Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Т. В. ПРОХОРОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Владимир 2017

УДК 512:514
ББК 22.14+22.151
П84

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры функционального анализа и его приложений
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Д. Я. Данченко

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры информационных технологий
Российской академии народного хозяйства
и государственной службы при Президенте Российской Федерации
И. В. Сидорова

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Прохорова, Т. В.
П84 Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб. пособие / Т. В. Прохорова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 112 с. – ISBN 978-5-9984-0814-4.

Содержит учебные материалы по следующим разделам: линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия. Включает в себя примеры как иллюстрацию теоретического материала, образцы решения задач, а также дидактическую часть.

Предназначено для студентов всех инженерно-технических и математических специальностей.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 8. Библиогр.: 9 назв.

УДК 512:514
ББК 22.14+22.151

ISBN 978-5-9984-0814-4

ВВЕДЕНИЕ

Математика играет определяющую роль в развитии творческого потенциала студента и выработке научной методологии. Математика – универсальный язык всех естественных наук и основанных на них технических дисциплин, изучаемых в вузе.

Весь материал пособия разбит на темы. В каждой из них, за исключением некоторых, приведены примеры, иллюстрирующие соответствующую теорию, и продемонстрированы способы решения задач. Наличие в пособии большого количества решённых задач разного уровня сложности значительно облегчит самостоятельную работу студентов.

Автор стремился сделать изложение материала ясным и доступным. Основная цель пособия – помочь студенту, приступающему к изучению математики, организовать свою самостоятельную работу, выделить и усвоить главное, приобрести достаточно прочные навыки решения задач различного уровня сложности.

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора С. Г. Танкеева за ценные советы, данные автору в процессе работы над пособием.

Пособие будет полезно как для преподавателей, так и для учащихся вузов.

Каноническое уравнение эллипса

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1.1)$$

Фиксируем точки F_1 и F_2 (**фокусы**).

Эллипсом с фокусами F_1, F_2 называется множество таких точек $(x; y)$, что сумма расстояний от точки $(x; y)$ до фокусов равна постоянному числу $r_1 + r_2 = 2a$.

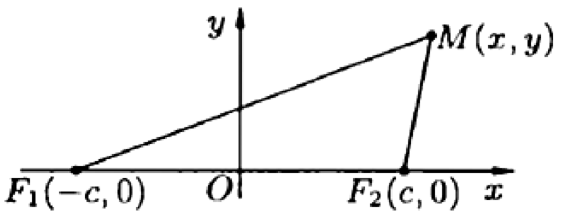


Рис. 1

Возьмем $M(x; y)$, $F_1 = (-c;\ 0)$, $F_2 = (c;\ 0)$, где $c \ge 0$ (рис. 1). Тогда

$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,

$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Имеем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(x+c)^2 + \underline{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \underline{y^2},$$

$$\underline{x^2} + 2xc + \underline{\underline{c^2}} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \underline{x^2} - 2xc + \underline{\underline{c^2}},$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc,$$

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^4 - a^2c^2,$$

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

В нашем случае $r_1 + r_2 = 2a > 2c$, поэтому $a > c$, и последнее из уравнений можно разделить на $a^2(a^2 - c^2)$. Получим уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Положим $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, получим **каноническое уравнение эллипса**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.2)$$

Точки $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$, $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;\ -b)$ называют **вершинами** эллипса (рис. 2).

Числа a и b называют **большой и малой полуосями** эллипса соответственно.

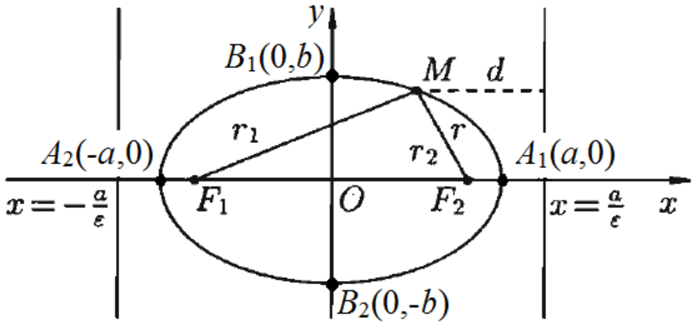


Рис. 2

В частности, если $a = b = r$, то $c = 0$, $F_1 = F_2 = O(0;\ 0)$, и эллипс превращается в окружность $x^2 + y^2 = r^2$ с центром в точке $O(0;\ 0)$ и радиусом r.

В качестве характеристики формы эллипса пользуются отношением $\frac{c}{a} = \varepsilon$, которое называется **эксцентриситетом** эллипса ($0 < \varepsilon < 1$). Чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплющенным. В частности, если $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

Фокальные радиусы r_1 и r_2 точки $M(x;y)$ эллипса (расстояние от точки M до фокусов) вычисляют по формулам

$$r_1 = a - \varepsilon x \text{ и } r_2 = a + \varepsilon x \quad (a \geq b) \qquad (1.3)$$

$$\text{или } r_1 = b - \varepsilon y \text{ и } r_2 = b + \varepsilon y \quad (b > a). \qquad (1.4)$$

Директрисами эллипса называются прямые

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \quad (a \geq b) \text{ или } x = \pm\frac{b}{\varepsilon} \quad (b > a). \qquad (1.5)$$

Теорема. Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

Взаимное расположение точки $M(x;y)$ и эллипса определяется условиями:

1) если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то точка M лежит на эллипсе;

2) если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$, то точка M лежит вне эллипса;

3) если $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$, то точка M лежит внутри эллипса.

Примеры:

Составить уравнение эллипса, если:

1) полуоси его соответственно равны 4 и 2;

2) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

3) большая полуось равна 10 и эксцентриситет $\varepsilon = 0,8$;

4) малая полуось равна 3 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8.

Решение

1) Из условия задачи следует, что $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$, т. е. уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

2) Так как $2c=6$, $a=5$, то $b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16$, и уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

3) Так как $a=10$, $\varepsilon=0,8$ и $\varepsilon=\frac{a}{c}$, то $c=8$ и $b^2=10^2-8^2=36$, поэтому уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

4) Так как $b=3, e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, то $\frac{1}{2}=\frac{a^2-9}{a^2}$, поэтому $a^2=18$, и уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

5) Так как $a+b=8$, $2c=8$, то $c=4$, $b^2=(8-b)^2-16$ и, следовательно, $b=3$, поэтому $a=8-3=5$, и уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Каноническое уравнение гиперболы

Гиперболой с фокусами F_1, F_2 называют множество таких точек $(x; y)$, что модуль разности расстояний от точки $(x; y)$ до фокусов равен постоянному числу

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{2.1}$$

Фиксируем точки $F_1 = (-c;\ 0)$, $F_2 = (c;\ 0)$ – **фокусы**, где $c \geq 0$ (рис. 3). Тогда

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

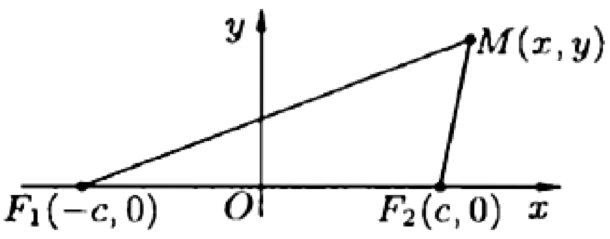


Рис. 3

Имеем

$$|r_1 - r_2| = 2a,\ r_1 - r_2 = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\underline{x^2} + 2xc + \underline{\underline{c^2 + y^2}} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \underline{x^2} - 2xc + \underline{\underline{c^2 + y^2}},$$

$$4xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2,$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4,$$

$$x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

В этом случае $c > a$, и можно разделить последнее из уравнений на $a^2(c^2 - a^2)$. Получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Положим, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, получим **каноническое уравнение гиперболы**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.2}$$

Ось Ox проходит через фокусы, а ось Oy – через середину отрезка F_1F_2.

Оси Ox и Oy – оси симметрии гиперболы, точка $O(0;\ 0)$ – центр симметрии гиперболы. Точки $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$, $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;\ -b)$ называют **вершинами** гиперболы (рис. 4).

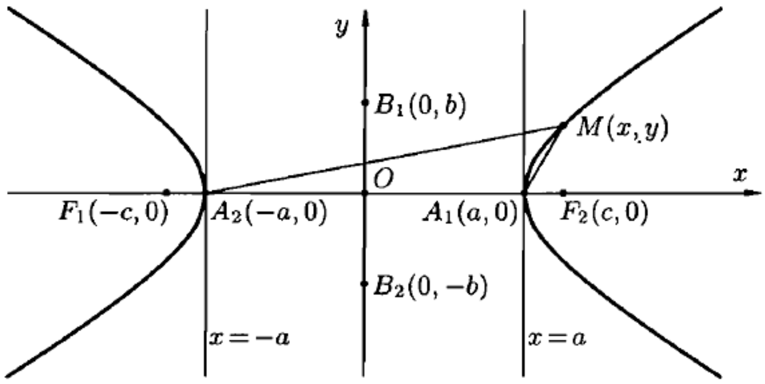


Рис. 4

Отрезок $A_1A_2 = 2a$ – **действительная ось**, число a – **действительная полуось** гиперболы. Отрезок $B_1B_2 = 2b$ – **мнимая ось**, число b – **мнимая полуось** гиперболы. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называют **основным прямоугольником** гиперболы.

Так как $\dfrac{x^2}{a^2} \ge 1$ или $|x| \ge 1$, то точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (правая ветвь гиперболы) и слева от прямой $x = b$(левая ветвь гиперболы).

Эксцентриситетом гиперболы называют отношение $\dfrac{c}{a} = \varepsilon$, $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы: чем ε меньше, тем более вытянут её основной прямоугольник.

Кривая, определяемая уравнением $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, является гиперболой и называется **сопряжённой** к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. У сопряжённой гиперболы b – действительная полуось, расположенная на оси Oy, a – мнимая полуось, расположенная на оси Ox, фокусы лежат на оси Oy и $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$. Сопряжённая гипербола изображена на рис. 5 пунктиром.

Фокальные радиусы для точек правой ветви гиперболы имеют вид

$$r_1 = \varepsilon x + a \text{ и } r_2 = \varepsilon x - a, \quad (2.3)$$

для точек левой ветви гиперболы –

$$r_1 = -(\varepsilon x + a) \text{ и } r_2 = -(\varepsilon x - a), \, (2.4)$$

для сопряжённой гиперболы –

$$r_1 = |b - \varepsilon y|, \; r_2 = |b + \varepsilon y|. \quad (2.5)$$

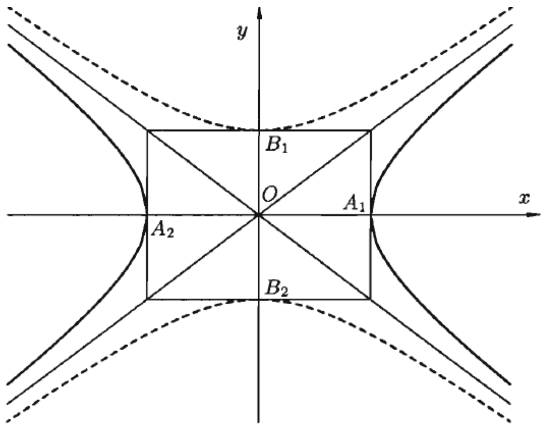


Рис. 5

Директрисами гиперболы называют прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ ($y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ для сопряжённой гиперболы). Правая директриса расположена между точками O и A_1, левая – между точками O и A_2. Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\frac{r}{d} = \varepsilon$, что и директрисы эллипса.

Асимптотами гиперболы являются прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$. Асимптоты проходят через вершины основного прямоугольника гиперболы (см. рис. 5). Асимптоты гипербол $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ совпадают.

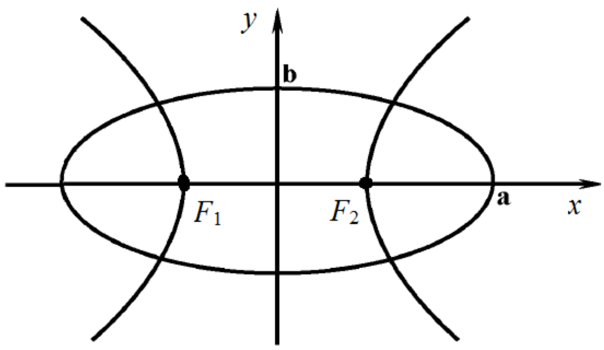
В частности, гиперболу называют **равносторонней**, если её полуоси равны, т. е. $a = b$. Её каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (2.6)$$

Асимптотами равносторонней гиперболы являются биссектрисы координатных углов, т. е. $y = \pm x$.

Примеры:

1. Составить уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ и имеющей фокусы в вершинах этого эллипса.



Решение

Из уравнения эллипса следует, что его вершинами являются точки $(\pm 13;\ 0)$ и $(0;\ \pm 12)$, поэтому $a = 13$, $b = 12$ и, следовательно,

$c^2 = a^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, поэтому $c = 5$. По условию задачи вершины гиперболы совпадают с фокусами эллипса, т. е. $a = c = 5$, а её фокусы – с вершинами эллипса, т. е. $c = a = 13$. Для гиперболы $b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, поэтому $b = 12$. Тогда уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$.

2. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9;\ 8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

Решение

Так как гипербола проходит через точку $M(9;\ 8)$, то её координаты удовлетворяют уравнению гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\frac{9^2}{a^2} - \frac{8^2}{b^2} = 1$.

Асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$, следовательно, $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{81}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = \frac{2\sqrt{2}}{3}a, \quad b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ \frac{81}{a^2} - \frac{64}{\frac{8}{9}a^2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ \frac{81}{a^2} - \frac{72}{a^2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ a^2 = 9 \end{cases}, \quad \begin{cases} b^2 = 8 \\ a^2 = 9 \end{cases}.$$

Получим уравнение гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$.

3. Угол между асимптотами гиперболы равен 60º. Вычислить эксцентриситет гиперболы.

Решение

Уравнение асимптоты имеет вид $y = \pm\frac{b}{a}x$.

$k = \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \mathrm{tg}\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, т. е. $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пусть $b = \sqrt{3},\ \ a = 3$. $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2 = 9 + 3 = 12$, тогда $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Эксцентриситет гиперболы вычисляют по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Каноническое уравнение параболы

Фиксируем прямую L (директрису) и точку F (фокус).

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**.

Расстояние от фокуса F до директрисы называют **параметром** параболы и обозначают через p ($p > 0$).

Пусть r_1 – расстояние от точки $M(x; y)$ до директрисы, r_2 – расстояние от точки $M(x; y)$ до фокуса. По определению уравнение параболы имеет вид $r_1 = r_2$.

Возьмем в качестве директрисы вертикальную прямую, проходящую через точку $\left(-\frac{p}{2};\ 0\right)$, и возьмем фокус $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ (рис. 6).

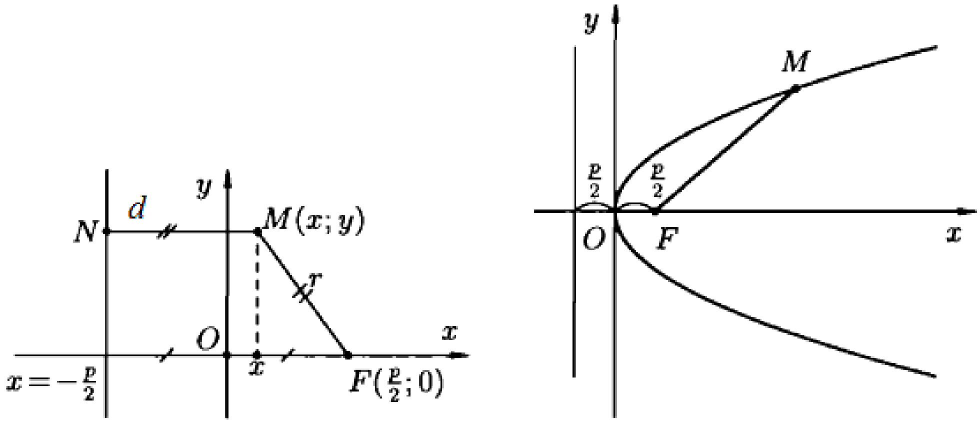


Рис. 6

Тогда

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2,$$

– **каноническое уравнение параболы**.

$$y^2 = 2px \tag{3.1}$$

Ось Ox – ось симметрии параболы. Точка $O(0;\ 0)$ – вершина параболы. Отрезок $FM = r$ называется **фокальным радиусом точки** M (см. рис. 6), который вычисляется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$, $r = d$, d – расстояние от точки M до директрисы (см. рис. 6).

Эксцентриситет параболы $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$, $p > 0$ определяют следующие параболы (рис. 7):

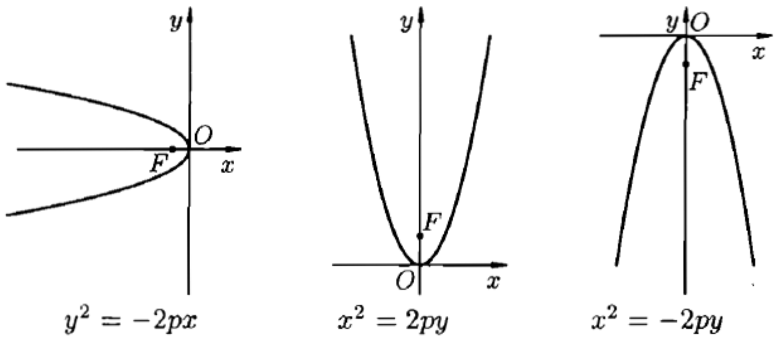


Рис. 7

Примеры:

1. Составить уравнение параболы, проходящей через точки $O(0;\ 0)$ и $M(4;\ -1)$ и симметричной относительно оси Ox.
2. Написать уравнение директрис.
3. Найти фокальный радиус-вектор точки M.

Решение

1. Искомое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$. Подставляем в него координаты точки M и получаем $(-1)^2 = 2p \cdot 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2p = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{y^2 = \frac{1}{4}x}$ – искомое уравнение параболы.

2. Уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$, так как $p = \frac{1}{8} \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{x = -1/16}$ – искомое уравнение директрисы.

3. Фокальный радиус точки M вычисляем по формуле $\underline{r} = x + \dfrac{p}{2} =$
$= 4 + \dfrac{1}{16} = \underline{\dfrac{65}{16}}$.

Определители и их свойства

Определение. *Квадратной матрицей* порядка n с вещественными коэффициентами называют таблицу чисел типа

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ – множество вещественных (действительных) чисел.

Определение. 1. *Определителем 1-го порядка* называют число $\det(a_{11}) = a_{11}$ (determinant = определитель).

2. *Определителем 2-го порядка* называют число

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

где со знаком плюс берут произведения элементов матрицы, обозначенных символом $\oplus$:

$$\begin{vmatrix} \oplus & \circ \\ \circ & \oplus \end{vmatrix},$$

со знаком минус берут произведения элементов матрицы, обозначенных символом Θ:

$$\begin{vmatrix} \circ & \Theta \\ \Theta & \circ \end{vmatrix}.$$

3. Определителем 3-го порядка называют число

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

где со знаком плюс берут произведения элементов матрицы, обозначенных символом $\oplus$:

$$\begin{vmatrix} \oplus & \circ & \circ \\ \circ & \oplus & \circ \\ \circ & \circ & \oplus \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \circ & \oplus & \circ \\ \circ & \circ & \oplus \\ \oplus & \circ & \circ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \circ & \circ & \oplus \\ \oplus & \circ & \circ \\ \circ & \oplus & \circ \end{vmatrix},$$

со знаком минус берут произведения элементов матрицы, обозначенных символом Θ:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \Theta \\ \circ & \Theta & \circ \\ \Theta & \circ & \circ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \circ & \Theta & \circ \\ \Theta & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \Theta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Theta & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \Theta \\ \circ & \Theta & \circ \end{vmatrix}.$$

Это правило называют **правилом треугольника**.

