вероятность события, описанного выражением в скобках.

Рассмотрим некоторые реализации СП:

1. **Случайная дискретная последовательность** – случайная величина  $X(t_n) = X_n$  может принимать лишь дискретное множество значений  $\{x_k, k = \overline{1, K}\}$  в дискретные моменты времени  $\{t_n, n = \overline{0, N}\}$ .
2. **Непрерывнозначная случайная последовательность** (непрерывный СП с дискретным временем) – случайная величина может принимать значения множества континуум в дискретные моменты времени –  $X(t_n), n = \overline{0, N}$ .
3. **Дискретный** СП (дискретный процесс с непрерывным временем) – принимает дискретные значения  $X_k(t)$  при непрерывном времени  $t$ .
4. **Непрерывнозначный** СП – и значения, и время непрерывны.
5. **Дискретно непрерывный** СП. То же, что и под цифрой 4, но в некоторые моменты времени процесс имеет дискретные или непрерывные скачки.

Возможны и более сложные комбинации указанных вариантов СП. В соответствии с приведенной классификацией будем различать: марковские цепи (1); марковские последовательности (2); марковские процессы с конечным и бесконечным числом состояний (3,4); дискретно-непрерывные и смешанные марковские процессы (5 и комбинации).

В общем виде СП может быть многомерным:  $X(t) = \{x_i(t), i = \overline{1, M}\}$  с компонентами, имеющими разные законы распределения.

СП  $X(t)$  называется марковским, если для любых  $n$  моментов времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  из отрезка  $[0, T]$  для условной функции распределения “последнего” значения  $X(t_n)$  при фиксированных значениях  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  справедливо

$$P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\},$$

где  $P$  – вероятность события, указанного в скобках.

Если точно известно состояние марковского процесса (МП) в настоящий момент времени ( $t_j$ ), то будущее состояние не зависит от прошлого ( $t_k$ ):

$$P\{X(t_i) \leq x_i | X(t_k) = x_k, X(t_j) = x_j\} = P\{X(t_i) \leq x_i | X(t_j) = x_j\}.$$

**Важное свойство МП – вероятность перехода системы из одного состояния в другое  $P\{X(t) < x | X(t) = x_0\}$  описывается уравнением  $\frac{d}{dt}P = AP$ , где  $A$  – линейный оператор. Это свойство позволяет исследовать поведение МП при помощи хорошо разработанных методов решения соответствующих дифференциальных уравнений.**

Если пространство состояний марковского процесса непрерывно, то будем обозначать  $X(t) = \lambda(t)$  и  $X(t) = \theta(t)$  – в случае дискретного варианта.

### 6.1.1. Цепи Маркова

Существует  $K$  состояний  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ , которые может принимать СП в дискретные моменты времени  $t_1 < t_2 < \dots$ , т.е. имеют место переходы  $\Theta_0 \rightarrow \Theta_1 \rightarrow \Theta_2 \rightarrow \dots$ , где  $\Theta_n = \Theta(t_n)$  – состояние процесса через  $n$  шагов, а  $\Theta_0 = \Theta(t_0)$  – его начальное состояние. На основе теоремы умножения можно описать процесс через вероятности и условные вероятности:

$$P(\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n) = P_0(\Theta_0) \prod_{\mu=1}^n \pi_{\mu}(\Theta_{\mu} | \Theta_0, \dots, \Theta_{\mu-1}), \quad (6.1)$$

где  $P(\Theta_0)$  – вероятность начального состояния;

$$\pi_{\mu}(\theta_{k\mu} | \theta_{k0}, \dots, \theta_{k\mu-1}) = P\{\Theta_{\mu} = \theta_{k\mu} | \Theta_0 = \theta_{k0}, \dots, \Theta_{\mu-1} = \theta_{k\mu-1}\}$$

- условная вероятность перехода на  $\mu$ -м шаге в состояние  $\theta_{k\mu}$ . Возможны три варианта процесса:

1. Смена всех состояний происходит независимо друг от друга -  $\pi_n(\Theta_n | \Theta_0, \dots, \Theta_{n-1}) = P(\Theta_n)$ , тогда

$$P(\Theta_0, \dots, \Theta_n) = \prod_{\mu=0}^n P_{\mu}(\Theta_{\mu}).$$

Это **вырожденный** случай цепи Маркова.

2. Вероятность состояния  $\Theta_n$  в моменты времени  $t_0, \dots, t_{n-1}$  – **простая цепь** Маркова (процесс без последействия), в этом случае вероятность перехода  $\pi_n(\Theta_n | \Theta_0, \dots, \Theta_{n-1}) = \pi_n(\Theta_n | \Theta_{n-1})$ .

$$P(\Theta_0, \dots, \Theta_n) = P_0(\Theta_0) \prod_{\mu=1}^n \pi_n(\Theta_{\mu} | \Theta_{\mu-1}).$$

Отсюда видно, что простая цепь Маркова описывается заданием вероятности начального состояния и вероятностей перехода.

3. **Сложная цепь** Маркова порядка  $m$  ( $m > 1$ ) описывается уравнением

$$\pi_n(\Theta_n | \Theta_0, \dots, \Theta_{n-1}) = \pi_n(\Theta_n | \Theta_{n-m}, \dots, \Theta_{n-1}), \quad n > m.$$

При  $m = 1$  имеем простую цепь Маркова. Сложную цепь Маркова можно представить как простую, введя в рассмотрение случайный  $m$ -мерный вектор

$$\Theta_n = \{\Theta_{in}, i = \overline{1, m}\} = \{\Theta_{n-m+1}, \dots, \Theta_n\}.$$

Таким образом, сложная цепь Маркова порядка  $m$  – частный случай простой  $m$ -мерной цепи при

$$\pi_n(\Theta_n | \Theta_{n-1}) = \pi_n(\Theta_{m\ n} | \Theta_{1\ n-1}, \dots, \Theta_{m\ n-1}) \prod_{i=1}^{m-1} \delta(\Theta_{i\ n}, \Theta_{i+1\ n-1}),$$

где  $\delta(\mu, \nu) = \delta_{\mu\nu}$  – символ Кронекера ( $\delta_{\mu\nu} = 1$  при  $\mu = \nu$  и  $\delta_{\mu\nu} = 0$  при  $\mu \neq \nu$ ).

### 6.1.2. Уравнение Маркова

Известно начальное состояние процесса при  $t_0$ , задан вероятностный закон смены соседних состояний. Задача состоит в том, чтобы найти вероятности состояний процесса в момент времени  $t_n > t_0$ . В том числе при  $n \rightarrow \infty$ . Введем обозначения

$$p_k(n) = P\{\Theta_n = \theta_k\}, \quad \pi_{jk}(\mu, n) = P\{\Theta_n = \theta_k | \Theta_\mu = \theta_j\},$$

$$j, k = 1, \dots, K; \quad 0 \leq \mu \leq n, \quad n = \overline{0, N},$$

где  $\pi_{jk}(\mu, n)$  – условная вероятность перехода процесса из состояния  $\theta_j$  в состояние  $\theta_k$  за  $(n-\mu)$  шагов. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^K p_k(n) = 1, \quad p_k(n) \geq 0, \quad n = \overline{0, N},$$

$$\sum_{k=1}^K \pi_{jk}(\mu, n) = 1, \quad \pi_{jk}(\mu, n) \geq 0, \quad j = \overline{0, N},$$

**В соответствии с теоремой о полной вероятности**

$$p_k(n) = \sum_{j=1}^K p_j(\mu) \pi_{jk}(\mu, n), \quad k = \overline{1, K}, \quad 0 \leq \mu \leq n. \quad (6.2)$$

А на основании формулы полной вероятности и определения цепи Маркова (6.1) можно записать

$$\pi_{jk}(\mu, n) = \sum_{i=1}^K \pi_{ji}(\mu, m) \pi_{ik}(\mu, n), \quad j, k = \overline{1, K}, \quad 0 \leq \mu < m < n. \quad (6.3)$$

Это и есть уравнение Маркова – частный случай общего уравнения Колмогорова-Чепмэна, которое справедливо и для цепей с бесконечным числом состояний.

Если ввести квадратную матрицу  $\boldsymbol{\pi}(\mu, n) = \{\pi_{jk}(\mu, n)\}$  и матрицу-строку  $\boldsymbol{P}^T(n) = \{p_k(n)\}$ , то в матричной форме (6.2) и (6.3) можно записать как

$$\boldsymbol{P}^T(n) = \boldsymbol{P}^T(\mu) \boldsymbol{\pi}(\mu, n)$$

$$\pi(\mu, n) = \pi(\mu, m) \pi(m, n), \quad n > m > \mu \geq 0.$$

Квадратная матрица  $\pi(\mu, n)$ , элементы которой неотрицательны и сумма элементов каждого столбца равна единице, называется *стохастической матрицей*.

Произведение транспонированных матриц, взятых в обратном порядке, равно транспонированному произведению матриц, поэтому справедливо

$$P(n) = \pi^T(\mu, n)P(\mu),$$

где  $P$  – матрицы–столбцы.

Для определения матрицы  $\pi(\mu, n)$  при всех  $\mu \leq n$  достаточно знать последовательность матриц одношаговых вероятностей перехода. Полагая  $\mu = 0$ , имеем:

$$P^T(n) = P^T(0)\pi(0, n),$$

где  $P^T(0) = \{p_k^0\}$  – матрица-строка начального состояния.

Таким образом, полное вероятностное описание простой цепи Маркова достигается заданием вероятностей начального состояния и последовательности вероятностей одношаговых переходов.

