

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

М. С. БЕСПАЛОВ

ДИСКРЕТНЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

Учебное пособие



Владимир 2017

УДК 517.9

ББК 22.1

Б53

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, доцент
профессор кафедры математического моделирования
Московского государственного технического университета
им. Н. Э. Баумана
А. Н. Канатников

Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича
Столетовых
С. Г. Танкеев

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Беспалов, М. С.

Б53 Дискретные и вероятностные модели : учеб. пособие /
М. С. Беспалов ; Владим. гос. ун-т. им. А. Г. и Н. Г. Сто-
летовых. — Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. — 84 с.
ISBN 978-5-9984-0832-8

Рассмотрен математический аппарат, применяемый в современных научных исследованиях по дискретной математике и теории вероятностей.

Может быть использовано бакалаврами, магистрантами и аспирантами математических, информационных и радиотехнических специальностей.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 1. Библиогр.: 16 назв.

УДК 517.9

ББК 22.1

ISBN 978-5-9984-0832-8

© ВлГУ, 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие ориентировано на студентов, обучающихся в магистратуре по математическим специальностям. Предполагается, что читатель знаком с основами курсов математического анализа, дискретной математики, функционального анализа и теории вероятностей. В пособие включен математический аппарат для углубленного изучения теории вероятностей и дискретной математики. Выбранные разделы взаимосвязаны и составляют единый курс.

Отдельные разделы пособия традиционно рассматриваются в рамках различных математических дисциплин, поэтому материал подобран из учебников, относящихся к разным разделам математики. Тем не менее некоторые вопросы пока в учебниках не излагались.

Непосредственно к теории вероятностей относится аппарат производящих и характеристических функций. Производящие функции для последовательностей также широко используются в дискретной математике. Как удачный модельный пример приводится производящая функция последовательности чисел Фибоначчи. Для студентов, специализирующихся по прикладной математике и информатике, представляют интерес две различные системы счисления на базе чисел Фибоначчи. Вычисление характеристической функции представляет собой один из вариантов вычисления преобразования Фурье. Предлагается современный взгляд на преобразование Фурье с изложением спектрального представления оператора. Далее осуществляется естественный переход к дискретному преобразованию Фурье, для которого приводится аналогичное спектральное представление оператора. Для практической реализации дискретного преобразования Фурье важную роль играют быстрые алгоритмы. Для дискретного преобразования Фурье анализируется пространство дискретных периодических функций, называемых сигналами в курсе цифровой обработки информации. Как один из вариантов непосредственного применения этого аппарата рассматриваются дискретные периодические функции Бернулли.

В пособии предлагается лекционный курс, который сопровождается набором упражнений, достаточным для проведения практических занятий по данной дисциплине. В конце пособия приведены ответы на эти упражнения.

Автор надеется, что материалы пособия будут интересны и полезны студентам, аспирантам и научным работникам, занимающимся вопросами прикладной математики, информатики, обработки и анализа цифровых сигналов, и поспособствуют расширению применений новых теоретических результатов к решению прикладных задач.

1. Производящие функции в теории вероятностей

1.1. Основные свойства производящих функций

Случайную величину ξ , которая принимает только целые неотрицательные значения, назовем *натуральной*. Для натуральной случайной величины

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \quad p_k \geq 0, \quad (1)$$

и она задается последовательностью $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$, т. е. определяющим набором вероятностей. Частный случай формулы (1) для конечной случайной величины, принимающей значения не больше n :

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{P}\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^n p_k = 1.$$

Производящей функцией натуральной случайной величины ξ называется

$$\varphi(x) = \varphi_{\xi}(x) = M \left[x^{\xi} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k, \quad (2)$$

где в общем случае $x \in \mathbb{C}$ (комплексная переменная), хотя обычно берут $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.1. *Для каждой натуральной случайной величины ξ ее производящая функция $\varphi_{\xi}(x)$ обладает свойствами:*

- функция $\varphi_{\xi}(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$;
- $\varphi_{\xi}(1) = 1$ и $\varphi_{\xi}^{(k)}(0) \geq 0$ для всех $k \geq 0$;
- $\varphi_{\xi}(z)$ является многочленом с неотрицательными коэффициентами тогда и только тогда, когда ξ конечна.

Доказательство. Аналитичность и непрерывность функции вытекает из того, что степенной ряд (2) мажорируется числовым рядом (1) в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Ряд (2) служит рядом Тейлора для функции $\varphi_{\xi}(x)$. Его коэффициенты вычисляются по формуле

$$p_k = \frac{1}{k!} \varphi_{\xi}^{(k)}(0), \quad (3)$$

что влечет неотрицательность всех производных производящей функции в нуле. Условие $\varphi_{\xi}(1) = 1$ эквивалентно (1). Для конечной случайной величины ряд (2) превращается в многочлен. \square

Единственность разложения функции в ряд Тейлора влечет следующий результат.

Теорема 1.2. *Отображение, которое каждой натуральной случайной величине ставит в соответствие производящую функцию $\varphi_\xi(z)$, является взаимно однозначным. Областью значений этого отображения служит множество функций, удовлетворяющих условиям 1 и 2 теоремы 1.1.*

Для случайных величин рассматривают:

$$\text{начальные моменты} \quad m_k = M[\xi^k] = \sum_{n=0}^{\infty} n^k p_n,$$

$$\text{центральные моменты} \quad M[(\xi - M[\xi])^k] = \sum_{n=0}^{\infty} (n - m_1)^k p_n$$

$$\text{и факториальные моменты} \quad M[\xi^{[k]}] = \sum_{n=0}^{\infty} n^{[k]} p_n,$$

где $\xi^{[k]} = \xi(\xi - 1)\dots(\xi - k + 1)$ – обобщенная (факториальная) степень. Очевидно, что $M[\xi^{[1]}] = m_1$, $M[\xi^{[2]}] = M[\xi^2] - M[\xi]$. Отсюда

$$D[\xi] = M[\xi^{[2]}] + M[\xi] - (M[\xi])^2.$$

Теорема 1.3. *Если конечен k -й факториальный момент, то*

$$M[\xi^{[k]}] = \lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi_\xi^{(k)}(x).$$

Доказательство. Аналитическую в круге $|x| < 1$ функцию $\varphi_\xi(x)$ можно дифференцировать нужное число раз. Поэтому определена k -я производная

$$\varphi_\xi^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m^{[k]} x^{m-k} p_m,$$

где ряд справа сходится в точке $x = 1$, так как превращается в $M[\xi^{[k]}]$. Согласно теореме Абеля возможен предельный переход

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \varphi_\xi^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m^{[k]} p_m = M[\xi^{[k]}]. \quad \square$$

В большинстве частных случаев имеем $M[\xi^{[k]}] = \varphi_\xi^{(k)}(1)$, что и используется в практических вычислениях. Как следствие получаем

$$M[\xi] = \varphi'_\xi(1), \quad D[\xi] = \varphi''_\xi(1) + \varphi'_\xi(1) - (\varphi'_\xi(1))^2.$$

Теорема 1.4. Если натуральные случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, то

$$\varphi_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}(x) = \varphi_{\xi_1}(x) \cdot \varphi_{\xi_2}(x) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(x).$$

Доказательство. Случайные величины $x^{\xi_1}, x^{\xi_2}, \dots, x^{\xi_n}$ независимы как функции от независимых случайных величин. Поэтому

$$\varphi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}(x) = M[x^{\xi_1 + \dots + \xi_n}] = M[x^{\xi_1}] \cdot \dots \cdot M[x^{\xi_n}] = \varphi_{\xi_1}(x) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(x).$$

1.2. Производящая функция для случайного числа слагаемых. Вывод формулы Пуассона

Более сложная конструкция суммы случайных величин встречается в том случае, когда число слагаемых не фиксировано, а является тоже натуральной случайной величиной, которую обозначим ν . Например, величина ν равна числу испытаний до наступления некоего выделенного события. Тогда обозначим

$$\eta_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu, \quad \text{где } \eta_0 = 0.$$

Теорема 1.5. Если натуральные случайные величины $\nu, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ при любом n независимы, а величины ξ_k одинаково распределены, то

$$\varphi_{\eta_\nu}(x) = \varphi_\nu[\varphi_{\xi_1}(x)].$$

Доказательство. Введем в рассмотрение условное событие $\{x^{\eta_\nu} / \nu\}$, равное случайной величине x^{η_ν} при условии, что реализована случайная величина ν . При этом величина ν примет некое значение $\{\nu = k\}$, где $k \in \mathbb{N}_0$.

По определению $\varphi_{\eta_\nu}(x) = M[x^{\eta_\nu}]$ следует трактовать как

$$M[M[x^{\eta_\nu} / \nu]] = \sum_{k=0}^{\infty} M[x^{\eta_k}] \cdot \mathbf{P}\{\nu = k\}.$$

По теореме 1.4 имеем $M[x^{\eta_k}] = (\varphi_\xi(x))^k$ (индекс ν величины ξ опустили). Обозначим $y = \varphi_\xi(x)$. Получили

$$\varphi_{\eta_\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \cdot \mathbf{P}\{\nu = k\} = \varphi_\nu(y) = \varphi_\nu[\varphi_\xi(x)]. \quad \square$$

Теорема 1.6. Пусть при любом $n \in \mathbb{N}$ последовательность $\{p_k(n)\}$ является определяющим набором вероятностей для натуральной случайной величины ξ_n , т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(n) = 1, \quad p_k(n) \geq 0 \quad (4)$$

с производящей функцией $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(n)x^k$. Существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(n) = p_k \quad \text{с условием} \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \quad (5)$$

тогда и только тогда, когда при любом $x \in [0, 1)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x), \quad (6)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad \varphi(1) = 1. \quad (7)$$

Доказательство. (\Rightarrow) Пусть выполнено (5). Представим

$$\varphi_n(x) - \varphi(x) = \sum_{k=0}^N (p_k(n) - p_k)x^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k(n)x^k - \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k x^k.$$

Здесь выберем N для фиксированного $x \in [0, 1)$ и наперед заданного $\epsilon > 0$ из условия

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} x^k < \frac{\epsilon}{3}.$$

С учетом условий $p_k(n) < 1$, $p_k \leq 1$ это влечет

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} p_k(n)x^k < \frac{\epsilon}{3}, \quad \sum_{k=N+1}^{\infty} p_k x^k < \frac{\epsilon}{3}.$$

Для N слагаемых из условия (5) найдется номер N_1 такой, что при всех $n > N_1$ имеем

$$\left| \sum_{k=0}^N (p_k(n) - p_k)x^k \right| < \sum_{k=0}^N |p_k(n) - p_k| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Получили при всех $n > N_1$ при произвольно выбранном $x \in [0, 1)$:

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \epsilon.$$

Условие $\varphi(1) = 1$ вытекает из условия $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ и доказанного предельного перехода.

(\Leftarrow) *Докажем методом от противного.* Пусть выполнено условие сходимости (6) для производящих функций. Предположим, что условие (5) не выполняется. Это значит, что какие-то из множеств $M_k = \{p_k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ имеют более одной предельной точки. Выберем подпоследовательности $\{n'_m\}$ и $\{n''_m\}$ доставляющие сходимость к разным предельным точкам (хотя бы для двух каких-то k):

$$\lim_{n'_m \rightarrow \infty} p_k(n'_m) = p'_k, \quad \lim_{n''_m \rightarrow \infty} p_k(n''_m) = p''_k.$$

Рассмотрим эти пределы по всем k . Получим различные последовательности $\{p'_k\}$ и $\{p''_k\}$. Тогда по первой части теоремы соответствующие последовательности производящих функций сходятся к разным функциям

$$\lim_{n'_m \rightarrow \infty} \varphi_{n'_m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p'_k x^k, \quad \lim_{n''_m \rightarrow \infty} \varphi_{n''_m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p''_k x^k,$$

что противоречит (6). \square

Теорема 1.7. *Если натуральные случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, то случайная величина $\xi = \xi_1 + \xi_2$ является тоже натуральной. Вероятности значений для нее вычисляются по формуле*

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \sum_{j=0}^k \mathbf{P}\{\xi_1 = j\} \cdot \mathbf{P}\{\xi_2 = k - j\}.$$

Доказательство теоремы вытекает из двух фундаментальных утверждений: теоремы умножения независимых событий и теоремы сложения несовместных событий.

Вывод формулы Пуассона. Пусть производится n независимых испытаний с вероятностью успеха в каждом из них, равной p , где $0 < p < 1$. Для случайной величины ξ (распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p), равной числу успехов в этих испытаниях, вероятности вычисляются по формуле Бернулли

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } q = 1 - p.$$

В случае неограниченного увеличения числа испытаний n будем вероятность успеха в одном испытании полагать плавно меняющейся и равной p_n , но так, что $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$. Тогда и случайные величины будут меняться, что обозначим ξ_n . Из упражнения 1.1

$$\varphi_{\xi_n}(x) = (px + q)^n = (p_n x + q_n)^n.$$

Положим $\lambda_n = np_n$, откуда $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$, $q_n = 1 - \frac{\lambda_n}{n}$, поэтому

$$\varphi_{\xi_n}(x) = \left(1 + \frac{\lambda_n}{n}(x-1)\right)^n \rightarrow \varphi(x) = e^{\lambda(x-1)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Согласно упражнению 1.2 полученная $\varphi(x)$ есть производящая функция закона Пуассона ($P\{\eta = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$). Отсюда по теореме 1.6 последовательность плавно меняющихся (биномиальных) распределений ξ_n сходится к случайной величине η , распределенной по закону Пуассона.

1.3. Упражнения

1.1. Для случайной величины ξ , распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p , вычислить производящую функцию. Через производящую функцию вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, а также все ее факториальные моменты.

1.2. Для случайной величины ξ , распределенной по закону Пуассона с параметром λ , вычислить производящую функцию. Через производящую функцию вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1.3. Пусть вероятность попадания в цель при одном (каждом) выстреле равна p . Случайная величина τ равна числу выстрелов до первого попадания. Найти производящую функцию для случайной величины τ , а также математическое ожидание и дисперсию для нее.

1.4. Пусть τ_3 равна числу выстрелов до трех первых попаданий. Вычислить производящую функцию для τ_3 . Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

1.5. Две независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 распределены по закону Пуассона с параметрами 2 и 3 соответственно. Найти закон распределения случайной величины $\xi = \xi_1 + \xi_2$.

1.6. Атаку по объекту совершают с помощью последовательно вылетающих самолетов с нагрузкой в $n = 4$ авиационные бомбы, каждая из которых с равной вероятностью может попасть в объект и промахнуться по нему. В результате атаки (сброса всех бомб) одного самолета цель, перемещающаяся по объекту, может быть поражена с вероятностью $p = 0,3$. Осуществляется постоянный мониторинг атак, в результате которого дается указание об их прекращении при поражении цели. Найти производящую функцию случайной величины η_ν , равной числу попавших по объекту бомб в результате осуществленных ν вылетов до поражения цели. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины η_ν . Как изменятся характеристики η_ν , если в операции использовать более современные самолеты с бомбовой нагрузкой $n = 6$ и обладающие в два раза большей вероятностью поражения цели $p = 0,6$?

1.7. Испытанием назовем одновременное подбрасывание монеты и игрального кубика. Успехом считается выпадение герба на монете или числа, кратного трем, на кубике. Поэтому при одном испытании может быть 0, 1 или 2 успеха. Случайная величина ξ_2 равна числу успехов при двух испытаниях. Найти производящую функцию, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины, а также ее закон распределения.

2. Производящие функции последовательностей. Последовательность Фибоначчи и системы счисления на ее основе

2.1. Производящие функции последовательностей

Для последовательности чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *производящей функцией* называется степенной ряд

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Иногда используют обозначение $\varphi_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Как частный случай аналогично рассматривается производящая функция *кортежа* (конечного набора чисел) $\{a_n\}_{n=0}^m$, который можно нулями продолжить до *финитной* последовательности,

$$A(t) = \sum_{n=0}^m a_n t^n.$$

Лемма 2.1. *Производящая функция суммы последовательностей равна сумме производящих функций* $\varphi_{a+b}(t) = \varphi_a(t) + \varphi_b(t)$.

Важный вопрос существования производящей функции, совпадающий с проблемой сходимости ряда, не затрагиваем.

Производящая функция кортежа есть многочлен. При рассмотрении произведения многочленов $A(t)$ и $B(t)$ возникает понятие *свертки* коэффициентов

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (8)$$

Определение 2.1. *Сверткой* двух последовательностей $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется последовательность $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, элементы которой вычисляются по формуле (8). Для свертки принято обозначение

$$c = a * b.$$

Теорема 2.1. *Производящая функция свертки равна произведению производящих функций*

$$\varphi_{a*b}(t) = \varphi_a(t)\varphi_b(t).$$

Эта теорема очевидна для финитных последовательностей (кортежей) и формально обобщается на общий случай.

2.2. Последовательность Фибоначчи и ее производящая функция

Последовательность чисел $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, заданная рекуррентным соотношением

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (9)$$

и начальным условием

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1,$$

называется *последовательностью Фибоначчи*.

Вычислим производящую функцию для нее при тех t , где ряд сходится:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f_0 + f_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} f_n t^n = f_0 + f_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} t^n = \\ &= f_0 + f_1 t + t \sum_{n=1}^{\infty} f_n t^n + t^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = 0 + t + t\varphi(t) + t^2\varphi(t). \end{aligned}$$

Отсюда $\varphi(t) - t\varphi(t) - t^2\varphi(t) = t$ и

$$\varphi(t) = \frac{t}{1 - t - t^2}.$$

Корни знаменателя $t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Возьмем корни с противоположными знаками и обозначим

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Производящую функцию можно переписать в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \alpha t} - \frac{1}{1 - \beta t} \right).$$

Отсюда получаем ее представление в виде ряда

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^k - \beta^k) t^k$$

и явную формулу для чисел Фибоначчи

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^k - \beta^k).$$

Лемма 2.2. *Скорость роста чисел Фибоначчи*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \alpha.$$

Доказательство. Так как $\alpha > \beta$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}} = \alpha.$$

2.3. Фибоначчиева система счисления

Лемма 2.3. *При $k \geq 2$ имеем*

$$f_{2k} = f_1 + f_3 + \dots + f_{2k-3} + f_{2k-1}, \quad (10)$$

$$f_{2k+1} = 1 + f_0 + f_2 + \dots + f_{2k-2} + f_{2k}. \quad (11)$$

Доказательство. База индукции для формулы (10): $f_4 = f_1 + f_3$.
Индуктивное предположение для формулы (10) имеет вид

$$f_{2k-2} = f_1 + f_3 + \dots + f_{2k-3}.$$

Отсюда по основной формуле (9) имеем

$$f_{2k} = f_{2k-2} + f_{2k-1} = f_1 + f_3 + \dots + f_{2k-3} + f_{2k-1}.$$

База индукции для формулы (11): $f_3 = 1 + f_0 + f_2$.

Индуктивное предположение для формулы (11) имеет вид

$$f_{2k-1} = 1 + f_0 + f_2 + \dots + f_{2k-2}.$$

Отсюда по основной формуле (9) имеем

$$f_{2k+1} = f_{2k-1} + f_{2k} = 1 + f_0 + f_2 + \dots + f_{2k-2} + f_{2k}.$$

Следствие 2.1. *Если натуральное s представлено в виде*

$$s = f_{i_0} + f_{i_1} + \dots + f_{i_s}, \quad \text{где } i_0 = 0, i_k - i_{k-1} > 1, \quad (12)$$

то $s < f_{i_s+1}$.

Доказательство. Сравним (12) с формулами (10) и (11), начиная с последних слагаемых по убыванию. Если слагаемые следуют четко с шагом 2 в индексе, то получается максимально возможное число f_{2k} или $f_{2k+1} - 1$. Но в случае f_{2k} мы не выходим на первое слагаемое f_0 . Чтоб получить представление вида (12), следует в f_{2k} заменить f_1 на $1 + f_0$. Если же в представлении (12) встретится шаг больше, чем 2, то соответствующие слагаемые окажутся меньше, а их число не будет больше. \square

Следствие 2.2. При всех $n \geq 0$ имеем

$$f_{n+2} = 1 + \sum_{k=0}^n f_k.$$

Доказательство. Сложить формулы (10) и (11), а также формулы для f_{2k} и f_{2k-1} .

Теорема 2.2 (Цекендорфа). Любое натуральное s однозначно представимо в виде (12).

Доказательство методом от противного. Сначала докажем существование представления (12). Если не любое число представимо, то предположим, что s есть минимальное из натуральных чисел, для которого представление (12) невозможно. Обозначим $j(s)$ максимальный номер числа Фибоначчи, не превосходящего s :

$$f_{j(s)} \leq s < f_{j(s)+1}. \quad (13)$$

При этом частный случай $s = f_{j(s)}$ неприменим, так как существует требуемое представление $s = f_0 + f_{j(s)}$. Полагаем, что $f_{j(s)} < s < f_{j(s)+1}$.

Рассмотрим

$$s' = s - f_{j(s)}.$$

Вычтем $f_{j(s)}$ из всех частей неравенства (13): $0 < s' < f_{j(s)-1}$. По предположению для s' представление (12) есть, а согласно полученному неравенству старшее слагаемое этого представления не больше $f_{j(s)-2}$. Если добавим к этому представлению $f_{j(s)}$, то получим представление (12) для s . Получили противоречие с предположением.

Докажем единственность представления (12). Пусть s – минимальное из чисел, для которого возможны два различных представления:

$$s = f_{i_0} + f_{i_1} + \dots + f_{i_s}, \quad s = f_{j_0} + f_{j_1} + \dots + f_{j_s}.$$

Если старшие слагаемые различны, например $j_s > i_s$, то согласно следствию 2.1 они представляют разные числа:

$$s = f_{j_0} + f_{j_1} + \dots + f_{j_s} \geq f_{j_s} > f_{i_0} + f_{i_1} + \dots + f_{i_s} = s.$$

Остался случай $j_s = i_s$, который приводит к противоречию с утверждением о минимальности s при рассмотрении $s' = s - f_{j_s} = s - f_{i_s}$. \square

Определение 2.2. Представлением любого целого неотрицательного числа в *фибоначчиевой системе счисления* называется его запись в алфавите $\{0, 1\}$ в виде кортежа, начинающегося и заканчивающегося единицей

и не имеющего в записи двух рядом стоящих единиц, в соответствии с разложением (12), где единица на j -м разряде означает наличие слагаемого f_j в представлении (12), а нуль — его отсутствие.