4. Определителем n-го порядка называется число

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} \det \begin{pmatrix} *_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ *_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{i+2} a_{i2} \det \begin{pmatrix} a_{11} & *_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & *_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & *_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \ldots +$$

$$+\ (-1)^{i+j} a_{ij} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & *_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & *_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & *_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \ldots +$$

$$+\ (-1)^{i+n} a_{in} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & *_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & *_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & *_{nn} \end{pmatrix},$$

где вычеркнуты i-я строка и последовательно вычеркиваются столбцы с номерами $1,\ 2,\ \ldots,\ j,\ \ldots,\ n$.

Мы будем обозначать определитель матрицы A через

$$\det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы, т. е. при замене строк на столбцы.

Доказательство (в случае $n = 2$):

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

2. Кососимметричность: если в матрице поменять местами две строки, то ее определитель умножится на (–1).

Доказательство (в случае $n = 2$):

$$\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

3. Линейность по строке:

a) $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Доказательство:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}+b_{22}) - a_{12}(a_{21}+b_{21}) =$$

$$= [a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}] + [a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}] = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

b) $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Доказательство:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\lambda a_{22} - a_{12}\lambda a_{21} = \lambda[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}] =$$

$$= \lambda\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Если в квадратной матрице есть две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.

Доказательство:

Обозначим определитель матрицы через d. Если поменять местами две одинаковые строки, то определитель матрицы умножится на (–1); с другой стороны, он не изменится, потому что матрица не изменилась. Значит, $(-1)d = d$, поэтому $2d = 0$. Поскольку $d \in \mathbb{R}$, то мы получаем соотношение $d = 0$.

Примеры:

Вычислить определители

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$; *b)* $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 3 - 1\cdot 7 = -6 - 7 = -13$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 12\cdot 3 + (-8)(-1)2 + 4(-7)(-5) - (-5)12\cdot 2 -$

$-(-8)4\cdot 3 - 1(-1)(-7) = 36 + 16 + 140 + 120 + 96 - 7 = 401.$

Правило Крамера

Теорема (правило Крамера). Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система имеет единственное решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)$, где

$$\alpha_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & b_i & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Доказательство (в случае $n = 2$):

Имеем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

По условию

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Из свойств определителей следует, что

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\Delta} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}_{0} = x_1\Delta,$$

поэтому $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Теорема Крамера доказана.

Примеры:

Решить системы уравнений методом Крамера:

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 11y = 6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 5x - y + 2z = 16 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 9x - y + 4z = 30 \end{cases}$.

Решение

a) Составим определители и вычислим их:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - (-3)1 = 55 + 3 = 58,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - (-3)6 = 11 + 18 = 29,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 1 \cdot 1 = 30 - 1 = 29,$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2},$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

b) Составим определители и вычислим их:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 4 + (-1)(-1)9 + 2 \cdot 3(-1) -$$

$$-2 \cdot 2 \cdot 9 - 5(-1)(-1) - (-1)3 \cdot 4 = 40 - 6 + 9 - 36 - 5 + 12 = 14,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 30 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 \cdot 2 \cdot 4 + (-1)(-1)30 + 2 \cdot 3(-1) - 2 \cdot 2 \cdot 30 -$$

$$-16(-1)(-1) - (-1)3 \cdot 4 = 128 + 30 - 6 - 120 - 16 + 12 = 28,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 16 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 30 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 4 + 16(-1)9 + 2 \cdot 3 \cdot 30 -$$

$$-2 \cdot 3 \cdot 9 - 5(-1)30 - 16 \cdot 3 \cdot 4 = 60 - 144 + 180 - 54 + 150 - 192 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 16 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & -1 & 30 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 30 + (-1)3 \cdot 9 + 16 \cdot 3(-1) -$$

$$-16 \cdot 2 \cdot 9 - 5 \cdot 3(-1) - (-1)3 \cdot 30 = 300 - 27 - 48 - 288 + 15 + 90 = 42.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{14} = 0,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3.$$

Ответ: $(2,\ 0,\ 3)$.

Векторные пространства. Примеры линейных пространств. Линейно независимые векторы. Базис. Размерность

Определение. Множество E называется **векторным** (**линейным**) **пространством** $\Leftrightarrow$ на E определены операции сложения и умножения на числа из поля $\mathbb{R}$ так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$,
2) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$,
3) $\exists\vec{0} \quad \forall\vec{x} \quad \vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$,
4) $\forall\vec{x} \quad \exists(-\vec{x}) \quad \vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$,
5) $1\vec{x}=\vec{x}$,
6) $(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$,
7) $(\lambda\mu)\vec{x}=\lambda(\mu\vec{x})$,
8) $\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$.

Примеры:

1. $E=\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения.

2. E – плоскость с отмеченной точкой 0. В любую точку плоскости из точки 0 можно направить стрелку; сложение определяют по правилу параллелограмма: $\vec{x}+\vec{y}$ – это диагональ параллелограмма со сторонами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

3. E – трехмерное пространство с отмеченной точкой 0.

4. $E=\mathbb{R}^n=\{\vec{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i\in\mathrm{R}\}$; $\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$; $\vec{0}=(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$; $-\vec{x}=(-x_1,\ -x_2,\ \ldots,\ -x_n)$; $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots,\ \lambda x_n)$.

Определение. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно независимы $\Leftrightarrow$ соотношение $\lambda_1\vec{e}_1+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n=\vec{0}$ возможно лишь в случае, когда $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$.

Примеры:

1. $E=\mathbb{R}$, $\vec{e}_1\neq\vec{0}$. Предположим, что $\lambda_1\vec{e}_1=\vec{0}$. Если $\lambda_1\neq 0$, то $\exists\lambda_1^{-1}$,

$$\begin{array}{l}\lambda_1^{-1}(\lambda_1\vec{e}_1)=\lambda_1^{-1}\vec{0}=\vec{0}\\ \quad\| \qquad\qquad\qquad\qquad ,\\ (\lambda_1^{-1}\lambda_1)\vec{e}_1=1\vec{e}_1=\vec{e}_1\end{array}$$

поэтому $\vec{e}_1 = \vec{0}$, что противоречит нашим предположениям. Значит, $\lambda_1 = 0$, и поэтому вектор $\vec{e}_1$ линейно независим.

2. E – плоскость с отмеченной точкой 0; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ не лежат на одной прямой.

Докажем, что эти векторы линейно независимы. Пусть L_j – прямая, проходящая через точку 0 и конец вектора $\vec{e}_j$.

Предположим, что $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 = \vec{0}$. Тогда $L_1 \ni \lambda_1\vec{e}_1 = -\lambda_2\vec{e}_2 \in L_2$, поэтому $\lambda_1\vec{e}_1 = -\lambda_2\vec{e}_2 \in L_1 \cap L_2 = \vec{0}$. Значит, $\lambda_1\vec{e}_1 = \vec{0}$. Действуя, как в предыдущем примере, мы получим равенство $\lambda_1 = 0$. С другой стороны, $-\lambda_2\vec{e}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_2 = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, и векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ линейно независимы.

3. E – трехмерное пространство с отмеченной точкой 0; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ не лежат на одной плоскости. Тогда эти векторы линейно независимы (доказывается аналогично).

Басня Крылова о линейно зависимых векторах

Имеем соотношение

$\vec{\text{Л}} + \vec{\text{Р}} + \vec{\text{Щ}} = \vec{0}$,

в котором $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, поэтому векторы $\vec{\text{Л}}, \vec{\text{Р}}, \vec{\text{Щ}}$ линейно зависимы.

Определение. Систему векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_n$ называют **базисом пространства** E $\Leftrightarrow$

1) векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, …, $\vec{e}_n$ линейно независимы;

2) $\forall \vec{x} \in E \quad \exists x_i \in \mathbb{R} \ \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Примеры:

1. $E = \mathbb{R}$, $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$. Любой вектор на прямой E пропорционален вектору $\vec{e}_1$ с коэффициентом пропорциональности x_1: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1$. Поскольку $\vec{e}_1$ линейно независим, то он образует базис прямой E.

2. E – плоскость с отмеченной точкой 0; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ не лежат на одной прямой. Мы уже знаем, что эти векторы линейно независимы. Для любого вектора $\vec{x}$ рассмотрим проекции $\vec{x}$ на осях $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Эти проекции равны соответственно $x_1\vec{e}_1$, $x_2\vec{e}_2$ причем вектор $\vec{x}$ является диагональю в соответствующем параллелограмме, и поэтому $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Значит, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ образуют базис плоскости.

3. E – трехмерное пространство с отмеченной точкой 0; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ не лежат на одной плоскости. Тогда эти векторы образуют базис (доказывается аналогично).

4. $E=\mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1=(1;\ 0;\ \ldots\ 0)$, $\vec{e}_2=(0;\ 1;\ \ldots\ 0)$, … $\vec{e}_n=(0;\ 0;\ \ldots\ 1)$.

Пусть $\lambda_1\vec{e}_1+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n=\vec{0}$. Тогда

$$\lambda_1(1;0;\ldots;0)+\lambda_2(0;1;\ldots;0)+\ldots+\lambda_n(0;\ 0;\ \ldots;\ 1)=(0;\ 0;\ \ldots;\ 0),$$

т. е. $(\lambda_1;\ \lambda_2;\ \ldots;\ \lambda_n)=(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ и, следовательно, $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$. Поэтому векторы $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ линейно независимы.

С другой стороны, любой вектор $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\vec{x}=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)=x_1(1;\ 0;\ \ldots;\ 0)+x_2(0;\ 1;\ \ldots;\ 0)+\ldots+x_n(0;\ 0;\ \ldots;\ 1)=$$
$$=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n,$$

поэтому $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ – стандартный базис $\mathbb{R}^n$.

Теорема (без доказательства). В любом линейном пространстве E существует базис (быть может, бесконечный).

Определение. Пространство E называют **конечномерным** $\Leftrightarrow$ в E существует конечный базис $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$.

Теорема (без доказательства). Если $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ – базис пространства E, то любой другой его базис состоит из n элементов. Число n называют **размерностью** E и обозначают как $\dim E$ (dimension = = размерность).

Пример:

$\dim\mathbb{R}^n=n$.

Определение. Пусть $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ – базис E. Тогда для $\forall\vec{x}\in E$ выполняется $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+\ldots+x_n\vec{e}_n$. Набор чисел $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ называют набором координат вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$.

Замечание. Координаты $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ определены единственным образом: если $(x_1';\ x_2';\ \ldots;\ x_n')$ – другой набор координат вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$, то

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n=x_1'\vec{e}_1+x_2'\vec{e}_2+\ldots+x_n'\vec{e}_n\Rightarrow$$
$$(x_1-x_1')\vec{e}_1+(x_2-x_2')\vec{e}_2+\ldots+(x_n-x_n')\vec{e}_n=\vec{x}-\vec{x}=\vec{0},$$

поэтому из линейной независимости базисных векторов $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ следует, что $x_1-x_1'=x_2-x_2'=\ldots=x_n-x_n'=0$, т. е. $x_j=x_j'$.

Скалярное произведение. Примеры скалярных произведений. Неравенство Коши – Шварца

Определение. Пусть E – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. **Скалярным произведением** на пространстве E называется функция $E \times E \to \mathbb{R}$, которая каждой паре векторов $\vec{x},\ \vec{y} \in E$ ставит в соответствие вещественное число $(\vec{x},\ \vec{y}) \in \mathbb{R}$ так, что выполняются следующие аксиомы:

1) $(\vec{x},\ \vec{y}) = (\vec{y},\ \vec{x})$;

2) $(\vec{x}+\vec{y},\ \vec{z}) = (\vec{x},\ \vec{z}) + (\vec{y},\ \vec{z})$;

3) $(\lambda\vec{x},\ \vec{y}) = \lambda(\vec{x},\ \vec{y})$;

4) $\forall \vec{x} \neq 0 \quad (\vec{x},\ \vec{x}) > 0$.

Примеры:

1. $E = \mathbb{R},\ (\vec{x}, \vec{y}) = xy$ – обычное произведение чисел; аксиома 4 имеет вид $\forall x \neq 0,\quad x^2 > 0$.

2. $E = \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, $\vec{y} = (y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n)$, $(\vec{x},\ \vec{y}) = x_1 y_1 + {}$ ${} + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ – стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

3. $E = C(a;\ b)$ – пространство функций, непрерывных на отрезке $[a;\ b]$. Это пространство не имеет конечного базиса (т. е. бесконечномерно). Для функций $f, g \in E$ определим скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x) g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Определение. Число $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ называется **нормой (длиной) вектора $\vec{x}$.**

Теорема (неравенство Коши – Шварца). $|(\vec{x}, \vec{y})| \le \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Доказательство:

По свойствам 1 – 4 скалярного произведения имеем:

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \ 0 \le (\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) = \underbrace{(\vec{x},\ \vec{x})}_{=c} + 2t\underbrace{(\vec{x},\ \vec{y})}_{=b} + t^2\underbrace{(\vec{y},\ \vec{y})}_{=a} = at^2 + 2bt + c = p(t).$$

Если $\vec{y} = \vec{0}$, то

$$\underbrace{|(\vec{x}, \vec{y})|}_{=0} \le \|\vec{x}\| \cdot \underbrace{\|\vec{y}\|}_{=0},$$

и неравенство Коши – Шварца в этом случае очевидно.

Если $\vec{y} \neq \vec{0}$, то по свойству 4 скалярного произведения $a = (\vec{y}, \vec{y}) > 0$. Поэтому график функции $p(t)$ – это парабола «рожками вверх, причем мы уже доказали, что $\forall t \in \mathbb{R} \ \ p(t) \geq 0$. Это значит, что график функции $p(t)$ не опускается ниже оси t (иначе $p(t)$ будет принимать отрицательные значения на некотором отрезке). В итоге квадратичный многочлен $p(t)$ либо не имеет вещественных корней (и тогда его дискриминант $(2b)^2 - 4ac < 0$), либо $p(t)$ имеет совпадающие вещественные корни $t_1 = t_2$, и его дискриминант $(2b)^2 - 4ac = 0$ (и график $p(t)$ касается оси t в точке $t_1 = t_2$). В любом случае

$$(2b)^2 - 4ac \leq 0.$$

Подставляя в это неравенство $a = (\vec{y}, \vec{y})$, $b = (\vec{x}, \vec{y})$, $c = (\vec{x}, \vec{x})$, получим

$$4(\vec{x}, \vec{y})^2 - 4(\vec{y}, \vec{y})(\vec{x}, \vec{x}) \leq 0.$$

В итоге

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{y}, \vec{y})(\vec{x}, \vec{x}), \sqrt{(\vec{x}, \vec{y})^2} \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})},$$

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$, то по неравенству Коши – Шварца

$$\left| \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \right| \leq 1 \Rightarrow \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \in [-1, 1] \Rightarrow \exists \widehat{(\vec{x}, \vec{y})} = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

является углом между векторами $\vec{x}, \vec{y}$.

Неравенство треугольника

Теорема (неравенство треугольника). $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Доказательство:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{=\|\vec{x}\|^2} + 2 \underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{\leq |(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} + \underbrace{(\vec{y}, \vec{y})}_{=\|\vec{y}\|^2}} \leq \sqrt{\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}\|^2} =$$

$$= \sqrt{(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2} = \left| \ \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \ \right| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Теорема доказана.

Пример:

Пусть $E = \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Тогда

$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$,

$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$,

неравенство Коши – Шварца имеет вид

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2},$$

угол между векторами вычисляется по формуле

$$\left(\vec{x}, \hat{\ } \vec{y}\right) = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \arccos \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

Ортогональность векторов. Теорема Пифагора. Ортонормированные базисы. Скалярное произведение в ортонормированном базисе, норма вектора и угол между векторами

Определение. Векторы $\vec{x}, \vec{y}$ называются **ортогональными** $\Leftrightarrow$ $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Обозначение: $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Теорема Пифагора. Если $\vec{x} \perp \vec{y}$, то $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

Доказательство:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) + 2\underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{=0} + (\vec{y}, \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Теорема доказана.

Определение. Базис $\vec{e}_1, \ \ldots, \ \vec{e}_n$ называют ортонормированным

$$\Leftrightarrow \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ i = j; \\ 0, & \text{если } \ i \ne j; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{e}_i\| = 1; \\ \vec{e}_i \perp \vec{e}_j, \ \text{если } \ i \ne j. \end{cases}$$

Пример:

Стандартный базис $E = \mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1 = (1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, $\vec{e}_2 = (0;\ 1;\ \ldots;\ 0)$, … $\vec{e}_n = (0;\ 0;\ \ldots;\ 1)$ пространства $\mathbb{R}^n$ является ортонормированным относительно стандартного скалярного произведения $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.

Теорема.

Пусть $\vec{e}_1,\ \dots,\ \vec{e}_n$ – ортонормированный базис, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n$. Тогда $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$, $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$, угол между векторами вычисляют по формуле $(\hat{\vec{x},\vec{y}}) = \arccos\dfrac{x_1y_1 + \dots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}$.

Доказательство:

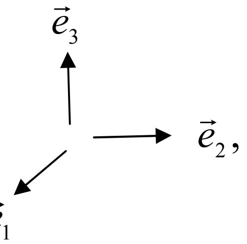
$$(\vec{x},\vec{y}) = (x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n) =$$
$$= x_1y_1\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}_{=1} + x_1y_2\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}_{=0} + \dots + x_1y_n\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_n)}_{=0} +$$
$$+ x_2y_1\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_1)}_{=0} + x_2y_2\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}_{=1} + \dots + x_2y_n\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_n)}_{=0} + \dots +$$
$$+ x_ny_1\underbrace{(\vec{e}_n,\vec{e}_1)}_{=0} + x_ny_2\underbrace{(\vec{e}_n,\vec{e}_2)}_{0} + \dots + x_ny_n\underbrace{(\vec{e}_n,\vec{e}_n)}_{=1} =$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Остальные формулы получают из этой формулы для скалярного произведения.

Теорема доказана.

Векторное произведение и его свойства

Определение. Пусть $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис трехмерного пространства E:



$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$.

Вектор

$$[\vec{x},\vec{y}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3$$

называют **векторным произведением** векторов $\vec{x},\vec{y}$. Иногда его обозначают $\vec{x}\times\vec{y}$.

Теорема.

1) $[\vec{x},\vec{y}]=-[\vec{y},\vec{x}]$;

2) $[\vec{x}+\vec{y},\vec{z}]=[\vec{x},\vec{z}]+[\vec{y},\vec{z}]$;

3) $[\lambda\vec{x},\vec{y}]=\lambda[\vec{x},\vec{y}]$;

4) $[\vec{x},\vec{y}]\perp\vec{x}$, $[\vec{x},\vec{y}]\perp\vec{y}$;

5) $\|[\vec{x},\vec{y}]\|=\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\sin\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)$;

6) правило правого винта.

