Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых"

В.И.Данченко, Д.Я.Данченко, Е.Н.Кондакова

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебно-практическое пособие

Владимир 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагается сборник индивидуальных заданий по теории функций комплексного переменного (ТФКП), предназначенный для студентов специальностей "Математика и компьютерные науки" , "Прикладная математика и информатика" и других технических и физико-математических специальностей вузов.

Настоящий сборник составлен на основе Сборника заданий 2001 года (В.И. и Д.Я. Данченко, С.А.Голопуз) и значительно дополняет и модифицирует его. Задачник включает в себя краткий справочный материал и задачи по всем наиболее важным разделам учебного курса ТФКП. Для индивидуализации работы студентов предлагается 30 вариантов для каждого типа задач. Разбираются примеры решений наиболее трудных задач.

Для практического освоения курса ТФКП вовсе не обязательно выполнение всех заданий. Преподаватель может из предлагаемого материала предложить **перечень** наиболее подходящих задач с учетом программы и специфики изучаемого курса.

В последнем разделе сборника предлагаются задачи повышенной сложности. Некоторые из включенных сюда задач могут служить основой для дальнейших самостоятельных научных исследований студентов по ТФКП.

ГЛАВА 1. Комплексные величины и функции

§ 1.1. Операции над комплексными величинами и функциями

Комплексные числа z (КЧ) это векторы с действительными координатами (x, y), наделенные определенной арифметической структурой (см. ниже). КЧ принято записывать в виде $z = x + iy$. Символ i здесь играет роль разделительного знака. Однако в арифметических операциях над КЧ он используется и как определенный арифметический объект и называется *мнимой единицей*. КЧ z изображается в декартовой системе координат или как свободный вектор с координатами (x, y), или как точка с теми же координатами.

1. Арифметические операции над КЧ $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$:

— сложение и вычитание: $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$;

— умножение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$.

Формулу запоминать не нужно: результат получается как умножение обычных алгебраических двучленов, но при этом выражение i^2, получающееся в произведении, заменяется на -1, т.е. $i^2 = -1$ (отсюда и название «мнимая единица»).

— деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Здесь результат получается после умножение числителя и знаменателя на сопряженное к знаменателю КЧ $x_2 - iy_2$ и последующего применения формулы для умножений в полученных числителе и знаменателе.

— равенство КЧ: $z_1 = z_2$, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Подчеркнем, что сравнений типа «больше, меньше» для КЧ не существует.

Множество КЧ, наделенных указанной арифметической структурой, обозначается через $\mathbb{C}$. Из определения операций следует, что числа вида $x + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$ ведут себя как обычные действительные числа x. Например, если $z_1 = x_1 + i \cdot 0$ и $z_2 = x_2 + i \cdot 0$, то

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot 0, \quad z_1z_2 = x_1x_2 + i \cdot 0, \quad z_1/z_2 = x_1/x_2 + i \cdot 0.$$

Поэтому такие КЧ отождествляют с действительными числами и обозначают кратко: $x = x + i \cdot 0$. В этом смысле множество действительных чисел является подмножеством в $\mathbb{C}$. Числа вида $0 + iy$ называют чисто мнимыми, их обозначают кратко: $iy = 0 + iy$. Заметим, что согласно правилу умножения и этим обозначениям имеем

$$i^2 = (0 + i \cdot 1)^2 = (0^2 - 1^2) + i \cdot 0 = -1 + i \cdot 0 = -1,$$

т.е. формальное правило замены i^2 на -1 при умножении получается и как результат умножения.

2. Основные обозначения для КЧ $z = x + iy$:

1. $x = \mathrm{Re\ z}$ – действительная часть КЧ z, $y = \mathrm{Im}\ z$ – мнимая часть КЧ z;
2. $\bar{z} = x - iy$ – сопряженное КЧ к числу z;
3. $r =| z |= \sqrt{x^2 + y^2}$ – длина (модуль) КЧ z.
4. $\varphi = \mathrm{Arg\ z}$ – угол поворота вектора z; φ называется аргументом КЧ z. Ввиду неоднозначности аргумента рассматривается также $\arg\ z$ — главное значение аргумента с условием : $-\pi < \arg\ z \leq \pi$. Так что $\mathrm{Arg}\, z = \arg\ z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример. Согласно этим обозначениям имеем:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad |i| = \left|\frac{1}{i}\right| = 1, \quad \arg i = \frac{\pi}{2}, \quad \arg \frac{1}{i} = -\frac{\pi}{2}.$$