Простые цепи Маркова бывают *однородными* и *неоднородными*. Вероятности перехода  $\pi_{jk}(\mu, n)$  однородной цепи зависят только от разности аргументов, т.е.  $\pi_{jk}(\mu, n) = \pi_{jk}(n-\mu)$ . Поэтому для однородной цепи Маркова справедливо

$$\pi(n-\mu) = \pi(m-\mu) \pi(n-m), \quad 0 \leq \mu < m < n.$$

Если обозначить (для однородной цепи Маркова)  $\pi(1) = \pi$ , то несложно показать, что

$$\pi(2) = \pi(1)\pi(1) = \pi(n) = \pi^n.$$

Справедливо также для однородных цепей соотношение

$$P^T(m+\mu) = P^T(\mu)\pi^m.$$

Однородная цепь Маркова, для которой все вероятности  $\{p_k(n)\}$  всех случайных величин  $\theta_n$  не зависят от  $n$ , называется стационарной (равновесной). В этом случае

$$P^T(n) = P^T(1) = P^T,$$

А следовательно, и

$$P^T = P^T \pi \rightarrow p_k = \sum_{j=1}^K p_j \pi_{jk}, \quad k = \overline{1, K}. \quad (6.4)$$

Для цепей Маркова с конечным числом состояний при выполнении условия  $\pi_{jk}(n) > 0, j, k = \overline{1, K}$ , начиная с некоторого  $n$ , существуют пре-

дельные (финальные) вероятности  $p_k = \lim_{m \rightarrow \infty} p_k(m)$ , которые не зависят от начального распределения  $\{p_k^0\}$ . Такие цепи называются *эргодическими*.

Финальные вероятности – решение системы линейных алгебраических уравнений (6.4), удовлетворяющих дополнительному требованию

$$\sum_{k=1}^K p_k = 1, \quad p_k > 0.$$

Эти финальные вероятности образуют стационарное распределение.

Укажем основные определения состояния цепей Маркова. Состояние  $\theta_j$  называется *невозвратным*, если существует такое состояние  $\theta_k$  ( $k \neq j$ ) и такое число шагов  $n$ , что  $\pi_{jk}(n) > 0$ , но  $\pi_{kj}(m) = 0$  для всех  $m$ . Состояния  $\theta_j$  и  $\theta_k$  называются *сообщающимися*, если при некоторых  $n$  и  $m$  выполняются условия  $\pi_{jk}(n) > 0$  и  $\pi_{kj}(m) > 0$ . По этому признаку можно разделить множество возвратных состояний на классы (подмножества) сообщающихся состояний. Состояния, принадлежащие различным классам, не сообщаются между собой. Множество возвратных состояний, принадлежащее одному классу, называется *эргодическим*. Состояние  $\theta_j$  называется *поглощающим*, если для любого  $n$  вероятность  $\pi_{jk}(n) = \delta_{jk}$ . Цепь Маркова называется *поглощающей*, если среди всех состояний цепи есть хотя бы одно поглощающее.

## 6.2. Одномерные дискретные блуждания

Рассмотрим одномерные блуждания частицы вдоль оси  $\Theta$ , представляющие собой однородную цепь Маркова со счетным числом состояний. Пусть через некоторую единицу времени возможны переходы из любого  $j$ -го состояния в три ближайшие:  $j+1, j, j-1$  с вероятностями  $\pi_{j,j+1}(1) = p$ ,  $\pi_{jj}(1) = 1-p-q$ ,  $\pi_{j,j-1}(1) = q$ . В начальный момент  $t_0 = 0$  частица имеет координату  $\theta_0$  и в дискретные моменты времени  $t = 1, 2, \dots, n$  координата частицы меняется на случайную величину  $z_i$ , имеющую три значения с вероятностями

$$P\{z_i = 1\} = p, \quad P\{z_i = 0\} = 1-p-q, \quad P\{z_i = -1\} = q.$$

В момент  $t = n$  координата частицы равна  $\Theta_n = \theta_0 + \sum_{i=1}^n z_i$ . Движение может

происходить как по всей оси  $\Theta$ , так и на ограниченных участках. Границы (экраны) бывают трех видов: *поглощающие*, *отражающие* и *упругие жесткие*. На поглощающем экране движение частицы заканчивается; попав

на отражающий экран, частица в следующий момент времени может только вернуться на прежнюю позицию; после попадания на упругий жесткий экран частица с вероятностью  $r$  возвращается в прежнее состояние (в последующий момент времени) либо с вероятностью  $1-r$  остается на экране.

### 6.2.1. Неограниченные блуждания

Исходная координата  $\theta_0 = 0$ , в этом случае через  $n$  шагов координата

точки становится  $\Theta_n = \sum_{i=1}^n z_i$ . Чтобы попасть в точку  $k$ , необходимо сделать

$n_1$  положительных шагов,  $n_2$  отрицательных и  $n_0$  нулевых, так что

$$n_1 - n_2 = k, \quad n_0 = n - (n_1 + n_2). \quad (6.5)$$

Вероятность  $\Theta_n = k$  определяется обобщенным биномиальным законом

$$P\{\Theta_n = k\} = \sum \frac{n!}{n_0! n_1! n_2!} p^{n_1} (1-p-q)^{n_0} q^{n_2},$$

где суммирование производится по всем  $n_0, n_1, n_2$ , удовлетворяющим равенствам (6.5).

Обозначим  $\mu$  и  $\sigma^2$  как среднее значение и дисперсию случайной величины  $z_i$  (перемещение за один шаг)

$$\mu = p - q, \quad \sigma^2 = p + q - (p - q)^2,$$

тогда математическое ожидание и дисперсия случайной величины  $\Theta_n$  будут определяться формулами

$$M\Theta_n = n\mu, \quad \sigma_n^2 = M(\Theta_n - n\mu)^2 = n\sigma^2. \quad (6.6)$$

Вероятность нахождения частицы в пределах состояний от  $j$  до  $k$  оценивается с помощью центральной предельной теоремы, согласно которой случайная величина  $\Theta_n$  при больших  $n$  распределена по нормальному закону с математическим ожиданием  $n\mu$  и дисперсией  $n\sigma^2$ :

$$P\{j \leq \Theta_n \leq k\} \cong \frac{1}{(2\pi n\sigma^2)^{1/2}} \int_j^k \exp\left[-\frac{(x - n\mu)^2}{2n\sigma^2}\right] dx.$$

Более общие характеристики можно получить при помощи **производящей функции**. По определению производящая функция одного скачка  $z_i$  равна

$$G(y) = M(y^{z_i}) = py + (1-p-q) + q/y.$$

Так как скачки независимы, то  $M(y^{\Theta_n}) = |G(y)|^n$ .

Полагая  $|sG(y)| < 1$ , введем производящую функцию

$$G(y, s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n [G(y)]^n = \frac{1}{1 - sG(y)} = \frac{y}{-spy^2 + y(1 - s - sp - sq) - sq}.$$

Производящая функция  $G(y, s)$  содержит всю информацию о процессе, вероятность  $P\{\Theta_n = k\}$  является коэффициентом при  $s^n y^k$  в разложении  $G(y, s)$ .

Остановимся на определении и свойствах производящей функции. Пусть имеется последовательность действительных чисел  $\{\varphi_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Степенной ряд

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \varphi_n$$

можно рассматривать как преобразование, ставящее в соответствие  $\{\varphi_n\}$  и  $F(s)$ . Если ряд сходится в каком-либо интервале  $|s| < s^*$ , то функция  $F(s)$  называется **производящей функцией** последовательности  $\{\varphi_n\}$ .

Рассмотрим случайный процесс  $\{\Theta(t), t \geq 0\}$ , принимающий целочисленные неотрицательные значения, и последовательность вероятностей  $\{p_k(t)\}$ , где  $p_k(t) = P\{\Theta(t) = k\}$ . Параметр  $t$  может быть дискретным или непрерывным. По определению функция

$$F(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) s^k$$

является производящей функцией вероятностей  $p_k(t)$ . Так как сумма вероятностей  $p_k(t)$  равна единице для всех  $t \geq 0$ , то сравнение с геометрической прогрессией показывает, что ряд сходится равномерно по  $t$  по крайней мере при  $|s| < 1$ .

Приведем без доказательства основные свойства производящей функции:

1. 
$$M(\Theta(t)) = \frac{d}{ds} F(s, t) \Big|_{s=1}.$$

2. Если

$$M(\Theta^2(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(t) < \infty, \text{ то } M(\Theta^2(t)) = \left[ \frac{d^2}{ds^2} F(s, t) - \frac{d}{ds} F(s, t) \right] \Big|_{s=1} \quad \text{и}$$

$$\sigma_{\Theta}^2(t) = M\{[\Theta(t) - M(\Theta(t))]^2\} = \left[ \frac{d^2}{ds^2} F(s, t) + \frac{d}{ds} F(s, t) - \left( \frac{d}{ds} F(s, t) \right)^2 \right] \Big|_{s=1}.$$

3. Производящая функция суммы независимых случайных величин (СВ) равна произведению производящих функций соответствующих СВ.

4. Пусть  $F(s, t)$  – рациональная функция от  $s$ :  $F(s, t) = \frac{G(s, t)}{H(s, t)}$ , где  $G(s, t)$  и  $H(s, t)$  – многочлены от  $s$  и степень числителя меньше степени знаменателя. Пусть  $s_i(t)$  – различные корни  $H(s, t)$  (возможно комплексные), тогда  $F(s, t)$  может быть разложена на простые дроби

$$F(s, t) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i(t)}{s - s_i(t)},$$

где  $a_i(t)$  – функции времени,  $m$  – степень многочлена  $H(s, t)$ .