Доказательство:

1) – 3) Из свойств определителей следует, что

$$1)\ [\vec{x},\vec{y}]=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}=-[\vec{y},\vec{x}];$$

$$2)\ [\vec{x},\vec{y}+\vec{z}]=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}=$$

$$=[\vec{x},\vec{y}]+[\vec{x},\vec{z}];$$

$$3)\ [\lambda\vec{x},\vec{y}]=\begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}=\lambda[\vec{x},\vec{y}];$$

$$4)\ \left([\vec{x},\vec{y}],\vec{x}\right)=\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{e}_1-\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3,\ x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3\right)=$$

$=x_1\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}_1-x_2\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=$ {разложение нулевого (одинаковые строки!) определителя $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ по первой строке} = 0, поэтому $[\vec{x},\vec{y}]\perp\vec{x}$; аналогично $[\vec{x},\vec{y}]\perp\vec{y}$;

5) поскольку $\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)\in[0,\pi]$, то $\sin\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)\geq 0$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\|[\vec{x},\vec{y}]\|^2=\|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2\sin^2\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right),$$

т. е. что

$$\left\|[\vec{x},\vec{y}]\right\|^2 = \|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2\left(1-\cos^2\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)\right)=$$

$$=\|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2\left(1-\frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{\|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2}\right)=\|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2-(\vec{x},\vec{y})^2.$$

Очевидно, что

$$\left\|[\vec{x},\vec{y}]\right\|^2 = \left\|\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3\end{vmatrix}\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3\end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\vec{e}_3\right\|^2 =$$

$$=\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2\end{vmatrix}^2 =$$

$$=(x_2y_3-y_2x_3)^2+(x_1y_3-y_1x_3)^2+(x_1y_2-y_1x_2)^2=$$

$$=x_2^2y_3^2-2x_2x_3y_2y_3+x_3^2y_2^2+x_1^2y_3^2-2x_1x_3y_1y_3+x_3^2y_1^2+$$

$$+x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2=$$

$$=x_1^2(y_2^2+y_3^2)+x_2^2(y_1^2+y_3^2)+x_3^2(y_1^2+y_2^2)-$$

$$-2x_2x_3y_2y_3-2x_1x_3y_1y_3-2x_1x_2y_1y_2=$$

$$=x_1^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-x_1^2y_1^2+x_2^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-x_2^2y_2^2+$$

$$+x_3^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-x_3^2y_3^2-2x_2x_3y_2y_3-2x_1x_3y_1y_3-2x_1x_2y_1y_2=$$

$$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-$$

$$-x_1^2y_1^2-x_2^2y_2^2-x_3^2y_3^2-2x_2x_3y_2y_3-2x_1x_3y_1y_3-2x_1x_2y_1y_2=$$

$$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2=$$

$$=\|\vec{x}\|^2\cdot\|\vec{y}\|^2-(\vec{x},\vec{y})^2,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что $h=\|\vec{y}\|\sin\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)$ – это высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ с основанием $\vec{x}$; поэтому формула 4 показывает, что $\left\|[\vec{x},\vec{y}]\right\|$ – это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$.

6) *правило правого винта* (без доказательства): $[\vec{x},\vec{y}]$ имеет направление в ту сторону, в какую движется правый винт при минимальном повороте от направления вектора $\vec{x}$ к направлению вектора $\vec{y}$.

Пример:

Найти векторное произведение векторов $\vec{x}=\{1;\ 2;\ -3\}$, $\vec{y}=\{0;\ -1;\ 2\}$.

Решение

$$[\vec{x},\vec{y}]=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 2\\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{e}_1-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}\vec{e}_3=$$

$$=(4-3)\vec{e}_1-(2-0)\vec{e}_2+(-3-0)\vec{e}_3=\vec{e}_1-2\vec{e}_2-3\vec{e}_3.$$

Смешанное произведение. Геометрический смысл определителя третьего порядка

Определение. Пусть $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис трехмерного пространства E. Число $(\vec{x},\ [\vec{y},\ \vec{z}])$ называют смешанным произведением векторов $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$.

Теорема. $(\vec{x},\ [\vec{y},\ \vec{z}])=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$.

Доказательство:

Очевидно,

$$(\vec{x},\ [\vec{y},\ \vec{z}])=\left(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3,\begin{vmatrix}y_2 & y_3\\ z_2 & z_3\end{vmatrix}\vec{e}_1-\begin{vmatrix}y_1 & y_3\\ z_1 & z_3\end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}\vec{e}_3\right)=$$

$=x_1\begin{vmatrix}y_2 & y_3\\ z_2 & z_3\end{vmatrix}-x_2\begin{vmatrix}y_1 & y_3\\ z_1 & z_3\end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}=$ {разложение определителя $\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$ по первой строке} $=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$.

Теорема доказана.

Следствие (геометрический смысл определителя третьего порядка). Абсолютная величина определителя $\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$ равна $\left|(\vec{x},\ [\vec{y},\ \vec{z}])\right|$ и равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$.

Доказательство:

Мы считаем, что $\vec{y}, \vec{z}$ лежат в основании параллелепипеда. Поэтому

$$|(\vec{x},[\vec{y},\vec{z}])| = \|\vec{x}\|\cdot\|[\vec{y},\vec{z}]\|\left|\cos\left(\vec{x},\widehat{[\vec{y},\vec{z}]}\right)\right| =$$

$$= \underbrace{\|[\vec{y},\vec{z}]\|}_{=\text{площадь основания}} \underbrace{\|\vec{x}\|\left|\cos\left(\vec{x},\widehat{[\vec{y},\vec{z}]}\right)\right|}_{=\text{высота}} = \{\text{объем параллелепипеда}\}.$$

Следствие доказано.

Геометрические приложения скалярного, векторного и смешанного произведений

Теорема.

1) {площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$} = $= \|[\vec{x},\vec{y}]\|$;

2) {площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$} = $=\frac{1}{2}\|[\vec{x},\vec{y}]\|$;

3) {высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ с основанием $\vec{x}$} = {высота треугольника, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ с основанием $\vec{x}$} = $\dfrac{\|[\vec{x},\vec{y}]\|}{\|\vec{x}\|}$;

4) {объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$} = = {абсолютной величине определителя} $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

5) {объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ с основанием $\Delta_{\vec{y},\vec{z}}$} = $\frac{1}{6}$ {абсолютной величины определителя} $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

6) {высота параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ с основанием $\vec{y}, \vec{z}$ } = {высота пирамиды, построенной на векторах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ с основанием $\Delta_{\vec{y},\vec{z}}$ } = {абсолютной величине} $\dfrac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\|[\vec{y}, \vec{z}]\|}$.

Все эти результаты получены выше.

Примеры:

1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного $\vec{x} = \{6;\ 3;\ -2\}$, $\vec{y} = \{3;\ -2;\ 6\}$.

Решение

Найдём векторное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}\vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}\vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{e}_3 =$$

$$= (18-4)\vec{e}_1 - (36+6)\vec{e}_2 + (-12-9)\vec{e}_3 = 14\vec{e}_1 - 42\vec{e}_2 - 21\vec{e}_3.$$

$$S = \|[\vec{x}, \vec{y}]\| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49.$$

2. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(-4;\ 2;\ 6)$, $B(2;\ -3;\ 0)$, $C(-10;\ 5;\ 8)$.

Решение

Найдём векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2;\ -3;\ 0) - (-4;\ 2;\ 6) = \{6;\ -5;\ -6\},$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-10;\ 5;\ 8) - (-4;\ 2;\ 6) = \{-6;\ 3;\ 2\}.$$

Найдём векторное произведение $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = 8\vec{e}_1 + 24\vec{e}_2 - 12\vec{e}_3.$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}S_{\text{пар}} = \frac{1}{2}\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 24^2 + 12^2} = 14.$$

3. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(-4;\ 2;\ 6)$, $B(2;\ -3;\ 0)$, $C(-10;\ 5;\ 8)$, $D(-5;\ 2;\ -4)$ и её высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

Решение

$\overrightarrow{AD}=\{-1;\ 0;\ 10\}$.

Найдём смешанное произведение $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}$:

$$(\overrightarrow{AB},\ [\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}])=\begin{vmatrix} 6 & -5 & -6 \\ -6 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -10 \end{vmatrix}=112.$$

Вычислим объём пирамиды $V=\dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\ [\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}])\right|=\dfrac{1}{6}112=\dfrac{56}{3}$.

Найдём высоту пирамиды $h=\dfrac{3V}{S}=\dfrac{3\dfrac{56}{3}}{14}=4$.

Определитель произведения двух квадратных матриц

Теорема.

Если $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B. \tag{13.1}$$

Доказательство (для $n=2$):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\det(AB)=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})-(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})=$$

$$=\underline{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}}+a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}+\underline{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}}-$$

$$-\underline{a_{21}b_{11}a_{11}b_{12}}-a_{21}b_{11}a_{12}b_{22}-a_{22}b_{21}a_{11}b_{12}-\underline{a_{22}b_{21}a_{12}b_{22}}=$$

$$=a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}-a_{21}b_{11}a_{12}b_{22}-a_{22}b_{21}a_{11}b_{12}=$$

$$=a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})-a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})=$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})=\det A\cdot\det B.$$

Теорема доказана.

Обратная матрица и ее вычисление

Определение. Матрицу $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ называют **обратимой** $\Leftrightarrow$ $\exists A^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, A^{-1} – **обратная** матрица к матрице A:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E. \tag{14.1}$$

Теорема.

1. Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ обратима $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

2. Если $\det(A) \neq 0$, то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\det A} & \dfrac{A_{21}}{\det A} & \dots & \dfrac{A_{n1}}{\det A} \\ \dfrac{A_{12}}{\det A} & \dfrac{A_{22}}{\det A} & \dots & \dfrac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{A_{1n}}{\det A} & \dfrac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \dfrac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & *_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & *_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & *_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

выступает алгебраическим дополнением элемента a_{ij} (вычеркнуты i-я строка и j-й столбец).

Доказательство:

1. Если A обратима, то $\exists\, A^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, поэтому $AA^{-1} = E$, $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ и, следовательно, $\det(A) \neq 0$.

2. Если $\det(A) \neq 0$, то в случае $n = 2$ рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\det A} & \dfrac{A_{21}}{\det A} \\ \dfrac{A_{12}}{\det A} & \dfrac{A_{22}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} *_{11} & *_{12} \\ *_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} *_{11} & *_{12} \\ a_{21} & *_{22} \end{vmatrix} = -a_{21},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} *_{11} & a_{12} \\ *_{21} & *_{22} \end{vmatrix} = -a_{12}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & *_{12} \\ *_{21} & *_{22} \end{vmatrix} = a_{11},$$

поэтому

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ \dfrac{-a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ \dfrac{-a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\det A} & \dfrac{-a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11}}{\det A} \\ \dfrac{a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21}}{\det A} & \dfrac{-a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}}{\det A} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично доказывается, что $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому $B = A^{-1}$.

Теорема доказана.

Определение. $\mathrm{GL}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) = [\mathrm{M}_n(\mathbb{R})]^\times$ – группа обратимых матриц порядка n с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$ (*general linear group*).

Следствие. $\det : \mathrm{GL}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ является морфизмом групп:

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$,

$\mathrm{Im}(\det) = \mathbb{R}^\times$,

$\mathrm{Ker}(\det) = \{A \in \mathrm{GL}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} = \mathrm{SL}_\mathrm{n}\,\mathbb{R}$

является специальной линейной группой (*special linear group*). Так как фактор по ядру изоморфен образу, то

$\mathrm{GL}_\mathrm{n}(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_\mathrm{n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\times$.

Пример:

Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 54 + 28 + 45 - 27 - 40 - 63 = -3 \neq 0 \Rightarrow$$

матрица A обратимая.

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7,\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5,\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6,\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3,\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 1,\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1,\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -3.$$

Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 - 18 + 1 & 49 - 54 - 5 & 21 - 24 + 3 \\ -10 + 9 + 1 & -35 + 27 + 5 & -15 + 12 + 3 \\ 12 - 9 - 3 & 42 - 27 - 15 & 18 - 12 - 9 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, матрица A^{-1} найдена верно.

Линейный оператор. Примеры линейных операторов

Определение. Пусть E, F – линейные пространства над полем $\mathbb{R}$. Функцию $\mathcal{A}: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ называют линейным оператором $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$ и $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$.

Линейные операторы – это морфизмы линейных пространств.

Примеры:

1. $E = F$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\forall\vec{x}$ $\mathcal{A}(\vec{x}) = \mu\mathcal{A}(\vec{x})$.

Очевидно, $\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \mu(\vec{x}+\vec{y}) = \mu\vec{x} + \mu\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$ и $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \mu(\lambda\vec{x}) = \lambda\mu\vec{x} = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$. Этот оператор называется гомотетией с коэффициентом μ.

2. $E = F$ – плоскость с отмеченной точкой 0, $\mathcal{A}$ – поворот плоскости на угол φ вокруг отмеченной точки. Так как диагональ параллелограмма при повороте переходит в диагональ, то $\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$. С другой стороны, очевидно, $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$.

3. $E = F$ – плоскость с отмеченной точкой 0; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – ортонормированный базис E, $\mathcal{A}(\vec{x})$ – проекция вектора $\vec{x}$ на ось $\vec{e}_1$. Легко заметить, что $\mathcal{A}(\vec{x}) = (\vec{x},\ \vec{e}_1)\vec{e}_1$. Очевидно, что

$$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{x}+\vec{y},\ \vec{e}_1)\vec{e}_1 = (\vec{x},\ \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{y},\ \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}),$$

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = (\lambda\vec{x},\ \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \lambda(\vec{x},\ \vec{e}_1)\vec{e}_1 = \lambda\mathcal{A}(\vec{x}).$$

Оператор $\mathcal{A}$ называют **проектором**.

4. $E = F$ – трехмерное пространство со скалярным произведением.

Фиксируем вектор $\vec{e} \in E$ и рассмотрим $\mathcal{A}(\vec{x}) = [\vec{x}, \vec{e}]$. Очевидно, что

$$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = [\vec{x}+\vec{y},\ \vec{e}] = [\vec{x},\ \vec{e}] + [\vec{y},\ \vec{e}] = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}),$$

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = [\lambda\vec{x},\ \vec{e}] = \lambda[\vec{x},\ \vec{e}] = \lambda\mathcal{A}(\vec{x}),$$

поэтому $\mathcal{A}$ – линейный оператор.

5. Пусть $E = \{\vec{x} = (x_n)_{n\in N} \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n\}$ – бесконечномерное пространство сходящихся числовых последовательностей, $F = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Очевидно, что

$$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}),$$

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n = \lambda\mathcal{A}(\vec{x}),$$

поэтому $\mathcal{A} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ – линейный оператор.

6, Пусть $E = C^1(a;\ b)$ – пространство функций на интервале $(a;\ b)$ с непрерывной производной, $E = C(a;b)$ – пространство непрерывных функций на интервале $(a;\ b)$, $\mathcal{A}(f) = f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Ясно, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор, потому что $(f+g)' = f' + g'$ и $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f' = \lambda f'$.

Сумма и произведение линейных операторов. Матрица линейного оператора. Изоморфизм кольца эндоморфизмов конечномерного линейного пространства с кольцом квадратных матриц

Определение. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} : E \to E$ – линейные операторы. Определим их сумму $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и произведение $\mathcal{A}\mathcal{B}$ формулами

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x}),$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})).$$

Очевидно, что

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) + \mathcal{B}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y}) + \mathcal{B}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{y}) =$$
$$= (\mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x})) + (\mathcal{A}(\vec{y}) + \mathcal{B}(\vec{y})) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x}) + (\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{y});$$
$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\lambda\vec{x}) = \mathcal{A}(\lambda\vec{x}) + \mathcal{B}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x}) + \lambda\mathcal{B}(\vec{x}) =$$
$$= \lambda(\mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{x})) = \lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{x});$$
$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x} + \vec{y})) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x}) + \mathcal{B}(\vec{y})) =$$
$$= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})) + \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{y})) = (\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x}) + (\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{y});$$
$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\lambda\vec{x}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\lambda\vec{x})) = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}(\vec{x})) = \lambda\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})) = \lambda(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x}).$$

Поэтому $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}$ – линейные операторы.

Определение. Пусть $\vec{e}_1,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ – базис E, $\mathcal{A} : E \to E$ – линейный оператор. Тогда

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{e}_1 + \ldots + a_{ij}\vec{e}_i + \ldots + a_{nj}\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i,\quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называют матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$; j-й столбец матрицы $\mathcal{A}$ – это набор координат вектора $\mathcal{A}(\vec{e}_j)$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

Определение. $\operatorname{End}\mathbb{R}(E) = \{\mathcal{A} : E \to E\}$ – множество всех линейных операторов, действующих из E в E (endomorphism = эндоморфизм, т. е. морфизм из E в E).

Легко заметить, что $\operatorname{End}\mathbb{R}(E)$ – ассоциативное кольцо, единицей которого является тождественный оператор $\mathrm{id}_E : E \to E$, действующий по правилу $\mathrm{id}_E(\vec{x}) = \vec{x}$ (identity morphism).

Изоморфизмом двух колец $R \tilde{\to} R'$ называют взаимно однозначное отображение $f : R \to R'$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$;

2) $f(r_1 r_2) = f(r_1) f(r_2)$;

3) $f(1_R) = 1_{R'}$.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – базис E. Тогда отображение $f : \operatorname{End}\mathbb{R}\,(E) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, определенное формулой

$$f(\mathcal{A}) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$, является изоморфизмом колец.

Доказательство:

Очевидно, что оператор $\mathcal{A}$ восстанавливается по матрице A единственным образом: если $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j$, то

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i\right).$$

Исходя из этого, f – взаимно однозначное отображение. При этом единица id_E кольца $\mathrm{End}\,\mathbb{R}(E)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, которая является единицей кольца $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Осталось проверить, что сумме операторов отвечает сумма матриц, а произведению операторов произведение матриц:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\vec{e}_j) = \mathcal{A}(\vec{e}_j) + \mathcal{B}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij}+b_{ij})\vec{e}_i;$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{e}_j) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{e}_j)) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\mathcal{A}(\vec{e}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)\vec{e}_i.$$

Теорема доказана.

Матрица поворота плоскости. Зависимость матрицы оператора от выбора базиса. Определитель оператора

Теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \to E$ – поворот плоскости E вокруг точки 0 на угол φ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ортонормированный базис плоскости.

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Доказательство:

Это следует из очевидных соотношений

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2,$$

$$\mathcal{A}(\vec{e}_2) = -\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2.$$

Теорема (зависимость матрицы оператора от выбора базиса).

Пусть $\mathcal{A}: E \to E$ – линейный оператор,

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

является матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, определенная из соотношения $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$.

Если

$$A_f = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

предстает матрицей оператора $\mathcal{A}$ в новом базисе $\vec{f}_1, \ \dots, \vec{f}_n$, причем $\vec{f}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i$, где $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от старого базиса $\vec{e}_1, \ \dots, \ \vec{e}_n$ к новому базису $\vec{f}_1, \ \dots, \vec{f}_n$, то $A_f = Q^{-1}A_eQ$.

Доказательство:

Достаточно доказать равенство $QA_f = A_eQ$.

Очевидно, что

$$\mathcal{A}(\vec{f}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\vec{f}_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ki}\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ki}b_{ij}\right)\vec{e}_k.$$

С другой стороны,

$$\mathcal{A}(\vec{f}_j) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\mathcal{A}(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}q_{ij}\right)\vec{e}_k,$$

поэтому $(QA_f)_{kj} = \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ki}b_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}q_{ij} = (A_eQ)_{kj}$.

Теорема доказана.

Следствие – определение. Число

$$\det A_f = \det(Q^{-1}A_eQ) = \det Q^{-1} \cdot \det A_e \cdot \det Q =$$

$$= \det Q^{-1} \cdot \det Q \cdot \det A_e = \det(Q^{-1}Q) \cdot \det A_e =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \det A_e = 1 \det A_e = \det A_e$$

не зависит от выбора базиса и называется **определителем** $\mathbf{det}\,\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$.

Пример:

Если $\mathcal{A}$ – поворот плоскости на угол φ вокруг точки 0, то

$$\det \mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. Вычисление собственных чисел и собственных векторов

Определение. Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ называют **собственным вектором** (eigenvector) линейного оператора $\mathcal{A} : E \to E \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \quad \mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Число λ называют **собственным числом** (eigenvalue) оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору $\vec{x}$.

Теорема. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

является матрицей оператора $\mathcal{A} : E \to E$ в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ – собственный вектор, отвечающий собственному числу λ. Тогда λ – корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а набор координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ собственного вектора – ненулевое решение системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Доказательтво (в случае $n = 2$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \neq \vec{0};$$

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x};$$

$$\mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1\mathcal{A}(\vec{e}_1) + x_2\mathcal{A}(\vec{e}_2) =$$
$$= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) = \lambda(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2).$$

Сравним коэффициенты при $\vec{e}_i$ в обеих частях последнего равенства:

$$\begin{cases} \vec{e}_1: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1, \\ \vec{e}_2: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Осталось проверить, что $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Предположим, напротив, что $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда по правилу Крамера

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}} = 0, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}} = 0,$$

поэтому $\vec{x} = \vec{0}$, что невозможно (по определению, собственный вектор всегда ненулевой).

Теорема доказана.