Таблица представления начальных чисел множества \mathbb{N}_0 в фибоначчевой системе (где младшие разряды справа) следующая:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	101	1001	10001	10101	100001	100101	101001	1000001	1000101

Фибоначчевую систему счисления удобно использовать для записи больших кортежей целых неотрицательных чисел без каких-либо ограничений их значения. В этом случае мы заранее не знаем величину разрядной сетки для представления всех чисел в двоичной системе счисления. Возможен и другой случай, когда эта величина разрядной сетки большая, а числа в рассматриваемом наборе часто встречаются маленькие. Иными словами, фибоначчевую систему счисления можно использовать для сжатия неструктурированной информации.

Очередной разряд добавляется на очередном числе Фибоначчи. Числа от f_k до $f_{k+1} - 1$ представляются $k + 1$ битом. Скорость роста разрядной сетки согласно лемме 2.2 равна $\alpha \approx 1,6$.

Представление чисел в фибоначчевой системе счисления позволяет их однозначно декодировать. Разделительный знак между числами ставится там, где две или более единиц подряд. Например, предложенный код

$$1101100110001110000100101$$

обрабатывается расстановкой разделительных знаков

$$1, 101, 1001, 10001, 1, 10000100101$$

и декодированием ($61 = 0 + 1 + 5 + 55 = f_0 + f_2 + f_5 + f_{10}$)

$$0, 1, 2, 3, 0, 61.$$

Представляют произвольное число s в фибоначчевой системе с помощью «жадного» алгоритма. Находим ближайшее число Фибоначчи f_{i_s} , не превосходящее s : $f_{i_s} \leq s < f_{i_s+1}$. Далее вычитаем его из s : $s' = s - f_{i_s}$. Повторяем эти вычисления для s' .

Просто строится алгоритм добавления единицы. Чуть сложнее — алгоритм вычитания единицы. Еще немного сложнее — алгоритм сложения двух чисел в фибоначчевой системе. Алгоритм умножения чисел в фибоначчевой системе уже существенно более сложный.

2.4. Линейная форма Фибоначчи

Для сжатия массивов, состоящих из очень больших чисел, используют *линейную форму Фибоначчи*. В основе этого представления лежит следующая лемма.

Лемма 2.4. *Любые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.*

Доказательство. Если предположить, что числа f_{n+1} и f_n делятся на c , то и числа f_{n-1} и f_n делятся на c :

$$f_{n+1} = ac, \quad f_n = bc \quad \Rightarrow \quad f_{n-1} = (a - b)c.$$

Так как f_1 и f_2 взаимно просты, то и f_{n+1} , f_n взаимно просты.

Определение 2.3. Представление натурального числа n в виде

$$n = af_j + bf_{j+1}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{N}_0, \quad (14)$$

называют линейной формой Фибоначчи.

Форма (14) называется канонической, если $0 \leq b < a < f_{j+1}$.

Теорема 2.3. *Для каждого натурального n каноническая форма (14) единственна.*

Доказательство. Предположим, что для n существуют две канонические формы: форма (14) и $n = cf_k + df_{k+1}$, где $0 \leq d < c < f_{k+1}$.

Если $k > j$, то, применяя (9), приведем к одному типу разложения

$$n = cf_k + df_{k+1} = df_{k-1} + (c + d)f_k = \dots = Af_j + Bf_{j+1},$$

где $A < B$. Равенство $af_j + bf_{j+1} = Af_j + Bf_{j+1}$ перепишем в виде

$$(a - A)f_j = (B - b)f_{j+1}, \quad \text{где } a - A \geq 0, B - b \geq 0.$$

Если бы было $a - A < 0$, то неравенство $b < a < A < B$ привело бы к противоречию.

Тогда $a - A$ делится на f_{j+1} по лемме 2.4 и $a - A < f_{j+1}$. Отсюда $a - A = 0$.

Случай $k = j$ проверяется аналогично. \square

Замена натурального n на тройку чисел (a, b, j) из канонического разложения (14) соответствует кодированию *линейным кодом Фибоначчи*.

Возможно сочетание двух рассмотренных систем счисления, когда числа этой тройки могут быть представлены в фибоначчией системе счисления, которое продемонстрируем следующим примером.

Пример 1.2 разложения числа 20 в канонической линейной форме Фибоначчи.

Представим в виде $20 = 6f_1 + 14f_2$. По свойству (9) в виде $6(f_1 + f_2) = 6f_3$ получаем $20 = 8f_2 + 6f_3$. Применили *основной шаг* алгоритма для представления $af_k + bf_{k+1}$ при $a \leq b$. Если же $a > b$, то проверяется второе условие $a < f_{k+1}$. При его выполнении алгоритм заканчивает работу. Если же $a \geq f_{k+1}$, то выполняется $af_k + bf_{k+1} = (a - f_{k+1})f_k = (b + f_k)f_{k+1} - \text{поправочный шаг}$. В нашем случае $20 = (8 - 2)f_2 + (6 + 1)f_3 = 6f_2 + 7f_3$. Пара основных шагов: $20 = f_3 + 6f_4 = 5f_4 + f_5$ и поправочный шаг $20 = 0f_4 + 4f_5$.

Ответ. $20 = 4f_5 + 0f_6$.

Начальное разложение $20 = 6f_1 + 14f_2$ в приведенном примере выбрано согласно следствию из следующей леммы.

Лемма 2.5 о золотом сечении. *Если весь отрезок поделен в отношении $1 : \alpha$, где $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то длина всего отрезка относится к длине большей части так же, как длина большей части относится к длине меньшей части. Это отношение сохраняется при вычитании из большей части отрезка меньшей его части.*

Доказательство. Пока будем считать $\alpha > 1$ неизвестным и составим требуемое соотношение

$$\frac{1 + \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha}{1}.$$

Мы пришли к уравнению $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, положительный корень которого равен $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и совпадает с ранее полученным значением α .

Если же теперь большую часть α примем за весь отрезок, а 1 – за новую большую часть, то аналогичное соотношение примет вид $\frac{\alpha}{1} = \frac{1}{\alpha-1}$, приводящий к тому же квадратному уравнению.

Следствие 2.3. *Если в разложении (14) убрать требование целочисленности, взять в качестве начального разложения золотое сечение*

$$n = \frac{n}{\alpha + 1} f_1 + \frac{\alpha n}{\alpha + 1} f_2,$$

то основной шаг алгоритма из примера 1.2 можно применять бесконечно долго (без перехода на поправочный шаг).

Следствие 2.4. *Если в разложении (14) целое a составляет примерно 38 % от $a + b$, то в алгоритме примера 1.2 можно ожидать минимум поправочных шагов (возможно, что все шаги основные).*

2.5. Упражнения

2.1. Обозначим $\Phi_n = \{C_n^k\}_{k=0}^n$ – кортеж биномиальных коэффициентов ($C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$). Вычислить его производящую функцию $A_n(t)$.

Вычислить свертку $\Phi_n * \Phi_1$ и ее производящую функцию. Вывести отсюда формулу

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \quad \text{при } n \geq 1, 1 \leq k \leq n + 1.$$

2.2. Доказать формулы $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ и $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.

2.3. Доказать тождество Вандермонда $C_n^k = \sum_{j=0}^k C_{n-m}^j C_m^{k-j}$ и вывести отсюда формулу $C_{2n}^n = \sum_{j=0}^n (C_n^j)^2$.

2.4. Для кортежа $a = (1, 1, \dots, 1)$, состоящего из N единиц, вычислить производящую функцию $A(t)$. Для $b = (0, 1, 2, \dots, N-1)$ вычислить производящую функцию $B(t)$, выразив ее через $A'(t)$.

2.5. Записать числа от 10 до 20 в фибоначчевой системе счисления.

2.6. Представить число 50 в фибоначчевой системе счисления.

2.7. Дан набор нескольких чисел в фибоначчевой системе счисления: 100101001100011101. Что это за числа и сколько их? Представьте сумму этих чисел в фибоначчевой системе счисления.

2.8. Разработать алгоритм и предложить программу сложения чисел в фибоначчевой системе счисления.

2.9. Разработать алгоритм и предложить программу представления натурального числа в канонической линейной форме Фибоначчи.

2.10. Тройка чисел (a, b, j) для представления (14) канонической линейной формой Фибоначчи, записанная в фибоначчевой системе счисления, имеет вид

$$10100001100001100101.$$

Какое число таким образом закодировано? Как записать это число в фибоначчевой системе счисления?

2.11. Для числа 2016 найти каноническую линейную форму Фибоначчи и записать, закодировав каждое число этой тройки в фибоначчевой системе счисления.

2.12. Докажите, что свертка последовательностей коммутативна, т. е. $a * b = b * a$, и ассоциативна, т. е. $a * (b * c) = (a * b) * c$. Проверьте также, что $\delta = (1, 0, 0, \dots)$ служит нейтральным элементом относительно свертки: $a * \delta = \delta * a = a$ для произвольной последовательности a .

3. Характеристические функции в теории вероятностей

3.1. Основные свойства характеристических функций

Для исследования целочисленных неотрицательных случайных величин, которые назвали натуральными, применяют производящие функции $\varphi(x)$. Аналогичную роль для произвольных (действительных) случайных величин, среди которых основное место занимают непрерывные случайные величины, играют *характеристические функции*.

Определение 3.1. Характеристической функцией действительной случайной величины ξ называется

$$f(t) = f_\xi(t) = M \left[e^{it\xi} \right],$$

где t – действительная переменная ($t \in \mathbb{R}$).

В случае дискретной случайной величины ξ имеем

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(tx_k) \cdot p_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \sin(tx_k) \cdot p_k.$$

В случае непрерывной ξ с функцией плотности $p(x)$ имеем

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) p(x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) p(x) dx. \quad (15)$$

Характеристическую функцию натуральной случайной величины ξ вычисляют через производящую функцию

$$f_\xi(t) = \varphi_\xi(e^{it}). \quad (16)$$

Полную характеристику непрерывной случайной величины содержит функция плотности $p(x)$, удовлетворяющая свойствам

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad p(x) \geq 0. \quad (17)$$

Также задать случайную величину ξ можно указанием функции распределения $F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$, удовлетворяющей свойствам:

- $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$
- Функция $F(x)$ не убывает.
- Функция $F(x)$ непрерывна слева.

В случае непрерывной случайной величины функция $F(x)$ непрерывна. Точнее, требуем абсолютную непрерывность $F(x)$ (обозначаем $F \in AC(\mathbb{R})$), что означает ее представимость в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt$$

через функцию плотности $p(t)$ со свойствами (17).

Третий способ полного описания непрерывной случайной величины – через характеристическую функцию.

Теорема 3.1. *Характеристическая функция имеет следующие свойства:*

1. $f_\xi(t)$ определена при любом $t \in \mathbb{R}$.
2. $f_\xi(0) = 1$, $|f_\xi(t)| \leq 1$.
3. Если $\eta = a\xi + b$, то $f_\eta(t) = e^{itb} f_\xi(at)$.
4. Соответствие, указанное в определении 3.1 между случайными величинами ξ и множеством локально интегрируемых функций с условиями 1 и 2, взаимно однозначно.

Доказательство. Первые два утверждения вытекают из (17) (в случае непрерывной случайной величины).

Третье утверждение вытекает из выкладок

$$f_\eta(t) = M \left[e^{it(a\xi+b)} \right] = M \left[e^{itb} \cdot e^{ita\xi} \right] = e^{itb} f_\xi(at).$$

Четвертое утверждение вытекает из формулы обращения (которую доказывают в курсе математического анализа для математиков), задающей приращение функции распределения $F(x)$ случайной величины ξ через характеристическую функцию

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f_\xi(t) dt. \quad \square$$

Теорема 3.2. *Если есть конечное $M [|\xi|^k]$, то существуют непрерывные производные характеристической функции вплоть до k -го порядка и*

$$f^{(s)}(0) = i^s \cdot M [\xi^s] \quad \text{для всех } s \leq k.$$

Доказательство. Случай $k = 1$ для непрерывной случайной величины. Так как

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{itx} p(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot p(x) dx = M [|\xi|] < \infty,$$

то интеграл в левой части неравенства сходится равномерно. Поэтому существует производная интеграла (15) по параметру t , равная интегралу от частной производной по t подынтегральной функции в (15):

$$f'_\xi(t) = i \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{itx} p(x) dx, \quad f'_\xi(0) = i \cdot M[\xi].$$

Для более высоких порядков аналогично. При этом надо учитывать, что конечность интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \cdot p(x) dx$$

влечет конечность аналогичных интегралов с меньшим k .

Случай дискретных случайных величин рассматривают аналогично и даже проще. \square

Следствие 3.1. Если второй начальный момент конечен, то

$$M[\xi] = -if'_\xi(0), \quad M[\xi^2] = -f''_\xi(0), \quad D[\xi] = (f'_\xi(0))^2 - f''_\xi(0).$$

Теорема 3.3. Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, то

$$f_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(t).$$

Доказательство. Случай $n = 2$.

$$f_{\xi_1 + \xi_2}(t) = M[e^{it(\xi_1 + \xi_2)}] = M[e^{it\xi_1} \cdot e^{it\xi_2}] = M[e^{it\xi_1}] M[e^{it\xi_2}] = f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(t).$$

Воспользовались разложением

$$\begin{aligned} e^{it\xi_1} \cdot e^{it\xi_2} &= (\cos t\xi_1 + i \sin t\xi_1)(\cos t\xi_2 + i \sin t\xi_2) = \\ &= (\cos t\xi_1 \cos t\xi_2 - \sin t\xi_1 \sin t\xi_2) + i(\cos t\xi_1 \sin t\xi_2 + \cos t\xi_2 \sin t\xi_1) = \\ &= \cos t(\xi_1 + \xi_2) + i \sin t(\xi_1 + \xi_2) = e^{it(\xi_1 + \xi_2)}. \end{aligned}$$

Аналогично в общем случае. \square

3.2. Сходимость для характеристических функций

Определение 3.2. Последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

для всех x , которые служат точками непрерывности $F(x)$. Наличие слабой сходимости обозначаем $F_n \rightharpoonup F$.

Последовательность функций $\{F_n(x)\}$ равномерно сходится на всей оси к функции $F(x)$, если для любого $\epsilon > 0$ существует номер N такой, что

для всех $n > N$ и для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется $|F_n(x) - F(x)| < \epsilon$. Наличие равномерной сходимости обозначаем $F_n \xrightarrow{r} F$.

Теорема 3.4. *Если последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}$ слабо сходится на \mathbb{R} к функции распределения $F(x)$, которая является непрерывной, то эта сходимость равномерная.*

Доказательство. Для произвольного $\epsilon > 0$ выберем $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{5}$. Из монотонности, ограниченности и непрерывности $F(x)$ вытекает возможность выбора такого конечного числа точек $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, что приращение $F(x)$ на каждом из полуинтервалов

$$(-\infty = x_0, x_1), [x_1, x_2), [x_2, x_3), \dots, [x_m, x_{m+1} = \infty)$$

меньше ϵ_1 . Для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдется k , что $x \in [x_k, x_{k+1})$. Так как

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F_n(x_k)| &\leq F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k) \leq \\ &\leq |F_n(x_{k+1}) - F(x_{k+1})| + |F(x_k) - F_n(x_k)| + F(x_{k+1}) - F(x_k), \\ |F(x) - F(x_k)| &= F(x) - F(x_k) \leq F(x_{k+1}) - F(x_k), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &\leq |F_n(x) - F_n(x_k)| + |F_n(x_k) - F(x_k)| + |F(x_k) - F(x)| \leq \\ &\leq |F_n(x_{k+1}) - F(x_{k+1})| + 2|F_n(x_k) - F(x_k)| + 2(F(x_{k+1}) - F(x_k)). \end{aligned}$$

Возьмем N такое, что при $n > N$ выполняется

$$|F_n(x_{k+1}) - F(x_{k+1})| < \epsilon_1, \quad \text{и} \quad |F_n(x_k) - F(x_k)| < \epsilon_1.$$

Тогда при $n > N$ для произвольного x выполняется

$$|F_n(x) - F(x)| \leq 5\epsilon_1 = \epsilon. \quad \square$$

Следующие теоремы приведем без доказательств (их можно найти в [15]).

Теорема 3.5. *Пусть имеется последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин с функциями распределения $F_n(x)$ и характеристическими функциями $f_n(t)$ соответственно.*

Если последовательность функций $f_n(t)$ сходится всюду к некоторой непрерывной в нуле функции $f(t)$, то существует случайная величина ξ с $f(t)$ в качестве характеристической функции и такой функцией распределения $F(x)$, что $F_n \rightarrow F$.

Если последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}$ слабо сходится на \mathbb{R} к функции распределения $F(x)$ некоторой случайной величины ξ , которая имеет характеристическую функцию $f(t)$, то $f_n(t) \rightarrow f(t)$ всюду.

Теорема 3.6. Пусть $m^{(k)} = M[\xi^k]$, $m_n^{(k)} = M[\xi_n^k]$ – конечные начальные моменты, $F_n(x)$ – функции распределения.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{(k)} = m^{(k)}$ для всех натуральных k , то существует функция распределения $F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$ некоторой случайной величины ξ с начальными моментами $m^{(k)}$. Если такая функция распределения единственна, то $F_n \rightarrow F$.

Следующая теорема говорит о малой добавке, роль которой играют случайные величины η_n .

Теорема 3.7. Пусть $\zeta_n = \xi_n + \eta_n$. Если для любого $\epsilon > 0$ верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n| > \epsilon\} = 0 \quad \text{и} \quad F_n \rightarrow F,$$

то последовательность функций распределения $G_n(x) = \mathbf{P}\{\zeta_n < x\}$ тоже слабо сходится к $F(x)$.

Следующая теорема служит континуальным аналогом теоремы 1.7.

Теорема 3.8. Если непрерывные случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, то функция плотности случайной величины $\xi = \xi_1 + \xi_2$ вычисляется как свертка исходных функций плотности

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1}(t) p_{\xi_2}(x-t) dt. \quad (18)$$

Доказательство. Индекс ξ у характеристических функций и функций плотности опустим. Проверим, что предложенная свертка функций плотности сама является функцией плотности. Очевидно, что $p(x) \geq 0$ как следствие неотрицательности $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Вычислим, меняя порядок интегрирования (что для неотрицательных сомножителей законно),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(t) p_2(x-t) dt \right) dx = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(t) dt \right) \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(x-t) dx = 1. \end{aligned}$$

Вычислим тем же приемом характеристическую функцию $f(t)$ для случайной величины с функцией плотности (18):

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(z)p_2(x-z) dz \right) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x-z)} p_2(x-z) dx \right) p_1(z)e^{itz} dz = f_2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(z)e^{itz} dz.
\end{aligned}$$

С другой стороны, по теореме 3.3 также $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$.

3.3. Упражнения

3.1. Для случайной величины ξ_1 , распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p , и для случайной величины ξ_2 , распределенной по закону Пуассона с параметром λ , вычислить характеристическую функцию. Через характеристическую функцию вычислить математическое ожидание и дисперсию этих случайных величин.

3.2. Для показательного закона распределения с функцией плотности $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x > 0$ и $p(x) = 0$ при $x < 0$ (где $\lambda > 0$) вычислить характеристическую функцию, математическое ожидание и дисперсию.

3.3. Для закона распределения с функцией плотности $p(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ ($\lambda > 0$) вычислить характеристическую функцию, математическое ожидание и дисперсию.

3.4. Для случайной величины ξ , равномерно распределенной на отрезке $[-1, 1]$, вычислить характеристическую функцию, а также математическое ожидание и дисперсию через нее.

Вычислите характеристическую функцию и закон распределения случайной величины 2ξ .

Как выглядит $f_2(t)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_2 , равномерно распределенной на отрезке $[-2, 2]$?

3.5. Пусть случайные величины ξ и ξ_1 равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$ и независимы. Выведите закон распределения суммы этих величин и вычислите характеристическую функцию.

3.6. По характеристической функции $f(t) = \cos t$ восстановите закон распределения случайной величины η .

3.7. Восстановите законы распределения случайных величин η_1 и η_2 по их характеристическим функциям $f_1(t) = \cos^2 t$ и $f_2(t) = \cos^3 t$.

3.8. Найти закон распределения для случайной величины $\zeta = \xi + \eta$, где ξ и η – независимые случайные величины из упражнений 3.4 и 3.6.

3.9. Докажите, что в случае четной функции плотности $p(x)$ характеристическая функция $f(t)$ действительная.

3.10. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые и одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $f(t)$. Вычислите характеристическую функцию $\eta = \xi_1 - \xi_2$.

4. Примеры характеристических функций. Предельные теоремы в теории вероятностей

4.1. Два примера вычисления характеристической функции

Выделим крайние случаи подобных вычислений.

Пример 4.1 простейший. Постоянную величину a можно рассматривать как случайную величину, принимающую одно значение a с вероятностью 1. По определению характеристическая функция для нее равна

$$f(t) = M \left[e^{ita} \right] = \sum_{k=1}^1 e^{ita} \cdot 1 = e^{ita}.$$

Лемма 4.1. Пусть $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx < \infty$, т. е. $\varphi(x)$ суммируема.

Если $\varphi(x)$ четная, то $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin(tx) dx = 0$ при любом t .

Если $\varphi(x)$ нечетная, то $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cos(tx) dx = 0$ при любом t .