3. Запись КЧ в полярных координатах. В ряде задач удобно использовать не декартовы координаты (x, y) комплексного числа $z = x + iy$, а полярные (r, φ), где $r =| z |= \sqrt{x^2 + y^2}$ — (длина) модуль вектора z, а $\varphi = \mathrm{Arg\ z}$ — угол его поворота (аргумент). Имеет место связь между декартовыми и полярными координатами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}\, \varphi = \frac{y}{x}.$$

Последнее равенство определяет аргумент с точностью до πk. Для определенности, например, можно взять $\varphi = \mathrm{arctg} \frac{y}{x}$ при $x > 0$ и $\varphi = \mathrm{arctg} \frac{y}{x} \pm \pi$ при $x < 0$.

Тригонометрическая форма записи КЧ. С учетом арифметических правил из п. 1 преобразуем запись $z = x + iy$ к виду

$$z = x + iy = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Показательная форма записи КЧ. Введем одно важное обозначение

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Это равенство называется формулой Эйлера. Тогда получим показательную (экспоненциальную) форму записи:

$$z = |z| e^{i\varphi}.$$

Выражение $e^{i\varphi}$ будем называть экспонентой Эйлера.

4. Основные свойства экспоненты Эйлера.

$$\left|e^{i\varphi}\right| = 1, \qquad \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}, \qquad e^{i(\varphi + 2\pi k)} = e^{i\varphi}.$$

По отношению к операциям умножения и деления она ведет себя как обычная экспонента:

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad \left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

5. Арифметические операции в полярных координатах. Учитывая свойства экспоненты Эйлера и показательную форму записи КЧ, получим следующие формулы. Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad z_1^n = z_1 \cdot z_1 \cdots z_1 = |z_1|^n e^{in\varphi_1},$$

т.е. при умножении модули перемножаются, а аргументы складываются, при делении модули делятся, а аргументы вычитаются. Далее, учитывая последнее равенство, получаем формулу для извлечения корней из комплексных чисел $z = re^{i\varphi}$, т.е. формулу для нахождения корней уравнения $w^n = z$:

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \qquad k = 0, \cdots, n-1.$$

Действительно, если возвести правую часть в степень n, то получим $re^{i(\varphi+2\pi k)} = re^{i\varphi} = z$. Можно показать, что других корней нет. Геометрические образы этих значений делят окружность $|z| = \sqrt[n]{r}$ на n равновеликих дуг.

6. Свойства модуля и операции сопряжения.

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \qquad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

$$\overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi}, \qquad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

7. Геометрическая иллюстрация алгебраических операций. В зависимости от рассматриваемых задач КЧ $z = x + iy$ изображаются в декартовой системе координат XOY как векторы или как точки с координатами (x, y).

Первый вариант удобен для иллюстрации сложения и вычитания КЧ как свободных векторов по правилу параллелограмма. В этом случае модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ выражает длину *вектора* (x, y), изображающего КЧ. При этом неравенство треугольника $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$ имеет привычный геометрический смысл (длина стороны $z_1 \pm z_2$ треугольника меньше суммы длин двух других его строн z_1 и z_2).

Во втором варианте значение $|z|$ равно расстоянию от *точки* (x, y), изображающей z, до начала координат. Величина $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1^2 - y_2^2)}$ равна расстоянию между точками (x_1, y_1), (x_2, y_2), изображающими $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

В такой интерпретации уравнение $|z| = R$ задает окружность радиуса R с центром в начале координат, а уравнение $|z - z_1| = R$ задает окружность радиуса R с центром в точке z_1. Неравенство $|z - z_1| < R$ задает открытый круг радиуса R с центром в точке z_1 и т.п.