Независимость характеристического уравнения от выбора базиса. След линейного оператора и его независимость от выбора базиса

Теорема.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

Пусть $\vec{f}_1, \ \dots, \vec{f}_n$ – другой базис. Тогда $A_f = Q^{-1}A_eQ$.

С другой стороны, характеристическое уравнение имеет вид

$$\det\left(A_e-\lambda\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\right)=0.$$

Очевидно, что

$$\det\left(A_f-\lambda\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\det\left(Q^{-1}A_eQ-\lambda\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\det\left(Q^{-1}A_eQ-Q^{-1}\lambda\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}Q\right)=$$

$$=\det\left(Q^{-1}\left(A_e-\lambda\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\right)Q\right)=$$

$$=\det Q^{-1}\cdot\det\left(A_e-\lambda\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\right)\det Q=$$

$$=\det\left(A_e-\lambda\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\right).$$

Теорема доказана.

Следствие. След $\mathrm{Tr}\mathcal{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ не зависит от выбора базиса (trace = след).

Доказательство:

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет вид

$$(-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) + \ldots + \det\mathcal{A} = 0$$

и не зависит от выбора базиса, поэтому его коэффициенты (и в частности след $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$) не зависят от выбора базиса.

Следствие доказано.

Пример:

В случае $n = 2$ характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

т. е.

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}\mathcal{A}\cdot\lambda + \det\mathcal{A} = 0.$$

Ранг матрицы и его вычисление. Метод окаймляющих миноров

Определение. Пусть $\vec{f}_1, \ \ldots, \vec{f}_n$ – векторы линейного пространства E над полем $\mathbb{R}$. **Рангом** этой **системы** векторов называют размерность пространства

$$F = \mathbb{R}\vec{f}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{f}_n \subset E : \mathrm{rank}\{\vec{f}_1, \ \ldots, \vec{f}_n\} = \dim\mathbb{R}F,$$

где $\mathbb{R}\vec{f}_1 + \ldots + \mathbb{R}\vec{f}_n$ – всевозможные линейные комбинации векторов $\vec{f}_1, \ \ldots, \vec{f}_n$.

Пример:

$\vec{\text{Л}} + \vec{\text{Р}} + \vec{\text{Щ}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\text{Р}} = -\vec{\text{Л}} - \vec{\text{Щ}} \Rightarrow F = \mathbb{R}\vec{\text{Л}} + \mathbb{R}\vec{\text{Р}} + \mathbb{R}\vec{\text{Щ}} = \mathbb{R}\vec{\text{Л}} + \mathbb{R}\vec{\text{Щ}} \Rightarrow$
$\dim\mathbb{R}F \le 2 \Rightarrow \mathrm{rank}\{\vec{\text{Л}}, \vec{\text{Р}}, \vec{\text{Щ}}\} = \dim\mathbb{R}F \le 2.$

Определение. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $\vec{f}_1=(a_{11},\ \dots,\ a_{1n})\in\mathbb{R}^n,\ \dots,\vec{f}_m=(a_{m1},\ \dots,\ a_{mn})\in\mathbb{R}^n$,

$F=\mathbb{R}\vec{f}_1+\dots+\mathbb{R}\vec{f}_m$.

Рангом матрицы A называется число $\dim\mathbb{R}F$.

Определение. Выберем k строк и k столбцов матрицы A. Пусть M – определитель k-го порядка, элементы которого a_{ij} расположены в выбранных строках и столбцах. M называется минором k-го порядка.

Пример:

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Миноры 1-го порядка: $1,\ 2,\ \dots,\ 12$.

Миноры 2-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix},\ \dots,\ \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$.

Миноры 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix},\ \dots,\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$.

Теорема. Ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров.

Комментарий. Предположим, что существует минор r-го порядка $M\neq 0$. Если все миноры порядка $>r$ равны нулю, то ранг A равен r.

Доказательство:

Пусть $M\neq 0$ – минор порядка r, а все миноры порядка $>r$ равны нулю. Мы должны доказать, что $\operatorname{rank}A=r$.

Можно считать, что M расположен в северо-западном углу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & M \neq 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{mr+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы должны проверить, что все строки с номерами $> r$ выражаются через первые r строк.

Возьмем для простоты случай $r = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{где } M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поскольку $M \neq 0$, то строки минора M непропорциональны, поэтому строки (a_{11}, a_{12}, a_{13}) и (a_{21}, a_{22}, a_{23}) тоже непропорциональны (эти векторы не лежат на одной прямой в пространстве $\mathbb{R}^3$). С другой стороны, объем параллелепипеда, построенного на строках матрицы A, равен нулю. Значит, этот параллелепипед плоский, и поэтому 3-я строка лежит в плоскости, натянутой на 1-ю и 2-ю строки. Поскольку 1-я и 2-я строки образуют базис плоскости, то 3-я – это линейная комбинация 1-й и 2-й.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема. Если $M \neq 0$ и все окаймляющие миноры равны нулю, то $\operatorname{rank} A = r$.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Окаймляющие миноры:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rank} A = 2.$$

Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Алгоритм решения системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(матрицу $\overline{A}$ называют расширенной матрицей системы уравнений).

Теорема Кронекера – Капелли. Система уравнений имеет хотя бы одно решение $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$.

Доказательство:

1. Предположим, что система совместна, и пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – решение. Тогда

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A, поэтому размерность пространства, порожденного столбцами матрицы $\overline{A}$, равна размерности пространства, порожденного столбцами A, т. е. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$ (надо учесть, что ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров, а поэтому ранг, вычисленный по строкам, равен рангу, рассчитанному по столбцам).

2. Пусть $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\overline{A}$. Присоединяя столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ к столбцам матрицы A, мы получим ту же размерность пространства, порожденного столбцами. Значит, $\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ выражается через $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, …, $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ с некоторыми коэффициентами $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Поэтому $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – решение системы.

Теорема доказана.

Примеры:

1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому $\mathrm{rank}A \geq 2$. С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\overline{A} = 2$, и по теореме Кронекера – Капелли система совместна. Так как $M \neq 0$, то 1-я и 2-я строки матрицы $\overline{A}$ линейно независимы, а 3-я – это линейная комбинация этих строк, поэтому система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Переменные, которые не попали в минор M, перенесем в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 - 3x_3 \\ x_1 + x_2 = -x_3 \end{cases}$$

и будем рассматривать как независимые. Поскольку $M \neq 0$, то можно воспользоваться правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4-3x_3 & -2 \\ -x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(4-3x_3)\ 1-2x_3}{3} = \frac{4-5x_3}{3},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-3x_3 \\ 1 & -x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-x_3-4+3x_3}{3} = \frac{2x_3-4}{3}.$$

Решение имеет вид

$$\left(\frac{4-5x_3}{3},\ \frac{2x_3-4}{3},\ x_3\right),$$

где x_3 – независимая переменная. Если, например, $k=\mathbb{R}$, то решения нашей системы образуют прямую.

2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=2, \\ 4x_1-2x_3=4 \end{cases} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому $\mathrm{rank}A \geq 2$. С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому $\mathrm{rank}A = 2$. Очевидно, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

поэтому $\mathrm{rank}\overline{A} = 3 \neq \mathrm{rank}A$, и по теореме Кронекера – Капелли система несовместна (не имеет решений).

Прямая на плоскости. Уравнение прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости

1-й способ задания прямой на плоскости: пусть прямая L проходит через точку $(x_0; y_0)$ и имеет направляющий вектор $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – ортонормированный базис плоскости. Тогда $(x; y) = (x_0; y_0) + t\vec{a}$, поэтому в координатной записи получаем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}.$$

2-й способ задания прямой на плоскости: пусть прямая L проходит через точки $(x_1; y_1) \neq (x_2; y_2)$, и $(x; y)$ – произвольная точка прямой L. Имеем:

$$(x; y) - (x_1; y_1) = t[(x_2; y_2) - (x_1; y_1)] \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0.$$

Это уравнение имеет вид $Ax + By + C = 0$.

3-й способ задания прямой на плоскости: фиксируем нормаль $\vec{n}$ к прямой L (по определению, $\|\vec{n}\| = 1$, $\vec{n} \perp \vec{a}$). Поскольку $(\vec{n}, \vec{a}) = 0$, то

$$(\vec{n},\ t\vec{a}) = 0 \Rightarrow (\vec{n}, (x - x_0)\vec{e}_1 + (y - y_0)\vec{e}_2) = 0,$$

где $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2$, $n_1^{\,2} + n_2^{\,2} = 1$ в силу соотношения $\|\vec{n}\| = 1$. Наше уравнение принимает вид

$$(n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2, (x - x_0)\vec{e}_1 + (y - y_0)\vec{e}_2) = 0,$$

т. е. мы получаем нормальное уравнение прямой:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0,$$

$$n_1 x + n_2 y + (-n_1 x_0 - n_2 y_0) = 0.$$

Сравним: прямая L задается уравнением $Ax + By + C = 0$ и нормальным уравнением. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} A & B & -C \\ n_1 & n_2 & n_1 x_0 + n_2 y_0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку множество решений системы

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ n_1 x + n_2 y = n_1 x_0 + n_2 y_0 \end{cases}$$

представляет собой прямую L, то $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\overline{A} = 1$ (если бы $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\overline{A} = 2$, то по правилу Крамера множество решений состояло бы из одной точки). Поэтому $(n_1; n_2) = \lambda(A; B)$. С другой стороны,

$$1 = \|\vec{n}\| = \sqrt{(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2} = |\lambda|\sqrt{A^2 + B^2},$$

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow$$

$$\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2).$$

Теорема. Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ на плоскости до прямой $Ax + By + C = 0$ равно $\rho = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Доказательство:

Опустим перпендикуляр из точки $(x_0; y_0)$ на прямую L. Обозначим точку пересечения перпендикуляра с прямой L через $(x; y)$. Имеем $(x; y) = (x_0; y_0) + t\vec{n}$, где $t = \pm\rho$. Это соотношение принимает вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tn_1 \\ y = y_0 + tn_2 \end{cases},$$

причем $Ax + By + C = 0$, т. е. $A(x_0 + tn_1) + B(y_0 + tn_2) + C = 0$. Можно считать, что $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2)$. В этом случае $n_1 = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $n_2 = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, поэтому

$$Ax_0 + By_0 + C + t\left(\frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$Ax_0 + By_0 + C + t\sqrt{A^2 + B^2} = 0 \Rightarrow$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow$$

$$\rho = |t| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример:

Пусть даны две пересекающиеся прямые $A_1x+ \quad +B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$. Уравнения биссектрис, проведенных через точку их пересечения, имеют вид

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Угол между двумя прямыми на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть даны две прямые L_1, L_2. По определению

$$\left(L_1,\hat{}\,L_2\right)=\left(\vec{n}_1,\hat{}\,\vec{n}_2\right)=\arccos\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{\|\vec{n}_1\|\cdot\|\vec{n}_2\|}=\arccos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)=$$

$$=\arccos\left(\pm\frac{A_1\vec{e}_1+B_1\vec{e}_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}},\pm\frac{A_2\vec{e}_1+B_2\vec{e}_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right)=$$

$$=\arccos\left(\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right).$$

Следствие. $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$.

Теорема. Рассмотрим две прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \qquad (L_1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \qquad (L_2)$$

и матрицы

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -C_1 \\ A_2 & B_2 & -C_2 \end{pmatrix}.$$

1. Если $\operatorname{rank}A\neq\operatorname{rank}\overline{A}$, то прямые не пересекаются (параллельны).
2. Если $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\overline{A}=1$, то прямые совпадают.
3. Если $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\overline{A}=2$, то прямые пересекаются в одной точке.

24. Плоскость в трехмерном пространстве. Расстояние от точки до плоскости в трехмерном пространстве. Угол между плоскостями. Взаимное расположение двух плоскостей в трехмерном пространстве. Взаимное расположение трех плоскостей в трехмерном пространстве

Пусть даны три точки $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой. Тогда они задают единственную плоскость π.

Очевидно, $(x; y; z) \in \pi \Leftrightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ – это линейная комбинация векторов $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0 .$$

Плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ имеет нормаль

$$\vec{n} = \pm \frac{A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Следующие теоремы доказывают аналогично теоремам о прямых на плоскости.

Теорема. Расстояние от точки $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Теорема. Рассмотрим плоскости

$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Двугранный угол между этими плоскостями равен

$$(\pi_1 \hat{,} \pi_2) = (\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2) = \arccos\left(\pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right).$$

Следствие (условие ортогональности двух плоскостей). $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

Теорема (взаимное расположение двух плоскостей в трехмерном пространстве). Рассмотрим плоскости

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}.$$

1. Если $\mathrm{rank} A \neq \mathrm{rank} \overline{A}$, то плоскости не пересекаются (параллельны и не совпадают).

2. Если $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} \overline{A} = 2$, то плоскости пересекаются по прямой.

3. Если $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} \overline{A} = 1$, то плоскости совпадают.

Теорема (взаимное расположение трех плоскостей в трехмерном пространстве). Рассмотрим плоскости

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}.$$

1. Если $\mathrm{rank} A \neq \mathrm{rank} \overline{A}$, то либо две плоскости параллельны, а третья их пересекает, либо две плоскости пересекаются по прямой L, а третья параллельна этой прямой, либо все три плоскости параллельны, либо две плоскости совпадают, а третья им параллельна.

2. Если $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} \overline{A} = 3$, то плоскости пересекаются в одной точке (в этом случае говорят, что плоскости находятся в общем положении).

3. Если $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} \overline{A} = 2$, то плоскости содержат одну общую прямую.

4. Если $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} \overline{A} = 1$, то все три плоскости совпадают.

Самосопряженные операторы и симметрические матрицы. Собственные числа самосопряженного оператора

Определение. Конечномерное линейное пространство E над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел называется **евклидовым** $\Leftrightarrow$ на E определено скалярное произведение.

Определение. Пусть E – евклидово пространство. Оператор $\mathcal{A}: E \to E$ называют **самосопряженным** $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ $(\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{y}) =$ $= (\vec{x}, \mathcal{A}(\vec{y}))$.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \ \ldots, \ \vec{e}_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства E. Оператор $\mathcal{A}: E \to E$ самосопряжен $\Leftrightarrow$ его матрица A_e симметрическая, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Доказательство:

Напомним, что $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ i = j, \\ 0, & \text{если } \ i \neq j, \end{cases}$

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \ \ (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{A}(\vec{y})) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{A}(\vec{e}_j), \vec{e}_i) & & (\vec{e}_j, \mathcal{A}(\vec{e}_i)) \\ \| & & \| \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{e}_k, \vec{e}_i\right) & & \left(\vec{e}_j, \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\vec{e}_k\right) \\ \| & & \| \\ a_{ij} & & a_{ji}. \end{array}$$

поэтому

Теорема. Если оператор $\mathcal{A}: E \to E$ самосопряжен, то все комплексные корни характеристического уравнения являются вещественными.

Доказательство (для $n = 2$):

Пусть A_e – матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \ \vec{e}_2$. По предыдущей теореме получаем $a_{ij} = a_{ji}$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ \underbrace{a_{21}}_{=a_{12}} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$

Напомним, что

$$\lambda^2 + \lambda p + q = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

В нашем случае

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} =$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} =$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 + 4a_{12}^2}{4}} =$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}{4}}_{\geq 0}} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана.

Спектральная теорема

Спектральная теорема. Пусть $\mathcal{A} : E \to E$ – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве E. Тогда в E существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \ \ldots, \vec{f}_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A} : \mathcal{A}(\vec{f}_j) = \lambda_j \vec{f}_j$:

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство (в случае $n = 2$):

Пусть A_e – матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \ \vec{e}_2$. Тогда $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}{4}}.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$, поэтому $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$, и матрица $A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$.

В частности, $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = a_{11}\vec{e}_j$. В этом случае можно в качестве ортонормированного базиса из собственных векторов взять $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$.

Предположим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть $\vec{x}$ – собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_1, $\vec{y}$ – собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_2. Рассмотрим

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{f}_2 = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}.$$

Очевидно, что

$$\|\vec{f}_1\| = \left\|\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right\| = 1, \quad \|\vec{f}_2\| = \left\|\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}\right\| = 1,$$

$$\mathcal{A}(\vec{f}_1) = \frac{\mathcal{A}(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} = \frac{\lambda_1\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \lambda_1\vec{f}_1, \quad \mathcal{A}(\vec{f}_2) = \frac{\mathcal{A}(\vec{y})}{\|\vec{y}\|} = \frac{\lambda_2\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \lambda_2\vec{f}_2.$$

Остается проверить, что $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$.

Очевидно, что

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}(\vec{f}_1), \vec{f}_2) & & (\vec{f}_1, \mathcal{A}(\vec{f}_2)) \\ \| & & \| \\ (\lambda_1\vec{f}_1, \vec{f}_2) & & (\vec{f}_1, \lambda_2\vec{f}_2) \\ \| & & \| \\ \lambda_1(\vec{f}_1, \vec{f}_2) & & \lambda_2(\vec{f}_1, \vec{f}_2), \end{array}$$

поэтому $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$, и, следовательно, $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$, $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$.

Теорема доказана.

Ортогональные операторы и матрицы

Определение. Оператор $\mathcal{A}: E \to E$ в евклидовом пространстве E называется ортогональным $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ $(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$.

Теорема. Если $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, то он сохраняет скалярное произведение, нормы векторов и углы между ними.

Доказательство:

По определению, $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение: $(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$. Поэтому

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\| = \sqrt{(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{x}))} = \sqrt{(\vec{x}, \vec{y})} = \|\vec{x}\|,$$

$$(\mathcal{A}(\vec{x}) \hat{,} \mathcal{A}(\vec{y})) = \arccos \frac{(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y}))}{\|\mathcal{A}(\vec{x})\| \cdot \|\mathcal{A}(\vec{y})\|} = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = (\vec{x} \hat{,} \vec{y}).$$

Теорема доказана.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \ \ldots, \ \vec{e}_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства E. Оператор $\mathcal{A}: E \to E$ ортогональный $\Leftrightarrow$ его матрица A ортогональная, т. е. ${}^tA = A^{-1}$, где ${}^tA$ – матрица, транспонированная к A.

Доказательство:

По определению матрицы A

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = (\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k; \end{cases}$$

$$\|$$

$$\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i, \ \sum\nolimits_{l=1}^{n} a_{lk} \vec{e}_l\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \sum\nolimits_{l=1}^{n} a_{ij} a_{lk} (\vec{e}_i, \vec{e}_l)$$

$$\|$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik}.$$

В итоге

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k; \end{cases}$$

$$\|$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} {}^t a_{ji} a_{ik},$$

где ${}^t a_{ji} = a_{ij}$ – элемент транспонированной матрицы ${}^t A$, расположенный в j-й строке и i-м столбце. Поэтому соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} {}^t a_{ji} a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k; \end{cases}$$

эквивалентно соотношению ${}^t A \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Значит, ${}^t A = A^{-1}$. Теорема доказана.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \ \dots, \ \vec{e}_n$ – ортонормированный базис, $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ – другой ортонормированный базис, $\vec{f}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ij} \vec{e}_i, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$ является матрицей перехода. Тогда ${}^t Q = Q^{-1}$, т. е. Q – ортогональная матрица.

Доказательство:

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$ с матрицей $A_e = Q$, т. е.

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \vec{e}_i = \vec{f}_j.$$

Тогда

$$(\vec{f}_j, \vec{f}_k) = (\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k; \end{cases} = (\vec{e}_j, \vec{e}_k) \Rightarrow$$

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = (\vec{e}_j, \vec{e}_k).$$

Поэтому $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, и его матрица $A_e = Q$ также ортогональна.

Теорема доказана.

Теорема. Если $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, то $\det \mathcal{A} = \pm 1$.

Доказательство:

$\det \mathcal{A} = \det A$, где A – ортогональная матрица: ${}^t A = A^{-1}$. С другой стороны, по свойству определителей $\det {}^t A = \det A$. Поэтому $1 = \det A^{-1} \cdot \det A = \det {}^t A \cdot \det A = \det A \cdot \det A = \det^2 A \Rightarrow \det A = \pm 1$.