Доказательство. Из условия суммируемости $\varphi(x)$ вытекает, что оба интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cos(tx) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin(tx) dx$$

сходятся абсолютно и, следовательно, безусловно, т. е. порядок их вычисления не важен. Исходя из этого каждый из них равен соответствующему интегралу в смысле главного значения (обозначается символом *v. p.* перед знаком интеграла)

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cos(tx) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \varphi(x) \cos(tx) dx,$$

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin(tx) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \varphi(x) \sin(tx) dx.$$

При сформулированных требованиях на $\varphi(x)$ последние интегралы в соответствующих случаях как интегралы от нечетной функции по конечному симметричному промежутку равны 0.

Пример 4.2. Характеристическая функция случайной величины ξ , распределенной по нормальному закону распределения с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$, что обозначим $\xi \in N(0, 1)$.

Функция плотности этой случайной величины задана формулой

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right),$$

графиком которой служит кривая Гаусса. Множитель перед экспонентой получается из основного свойства (17) согласно интегралу Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}. \quad (19)$$

Быстрая скорость убывания данной экспоненты на бесконечности гарантирует абсолютную и равномерную сходимость всех далее рассмотренных в примере несобственных интегралов. Это, в свою очередь, обеспечивает и наличие формулы обращения, и возможность дифференцирования несобственного интеграла с параметром, и другие свойства.

Если характеристическая функция $f(t)$ вычисляется по формуле (15) обратного преобразования Фурье, то функция плотности восстанавливается по формуле прямого преобразования Фурье

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(tx) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(tx) dt \right)$$

при условии сходимости этих интегралов.

По формуле (15) характеристическая функция $f(t)$ равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(tx) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(tx) dx \right).$$

Отсюда по лемме 4.1 получаем

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(tx) dx.$$

Производная этой функции в виде несобственного интеграла с параметром существует и вычисляется как частная производная по параметру от подынтегральной функции (благодаря равномерной сходимости данного интеграла и интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(tx) dx$):

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(tx)) dx \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(tx) dx \right).$$

Последний интеграл считаем по частям

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) d(e^{-\frac{x^2}{2}}) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} t \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right).$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

то получили

$$f'(t) = -t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(tx) dx = -t f(t).$$

По формуле (19) имеем $f(0) = 1$.

Итак, получили задачу Коши для $f(t)$:

$$f'(t) = -tf(t) \text{ при начальном условии } f(0) = 1.$$

Решим методами дифференциальных уравнений как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{df}{dt} = -tf, \quad \frac{df}{f} = -tdt, \quad \ln |f| = -\frac{t^2}{2} + C.$$

Константу C найдем из начального условия:

$$\ln 1 = -\frac{0^2}{2} + C \text{ влечет } C = 0.$$

Получили характеристическую функцию

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad \square$$

Формально более простым методом вычисления характеристической функции примера 4.2 служит явное вычисление:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} dx \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

В результате замены переменной в интеграле получаем аналог интеграла Пуассона (19). Различие только в том, что этот интеграл от комплексной переменной берется не по действительной прямой, а по параллельной ей на комплексной плоскости. Равенство этих двух интегралов доказывается методами теории вычетов.

Заметим, что восстановление функции плотности $p(x)$ через вычисленную характеристическую функцию по формуле прямого преобразования Фурье по существу повторяет данные преобразования.

4.2. Закон больших чисел

Особое место в курсе теории вероятностей занимают предельные теоремы. *Закон больших чисел* обычно доказывают, предполагая конечность дисперсии. Напомним, что последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин называется независимой, если любой конечный набор элементов этой последовательности независим.

Теорема 4.1. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимы и одинаково распределены (математическое ожидание этих величин обозначим $a = M[\xi_n]$). Тогда при любом $\epsilon > 0$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\left| \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - a \right| < \epsilon \right) = 1.$$

Доказательство. Так как случайные величины распределены одинаково, то обозначим характеристическую функцию каждой из них $f(t)$, а не $f_{\xi_n}(t)$. Разложим ее по формуле Тейлора, используя теоремы 3.1 и 3.2

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + o(t^2) = 1 + ita + t\varepsilon(t), \quad (20)$$

где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. По теореме 3.3

$$f_{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}(t) = (f(t))^n = (1 + ita + t\varepsilon(t))^n,$$

где обозначим $\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$. По пункту 3 теоремы 3.1 получим соотношение, к которому применим предельный переход второго замечательного предела

$$f_{\eta_n}(t) = \left(1 + i \frac{t}{n} a + \frac{t}{n} \varepsilon(t/n) \right)^n \rightarrow e^{ita}.$$

Полученная предельная функция есть характеристическая функция константы a , функция распределения которой

$$F(x) = 0 \quad \text{при } x \leq a \quad \text{и} \quad F(x) = 1 \quad \text{при } x > a.$$

По теореме 3.5 при любом $x \neq a$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\eta_n}(x) = F(x)$. Отсюда для произвольно заданного $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\eta_n - a| < \epsilon) &= \mathbf{P}(a - \epsilon < \eta_n < a + \epsilon) \geq \mathbf{P}(a - \frac{\epsilon}{2} < \eta_n < a + \epsilon) = \\ &= F_{\eta_n}(a + \epsilon) - F_{\eta_n}(a - \frac{\epsilon}{2}) \rightarrow F(a + \epsilon) - F(a - \frac{\epsilon}{2}) = 1 - 0 = 1. \quad \square \end{aligned}$$

4.3. Центральная предельная теорема

Предложим следующий вариант этой теоремы.

Теорема 4.2. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Полагаем $a = M[\xi_k]$, $\sigma^2 = D[\xi_k]$. Тогда последовательность функций распределения усредненных случайных величин $\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ равномерно сходится к функции распределения $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$ случайной величины $\xi \in N(0, 1)$.

Доказательство. Представим $\eta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k - a}{\sigma\sqrt{n}}$. Разложим характеристическую функцию случайной величины $\xi_k - a$ по формуле Тейлора (20):

$$f_{\xi_k - a}(t) = 1 + itM[\xi_k - a] - \frac{t^2}{2}M[\xi_k - a]^2 + t^2\varepsilon(t) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + t^2\varepsilon(t).$$

По теореме 3.3 характеристическая функция суммы $\sum_{k=1}^n (\xi_k - a)$ равна

$$f_{\sum(\xi_k - a)}(t) = \left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + t^2\varepsilon(t)\right)^n.$$

Отсюда по пункту 3 теоремы 3.1

$$f_{\eta_n}(t) = f_{\sum(\xi_k - a)}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{t^2}{n^2\sigma^2}\varepsilon\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

По второму замечательному пределу $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\eta_n}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$,
 $\xi \in N(0, 1)$

$$\begin{array}{l} F_{\eta_n} \rightarrow F \\ F_{\eta_n} \xrightarrow{\rightarrow} F \quad \square \end{array}$$

Теорема 4.3.

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

$$a_k = M[\xi_k], \quad b_k^2 = D[\xi_k], \quad c_k^3 = M|\xi_k - a_k|^3,$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2, \quad C_n^3 = \sum_{k=1}^n c_k^3.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{B_n} < x\right) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

4.4. Упражнения

$$\xi \in N(a, \sigma)$$

$$a \quad \sigma$$

$$\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1) \quad \xi_2 \in N(a_2, \sigma_2)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

5. Преобразование Фурье

5.1. Определение преобразования Фурье

Различают несколько форм записи преобразования Фурье, первые из которых различаются лишь константой перед интегралом. Будем пользоваться следующей формой.

Определение 5.1. Преобразованием Фурье суммируемой функции $f(x)$ назовем функцию

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dx.$$

Если исходная функция достаточно «хорошая» (примером «хорошей» функции служит $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$), то возможно восстановление исходной функции по формуле обратного преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{itx} dt.$$

Для сокращения записи используют операторную форму обозначения

$$\mathcal{F}[f](t) = F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dx. \quad (21)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx} dx.$$

Замечание. Приведем другие, встречающиеся в учебниках, формы записи преобразования Фурье и соответствующие им формы обратного преобразования Фурье:

$$F_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t)e^{itx} dt,$$

$$F_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(t)e^{itx} dt,$$

$$F_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi itx} dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_3(t)e^{2\pi itx} dt.$$

Обычно выбирают одну из этих четырех форм и изложение ведется только для нее. Форма F_1 удобнее при исследовании свойств преобразования Фурье суммируемой функции. Форму F_2 мы использовали при построении характеристической функции в теории вероятностей. Форма F_3 позволяет вообще не заботиться о константе перед интегралом, симметрична, но более громоздка.

Основное множество функций, для которых определено преобразование Фурье, составляют *суммируемые функции*, т. е. функции класса $L(-\infty, \infty)$. Также указывают $f \in L(\mathbb{R})$, если $f(x)$ интегрируема (возможно как несобственный интеграл от неограниченной функции) на любом конечном интервале и конечен интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$, который определяет норму функции в этом пространстве:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

Напомним формулу нормы в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

а также в пространстве функций, суммируемых в квадрате (т. е. в $L^2(\mathbb{R})$):

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}.$$

Далеко не все суммируемые функции являются «хорошими». Вторая из формул преобразования Фурье служит *формулой обращения* и выполняется не всегда. Ее справедливость доказывают при некоторых дополнительных ограничениях на исходную функцию $f(x)$, а несобственный интеграл по всей оси в ней часто понимают как интеграл в смысле главного значения

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \varphi(x) dx.$$

5.2. Вид и условия обращения преобразования Фурье

Выясним, какую функцию представляет преобразование Фурье.

Теорема 5.1. *Если $f \in L(\mathbb{R})$, то:*

- функция $F(t)$ определена для любого $t \in (-\infty, \infty)$;
- $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t) = 0$;
- $F \in C(\mathbb{R})$, т. е. преобразование Фурье – непрерывная функция.

Доказательство. Функция $|f(x)|$ служит мажорантой для интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx} dx$, поэтому он сходится абсолютно при любом t .

Сходимость эта не только абсолютная, но и равномерная для несобственного интеграла с параметром. Стандартный при доказательствах прием состоит в том, что данный интеграл можно разбить на три слагаемых:

$$\int_{-\infty}^N f(x)e^{-itx} dx + \int_{-N}^N f(x)e^{-itx} dx + \int_N^{\infty} f(x)e^{-itx} dx. \quad (22)$$

Выбираем N таким, чтобы крайние интегралы («хвосты») по модулю были малы (меньше $\frac{\epsilon}{3}$), и анализируем определенный интеграл (средний). Для доказательства второго утверждения используется **лемма Римана**, в которой утверждается

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_{-N}^N f(x)e^{-itx} dx = 0.$$

При доказательстве третьего утверждения метод разбиения (22) применяется для интеграла от разности двух функций

$$F_1(t_2) - F_1(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(e^{-it_2x} - e^{-it_1x}) dx.$$

Положим $t_2 > t_1$, чтобы $\Delta t = t_2 - t_1$ было положительным. Выберем N таким, что

$$\int_{-\infty}^{-N} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{6}, \quad \int_N^{\infty} |f(x)| dx < \frac{\epsilon}{6},$$

чтобы оценить «хвосты» (оцениваем $|e^{-it_2x} - e^{-it_1x}| \leq 1 + 1 = 2$):

$$\left| \int_{-\infty}^{-N} f(x)(e^{-it_2x} - e^{-it_1x}) dx \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \left| \int_N^{\infty} f(x)(e^{-it_2x} - e^{-it_1x}) dx \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Аналогично оцениваем $|e^{-i\varphi} - 1| \leq |\varphi|$ согласно следующим выкладкам:

$$e^{-i\varphi} - 1 = \cos \varphi - 1 - i \sin \varphi,$$

$$\sqrt{(\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi} = \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = 2 \sin |\varphi/2| \leq |\varphi|.$$

Если обозначим $K = \int_{-N}^N |f(x)| dx$, то для среднего интеграла

$$\int_{-N}^N f(x)e^{-it_1x} (e^{-i\Delta tx} - 1) dx$$

выбираем ограничение для Δt вида $\delta = \frac{\epsilon}{3KN}$. Тогда этот интеграл оценим

$$\left| \int_{-N}^N f(x)e^{-it_1x} (e^{-i\Delta tx} - 1) dx \right| \leq K \cdot 1 \cdot |\Delta tx| \leq KN\delta = \frac{\epsilon}{3}.$$

Доказали равномерную непрерывность: $|F(t_2) - F(t_1)| < \epsilon$, если $\Delta t < \delta$. \square

Однако доказать суммируемость преобразования Фурье $\mathcal{F}[f] = F$ в общем случае невозможно. Действительно, без дополнительных ограничений формула обращения не выполняется. Подтвердим это простым примером.

Пример 5.1. Преобразование Фурье прямоугольного импульса. Вычислим преобразование Фурье функции

$$f(x) = 1 \quad \text{при} \quad |x| < a, \quad f(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geq a.$$

Решение. Вычислим

$$F_1(t) = \int_{-a}^a e^{-itx} dx = -\frac{1}{it} e^{-itx} \Big|_{-a}^a = \frac{-e^{-ita} + e^{ita}}{it} = \frac{2 \sin ta}{t},$$

поэтому $F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin at}{t}$ при $t \neq 0$ и $F(t) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ при $t = 0$. Данная функция хотя и непрерывна, но не суммируема: $F \notin L(\mathbb{R})$. Следовательно, формула обращения для нее не имеет места.

Определение 5.2. Функция $\varphi(x)$ называется *регулярной*, если в точках разрыва

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} (\varphi(x-0) + \varphi(x+0)) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x-0} \varphi(x) + \lim_{x \rightarrow x+0} \varphi(x) \right).$$

Определение 5.3. В точке x_0 выполнено *условие Дини* для функции $f(x)$, если для некоторого $h > 0$ сходятся несобственные интегралы

$$\int_0^h \frac{f(x_0 + u) - f(x_0 + 0)}{u} du, \quad \int_0^h \frac{f(x_0 - u) - f(x_0 - 0)}{u} du.$$

Теорема 5.2 (Дини) Если $f \in L(\mathbb{R})$, $f(x)$ регулярна в точке x_0 и в точке x_0 выполнено условие Дини, то в этой точке выполнено условие обращения

$$f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{itx_0} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N F(t) e^{itx_0} dt. \quad (23)$$

Следствие 5.1 Если функция суммируема, регулярна, кусочно непрерывна и кусочно дифференцируема на любом конечном интервале, то во всех точках выполняется формула обращения (23).

При выполнении условий обращения можно прямое преобразование (21) подставить в обратное преобразование Фурье (23) (в виде интеграла в смысле главного значения) и получить следующее представление, которое называют *интегралом Фурье* :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{it(x-u)} dudt.$$

5.3. Свойства преобразования Фурье суммируемой функции

Предполагаем, что рассматриваемые функции $f(x)$, $g(x)$, $f_n(x)$ суммируемы на \mathbb{R} . Другие дополнительные предположения будем указывать отдельно. В качестве одного из таких дополнительных предположений выступает требование абсолютной непрерывности функций, класс которых обозначим символом AC . В этих предположениях выполняются следующие свойства.

1. Линейность.

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. Сходимость равномерная.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, то $\mathcal{F}[f_n] \xrightarrow{\text{равн.}} \mathcal{F}[f]$ при $n \rightarrow \infty$ на $(-\infty, \infty)$.

3. Преобразование Фурье производной.

Если $f \in AC[-N, N]$ для любого N и $f, f' \in L(\mathbb{R})$, то

$$\mathcal{F}[f'](t) = it\mathcal{F}[f](t).$$

Как следствие, в случае $f, f', \dots, f^{(k)} \in L(\mathbb{R})$, $f^{(k-1)} \in AC[-N, N]$ имеем

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](t) = (it)^k \mathcal{F}[f](t).$$

4. Связь между гладкостью и скоростью убывания.

Если $f, f', \dots, f^{(k)} \in L(\mathbb{R})$, $f^{(k-1)} \in AC[-N, N]$, то

$$\mathcal{F}[f](t) = o(|t|^{-k}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

5. Условия обращения.

Если $f, f', f'' \in L(\mathbb{R})$, то $\mathcal{F}[f] \in L(\mathbb{R})$ и $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{itx} dt$.

Определение 5.4. *Сверткой* функций назовем

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

6. Преобразование Фурье свертки.

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

– преобразование Фурье свертки суммируемых функций равно произведению их преобразований Фурье.

7. Преобразование Фурье произведения.

Если верны условия обращения (например, $f, f', f'', g, g', g'' \in L(-\infty, \infty)$), то преобразование Фурье произведения равно свертке преобразований Фурье, т. е. $\mathcal{F}[f \cdot g] = \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]$.

8. Производная преобразования Фурье.

Если суммируемы на \mathbb{R} функции $f(x)$ $xf(x)$ $F(t) = \mathcal{F}[f](t)$
 $-ixf(x)$ $F'(t)$

$$f(x) \mapsto F(t) \Rightarrow -ixf(x) \mapsto F'(t).$$

$$\begin{array}{ll} f(x) & \mathcal{F}[f](t) \\ f(x) & \mathcal{F}[f](t) \end{array}$$

$$\varphi(x) = f(x + b)$$

$$f(x) \mapsto F(t) \Rightarrow \varphi(x) = f(x + b) \mapsto F(t) \cdot e^{ibt}.$$

$$\varphi(x) = f(ax) \quad a > 0$$

$$f(x) \mapsto F(t) \Rightarrow \varphi(x) = f(ax) \mapsto \frac{1}{a}F(t/a).$$

5.4. Упражнения

$$\begin{array}{ll} f(x) = 0 & x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \\ x \in [0, 1] & \end{array} \quad \begin{array}{ll} f(x) = x + 1 & x \in [-1, 0] \\ f(x) = 1 - x & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = e^{-\lambda x} & x \in (0, \infty) \\ f_2(x) = e^{\lambda x} & x < 0 \\ f(x) = e^{-\lambda|x|} & \lambda > 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} f_1(x) = 0 & x < 0 \\ f_2(x) = 0 & x > 0 \end{array}$$

$$f_1(x) \quad f_2(x) \quad f(x)$$

$$\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ g(x) = \frac{x}{1+x^2} \end{array}$$

$$f_1 * f_1 \quad f_1(x)$$

$$xf_1(x)$$

$$\begin{array}{l} e^{-|2x+4|} \\ \frac{1}{(1+x^2)^2} \quad \frac{x}{(1+x^2)^2} \end{array}$$

6. Преобразование Фурье для функций, суммируемых в квадрате

6.1. Теорема Планшереля

Если функция не суммируема, то преобразование Фурье может и не существовать. В частности, если функция суммируема в квадрате, то мы не гарантируем для нее сходимости интеграла (21) даже в смысле главного значения. Поэтому в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ преобразование Фурье определяется по-другому.

Бесконечномерное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется *гильбертовым*. В комплекснозначном пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ вводят *эрмитово* скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Оно обладает для всех $x, y, z \in L^2(-\infty, \infty)$ свойствами:

- $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
- $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$, $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
- $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$.

Напомним, что $L^2[a, b] \subset L[a, b]$. Следующая теорема относится к числу фундаментальных результатов и приводится во многих учебниках по функциональному анализу и теории интегралов Фурье. Для нее введем обозначение новых функций $F_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f(x)e^{-itx} dx$.

Теорема 6.1 (Планшереля) *Если $f \in L^2(-\infty, \infty)$, то:*

- для любого N функция $F_N(t)$ принадлежит пространству $L^2(-\infty, \infty)$;
- при $N \rightarrow \infty$ эти функции сходятся по норме данного пространства к некоторой $F \in L^2(-\infty, \infty)$, т. е. $\lim_{N \rightarrow \infty} \|F_N - F\|_2 = 0$;
- выполняется равенство Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt.$$

Следствие 6.1. *Если $f \in L(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$, то преобразование Фурье $F(t)$, введенное в теореме Планшереля, совпадает с ранее введенным (21) стандартным преобразованием Фурье.*

Следовательно, новое определение служит продолжением стандартного определения (21) с пространства $L(\mathbb{R})$ на пространство $L^2(\mathbb{R})$. Поэтому

сохраним операторное обозначение $\mathcal{F}[f]$ и для функции F из теоремы Планшереля.

Следствие 6.2. Если $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ и $F = \mathcal{F}[f]$, $G = \mathcal{F}[g]$, то выполняется обобщенное равенство Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\overline{G(t)}dt,$$

которое можно записать с использованием символа скалярного произведения на всей оси $(f, g) = (F, G)$.

Доказательство. Запишем равенство Планшереля для $f(x) + g(x)$

$$(f + g, f + g) = (F + G, F + G)$$

и распишем его:

$$(f, f) + (f, g) + (g, f) + (g, g) = (F, F) + (F, G) + (G, F) + (G, G).$$

Отсюда $2\operatorname{Re}(f, g) = 2\operatorname{Re}(F, G)$.

Аналогично из равенства Планшереля для функции $f(x) + ig(x)$ получаем равенство мнимых частей того же скалярного произведения.

Определение 6.1. Оператор $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ в гильбертовом пространстве X называется *унитарным*, если для всех $x, y \in X$ выполняется

$$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y).$$

Заметим, что в этом случае обратный оператор $\mathcal{A}^{-1} : X \rightarrow X$ совпадает с сопряженным оператором $\mathcal{A}^* : X \rightarrow X$.

Частный случай унитарного оператора составляют унитарные операторы кручения, т. е. такие, что некоторая степень оператора есть тождественный оператор Id . Далее покажем, что оператор преобразования Фурье в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ есть унитарный оператор кручения. Для этого изучим наиболее удобный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$.