8. Функции комплексного переменного. Однозначные функции $w = f(z)$ в ТФКП определяются обычным образом как определенное правило соответствия $z \to w$, при котором каждому z из некоторого множества $G \subset \mathbf{C}$ ставится в соответствие ровно одно значение w. Каждая функция комплексного переменного представляется в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = z + iy$, а u, v — действительнозначные функции, которые называются действительной и мнимой частью соответственно. Приняты обозначения

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \qquad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Приведем примеры *элементарных трансцендентных функций.*

$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$,

$\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, $\quad\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$,

$\mathrm{sh} z = -i \sin iz$, $\quad\mathrm{ch} z = \cos iz$,

$\mathrm{tg}\ z = \sin z / \cos z$, $\quad\mathrm{ctg}\ z = \cos z / \sin z$

Приведем некоторые полезные формулы.

$|e^z| = e^x$, $\quad|e^{i\varphi}| = 1$ (φ вещественное),

$\sin z = \sin x\ \mathrm{ch} y + i \cos x\ \mathrm{sh} y$, $\quad\cos z = \cos x\ \mathrm{ch} y - i\ \sin x\ \mathrm{sh} y$,

$\mathrm{sh} z = \mathrm{sh} x\ \cos y + i\ \mathrm{ch} x\ \sin y$, $\quad\mathrm{ch} z = \mathrm{ch} x\ \cos y + i\ \mathrm{sh} x\ \sin y$,

$|\sin z|^2 = \mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x$, $\quad|\cos z|^2 = \mathrm{ch}^2 y - \sin^2 x$,

$|\mathrm{sh} z|^2 = \mathrm{ch}^2 x - \cos^2 y$, $\quad|\mathrm{ch} z|^2 = \mathrm{ch}^2 x - \sin^2 y$.

9. Простейшие задачи. Прежде чем переходить к решению задач типового расчета, рекомендуется прорешать следующие простейшие задачи на арифметические и геометрические операции над комплексными величинами.

Задача 1. Пусть $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Вычислить

$$\operatorname{Re} z_1, \quad \operatorname{Im} z_2, \quad i\ z_1 + 2\ z_2, \quad z_1 z_2, \quad z_1/\overline{z_2}, \quad |z_1|, \quad |-z_2|, \quad \arg z_1, \quad \operatorname{Arg} z_2$$

Задача 2. Записать числа z_1, z_2 из примера 1 в тригонометрической и экспоненциальной формах. Вычислить затем

$$z_1^{10}, \quad 1/z_1^{10}, \quad z_1^{10}/z_2^8, \quad \sqrt[2]{z_1}, \quad \sqrt[3]{z_2}, \quad \sqrt[2]{i\ z_2}.$$

Задача 3. Даны числа z_1, z_2 из примера 1. Изобразить следующие множества:

$$|z_1 + z_2|, \quad |z - z_1| = 2, \quad |2iz - z_1| = 2, \quad \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_1, \quad |z - z_2| \leq 2, \quad |3z + 4i| \geq 3.$$

ЗАДАЧИ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задача 1. Даны два комплексных числа. Найти их модули, аргументы, изобразить на плоскости. Записать их в тригонометрическом и экспоненциальном виде и вычислить z_1^4, $1/z_2^3$, z_1^8/z_2^4, $\sqrt{z_1}$, $\sqrt[3]{z_2}$.

1.1. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$; 1.2. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$;
1.3. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$; 1.4. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$;
1.5. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; 1.6. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$;
1.7. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; 1.8. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$;
1.9. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$; 1.10. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$;
1.11. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$; 1.12. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$;
1.13. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$; 1.14. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$;
1.15. $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$; 1.16. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$;
1.17. $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$; 1.18. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$;
1.19. $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$; 1.20. $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$;
1.21. $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$; 1.22. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$;
1.23. $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$; 1.24. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$;
1.25. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$; 1.26. $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$;
1.27. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$; 1.28. $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$;
1.29. $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$; 1.30. $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$.

Задача 2. Для заданных комплексных чисел z_1 и z_2

$$z_1 = (a + bi)e^{A+Bi}, \qquad z_2 = \frac{a + bi}{\cos A + i\cos B}.$$

Записать их в тригонометрическом и экспоненциальном виде.