### 6.2.2. Поглощающий и упругий жесткий экраны

Движение частицы происходит на отрезке  $[c, d]$ , где  $c$  – место расположения поглощающего экрана, а  $d$  – упругого жесткого. Обозначим  $f_j^{(n)}$  – вероятность попадания частицы на  $n$ -м шаге в точку  $c$  при начальном положении в точке  $j$

$$f_j^{(n)} = P\{\Theta_1 > c, \dots, \Theta_{n-1} > c, \Theta_n = c | \theta_0 = j\}. \quad (6.7)$$

При  $n = 0$  имеем

$$f_j^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = c, \\ 0 & \text{при } j \neq c. \end{cases}$$

Пусть событие  $A_n$  – поглощение произошло в момент  $t = n$ , тогда  $f_j^{(n)} = P\{A_n | \theta_0 = j\}$ . Если на первом шаге  $\Theta_1 = \theta_0 + 1$ , то вероятность события  $A_n$  равна  $pP\{A_{n-1} | \theta_0 = j+1\}$ . Полная вероятность события  $f_j^{(n)}$  при независимости скачков

$$f_j^{(n)} = pP\{A_{n-1} | \theta_0 = j+1\} + (1-p-q)P\{A_{n-1} | \theta_0 = j\} + qP\{A_{n-1} | \theta_0 = j-1\}.$$

С учетом (6.7) приходим к разностному уравнению

$$f_j^{(n)} = pf_{j+1}^{(n-1)} + (1-p-q)f_j^{(n-1)} + qf_{j-1}^{(n-1)}, \quad j = c+1, \dots, d-1 \quad (6.8)$$

с начальными и граничными условиями

$$f_c^{(n)} = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0, \end{cases} \quad f_d^{(n)} = (1-r)f_d^{(n-1)} + rf_{d-1}^{(n-1)}.$$

Производящая функция вероятностей поглощения за  $n$  шагов

$$F_j(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_j^{(n)} s^n. \quad (6.9)$$

Умножив обе части (6.8) на  $s^n$  и суммируя по  $n$ , получим разностное уравнение

$$F_j(s) = s[pF_{j+1} + (1-p-q)F_j + qF_{j-1}] \quad (6.10)$$

с граничными условиями

$$F_c = 1; F_d = s[(1-r)F_d + rF_{d-1}]. \quad (6.11)$$

Введение производящей функции (6.9) позволяет свести уравнение (6.8) от 2 переменных  $n$  и  $j$  к уравнению с одной переменной  $-j$ .

Общий метод решения однородного линейного разностного уравнения (6.10) состоит в подстановке  $F_j(s) = \lambda^j$ , откуда

$$\lambda^j = s[p\lambda^{j+1} + (1-p-q)\lambda^j + q\lambda^{j-1}] \rightarrow ps\lambda^2 - \lambda[1-s(1-p-q)] + qs = 0. \quad (6.12)$$

Решение квадратного уравнения (6.12) не представляет труда

$$\lambda_{1,2}(s) = \frac{\{1-s(1-p-q) \pm \sqrt{[1-s(1-p-q)]^2 - 4pqs^2}\}}{2ps}.$$

Чтобы подкоренное выражение было положительным, действительная и положительная величина  $s$  должна удовлетворять следующему условию:

$$0 < s < \frac{1}{1-p-q+2\sqrt{pq}} = \frac{1}{1-(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2}.$$

Таким образом, общее решение разностного уравнения (6.11) будет

$$F_j(s) = A[\lambda_1(s)]^j + B[\lambda_2(s)]^j,$$

а из граничных условий (6.11) следует система уравнений для определения  $A$  и  $B$ :

$$\begin{cases} A\lambda_1^c + B\lambda_2^c = 1; \\ A\lambda_1^{d-1}[\lambda_1 - s\lambda_1(1-r) - rs] + B\lambda_2^{d-1}[\lambda_2 - s\lambda_2(1-r) - rs] = 0. \end{cases}$$

Теперь можно получить окончательное выражение для  $F_j(s)$ . Нетрудно убедиться, что  $F_j(s)|_{s=1} = 1$ , т.е. вероятность поглощения при  $t \rightarrow \infty$  равна единице. Производящая функция

$$F_j(s) = \left(\frac{q}{p}\right)^{j-c} \frac{(\lambda_1^{d-j} - \lambda_2^{d-j})(1-s+sr) - sr(\lambda_1^{d-j-1} - \lambda_2^{d-j-1})}{(\lambda_1^{d-c} - \lambda_2^{d-c})(1-s+sr) - sr(\lambda_1^{d-c-1} - \lambda_2^{d-c-1})} \quad (6.13)$$

представляет собой рациональную дробь

$$F_j(s) = \frac{Q(s)}{H(s)} \left(\frac{q}{p}\right)^{j-c}, \quad (6.14)$$

где  $Q(s)$  и  $H(s)$  – многочлены. Если  $H(s)$  имеет различные корни  $s_1, \dots, s_{d-c-1}$ , то выражение (6.14) можно разложить на простые дроби:

$$F_j(s) = \sum_{k=1}^{d-c-1} \frac{a_k}{s_k - s}, \quad (6.15)$$

где

$$a_k = \left(\frac{q}{p}\right)^{j-c} \frac{Q(s_k)}{\left.\frac{\partial H}{\partial s}\right|_{s=s_k}}.$$

Раскладывая (6.15) в ряд по степеням  $s$ , получим:

$$F_j(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d-c-1} \frac{a_k}{s_k^n} s^n.$$

Согласно (6.9) можно написать

$$f_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{d-c-1} \frac{a_k}{s_k^{n-1}}, \quad n = j-c, j-c+1, \dots$$

Нахождение математического ожидания и дисперсии времени до момента поглощения можно найти, используя свойства производящей функции.

### 6.2.3. Два поглощающих экрана

Движение происходит на отрезке  $[c, d]$ ,  $f_{jc}^{(n)}$  – вероятность поглощения на  $n$ -м шаге на экране  $c$  с начальной точкой в  $j$

$$f_{jc}^{(n)} = P\{c < \Theta_1 < d, \dots, c < \Theta_{n-1} < d, \Theta_n = c | \theta_0 = j\}.$$

Аналогично предыдущему для производящей функции вероятностей поглощения  $f_{jc}^{(n)}$  получаем разностное уравнение вида (6.10) с граничными условиями  $F_c(s) = 1$ ,  $F_d(s) = 0$ . Решение имеет вид

$$F_j(s) = F_{jc}(s) = \frac{\lambda_1^{j-d} - \lambda_2^{j-d}}{\lambda_1^{c-d} - \lambda_2^{c-d}}. \quad (6.16)$$

Так как согласно (6.12)  $\lambda_1 \lambda_2 = q/p$ , то можно увидеть, что при  $r = 0$  (6.16) совпадает с (6.13) и  $F_j(s)$  находится аналогично.

Таким же образом из решения (6.10) с теми же граничными условиями находим для границы  $d$  (поглощающий экран)

$$F_{jd}(s) = \frac{[\lambda_1(s)]^{j-c} - [\lambda_2(s)]^{j-c}}{[\lambda_1(s)]^{d-c} - [\lambda_2(s)]^{d-c}}.$$

Раскладывая в ряд по степеням  $s$  согласно (6.9), получаем выражения для  $f_{jc}^{(n)}$  и  $f_{jd}^{(n)}$ .

Определим вероятность  $p_k^{(n)}$  того, что частица в момент  $t = n$  находится в положении  $k$ , ни разу не достигнув поглощающих границ. Введем производящую функцию

$$P_k(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_k^{(n)}, \quad p_k^{(0)} = \delta_{0k},$$

и аналогично (6.10) получим

$$P_k(s) - 1 = s[pP_{k-1}(s) + (1-p-q)P_k(s) + qP_{k+1}(s)]. \quad (6.17)$$

Граничные условия в этом случае имеют вид:  $P_c(s) = P_d(s) = 0$ . Уравнение (6.17) в отличие от (6.10) является неоднородным и его решение можно получить довольно громоздким методом вариации постоянных.

#### 6.2.4. Один поглощающий экран

Поглощающий экран расположен в точке  $c$ , т. е. ситуация повторяет предыдущий случай при  $d \rightarrow \infty$ . Так как  $\lambda_1 > \lambda_2$ , то из (6.16) получим

$$F_{jc}(s) = \lim_{d \rightarrow \infty} F_j(s) = \lambda_2^{j-c}. \quad (6.18)$$

Движение происходит на полуинтервале  $[c, \infty)$ . При помощи производящей функции (6.18) можно найти среднее время и дисперсию времени до поглощения на экране  $c$ . При  $j = 0$  и  $c < 0$  имеем

$$M(N_c) = \left[ \frac{d^2 F_c(s)}{ds^2} \right]_{s=1} = \begin{cases} c/(p-q), & q > p, \\ \infty, & q \leq p, \end{cases}$$

$$\sigma^2(N_c) = \left[ \frac{d^2 F_c}{ds^2} + \frac{dF_c}{ds} - \left( \frac{dF_c}{ds} \right)^2 \right]_{s=1} = \frac{c[q+p-(q-p^2)]}{(p-q)^3}.$$

Если использовать обозначения (6.6), то

$$M(N_c) = \frac{|c|}{\mu}, \quad \sigma^2(N_c) = |c| \left( \frac{\sigma^2}{\mu^3} \right), \quad q > p.$$

Вероятность поглощения за произвольное время при  $j = 0$

$$P(c) = F_c(1) = \begin{cases} (p/q)^c, & p > q, \\ 1, & p \leq q. \end{cases}$$

Вероятность сколь угодно долгого (без поглощения) блуждания частицы при  $p > q$  равна  $1 - (p/q)^c$ .