Теорема доказана.

Определение. Ортогональный оператор $\mathcal{A}$ с определителем $\det \mathcal{A} = 1$ называют поворотом.

Квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Функцию $f(\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$, называют **квадратичной формой**. Симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей квадратичной формы**.

Пример:

Если $f(\vec{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$, то

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(коэффициент (-4) при x_1x_2 разносится в матрице A как $a_{12} = -2 = a_{21}$).

Теорема. Существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$, в котором квадратичная форма имеет канонический вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Доказательство:

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}: E \to E$, определенный формулой

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i.$$

Поскольку матрица A симметрическая, оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным.

Очевидно,

$$(\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{x}) = \left(\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j \right), \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{A}(\vec{e}_j), \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i, \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k \right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jx_k \underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}_k)}_{=1,\ \text{если}\ i=k;\ =0,\ \text{если}\ i\neq k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jx_i = f(\vec{x}).$$

В силу спектральной теоремы существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}(\vec{f}_j) = \lambda_j \vec{f}_j$. В этом базисе вектор $\vec{x}$ имеет новые координаты: $\vec{x} = y_1\vec{f}_1 + \ldots + y_n\vec{f}_n$,

$$f(\vec{x}) = (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{x}) = (\mathcal{A}(y_1\vec{f}_1 + \ldots + y_n\vec{f}_n), y_1\vec{f}_1 + \ldots + y_n\vec{f}_n) =$$
$$= (y_1\mathcal{A}(\vec{f}_1) + \ldots + y_n\mathcal{A}(\vec{f}_n), y_1\vec{f}_1 + \ldots + y_n\vec{f}_n) =$$
$$= (y_1\lambda_1\vec{f}_1 + \ldots + y_n\lambda_n\vec{f}_n, y_1\vec{f}_1 + \ldots + y_n\vec{f}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Теорема доказана.

Классификация кривых второго порядка на плоскости

Задачи. Привести к каноническому виду:

1) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$;

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 6y + 2 = 0$;

3) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 3y + 2 = 0$.

На евклидовой плоскости с ортонормированным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ рассмотрим кривую 2-го порядка, заданную уравнением

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

представляет собой ненулевую матрицу. Существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2$, в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$$\varphi(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2,$$
$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2,$$
$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{2} q_{ij}\vec{e}_i,$$

$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2$.

Мы имеем

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 = y_1(q_{11}\vec{e}_1 + q_{21}\vec{e}_2) + y_2(q_{12}\vec{e}_1 + q_{22}\vec{e}_2).$$

Сравнивая коэффициенты при $\vec{e}_j$ в левой и правой частях, получим

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 \end{cases}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение кривой, получим уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_0 = 0.$$

При этом $(\lambda_1;\ \lambda_2) \neq (0;\ 0)$, потому что квадратичная форма не является нулевой.

Можно считать, что $\lambda_1 > 0$.

Предположим сначала, что $\lambda_2 \neq 0$. Тогда уравнение кривой принимает вид

$$\lambda_1\left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1}y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2\right) + \lambda_2\left(y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2}y_2 + \left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2\right) +$$

$$+ b_0 - \lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 = 0;$$

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \underbrace{b_0 - \lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2}_{c_0} = 0.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} = z_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -c_0.$$

Теорема. Существуют 9 классов кривых 2-го порядка:

1) эллипс;
2) мнимый эллипс;
3) пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке;
4) гипербола;
5) пара вещественных пересекающихся в одной точке прямых;
6) парабола;

7) пара параллельных вещественных прямых;

8) пара параллельных мнимых прямых;

9) пара совпадающих прямых.

Доказательство:

1. Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 > 0,\ \ -c_0 > 0$, то, положим, $a^2 = \dfrac{-c_0}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{-c_0}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$\dfrac{z_1^2}{a^2} + \dfrac{z_2^2}{b^2} = 1$ (эллипс).

2. Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 > 0,\ \ -c_0 < 0$, то, положим, $a^2 = \dfrac{c_0}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{c_0}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$\dfrac{z_1^2}{a^2} + \dfrac{z_2^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллипс).

3. Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 > 0,\ \ -c_0 = 0$, то, положим, $a^2 = \dfrac{1}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{1}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$\dfrac{z_1^2}{a^2} + \dfrac{z_2^2}{b^2} = 0$ (пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке).

4. Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0,\ \ -c_0 > 0$, то, положим, $a^2 = \dfrac{-c_0}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{c_0}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$\dfrac{z_1^2}{a^2} - \dfrac{z_2^2}{b^2} = 1$ (гипербола).

Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0,\ \ -c_0 < 0$, то снова получим гиперболу.

5. Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0,\ \ -c_0 = 0$, то, положим, $a^2 = \dfrac{1}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{-1}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$\dfrac{z_1^2}{a^2} - \dfrac{z_2^2}{b^2} = 0$ (пара вещественных пересекающихся в одной точке прямых).

Далее мы можем считать, что $\lambda_2 = 0$. Тогда уравнение кривой принимает вид

$$\lambda_1\left(y_1^2+\frac{b_1}{\lambda_1}y_1+\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2\right)+b_2y_2+b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2=0;$$

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2+b_2y_2+\underbrace{b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2}_{c_0}=0.$$

Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} y_1+\dfrac{b_1}{2\lambda_1}=z_1 \\ y_2=z_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение кривой приводится к виду

$\lambda_1 z_1^2+b_2z_2=-c_0$.

Если $b_2\neq 0$, то мы можем сделать замену координат

$$\begin{cases} z_1=t_1 \\ z_2+\dfrac{c_0}{b_2}=t_2 \end{cases},$$

и уравнение кривой приводится к виду

$\lambda_1 t_1^2+b_2t_2=0$.

Предположим сначала, что $b_2\neq 0$.

6. Если $\lambda_1>0,\ b_2>0$, то, положим, $a^2=\dfrac{b_2}{\lambda_1}$. Уравнение кривой принимает канонический вид:

$\dfrac{t_1^2}{a^2}+t_2=0$ (парабола);

случай $b_2<0$ сводится к предыдущему заменой t_2 на $-t_2$ и не дает ничего нового.

Далее можно считать, что $b_2=0$ (в этом случае уравнение кривой не содержит переменной t_2). Мы получаем следующие варианты:

7. $\dfrac{z_1^2}{a^2}=1$ (пара параллельных вещественных прямых);

8. $\dfrac{z_1^2}{a^2}=-1$ (пара параллельных мнимых прямых);

9. $z_1^2=0$ (пара совпадающих прямых).

Мы доказали теорему.

Ориентация. Линейные операторы, сохраняющие ориентацию

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – базис конечномерного векторного пространства E над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ – другой базис этого же пространства,

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i \,,$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$. Будем говорить, что эти базисы имеют одинаковую ориентацию, если $\det Q > 0$.

Если $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ – третий базис пространства E, ориентация которого совпадает с ориентацией $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$, то $\vec{g}_j = \sum_{i=1}^{n} q'_{ij}\vec{f}_i$, $\det Q' > 0$. Проверим, что матрица Q'' перехода от базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ – это произведение $Q'' = QQ'$: действительно,

$$\vec{g}_j = \sum_{k=1}^{n} q'_{kj}\vec{f}_k = \sum_{k=1}^{n} q'_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ik}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ik}q'_{kj}\right)\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} q''_{ij}\vec{e}_i \,.$$

Поэтому из соотношения $\det Q'' = \det(QQ') = \det Q \det Q' > 0$ следует, что базисы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$ имеют одну и ту же ориентацию.

В итоге все базисы пространства E разбиваются на два класса: один состоит из базисов, ориентация которых совпадает с ориентацией базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$; другой – из базисов, ориентация которых противоположна ориентации базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.

Примеры:

1. $E = \mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения. Здесь строго положительные числа задают положительное направление числовой прямой (положительную ориентацию), а строго отрицательные – отрицательное направление (отрицательную ориентацию).

2. E – плоскость с отмеченной точкой. Базисы

$$\begin{array}{l} \vec{e}_2 \\ \uparrow \\ \quad \rightarrow \ \ \vec{e}_1 = \vec{f}_1 \\ \downarrow \\ \vec{f}_2 \end{array}$$

имеют противоположные ориентации, потому что $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_2$,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det Q = -1 < 0.$$

3. Правый ортонормированный $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и левый ортонормированный базисы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ трехмерного пространства

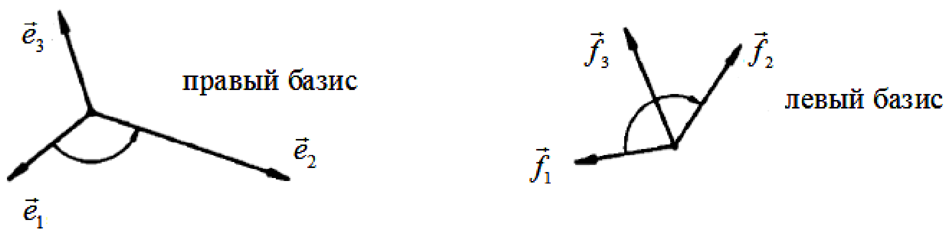


Рис. 8

имеют противоположные ориентации, потому что $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$,

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det Q = -1 < 0.$$

Пусть $\mathcal{A} : E \to E$ – обратимый (невырожденный) линейный оператор (другими словами, $\det \mathcal{A} \neq 0$). Тогда $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \ldots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ – новый базис пространства E, причем $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i$. Поэтому базисы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \ldots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$ имеют одинаковую ориентацию $\Leftrightarrow$ $\det \mathcal{A} > 0$ (что эквивалентно соотношению $\det \mathcal{A} > 0$, поскольку определитель матрицы оператора не зависит от выбора базиса).

Если $\det \mathcal{A} > 0$, то мы будем говорить, что оператор $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию.

Например, если $\mathcal{A}$ – поворот плоскости на угол φ, то $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию, потому что

$$\det\mathcal{A} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Напомним, что операторы, сохраняющие скалярное произведение, называют **ортогональными**. Поскольку для любого ортогонального оператора $\mathcal{A}$ имеем соотношение $\det\mathcal{A} = \pm 1$, то сохраняющие ориентацию ортогональные операторы – это в точности повороты.

Линейные операторы, сохраняющие объем

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – базис конечномерного векторного пространства E над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $\mathcal{A}: E \to E$ – обратимый (невырожденный) линейный оператор (т. е. $\det\mathcal{A} \neq 0$). Тогда (объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \ldots, \mathcal{A}(\vec{e}_n)$) = $= |\det\mathcal{A}| \cdot$ (объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$). В частности, $\mathcal{A}$ увеличивает объемы тел в $|\det\mathcal{A}|$ раз.

Доказательство:

Для простоты мы рассмотрим случай $\dim E = 3$.

Можно считать, что $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис E. Имеем

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\vec{e}_i,$$

поэтому объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1)$, $\mathcal{A}(\vec{e}_2)$, $\mathcal{A}(\vec{e}_3)$, равен

$$\left(\text{абсолютной величине } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \left(\text{абсолютной величине } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right) = |\det\mathcal{A}| =$$

$$= |\det\mathcal{A}|\underbrace{(\text{объем параллелепипеда, построенного на векторах } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}_{=1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Оператор $\mathcal{A}$ сохраняет объем $\Leftrightarrow$ $|\det\mathcal{A}| = 1$.

Следствие 2. Оператор $\mathcal{A}$ сохраняет объем и ориентацию $\Leftrightarrow$ $\det\mathcal{A} = 1$.

В частности, повороты сохраняют объем и ориентацию.

Линейные операторы $\mathcal{A}: E \to E$, сохраняющие объем и ориентацию, образуют **специальную линейную группу** $\mathrm{SL}(E)$ (*special linear group*). По определению

$$\mathrm{SL}(E) = \{\mathcal{A}: E \to E \mid \det \mathcal{A} = 1\}.$$

Теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \to E$ – линейный оператор, сохраняющий объем и углы между векторами. Тогда $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор.

Доказательство:

Рассмотрим для простоты случай $n = 2$. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ортонормированный базис плоскости. Так как $\mathcal{A}$ сохраняет углы, то

$$\frac{\pi}{2} = (\vec{e}_1, \hat{\ } \vec{e}_2) = (\mathcal{A}(\vec{e}_1), \hat{\ } \mathcal{A}(\vec{e}_2)),$$

поэтому параллелограмм, построенный на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$, является прямоугольником. Пусть $\vec{d} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ – диагональ квадрата, построенного на векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Ясно, что $\mathcal{A}(\vec{d}) = \mathcal{A}(\vec{e}_1) + \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ – диагональ прямоугольника, построенного на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$. Поэтому из равенств

$$\frac{\pi}{2} = (\vec{d}, \hat{\ } \vec{e}_1) = (\mathcal{A}(\vec{d}), \hat{\ } \mathcal{A}(\vec{e}_1))$$

следует, что прямоугольник является квадратом. Поскольку $\mathcal{A}$ сохраняет площади, то площадь этого квадрата равна 1. Значит, длины векторов $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ равны 1. Поэтому оператор $\mathcal{A}$ переводит ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в ортонормированный базис $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ и, следовательно, $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор.

Теорема доказана.

Простейшие примеры алгебр Ли

Определение. Векторное пространство g над полем k называется **алгеброй Ли**, если каждой паре векторов $x, y \in g$ отвечает вектор $[x; y] \in g$, причем выполняются следующие аксиомы:

1) $\forall\lambda\in k \quad [\lambda x, y]=[x,\lambda y]=\lambda[x,y]$;

2) $[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$; $\ [x,y+z]=[x,y]+[x,z]$;

3) $\forall x\in g \quad [x,x]=0$;

4) (тождество Якоби) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$.

Из свойств 2) – 3) следует, что

$$0=[x+y,x+y]=\underbrace{[x,x]}_{=0}+[y,x]+[x,y]+\underbrace{[y,y]}_{=0}.$$

Поэтому $[x,y]=-[y,x]$.

Примеры:

1) g – трехмерное пространство со скалярным произведением, $[x,y]$ – векторное произведение. Нуждается в проверке только тождество Якоби. Его достаточно проверить только для базисных векторов правого ортонормированного базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (легкое упражнение).

2) $g=M_n(\mathbb{R})$ – кольцо квадратных матриц порядка n с коэффициентами из поля k. Пусть $[x,y]=xy-yx$, где xy – обычное произведение матриц. В этом случае тождество Якоби действительно выполняется:

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=[xy-yx,z]+[yz-zy,x]+[zx-xz,y]=$$
$$=xyz-yxz-zxy+zyx+yzx-zyx-xyz+xzy+zxy-xzy-yzx+yxz=0.$$

3) Пусть $[x,y]=0$ для всех $x,y\in g$. В этом случае алгебру Ли g называют коммутативной.

4) Пусть $g=\mathrm{sl}_n(\mathbb{R})$ – множество всех квадратных матриц порядка n с нулевым следом. Если $\mathrm{Tr}(x)=0$ и $\mathrm{Tr}(y)=0$, то

$$\mathrm{Tr}([x,y])=\mathrm{Tr}(xy-yx)=\mathrm{Tr}(xy)-\mathrm{Tr}(yx)=0$$

(и поэтому $\mathrm{sl}_n(\mathbb{R})$ – алгебра Ли) в силу общей теоремы (см. ниже).

Теорема. Для любых квадратных матриц x,y порядка n

$$\mathrm{Tr}(xy)=\mathrm{Tr}(yx).$$

Доказательство:

Имеем:

$$\mathrm{Tr}(xy)=\sum_{i=1}^{n}(xy)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ik}y_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_{ki}x_{ik}=\sum_{k=1}^{n}(yx)_{kk}=\mathrm{Tr}(yx).$$

Теорема доказана.

Теорема. Пусть $x\in M_n(\mathbb{R})$ и ${}^t x$ – транспонированная матрица. Тогда ${}^t(xy)={}^t y\,{}^t x$.

Доказательство:

Очевидно,

$$\left({}^t(xy)\right)_{ij} = (xy)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} x_{jk} y_{ki} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} {}^t x_{kj}\, {}^t y_{ik} = \sum_{k=1}^{n} {}^t y_{ik}\, {}^t x_{kj} = ({}^t y\, {}^t x)_{ij}.$$

Теорема доказана.

Определение. Квадратную матрицу $x \in M_n(\mathbb{R})$ называют кососимметрической, если ${}^t x = -x$.

Теорема. Множество $\mathrm{so}_n(\mathbb{R}) = \{x \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x = -x\}$ всех кососимметрических матриц порядка n является алгеброй Ли.

Доказательство:

Если $x, y \in \mathrm{so}_n(\mathbb{R})$, то

$${}^t[x,y] = {}^t(xy - yx) = {}^t(xy) - {}^t(yx) = {}^t y\, {}^t x - {}^t x\, {}^t y =$$

$$= (-y)(-x) - (-x)(-y) = yx - xy = -[x,y],$$

поэтому $x, y \in \mathrm{so}_n(\mathbb{R})$.

Теорема доказана.

Экспонента и логарифм квадратной матрицы

Пусть $x \in (\mathbb{R})$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Действительно, если $x = 0$, то это соотношение очевидно. Если же $x \neq 0$, то из второго замечательного предела получим

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{x}{n}\right)}}\right]^x = e^x.$$

Бином Ньютона дает соотношение

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}\left(\frac{x}{n}\right)^m + \ldots =$$

$$=1+x+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}\cdot x^m+\ldots.$$

В курсе математического анализа доказывается, что

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^m}{m!}+\ldots$$

представляет собой сумму сходящегося всюду степенного ряда.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}:E\to E$ на конечномерном евклидовом пространстве E определим его норму формулой

$$\|\mathcal{A}\|=\sup_{\substack{\vec{e}\in E\\ \|\vec{e}\|\le 1}}\|\mathcal{A}(\vec{e})\|.$$

Поскольку функции $\mathcal{A}:E\to E$ и $E\xrightarrow{\vec{e}\mapsto\|\vec{e}\|}\mathbb{R}$ непрерывны, их композиция также непрерывна на замкнутом ограниченном множестве (компакте) $B=\{e\in E\ \mid\ \|e\|\le 1\}$ и в силу теоремы Больцано – Вейерштрасса ограничена на единичном шаре B, поэтому норма оператора $\mathcal{A}$ существует. Более того, она обладает следующими свойствами:

1) $\|\mathcal{A}\|=0\Leftrightarrow\forall\vec{e}\in B;\ \ \|\mathcal{A}(\vec{e})\|=0\Leftrightarrow\forall\vec{e}\in B\ \ \mathcal{A}(\vec{e})=\vec{0}\Leftrightarrow\mathcal{A}=0$;

2) $\|\lambda\mathcal{A}\|=\sup_{\vec{e}\in B}|\lambda|\cdot\|\mathcal{A}(\vec{e})\|=|\lambda|\cdot\|\mathcal{A}\|$;

3) $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\|=\sup_{\vec{e}\in B}\|\mathcal{A}(\vec{e})+\mathcal{B}(\vec{e})\|\le\sup_{\vec{e}\in B}\left(\|\mathcal{A}(\vec{e})\|+\|\mathcal{B}(\vec{e})\|\right)\le$
$\le\sup_{\vec{e}\in B}\|\mathcal{A}(\vec{e})\|++\sup_{\vec{e}\in B}\|\mathcal{B}(\vec{e})\|=\|\mathcal{A}\|+\|\mathcal{B}\|$;

4) $\forall\vec{e}\in E\ \ \|\mathcal{A}(\vec{e})\|\le\|\mathcal{A}\|\cdot\|\vec{e}\|$, потому что

$$\forall\vec{e}\ne\vec{0}\ \ \left\|\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|}\right\|=1,\ \ \frac{1}{\|\vec{e}\|}\|\mathcal{A}(\vec{e})\|=\left\|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|}\right)\right\|\le\|\mathcal{A}\|;$$

5) $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\|=\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\|$ (действительно, в силу свойства (4) имеем:
$\forall\vec{e}\in E$,
$\|(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{e})\|=\|\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{e}))\|\le\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}(\vec{e})\|\le\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\|\cdot\|\vec{e}\|$).