2.1. $A = \pi$, $B = 1/2\,\pi$, $a = -3, b = 4$; 2.2. $A = -\pi$, $B = 3/2\,\pi$, $a = -15, b = 8$;
2.3. $A = -\frac{13}{4}\pi$, $B = \frac{15}{4}\pi$, $a = -3, b = -4$; 2.4. $A = 1/4\,\pi$, $B = 1/4\,\pi$, $a = -12, b = 16$;
2.5. $A = -1/4\,\pi$, $B = 3/4\,\pi$, $a = 8, b = -6$; 2.6. $A = 10\,\pi$, $B = 19/2\,\pi$, $a = 12, b = -9$;
2.7. $A = -10\,\pi$, $B = \frac{21}{2}\pi$, $a = -12, b = 5$; 2.8. $A = -11\,\pi$, $B = \frac{23}{2}\pi$, $a = -9, b = 12$;
2.9. $A = 13/2\,\pi$, $B = 6\,\pi$, $a = -3, b = 4$; 2.10. $A = -\frac{13}{2}\pi$, $B = 7\,\pi$, $a = 16, b = -12$;
2.11. $A = -15/2\,\pi$, $B = 8\,\pi$, $a = 3, b = 4$; 2.12. $A = 19/2\,\pi$, $B = 9\,\pi$, $a = 15, b = -8$;
2.13. $A = -2\,\pi$, $B = \frac{5}{2}\pi$, $a = -5, b = -12$; 2.14. $A = 21/2\,\pi$, $B = 10\,\pi$, $a = 3, b = 4$;
2.15. $A = -21/2\,\pi$, $B = 11\,\pi$, $a = 12, b = 5$; 2.16. $A = 3/2\,\pi$, $B = \pi$, $a = 12, b = 16$;
2.17. $A = -3/2\,\pi$, $B = 2\,\pi$, $a = 12, b = -9$; 2.18. $A = 4\,\pi$, $B = 7/2\,\pi$, $a = 12, b = 9$;
2.19. $A = -4\,\pi$, $B = 9/2\,\pi$, $a = 6, b = 8$; 2.20. $A = -\frac{5}{4}\pi$, $B = \frac{7}{4}\pi$, $a = 12, b = -16$;
2.22. $A = 6\,\pi$, $B = 11/2\,\pi$, $a = -8, b = 15$; 2.22. $A = -6\,\pi$, $B = \frac{13}{2}\pi$, $a = -6, b = -8$;
2.23. $A = 7/2\,\pi$, $B = 3\,\pi$, $a = 8, b = -15$; 2.24. $A = 7/4\,\pi$, $B = 5/4\,\pi$, $a = -3, b = 4$;

2.25. $A=-\frac{1}{4}\pi,\ B=\frac{9}{4}\pi,\ a=-15, b=-8;$ 2.26. $A=8\pi,\ B=15/2\,\pi,\ a=12, b=16;$
2.27. $A=-8\pi,\ B=\frac{17}{2}\pi,\ a=12, b=-16;$ 2.28. $A=9/2\,\pi,\ B=4\pi,\ a=15, b=-8;$
2.29. $A=-\frac{9}{2}\pi,\ B=5\pi,\ a=-8, b=-6;$ 2.30. $A=-\frac{9}{4}\pi,\ B=\frac{11}{4}\pi,\ a=15, b=-8.$

Задача 3. Изобразить на плоскости множества, задаваемые следующими соотношениями:

1) $|z_2 z - z_1| = 1;$
2) $\operatorname{Re}(z_2 z - z_1) > 1;$
3) $\operatorname{Im}(z_2 z - z_1) > \operatorname{Re} z;$
4) $|z - z_1| = |z - z_2|;$
5) $\arg(z - z_1) = \arg(z - z_2);$
6) $\arg \frac{z-z_1}{z-z_2} = \frac{\pi}{2};$
7) $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = 1;$
8) $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = 2;$
9) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2|z_1 - z_2|;$
10) $|z - z_1| - |z - z_2| = |z_1 - z_2|/2.$