### 6.2.5. Два отражающих экрана

Наличие двух отражающих экранов дает следующее положение час-  
тицы после  $n$ -го скачка:

$$\Theta_n = \begin{cases} \Theta_{n-1} + z, & c \leq \Theta_{n-1} + z_n \leq d, \\ d, & \Theta_{n-1} + z_n > d, \\ c, & \Theta_{n-1} + z_n < c. \end{cases}$$

Обозначим:  $p_{jk}^{(n)}$  - вероятность на  $n$ -м шаге занять положение  $k$  при началь-  
ном положении  $j$ . Аналогично выводу (6.8) получим

$$p_{jk}^{(n)} = pp_{jk-1}^{(n-1)} + (1-p-q)p_{jk}^{(n-1)} + qp_{jk+1}^{(n-1)}, \quad c < k < d. \quad (6.19)$$

В граничных точках имеем

$$p_{jd}^{(n)} = pp_{jd-1}^{(n-1)} + (1-q)p_{jd}^{(n-1)}; \quad p_{jc}^{(n)} = (1-p)p_{jc}^{(n-1)} + qp_{jc+1}^{(n-1)}. \quad (6.20)$$

Интересно стационарное распределение вероятностей положений частицы  
при  $n \rightarrow \infty$ , при этом  $p_{jk}^{(n)} \rightarrow \pi_k$ . Согласно (6.19) и (6.20) переходная вероят-  
ность  $\pi_k$  должна удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \pi_k = p\pi_{k-1} + (1-p-q)\pi_c + q\pi_{k+1}, & k = c+1, \dots, d-1, \\ \pi_c = (1-p)\pi_c + q\pi_{c+1}, \\ \pi_d = p\pi_{d-1} + (1-q)\pi_d, \end{cases}$$

где  $\pi_{c+1} = \pi_c p/q$ , поэтому  $\pi_{c+2} = [(p+q)\pi_{c+1} - p\pi_c]/q = (p/q)^2 \pi_c$ . В общем случае  
 $\pi_k = (p/q)^{k-c} \pi_c$ ,  $k = c, \dots, d$ . Учитывая условие нормировки  $\sum_{k=c}^d \pi_k = 1$ , получа-

ем:

$$\pi_k = \frac{1 - p/q}{1 - (p/q)^{d-c+1}} (p/q)^{k-c}, \quad k = c, \dots, d$$

- равновесное распределение вероятностей нахождения частицы в состоя-  
нии  $k$ , устанавливающееся за достаточно большое время.

### 6.2.6. Один отражающий экран

Рассмотренная выше ситуация превращается в необходимую при  
 $d \rightarrow \infty$ . Для  $p < q$  равновесное распределение вероятностей состояний запи-  
сывается как

$$\pi_k = (1 - p/q)(p/q)^{k-c}, \quad k = c, c+1, \dots$$

При  $p \geq q$  равновесного распределения не существует, частица уходит в бесконечность.

### 6.3. Дискретный марковский процесс

Процесс может принимать только дискретные значения  $\{\theta_k, k = \overline{1, K}\}$ ; смена состояний происходит в случайные моменты времени. Вероятность перехода записывается следующим образом:

$$\pi_{ij}(t_0, t) = P\{\Theta(t) = \theta_j | \Theta(t_0) = \theta_i\}, \quad t > t_0.$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^K \pi_{ij}(t_0, t) = 1, \quad \pi_{ij}(t_0, t) \geq 0, \quad \pi_{ij}(t_0, t_0) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, K}. \quad (6.21)$$

Те же соображения, использовавшиеся при получении уравнения Маркова (6.3), позволяют записать **уравнение Колмогорова-Чепмена**

$$\pi_{ij}(t_0, t + \Delta t) = \sum_{k=1}^K \pi_{ik}(t_0, t) \pi_{kj}(t, t + \Delta t), \quad t > t_0, \quad \Delta t > 0. \quad (6.22)$$

Основная задача при рассмотрении марковских процессов – вычисление вероятностей перехода и безусловных вероятностей различных состояний при известном начальном состоянии системы и одношаговых вероятностей перехода. В случае разрывных марковских процессов при малых  $\Delta t$

$$\begin{aligned} \pi_{kk}(t, t + \Delta t) &= P\{\Theta(t + \Delta t) = \theta_k | \Theta(t) = \theta_k\} = 1 + a_{kk}(t) \Delta t + o(\Delta t), \\ \pi_{kj}(t, t + \Delta t) &= P\{\Theta(t + \Delta t) = \theta_j | \Theta(t) = \theta_k\} = 1 + a_{kj}(t) \Delta t + o(\Delta t), \quad k \neq j, \end{aligned} \quad (6.23)$$

где  $o(\Delta t)$  – члены выше первого порядка малости относительно  $\Delta t$ . По понятным причинам  $\pi_{kk} > \pi_{kj}$  при малых  $\Delta t$ .

Вероятности перехода в другое состояние неотрицательны и для них должно выполняться условие нормировки (6.21), поэтому, с учетом (6.23)

$$a_{kk}(t) = - \sum_{j \neq k} a_{kj}(t) \leq 0, \quad a_{kj}(t) \geq 0. \quad (6.24)$$

Подставив (6.23) в правую часть (6.22) и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi_{ij}(t_0, t) = \sum_{k=1}^K a_{kj}(t) \pi_{ik}(t_0, t), \quad i, j = \overline{1, K}, \quad (6.25)$$

где  $a_{kj}(t)$  удовлетворяют (6.24). Если число возможных состояний системы конечно, то для любых непрерывных  $a_{kj}(t)$ , удовлетворяющих (6.24), система уравнений (6.25) с начальными условиями  $\pi_{ij}(t_0, t_0) = \delta_{ij}$  имеет единственное неотрицательное решение, определяющее дискретный марковский процесс.

Дискретный марковский процесс остается им же и в обратном направлении. Для получения соответствующих уравнений выберем промежуточный момент времени, близкий не к конечному, а к начальному моменту времени  $t_0$ , тогда

$$\pi_{ij}(t_0, t) = \sum_{k=1}^K \pi_{ik}(t_0, t_0 + \Delta t) \pi_{kj}(t_0 + \Delta t, t), \quad t > t_0 + \Delta t > t_0. \quad (6.26)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \pi_{ii}(t_0, t_0 + \Delta t) &= 1 + a_{ii}(t_0) \Delta t + o(\Delta t), \\ \pi_{ik}(t_0, t_0 + \Delta t) &= a_{ik}(t_0) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Подставив (6.27) в (6.26) и устремив  $\Delta t$  к нулю, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \pi_{ij}(t_0, t) = - \sum_{k=1}^K a_{ik}(t_0) \pi_{kj}(t_0, t), \quad t > t_0. \quad (6.28)$$

Уравнения (6.25) называют прямыми, а (6.28) – обратными. Уравнения (6.25) удовлетворяют и абсолютные вероятности состояний  $p_j(t)$ . Если заданы начальные вероятности состояний  $p_j^0 = p_j(t_0)$ , то справедливы соотношения

$$p_j(t) = \sum_i p_i^0 \pi_{ij}(t_0, t), \quad p_j(t + \Delta t) = \sum_i p_i(t) \pi_{ij}(t, t + \Delta t). \quad (6.29)$$

Умножив обе части уравнений (6.25) на  $p_i^0$  и взяв сумму по  $i$ , с учетом (6.29) получим

$$\frac{d}{dt} p_j(t) = \sum_k a_{kj}(t) p_k(t).$$

Начальные условия для этих уравнений:  $p_j(t) = p_j(t_0) = p_j^0$  при  $t = t_0$ .

Дискретный марковский процесс называется **однородным**, если вероятности перехода зависят только от разности  $\tau = t - t_0$ , т.е.  $\pi_{ij}(t_0, t) = \pi_{ij}(\tau)$ ,  $\tau = t - t_0$ .

Из (6.23) следует, что для однородного процесса  $a_{kj}(t) = a_{kj}$  – постоянные величины и уравнения (6.25) и (6.28) упрощаются

$$\frac{d}{d\tau} \pi_{ij}(\tau) = \sum_k a_{kj} \pi_{ik}(\tau),$$

$$\frac{d}{d\tau} \pi_{ij}(\tau) = a_{ii} \pi_{ij}(\tau) + \sum_{k \neq j} a_{ik} \pi_{kj}(\tau).$$

Если при  $\tau \rightarrow \infty$  существуют пределы  $p = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \pi_{ij}(\tau)$ , не зависящие от начального состояния, то говорят, что марковский процесс обладает **эргодическим свойством** и существует однозначно определенное стационарное (равновесное) состояние, вероятности которого определяются системой алгебраических уравнений

$$\sum_k a_{kj} p_k = 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

#### 6.4. Полумарковские процессы

Понятие полумарковских процессов объединяет различные аспекты теории цепей Маркова, разрывных марковских процессов и теории восстановления.

Опишем типичную модель полумарковского процесса. В каждый момент времени система может находиться в одном из  $K$  возможных состояний  $\theta_1, \dots, \theta_k$ ; известны начальное состояние системы ( $\Theta_0 = \theta_i$ ) и одношаговые вероятности перехода  $\pi_{jk} = P\{\Theta_m = \theta_k | \Theta_{m-1} = \theta_j\}$  – этот процесс представляет из себя однородную цепь Маркова.

Сопоставим каждому ненулевому элементу матрицы  $\pi_{jk}$  случайную величину  $T_{jk}$  с функцией распределения  $F_{jk}(t) = F_{jk}(\tau_{jk} \leq t)$ . Величину  $T_{jk}$  можно рассматривать как время пребывания системы в состоянии  $\theta_j$  перед переходом в состояние  $\theta_k$ , это величина неотрицательная непрерывная с плотностью вероятности  $f_{jk}(t)$ . По достижении состояния  $\theta_k$  “мгновенно”, в соответствии с матрицей вероятности перехода  $\{\pi_{jk}\}$  происходит выбор следующего состояния  $\theta_l$ , и время ожидания в состоянии  $\theta_k$  полагается равным  $T_{kl}$ . Если через  $\Theta(t)$  обозначить состояние системы, занятое в момент времени  $t$ , то полученный процесс принято называть **полумарковским**. Если игнорировать случайный характер времени ожидания и рассматривать только моменты перехода, то  $\Theta(t)$  представляет собой однородную цепь Маркова (вложенная цепь Маркова). Весь же процесс, если все времена ожидания не распределены экспоненциально, называется полумарковским.

Поведение полумарковского процесса при заданном начальном состоянии полностью определяется матрицей вероятностей перехода  $\{\pi_{jk}\}$ ,  $j, k = \overline{1, K}$  и матрицей функций распределения  $\{F_{jk}\}$  или в случае непрерывности величины  $T_{jk}$  матрицей плотности вероятностей  $\{f_{jk}(t)\}$ .