Наличие нормы в пространстве $\operatorname{End}\mathbb{R}(E)$ линейных операторов позволяет перенести на функции со значениями в E (линейные операторы) теорию сходящихся последовательностей. По определению последовательность операторов $\mathcal{A}_n$ сходится к оператору $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ $\|\mathcal{A}_n-\mathcal{A}\|\to 0$ при $n\to+\infty$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}:E\to E$ определим его экспоненту $e^{\mathcal{A}}$ формулой

$$e^{\mathcal{A}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\mathcal{A}}{n}\right)^n = 1+\mathcal{A}+\frac{\mathcal{A}^2}{2!}+\ldots+\frac{\mathcal{A}^m}{m!}+\ldots .$$

Сходимость обеспечивается теоремой Вейерштрасса, потому что ряд $1+\mathcal{A}+\frac{\mathcal{A}^2}{2!}+\ldots+\frac{\mathcal{A}^m}{m!}+\ldots$ мажорируется (согласно свойству (5)) сходящимся числовым рядом $\|1\|+\|\mathcal{A}\|+\frac{\|\mathcal{A}\|^2}{2!}+\ldots+\frac{\|\mathcal{A}\|^m}{m!}+\ldots = e^{\|\mathcal{A}\|}$.

Если $x\in M_n(\mathbb{R})$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ пространства E, то можно определить экспоненту e^x теми же формулами:

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^m}{m!}+\ldots .$$

Теорема (без доказательства). Если матрицы $x, y\in M_n(\mathbb{R})$ коммутируют, т. е. $[x,y]=xy-yx=0$, то $e^{x+y}=e^xe^y$.

Теорема. Если $x\in \mathrm{so}_n(\mathbb{R})$ – кососимметрическая матрица, то e^x – ортогональная.

Доказательство:

По условию ${}^t x=-x$, поэтому

$${}^t(e^x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{{}^t x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

С другой стороны, матрицы x и $-x$ коммутируют:

$[x,\ -x]=-[x,\ x]=0,$

поэтому $1=e^0=e^{x+(-x)}=e^xe^{-x}=e^{x\,t}(e^x)$ и, следовательно, ${}^t(e^x)=(e^x)^{-1}$. поэтому e^x – ортогональная матрица.

Теорема доказана.

Если $x\in\mathbb{R}$ и $|x|<1$, то

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\int_0^x[1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^m x^m+\ldots]\mathrm{d}x=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m x^{m+1}}{m+1}+\ldots,$$

поэтому можно определить логарифм вещественного числа $y=1+x$ (где $|x|<\varepsilon<1$) формулой

$$\ln y=(y-1)-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\frac{(y-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m(y-1)^{m+1}}{m+1}+\ldots.$$

Теорема (без доказательства). Если $y=1+x$, где x – квадратная матрица, близкая к нулевой, то определен логарифм

$$\ln y=(y-1)-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\frac{(y-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m(y-1)^{m+1}}{m+1}+\ldots,$$

причем $e^{\ln y}=y,\ \ \ln e^x=x$.

Следствие. Если $y=e^x$ – ортогональная матрица, близкая к единичной (так что логарифм $\ln y=\ln(e^x)=x$ существует), то x – кососимметрическая матрица.

Доказательство:

Поскольку $y=e^x$ – ортогональная матрица, то ${}^t(e^x)=(e^x)^{-1}$. Поэтому

$${}^t x={}^t(\ln y)=$$

$$={}^t\left((y-1)-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\frac{(y-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m(y-1)^{m+1}}{m+1}+\ldots\right)=$$

$$=({}^t y-1)-\frac{({}^t y-1)^2}{2}+\frac{({}^t y-1)^3}{3}-\frac{({}^t y-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m({}^t y-1)^{m+1}}{m+1}+\ldots=$$

$$=\ln({}^t y)=\ln((e^x)^{-1})=\ln(e^{-x})=-x.$$

и, следовательно, x – кососимметрическая матрица.

Следствие доказано.

Мы видим, что экспонента взаимно однозначно отображает малую окрестность нулевой матрицы в алгебре Ли $\mathrm{so}_n(\mathbb{R})$ кососимметрических матриц на малую окрестность единичной матрицы в группе $O_n(\mathbb{R})$ ортогональных матриц. Обратное отображение осуществляется с помощью логарифма. В частности,

$$\dim_{\mathbb{R}} O_n(\mathbb{R})=\dim_{\mathbb{R}}\mathrm{so}_n(\mathbb{R}).$$

Поскольку кососимметрическая матрица $x\in\mathrm{so}_n(\mathbb{R})$ имеет вид

$$x=\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1n}\\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \ldots & x_{2n}\\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & \ldots & x_{3n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -x_{1n} & -x_{2n} & \ldots & \ldots & 0\end{pmatrix},$$

то $\dim \mathbb{R}\,\mathrm{so}_n(\mathbb{R}) = (n-1)+(n-2)+\ldots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Такую же размерность имеет группа ортогональных матриц $O_n(\mathbb{R})$.

Определитель экспоненты. Вычисление экспоненты симметрической матрицы

Теорема. Для любого линейного оператора $\mathcal{A}: E \to E$ в евклидовом пространстве E имеем: $\det e^{\mathcal{A}} = e^{\mathrm{Tr}\mathcal{A}}$.

Доказательство:

Для простоты рассмотрим случай $n = 2$. Характеристическое уравнение оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}\mathcal{A}\cdot\lambda + \det\mathcal{A} = 0.$$

Поэтому комплексные собственные числа оператора $\mathcal{A}$ различны $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Tr}\mathcal{A})^2 - 4\det\mathcal{A} \neq 0$. Это условие задает открытое плотное подмножество U в кольце $\mathrm{End}\,\mathbb{R}(E)$. Все операторы $\mathcal{A} \in U$ диагонализируются (над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел). Значит, в некотором базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеем: $\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \lambda_1\vec{e}_1$, $\mathcal{A}(\vec{e}_2) = \lambda_2\vec{e}_2$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ – собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

Очевидно,

$$\mathcal{A}^m(\vec{e}_1) = \lambda_1^m\vec{e}_1, \qquad \mathcal{A}^m(\vec{e}_2) = \lambda_2^m\vec{e}_2,$$

поэтому

$$e^{\mathcal{A}}(\vec{e}_1) = e^{\lambda_1}\vec{e}_1, \qquad e^{\mathcal{A}}(\vec{e}_2) = e^{\lambda_2}\vec{e}_2,$$

и, следовательно, матрица оператора $e^{\mathcal{A}}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix},$$

поэтому $\det e^{\mathcal{A}} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1+\lambda_2} = e^{\mathrm{Tr}\mathcal{A}}$.

В итоге мы доказали теорему для операторов $\mathcal{A} \in U$. Поскольку $e^{\mathcal{A}}$ и $e^{\mathrm{Tr}\mathcal{A}}$ непрерывны (как функции от $\mathcal{A}$) и совпадают на открытом плотном подмножестве $U \hookrightarrow \mathrm{End}\,\mathbb{R}(E)$, то они совпадают всюду.

Теорема доказана.

Следующая очевидная теорема позволяет сравнительно просто вычислять экспоненты симметрических матриц и самосопряженных операторов.

Теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \to E$ – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве E, $\mathcal{A}_e$ – симметрическая матрица оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. В силу спектральной теоремы существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть Q – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$, определенная формулой $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i$. Тогда

$$A_f = Q^{-1}A_eQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$e^{A_f} = Q^{-1}e^{A_e}Q = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

$$e^{A_e} = Q\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

Доказательство:

Все следует из очевидных равенств

$$A_f^2 = Q^{-1}A_eQQ^{-1}A_eQ = Q^{-1}A_e^2Q,\ \ A_f^3 = Q^{-1}A_e^3Q,\ \ldots, A_f^m = Q^{-1}A_e^mQ.$$

Аффинная группа

Пусть E – конечномерное линейное пространство над полем k. Положим, $\mathrm{GL}(E) = \{\mathcal{A}: E \to E \mid \det\mathcal{A} \neq 0\}$ (*general linear group*). Это группа линейных автоморфизмов линейного пространства E над полем k. Очевидно, вектор $\vec{0}$ – неподвижный вектор любого линейного оператора $\mathcal{A}$ в силу соотношения $\mathcal{A}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Мы хотим расширить группу $\mathrm{GL}(E)$ обратимых операторов до аффинной группы

$$\mathrm{Aff}(E)=\{\Phi : E\to E \;\big|\; \forall\vec{x}\in E\;\; \Phi(\vec{x})=\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a},\;\; \mathcal{A}\in \mathrm{GL}(E)\;\; \vec{a}\in E\}.$$

Из определения следует, что $\Phi(\vec{0})=\mathcal{A}(\vec{0})+\vec{a}=\vec{a}$. Таким образом, элемент $\vec{0}$ может переводиться элементами аффинной группы $\mathrm{Aff}(E)$ в произвольный элемент $\vec{a}\in E$, что более отвечает реальностям физического мира.

Проверим, что $\mathrm{Aff}(E)$ действительно является группой. Если $\Psi(\vec{x})=\mathcal{B}(\vec{x})+\vec{b}$, то

$$\Psi\circ\Phi(\vec{x})=\Psi(\Phi(\vec{x}))=\Psi(\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a})+\vec{b}=$$
$$=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x}))+\mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}=\mathcal{C}(\vec{x})+\vec{c}\,,$$

где $\mathcal{C}=\mathcal{B}\mathcal{A}\in \mathrm{GL}(E)$ – произведение линейных операторов $\mathcal{A},\mathcal{B}\in \mathrm{GL}(E)$, а $\vec{c}=\mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}\in E$ – фиксированный вектор, поэтому $\Psi\circ\Phi\in \mathrm{Aff}(E)$. С другой стороны, если Ψ – обратный элемент для Φ, то мы имеем $\forall\vec{x}\in E\;\; \Psi\circ\Phi(\vec{x})=\vec{x}$. Поэтому $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x}))+\mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}=\vec{x}$ и, следовательно, $\forall\vec{x}\in E\;\; \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x}))=\vec{x}$, $\mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}=\vec{0}$. Значит, $\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}$, $\vec{b}=-\mathcal{A}^{-1}(\vec{a})$, поэтому

$$\forall\vec{x}\in E\;\; \Phi^{-1}(\vec{x})=\mathcal{A}^{-1}(\vec{x})-\mathcal{A}^{-1}(\vec{a})=\mathcal{A}^{-1}(\vec{x}-\vec{a}).$$

Теорема. Группа $\mathrm{Aff}(E)$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу параллельных переносов

$$\mathrm{Transl}(E)=\{T\in \mathrm{Aff}(E) \;\big|\; \forall\vec{x}\in E\;\; T(\vec{x})=\vec{x}+\vec{t}\;\tilde{\to}\; E\},$$

причём $\dfrac{\mathrm{Aff}(E)}{\mathrm{Transl}(E)}\tilde{\to}\,\mathrm{GL}(E)$.

Доказательство:

Рассмотрим каноническое отображение

$f:\mathrm{Aff}(E)\to \mathrm{GL}(E)$,

$\Phi\mapsto\mathcal{A}$.

Проверим, что f – морфизм групп (т. е. что $f(\Psi\circ\Phi)= =f(\Psi)\circ f(\Phi)=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$).

Действительно, мы уже знаем, что

$$\Psi\circ\Phi(\vec{x})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x}))+\mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}\,,$$

поэтому $f(\Psi\circ\Phi)=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}=f(\Psi)\circ f(\Phi)$. С другой стороны, ядро f равно

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\Phi \in \mathrm{Aff}(E) \mid \mathcal{A} = 1\} = \{\Phi \in \mathrm{Aff}(E) \quad \forall \vec{x} \in E \quad \Phi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}\} =$$
$$= \mathrm{Transl}(E) \xrightarrow{\sim} E$$

и является нормальной подгруппой в $\mathrm{Aff}(E)$ (согласно общей теореме из теории групп, ядра морфизмов – это нормальные подгруппы); кроме того, согласно общей теореме из теории групп фактор по ядру изоморфен образу, т. е.

$$\frac{\mathrm{Aff}(E)}{\mathrm{Ker}(f)} \xrightarrow{\sim} f(\mathrm{Aff}(E)) = \mathrm{GL}(E),$$

что и требовалось доказать.

Определение. Элементы группы $\mathrm{Aff}(E)$ называют **аффинными морфизмами**.

Очевидно, любой аффинный морфизм $\Phi : E \to E$ – это композиция линейного морфизма $\mathcal{A} : E \to E$ и параллельного переноса $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$.

Движения (изометрии) евклидова пространства

Определение. Пусть E – евклидово пространство (конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, снабженное скалярным произведением). Тогда E имеет структуру метрического пространства с метрикой $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$. **Движением (изометрией) пространства** E называют любое отображение $\Phi : E \to E$, сохраняющее расстояние, т. е.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad \rho(\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})) = \rho(\vec{x}, \vec{y}).$$

В этом определении движения не предполагается, что Φ – аффинное отображение, но на самом деле оно аффинное.

Теорема. Отображение $\Phi : E \to E$ является движением $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x} \in E \;\; \Phi(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}$, где $\mathcal{A} \in \mathrm{O}(E)$ – ортогональный оператор. Если кроме того $\mathcal{A} \in \mathrm{SO}(E)$ (другими словами, $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию), то Φ называют собственным движением.

Доказательство:

Предположим, что $\forall \vec{x} \in E \;\; \Phi(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}$, где $\mathcal{A} \in \mathrm{O}(E)$ – ортогональный оператор. Поскольку $\mathcal{A}$ сохраняет длины векторов, то

$$\rho(\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{y})) = \rho(\mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}, \mathcal{A}(\vec{y}) + \vec{a}) =$$
$$= \|(\mathcal{A}(\vec{x}) + \vec{a}) - (\mathcal{A}(\vec{y}) + \vec{a})\| = \|\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\| =$$

$$= \|\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \rho(\vec{x}, \vec{y}),$$

поэтому Φ – изометрия.

Предположим теперь, что $\Phi : E \to E$ – произвольная изометрия. Пусть $\vec{a} = \Phi(\vec{0})$ и $T_{\vec{a}} : E \to E$ – параллельный перенос на вектор $\vec{a}$, определенный формулой $T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$. Тогда $\mathcal{A} = T_{\vec{a}}^{-1} \circ \Phi$ является изометрией (потому что композиция двух изометрий – это также изометрией). Очевидно, $T_{\vec{a}}(\vec{0}) = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, поэтому

$$\mathcal{A}(\vec{0}) = T_{\vec{a}}^{-1} \circ \Phi(\vec{0}) = T_{\vec{a}}^{-1}(\vec{a}) = \vec{0}.$$

Следовательно, $\Phi = T_{\vec{a}} \circ \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}(\vec{0}) = \vec{0}$, т. е. любая изометрия – произведение изометрии $\mathcal{A}$, оставляющей неподвижной точку $\vec{0}$, и сдвига $T_{\vec{a}}$. Осталось проверить, что $\mathcal{A}$ – линейный ортогональный оператор.

Поскольку $\mathcal{A}$ – изометрия, то

$$\|\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\| = \rho(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Полагая в этом соотношении $\vec{y} = \vec{0}$, получим $\|\mathcal{A}(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$ (другими словами, $\mathcal{A}$ сохраняет длины векторов).

Проверим, что $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение: действительно,

$$\|\vec{x}\|^2 - 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) =$$
$$= \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\|^2 = (\mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}), \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})) =$$
$$= \|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 - 2(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) + \|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) + \|\vec{y}\|^2,$$

поэтому

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})).$$

Осталось проверить, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор. Для этого рассмотрим вектор $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$. Очевидно, что

$$0 = \|\vec{z} - \vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{z} - \vec{x} - \vec{y}, \vec{z} - \vec{x} - \vec{y}) =$$
$$= \|\vec{z}\|^2 + \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2(\vec{z}, \vec{x}) - 2(\vec{z}, \vec{y}) + 2(\vec{x}, \vec{y}) =$$
$$= \|\mathcal{A}(\vec{z})\|^2 + \|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2 + \|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2 - 2(\mathcal{A}(\vec{z}), \mathcal{A}(\vec{x})) - 2(\mathcal{A}(\vec{z}), \mathcal{A}(\vec{y})) + 2(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) =$$
$$= (\mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}), \mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})) = \|\mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y})\|^2,$$

поэтому $\mathcal{A}(\vec{z}) - \mathcal{A}(\vec{x}) - \mathcal{A}(\vec{y}) = \vec{0}$ и $\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{z}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$.

Аналогично доказываем, что $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$.

Теорема доказана.

Классификация изометрий прямой, плоскости и трехмерного пространства

Изометрии постоянно встречаются в геометрии и механике твердого тела, поэтому мы рассмотрим классификацию изометрий евклидовых пространств малых размерностей.

1) Пусть $E=\mathbb{R}$ – аффинная прямая. Любая изометрия $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ имеет вид

$$\Phi(x)=\varepsilon x+a,$$

где $\varepsilon=\pm1$ (действительно, любой ортогональный оператор $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}$ сохраняет скалярное произведение и является гомотетией с коэффициентом ε, поэтому из соотношения $\mathcal{A}(x)\mathcal{A}(x)=x^2$ следует, что $\varepsilon x\varepsilon x=\varepsilon^2x^2=x^2$ и $\varepsilon^2=1$, $\varepsilon=\pm1$).

Если $\varepsilon=1$, то $\Phi(x)=x+a$, и поэтому Φ – сдвиг (параллельный перенос прямой). Если, кроме того, $a\neq0$, то Φ не имеет неподвижных точек.

Если $\varepsilon=-1$, то $\Phi(x)=-x+a$. Неподвижную точку отображения Φ находят из уравнения $x_0=\Phi(x_0)=-x_0+a$. Это точка $x_0=\dfrac{a}{2}$. Очевидно, $\forall\vec{x}\in E$ $\Phi(x)-\dfrac{a}{2}=-(x-\dfrac{a}{2})$, поэтому Φ – отражение прямой относительно неподвижной точки $\dfrac{a}{2}$ (оно не сохраняет ориентацию):

$$0 \qquad\qquad\qquad \Phi(x) \qquad\qquad \frac{a}{2} \qquad\qquad x$$

·——————————————>——————————>——————————>

2) Пусть E – евклидова плоскость, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ – ортонормированный базис E. Тогда $\Phi(\vec{x})=\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a}$, где $\mathcal{A}$ – поворот на угол φ (если $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию) или $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор с определителем -1.

Предположим сначала, что $\mathcal{A}$ имеет ненулевой собственный вектор. Можно считать, что $\vec{e}_1$ – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ с собственным числом $\lambda_1\in\mathbb{R}$. Поскольку оператор $\mathcal{A}$ ортогональный, то

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_1),\ \mathcal{A}(\vec{e}_1))=(\vec{e}_1,\vec{e}_1)=1,$$

поэтому

$$(\lambda_1\vec{e}_1,\ \lambda_1\vec{e}_1)=\lambda_1^2(\vec{e}_1,\ \vec{e}_1)=1$$

и, следовательно, $\lambda_1=\pm 1$. С другой стороны,

$$0=(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)=(\mathcal{A}(\vec{e}_1),\ \mathcal{A}(\vec{e}_2))=(\lambda_1\vec{e}_1,\ \mathcal{A}(\vec{e}_2)),$$

поэтому $\mathcal{A}(\vec{e}_2)\perp\vec{e}_1$, $\mathcal{A}(\vec{e}_2)=\lambda_2\vec{e}_2=\pm\vec{e}_2$.

Если $\lambda_1=\lambda_2=1$, то $\forall\vec{x}\in E$ $\mathcal{A}(\vec{x})=\vec{x}$ и Φ – параллельный перенос на вектор $\vec{a}$.