3.1. $z_1 = -1 + 2i,\quad z_2 = -2i;$
3.2. $z_1 = 1 + 3i,\quad z_2 = 1 + 2i;$
3.3. $z_1 = -1 + 3i,\quad z_2 = 1 - 5i;$
3.4. $z_1 = -1 + 4i,\quad z_2 = 2 - 3i;$
3.5. $z_1 = 1 + 4i,\quad z_2 = 2 - 6i;$
3.6. $z_1 = -1 + 5i,\quad z_2 = 3 - i;$
3.7. $z_1 = -1 - 2i,\quad z_2 = 2 - 6i;$
3.8. $z_1 = -1 - 3i,\quad z_2 = 1 + 2i;$
3.9. $z_1 = -1 - 3i,\quad z_2 = 1 - 4i;$
3.10. $z_1 = 1 - 4i,\quad z_2 = -3i;$
3.11. $z_1 = 1 - 5i,\quad z_2 = -4i;$
3.12. $z_1 = -2 + 2i,\quad z_2 = 2;$
3.13. $z_1 = 2 + 3i,\quad z_2 = 3 - i;$
3.14. $z_1 = -2 + 4i,\quad z_2 = 3i;$
3.15. $z_1 = -2 + 5i,\quad z_2 = 3 - 2i;$
3.16. $z_1 = -2 + 5i,\quad z_2 = 3 - i;$
3.17. $z_1 = 2 - i,\quad z_2 = -2i;$
3.18. $z_1 = 3i,\quad z_2 = 3 - 4i;$
3.19. $z_1 = -3 + 2i,\quad z_2 = 1 - 4i;$
3.20. $z_1 = -3 + 2i,\quad z_2 = 2 + i;$
3.21. $z_1 = 3 + 3i,\quad z_2 = 1 + i;$
3.22. $z_1 = -3 + 4i,\quad z_2 = 2;$
3.23. $z_1 = 3 - 2i,\quad z_2 = 2;$
3.24. $z_1 = 3 - 3i,\quad z_2 = 3 - i;$
3.25. $z_1 = 3 - 4i,\quad z_2 = 3 - 2i;$
3.26. $z_1 = 4 + 2i,\quad z_2 = 2 - i;$
3.27. $z_1 = -4 + 2i,\quad z_2 = -3i;$
3.28. $z_1 = -4 + i,\quad z_2 = 1 - 4i;$
3.29. $z_1 = 4 - i,\quad z_2 = -3i;$
3.30. $z_1 = 5 + 5i,\quad z_2 = 1 - 5i.$

Задача 4. Составить комплексные уравнения
a) прямой, проходящей через точки z_1 и z_2 (см. задачу 3);
b) открытой полуплоскости, лежащей над этой прямой;
c) окружности, проходящей через 3 точки z_1, z_2 (см. задачу 3) и $z_3 = 0$;
d) замкнутого круга, ограниченного этой окружностью.

Задача 5. Решить уравнение в комплексных числах

$$\cos z = 2; \qquad a\cos z + b\sin z = c.$$

5.1.	$a = 12$,	$b = -16$,	$c = -25$;	5.2.	$a = -12$,	$b = 16$,	$c = 25$;
5.3.	$a = -12$,	$b = 16$,	$c = -25$;	5.4.	$a = 12$,	$b = 16$,	$c = -29$;
5.5.	$a = -12$,	$b = -16$,	$c = 29$;	5.6.	$a = 12$,	$b = 9$,	$c = 17$;
5.7.	$a = 12$,	$b = -9$,	$c = 17$;	5.8.	$a = -12$,	$b = 9$,	$c = -17$;
5.9.	$a = -12$,	$b = -9$,	$c = 25$;	5.10.	$a = -12$,	$b = -9$,	$c = -25$;
5.11.	$a = 16$,	$b = 12$,	$c = -25$;	5.12.	$a = 16$,	$b = -12$,	$c = -25$;
5.13.	$a = 16$,	$b = 12$,	$c = -29$;	5.14.	$a = 16$,	$b = -12$,	$c = 29$;
5.15.	$a = 16$,	$b = -12$,	$c = -29$;	5.16.	$a = -16$,	$b = -12$,	$c = -29$;
5.17.	$a = 3$,	$b = 4$,	$c = 13$;	5.18.	$a = 3$,	$b = 4$,	$c = -13$;
5.19.	$a = 3$,	$b = -4$,	$c = -13$;	5.20.	$a = -3$,	$b = 4$,	$c = 13$;
5.21.	$a = 6$,	$b = 8$,	$c = 26$;	5.22.	$a = 6$,	$b = -8$,	$c = 26$;
5.23.	$a = 6$,	$b = -8$,	$c = -26$;	5.24.	$a = -6$,	$b = -8$,	$c = 26$;
5.25.	$a = 8$,	$b = -6$,	$c = 26$;	5.26.	$a = 8$,	$b = -6$,	$c = -26$;
5.27.	$a = -8$,	$b = 6$,	$c = 26$;	5.28.	$a = -8$,	$b = 6$,	$c = -26$;
5.29.	$a = -9$,	$b = 12$,	$c = 17$;	5.30.	$a = 9$,	$b = -12$,	$c = 25$.