По теоремам умножения и сложения вероятностей найдем безусловную функцию распределения полного времени ожидания системы в состоянии  $\theta_i$ :

$$F_i(t) = P(t_i < t) = \sum_{j=i}^K \pi_{ij} F_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, K}.$$

Соответственно для плотности вероятности

$$\omega_i(t) = \sum_{j=1}^K \pi_{ij} f_{ij}(t), \quad i, j = \overline{1, K}.$$

Математическое ожидание времени ожидания в состоянии  $\theta_i$ :

$$M(T_i) = \int_0^{\infty} t \omega_i(t) dt = \sum_{j=1}^K \pi_{ij} M(T_{ij}). \quad (6.30)$$

Основная задача при анализе полумарковских процессов – вычисление вероятностей состояний. Пусть  $\Phi_{ij}(t) = \{\Theta(t) = \theta_j | \Theta(t_0) = \theta_i\}$  – интервально-переходная вероятность. Все возможности перехода из  $\theta_i$  в  $\theta_j$  описывает уравнение

$$\Phi_{ij}(t) = \delta_{ij} \Psi_i(t) + \sum_{k=1}^K \pi_{ik} \int_0^t f_{ik}(\tau) \Phi_{kj}(t - \tau) d\tau, \quad 1 \leq i, j \leq k, \quad (6.31)$$

где  $\Psi_i(t) = 1 - F_i(t)$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Первый член уравнения учитывает возможность  $i = j$ , т. е. неизменного состояния системы за рассматриваемый отрезок времени.

Аналитическое решение системы линейных интегральных уравнений (6.31) получить непросто, но некоторое упрощение дает применение преобразования Лапласа, с помощью которого можно получить

$$\Phi_{ij}^*(s) = \delta_{ij} \Psi_i^*(s) + \sum_{k=1}^K \pi_{ik} f_{ik}^*(s) \Phi_{kj}^*(s), \quad 1 \leq i, j \leq K. \quad (6.32)$$

Так как  $\Psi_i(t) = \int_t^{\infty} \omega_i(t) dt = P\{T_i > t\}$ , то имеем

$$\Psi_i^*(s) = \frac{1}{s} [1 - \omega_i^*(s)]. \quad (6.33)$$

Запишем (6.32) в матричном виде. Введем  $\Phi(t) = [\Phi_{ij}(t)]$ ,  $\pi = [\pi_{ij}]$ ,  $f = [f_{ij}]$ , а также диагональные матрицы  $w(t) = [\delta_{ij} w_i(t)]$ ,  $F(t) = [\delta_{ij} F_i(t)]$ ,  $\Psi(t) = [\delta_{ij} \Psi_i(t)]$ . Для учета специфического вида суммирования в (6.32) определим специальный вид умножения матриц через символ  $\times$ . Если  $A$   $B$  и

$C$  – квадратные матрицы размерности  $k \times k$ , то  $C = A \times B$  означает, что  $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ . Теперь (6.32) можно записать в виде

$$\Phi^*(s) = \Psi^*(s) + [\pi \times f^*(s)]\Phi^*(s)$$

или

$$\Phi^*(s) = [I - \pi \times f^*(s)]^{-1} \Psi^*(s), \quad (6.34)$$

где  $I$  – единичная матрица.

Если интерес представляет только стационарное состояние ( $t \rightarrow \infty$ ), то в (6.34) возможны упрощения на основе известного результата в теории преобразований Лапласа

$$\Phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi^*(s),$$

если существует хотя бы один из этих пределов. На основе (6.34) можно написать

$$\Phi = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi^*(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[I - \pi \times f^*(s)]^{-1} \lim_{s \rightarrow 0} \Psi^*(s), \quad (6.35)$$

а, с учетом (6.33),

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Psi^*(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [I - W^*(s)]. \quad (6.36)$$

Учитывая условие нормировки  $w_i(t)$ , можно убедиться, что  $W^*(0) = I$ , поэтому в (6.36) имеем неопределенность. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, находим:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Psi^*(s) = -\frac{d}{ds} W^*(s) \Big|_{s=0} = \int_0^{\infty} t W(t) dt = T.$$

$T$  – диагональная матрица размерности  $k \times k$  средних безусловных времен ожидания в каждом из состояний (6.30).

Обозначив  $H(s) = s[I - \pi \times f^*(s)]^{-1}$ , можно получить:

$$H(s) - H(s)\pi \times f(s) = sI. \quad (6.37)$$

Из условия нормировки следует, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} f_{ij}^*(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} f_{ij}(t) dt = 1,$$

поэтому при  $s \rightarrow 0$  все элементы матрицы  $f^*(s)$  равны 1. Из (6.37), таким образом, получаем

$$\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = H(0) = H(0)\pi. \quad (6.38)$$

Покажем, что строки матрицы  $H(0)$  должны быть пропорциональны финальным вероятностям состояний вложенной цепи Маркова, которая описывает характер смены состояний без учета их длительности. Предпо-

ложим, что эти финальные вероятности являются единственным решением системы алгебраических уравнений

$$p_j = \sum_{i=1}^K p_i \pi_{ij}, \quad \sum_{i=1}^K p_i = 1. \quad (6.39)$$

Сравнивая (6.38) и (6.39), можно прийти к заключению, что в качестве решения уравнения (6.37) можно взять квадратную матрицу  $\mathbf{H}(0)$  размерности  $K \times K$ ,  $i$ -я строка которой  $\{h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{ik}\}$  пропорциональна матрице-строке финальных вероятностей  $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ , т.е.  $\mathbf{H}_i = k_i \mathbf{P}$ , где  $k_i$  – некоторый коэффициент пропорциональности.

Учитывая все вышеизложенное, видим, что для стационарных состояний уравнение (6.35) принимает вид:

$$\Phi = \mathbf{H}(0)\mathbf{T},$$

Откуда следует, что элементы матрицы  $\Phi$  должны удовлетворять соотношению

$$\Phi_{ij} = h_{ij}(0)\mathbf{M}\mathbf{T}_j = k_i p_j \mathbf{M}\mathbf{T}_j. \quad (6.40)$$

Сумма финальных интервально-переходных вероятностей должна равняться единице

$$\sum_{i=1}^L \Phi_{ij} = k_i \sum_{j=1}^K p_j \mathbf{M}\mathbf{T}_j = 1,$$

поэтому

$$k_i = \left[ \sum_{j=1}^K p_j \mathbf{M}\mathbf{T}_j \right]^{-1}. \quad (6.41)$$

На основании (6.40) и (6.41) можно написать

$$\Phi_{ij} = p_i \mathbf{M}\mathbf{T}_j \left[ \sum_{j=1}^K p_j \mathbf{M}\mathbf{T}_j \right]^{-1} = \Phi_j.$$

Финальные интервально-переходные вероятности зависят только от финальных вероятностей вложенного марковского процесса и средних времен ожидания в каждом состоянии и не зависят от начального состояния процесса.

С помощью применения полумарковских процессов могут быть решены и другие задачи, например:

1. Нахождение числа переходов, которые были сделаны системой в течение интервала времени  $(0, t)$ .
2. Нахождение времени и числа переходов, необходимых для достижения впервые состояния  $\theta_j$  из состояния  $\theta_i$ .

## 6.5. Марковские последовательности

### 6.5.1. Основные определения и свойства

Пусть случайные величины  $\lambda_n = \lambda(t_n)$  в некоторые моменты времени  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  принимают значения из непрерывного ансамбля. **Последовательность** случайных величин  $\lambda_n$  называется **марковской**, если при любом  $n$  для условных функций распределения  $F_n$  или условных плотностей вероятности  $\pi_n$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} F_n(\lambda_n | \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) &= F_n(\lambda_n | \lambda_{n-1}), \\ \pi_n(\lambda_n | \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) &= \pi_n(\lambda_n | \lambda_{n-1}). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Совместная плотность вероятности рассматриваемых величин выражается через плотность вероятности начального состояния  $P_1(\lambda_1)$  и плотности вероятности перехода  $\pi_n(\lambda_n | \lambda_{n-1})$ ,  $n = 0, N$

$$P(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = P_1(\lambda_1) \prod_{\mu=2}^n \pi_{\mu}(\lambda_{\mu} | \lambda_{\mu-1}).$$

Эту формулу можно принять за определение марковской последовательности, так как из нее следует (6.42). Приведем некоторые свойства марковских последовательностей.

1. Если известно состояние  $\lambda_m$  то при  $n > m > \mu$  случайные величин  $\lambda_n$  и  $\lambda_{\mu}$  независимы:

$$P(\lambda_n, \lambda_{\mu} | \lambda_m) = \pi_{nm}(\lambda_n | \lambda_m) \pi_{m\mu}(\lambda_{\mu} | \lambda_m).$$

2. Любая подпоследовательность, взятая из марковской последовательности, является также марковской

$$\pi(\lambda_{n_m} | \lambda_{n_1}, \dots, \lambda_{n_{m-1}}) = \pi_{n_m}(\lambda_{n_m} | \lambda_{n_{m-1}}).$$

3. Марковская последовательность остается марковской и в обратном направлении

$$\pi(\lambda_n | \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+m}) = \pi_n(\lambda_n | \lambda_{n+1}).$$

4. Плотность вероятности перехода удовлетворяет уравнению

$$\pi(\lambda_n | \lambda_{\mu}) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\lambda_n | \lambda_m) \pi(\lambda_m | \lambda_{\mu}) d\lambda_m, \quad n > m > \mu,$$

которое является частным случаем уравнения Колмогорова-Чепмена. Действительно,

$$P(\lambda_{\mu}, \lambda_m, \lambda_n) = P(\lambda_{\mu}) \pi(\lambda_m | \lambda_{\mu}) \pi(\lambda_n | \lambda_m),$$

и после интегрирования по  $\lambda_m$

$$P(\lambda_\mu, \lambda_n) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda_\mu, \lambda_m, \lambda_n) d\lambda_m = P(\lambda_\mu) \pi(\lambda_n | \lambda_\mu) = \\ P(\lambda_\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\lambda_n | \lambda_m) \pi(\lambda_m | \lambda_\mu) d\lambda_m.$$

Марковская последовательность называется **однородной**, если переходные вероятности  $\pi_n(\lambda_n | \lambda_{n-1})$  не зависят от  $n$ . Марковская последовательность называется **стационарной**, если она однородна и все состояния имеют одну и ту же плотность вероятности.