Если $\lambda_1=\lambda_2=-1$, то $\forall\vec{x}\in E$ $\mathcal{A}(\vec{x})=-\vec{x}$ и $\Phi(\vec{x})=-\vec{x}+\vec{a}$. Неподвижную точку отображения Φ находят из уравнения $\vec{x}_0=\Phi(\vec{x}_0)=-\vec{x}_0+\vec{a}$. Это точка $\vec{x}_0=\dfrac{\vec{a}}{2}$. Очевидно, $\forall\vec{x}\in E$ $\Phi(\vec{x})-\dfrac{\vec{a}}{2}=-(\vec{x}-\dfrac{\vec{a}}{2})$, поэтому Φ – отражение плоскости относительно неподвижной точки $\dfrac{\vec{a}}{2}$ (оно сохраняет ориентацию). Легко видеть, что в этом случае мы имеем поворот плоскости E вокруг неподвижной точки $\dfrac{\vec{a}}{2}$ на угол π.

Наконец, можно считать, что $\lambda_1=-\lambda_2=1$. В этом случае

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1)=\vec{e}_1,\ \mathcal{A}(\vec{e}_2)=-\vec{e}_2,$$

$$\Phi(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2)=x_1\vec{e}_1-x_2\vec{e}_2+a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2=(x_1+a_1)\vec{e}_1+(-x_2+a_2)\vec{e}_2.$$

Очевидно, Φ – композиция отражения относительно оси, проходящей через точку $(0;\ \dfrac{a_2}{2})$ параллельно вектору $\vec{e}_1$, и сдвига на вектор $a_1\vec{e}_1$.

Предположим теперь, что $\mathcal{A}$ не имеет вещественных собственных векторов. Тогда комплексные собственные числа оператора $\mathcal{A}$ связаны соотношениями $\lambda_2=\overline{\lambda}_1$ (потому что λ_1 является корнем характеристического уравнения $\lambda^2-Tr\mathcal{A}\cdot\lambda+\det\mathcal{A}=0$ с вещественными коэффициентами и, следовательно, $\overline{\lambda}_1$ – также корень характеристического уравнения), $\{\pm 1\}\ni\det\mathcal{A}=\lambda_1\lambda_2=\lambda_1\overline{\lambda}_1=|\lambda_1|^2>0$, поэтому $\det\mathcal{A}=1$ и, следовательно, $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию (т. е. является поворотом на угол $\varphi\neq 0,\neq\pi$). В этом случае

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1)=\cos\varphi\vec{e}_1+\sin\varphi\vec{e}_2,\ \mathcal{A}(\vec{e}_2)=-\sin\varphi\vec{e}_1+\cos\varphi\vec{e}_2,$$

поэтому

$$\Phi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + x_2(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$$

Неподвижная точка $(x_1^0; x_2^0)$ определяется уравнением

$$\Phi(x_1^0\vec{e}_1 + x_2^0\vec{e}_2) = = x_1^0(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) +$$
$$+ x_2^0(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = x_1^0\vec{e}_1 + x_2^0\vec{e}_2,$$

которое имеет единственное решение по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1^0(\cos\varphi - 1) - x_2^0\sin\varphi + a_1 = 0 \\ x_1^0\sin\varphi + x_2^0(\cos\varphi - 1) + a_2 = 0 \end{cases},$$

потому что определитель

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = \cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 1 + \sin^2\varphi = 2 - 2\cos\varphi \neq 0.$$

Из соотношений

$$\Phi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + (x_1^0\vec{e}_1 + x_2^0\vec{e}_2)) =$$
$$= (x_1 + x_1^0)(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + (x_2 + x_2^0)(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 =$$
$$= x_1(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + x_2(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) +$$
$$+ x_1^0(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + x_2^0(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 =$$
$$= x_1(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + x_2(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + (x_1^0\vec{e}_1 + x_2^0\vec{e}_2)$$

следует, что $\mathbf{\Phi}$ – это поворот плоскости на угол φ вокруг неподвижной точки $(x_1^0;\, x_2^0)$.

В результате доказана нижеследующая теорема.

Теорема. Любая изометрия евклидовой плоскости, сохраняющая ориентацию, является параллельным переносом или вращением вокруг неподвижной точки. Изометрия, не сохраняющая ориентацию, – это композиция отражения относительно некоторой прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой.

3) Изометрии трехмерного евклидова пространства допускают следующее описание.

Теорема. Любая изометрия трехмерного евклидова пространства, сохраняющая ориентацию, является винтовой, т. е. композицией параллельного переноса вдоль некоторой прямой и вращения вокруг этой же прямой (винтовая изометрия включает как чистый параллельный перенос, так и чистое вращение). Изометрия, не сохраняющая ориентацию, – это композиция отражения относительно некоторой плоскости и параллельного переноса на вектор, параллельный той же плоскости, либо композиция отражения относительно некоторой плоскости P и вращения на угол φ вокруг некоторой прямой L, перпендикулярной плоскости P.

Следствие (теорема Эйлера). Любое перемещение твердого тела с одной закрепленной точкой является вращением вокруг некоторой оси, проходящей через закрепленную точку.

Аффинная классификация кривых второго порядка

Две фигуры F_1 и F_2 в пространстве E называют **аффинно эквивалентными** $\Leftrightarrow$ $\exists g \in \mathrm{Aff}(E)$ $g(F_1) = F_2$.

Теорема. Любая кривая второго порядка на плоскости аффинно эквивалентна одному из следующих объектов:

1) окружности $x^2 + y^2 = 1$;

2) мнимой окружности $x^2 + y^2 = -1$;

3) гиперболе $x^2 - y^2 = 1$;

4) параболе $y^2 = 2x$;

5) паре мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых $x^2 + y^2 = 0$;

6) паре вещественных пересекающихся в одной вещественной точке прямых $x^2 - y^2 = 0$;

7) паре параллельных вещественных прямых $x^2 = 1$;

8) паре параллельных мнимых прямых $x^2 = -1$;

9) паре совпадающих вещественных прямых $x^2 = 0$.

Доказательство:

Из метрической классификации кривых 2-го порядка известно, что композиция ортогонального линейного оператора и параллельного переноса приводит уравнение кривой к одному из следующих типов:

1') эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

2') мнимому эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$;

3') гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

4') параболе $y^2 = 2px$;

5') паре мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$;

6') паре вещественных пересекающихся в одной вещественной точке прямых $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$;

7') паре параллельных вещественных прямых $\frac{x^2}{a^2} = 1$;

8') паре параллельных мнимых прямых $\frac{x^2}{a^2} = -1$;

9') паре совпадающих вещественных прямых $x^2 = 0$.

Замена координат $x = ax'$, $y = by'$ отвечает некоторому аффинному линейному оператору и приводит уравнения 1') – 3'), 5') – 8') к соответствующим уравнениям 1) – 3), 5) – 8). Наконец, аффинная замена $x' = px$, $y' = y$ приводит уравнение 4') к виду 4).

Очевидно, эллипс аффинно неэквивалентен кривым 2) – 8), так как является ограниченным замкнутым одномерным множеством (и это свойство сохраняется при аффинных морфизмах), в отличие от кривых 2) – 9), множество вещественных точек которых либо пусто (2, 8), либо неограничено (3, 4, 6, 7, 9), либо нульмерно (5).

Аналогично проверяют неэквивалентность всех других классов. Например, гипербола состоит из двух ветвей и поэтому неэквивалентна параболе. Наконец, надо учесть, что параллельность прямых сохраняется при аффинных морфизмах.

Понятие о плоскости Лобачевского

Напомним, что любое комплексное число z имеет вид $z = x + iy$, где $x = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ и $y = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ называются вещественной и мнимой частями z.

Определение. Пусть $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ – верхняя полуплоскость. Назовем «прямыми» в H лучи, перпендикулярные вещественной оси $\mathbb{R}=\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = y = 0\}$, а также полуокружности, центры которых расположены на вещественной оси (такие полуокружности пересекаются с вещественной осью под прямым углом). Верхнюю полуплоскость с такими «прямыми» называют **плоскостью Лобачевского** (или более точно – **моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского**).

Теорема. Через любые две точки $z_1 \neq z_2 \in H$ проходит единственная «прямая».

Доказательство:

Если $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = a$, то точки z_1, z_2 лежат на одном вертикальном луче $\mathrm{Re}(z) = a$ и не могут лежать на полуокружности с центром на вещественной оси $\mathbb{R}=\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}$ (потому что для любых точек $z_1 \neq z_2$ на полуокружности выполнено соотношение $\mathrm{Re}(z_1) \neq \mathrm{Re}(z_2)$). Следовательно, в этом случае существует единственная «прямая», проходящая через z_1 и z_2.

Если $\mathrm{Re}(z_1) \neq \mathrm{Re}(z_2)$, то точки z_1, z_2 не лежат на вертикальном луче. Существует единственная точка $a \in \mathbb{R}=\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}$, для которой $|z_1 - a| = |z_2 - a|$, поэтому точка a является центром полуокружности, проходящей через точки z_1 и z_2.

Теорема доказана.

Можно проверить, что все аксиомы обычной евклидовой геометрии (кроме 5-го постулата Евклида) выполнены на плоскости Лобачевского.

Напомним, что 5-й постулат Евклида утверждает существование и единственность прямой на евклидовой плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.

На плоскости Лобачевского 5-й постулат Евклида не выполняется: через данную точку, не лежащую на «прямой» l, можно провести более одной «прямой», параллельной (т. е. не пересекающей) l.

На самом деле таких параллельных прямых бесконечно много.

Наша конструкция показывает, что 5-й постулат не является логическим следствием других аксиом евклидовой геометрии.

Хорошо известно, что 5-й постулат Евклида имеет следующую эквивалентную формулировку: сумма внутренних углов треугольника на евклидовой плоскости равна π.

Теорема (без доказательства). Сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского строго меньше π (угол в точке пересечения двух «прямых» по определению равен обычному углу между касательными в точке пересечения). Более того, сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского может быть сколь угодно малой.

Определение. Фиксируем вещественное положительное число $a \neq 1$ и определим неевклидово расстояние между точками $z_1,\ z_2 \in H$ формулой

$$\rho_L(z_1, z_2) = \log_a \frac{1 + \left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2}\right|}{1 - \left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2}\right|}. \tag{39.1}$$

Можно проверить, что неевклидовы окружности, т. е. множества точек, равноудаленных от одной точки в смысле неевклидова расстояния ρ_L, – это обычные окружности на верхней полуплоскости, не пересекающие вещественную ось.

Отображение $\Phi : H \to H$ называют **изометрией плоскости Лобачевского** $\Leftrightarrow$ $\forall z_1, z_2 \in H\ \ \rho_L(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) = \rho_L(z_1, z_2)$.

Теорема (без доказательства). Любая изометрия $\Phi : H \to H$ плоскости Лобачевского имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{a_{11} z + a_{12}}{a_{21} z + a_{22}}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R},\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

или

$$\Phi(z) = \frac{a_{11} \bar{z} + a_{12}}{a_{21} \bar{z} + a_{22}}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R},\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0.$$

Классификация поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве

В трехмерном евклидовом пространстве с ортонормированным базисом $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ рассмотрим поверхность 2-го порядка, заданную уравнением

$$f(\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + a_1x_1 + \\ + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

выступает как ненулевая матрица. Существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 =$$
$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,$$
$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3,$$
$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{3} q_{ij}\vec{e}_i,$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$ – ортогональная матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ к базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

Мы имеем:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 =$$
$$= y_1(q_{11}\vec{e}_1 + q_{21}\vec{e}_2 + q_{31}\vec{e}_3) + y_2(q_{12}\vec{e}_1 + q_{22}\vec{e}_2 + q_{32}\vec{e}_3) + y_3(q_{13}\vec{e}_1 + q_{23}\vec{e}_2 + q_{33}\vec{e}_3).$$

Сравнивая коэффициенты при $\vec{e}_j$ в левой и правой частях, получим

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + q_{13}y_3 \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + q_{23}y_3 \\ x_3 = q_{31}y_1 + q_{32}y_2 + q_{33}y_3. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение поверхности, получим уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_0 = 0.$$

При этом $(\lambda_1;\ \lambda_2;\ \lambda_3) \neq (0;\ 0;\ 0)$, потому что квадратичная форма не является нулевой.

Можно считать, что $\lambda_1 > 0$.

Предположим сначала, что $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда уравнение поверхности принимает вид

$$\lambda_1\left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1}y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2\right) + \lambda_2\left(y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2}y_2 + \left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2\right) +$$

$$+\lambda_3\left(y_3^2+\frac{b_3}{\lambda_3}y_3+\left(\frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2\right)+b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2-\lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2-\lambda_3\left(\frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2=0;$$

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_2+\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2+$$

$$+\lambda_3\left(y_3+\frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2+\underbrace{b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2-\lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2-\lambda_3\left(\frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2}_{c_0}=0.$$

Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} y_1+\dfrac{b_1}{2\lambda_1}=z_1 \\ y_2+\dfrac{b_2}{2\lambda_2}=z_2 \\ y_3+\dfrac{b_3}{2\lambda_3}=z_3. \end{cases}$$

Тогда уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\lambda_3 z_3^2=-c_0.$$

Теорема. Существуют 17 классов поверхностей 2-го порядка:

1) эллипсоид;

2) мнимый эллипсоид;

3) мнимый конус;

4) однополостный гиперболоид;

5) двуполостный гиперболоид;

6) конус;

7) эллиптический параболоид;

8) гиперболический параболоид;

9) эллиптический цилиндр;

10) мнимый эллиптический цилиндр;

11) гиперболический цилиндр;

12) параболический цилиндр;

13) цилиндр над парой мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых (пара мнимых плоскостей, пересекающихся вдоль вещественной прямой);

14) цилиндр над парой вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке (пара вещественных плоскостей, пересекающихся вдоль прямой);

15) цилиндр над парой параллельных вещественных прямых (пара параллельных плоскостей);

16) цилиндр над парой параллельных мнимых прямых (пара параллельных мнимых плоскостей);

17) цилиндр над парой совпадающих вещественных прямых (пара совпадающих плоскостей).

1. Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0,\ -c_0 > 0$, то, положим, $a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{-c_0}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{-c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид:

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1 \text{ (эллипсоид).}$$

2. Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0,\ -c_0 < 0$, то, положим, $a^2 = \frac{c_0}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{c_0}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид:

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = -1 \text{ (мнимый эллипсоид).}$$

3. Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0,\ -c_0 = 0$, то, положим, $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{1}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{1}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 0 \text{ (мнимый конус).}$$

4. Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0,\ -c_0 > 0$, то, положим, $a^2 = \frac{-c_0}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{-c_0}{\lambda_2}$, $c^2 = \frac{c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид:

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1$$ (однополостный гиперболоид).

5. Если $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3<0,\ -c_0<0$, то, положим, $a^2=\frac{c_0}{\lambda_1}$, $b^2=\frac{c_0}{\lambda_2}$, $c^2=\frac{-c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид:

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=-1$$ (двуполостный гиперболоид).

6. Если $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3<0,\ -c_0=0$, то, положим, $a^2=\frac{1}{\lambda_1}$, $b^2=\frac{1}{\lambda_2}$, $c^2=\frac{-1}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид:

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=0$$ (конус).

Далее мы можем считать, что $\lambda_2\neq 0,\lambda_3=0$. Тогда уравнение поверхности принимает следующий вид:

$$\lambda_1\left(y_1^2+\frac{b_1}{\lambda_1}y_1+\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2\right)+\lambda_2\left(y_2^2+\frac{b_2}{\lambda_2}y_2+\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2\right)+$$

$$+b_3y_3+b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2-\lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2=0;$$

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_2+\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2+$$

$$+b_3y_3+\underbrace{b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2-\lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2}_{c_0}=0.$$

Сделаем замену координат:

$$\begin{cases} y_1+\dfrac{b_1}{2\lambda_1}=z_1 \\ y_2+\dfrac{b_2}{2\lambda_2}=z_2 \\ y_3=z_3 \end{cases}.$$

Тогда уравнение поверхности приводится к виду

$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + b_3 z_3 = -c_0$.

Если $b_3 \neq 0$, то мы можем сделать замену координат:

$$\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 = t_2 \\ z_3 + \dfrac{c_0}{b_3} = t_3 \end{cases},$$

и уравнение поверхности приводится к виду

$\lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + b_3 t_3 = 0$.

Предположим сначала, что $b_3 \neq 0$.

7. Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ b_3 > 0$, то, положим, $a^2 = \dfrac{b_3}{\lambda_1},\ b^2 = \dfrac{b_3}{\lambda_2}$.

Уравнение поверхности принимает канонический вид

$\dfrac{t_1^2}{a^2} + \dfrac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0$ (эллиптический параболоид);

случай $b_3 < 0$ сводится к предыдущему заменой t_3 на $-t_3$ и не дает ничего нового.

8. Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ b_3 > 0$, то, положим, $a^2 = \dfrac{b_3}{\lambda_1},\ b^2 = \dfrac{-b_3}{\lambda_2}$.

Уравнение поверхности принимает канонический вид:

$\dfrac{t_1^2}{a^2} - \dfrac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0$ (гиперболический параболоид);

случай $b_3 < 0$ сводится к предыдущему заменой t_3 на $-t_3$ и не дает ничего нового.

Далее можно считать, что $b_3 = 0$ (в этом случае равнение поверхности не содержит переменной t_3 или $\lambda_2 = 0$ (в этом случае уравнение поверхности не содержит переменной t_2). В обоих случаях мы имеем дело с цилиндрами, основаниями которых служат кривые 2-го порядка. Так как кривые 2-го порядка классифицированы (существуют 9 типов), то каждый из этих типов дает соответствующий цилиндр.

Очевидно, цилиндры 2-го порядка задаются следующими каноническими уравнениями:

9. Эллиптический цилиндр: $\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=1$;

10. Мнимый эллиптический цилиндр: $\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=-1$;

11. Гиперболический цилиндр: $\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}=1$;

12. Параболический цилиндр: $z_2^2=2pz_1$;

13. Цилиндр над парой мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых: $\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=0$ (пара мнимых плоскостей, пересекающихся вдоль вещественной прямой);

14. Цилиндр над парой вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке: $\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}=0$ (пара вещественных плоскостей, пересекающихся вдоль прямой);

15. Цилиндр над парой параллельных вещественных прямых: $\frac{z_1^2}{a^2}=1$ (пара параллельных плоскостей);

16. Цилиндр над парой параллельных мнимых прямых: $\frac{z_1^2}{a^2}=-1$ (пара параллельных мнимых плоскостей);

17. Цилиндр над парой совпадающих вещественных прямых: $z_1^2=0$ (пара совпадающих плоскостей).

Мы доказали теорему.

Прямые на однополостном гиперболоиде

Пусть однополостный гиперболоид задается своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \qquad (41.1)$$

Рассмотрим пару вещественных чисел $(\alpha,\ \beta)\neq(0,\ 0)$ и систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}. \qquad (41.2)$$

Для каждой пары чисел $(\alpha,\ \beta)$ наши уравнения (41.2) определяют пару плоскостей, пересекающихся по прямой, и эта прямая целиком лежит на однополостном гиперболоиде, так как решение системы уравнений (41.2) приводит к решению уравнения (41.1).

В итоге мы получили семейство прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, которое мы обозначим через I. Оно зависит от одного параметра $u=\beta/\alpha$. Аналогично уравнениям (41.2) можно было бы для любой пары чисел $(\alpha',\ \beta')\neq(0,\ 0)$ рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta'\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\ \beta'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha'\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\end{cases}, \qquad (41.3)$$

определяющую прямую, лежащую на однополостном гиперболоиде; мы получим в итоге семейство II прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, зависящее от одного параметра $v=\beta'/\alpha'$.

Легко проверить, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходят единственная образующая семейства I и единственная образующая семейства II.

Прямые на гиперболическом параболоиде

Пусть гиперболический параболоид задается своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

(согласно классификации поверхностей 2-го порядка гиперболический параболоид задается уравнением

$$\frac{t_1^2}{a^2} - \frac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0,$$

и мы полагаем, что в нашем случае $t_1 = x,\ t_2 = y,\ t_3 = -2z$).