6.2. Функции Эрмита

Каждая функция Эрмита имеет вид $\psi_n(x) = H_n(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, где $H_n(x)$ – стандартизованный многочлен Эрмита (Чебышева-Эрмита) степени n . Его легко вычислить по формуле Родрига

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$$

последовательным вычислением производных. Старший коэффициент многочлена H_n равен 2^n . Приведем несколько стандартизованных многочленов Эрмита:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Теорема 6.2. Многочлены $H_n(x)$ ортогональны с весовой функцией e^{-x^2} на всей оси:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad \text{при } n \neq m. \quad (24)$$

Доказательство. Формулу (24) по формуле Родрига перепишем в виде

$$I_{nm} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \left(e^{-x^2} \right)^{(n)} dx$$

и проинтегрируем по частям:

$$I_{nm} = (-1)^n \left[H_m(x) \left(e^{-x^2} \right)^{(n-1)} \right]_{-\infty}^{\infty} - (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x) \left(e^{-x^2} \right)^{(n-1)} dx.$$

Внеинтегральное слагаемое (по правилу Лопиталья) на бесконечности обращается в 0, так как оно представляет собой многочлен, умноженный на e^{-x^2} . Получили соотношение

$$I_{nm} = (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x) \left(e^{-x^2} \right)^{(n-1)} dx,$$

которое применим многократно:

$$I_{nm} = (-1)^{n-2} \int_{-\infty}^{\infty} H''_m(x) \left(e^{-x^2} \right)^{(n-2)} dx = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(x) e^{-x^2} dx.$$

Полагая $m < n$ (для определенности), получим $H_m^{(n)}(x) \equiv 0$. Следовательно, $I_{mn} = 0$.

Следствие 6.3. Функции Эрмита ортогональны на всей оси:

$$(\psi_n, \psi_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

Теорема 6.3. Система функций Эрмита $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ составляет ортогональный базис пространства $L^2(-\infty, \infty)$. Система $\left\{ \frac{\psi_n(x)}{\sqrt{n!2^n \sqrt{\pi}}} \right\}$ – ортонормированная.

Ортогональность системы проверена в следствии 6.3. Проведем нормировку системы.

При $m = n$ последняя выносная формула в доказательстве теоремы 6.2 примет вид $I_{nn} = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x) e^{-x^2} dx$.

Так как старший коэффициент многочлена $H_n(x)$ степени n равен 2^n , то $H_n^{(n)}(x) = n!2^n$. По формуле $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ интеграла Пуассона (19) имеем $I_{nn} = n!2^n \sqrt{\pi}$.

Получили

$$(\psi_n, \psi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n(x))^2 dx = n!2^n \sqrt{\pi}.$$

Доказательство замкнутости системы в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ приводится в книге Э. Титчмарша «Введение в теорию интегралов Фурье».

Теорема 6.4. *Функции Эрмита $\psi_n(x)$ являются собственными функциями оператора преобразования Фурье в пространстве $L^2(\mathbb{R})$:*

$$\mathcal{F}[\psi_n] = (-i)^n \psi_n.$$

Доказательство. По формуле Родрига

$$\mathcal{F}[\psi_n](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) e^{-iyx} dx = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx + \frac{1}{2}x^2} (e^{-x^2})^{(n)} dx.$$

Домножим и поделим на одинаковую экспоненту, чтобы выделить в первом множителе полный квадрат:

$$\mathcal{F}[\psi_n](y) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2} (e^{-x^2})^{(n)} dx.$$

Проинтегрируем по частям: $\mathcal{F}[\psi_n](y) =$

$$= \frac{(-1)^n e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2} (e^{-x^2})^{(n-1)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2}) \cdot (e^{-x^2})^{(n-1)} dx \right).$$

При подстановке пределов $\pm\infty$ внеинтегральное слагаемое обращается в 0 за счет наличия (кроме многочлена) множителя $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\mathcal{F}[\psi_n](y) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2}) \cdot (e^{-x^2})^{(n-1)} dx.$$

Итак, знак производной перебрасывается с одного множителя на другой, и меняется знак выражения. Повторим эту операцию n раз:

$$\mathcal{F}[\psi_n](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2}) \cdot e^{-x^2} dx.$$

Заменим дифференцирование по x на дифференцирование по y :

$$\mathcal{F}[\psi_n](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} i^n \frac{\partial^n}{\partial y^n} (e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2}) \cdot e^{-x^2} dx.$$

Применяя многократно теорему о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, которая допустима благодаря равномерной сходимости встречающихся интегралов (за счет наличия быстро убывающего множителя $e^{-\frac{x^2}{2}}$), получим

$$\mathcal{F}[\psi_n](y) = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2}) \cdot e^{-x^2} dx.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(x-iy)^2} \cdot e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 - ixy - \frac{1}{2}y^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} dx \cdot e^{-y^2},$$

а интеграл Пуассона по параллельно сдвинутой в комплексной плоскости прямой сохраняет свою величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^2} dx = \sqrt{2\pi},$$

то по формуле Родрига

$$\mathcal{F}[\psi_n](y) = i^n e^{\frac{y^2}{2}} (e^{-y^2})^{(n)} = (-i)^n e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y) = (-i)^n \psi_n(y). \quad \square$$

В следующей теореме вычисляется экспоненциальная производящая функция для последовательности $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ стандартизованных многочленов Эрмита. С помощью этой функции получается много различных разложений стандартных функций в базисе функций Эрмита.

Теорема 6.5. Производящей функцией для последовательности $\{\frac{H_n(x)}{n!}\}_{n=0}^{\infty}$ служит функция

$$F(x, t) = e^{2xt-t^2}.$$

Доказательство. Аналитическую функцию $F(x, t) = e^{2xt-t^2}$ разложим в ряд Тейлора по степеням t :

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (F_t^{(n)}(x, t)|_{t=0}) t^n.$$

Очевидно $F(x, 0) = 1$

$$F'_t(x, t) = (e^{2xt-t^2})'_t = e^{x^2} (e^{-(x-t)^2})'_t = e^{x^2} (e^{-u^2})'_u|_{u=x-t} \cdot (-1).$$

$$F_t^{(n)}(x, t) = e^{x^2} (e^{-u^2})_u^{(n)}|_{u=x-t} \cdot (-1)^n$$

$t = 0$

$$F_t^{(n)}(x, 0) = e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} \cdot (-1)^n = H_n(x).$$

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

6.3. Спектральное разложение оператора преобразования Фурье

Собственными функциями оператора преобразования Фурье в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ служат функции Эрмита $\psi_n(x)$. Причем функции ψ_{4m+k} (где $k = 0, 1, 2, 3$) отвечают собственному числу $\lambda_k = (-i)^k$. Введем четыре собственных подпространства R_k пространства $L^2(\mathbb{R})$, состоящие из собственных функций, отвечающих собственному числу λ_k соответственно.

Теорема 6.6. *Оператор преобразования Фурье в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ является унитарным оператором кручения четвертого порядка, т. е. для любой $f \in L^2(-\infty, \infty)$ имеем*

$$\mathcal{F}^4[f] = f.$$

Пространство $L^2(-\infty, \infty)$ раскладывается на прямую сумму собственных взаимно ортогональных подпространств

$$L^2(-\infty, \infty) = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$$

с собственными числами $1, -i, -1, i$ соответственно. Ортогональные проекторы Q_k ($k = 0, 1, 2, 3$) на эти подпространства через степени оператора вычисляются по формулам

$$Q_0 = \frac{1}{4}(\mathcal{F}^0 + \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2 + \mathcal{F}^3), \quad Q_1 = \frac{1}{4}(\mathcal{F}^0 + i\mathcal{F}^1 - \mathcal{F}^2 - i\mathcal{F}^3),$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}(\mathcal{F}^0 - \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2 - \mathcal{F}^3), \quad Q_3 = \frac{1}{4}(\mathcal{F}^0 - i\mathcal{F}^1 - \mathcal{F}^2 + i\mathcal{F}^3).$$

Восстанавливают степени операторов по формулам

$$\mathcal{F}^0 = Id = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad \mathcal{F} = Q_0 - iQ_1 - Q_2 + iQ_3,$$

$$\mathcal{F}^2 = Q_0 - Q_1 + Q_2 - Q_3, \quad \mathcal{F}^3 = Q_0 + iQ_1 - Q_2 - iQ_3,$$

первая из которых называется разложением единицы (так как служит разложением тождественного оператора Id), а остальные являются спектральным разложением операторов \mathcal{F} , \mathcal{F}^2 и \mathcal{F}^3 соответственно.

Доказательство. В теореме 6.3 утверждается, что замыкание линейной оболочки системы функций Эрмита $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ по норме $\|\cdot\|_2$ совпадает со всем пространством $L^2(-\infty, \infty)$. Если взять вариант нормированных функций Эрмита $\hat{\psi}_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}$, то для произвольной $f \in L^2(-\infty, \infty)$ коэффициенты Фурье-Эрмита определяются равенством

$$c_n = c_n[f] = (f, \hat{\psi}_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{\psi}_n(x) dx.$$

Как и в общей теории рядов Фурье, выполняется равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2.$$

Из сходимости последнего ряда вытекает сходимость четырех ($k = 0, 1, 2, 3$) рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_{4n+k}^2$. По теореме Рисса-Фишера (одной из основных теорем в курсе функционального анализа) для каждого из четырех рядов найдется своя функция $f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{4n+k} \hat{\psi}_{4n+k}(x)$, где сумма понимается как предел по норме $\|\cdot\|_2$.

При этом $f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$. Таким образом, замыкание линейной оболочки каждой из подсистем $\{\hat{\psi}_{4n+k}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ составляет подпространство R_k . Прямая сумма этих пространств совпадает со всем пространством $L^2(-\infty, \infty)$. Согласно следствию 6.3 эти подпространства взаимно ортогональны: $(f_k, f_l) = 0$ при $k \neq l$.

Через равенство Парсеваля для каждой из функций получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^3 \int_{-\infty}^{\infty} |f_k(x)|^2 dx. \quad (25)$$

Согласно свойству линейности

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[f_0] + \mathcal{F}[f_1] + \mathcal{F}[f_2] + \mathcal{F}[f_3],$$

что влечет

$$\mathcal{F}[f] = f_0 - if_1 - f_2 + if_3 = f_0 + (-if_1) + (-f_2) + (if_3).$$

В последней записи в виде суммы все слагаемые предстают снова из тех же пространств. Поэтому по той же формуле

$$\mathcal{F}^2[f] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] = f_0 - f_1 + f_2 - f_3, \quad \mathcal{F}^3[f] = f_0 + if_1 - f_2 - if_3.$$

Еще одна итерация этой формулы возвращает функцию

$$\mathcal{F}^4[f] = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = f.$$

Значит, оператор \mathcal{F} преобразования Фурье есть оператор кручения четвертого порядка. Четвертая итерация \mathcal{F}^4 оператора соответствует нулевой итерации \mathcal{F}^0 (т. е. тождественному оператору Id). Сложив все четыре формулы, получим

$$\mathcal{F}^0[f] + \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}^2[f] + \mathcal{F}^3[f] = 4f_0,$$

т. е. формулу для проектора Q_0 на подпространство R_0 .

Аналогично проверяются указанные формулы для остальных Q_k .

Следствие 6.4. *Справедливо равенство Планшереля*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](t)|^2 dt.$$

Доказательство. По свойствам эрмитова скалярного произведения и за счет ортогональности слагаемых

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[f]) &= (f_0 - if_1 - f_2 + if_3, f_0 - if_1 - f_2 + if_3) = \\ &= (f_0, f_0) + (f_1, f_1) + (f_2, f_2) + (f_3, f_3) = \sum_{k=0}^3 \int_{-\infty}^{\infty} |f_k(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

По формуле (25) получаем равенство Планшереля.

6.4. Упражнения

6.1. Вычислить преобразование Фурье функции $\psi_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

6.2. Вычислить преобразование Фурье функции $x\psi_0(x)$.

6.3. Вычислить преобразование Фурье функции $x^2\psi_0(x)$. Для функции $(x^2 - a)\psi_0(x)$ подобрать коэффициент a так, чтобы она стала собственной функцией оператора преобразования Фурье. Какому собственному числу отвечает эта собственная функция?

6.4. Методом упражнений 6.2 и 6.3 вычислить следующие два многочлена Эрмита H_3 и H_4 . Каким собственным числам отвечают собственные функции ψ_3 и ψ_4 ?

6.5. Докажите для произвольной $f \in L^2(-\infty, \infty)$ то, что разложение

$$f_{ev}(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_{od}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

есть проектирование на инвариантные подпространства $R_0 \oplus R_2$ и $R_1 \oplus R_3$ соответственно.

6.6. Для \mathcal{F} – унитарного оператора преобразования Фурье в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ – докажите, что

$$\mathcal{F}^2[f](x) = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](x) = f(-x).$$

6.7. Какому из собственных подпространств – R_0 , R_1 , R_2 или R_3 – принадлежат функции $f_1(x) = \sqrt{\pi}e^{-|x|} + \frac{\sqrt{2}}{1+x^2}$ и $f_2(x) = \sqrt{\pi}e^{-|x|} - \frac{\sqrt{2}}{1+x^2}$?

6.8. Используя равенство Планшереля для прямоугольного импульса, вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

7. Дискретное преобразование Фурье

7.1. Пространство сигналов

Основная сфера применения *дискретного преобразования Фурье* – это цифровая обработка сигналов (ЦОС). Дискретное преобразование Фурье – это специальный линейный оператор в N -мерном (комплексном) пространстве \mathbb{C}^N векторов, которые в ЦОС принято называть *дискретными функциями* и использовать соответствующий способ обозначения $x(k)$ как для отдельных значений, так и для дискретной функции в целом. Откажемся от этой двусмысленности, используя математические обозначения x для дискретной функции в целом и $x(k)$ для ее отдельных значений.

В общем случае *дискретная функция* – это функция $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, заданная на множестве целых чисел \mathbb{Z} , т. е. двусторонняя последовательность $(\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$. При ЦОС выделяют класс *дискретных периодических* (с периодом N , т. е. $x(k + N) = x(k)$) *функций*, которые для сокращения записи будем называть *сигналами*. Пространство периодических сигналов обозначим \mathbb{C}^N , используя обозначение пространства комплекснозначных N -мерных векторов. Это оправдано тем, что выделяем и работаем с основной частью сигнала x вида $x = (x(0) \ x(1) \ \dots \ x(N-1))$, помня о его периодичности. Нумерация с нуля обусловлена тем, что главный аппарат, применяемый к сигналам, – это *дискретное преобразование Фурье*, элементы матрицы которого нумеруются с нуля. Запятыя между координатами (отсчетами) сигнала не пишем, так как трактуем его как матрицу-строку. Иногда рассматривают класс сигналов на конечном интервале, который всегда можно периодически продолжить.

К основным операциям над сигналами $x, y \in \mathbb{C}^N$ относятся линейные операции: сложение сигналов

$$z = x + y \iff z(k) = x(k) + y(k),$$

и умножение на число

$$z = \alpha x \iff z(k) = \alpha \cdot x(k),$$

а также операция \bullet умножения сигналов в виде покоординатного умножения, которое в алгебре и теории матриц называется *умножением по Адамару*

$$x \bullet y = (x(0) \cdot y(0) \ x(1) \cdot y(1) \ \dots \ x(N-1) \cdot y(N-1)).$$

Введем *операции циклического сдвига* $x^{k \rightarrow}$ сигнала $x \in \mathbb{C}^N$ по формуле $x^{k \rightarrow}(j) = x(j - k)$. В частности: $x^{N \rightarrow} = x$, т. е. сдвиг на период возвращает сигнал, а $x^{N-1 \rightarrow} = x^{\leftarrow}$ есть операция обратного сдвига.

При ЦОС также часто применяется операция * *круговой свертки* сигналов $a, b \in \mathbb{C}^N$

$$a * b (s) = \sum_{j=0}^{N-1} a(j)b(s-j), \quad s \in \mathbb{Z}. \quad (26)$$

К **основным сигналам** относят:

единичный импульс

$$\delta = \delta_N = (1\ 0\ 0\ 0 \dots 0),$$

единичный сигнал (основной постоянный сигнал)

$$\mathbb{1} = (1\ 1\ 1 \dots 1),$$

и образующую *дискретную экспоненциальную функцию* (ДЭФ)

$$r = (1\ \omega\ \omega^2 \dots \omega^{N-1}), \quad \text{где } \omega = \omega_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right).$$

К ним добавим: набор циклических сдвигов единичного импульса

$$\delta^{\rightarrow} = (0\ 1\ 0\ 0 \dots 0), \delta^{2\rightarrow} = (0\ 0\ 1\ 0 \dots 0), \dots, \delta^{N-1\rightarrow} = (0\ 0\ 0 \dots 0\ 1) = \delta^{\leftarrow},$$

а также набор остальных ДЭФ в виде степеней (относительно операции \bullet) образующей ДЭФ:

$$r^{2\bullet} = r \bullet r, r^{3\bullet} = r^{2\bullet} \bullet r, r^{4\bullet}, \dots, r^{N-1\bullet}, r^{N\bullet} = r^{0\bullet} = \mathbb{1}.$$

Отметим, что значок \bullet в показателе степени ДЭФ принято опускать. Например, определим отрицательные степени

$$r^{-1} = r^{N-1}, r^{-2} = r^{N-2}, \dots$$

Перечислим **основные свойства круговой свертки**.

1. Замкнутость операции: если $a, b \in \mathbb{C}^N$, то $a * b \in \mathbb{C}^N$.
2. Коммутативность: $a * b = b * a$.
3. Ассоциативность: $a * (b * c) = (a * b) * c$.
4. Единичный импульс δ служит единицей в коммутативной алгебре \mathbb{C}^N с операциями сложения и свертки: $a * \delta = a$.
5. Круговая свертка билинейна, т.е. линейна по каждому аргументу: $(\alpha x + \beta y) * z = \alpha(x * z) + \beta(y * z)$, $z * (\alpha x + \beta y) = \alpha(z * x) + \beta(z * y)$.
6. Круговая свертка стационарна, т.е. свертка сдвига одного из операндов равна аналогичному сдвигу свертки: $a^{\rightarrow} * b = (a * b)^{\rightarrow}$.
7. Комплексное сопряжение свертки: $\overline{a * b} = \bar{a} * \bar{b}$.

7.2. Подпространство сигналов с нормировкой и базисы

Рассмотрим подпространство \mathbb{C}_0^N пространства \mathbb{C}^N , состоящее из сигналов $x \in \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих *условию нормировки*

$$\sum_{k=0}^{N-1} x(k) = 0. \quad (27)$$

Лемма 7.1. *Введенное множество \mathbb{C}_0^N служит подпространством пространства \mathbb{C}^N размерности $N - 1$.*

Перечислим базисы пространства \mathbb{C}^N (докажите, что это базисы), которые удобно использовать при ЦОС.

1. Базис сдвигов единичного импульса $\delta, \delta^{\rightarrow}, \delta^{2\rightarrow}, \dots, \delta^{N-1\rightarrow}$.
2. Экспоненциальный базис (состоящий из ДЭФ) $\parallel, r, r^{2\bullet}, r^{3\bullet}, r^{4\bullet}, \dots, r^{N-1\bullet}$.

Слегка варьируя эти базисы, легко получить следующие базисы пространства \mathbb{C}_0^N :

1. Набор $\{d^{k\rightarrow}\}_{k=0}^{N-2}$ сдвигов сигнала $d = \delta - \delta^{\rightarrow}$.
2. Набор ДЭФ $r, r^{2\bullet}, r^{3\bullet}, r^{4\bullet}, \dots, r^{N-1\bullet}$.

Для доказательства следует проверить, что указанные сигналы принадлежат пространству \mathbb{C}_0^N и линейно независимы.

7.3. Дискретное преобразование Фурье

Матрица *прямого дискретного преобразования Фурье* порядка N определяется равенством

$$F_N = (\omega^{-kj})_{k,j=0}^{N-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \dots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \dots & \omega^{-(2N-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \dots & \omega^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где $\omega = \omega_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right)$. Обычно порядок N фиксируется и потому не указывается в обозначениях: пишем F вместо F_N и ω вместо ω_N .

Обратное дискретное преобразование Фурье задается матрицей

$$F^{-1} = \frac{1}{N} (\omega^{kj})_{k,j=0}^{N-1} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{(N-1)} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{(2N-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{(N-1)} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Строки матриц F и NF^{-1} есть дискретные экспоненциальные функции. В матрице (28) они следуют в порядке $r^{0\bullet}, r^{N-1\bullet}, r^{N-2\bullet}, \dots, r^{2\bullet}, r$, а в матрице (29) – в порядке возрастания степени. Матрицы F и NF^{-1} выражаются одна через другую с помощью операции комплексного сопряжения $NF^{-1} = \overline{F}$ или заменой ω на $\omega^{-1} = \overline{\omega}$ в матрице из формулы (29).

Используя соотношение $\omega^N = 1$, матрицы F и F^{-1} часто записывают в *приведенном виде*, когда все показатели степени у ω берутся в диапазоне от 0 до $N - 1$. Например,

$$F_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \end{pmatrix}, \quad 5F_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}.$$

Если комплексные числа, составляющие элементы матрицы, записать в алгебраическом виде, то получим *числовой* алгебраический вид соответствующей матрицы:

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Только в простейшем случае для матрицы $F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ все элементы действительные, поэтому исключим этот случай из общих рассмотрений.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) рассматривается как действие линейного оператора в пространстве сигналов \mathbb{C}^N и может быть записано несколькими способами:

- в сокращенном *матричном* виде

$$y = xF$$

как умножение строки $x \in \mathbb{C}^N$ на матрицу (28),

или $y^T = Fx^T$ как умножение матрицы (28) на столбец $x^T \in \mathbb{C}^N$;

- в *операторном* виде $y = \mathcal{F}[x]$;
- в *координатном* виде

$$y(s) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega^{-sj}. \quad (30)$$

Формула восстановления исходного сигнала может быть записана в одном из видов:

$$x = yF^{-1}, \quad x^T = F^{-1}y^T, \quad x = \mathcal{F}^{-1}[y], \quad x(j) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} y(s)\omega^{sj}.$$

Различие в форме записи применим в формулировке следующей леммы.