По аналогии со сложной цепью Маркова можно ввести сложную непрерывную марковскую последовательность произвольного порядка.

Покажем, что СВ  $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_1 + \lambda_2, \dots, x_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \dots$  образуют марковскую последовательность. Если  $P_n(\lambda)$  – плотности вероятностей СВ  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , то  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_1(x_1)P_2(x_2 - x_1) \dots P_n(x_n - x_{n-1})$  и

$$\pi_n(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_1, \dots, x_{n-1})} = P_n(x_n - x_{n-1}).$$

Так как последнее выражение не зависит от  $x_1, \dots, x_{n-2}$ , то последовательность  $x_n$  – марковская. Далее, если  $M\lambda_n = 0$ , то  $Mx_n = 0$ , а поскольку  $x_n = \lambda_n + x_{n-1}$ , то  $M(x_n | x_{n-1}) + M(x_{n-1} | x_{n-1}) = x_{n-1}$ , так как не зависит от  $x_{n-1}$ , а  $M\lambda_n = 0$ . Следовательно, при любом  $n$

$$M(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = Mx_{n-1}.$$

Последовательности СВ, обладающие таким свойством, называются **мартингалами**.

### 6.5.2. Общая модель случайных одномерных блужданий

Как и в случае простых дискретных блужданий, координата частицы равна

$$\Theta_n = \theta_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

где  $\theta_0$  и  $\lambda_i$  могут быть дискретными или непрерывными величинами. Если блуждания происходят по всей прямой  $\Theta$ , то вероятность попадания в заданный интервал после достаточно большого количества шагов можно оценить с помощью центральной предельной теоремы

$$P\{y_1 \leq \Theta_n \leq y_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 n}} \int_{y_1}^{y_2} \exp\left\{-\frac{(z - \mu n)^2}{2\sigma^2 n}\right\} dz,$$

где  $\mu$  и  $\sigma^2$  – математическое ожидание и дисперсия СВ  $\lambda_i$ .

### 6.5.3. Случайные блуждания между поглощающими экранами

Будем считать, что для непрерывных независимых СВ  $\lambda_i$  с плотностью вероятности  $f(\lambda)$  существует двустороннее преобразование Лапласа

$$f^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega\lambda} f(\lambda) d\lambda. \quad (6.43)$$

В общем случае  $f^*(\omega)$  может быть определена как двустороннее преобразование Лапласа-Стильтьеса от  $F(\lambda)$

$$f^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega\lambda} dF(\lambda). \quad (6.44)$$

По аналогии с определением производящей функции выражения (6.43) и (6.44) дают производящую функцию моментов по непрерывной переменной  $\lambda$ .

Обозначим

$$f_n(\lambda) d\lambda = P\{c < \Theta_1, \dots, \Theta_{n-1} < d, \lambda < \Theta_n < \lambda + d\lambda\}, \quad (6.45)$$

$$n = 1, 2, \dots, -\infty < \lambda < \infty.$$

Далее полагаем, что  $c < 0$ , начальное положение частицы  $\lambda_0 = 0$ . Если  $\lambda < c$  или  $\lambda > d$ , то

$$f_n(\lambda) d\lambda = P\{N = n, \lambda < \Theta_N < \lambda + d\lambda\} \quad (6.45^*)$$

- совместная вероятность того, что число шагов до поглощения равно  $n = N$ , а в момент поглощения  $\Theta_N$  лежит в интервале  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ . Переходя к производящей функции моментов по дискретной  $n$  и непрерывной  $\lambda$ , из (6.45) имеем

$$M(e^{-\omega\Theta_N} s^N) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^c e^{-\omega\lambda} f_n(\lambda) d\lambda + \int_d^{\infty} e^{-\omega\lambda} f_n(\lambda) d\lambda \right] s^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} s^n \left[ \int_{-\infty}^c e^{-\omega\lambda} f_n(\lambda) d\lambda - \int_c^d e^{-\omega\lambda} f_n(\lambda) d\lambda \right]. \quad (6.46)$$

Получим рекуррентное соотношение между  $f_n(\lambda)$  и  $f_{n-1}(\lambda)$ . Так как

$$P\{\lambda < \Theta_n < \lambda + d\lambda | \Theta_{n-1} = y\} = f(\lambda - y) d\lambda,$$

где  $f(\lambda - y)$  – плотность вероятности скачка на  $(\lambda - y)$ . Отсюда

$$f_n(\lambda)d\lambda = \int_c^d P\{\lambda < \Theta_n < \lambda + d\lambda | \Theta_{n-1} = y\} f_{n-1}(y)dy = \\ = \left[ \int_c^d f(\lambda - y) f_{n-1}(y) dy \right] d\lambda.$$

Таким образом,

$$f_n(\lambda) = \int_c^d f_{n-1}(y) f(\lambda - y) dy, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.47)$$

Взяв от обеих частей (6.47) двустороннее преобразование Лапласа, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega\lambda} f_n(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega\lambda} \left[ \int_c^d f_{n-1}(y) f(\lambda - y) dy \right] d\lambda = \\ = \int_c^d e^{-\omega y} f_{n-1}(y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega(\lambda - y)} f(\lambda - y) d\lambda \right] dy = f^*(\omega) \int_c^d e^{-\omega y} f_{n-1}(y) dy. \quad (6.48)$$

Введем производящую функцию  $K(\omega, s)$  для  $f_n(\lambda)$

$$K(\omega, s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int_c^d e^{-\omega\lambda} f_n(\lambda) d\lambda. \quad (6.49)$$

Из (6.46) с учетом (6.47) и (6.48) следует соотношение

$$M(e^{-\omega\Theta_N} s^N) = 1 - [1 - sf^*(\omega)]K(\omega, s). \quad (6.50)$$

Если случайные величины  $\lambda_i$  имеют дискретные значения, то аналогично

$$M(y^{\Theta_N} s^N) = 1 - [1 - sG(y)]L(y, s),$$

где  $L(y, s)$  – дискретный аналог  $K(\omega, s)$ , а  $G(y) = My^{\lambda_i}$  производящая функция одного скачка  $\lambda_i$ .

Выражение (6.50) справедливо и для одного экрана ( $d \rightarrow \infty$ ), однако необходимо иметь в виду, что в этом случае есть вероятность бесконечно долгого блуждания частицы без поглощения.

#### 6.5.4. Тождество Вальда

Подставим в (6.50) значение  $s = [f^*(\omega)]^{-1}$  и получим

$$M(e^{-\omega\Theta_N} [f^*(\omega)]^{-N}) = 1.$$

Это выражение называется тождеством Вальда. Соотношение широко используется в последовательном анализе и позволяет получить статистические характеристики случайных блужданий при наличии поглощающих эк-

ранов. Производя подстановку в (6.50), мы предполагали, что значение  $K(\omega, s)$  остается конечным, иначе этого делать нельзя.

Обозначим через  $p_d = p_c$  вероятности поглощения на верхнем и нижнем экранах. Оценим эти вероятности: так как  $p_d + p_c = 1$ , то

$$p_d M(e^{-\omega \Theta_N} [f^*(\omega)]^{-N})_d + p_c M(e^{-\omega \Theta_N} [f^*(\omega)]^{-N})_c = 1, \quad (6.51)$$

где нижние индексы означают операцию получения условного математического ожидания

$$M(e^{-\omega \Theta_N} [f^*(\omega)]^{-N})_d = M(e^{-\omega \Theta_N} [f^*(\omega)]^{-N} | \Theta_N \geq d).$$

Вследствие одного из свойств преобразования Лапласа, в том случае, когда

$$\mu = M\lambda_i = \left[ \frac{d}{d\omega} f^*(\omega) \right]_{\omega=0} \neq 0,$$

второй действительный корень уравнения  $f^*(\omega) = 1$  не равен нулю ( $\omega_0 \neq 0$ ) и из (6.51) следует

$$p_d M e^{-\omega_0 \Theta_N} + p_c M e^{-\omega_0 \Theta_N} = 1.$$

Приближенно можно положить  $\Theta_N \approx d$  при  $\Theta_N \geq d$  и  $\Theta_N \approx c$  при  $\Theta_N \leq c$ , поэтому

$$p_d e^{-\omega_0 d} + p_c e^{-\omega_0 c} \approx 1.$$

Учитывая, что  $p_d + p_c = 1$ , получим:

$$p_d \approx \frac{1 - e^{-\omega_0 c}}{e^{-\omega_0 d} - e^{-\omega_0 c}}, \quad p_c \approx \frac{e^{-\omega_0 d} - 1}{e^{-\omega_0 d} - e^{-\omega_0 c}}. \quad (6.52)$$

При  $\mu = 0$  и, следовательно,  $\omega_0 = 0$  имеем

$$p_d \approx \frac{c}{c - d}, \quad p_c \approx \frac{d}{d - c}.$$

Вероятности поглощения не зависят от конкретного вида плотности вероятности распределения одного скачка.