Перепишем каноническое уравнение гиперболического параболоида в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z. \qquad (42.1)$$

Для каждой пары вещественных чисел $(\alpha,\ \beta) \neq (0,\ 0)$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2\beta z \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \alpha \end{cases}. \qquad (42.2)$$

Эта система задает прямую (пересечение двух плоскостей, задаваемых двумя линейными уравнениями из системы (42.2)), и эта прямая лежит на гиперболическом параболоиде, потому что решение системы (42.2) приводит к решению уравнения (42.1).

В итоге мы получили семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида, которое мы обозначим через I. Оно зависит от одного параметра $u = \beta / \alpha$. Аналогично уравнениям (42.2) можно было бы для любой пары чисел $(\alpha',\ \beta') \neq (0,\ 0)$ рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha'\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2\beta' z \\ \beta'\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \alpha' \end{cases}, \qquad (42.2)$$

определяющую прямую, лежащую на гиперболическом параболоиде; мы получим в итоге семейство II прямолинейных образующих гиперболического параболоида, зависящее от одного параметра $v = \beta' / \alpha'$.

Легко проверяется, что через каждую точку гиперболического параболоида проходят единственная образующая семейства I и единственная образующая семейства II, причем любые две образующие, принадлежащие разным семействам, пересекаются, а принадлежащие одному семейству всегда скрещиваются.

Проективное пространство

Проективизацией $\mathbb{P}$ (E) конечномерного линейного пространства E над полем k называют фактормножеством $(E \setminus 0/\sim)$, где векторы $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda \in k^{\times}$ $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ (здесь $k^{\times} = k \setminus 0$ – группа ненулевых элементов поля k с операцией умножения).

Таким образом, $\mathbb{P}(E)$ – это множество всех прямых пространства E, проходящих через точку 0.

Положим, $\mathbb{P}_k^n$ = $\mathbb{P}(k^{n+1})$. В этих обозначениях $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ называют n-мерным вещественным проективным пространством, а $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ – n-мерным комплексным проективным пространством.

Очевидно, проективная вещественная прямая $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ – это множество всех прямых в $\mathbb{R}^2$, проходящих через начало координат. Каждая такая прямая пересекает единичную окружность U^1 с центром 0 в двух диаметрально противоположных точках; пара таких точек задает единственную точку проективной прямой $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$. В итоге можно рассматривать $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ как окружность с отождествленными диаметрально противоположными точками. Более точно, существует каноническое непрерывное сюръективное отображение $U^1 \to \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ склеивания диаметрально противоположных точек единичной окружности. Отождествим $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$ и будем рассматривать U^1 как группу комплексных чисел $\{z \in \mathbb{C}^{\times} \mid |z| = 1\}$. Тогда точки $z_1, z_2 \in U^1$ диаметрально противоположны $\Leftrightarrow$ $z_1 = -z_2$. Таким образом, $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ можно естественным образом отождествить с факторгруппой $U^1/\{\pm 1\}$.

Попробуем найти такой сюръективный морфизм групп $f : U^1 \to U^1$, чтобы $\mathrm{Ker}(f) = \{\pm 1\}$. Можно взять, например, $f(z) = z^2$. Поскольку фактор по ядру изоморфен образу, то имеем

$U^1/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} f(U^1) = U^1$.

Значит, $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U^1/\{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} U^1$ (как топологическое пространство).

Итак, вещественная проективная прямая $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ топологически устроена как единичная окружность. Другой топологический изоморфизм $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U^1$ можно построить, если перенести центр единичной окружности в точку i и рассмотреть прямые, проходящие через точку $2i$. Каждая такая прямая (кроме прямой, параллельной вещественной оси $\mathbb{R}$) пересекает вещественную ось в единственной точке и пересекает окружность в единственной точке; это устанавливает диффеоморфизм вещественной оси и окружности с выколотой точкой $2i$. Прямая, параллельная вещественной оси и проходящая через точку $2i$, играет роль бесконечно удаленной точки ∞ на проективной прямой $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \infty$. Заметим, что U^1 – компакт (любое покрытие U^1 открытыми подмножествами содержит конечное подпокрытие). Поэтому компакт $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \infty$ можно рассматривать как одноточечную компактификацию аффинной прямой $\mathbb{R}$.

В теории функций одной комплексной переменной важную роль играет комплексная проективная прямая $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \infty$, отождествляемая (с помощью стереографической проекции) с единичной сферой.

Вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ естественным образом изоморфна (как топологическое пространство) сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Пусть $\Phi : (\frac{\mathbb{R}^3}{0}) \to \mathbb{P}^2\mathbb{R} = (\frac{\mathbb{R}^3}{0})$ – каноническое сюръективное отображение. Проективной прямой на $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ называется образ $\frac{\pi}{0}$ при отображении Φ, где π – это плоскость в $\mathbb{R}^3$, проходящая через начало координат. Так как любые две несовпадающие плоскости π_1, π_2 в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по прямой $l = \pi_1 \cap \pi_2$, то соответствующие проективные прямые $\Phi(\frac{\pi_1}{0})$ и $\Phi(\frac{\pi_2}{0})$ пересекаются в одной точке $\Phi(\frac{l}{0})$ проективной плоскости.

Итак, любые две несовпадающие проективные прямые на вещественной проективной плоскости пересекаются в единственной точке.

Пусть E – конечномерное линейное пространство над полем k. Группа $\mathrm{GL}(E)$ обратимых линейных операторов $\mathcal{A} : E \to E$ естественным образом действует на проективизации $\mathbb{P}(E)$. Действительно, если векторы $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$ эквивалентны, то $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ для некоторого $\lambda \in k^{\times}$, поэтому $\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\lambda\vec{y}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{y})$ и, следовательно, $\mathcal{A}(\vec{x}) \sim \mathcal{A}(\vec{y})$. Значит, можно определить действие оператора $\mathcal{A}$ на проективизации $\mathbb{P}(E)$ формулой $\mathcal{A}(\vec{x} \mod \sim) = \mathcal{A}(\vec{x}) \mod \sim$.

Если $\mathcal{A}$ – гомотетия с коэффициентом $\mu \in k^{\times}$, то для любого вектора $\vec{x} \neq \vec{0}$ имеем

$$\mathcal{A}(\vec{x} \mod \sim) = \mathcal{A}(\vec{x}) \mod \sim \; = \mu\vec{x} \mod \sim \; = \vec{x} \mod \sim,$$

поэтому гомотетии действуют тривиально на проективизации $\mathbb{P}(E)$. Значит, на $\mathbb{P}(E)$ определено каноническое действие факторгруппы $\mathrm{PGL}(E) = \mathrm{GL}(E)/k^{\times}$, где $k^{\times} \hookrightarrow \mathrm{GL}(E)$ – подгруппа гомотетий. Группу $\mathrm{PGL}(E)$ называют проективной линейной группой. Поскольку элементы из $\mathrm{GL}(E)$ переводят любую плоскость в пространстве E в любую другую плоскость, то элементы из $\mathrm{PGL}(E)$ переводят любую проективную прямую в проективизации $\mathbb{P}(E)$ в любую другую проективную прямую.

Пусть $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – базис линейного пространства E над полем k, $\vec{x} = x_0\vec{e}_0 + x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Пусть $E \setminus 0 \to \mathbb{P}(E)$ – каноническое отображение, которое вектору $\vec{x} \neq \vec{0}$ ставит в соответствие точку $\vec{x} \mod \sim \; \in \mathbb{P}(E)$. Ясно, что для любого $\lambda \in k^{\times}$ векторы с координатами $(x_0; x_1; \ldots; x_n)$ и $(\lambda x_0; \lambda x_1; \ldots; \lambda x_n)$ дают одну и ту же точку проективного пространства, которую мы обозначим через $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$. По определению, имеем

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \cdots : \lambda x_n).$$

Набор $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ называют набором однородных координат точки проективного пространства $\mathbb{P}(E)$.

Очевидно, что

$$\mathbb{P}(E) = \bigcup_{i=0}^{n} D_+(x_i),$$

где $D_+(x_i) = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mid x_i \neq 0\}$.

Рассмотрим для примера

$$D_+(x_0) = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mid x_0 \neq 0\} = \left\{\left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \cdots : \frac{x_n}{x_0}\right)\right\}.$$

Поскольку $\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}$ могут принимать любые значения из поля k, то

$$D_+(x_0) \xrightarrow{\sim} k^n.$$

Значит, $\mathbb{P}(E)$ «склеено» из множеств $D_+(x_0), D_+(x_1), \ldots, D_+(x_n)$, каждое из которых изоморфно k^n.

Проективная классификация кривых второго порядка

Теорема. Любая кривая 2-го порядка на вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ проективно эквивалентна одному из следующих объектов:

мнимый овал;

вещественный овал;

пара мнимых проективных прямых;

пара вещественных проективных прямых;

пара совпадающих проективных прямых.

Доказательство:

Проективная кривая 2-го порядка на проективной плоскости $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ задается уравнением

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Существует такой ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$, в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\lambda_0 y_0^2 + \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 0.$$

Предположим сначала, что квадратичная форма невырождена (т. е. $\det A \neq 0$, что эквивалентно неравенству $\forall i \quad \lambda_i \neq 0$). Можно считать, что замена координат

$$z_i = \sqrt{|\lambda_i|} \cdot y_i$$

приводит квадратичную форму к одному из следующих видов:

$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0$ (мнимый овал);

$z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = 0$ (вещественный овал).

В открытом множестве $D_+(z_0)$ вещественный овал задают уравнением

$$1 + \frac{z_1^2}{z_0^2} - \frac{z_2^2}{z_0^2} = 0 \text{ (гипербола)},$$

в то же время в $D_+(z_2)$ этот овал задается уравнением

$$\frac{z_0^2}{z_2^2} + \frac{z_1^2}{z_2^2} - 1 = 0 \text{ (окружность)}.$$

Если квадратичная форма вырождена, то можно считать, что уравнение кривой принимает один из следующих видов:

$z_0^2 + z_1^2 = 0$ (пара мнимых проективных прямых);

$z_0^2 - z_1^2 = 0$ (пара вещественных проективных прямых);

$z_0^2 = 0$ (пара совпадающих проективных прямых).

Мы доказали теорему.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(5;\ 0)$, если фокальное расстояние равно 6.
2. Доказать, что уравнение $36x^2+100y^2-3600=0$ является уравнением эллипса. Найти координаты фокусов и фокальное расстояние.
3. Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(4;\ 0)$ и оси ординат в точке $B(0;-3)$. Составить уравнение этого эллипса, если его оси симметрии параллельны осям координат.
4. Эллипс проходит через точку $M(1;\ 1)$, и его эксцентриситет равен $\frac{3}{5}$. Составить уравнение эллипса.
5. Прямые $x=\pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.
6. Меридиан земного шара имеет форму эллипса, отношение осей которого равно $\frac{299}{300}$. Определить эксцентриситет земного меридиана.
7. На эллипсе $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ найти точку, расстояние от которой до правого фокуса в четыре раза больше расстояния до ее левого фокуса.
8. Найти точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ с прямой $2x-y-9=0$.
9. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $A(-4;\ 3)$ к эллипсу $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.
10. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, зная, что:

    1) расстояние между вершинами равно 8, а между фокусами 10;

    2) вещественная полуось равна 5, и вершины делят расстояния между центром и фокусами пополам;

3) вещественная ось равна 6, и гипербола проходит через точку (9; −4);

4) гипербола проходит через две точки: $A(-5;\ 2)$ и $B(2\sqrt{5};\ \sqrt{2})$.

11. Вычислить полуоси гиперболы, зная, что:

1) расстояние между фокусами равно 6 и между директрисами 4;

2) директрисы заданы уравнениями $x = \pm 3\sqrt{2}$, а угол между асимптотами – прямой;

3) асимптоты даны уравнениями $y = \pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии 5 от центра;

4) асимптоты даны уравнениями $y = \pm \frac{5}{3}x$ и гипербола проходит через точку $D(6;\ 9)$.

12. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ взята точка, абсцисса которой равна 10 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиус-векторы этой точки и угол между ними.

13. Найти фокальные радиус-векторы гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точках пересечения её с окружностью $x^2 + y^2 = 91$.

14. На левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку, правый фокальный радиус-вектор которой равен 18.

15. На параболе $y^2 = 8x$ найти:

1) точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20;

2) точку, расстояние до которой от директрисы равно 4.

16. Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную:

1) в точке с абсциссой $x = 5$;

2) параллельно прямой $x - 2y + 3 = 0$;

3) перпендикулярно прямой $2x - 3y + 7 = 0$;

4) образующую с прямой $4x - 2y + 9 = 0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

17. На параболе $y^2 = 32x$ найти точку, расстояние до которой от прямой $4x + 3y + 10 = 0$ равно 2.

18. Составить уравнение параболы, если известно, что её фокус находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью Ox.

19. Вычислить определители 2-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}$.

20. Вычислить определители 3-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 6 & -7 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

21. Решить системы методом Крамера

1) $\begin{cases} 2x-y+10z=13 \\ 3x+2y+5z=23 \\ 9x-y+7z=62 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} 5x-y+2z=16 \\ 3x+2y-z=3 \\ 9x-y+4z=30 \end{cases}$.

22. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(7;\ -2;\ 3)$ и $\vec{b}=(-5;\ 1;\ 4)$.

23. Даны векторы $\vec{a}=\lambda\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}-2\lambda\vec{j}+3\vec{k}$ При каком значении λ эти векторы перпендикулярны?

24. Найти скалярное произведение векторов $3\vec{a}-2\vec{b}$ и $5\vec{a}-6\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

25. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(3;\ 3;\ -1)$, $B(1;\ 5;\ -2)$, $C(-3;\ 2;\ -1)$.

26. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=(7;\ -2;\ 3)$ и $\vec{b}=(-5;\ 1;\ 4)$.
27. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=4$, $(\vec{p},\hat{\ }\vec{q})=\dfrac{\pi}{4}$.
28. Даны точки $A(1;\ -3;\ -1)$, $B(3;\ -5;\ -2)$, $C(5;\ 2;\ 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.
29. Даны вершины треугольника $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ -6;\ 2)$ и $C(1;\ 3;\ -1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.
30. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}=(4;\ -2;\ -3)$ и $\vec{b}=(0;\ 1;\ 3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|=6$, найти его координаты.
31. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a}=(8;\ -15;\ 3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}|=51$, найти его координаты.
32. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2;\ -3;\ 1)$ и $\vec{b}=(1;\ -2;\ 3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.
33. Вычислить объем треугольной пирамиды, с вершиной в точке $C(-3;\ 2;\ -1)$, если $A(3;\ 3;\ -1)$, $B(1;\ 5;\ -2)$, $D(-1;\ 4;\ 2)$.
34. Выяснить, компланарны векторы или нет:
$\vec{a}(3;\ 2;\ 1)$, $\vec{b}(1;\ -3;\ -7)$, $\vec{c}(1;\ 2;\ 3)$.
35. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:
1) $\vec{a}=(-2;\ 1;\ 5)$, $\vec{b}=(4;\ -3;\ 0)$, $\vec{c}(0;\ -1;\ 10)$;
2) $\vec{a}=(2;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}=(1;\ -1;\ 0)$, $\vec{c}(0;\ -1;\ -2)$;
36. Найти обратную матрицу для матриц:
1) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$;

2) $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 3 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

3) $C=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

37. Найти значение матричных многочленов:

1) $2C-5CD$, где $D=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -5 & 2\end{pmatrix}$;

2) A^2+2AE, где $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{pmatrix}$;

3) A^T-2EA, где $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

38. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

2) $X\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

39. Исследовать систему на совместность и найти общее решение:

1) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1\\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2\\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4;\end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3.\end{cases}$

40. Найти ранг матрицы и её базисные миноры:

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

41. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

42. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок b=1 и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha=\frac{2\pi}{3}$.

43. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок b=7.

44. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки: $A(-2;\ 3)$ и $B(4;\ 5)$.

45. Дано общее уравнение прямой $4x-3y+12=0$. Составить нормальное уравнение прямой.

46. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки: $A(6;\ 2)$ и $B(-3;\ 5)$.

47. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;\ -5)$ параллельно прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

48. Найти острый угол между прямыми $y = -3x + 7$ и $y = 2x + 1$.

49. Определить расстояние от точки $A(2;-1)$ до прямой, отсекающей на осях координат отрезки a=8, b=6.

50. Найти расстояние от точки $A(-1;\ 2)$ до прямой $2x - 5y + 4 = 0$.

51. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+3=0,\ 2x+3y+4=0$ и параллельную прямой $4x-3y=0$.
52. Даны вершины треугольника $A(-4;\ -3)$, $B(6;\ 2)$, $C(-2;\ 11)$. Составить уравнения его медиан.
53. Даны вершины треугольника $A(-4;-3)$, $B(6;\ 2)$, $C(-2;\ 11)$. Составить уравнения его высот.
54. Даны стороны треугольника $AB\colon x+y-6=0$, $AC\colon 3x-5y+14=0$, $BC\colon 5x-3y-14=0$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины B.
55. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $A(1;\ -4;\ 2)$, $B(7;\ 1;\ -5)$.
56. Найти точку A, симметричную точке $B(3;\ -3;\ -1)$ относительно плоскости $2x-4y-4z-13=0$.
57. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;\ 0;\ -1)$ и $B(1;\ -1;\ 3)$ и перпендикулярной плоскости $3x+2y-z+5=0$
58. Найти точку A, симметричную точке $B(0;\ 2;\ 1)$ относительно прямой $\dfrac{x-1{,}5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.
59. Найти собственные числа и собственные векторы матриц:

1) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$.

60. Привести к каноническому виду следующие общие уравнения кривых 2-го порядка и нарисовать получившиеся фигуры:

1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
3) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$;
4) $7xy - 3 = 0$;
5) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;
6) $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$;
7) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$;
8) $2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0$;
9) $5x^2 + 3y^2 + x - 2 = 0$;
10) $x^2 + 3y^2 + 4x - 5y = 0$;
11) $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$;
12) $3x^2 - 4y^2 + 2y + 5 = 0$;
13) $8x^2 - 3y^2 + 2x - 5y + 1 = 0$;
14) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;
15) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$;
16) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$;
17) $2x^2 + 6x - y - 1 = 0$;
18) $3x^2 - 4y + 5 = 0$;
19) $x^2 - 5y = 0$;
20) $4x^2 - 2x - 3 = 0$;
21) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;
22) $x^2 + 2y^2 - 16 = 0$;

23) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0;$

24) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0;$

25) $x^2 + y = 0;$

26) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0;$

27) $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0;$

28) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0;$

29) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + 1 = 0;$

30) $y^2 - 2xy - 4x - 2y - 2 = 0;$

31) $x^2 - 4x - y + 3 = 0.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом учебном пособии автор попытался найти наиболее доступные формы изложения основных разделов математики, изучаемой в высшей школе студентами всех инженерно-технических и математических специальностей, а также проиллюстрировать теорию примерами.

Автор надеется, что пособие будет полезным как для студентов, так и для преподавателей при проведении занятий по соответствующим темам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии / П. С. Александров. – М. : Наука, 1968. – 911 с.
2. Архангельский, А. В. Конечномерные векторные пространства / А. В. Архангельский. – М. : Изд-во МГУ, 1982. – 248 с.
3. Заманский, М. Введение в современную алгебру и анализ / М. Заманский. – М. : Наука, 1974. – 487 с.
4. Кострикин, А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – М. : Наука, 1977. – 496 с.
5. Кострикин, А. И. Сборник задач по алгебре / А. И. Кострикин. – М. : Наука, 1987. – 352 с.
6. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – 9-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2007. – 240 с.
7. Милнор, Дж. Симметрические билинейные формы / Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер. – М. : Наука, 1986. – 175 с.
8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., стер. – М. : Айрис-пресс, 2010. – 288 с.
9. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М. : Наука, 1967. – 384 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПРОХОРОВА Татьяна Вячеславовна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор Е. С. Глазкова
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева
Корректор В. С. Теверовский
Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 27.12.17.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6,51. Тираж 70 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.