Лемма 7.2. *Если $y = xF$, то $x^{k \rightarrow} F = r^{-k} \bullet \bullet y$.*

Если $y = \mathcal{F}[x]$, то $\mathcal{F}[x^{k \leftarrow}] = r^k y$.

Доказательство. В формулу (30) подставим сдвинутый сигнал с координатами $x^{k \rightarrow}(j) = x(j - k)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{N-1} x(j - k)\omega^{-sj} = \sum_{j=0}^{N-1} x(j - k)\omega^{-s(j-k)}\omega^{-sk} = \\ & = \omega^{-sk} \left(\sum_{j=k}^{N-1} x(j - k)\omega^{-s(j-k)} + \sum_{j=0}^{k-1} x(j + N - k)\omega^{-s(j+N-k)} \right) = \omega^{-sk} y(s). \end{aligned}$$

Применили периодичность исходного сигнала и соотношение $\omega^{-sN} = 1$.

Вторая формулировка леммы есть другая (операторная) форма записи аналогичного утверждения для сдвига в обратную сторону. \square

В лемме использовали координатную форму записи для доказательства соотношения, записанного в другой форме. В некоторых случаях и в формулировках удобно совмещать разные формы записи.

Лемма 7.3. *Если $X = \mathcal{F}[x]$, $Y = \mathcal{F}[y]$, то*

$$\mathcal{F}[x * y] = X \bullet Y, \quad \mathcal{F}^{-1}[X \bullet Y] = x * y.$$

Доказательство. Подставим (26) в формулу (28)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x * y](k) &= \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x(j)y(s - j)\omega^{-sk} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{s=0}^{N-1} y(s - j)\omega^{-(s-j)k} \right) \omega^{-jk} x(j) = X(k) \cdot Y(k). \end{aligned}$$

Применим обратное ДПФ к полученной формуле. \square

Следствие 7.1 *Если $A = \mathcal{F}[a]$, $B = \mathcal{F}[b]$, то $N\mathcal{F}[a \bullet b] = A * B$.*

Доказательство. Пусть $\bar{a} = X$, $\bar{b} = Y$. Тогда $x = \mathcal{F}^{-1}[\bar{a}] = \frac{1}{N}\overline{\mathcal{F}[\bar{a}]}$, $y = \frac{1}{N}\overline{\mathcal{F}[\bar{b}]} = \frac{1}{N}\overline{\mathcal{F}[\bar{b}]} = \frac{1}{N}\overline{B}$, поэтому

$$\begin{aligned} \bar{a} \bullet \bar{b} &= X \bullet Y = \mathcal{F} \left[\frac{1}{N}\overline{A} * \frac{1}{N}\overline{B} \right] = \frac{1}{N^2} \mathcal{F} [A * B] = \\ &= \frac{1}{N^2} N \cdot \overline{\mathcal{F}^{-1} [A * B]} = \frac{1}{N} \overline{\mathcal{F}^{-1} [A * B]}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$N(a \bullet b) = \mathcal{F}^{-1}[A * B].$$

Прямое ДПФ от этого выражения приводит к доказываемой формуле.

7.4. Упражнения

7.1. Докажите перечисленные семь свойств круговой свертки.

7.2. В случае периода $N = 4$ выпишите все дискретные экспоненциальные функции. Запишите все сдвиги основной ДЭФ (при $N = 4$).

7.3. Докажите лемму 7.1.

7.4. Докажите, что приведенные наборы сдвигов единичного импульса и ДЭФ составляют базис пространства \mathbb{C}^N .

7.5. Докажите, что приведенные наборы: набор $\{d^{k \rightarrow}\}_{k=0}^{N-2}$ сдвигов и $r, r^{2\bullet}, r^{3\bullet}, r^{4\bullet}, \dots, r^{N-1\bullet}$ – составляют базис пространства \mathbb{C}_0^N .

7.6. Запишите матрицу ДПФ F_6 в виде (28), в приведенном виде и в числовом виде. Запишите матрицу обратного ДПФ $6F_6^{-1}$ в числовом виде.

7.7. Запишите в случае $N = 4$ для вектора $x = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3)$ дискретное преобразование Фурье: 1) в матричном виде, 2) в матричном виде для x^T , 3) в координатном виде (30) как систему четырех соотношений. Вычислите спектральные характеристики вектора $x = (0 \ 1 \ 2 \ 3)$.

7.8. Вычислите ДПФ для сигналов $z = (1 \ 2 \ 3 \ 0)$ и $s = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$. Сравните с $\mathcal{F}[x]$ из упражнения 7.7.

7.9. Вычислите круговую свертку вектора $x = (0 \ 1 \ 2 \ 3)$ с собой, а также ДПФ от этой свертки $\mathcal{F}[x * x]$.

7.10. Вычислите для сигнала $x = (0 \ 1 \ 2 \ 3)$ сигнал $x \bullet x$ и $\mathcal{F}[x \bullet x]$.

7.11. Вычислите ДПФ от всех элементов базиса \mathbb{C}^N из сдвигов единичного импульса.

7.12. Вычислите ДПФ от элементов экспоненциального базиса.

7.13. Докажите круговое свойство корней из единицы:

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{N-1} = 0, \quad \text{где } \omega = \omega_N = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right),$$

а также его обобщение

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{kj} = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (31)$$

8. Спектральное разложение оператора ДПФ

8.1. ДПФ в евклидовом пространстве. Равенство Парсеваля

Пространство \mathbb{C}^N превращается в *евклидово* пространство, если в нем ввести *эрмитово скалярное произведение* сигналов $x, y \in \mathbb{C}^N$:

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \overline{y(k)},$$

обладающее свойствами, перечисленными на стр. 35.

Лемма 8.1. *Дискретные экспоненциальные функции ортогональны:*

$$(r^k, r^j) = 0, \quad \text{если } k \neq j, \quad (r^k, r^k) = N.$$

Доказательство. Так как $\bar{r} = r^{-1}$, то $(r, r) = \sum_{j=0}^{N-1} \omega^j \cdot \omega^{-j} = N$. Аналогично доказывается $(r^k, r^k) = N$.

По формуле эрмитова скалярного произведения (r^k, r^j) равно сумме координат вектора r^{k-j} . По круговому свойству (31) сумма координат ДЭФ (при $k \neq j$) равна 0.

Следствие 8.1. *Матрица (29) является обратной матрицей к матрице (28).*

Евклидово пространство \mathbb{C}^N рассматривается как *нормированное пространство* с нормой

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2}.$$

Теорема 8.1. *Для ДПФ выполняется обобщенное равенство Парсеваля, а именно: если $X = \mathcal{F}[x]$, $Y = \mathcal{F}[y]$, то*

$$(x, y) = N^{-1} \cdot (X, Y)$$

и, как следствие, верно равенство Парсеваля

$$\|X\|^2 = N \cdot \|x\|^2. \quad (32)$$

Доказательство. Обратное ДПФ $y = \mathcal{F}^{-1}[Y]$ в координатной форме записывается в виде

$$y(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \omega^{kj}.$$

Операция комплексного сопряжения произведения переносится на множители, поэтому

$$\begin{aligned} (x, y) &= \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{Y(k)} \omega^{-kj} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} x(j) \omega^{-kj} \right) \overline{Y(k)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \overline{Y(k)} = N^{-1} \cdot (X, Y). \end{aligned}$$

8.2. Унитарный вид оператора ДПФ

К произвольному линейному оператору \mathcal{A} в евклидовом пространстве (в нашем случае в \mathbb{C}^N) вводится *сопряженный оператор* \mathcal{A}^* , удовлетворяющий соотношению (для всех $x, y \in \mathbb{C}^N$)

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y).$$

В конечномерном пространстве сопряженный оператор задают матрицей A^* , полученной из матрицы A (матрицы оператора \mathcal{A}) транспонированием и комплексным сопряжением всех элементов:

$$A^* = \overline{A}^T.$$

Незначительным видоизменением оператор ДПФ \mathcal{F} превращается в унитарный оператор (см. определение 6.1), который обозначим \mathcal{P} . Матрица этого оператора \mathcal{P} получается умножением на $\frac{1}{\sqrt{N}}$ матрицы (28). Такой же коэффициент будет у матрицы обратного оператора \mathcal{P}^{-1} , а не $\frac{1}{N}$, как у матрицы (29). Так как матрицы (28) и (29) симметричны, то матрицы \mathcal{P} и \mathcal{P}^{-1} различаются лишь комплексным сопряжением.

Равенство Парсеваля (32) есть свойство сохранения нормы унитарного оператора:

$$\|\mathcal{P}[x]\| = \|x\|.$$

Оно также вытекает из следующей теоремы.

Теорема 8.2. *Оператор \mathcal{P} дискретного преобразования Фурье в пространстве \mathbb{C}^N является унитарным оператором кручения четвертого порядка, т. е. для любого $x \in \mathbb{C}^N$ имеем*

$$\mathcal{P}^4[x] = x.$$

Пространство \mathbb{C}^N раскладывается на прямую сумму собственных взаимно ортогональных подпространств

$$\mathbb{C}^N = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3,$$

с собственными числами $1, i, -1, -i$ соответственно. Ортогональные проекторы Q_k ($k = 0, 1, 2, 3$) на эти подпространства через степени оператора вычисляются по формулам

$$Q_0 = \frac{1}{4}(\mathcal{P}^0 + \mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2 + \mathcal{P}^3), \quad Q_1 = \frac{1}{4}(\mathcal{P}^0 - i\mathcal{P}^1 - \mathcal{P}^2 + i\mathcal{P}^3),$$

$$Q_2 = \frac{1}{4}(\mathcal{P}^0 - \mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2 - \mathcal{P}^3), \quad Q_3 = \frac{1}{4}(\mathcal{P}^0 + i\mathcal{P}^1 - \mathcal{P}^2 - i\mathcal{P}^3).$$

Восстанавливаются степени операторов по формулам

$$\mathcal{P}^0 = Id = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3, \quad \mathcal{P} = Q_0 + iQ_1 - Q_2 - iQ_3,$$

$$\mathcal{P}^2 = Q_0 - Q_1 + Q_2 - Q_3, \quad \mathcal{P}^3 = Q_0 - iQ_1 - Q_2 + iQ_3,$$

первая из которых называется разложением единицы (так как служит разложением тождественного оператора Id), а остальные являются спектральным разложением операторов \mathcal{P} , \mathcal{P}^2 и \mathcal{P}^3 соответственно.

При этом размерность собственного подпространства R_k , совпадающая с кратностью собственного числа $\lambda_k = i^k$ для оператора \mathcal{P} , равна следу матрицы проектора Q_k .

Доказательство. Ранее указали расположение ДЭФ в симметричных матрицах (28) и (29). Согласно лемме 8.1 получаем, что квадрат матрицы оператора \mathcal{P} есть перестановочная матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее квадрат есть единичная матрица, т.е. $\mathcal{P}^4 = Id$.

Отсюда вытекает, что $\mathcal{P}^3 = \mathcal{P}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}$. Так как остальные две матрицы Id и \mathcal{P}^2 в формулах для величин Q_k действительные, то и матрицы Q_k получаются действительными. Так как каждая из матриц Id , \mathcal{P} , \mathcal{P}^2 и \mathcal{P}^3 симметричная, то и матрицы Q_k симметричные. Вычислим

$$\begin{aligned} Q_0^2 &= \frac{1}{16}(\mathcal{P}^0 + \mathcal{P} + \mathcal{P}^2 + \mathcal{P}^3 + \mathcal{P} + \mathcal{P}^2 + \mathcal{P}^3 + \mathcal{P}^4 + \mathcal{P}^2 + \mathcal{P}^3 + \mathcal{P}^4 + \mathcal{P}^5 + \mathcal{P}^3 + \mathcal{P}^4 + \mathcal{P}^5 + \mathcal{P}^6) = \\ &= \frac{1}{4}(\mathcal{P}^0 + \mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2 + \mathcal{P}^3) = Q_0. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется свойство

$$Q_k^2 = Q_k,$$

которое называется *идемпотентностью*, для остальных ($k = 1, 2, 3$) операторов Q_k . Известно, что действительная симметричная идемпотентная матрица служит матрицей проектора на подпространство. Вычислим композицию оператора \mathcal{P} с каждым из проекторов:

$$\mathcal{P} \cdot Q_k = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \mathcal{P}(-i)^{jk} \mathcal{P}^j = i^k \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 (-i)^{(j+1)k} \mathcal{P}^{j+1} = i^k Q_k.$$

Доказали, что Q_k проецирует на собственное подпространство, отвечающее собственному числу $\lambda_k = i^k$. Согласно общему утверждению о проекторах размерность собственного подпространства равна следу матрицы проектора.

Докажем ортогональность собственных подпространств, вычислив произведение матриц различных проекторов:

$$\begin{aligned} Q_k \cdot Q_l &= \frac{1}{16} \sum_{j=0}^3 \mathcal{P}^j (-i)^{jk} \sum_{s=0}^3 \mathcal{P}^s (-i)^{sk} = \\ &= \frac{1}{16} \left(\sum_{j+s=0}^3 \mathcal{P}^{j+s} \cdot (\dots) + \sum_{j+s=4}^6 \mathcal{P}^{j+s} \cdot (\dots) \right) = 0. \end{aligned}$$

Для этого вместо суммы по строкам квадрата следует вычислять сумму по его диагоналям и аккуратно расписывать коэффициенты перед одинаковыми степенями $j + s$ оператора \mathcal{P} .

Формулы для набора проекторов Q_k есть формулы обратного ДПФ (29) порядка 4 через степени оператора, поэтому степени оператора восстанавливаются по формуле (28) прямого ДПФ порядка 4. \square

Обращаем внимание на то, что формулы проекторов в теореме 8.2 незначительно различаются с аналогичными формулами в теореме 6.6, что вызвано лишь порядком нумерации проекторов Q_1 и Q_3 .

8.3. Пример спектрального разложения оператора ДПФ

Рассмотрим случай ДПФ порядка 3 с матрицей

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q^2 & q \\ 1 & q & q^2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } q = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad q^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Найдем собственные числа матрицы, составив характеристическое уравнение $|F_3 - \lambda E| = 0$. Так как

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & q^2-\lambda & q \\ 1 & q & q^2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(q^2-\lambda)^2 + 2q - 2(q^2-\lambda) - q^2(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(q^4 - 2q^2\lambda + \lambda^2 - q^2) + 2(\lambda + q - q^2) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+\sqrt{3}i) + 2(\lambda+\sqrt{3}i),$$

то характеристическое уравнение

$$(\lambda + \sqrt{3}i)(1 - \lambda^2 + 2) = 0$$

имеет корни $\lambda_0 = \sqrt{3}$, $\lambda_1 = -\sqrt{3}i$, $\lambda_2 = -\sqrt{3}$.

Отсюда для унитарной формы этого оператора $P = \frac{1}{\sqrt{3}}F_3$ спектр оператора (полный набор всех собственных чисел с учетом кратности) равен

$$\sigma_3 = \{1, -i, -1\}.$$

Собственные векторы матрицы P можно также найти стандартными методами линейной алгебры. Предложим другой метод на базе теоремы предыдущего параграфа. Матрица P^3 есть комплексно сопряженная к P . Вычислим

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а также (с учетом $P^0 = E$)

$$E + P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E - P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P + P^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P - P^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Через эти заготовки легко вычислить проекторы

$$Q_0 = \frac{1}{4} ((E + P^2) + (P + P^3)) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} + 2 & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{3} - 1 & \sqrt{3} - 1 \\ 2 & \sqrt{3} - 1 & \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \frac{1}{4} ((E - P^2) - i(P - P^3)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \frac{1}{4} ((E + P^2) - (P + P^3)) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 2 & -2 & -2 \\ -2 & \sqrt{3} + 1 & \sqrt{3} + 1 \\ -2 & \sqrt{3} + 1 & \sqrt{3} + 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \frac{1}{4} ((E - P^2) + i(P - P^3)) = 0.$$

След (сумма диагональных элементов матрицы с учетом множителя перед матрицей) каждой из матриц Q_0, Q_1, Q_2 равен 1, поэтому проекторы одномерные. Все ненулевые столбцы этих матриц служат их собственными векторами. Возьмем по одному столбцу из каждой матрицы (для наглядности координаты отделили запятыми):

$$f_0 = (\sqrt{3} + 1, 1, 1)^T, \quad f_1 = (0, 1, -1)^T, \quad f_3 = (\sqrt{3} - 1, -1, -1)^T.$$

Эти столбцы составляют ортогональный базис из собственных векторов. Через ортогональный базис одномерные ортопроекторы получаются по формулам (здесь $k = 0, 1, 2$) произведения матриц:

$$Q_k = \frac{f_k \cdot f_k^T}{f_k^T \cdot f_k},$$

где в знаменателе скалярный квадрат вектора $(f_k, f_k) = \|f_k\|^2$.

Получили также разложение единицы

$$E = Q_0 + Q_1 + Q_2$$

и спектральное представление матрицы

$$P = Q_0 - iQ_1 - Q_2.$$

8.4. Спектральное представление унитарного оператора ДПФ

По той же схеме, но еще проще, вычисляется спектр оператора $\frac{1}{\sqrt{2}}F_2$, равный $\sigma_2 = \{1, -1\}$ $\sigma_2 \quad \sigma_3$

Теорема 8.3. Спектр σ_{4n+k} унитарного оператора ДПФ $\frac{1}{\sqrt{N}}F_N$, где $N = 4n + k$, получается из спектра σ_{4n+k-1} этого же оператора предыдущего порядка добавлением нового собственного числа, равного $\lambda_k = i^k$, где $k = 0, 1, 2, 3$.

$$\sigma_4 = \{1, -1 - i, 1\}, \quad \sigma_5 = \{1, -1 - i, 1, i\}, \quad \sigma_6 = \{1, -1 - i, 1, i, -1\}, \dots$$

$$SG(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k^2}, \quad \text{где } \omega = e^{\frac{2\pi i}{N}},$$

через которые определяется след матрицы ДПФ: $Tr F_N = \overline{SG(N)}$.

Теорема 8.4. *Величина $\frac{SG(N)}{\sqrt{N}}$ в зависимости от остатка при делении на 4 равна: $1 + i$ при $N = 4n$, 1 при $N = 4n + 1$, 0 при $N = 4n + 2$, i при $N = 4n + 3$.*

Известные доказательства этой теоремы достаточно сложны, зато легко вычислить след матриц E и P^2 . Отсюда по теореме 8.2 рассчитывают след каждого из проекторов Q_k , что и приводит к формулировке теоремы 8.3.

Матричный вариант метода ортогонализации Грама-Шмидта

Если след некоторой матрицы проектора Q больше 1, то прежде всего в качестве начального базисного вектора f выбирают любой ненулевой столбец этой матрицы и по формуле

$$P_1 = \frac{f \cdot f^T}{f^T \cdot f}, \quad (33)$$

вычисляют одномерный проектор на выбранное направление. Тогда матрица $Q - P_1$ есть матрица проектора на подпространство размерности на единицу меньше. Для матрицы $Q - P_1$ еще раз повторяют приведенный алгоритм. Число итераций равно следу матрицы Q .

Диагонализация оператора

Если для линейного оператора, заданного квадратной матрицей A , получен ортогональный базис из собственных векторов $\{f_j\}_{j=1}^N$, то его можно пронормировать $e_j = \frac{f_j}{\|f_j\|}$, а из столбцов ортонормированного базиса составить унитарную матрицу поворота U . Если U действительная, то $U^{-1} = U^T$.

Теорема 8.5. *Матрица*

$$D = U^T A U$$

является диагональной, на ее главной диагонали расположены все ее собственные числа.

Доказательство. Столбцы матрицы AU имеют вид $Ae_j = \lambda_j e_j$. Строки матрицы U^T есть e_j^T . Так как за счет ортонормированности $e_j^T \lambda_j e_j = \lambda_j$, $e_j^T \lambda_k e_k = 0$ при $k \neq j$, то матрица D диагональная с числами λ_j на главной диагонали.

8.5. Упражнения

8.1. Вычислите ДПФ для сигналов $x = (0 \ 1 \ 2 \ 3)$ и $z = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$. Проверьте справедливость равенства Парсеваля для них.

8.2. Вычислите ДПФ для сигнала $x = (0 \ 1 \ 2 \ \dots \ N - 1)$ и составьте равенство Парсеваля для него.

Указание. Воспользуйтесь решением задачи 2.4, где возьмите $t = \omega^{-k}$ для вычисления координаты y_k .

8.3. Найдите собственные числа и собственные векторы для матрицы $H = F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверьте, что оператор $J = \frac{1}{\sqrt{2}}H$ есть оператор *инволюции*: $J^2 = E$. Докажите, что операторы $Q_+ = \frac{1}{2}(E + J)$ и $Q_- = \frac{1}{2}(E - J)$ есть ортогональные операторы проектирования на собственные подпространства (проверьте для них идемпотентность и симметричность). Каким собственным числам отвечают эти собственные подпространства? Вычислите Q_+ и Q_- .

8.4. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора ДПФ четвертого порядка F_4 .

8.5. Для унитарного оператора $J = \frac{1}{2}F_4$ вычислите все положительные степени оператора J . Рассчитайте матрицы проекторов Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 и определите размерность собственных подпространств, т. е. вычислите σ_4 .

Проверьте для полученных матриц проекторов идемпотентность, симметричность и взаимную ортогональность.

Найдите ортогональный базис из собственных векторов оператора J , применяя в одном из случаев матричный метод ортогонализации. Постройте унитарную матрицу U , которая диагонализует матрицу J .

8.6. Повторите решение упражнения 8.5 для ДПФ порядка 6.

9. Быстрое преобразование Фурье

9.1. Дискретное преобразование Хаара

Революцией в цифровой обработке сигналов считается появление быстрых алгоритмов реализации дискретного преобразования Фурье, которые получили название *быстрое преобразование Фурье* и аббревиатуру FFT (fast Fourier transform). На практике наиболее широкое распространение получило быстрое преобразование Фурье порядка $N = 2^n$. Начнем с простейшего случая $n = 1$, когда необходимости в быстром преобразовании нет.