Пользуясь той же методикой, можно получить приближенное выражение для производящей функции числа шагов до поглощения  $-N$ . Затем, воспользовавшись разложением характеристической функции  $f^*(\omega)$  в ряд, получим следующие соотношения:

$$MN = \begin{cases} 1/\mu M\Theta_N & \text{при } \mu \neq 0, \\ 1/\sigma^2 M\Theta_N^2 & \text{при } \mu = 0. \end{cases}$$

Так как  $M\Theta_N \approx cp_c + dp_d$  и  $M\Theta_N^2 \approx c^2 p_c + d^2 p_d$ , то из (6.52) получим приближенное выражение для среднего числа шагов до поглощения

$$MN \approx \begin{cases} \frac{d - c - de^{-\omega_0 c} + ce^{-\omega_0 d}}{e^{-\omega_0 d} - e^{-\omega_0 c}} & \text{при } \mu \neq 0, \\ -c \frac{d}{\sigma^2} & \text{при } \mu = 0. \end{cases}$$

6.5.5. *Случайные блуждания между отражающими экранами*  
 Полагаем  $\lambda_0 = 0$  в момент  $t = n$ , тогда координата частицы равна

$$\Theta_n = \begin{cases} \Theta_{n-1} + \lambda & \text{при } c < \Theta_{n-1} + \lambda_n < d, \\ d & \text{при } \Theta_{n-1} + \lambda_n \geq d, \\ c & \text{при } \Theta_{n-1} + \lambda_n \leq c. \end{cases}$$

Даже при непрерывном распределении каждого скачка после некоторого количества шагов функция распределения координат будет дискретно-непрерывной, так как вероятность пребывания на экране имеет конечную величину (частица уходит с экрана только при следующем шаге). Поэтому удобнее пользоваться функциями распределения, а не плотностями вероятности.

Определим непрерывную справа и неубывающую для  $c < \lambda < d$  функцию  $H_n(\lambda) = P\{\Theta_n \leq \lambda\}$

$$\begin{aligned} H_n(\lambda) &= 0 \text{ при } \lambda < c, \quad H_n(c) = P\{\Theta_n = c\}, \\ 1 - H_n(d - 0) &= P\{\Theta_n = d\}, \quad H_n(\lambda) = 1 \text{ при } \lambda \geq d; \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$P\{\Theta_n \leq \lambda | \Theta_{n-1} = y\} = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda < c, \\ F(\lambda - y) & \text{при } c \leq \lambda \leq d, \\ 1 & \text{при } \lambda \geq d. \end{cases}$$

Здесь  $F(\lambda)$  – функция распределения скачка  $\lambda_n$

$$P\{\Theta_n \leq \lambda\} = H_n(\lambda) = \int_{c-0}^{d+0} F(\lambda - y) dH_{n-1}(y).$$

Интегрируя по частям и предполагая существование функции  $f(\lambda) = \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$ , с учетом (6.53) получим:

$$\begin{aligned} H_n(\lambda) &= F(\lambda - d)H_{n-1}(d + 0) - F(\lambda + c)H_{n-1}(c - 0) + \int_c^d H_{n-1}(y)f(\lambda - y)dy = \\ &= F(\lambda - d) + \int_c^d H_{n-1}(y)f(\lambda - y)dy, \quad c \leq \lambda \leq d. \end{aligned}$$

Можно ожидать, что при  $n \rightarrow \infty$  наступит равновесное состояние:

$$H(\lambda) = F(\lambda - d) + \int_c^d H(y) f(\lambda - y) dy. \quad (6.54)$$

Если случайные приращения дискретны, то

$$H(\lambda) = F(\lambda - d - 0) + \int_c^d H(y) dF(\lambda - y).$$

Интегральное уравнение Фредгольма (6.54) аналитически решается далеко не просто, поэтому равновесное распределение  $H(\lambda)$  находится не всегда. Однако для одного отражающего экрана ( $c = 0, d \rightarrow \infty$ ) из (6.54) следует

$$H(\lambda) = 0, \quad \lambda < 0, \\ H(\lambda) = \int_0^{\infty} H(y) f(\lambda - y) dy, \quad \lambda \geq 0. \quad (6.55)$$

Полученное интегральное уравнение Винера-Хопфа (6.55) в ряде частных случаев может быть решено аналитически.

## 6.6. Непрерывный марковский процесс

### 6.6.1. Определение непрерывного марковского процесса

В противоположность разрывным, непрерывные процессы характеризуются тем, что в любом малом интервале времени имеет место некоторое малое изменение состояния. Процесс является марковским, если условные плотности вероятности зависят только от последнего значения  $\lambda_{n-1}$  в момент  $t_{n-1}$  и не зависят от более ранних значений

$$\pi_n(\lambda_n t_n | \lambda_{n-1}, t_{n-1}; \dots; \lambda_0, t_0) = \pi_n(\lambda_n t_n | \lambda_{n-1}, t_{n-1}), \quad n > 1.$$

Многомерные плотности вероятности МП выражаются через плотность вероятности перехода  $\pi(\lambda, t | \lambda', t')$  и одномерную начальную плотность вероятности  $P(\lambda_0, t_0)$  - они полностью определяют марковский процесс:

$$P_{n+1}(\lambda_0, \dots, \lambda_n; t_0, \dots, t_n) = \pi(\lambda_n, t_n | \lambda_{n-1}, t_{n-1}) \times \dots \times \pi(\lambda_1, t_1 | \lambda_0, t_0) P(\lambda_0, t_0).$$

Марковский процесс остается таковым и в обратном направлении

$$\pi(\lambda_0, t_0 | \lambda_1, t_1; \dots; \lambda_n, t_n) = \pi(\lambda_0, t_0 | \lambda_1, t_1), \quad t_0 < \dots < t_n.$$

Плотность вероятности перехода непрерывного МП удовлетворяет следующим условиям:

1. Неотрицательна и нормирована к единице:

$$\pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) d\lambda = 1.$$

2. Переходит в дельта-функцию при совпадении рассматриваемых моментов времени

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) = \delta(\lambda - \lambda_0).$$

3. Удовлетворяет уравнению Смолуховского – частный случай уравнения Колмогорова- Чепмена, для любых  $t > t' > t_0$

$$\pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\lambda, t | \lambda', t') \pi(\lambda', t' | \lambda_0, t_0) d\lambda'. \quad (6.56)$$

Если  $\pi(\lambda, t | \lambda', t') = \pi(\lambda', \lambda, \tau)$ ,  $\tau = t - t'$ ,  $t, t' > t_0$ , то МП называется **однородным** во времени. Если  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \pi(\lambda', \lambda, \tau) = P_{st}(\lambda)$ , где  $P_{st}(\lambda)$  не зависит от начального состояния  $\lambda'$ , то говорят, что процесс **эргодичен**.

Одномерная плотность вероятности состояния процесса в произвольный момент времени  $t$  описывается следующим выражением:

$$P(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda_0, t_0) \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) d\lambda_0.$$

По одномерной и двумерной плотностям вероятностей можно вычислить корреляционную функцию

$$\begin{aligned} K_\lambda(t, t') &= M\{[\lambda(t) - M\lambda(t)][\lambda(t') - M\lambda(t')]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' \lambda P(\lambda', \lambda; t', t) d\lambda' d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' P(\lambda', t') d\lambda' \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P(\lambda, t) d\lambda, \quad t', t > t_0. \end{aligned} \quad (6.57)$$

В стационарном состоянии, если оно существует, одномерная плотность вероятности не зависит от времени и равна  $P_{st}(\lambda)$ , а двумерная зависит только от  $\tau = t - t'$

$$P(\lambda', \lambda; \tau) = P(\lambda', \lambda; t', t) = P_{st}(\lambda') \pi(\lambda', \lambda; \tau).$$

Для стационарного процесса формула (6.57) упрощается

$$\begin{aligned} K_\lambda(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' \lambda P(\lambda', \lambda; \tau) d\lambda' d\lambda - \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' P_{st}(\lambda') d\lambda' \right\}^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' \lambda P_{st}(\lambda') \pi(\lambda', \lambda; \tau) d\lambda' d\lambda - \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' P_{st}(\lambda') d\lambda' \right\}^2. \end{aligned} \quad (6.58)$$

По функции (6.58) можно найти энергетический спектр  $S(\omega)$  стационарного процесса  $\lambda(t)$

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos(\omega t) d\tau, \quad \omega \geq 0.$$

### 6.6.2. Дискретная модель непрерывного процесса

Рассмотрим вначале однородную цепь Маркова, в которой за единицу времени возможны переходы из  $j$ -го состояния в  $j+1, j, j-1$  с вероятностями  $\alpha_j, 1 - \alpha_j - \beta_j, \beta_j$  соответственно, тогда на основании уравнения Маркова справедливо

$$\pi_{ij}(m) = \alpha_{j-1} \pi_{i,j-1}(m-1) + (1 - \beta_j - \beta_j) \pi_{ij}(m-1) + \beta_{j+1} \pi_{i,j+1}(m-1),$$

где  $\pi_{ij}(m)$  – вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  за  $m$  шагов.

По аналогии с приведенным уравнением для непрерывного процесса можно записать:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) = & \pi(\lambda - \Delta\lambda, t - \Delta t | \lambda_0, t_0) \alpha(\lambda - \Delta\lambda) + \\ & + \pi(\lambda, t - \Delta t | \lambda_0, t_0) [1 - \alpha(\lambda) - \beta(\lambda)] + \pi(\lambda + \Delta\lambda, t - \Delta t | \lambda_0, t_0) \beta(\lambda + \Delta\lambda), \end{aligned} \quad (6.59)$$

где  $\Delta\lambda$  – перемещение, которое может совершить частица за время  $\Delta t$ ;  $\pi(\cdot)$  – плотность вероятности перехода из одного состояния в другое за какое-то время.

Чтобы перейти к непрерывному случаю, необходимо устремить  $\Delta t$  и  $\Delta\lambda$  к нулю и наложить некоторые ограничения на вероятности  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$ .