Матрица ДПФ порядка 2, элементы которой вычисляем по общей формуле (28), имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вместо обозначения F_2 использовали обозначение H , так как линейное преобразование с этой матрицей служит не только простейшим ДПФ, но и *дискретным преобразованием Хаара* (ДПХ) (оно также служит простейшим случаем дискретного преобразования Уолша, но здесь мы его не рассматриваем). В матричном виде дискретное преобразование Хаара представляет собой переход от входного вектора $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ к вектору на выходе $y = \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \end{pmatrix}$ по формуле умножения матриц $y = Hx$. Условно и более коротко это преобразование можно записать в виде перехода

$$(a, b) \xrightarrow{H} (a + b, a - b). \quad (34)$$

Кроме (34) в дальнейшем будем также использовать *поправленное дискретное преобразование Хаара*

$$(a, b)_\lambda \xrightarrow{H} (a + \lambda b, a - \lambda b).$$

Обратная матрица к H определяется формулой $H^{-1} = \frac{1}{2}H$. В подобных обозначениях можно записать и *обратное дискретное преобразование Хаара*

$$(a, b) \xrightarrow{H/2} \left(\frac{a + b}{2}, \frac{a - b}{2} \right).$$

Существует алгоритм быстрого преобразования Хаара (БПХ) для исходного массива размера $N = 2^n$ в виде последовательного применения формулы (34) и восстановления исходного сигнала с помощью обратного БПХ. Мы его рассматривать не будем.

9.2. Простейший случай быстрого преобразования Фурье

В теоремах 6.6 и 8.2 приведены формула вычисления проекторов Q_k через степени оператора \mathcal{F} (интегрального) или \mathcal{P} (дискретного) преобразований Фурье, а также обратная формула восстановления. Одна из этих формул в матричном виде для исходного сигнала x и выходного сигнала y есть следующая формула обратного ДПФ порядка 4:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Координаты выходного сигнала запишем в сгруппированном виде, слегка изменив порядок следования:

$$\begin{aligned} y_0 &= (x_0 + x_2) + (x_1 + x_3), \\ y_2 &= (x_0 + x_2) - (x_1 + x_3), \\ y_1 &= (x_0 - x_2) + i(x_1 - x_3), \\ y_3 &= (x_0 - x_2) - i(x_1 + x_3). \end{aligned}$$

Эти формулы запрограммируем в виде следующего *алгоритма*.

Первый шаг.

$$\begin{aligned} (x_0, x_2) &\xrightarrow{H} (x_0 + x_2, x_0 - x_2), \\ (x_1, x_3) &\xrightarrow{H} (x_1 + x_3, x_1 - x_3). \end{aligned}$$

При этом результаты вычисления помещаем в те же ячейки, откуда брали данные в виде двух операндов.

Второй шаг.

$$\begin{aligned} (x_0 + x_2, x_1 + x_3) &\xrightarrow{H} ((x_0 + x_2) + (x_1 + x_3), (x_0 + x_2) - (x_1 + x_3)) \\ (x_0 - x_2, x_1 - x_3)_i &\xrightarrow{H} ((x_0 - x_2) + i(x_1 - x_3), (x_0 - x_2) - i(x_1 - x_3)). \end{aligned}$$

При этом результаты вычисления помещаем в те же ячейки, откуда брали данные в виде двух операндов.

Третий шаг.

Поменяем местами содержимое ячеек с номерами 1 и 2, чтобы результаты вычислений следовали в порядке y_0, y_1, y_2, y_3 .

Чтобы поменять предложенный алгоритм для обратного ДПФ на алгоритм для прямого ДПФ, во втором преобразовании второго шага в виде поправленного ДПХ меняют поправочный множитель i на $-i$. Аналогично и в общем случае от алгоритма обратного ДПФ легко перейти к алгоритму прямого ДПФ, изменив знак в показателе поправочных множителей. Для обратного ДПФ быстрый алгоритм смотрится красивее.

9.3. Построение быстрого преобразования Фурье

На примере обратного ДПФ порядка 8 продемонстрируем переход от алгоритма быстрого преобразования Фурье предыдущего порядка к аналогичному алгоритму следующего порядка. Рассмотрим матрицу

$$8F_8^{-1} = \{\omega^{kj}\}_{k,j=0}^7,$$

где $\omega = \exp \frac{2\pi i}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$. Отметим, что $\omega^8 = 1$, $1 + \omega^4 = 0$, $1 + \omega^2 + \omega^4 + \omega^6 = 1 + i - 1 - i = 0$, $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 + \omega^7 = 0$.

Каждую строку результата преобразования $y = 8F_8^{-1} \cdot x$ распишем, применив соответствующую группировку слагаемых и слегка изменив порядок следования координат:

$$\begin{aligned} y_0 &= (x_0 + x_4) + (x_2 + x_6) + (x_1 + x_5) + (x_3 + x_7), \\ y_4 &= (x_0 + x_4) + (x_2 + x_6) - ((x_1 + x_5) + (x_3 + x_7)), \\ y_2 &= (x_0 + x_4) - (x_2 + x_6) + i((x_1 + x_5) - (x_3 + x_7)), \\ y_6 &= (x_0 + x_4) - (x_2 + x_6) - i((x_1 + x_5) - (x_3 + x_7)), \\ y_1 &= (x_0 - x_4) + i(x_2 - x_6) + \omega((x_1 - x_5) + i(x_3 - x_7)), \\ y_5 &= (x_0 - x_4) + i(x_2 - x_6) - \omega((x_1 - x_5) + i(x_3 - x_7)), \\ y_3 &= (x_0 - x_4) - i(x_2 - x_6) + \omega^3((x_1 - x_5) - i(x_3 - x_7)), \\ y_7 &= (x_0 - x_4) - i(x_2 - x_6) - \omega^3((x_1 - x_5) - i(x_3 - x_7)). \end{aligned}$$

Сохраним два первых шага, но для вдвое более длинного массива. Словесно опишем их по-другому.

Первый шаг.

Исходный массив x длины $N = 8$ разобьем на два подмассива длины $N/2$ каждый (верхний и нижний). Выбираем пары ячеек из исходного массива x с шагом $N/2$ (т. е. по одному из верхнего и нижнего подмассивов), совершаем над содержимым ДПХ и результат помещаем в те же ячейки:

$$(x_0, x_4) \xrightarrow{H} (x_0 + x_4, x_0 - x_4),$$

$$(x_1, x_5) \xrightarrow{H} (x_1 + x_5, x_1 - x_5).$$

$$(x_2, x_6) \xrightarrow{H} (x_2 + x_6, x_2 - x_6).$$

$$(x_3, x_7) \xrightarrow{H} (x_3 + x_7, x_3 - x_7).$$

Второй шаг.

В каждом подмассиве длины $N/2$ отдельно производятся преобразования: в верхнем подмассиве те же действия, что и на первом шаге – совершаем ДПХ, выбирая данные с шагом $N/4$; в нижнем подмассиве совершаем поправленное ДПХ с шагом $N/4$ с поправочным коэффициентом i .

Третий шаг.

Массив делим на четыре подмассива длины $N/4$ каждый. Внутри каждого совершаем свое ДПХ: обычное, с поправкой i , с поправкой ω и с поправкой ω^3 соответственно.

Четвертый шаг.

Совершаем реверсную перестановку элементов массива:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Поясним общий случай *реверсной перестановки* следующего множества $\{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$. Числа этого множества запишем в двоичной системе счисления на n разрядах. Если эти n -разрядные числа прочесть (и упорядочить) в обратном порядке, то мы и получим реверсную перестановку указанного множества. Например, реверсная перестановка на четырехэлементном множестве:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

На третьем шаге в соответствии с этой реверсной перестановкой и брали поправочные множители для ДПХ: $\omega^0 = 1$, $\omega^2 = i$, ω^1 , ω^3 .

В общем случае описанного быстрого алгоритма, начиная с третьего шага, поправочные множители берутся в виде последовательных степеней образующего числа ω в соответствии с реверсной перестановкой.

Обычно данный быстрый алгоритм иллюстрируется диаграммой описанных шагов, где схема каждого шага условно называется «бабочкой».

Кроме описанного варианта реализации быстрого алгоритма существуют и другие, отличающиеся порядком выполнения действий.

Преимущество быстрого алгоритма перед непосредственным вычислением состоит в существенном уменьшении числа операций. Назовем *операцией* умножение плюс сложение. При непосредственном вычислении число операций N^2 . При использовании быстрого алгоритма число операций Nn .

9.4. Матричная форма быстрого преобразования Фурье

Описание быстрого алгоритма предложили на двух примерах: для N , равного 4 и 8. Кроме диаграммы быстрого алгоритма наглядным способом его представления служит матричная форма. Для $N = 4$ приведенный быстрый алгоритм выглядит так:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Слева следует еще добавить умножение на перестановочную матрицу

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

чтобы порядок следования координат выходного сигнала y был верный. Сокращенно этот алгоритм можно записать в виде

$$y = LS_2S_1x,$$

где S_1, S_2 – слабозаполненные матрицы специального вида, для записи которых удобно использовать символ кронекерова произведения матриц.

Определение 9.1. Кронекеровым произведением двух матриц $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{n,m}$, $B = (b_{jk})_{j,k=1}^{n_1,m_1}$ назовем матрицу размера $[n \cdot n_1 \times m \cdot m_1]$, которую можно представить как блочную матрицу вида

$$A \otimes B = (a_{jk} \cdot B)_{j,k=1}^{n,m}.$$

В этом определении временно отступили от нумерации элементов матриц с нуля. Проиллюстрируем определение, например, для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Получим

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 3a & 3b \\ 2c & 2d & 3c & 3d \\ 4a & 4b & 5a & 5b \\ 4c & 4d & 5c & 5d \end{pmatrix}.$$

Далее используем обозначение: E для единичной матрицы второго порядка, H для матрицы ДПХ, введенной в начале раздела. Тогда

$$S_1 = H \otimes E, \quad S_2 = (E \otimes H)T_2,$$

где $T_2 = \text{diag}(1, 1, 1, i)$ – диагональная матрица вращений специального вида. Индекс 2 у матрицы T означает то, что это матрица второго уровня, а индексы у матриц S означают номер матрицы в порядке выполнения действий.

В случае быстрого алгоритма для обратного ДПФ порядка $N = 8$ (т. е. уровня 3) сокращенная матричная запись следующая:

$$y = LS_3S_2S_1x,$$

где L – перестановочная матрица для реверсной перестановки,

$$S_1 = H \otimes E \otimes E, \quad S_2 = (E \otimes H \otimes E)T_2, \quad S_3 = (E \otimes E \otimes H)T_3,$$

$$T_2 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1, i, i), \quad T_3 = \text{diag}(1, 1, 1, i, 1, \omega, 1, \omega^3), \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{8}}.$$

Если у матрицы вращений укажем еще и уровень всей матрицы верхним индексом, то получим соотношение

$$T_2^{(3)} = T_2^{(2)} \otimes E,$$

указывающее на двукратное повторение элементов в матрице следующего уровня.

Матричная запись этого быстрого алгоритма ДПФ порядка $N = 2^n$ выглядит так:

$$y = L \cdot S_n \cdot S_{n-1} \cdot \dots \cdot S_2 \cdot S_1 \cdot x,$$

где L – перестановочная матрица реверсной перестановки уровня n (т. е. порядка 2^n),

$$S_k = (E^{(k-1)\otimes} \otimes H \otimes E^{(n-k)\otimes})T_k^{(n)},$$

где диагональная матрица вращений специального вида $T_k^{(k)}$ строится по следующему правилу. Положим $M = 2^k$, $M_1 = 2^{k-1}$, $M_2 = 2^{k-2}$. Следующий набор корней из единицы

$$\omega_M^0, \omega_M^1, \omega_M^2, \dots, \omega_M^{M_1-1}$$

расположим в реверсном порядке

$$\omega_M^0 = 1, \omega_M^{M_2} = i, \omega_M^{\frac{M_2}{2}} = \omega, \omega_M^{\frac{3M_2}{2}} = \omega^3, \dots, \omega_M^{M_1-1}$$

и поместим на нечетные номера диагонали, а на четных поставим единицы (нумерация начинается с четного номера – нуля). Далее $T_k^{(s+1)} = T_k^{(s)} \otimes E$.

9.5. Быстрый алгоритм Кули-Тьюки

Наиболее разрекламированный в мире вариант быстрого алгоритма реализации ДПФ – это алгоритм Кули-Тьюки. В случае $N = 2^n$ этот алгоритм легко получается из приведенного выше алгоритма, если начать с реверсной перестановки. В этом варианте порядок выполнения шагов изменится на противоположный, а диагональные матрицы вращений будут выглядеть проще.

Приведем этот алгоритм обратного ДПФ для $N = 16$ в матричном виде и в виде блок-схемы (смотри рисунок). Обозначим $\omega = \omega_N = \exp \frac{2\pi i}{16}$, $q = \omega_8 = \exp \frac{2\pi i}{8}$. На рисунке вместо $q = \omega^2$ принято обозначение u . Тогда

$$y = S_4 S_3 S_2 S_1 L x,$$

где L – перестановочная матрица для реверсной перестановки,

$$S_1 = E \otimes E \otimes E \otimes H, \quad S_2 = (E \otimes E \otimes H \otimes E) T_2,$$

$$S_3 = (E \otimes H \otimes E \otimes E) T_3, \quad S_4 = (H \otimes E \otimes E \otimes E) T_4,$$

$$T_2 = \text{diag}(1, 1, 1, i, 1, 1, 1, i, 1, 1, 1, i, 1, 1, 1, i),$$

$$T_3 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, q, q^2, q^3, 1, 1, 1, 1, 1, q, q^2, q^3),$$

$$T_4 = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7).$$

По аналогии записывают этот алгоритм и в общем случае при $N = 2^n$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & S_k & & n \\
 & & & & & & T_2 \\
 & & 1, 1, 1, i & & N/4 & & T_3 \\
 & & N/8 & & T_4 & & \\
 N/16 & & & & & & \\
 & & & & & & \omega_4 \quad \omega_8 \quad \omega_{16}
 \end{array}$$

Теорема 9.1. Дискретное преобразование Фурье (берем прямое ДПФ при $\omega = \exp \frac{-2\pi i}{N}$ или обратное при $\omega = \exp \frac{2\pi i}{N}$) порядка $N = 2^n$ (т. е. уровня n) вида

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega^{kj}$$

можно проводить по следующим рекуррентным формулам, верным при $0 \leq j < N_1 = 2^{n-1}$, где $q = \omega^2$:

$$y_j = \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k} q^{kj} + \omega^j \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k+1} q^{kj}, \quad y_{N_1+j} = \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k} q^{kj} - \omega^j \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k+1} q^{kj}.$$

Доказательство. Основную формулу при $0 \leq j < N$ перепишем, отделив четные слагаемые от нечетных:

$$y_j = \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k} \omega^{2kj} + \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k+1} \omega^{(2k+1)j}.$$

Далее полагаем $0 \leq j < N_1$ и отдельно анализируем верхнюю половину выходного массива

$$y_j = \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k} q^{kj} + \omega^j \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k+1} q^{kj}$$

и нижнюю его половину:

$$\begin{aligned} y_{N_1+j} &= \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k} \omega^{(N_1+j)2k} + \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k+1} \omega^{(N_1+j)(2k+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k} q^{kj} + \omega^{N_1} \omega^j \sum_{k=0}^{N_1-1} x_{2k+1} q^{kj}. \quad \square \end{aligned}$$

Итак, формулы доказанной теоремы 9.1 демонстрируют, что можно над массивом из четных координат исходного вектора отдельно и массивом из нечетных координат исходного вектора отдельно провести ДПФ порядка N_1 (т. е. предыдущего уровня) и добавить в заключение поправленное дискретное преобразование Хаара с поправками вида ω^j в порядке следования отсчетов выходного сигнала y_j и y_{N_1+j} .

В матричной записи алгоритма и в блок-схеме на рисунке показано, что подготовительный (нулевой) шаг алгоритма состоит в реверсной перестановке элементов исходного массива $x = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{15})^T$, в результате которой верхняя половина будет состоять из четных элементов в реверсном порядке, а нижняя – из нечетных элементов в реверсном порядке. Далее на рисунке показаны четыре основных шага алгоритма, на каждом из которых выполняется восемь ДПХ, часть из которых – с поправкой. Согласно результатам теоремы 9.1 три первых шага можно разбить на верхнюю и нижнюю половины, где выполняемые действия идентичны. Для сокращения записи результат каждого основного шага вычисления обозначаем в виде массива $a = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{15})^T$, что в случае первого шага на рисунке специально отмечено. Результат последнего шага есть выходной сигнал $y = (y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{15})^T$. Напомним, что $i = \omega_4 = \exp \frac{2\pi i}{4}$, $u = \omega_8 = \exp \frac{2\pi i}{8}$, $\omega = \omega_{16} = \exp \frac{2\pi i}{16}$.

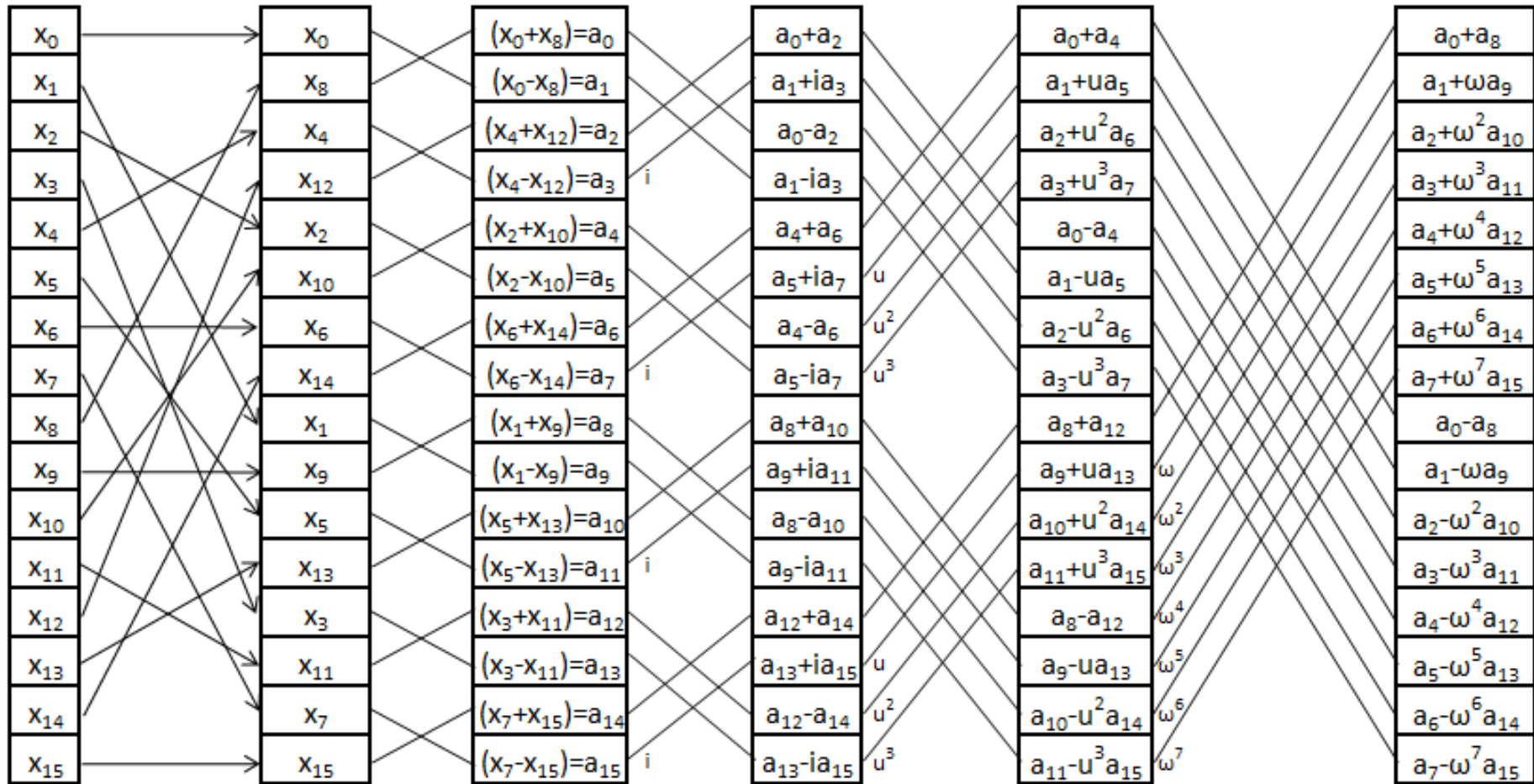


Рисунок. Блок-схема быстрого алгоритма Кули-Тьюки реализации дискретного преобразования Фурье порядка 16 вида $y = \bar{F}_{16} \cdot x$

При описании блок-схемы на рисунке отметили важное свойство реверсной перестановки – она помещает четные отсчеты в верхнюю половину массива и располагает их в реверсном порядке, а нечетные — в нижнюю половину также в реверсном порядке. Данный результат доказан в следующей лемме.

Лемма 9.1. Пусть $rev_n : \{0, 1, 2, \dots, N - 1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, N - 1\}$ и $rev_{n-1} : \{0, 1, 2, \dots, N_1 - 1\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, N_1 - 1\}$ – отображения, соответствующие реверсной перестановке на множествах из $N = 2^n$ и $N_1 = 2^{n-1}$ элементов соответственно. Тогда при $0 \leq j < N_1$ имеем

$$rev_n j = 2 rev_{n-1} j, \quad rev_n(j + N_1) = 2 rev_{n-1} j + 1.$$

Доказательство. Число j из диапазона $0 \leq j < N_1 = 2^{n-1}$ представимо как $(n - 1)$ -разрядное двоичное число $j = (j_{n-1} j_{n-2} \dots j_1)_2$. На n разрядах это же число представляется добавлением нуля в старший разряд $j = (j_n j_{n-1} j_{n-2} \dots j_1)_2$, $j_n = 0$. При прочтении числа в обратном порядке это преобразование соответствует удвоению числа.

Аналогично двоичное представление числа $j + N_1$ на n разрядах из двоичного $(n - 1)$ -разрядного представления числа j получается добавлением единицы в старший разряд $j = (j_n j_{n-1} j_{n-2} \dots j_1)_2$, $j_n = 1$. При прочтении числа в обратном порядке это преобразование соответствует удвоению числа с добавлением единицы.

9.6. Упражнения

9.1. Запишите в виде блок-схемы алгоритм из второго параграфа.

9.2. Составьте обратный алгоритм вычисления $x = \frac{1}{4} F_4 y$ к приведенному во втором параграфе быстрому алгоритму реализации $y = \overline{F_4} x$. Запишите его блок-схему.

9.3. Для произвольного исходного массива x с четырьмя координатами (например, цифрами года вашего рождения) численно прокрутить алгоритм п. 9.2 и обратный алгоритм восстановления.

9.4. Для произвольного исходного массива x с восьмью координатами (например, цифрами даты вашего рождения в формате число-месяц-год) численно прокрутить быстрый алгоритм п. 9.3.

9.5. Для приведенных в п. 9.4 матриц вычислите кронекеровы произведения $B \otimes A$, $A \otimes A$. Вычислите $H \otimes H$ для H из п. 9.1.

9.6. Составьте реверсную перестановку на 16 элементах от 0 до 15.

9.7. Составьте быстрый алгоритм реализации ДПФ для массива из 32 чисел.

10. Дискретные периодические функции Бернулли

10.1. Пример вычисления дискретного преобразования Фурье

Приведем пример вычисления дискретного преобразования Фурье в общем виде, т. е. произвольного порядка N для сигнала из пространства \mathbb{C}^N . Естественно в качестве такого сигнала предложить сигнал x с координатами $x(k) = k$.

По формуле (30) вычислим координаты выходного сигнала:

$$y(s) = \sum_{k=0}^{N-1} k\omega^{-sk}.$$

В частности, по формуле суммы членов арифметической прогрессии

$$y(0) = \sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (35)$$

Для вычисления остальных координат применим формулы

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = \frac{1-z^N}{1-z}, \quad \sum_{k=0}^{N-1} kz^{k-1} = \left(\frac{1-z^N}{1-z} \right)' = \frac{1+(N-1)z^N - Nz^{N-1}}{(1-z)^2}.$$

Если выполняется соотношение $z^N = 1$, то получим формулу

$$\sum_{k=0}^{N-1} kz^k = \frac{zN(1-z^{-1})}{(1-z)^2} = \frac{N}{z-1}.$$

Так как у нас именно этот случай $(\omega^{-s})^N = 1$, то

$$y(s) = \sum_{k=0}^{N-1} k\omega^{-sk} = \frac{N}{\omega^{-s} - 1}$$

при $s = 1, 2, \dots, N-1$. Приведенный пример вычисления ДПФ позволяет вывести интересную тригонометрическую формулу.

Вычислим нормы входного x и выходного y сигналов:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6},$$

$$\|y\|^2 = \frac{N^2(N-1)^2}{4} + N^2 \sum_{s=1}^{N-1} \frac{1}{|\omega^{-s} - 1|^2} = N^2 \left(\frac{(N-1)^2}{4} + \sum_{s=1}^{N-1} \frac{1}{|\omega^{-s/2} - \omega^{s/2}|^2} \right).$$

По известным формулам Эйлера

$$\omega^{s/2} = e^{\frac{\pi s i}{N}} = \cos \frac{\pi s}{N} + i \sin \frac{\pi s}{N}, \quad \omega^{-s/2} = \cos \frac{\pi s}{N} - i \sin \frac{\pi s}{N}$$

вычисляем

$$|\omega^{-s/2} - \omega^{s/2}|^2 = 4 \sin^2 \frac{\pi s}{N}.$$

Применим равенство Парсеваля (32) для этих сигналов:

$$N \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} = N^2 \left(\frac{(N-1)^2}{4} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}} \right).$$

Отсюда получаем

$$\frac{4(N-1)(2N-1)}{6} = (N-1)^2 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}}.$$

После простых преобразований приходим к интересной формуле

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi k}{N}} = \frac{N^2 - 1}{3}. \quad (36)$$

Следующий пример простого сигнала, позволяющего получить аналогичную формулу, – это сигнал с отсчетами $x(k) = k^2$. Правда, при этом вычислительные сложности существенно возрастут. Упрощение достигается переходом от класса сигналов \mathbb{C}^N к классу \mathbb{C}_0^N .

В приведенном примере вместо сигнала с отсчетами $x(k) = k$ следует рассмотреть сигнал с отсчетами

$$b_1(k) = k - \frac{N-1}{2},$$

который согласно формуле (35) принадлежит пространству \mathbb{C}_0^N .

По формуле (30) для него получим

$$\mathcal{F}[b_1](0) = 0, \quad \mathcal{F}[b_1](s) = y(s), \quad s = 1, 2, \dots, N-1.$$

Согласно равенству Парсеваля (32)

$$N \|b_1\|^2 = \sum_{s=1}^{N-1} |y(s)|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}},$$

что приводит к тому же равенству (36).

10.2. Сигналы Бернулли

Предложенное выше обозначение b_1 не случайно. Сигнал b_1 является дискретной периодической функцией Бернулли первого порядка.

Определение 10.1. Дискретной периодической функцией Бернулли порядка s называется сигнал, координаты которого определяются равенством

$$b_s(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-s} \cdot \omega^{kj}, \quad \text{где } \omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}, \quad s, j \in \mathbb{Z}. \quad (37)$$

Будем называть их короче – *сигналы Бернулли* порядка s (периода N). Так как полагаем, что период N фиксирован, то в обозначениях его не отмечаем. В частности, по формуле (31) легко вычислить, что начальный сигнал Бернулли

$$b_0 = \delta - \frac{1}{N} \mathbb{1}.$$

Лемма 10.1. Введенные формулой (37) сигналы Бернулли принадлежат пространству \mathbb{C}_0^N .

Доказательство. Периодичность сигнала b_s вытекает из периодичности числа ω по показателю степени: $\omega^{k+N} = \omega^k$. Условие нормировки (27) для всех сигналов Бернулли проверяется по формуле (31). \square

Введем операцию *конечной разности*, Δ определенную на $x \in \mathbb{C}^N$:

$$\Delta[x](j) = x(j+1) - x(j).$$

Эта операция линейна: $\Delta[x+y] = \Delta[x] + \Delta[y]$, $\Delta[\alpha x] = \alpha \Delta[x]$.

Лемма 10.2. Если $x \in \mathbb{C}_0^N$, то $\Delta[x] \in \mathbb{C}_0^N$.

Доказательство. Периодичность сигнала $\Delta[x]$ очевидна. Проверим условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Delta[x](k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x(k) = 0.$$

Лемма 10.3. Если $b \in \mathbb{C}_0^N$, то решение $x \in \mathbb{C}_0^N$ разностного уравнения $\Delta[x] = b$ единственно.

Доказательство. Предложим алгоритм вычисления $x \in \mathbb{C}_0^N$.

Полагаем $x(0) = C$ и присваиваем $s := x(0)$, не определяя пока C .

Для j от 1 до $N-1$ (что обозначаем $j \in 1 : N-1$) вычисляем

$$x(j) := x(j-1) + b(j-1), \quad s := s + x(j).$$

Вычисляем C , решая уравнение (относительно неизвестной C): $s = 0$.

Уточняем значения отсчетов $x(j)$, подставляя найденное значение C . \square

Следовательно, в классе сигналов \mathbb{C}_0^N определена обратная операция $\Delta^{-1} : \mathbb{C}_0^N \rightarrow \mathbb{C}_0^N$ к операции конечной разности. Эта операция также линейная на классе \mathbb{C}_0^N :

$$\Delta^{-1}[x + y] = \Delta^{-1}[x] + \Delta^{-1}[y], \quad \Delta^{-1}[\alpha x] = \alpha \Delta^{-1}[x], \quad x, y \in \mathbb{C}_0^N, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Лемма 10.4. *Для сигналов Бернулли $b_s = \Delta[b_{s+1}]$ и $b_{s+1} = \Delta^{-1}[b_s]$.*

Доказательство. Вычислим координаты сигнала

$$\begin{aligned} \Delta[b_{s+1}](j) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-(s+1)} \cdot \omega^{k(j+1)} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-(s+1)} \cdot \omega^{kj} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-(s+1)} \cdot \omega^{kj} (\omega^k - 1) = b_s(j). \end{aligned}$$

По лемме 10.3 получаем второе утверждение леммы 10.4.

Следствие 10.1. *Для сдвига сигнала Бернулли: $b_s^{\leftarrow} = b_s + b_{s-1}$.*

Доказательство. В координатах доказанная формула $b_{s-1} = \Delta[b_s]$ выглядит так:

$$b_{s-1}(j) = b_s(j+1) - b_s(j), \quad \text{или} \quad b_s(j+1) = b_s(j) + b_{s-1}(j).$$

Предложение 10.1. *Явный вид начальных сигналов Бернулли отрицательного порядка*

$$b_{-k} = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \delta^{(k-j)\leftarrow} \quad \text{при } 1 \leq k < N. \quad (38)$$

Отсчеты всех сигналов Бернулли вещественные. Более того, отсчеты всех сигналов Бернулли отрицательного порядка и координаты векторов $N^{k+1} \cdot b_k$ при неотрицательных k есть целые числа.

Доказательство. По лемме 10.4 имеем базу индукции для (38):

$$b_{-1} = b_0^{\leftarrow} - b_0 = \delta^{\leftarrow} - \delta - \frac{1}{N} (\mathbb{1}^{\leftarrow} - \mathbb{1}) = \delta^{\leftarrow} - \delta = (-1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1),$$

$$b_{-2} = b_{-1}^{\leftarrow} - b_{-1} = \delta^{2\leftarrow} - 2\delta^{\leftarrow} + \delta = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 1 \ -2).$$

Индуктивный переход (во второй сумме заменяем $s = j + 1$)

$$\begin{aligned}
b_{-k} &= b_{-k+1}^{\leftarrow} - b_{-k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_{k-1}^j \delta^{(k-j)\leftarrow} - \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_{k-1}^j \delta^{(k-1-j)\leftarrow} = \\
&= \delta^{k\leftarrow} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j (C_{k-1}^j + C_{k-1}^{j-1}) \delta^{(k-j)\leftarrow} + (-1)^k \delta = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j \delta^{(k-j)\leftarrow}.
\end{aligned}$$

Применили известное свойство биномиальных коэффициентов

$$C_{k-1}^{j-1} + C_{k-1}^j = C_k^j. \quad (39)$$

Так как отсчеты b_{-1} целые, то и далее отсчеты всех сигналов Бернулли отрицательного порядка получаем целые.

Координаты вектора $N \cdot b_0 = N\delta - \mathbb{1}$ суть целые числа. Для сигналов Бернулли следующих (больших) порядков согласно формуле $b_{s+1} = \Delta^{-1}[b_s]$ вычисляем координаты по алгоритму леммы 10.3. Значение сумматора по окончанию цикла равно

$$s = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) = NC + \sum_{j=0}^{N-2} (N-j-1)b(j).$$

Если отсчеты $b(j)$ были целые, то, решая уравнение $s = 0$, получаем рациональное значение C со знаменателем N . \square

Лемма 10.5. *Сигнал Бернулли порядка 0 служит нейтральным элементом для операции круговой свертки в пространстве \mathbb{C}_0^N .*

Доказательство. Отмечалось выше и легко проверяется то, что сигнал δ служит нейтральным элементом для операции круговой свертки в пространстве \mathbb{C}^N : $x * \delta = x$. Также по определению (26) можно вычислить, что

$$x * \mathbb{1} = M \mathbb{1}, \quad \text{где} \quad M = \sum_{k=0}^{N-1} x(k),$$

поэтому $x * \mathbb{1} = 0$ для любого $x \in \mathbb{C}_0^N$. Отсюда по свойству линейности круговой свертки

$$x * b_0 = x * \delta - \frac{1}{N} x * \mathbb{1} = x - 0 = x.$$

Лемма 10.6. *Круговая свертка сигналов Бернулли равна соответствующему сигналу Бернулли, а именно*

$$b_n * b_m = b_{n+m}.$$

Сигналы Бернулли есть степени относительно операции свертки начального сигнала $b_n = b^{n}$, где $b = b_1$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Вычисляли $b_{-1} = (-1\ 0\ 0\ \dots\ 0\ 0\ 1)$, поэтому

$$b_{-1} * x = \Delta[x] \quad (40)$$

для любого $x \in \mathbb{C}^N$ непосредственным вычислением. По лемме 10.4 получаем для всех сигналов Бернулли отрицательного порядка

$$b_{-k} = \Delta[b_{-k+1}] = b_{-1} * b_{-k+1} = (b_{-1})^{k*}.$$

По лемме 10.4 и формуле (40):

$$b_{-1} * b_1 = \Delta[b_1] = b_0, \quad b_{-k} * b_k = b_0.$$

Отсюда вытекает формула $b_n = b^{n*}$, где $b = b_1$. Формула $b_n * b_m = b_{n+m}$ является ее следствием.

Следствие 10.2. *Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_0^N$ представим в виде круговой свертки конечной разности выбранного порядка этого сигнала с соответствующим сигналом Бернулли*

$$x = \Delta^m[x] * b_m.$$

10.3. Вывод тригонометрических сумм через сигналы Бернулли

С помощью сигналов Бернулли выводятся известные (в случае сигналов Бернулли отрицательного порядка) и новые (в случае сигналов Бернулли положительного порядка) тригонометрические формулы для степеней синусов в равноотстоящих узлах.

Теорема 10.1. *Отсчеты спектра Фурье сигнала Бернулли:*

$$\mathcal{F}[b_s](0) = 0, \quad \mathcal{F}[b_s](k) = (\omega^k - 1)^{-s} \text{ при } 1 \leq k < N.$$

Квадрат нормы спектра Фурье сигнала Бернулли (при $s > 0$):

$$\|\mathcal{F}[b_s]\|^2 = \frac{1}{4^s} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2s} \frac{\pi k}{N}},$$

$$\|\mathcal{F}[b_{-s}]\|^2 = 4^s \sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2s} \frac{\pi k}{N}.$$

$$\mathcal{F}[b_s](0) = 0$$

$$\mathcal{F}[b_s](l) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-s} \omega^{kj} \omega^{-lj} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (\omega^k - 1)^{-s} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{j(k-l)}.$$

Так как по формуле (31) внутренняя сумма не нулевая только при $k = l$, то получаем

$$\mathcal{F}[b_s](l) = (\omega^l - 1)^{-s}.$$

Отсюда квадрат нормы (по формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$)

$$\|\mathcal{F}[b_s]\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} |\omega^k - 1|^{-2s} = \sum_{k=1}^{N-1} |\omega^{\frac{k}{2}} - \omega^{-\frac{k}{2}}|^{-2s} \cdot |\omega|^{-sk} = \sum_{k=1}^{N-1} \left| 2 \sin \frac{\pi k}{N} \right|^{-2s}. \quad \square$$

Применением равенства Парсеваля получается следствие 10.3.

Следствие 10.3. *Суммы четных степеней синусов в равноотстоящих узлах выражаются через нормы сигналов Бернулли ($s > 0$)*

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2s} \frac{\pi k}{N} = \frac{N}{4^s} \|b_{-s}\|^2,$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^{2s} \frac{\pi k}{N}} = 4^s N \|b_s\|^2.$$

Нормы сигналов Бернулли отрицательного порядка легко вычислить.

Теорема 10.2. *Если $0 < s < N$, то $\|b_{-s}\|^2 = \frac{4^s (2s-1)!!}{(2s)!!}$.*

При $N \geq s + 1$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^{2s} \frac{\pi k}{N} = N \frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}.$$

Доказательство. Согласно предложению 10.1 при $0 < s < N$ имеем

$$\|b_{-s}\|^2 = \sum_{j=0}^s \left(C_s^j \right)^2.$$

Сравнивая в тождестве $(1+x)^s (1+x)^s = (1+x)^{2s}$ коэффициенты при x^s , получаем *тождество Вандермонда*

$$\sum_{j=0}^s \left(C_s^j \right)^2 = C_{2s}^s. \quad (41)$$

Исходя из этого

$$\|b_{-s}\|^2 = \frac{(2s)!}{(s!)^2} = \frac{(2s)!!(2s-1)!!}{(s!)(s!)} = \frac{2^s (2s-1)!!}{s!} = \frac{4^s (2s-1)!!}{(2s)!!}.$$

Осталось подставить этот результат в первую формулу следствия 10.3. \square

В частности,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{\pi k}{N} = \frac{N}{2} \text{ при } N \geq 2, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \sin^4 \frac{\pi k}{N} = \frac{3N}{8} \text{ при } N \geq 3,$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin^6 \frac{\pi k}{N} = \frac{5N}{16} \text{ при } N \geq 4, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \sin^8 \frac{\pi k}{N} = \frac{35N}{128} \text{ при } N \geq 5.$$

Вычисление норм сигналов Бернулли положительного порядка существенно сложнее. Если удастся это проделать, то согласно формуле следствия 10.3 можно получить, например, следующие формулы:

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^4 \frac{\pi k}{N}} = \frac{(N^2 - 1)(N^2 + 11)}{45},$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^6 \frac{\pi k}{N}} = \frac{(N^2 - 1)(2N^4 + 23N^2 + 191)}{945},$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^8 \frac{\pi k}{N}} = \frac{(N^2 - 1)(3N^6 + 43N^4 + 337N^2 + 2497)}{14175}.$$

10.4. Упражнения

10.1. Вычислите общий вид всех сигналов Бернулли периода 2.

10.2. Для периода $N = 3$ вычислите сигналы Бернулли $b_1, b_0, b_{-1}, b_{-2}, b_{-3}, b_{-4}$. По внешнему виду этих сигналов сформулируйте предположение об общем виде сигналов b_{2n} и b_{2n-1} (т. е. отдельно четного и нечетного порядков). Методом математической индукции докажите это предположение. *Указание.* В формулировке используйте сдвиги сигналов $(2 \ -1 \ -1)$ и $(-1 \ 0 \ 1)$.

10.3. Для периода $N = 4$ вычислите сигналы Бернулли порядков от -4 до 4. Выразите сигнал b_{-4} в виде линейной комбинации сигналов b_{-3}, b_{-2}, b_{-1} ; а сигнал b_0 – в виде линейной комбинации b_1, b_2, b_3 .

10.4. Для периода $N = 5$ вычислите сигналы Бернулли порядков от -5 до 5. Вычислите с помощью следствия 10.3 суммы $\sum_{k=1}^4 \sin^{2n} \frac{\pi k}{5}$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5$, а также при $n = -1, -2, -3, -4, -5$. Предложите в любой из математических программ вычислить сумму $\sum_{k=1}^4 \frac{1}{\sin^{10} \frac{\pi k}{5}}$ непосредственно. Сравните полученные результаты.

10.5. Для периода $N = 5$ вычислите круговую свертку сигналов Бернулли $b_1 * b_3$ и $b_{-3} * b_3$ непосредственно. Сравните с результатом леммы 10.6.

ОТВЕТЫ

- 1.1.** $\varphi_\xi(x) = (xp + q)^n$, $M[\xi] = np$, $D[\xi] = npq$, $M[\xi^{[k]}] = n^{[k]}p^k$.
1.2. $\varphi(x) = e^{\lambda(x-1)}$, $M[\xi] = \lambda$, $D[\xi] = \lambda$. **1.3.** $\varphi(x) = \frac{px}{1-qx}$, $M[\eta] = \frac{1}{p}$,
 $D[\eta] = \frac{q}{p^2}$. **1.4.** $\varphi(x) = \left(\frac{px}{1-qx}\right)^3$, $M[\eta_3] = \frac{3}{p}$, $D[\eta_3] = \frac{3q}{p^2}$. **1.5.** Закон Пуассона с параметром $\lambda = 5$. **1.6.** $\varphi_{\eta_\nu}(x) = \frac{3(x+1)^4}{160-7(x+1)^4}$, $M[\eta_\nu] = \frac{20}{3}$, $D[\eta_\nu] = \frac{310}{9}$.
 $\varphi_{\eta_\nu}(x) = \frac{6(x+1)^6}{640-4(x+1)^6}$, $M[\eta_\nu] = 5$, $D[\eta_\nu] = \frac{65}{2}$.

1.7. $\varphi_{\xi_2}(x) = \frac{(x^2+3x+2)^2}{36}$, $M[\xi_2] = \frac{5}{3}$, $D[\xi_2] = \frac{17}{18}$, $\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{x} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \mathbf{p} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{13}{36} & \frac{1}{6} & \frac{1}{36} \end{array}$

- 2.1.** $A_n(t) = (t+1)^n$; $\Phi_n * \Phi_1 = \Phi_{n+1}$, $A_{n+1}(t) = (t+1)^{n+1}$.
2.4. $A(t) = \frac{t^{N-1}}{t-1}$, $B(t) = tA'(t) = \frac{(N-1)t^{N+1} - Nt^N + t}{(t-1)^2}$.
2.5. 1001001101000110101011000000110000101100010011001000110010101
101000011010010110101001. **2.6.** $f_9 + f_7 + f_4 + f_0 = 1010010001$.
2.7. 28, 3, 0, 1; $28 + 3 + 0 + 1 \sim 101010001$. **2.10.** 209; $8f_7 + 5f_8$,
1000001100001101001; 1010001001001. **2.11.** $14f_{12} \sim 1000010111010101$.