Среднее значение приращения координаты за малое время  $\Delta t$  при фиксированном  $\lambda(t)$

$$m_\lambda(\Delta t) = M\{[\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)] | \lambda(t)\},$$

дисперсия этого приращения

$$\sigma_\lambda^2(\Delta t) = M\{[\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)]^2 | \lambda(t)\} - m_\lambda^2(\Delta t).$$

Предельные относительные значения этих величин:

$$a(\lambda) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_\lambda(\Delta t)}{\Delta t}, \quad b(\lambda) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma_\lambda^2(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Среднее значение условных приращений за время  $\Delta t$ :

$$m_\lambda(\Delta t) = [\alpha(\lambda) - \beta(\lambda)] \Delta\lambda; \quad \sigma_\lambda^2(\Delta t) = \{\alpha(\lambda) + \beta(\lambda) - [\alpha(\lambda) - \beta(\lambda)]^2\} (\Delta\lambda)^2.$$

При этом

$$a(\lambda) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\alpha(\lambda) - \beta(\lambda)]^2 \frac{\Delta\lambda}{\Delta t}; \quad (6.60)$$

$$b(\lambda) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{\alpha(\lambda) + \beta(\lambda) - [\alpha(\lambda) - \beta(\lambda)]^2\} \frac{(\Delta\lambda)^2}{\Delta t}. \quad (6.61)$$

Чтобы эти выражения имели конечные значения, необходимо соответствующим образом определить вид  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  при согласованном стремлении  $\Delta t$  и  $\Delta\lambda$  к нулю.

Предположим, что  $0 < b(\lambda) < c = \text{const}$ , если теперь положить

$$(\Delta\lambda)^2 = c\Delta t, \quad \alpha(\lambda) = \frac{b(\lambda) + a(\lambda)\Delta\lambda}{2c}, \quad \beta(\lambda) = \frac{b(\lambda) - a(\lambda)\Delta\lambda}{2c}, \quad (6.62)$$

то (6.60) и (6.61) будут иметь конечные значения. Следовательно, элемент приращения  $\Delta\lambda$  за малое время  $\Delta t$  должен иметь порядок не больший, чем  $(\Delta t)^{1/2}$ , т.е.  $\Delta\lambda = o[(\Delta t)^{1/2}]$ , а вероятности  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  отличаются от одной и той же постоянной на малую величину  $o[(\Delta t)^{1/2}]$ , так что величина  $[\alpha(\lambda) - \beta(\lambda)]$  имеет тот же порядок малости.

Допустим, что входящие в (6.59) функции допускают двойное дифференцирование и поэтому могут быть представлены рядом Тейлора:

$$\pi(\lambda \pm \Delta\lambda, t \pm \Delta t | \lambda_0, t_0) \approx \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) \pm \Delta\lambda \frac{\partial \pi}{\partial \lambda} \pm \Delta t \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\Delta\lambda)^2 \frac{\partial^2 \pi}{\partial \lambda^2},$$

$$\alpha(\lambda - \Delta\lambda) \approx \alpha(\lambda) - \Delta\lambda \alpha'(\lambda) + \frac{1}{2} (\Delta\lambda)^2 \alpha''(\lambda).$$

Если подставить это разложение в (6.59), выразить  $\alpha(\lambda)$ ,  $\beta(\lambda)$  и их производные через  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  согласно (6.62), разделить результат на  $\Delta t$  и перейти затем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то для непрерывного процесса  $\lambda(t)$  получим уравнение

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \lambda} [a(\lambda)\pi] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [b(\lambda)\pi], \quad \pi = \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0).$$

Уравнение в частных производных относится к параболическому типу и играет фундаментальную роль при изучении марковских процессов.

### 6.6.3. Уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова

Вероятность перехода  $\pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0)$  непрерывного МП удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [a(\lambda, t)\pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [b(\lambda, t)\pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0)]; \quad (6.63)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t_0} \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) = a(\lambda_0, t_0) \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) + \frac{1}{2} b(\lambda_0, t_0) \frac{\partial^2}{\partial \lambda_0^2} \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0).$$

(6.64)

Уравнение (6.63) – уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, или прямое уравнение; уравнение (6.64) – уравнение Колмогорова, или обратное уравнение. Оба уравнения можно получить из уравнения Смолуховского (6.56) следующим образом: введение характеристической функции, обратное

преобразование Фурье, разложение в ряд Тейлора с последующим переходом к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ . В результате получим прямое уравнение в общем виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [K_n(\lambda, t) \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0)], \quad (6.65)$$

где

$$\begin{aligned} K_n(\lambda, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M\{[\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)]^n | \lambda(t)\} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int [\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)]^n \pi(\lambda, t + \Delta t | \lambda, t) d\lambda. \end{aligned}$$

Если  $K_n(\lambda, t) \neq 0$ ,  $n = 1, 2$ ;  $K_n(\lambda, t) = 0$ ,  $n \geq 3$ , то марковский процесс, удовлетворяющий этим условиям, называется **диффузионным**. Для диффузионных МП уравнение (6.65) упрощается и переходит в уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова. По традиции (поведение броуновских частиц)  $a(\lambda, t)$  и  $b(\lambda, t)$  часто называют коэффициентами сноса и диффузии. Коэффициент сноса характеризует среднее значение локальной скорости, коэффициент диффузии – локальную скорость изменения дисперсии приращения.

Решение уравнения должно быть неотрицательным, нормированным к единице и удовлетворять начальному условию  $\pi(\lambda, t_0 | \lambda_0, t_0) = \delta(\lambda - \lambda_0)$ . В этом случае для неограниченного пространства решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова называется фундаментальным решением задачи Коши.

Если  $\lambda(t_0)$  не фиксировано, а является случайным, то в качестве начального условия указывается плотность вероятности  $P(\lambda, t_0) = P_0(\lambda)$ . При этом  $P(\lambda, t)$  в произвольный момент времени  $t > t_0$  можно вычислить двумя способами: по условию согласованности плотностей вероятности

$$P(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda_0, t_0) \pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) d\lambda_0, \quad (6.66)$$

т.е. прежде необходимо найти фундаментальное решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова ( $\pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0)$ ); можно сразу искать решение уравнения для плотности вероятности  $P(\lambda, t)$  с начальным условием  $P(\lambda, t_0) = P_0(\lambda)$ , умножив уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова на  $P(\lambda_0, t_0)$  и проинтегрировав по  $\lambda_0$ , с учетом (6.66) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\lambda, t) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [a(\lambda, t) P(\lambda, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [b(\lambda, t) P(\lambda, t)], \quad (6.67)$$

т.е. одномерная плотность вероятности диффузионного МП удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова так же, как и в его обобщенном виде (6.65) ( $\pi(\lambda, t | \lambda_0, t_0) \rightarrow P(\lambda, t)$ ). Для описания непрерывно-разрывного процесса целесообразно оперировать не с плотностями вероятности перехода, а с функцией распределения перехода

$$F(\lambda, t | \lambda_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\lambda} \pi(\lambda', t' | \lambda_0, t_0) d\lambda'.$$

Обратное уравнение (Колмогорова) для этой функции сохраняет прежний вид, что несправедливо для прямого уравнения.

#### 6.6.4. Граничные условия

Для отыскания решения уравнения (6.67) необходимо кроме начальных указать еще и граничные условия. Примем следующую физическую интерпретацию уравнения (6.67): плотность вероятности  $P(\lambda, t)$  – концентрация (относительное число) частиц в точке  $\lambda$  в момент  $t$ . Поток частиц  $G$  вдоль оси  $\lambda$  складывается из систематического потока  $aP$ , где  $a$  – локальная скорость систематического движения (коэффициент сноса), и диффузионного потока  $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} (bP)$ , где  $b$  – коэффициент диффузии, т.е.

$$G(\lambda, t) = a(\lambda, t)P(\lambda, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} [b(\lambda, t)P(\lambda, t)]. \quad (6.68)$$

Из (6.67) и (6.68) следует, что уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова – есть уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\lambda, t) + \frac{\partial}{\partial \lambda}G(\lambda, t) = 0, \quad (6.69)$$

выражающее сохранение числа частиц (изменение концентрации в точке  $\lambda$  во времени равно разности потоков через границы  $\lambda$  и  $\lambda+d\lambda$ ), назовем его законом сохранения вероятности или законом непрерывности.

Если случайный процесс принимает значения от  $-\infty$  до  $\infty$ , то интегрируя (6.69) по  $\lambda$  от  $-\infty$  до  $\infty$  и учитывая условия нормировки, получаем  $G(-\infty, t) = G(\infty, t)$ . В практических задачах обычно выполняются более сильные условия:  $G(-\infty, t) = G(\infty, t) = 0$ ,  $P(-\infty, t) = P(\infty, t) = 0$ , которые можно назвать нулевыми граничными условиями. Если  $\lambda(t)$  изменяется в интервале  $(c, d)$ , то граничные условия нулевого потока имеют вид  $G(c, t) = G(d, t) = 0$  – условия отражающих границ (экранов).

Если в граничных точках расположены поглощающие экраны, то граничные условия имеют вид  $P(c, t) = P(d, t) = 0$  – происходит концентрация частиц на границах. Граничные условия для упругих жестких экранов – это сочетание  $G(c, t) = G(d, t) = 0$  и  $P(c, t) = k_d\delta(c)$  либо  $P(d, t) = k_d\delta(d)$ .

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение марковского случайного процесса.
2. Как можно трансформировать сложную цепь Маркова в простую?
3. Напишите уравнение Маркова.
4. Какая матрица называется стохастической?
5. Какие цепи Маркова называются стационарными, эргодическими?
6. Дайте определение поглощающего, отражающего и упругого жесткого экранов.
7. Дайте определение производящей функции последовательности.
8. Напишите уравнение Колмогорова-Чепмена для дискретного марковского процесса.
9. Какие процессы называются полумарковскими?
10. Какие случайные процессы называются марковскими последовательностями?
11. Какие последовательности случайных величин называются мартингалами?
12. При анализе каких процессов используется тождество Вальда?
13. Каким условиям должна удовлетворять плотность вероятности перехода непрерывного марковского процесса?
14. Какие уравнения описывают вероятность перехода непрерывного марковского процесса?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Анго А.* Математика для электро-и радиоинженеров. - М.: Наука, 1965. - 781 с.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1967. - 436 с.
3. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. - М.: Наука, 1967. - 416 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. - М.: Наука, 1967. - 832 с.
5. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики: Учеб. пособие. - М.: Высш. шк., 1970. - 712 с.
6. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры: Учеб. пособие. - М.: Наука, 1970. - 400 с.
7. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы.- М.: Сов. радио, 1977. - 488 с.

1.