- 3.1.** $(pe^{it} + q)^n$, $e^{\lambda(e^{it}-1)}$ (см. упр. 1.1 и 1.2). **3.2.** $f(t) = \frac{\lambda}{\lambda-it}$, $M[\xi] = \frac{1}{\lambda}$,
 $D[\xi] = \frac{1}{\lambda^2}$. **3.3.** $f(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}$, $M[\xi] = 0$, $D[\xi] = \frac{2}{\lambda^2}$. **3.4.** $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, $M[\xi] = 0$,
 $D[\xi] = \frac{1}{3}$; $f_{2\xi}(t) = \frac{\sin 2t}{2t}$, $f_{2\xi}(t) = f_2(t)$. **3.5.** $f_{\xi+\xi_1}(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$, $p_{\xi+\xi_1}(x)$ равна
 $\frac{x+2}{4}$ при $x \in [-2, 0]$, $\frac{2-x}{4}$ при $x \in [0, 2]$, 0 при $x \notin [-2, 2]$.

3.6. $\begin{array}{c|c|c} \mathbf{x} & -1 & 1 \\ \hline \mathbf{p} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$. **3.7.** $\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{x} & -2 & 0 & 2 \\ \hline \mathbf{p} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$; $\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{x} & -3 & -1 & 1 & 3 \\ \hline \mathbf{p} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$

3.8. $f_\zeta(t) = f_\xi(t) \cdot f_\eta(t) = \frac{\sin t}{t} \cdot \cos t = \frac{\sin 2t}{2t}$ (см. упр. 3.4). **3.10.** $f_\eta(t) = |f(t)|^2$.

- 4.1.** $f(t) = \exp(ita - \frac{t^2\sigma^2}{2})$. **4.2.** $f(t) = e^{it(a_1+a_2)} \cdot \exp(-\frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2})$, закон
распределения $\xi \in N(a_1 + a_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

- 5.1.** $F(t) = \frac{2(1-\cos t)}{\sqrt{2\pi} \cdot t^2}$. **5.2.** $F_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\lambda+it}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\lambda-it}$; $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}$.
5.3. $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|t|}$. **5.4.** $i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-|t|} \cdot \text{sign } t$. **5.5.** $(f_1 * f_1)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot t f_1(t)$; $\frac{1}{2\pi(\lambda+it)^2}$;
 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\lambda+it)^2}$. **5.6.** $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2}{4+t^2} \cdot e^{2it}$. **5.7.** $\sqrt{\frac{\pi}{8}} (|t| + 1)e^{-|t|}$, $-i\sqrt{\frac{\pi}{8}} t e^{-|t|}$.

- 6.1.** $e^{-t^2/2}$. **6.2.** $-ite^{-t^2/2}$. **6.3.** $(1-t^2)e^{-t^2/2}$; $a = 1/2$; $\lambda = -1$. **6.4.**
Для многочленов Эрмита со старшим коэффициентом 1: $H_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$,
 $H_4(x) = x^4 - 3x^2$; собственные числа $i, 1$. **6.7.** $f_1 \in R_0$, $f_2 \in R_2$. **6.8.** π .

- 7.2.** ДЭФ - (1 1 1 1), (1 i - 1 - i), (1 - 1 1 - 1), (1 - i - 1 i);
сдвиги основной ДЭФ - (i - 1 - i 1), (-1 - i 1 i), (-i 1 i - 1).

7.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} & \omega^{-4} & \omega^{-5} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} & \omega^{-8} & \omega^{-10} \\ 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-9} & \omega^{-12} & \omega^{-15} \\ 1 & \omega^{-4} & \omega^{-8} & \omega^{-12} & \omega^{-16} & \omega^{-20} \\ 1 & \omega^{-5} & \omega^{-10} & \omega^{-15} & \omega^{-20} & \omega^{-25} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^5 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^3 & 1 & \omega^3 & 1 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & -1 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}.$$

1) $(x_0 x_1 x_2 x_3) \cdot F_4$,

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{matrix} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\ x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3 \\ x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3 \end{matrix};$$

$(6, -2 + 2i, -2, -2 - 2i)$ в векторной форме записи (с запятыми).

$(6, -2 - 2i, 2, -2 + 2i), (10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i), (10, 12, 10, 4),$

$(36, -8i, 4, 8i), (0, 1, 4, 9), (14, -4 + 8i, -6, -4 - 8i).$

$\parallel, r^{-1\bullet}, r^{-2\bullet}, r^{-3\bullet}, \dots, r^{(-N+1)\bullet}, N\delta, N\delta^{\rightarrow}, N\delta^{2\rightarrow}, \dots, N\delta^{N-1\rightarrow}.$

$X = (6, -2 + 2i, -2, -2 - 2i), \|X\|^2 = 56 = 4 \cdot \|x\|^2 = 4 \cdot 14;$

$Z = (15, -3 + 3\sqrt{3}i, -3 + \sqrt{3}i, -3, -3 - \sqrt{3}i, -3 - 3\sqrt{3}i),$

$\|Z\|^2 = 330 = 6 \cdot \|z\|^2, y_0 = \frac{N(N-1)}{2}, y_k = \frac{N}{\omega^{-k}-1} = N \frac{\omega^{k/2}}{\omega^{-k/2} - \omega^{k/2}},$

$N \frac{(N-1)N(2N-1)}{6} = \frac{N^2(N-1)^2}{4} + N^2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi k}{N}}. \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2},$

$(\sqrt{2} + 1, 1), (1 - \sqrt{2}, 1);$ собственные числа для подпространств: 1 и -1.

$$Q_+ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2} + 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2i, \lambda_3 = -2. f_0 = (1 1 - 1 1), f_1 = (1 0 1 0), f_2 = (-1 1 1 1), f_3 = (0 1 0 - 1).$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix};$$

$$Q_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = 0 \quad Q_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

столбцы матрицы U составляют ортонормированный базис из собственных векторов, первые два из которых находятся неоднозначно;

$\dim R_0 = 2, \dim R_1 = 0, \dim R_2 = \dim R_3 = 1.$

8.6. J см. матрицу из упражнения 7.6, но с коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^5 & \omega^4 & -1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}.$$

$$Q_0 = \frac{1}{4\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{6} & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{6} & -1 & -2 & -1 & 1+\sqrt{6} \\ 2 & -1 & -1+\sqrt{6} & 2 & -1+\sqrt{6} & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2+2\sqrt{6} & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1+\sqrt{6} & 2 & -1+\sqrt{6} & -1 \\ 2 & 1+\sqrt{6} & -1 & -2 & -1 & 1+\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

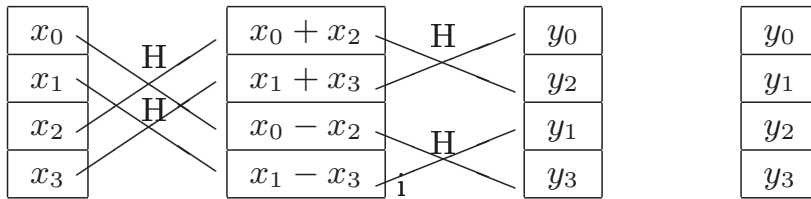
$$Q_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 1+\sqrt{2} & 0 & -1-\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \frac{1}{4\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2+2\sqrt{6} & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1+\sqrt{6} & 1 & 2 & 1 & -1+\sqrt{6} \\ -2 & 1 & 1+\sqrt{6} & -2 & 1+\sqrt{6} & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2+2\sqrt{6} & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1+\sqrt{6} & -2 & 1+\sqrt{6} & 1 \\ -2 & -1+\sqrt{6} & 1 & 2 & 1 & -1+\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

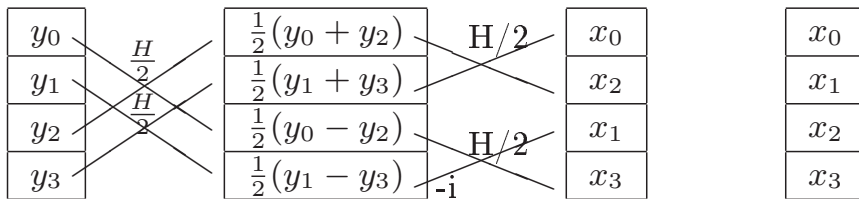
$$Q_3 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & -1 - \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1 + \sqrt{2} & 0 & 1 - \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - \sqrt{2} & 0 & -1 + \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 - \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\dim R_0 = \dim R_2 = 2$, $\dim R_1 = \dim R_3 = 1$. Ортогональный базис из собственных векторов и унитарная матрица U вычисляются сложно и неоднозначно.

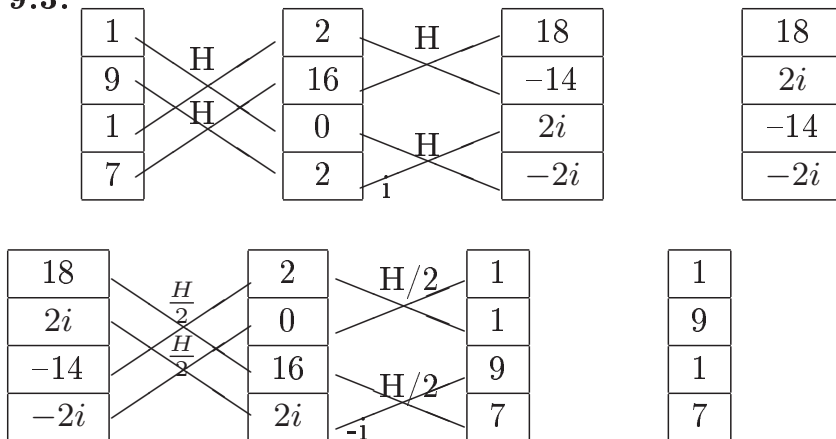
9.1.



9.2.



9.3.



9.4. Построчная запись сигналов (первая строчка – массив x)

0	7	1	1	1	9	1	7
1	16	2	8	-1	-2	0	-6
3	24	-1	8	-1	$-2 - 6i = \bar{a}$	-1	$-2 + 6i = a$
27	-21	$-1 + 8i$	$-1 - 8i$	$-1 + \omega \bar{a}$	$-1 - \omega \bar{a}$	$-1 + \omega^3 a$	$-1 - \omega^3 a$

$y = (27, -1 - 2\omega - 6\omega^3, -1 + 8i, -1 - 2\omega^3 + 6\omega^5, -21, -1 + 2\omega + 6\omega^3, -1 - 8i, -1 + 2\omega^3 - 6\omega^5)$, где $\omega = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\omega^3 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $\omega^5 = -\omega$.

$$9.5. B \otimes A = \begin{pmatrix} 2a & 3a & 2b & 3b \\ 4a & 5a & 4b & 5b \\ 2c & 3c & 2d & 3d \\ 4c & 5c & 4d & 5d \end{pmatrix}, \quad A \otimes A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 12 & 15 \\ 8 & 12 & 10 & 15 \\ 16 & 20 & 20 & 25 \end{pmatrix},$$

$$H \otimes H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9.6. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 8 & 4 & 12 & 2 & 10 & 6 & 14 & 1 & 9 & 5 & 13 & 3 & 11 & 7 & 15 \end{pmatrix}.$$

9.7. Подготовительный шаг алгоритма состоит в реверсной перестановке элементов исходного массива $x = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{32})^T$. В результате этой перестановки согласно лемме 9.1 верхняя половина массива будет состоять из четных элементов в реверсном порядке, а нижняя – из нечетных элементов в реверсном порядке. Далее отдельно для верхней и отдельно для нижней половины массива повторяются основные четыре шага быстрого алгоритма, показанные на блок-схеме рисунка на с. 65. Добавляется пятый основной шаг. Если результат по окончании этих четырех шагов обозначим $z = (z_0 \ z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{15})^T$ для верхней половины и $t = (t_0 \ t_1 \ t_2 \ \dots \ t_{15})^T$ для нижней половины, то согласно теореме 9.1 координаты выходного массива y вычисляются по формулам $y_k = z_k + \omega_{32}^k t_k$. Согласно формуле $(\omega_{32})^{16} = -1$ на блок-схеме этот заключительный шаг оформляют в виде аналогичной (см. рисунок) «бабочки» для набора поправленных ДПХ с выбором элементов с шагом 16 и поправками $\omega^0, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{15}$ соответственно.

10.1. $b_n = 2^{-n-1}(-1)^n(1, -1)$. **10.2.** $b_1 = \frac{1}{3}(-1, 1, 0)$, $b_0 = \frac{1}{3}(2, -1, -1)$, $b_{-1} = (-1, 0, 1)$, $b_{-2} = (1, 1, -2)$, $b_{-3} = (0, -3, 3)$, $b_{-4} = (-3, 6, -3)$.

$b_{2n} = 3^{-n-1}(-1)^n(2, -1, -1)^{n \rightarrow}$, $b_{2n-1} = 3^{-n}(-1)^n(-1, 0, 1)^{n \rightarrow}$.

10.3. $b_{-4} = (2, -4, 6, -4)$, $b_{-3} = (-1, 1, -3, 3)$, $b_{-2} = (1, 0, 1, -2)$, $b_{-1} = (-1, 0, 0, 1)$, $b_0 = \frac{1}{4}(3, -1, -1, -1)$, $b_1 = \frac{1}{8}(-3, 3, 1, -1)$, $b_2 = \frac{1}{16}(1, -5, 1, 3)$, $b_3 = \frac{1}{32}(3, 5, -5, -3)$, $b_4 = \frac{1}{64}(-7, -1, 9, -1)$. $b_{-4} = -4b_{-3} - 6b_{-2} - 4b_{-1}$, $b_0 = -4b_1 - 6b_2 - 4b_3$.

10.4. $b_{-5} = (0, -5, 10, -10, 5)$, $b_{-4} = (1, 1, -4, 6, -4)$, $b_{-3} = (-1, 0, 1, -3, 3)$, $b_{-2} = (1, 0, 0, 1, -2)$, $b_{-1} = (-1, 0, 0, 0, 1)$, $b_0 = \frac{1}{5}(4, -1, -1, -1, -1)$, $b_1 = \frac{1}{5}(-2, 2, 1, 0, -1)$, $b_2 = \frac{1}{5}(0, -2, 0, 1, 1)$, $b_3 = \frac{1}{5}(1, 1, -1, -1, 0)$,

$b_4 = \frac{1}{25}(-4, 1, 6, 1, -4)$, $b_5 = \frac{1}{25}(0, -4, -3, 3, 4)$. Пусть $TS(n) = \sum_{k=1}^4 \sin^{2n} \frac{\pi k}{5}$. Тогда $TS(1) = \frac{5}{2}$, $TS(2) = \frac{15}{8}$, $TS(3) = \frac{25}{16}$, $TS(4) = \frac{175}{128}$, $TS(5) = \frac{625}{512}$. $TS(-1) = 8$, $TS(-2) = \frac{96}{5}$, $TS(-3) = \frac{256}{5}$, $TS(-4) = \frac{3584}{25}$, $TS(-5) = \frac{2048}{5}$.

10.5. $b_1 * b_3 = \frac{1}{25}(-4, 1, 6, 1, -4)$, $b_{-3} * b_3 = \frac{1}{5}(4, -1, -1, -1, -1)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисциплина «Дискретные и вероятностные модели» включена в учебный план обучения в магистратуре по направлению «Прикладная математика». Специфика преподавания в магистратуре состоит в углублении ранее полученных знаний, поэтому многие курсы — авторские, что проявляется в свободе выбора излагаемого материала. Другой отличительной чертой авторских курсов служит отсутствие учебной литературы по данному предмету.

Обычный способ построения курсов с подобными названиями состоит в разборе конкретных производственных и технических моделей. Автор выбрал другой подход, состоящий в расширении изученного математического аппарата, применяемого в современных научных исследованиях. Вполне возможно, что какие-то элементы этого аппарата пригодятся студенту при дипломном проектировании или встретятся при дальнейшей научной и производственной деятельности.

Аппарат производящих и характеристических функций применяется как основной при изложении классического университетского курса теории вероятностей [15] и часто не рассматривается при первоначальном преподавании дисциплины. Производящие функции для последовательностей [7, 10] имеют очень большие сферы применения, хотя обычно и не излагаются в первоначальном курсе дискретной математики. Выход через них на последовательности Фибоначчи позволил познакомить студентов с двумя видами непозиционных систем счисления, применяемых для компьютерного представления чисел. Если фибоначчиева система счисления встречается в учебниках [7, 12], то сведения о линейной форме Фибоначчи взяты из журнальных статей [1].

Применение аппарата преобразования Фурье — один из основных методов исследования в математике и физике. Классические результаты для него, подробно изложенные в [14], в пособии дополнены спектральным разложением самого оператора. Тот же принцип спектрального разложения оператора, разработанный в научных статьях автора, предлагается и для оператора дискретного преобразования Фурье. Теория дискретного преобразования Фурье и ее важнейшая составляющая в виде быстрых алгоритмов подробно излагается в [2, 6, 8, 11]. В учебном курсе в качестве дополнения к материалу пособия еще рассматривались быстрые алгоритмы для дискретного преобразования Уолша, которые изложены в [4].

Немного о дискретных периодических функциях Бернулли можно узнать из [11]. Подробное изложение их теории еще только готовится к публикации в научной печати.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анисимов, А. В. Линейные формы Фибоначчи и параллельные алгоритмы большой размерности / А. В. Анисимов // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 3. – С. 106 – 115.
2. Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К. Р. Рао. – М. : Связь, 1980. – 248 с.
3. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
4. Беспалов, М. С. Дискретные функции Уолша и их приложения / М. С. Беспалов, В. А. Скляренко. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014. – 68 с. – ISBN 978-5-9984-0445-0.
5. Гантмахер, Ф. М. Теория матриц / Ф. М. Гантмахер. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
6. Гольд, Б. Цифровая обработка сигналов / Б. Гольд, Ч. Рейдер. – М. : Сов. радио, 1973. – 322 с.
7. Грэхем, Р. Конкретная математика. Основания информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник – М. : Мир, 1998. – 703 с. – ISBN 5-03-001793-3.
8. Ефимов, А. В. Математический анализ (специальные разделы). В 2 ч. Ч. 1. Общие функциональные ряды и их приложение / А. В. Ефимов. – М. : Высш. шк., 1980. – 279 с.
9. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1984. – 294 с.
10. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / под ред. К. А. Рыбникова. – М. : Наука, 1982. – 368 с.
11. Малоземов, В. Н. Основы дискретного гармонического анализа / В. Н. Малоземов, С. М. Машарский. – СПб. : Лань, 2012. – 304 с. – ISBN 978-5-8114-1414-7.
12. Романовский, И. В. Дискретный анализ / И. В. Романовский. – СПб. : Невский диалект, 2003. – 320 с. – ISBN 5-7940-0114-3.
13. Суетин, П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – М. : Наука, 1979. – 416 с.
14. Титчмарш, Э. Введение в теорию интегралов Фурье / Э. Титчмарш. – М. : КомКнига, 2005. – 480 с. – ISBN 978-5-484-00799-8.
15. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – М. : Наука, 1987. – 240 с.
16. Stampfli, G. Sums of projections // Duke Math. J. 1964. V.31. № 3. 455-461.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	2
1. Производящие функции в теории вероятностей	4
1.1. Основные свойства производящих функций	4
1.2. Производящая функция для случайного числа слагаемых. Вывод формулы Пуассона	6
1.3. Упражнения	9
2. Производящие функции последовательностей. Последовательность Фибоначчи и системы счисления на ее основе	10
2.1. Производящие функции последовательностей	10
2.2. Последовательность Фибоначчи и ее производящая функция	11
2.3. Фибоначчиева система счисления	12
2.4. Линейная форма Фибоначчи	15
2.5. Упражнения	17
3. Характеристические функции в теории вероятностей	18
3.1. Основные свойства характеристических функций	18
3.2. Сходимость для характеристических функций	20
3.3. Упражнения	23
4. Примеры характеристических функций. Предельные теоремы в теории вероятностей	24
4.1. Два примера вычисления характеристической функции	24
4.2. Закон больших чисел	26
4.3. Центральная предельная теорема	27
4.4. Упражнения	28
5. Преобразование Фурье	29
5.1. Определение преобразования Фурье	29
5.2. Вид и условия обращения преобразования Фурье	30
5.3. Свойства преобразования Фурье суммируемой функции	33
5.4. Упражнения	34
6. Преобразование Фурье для функций, суммируемых в квадрате	35
6.1. Теорема Планшереля	35
6.2. Функции Эрмита	36
6.3. Спектральное разложение оператора преобразования Фурье	40
6.4. Упражнения	42

7. Дискретное преобразование Фурье	43
7.1. Пространство сигналов	43
7.2. Подпространство сигналов с нормировкой и базисы	45
7.3. Дискретное преобразование Фурье	45
7.4. Упражнения	48
8. Спектральное разложение оператора ДПФ	49
8.1. ДПФ в евклидовом пространстве. Равенство Парсеваля	49
8.2. Унитарный вид оператора ДПФ	50
8.3. Пример спектрального разложения оператора ДПФ	52
8.4. Спектральное представление унитарного оператора ДПФ	54
8.5. Упражнения	56
9. Быстрое преобразование Фурье	57
9.1. Дискретное преобразование Хаара	57
9.2. Простейший случай быстрого преобразования Фурье	58
9.3. Построение быстрого преобразования Фурье	59
9.4. Матричная форма быстрого преобразования Фурье	61
9.5. Быстрый алгоритм Кули-Тьюки	63
9.6. Упражнения	66
10. Дискретные периодические функции Бернулли	67
10.1. Пример вычисления дискретного преобразования Фурье	67
10.2. Сигналы Бернулли	69
10.3. Вывод тригонометрических сумм через сигналы Бернулли	72
10.4. Упражнения	74
ОТВЕТЫ	75
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	80
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	81

Учебное издание

БЕСПАЛОВ Михаил Сергеевич

ДИСКРЕТНЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

Учебное пособие

Редактор Е. С. Глазкова

Технический редактор С. Ш. Абдуллаева

Корректор О. В. Балашова

Компьютерная верстка М. С. Беспалова, Е. А. Герасиной

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 25.12.17.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 4,88. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.