Задача 6. Найти все числа $z_k = x_k + i\,y_k$ такие, что

$$|z_k| = 1, \qquad \left|\frac{z_k - A}{b\,z_k - B}\right| = 1,$$

6.1.	$A = 1$,	$B = -2$,	$b = 2$;	6.2.	$A = -1$,	$B = 9$,	$b = 9$;
6.3.	$A = -11$,	$B = -22$,	$b = -32$;	6.4.	$A = 11$,	$B = -31$,	$b = 29$;
6.5.	$A = -12$,	$B = -33$,	$b = 34$;	6.6.	$A = -13$,	$B = 13$,	$b = 1$;
6.7.	$A = -13$,	$B = 23$,	$b = 19$;	6.8.	$A = -15$,	$B = -21$,	$b = -35$;
6.9.	$A = 17$,	$B = 18$,	$b = -34$;	6.10.	$A = -17$,	$B = 29$,	$b = 27$;
6.11.	$A = -19$,	$B = 23$,	$b = -13$;	6.12.	$A = 20$,	$B = 8$,	$b = -23$;
6.13.	$A = -21$,	$B = -18$,	$b = 8$;	6.14.	$A = 21$,	$B = 27$,	$b = -7$;
6.15.	$A = -21$,	$B = -28$,	$b = -48$;	6.16.	$A = -22$,	$B = -31$,	$b = -18$;
6.17.	$A = -24$,	$B = -25$,	$b = 20$;	6.18.	$A = -27$,	$B = 19$,	$b = -33$;
6.19.	$A = 27$,	$B = -21$,	$b = -17$;	6.20.	$A = 29$,	$B = 17$,	$b = 43$;
6.21.	$A = 32$,	$B = -29$,	$b = -28$;	6.22.	$A = -33$,	$B = 35$,	$b = 5$;
6.23.	$A = -34$,	$B = -17$,	$b = -18$;	6.24.	$A = -34$,	$B = 17$,	$b = 22$;
6.25.	$A = -34$,	$B = 34$,	$b = 33$;	6.26.	$A = 38$,	$B = -11$,	$b = 32$;
6.27.	$A = 41$,	$B = 19$,	$b = -41$;	6.28.	$A = 43$,	$B = -41$,	$b = 37$;
6.29.	$A = -44$,	$B = 1$,	$b = 44$;	6.30.	$A = 44$,	$B = 27$,	$b = -30$.

Задача 7. Решить уравнение

$$\left|\frac{e^{\overline{z}}}{Ae^{z} - Be^{x}}\right| = S, \qquad z = x + i\,y.$$

7.1.	$A=-3$,	$B=3$,	$S=1$;	7.2.	$A=-4$,	$B=-4$,	$S=1$;
7.3.	$A=-1$,	$B=-1$,	$S=2$;	7.4.	$A=-1$,	$B=-1$,	$S=1$;
7.5.	$A=-1$,	$B=1$,	$S=2$;	7.6.	$A=1$,	$B=1$,	$S=1$;
7.7.	$A=2$,	$B=-2$,	$S=2$;	7.8.	$A=-1$,	$B=1$,	$S=4$;
7.9.	$A=-4$,	$B=4$,	$S=1$;	7.10.	$A=-3$,	$B=3$,	$S=1$;
7.11.	$A=-2$,	$B=2$,	$S=1$;	7.12.	$A=-1$,	$B=-1$,	$S=1$;
7.13.	$A=1$,	$B=-1$,	$S=3$;	7.14.	$A=3$,	$B=-3$,	$S=1$;
7.15.	$A=-2$,	$B=-2$,	$S=1$;	7.16.	$A=-2$,	$B=2$,	$S=2$;
7.17.	$A=-2$,	$B=-2$,	$S=2$;	7.18.	$A=2$,	$B=-2$,	$S=1$;
7.19.	$A=1$,	$B=-1$,	$S=1$;	7.20.	$A=3$,	$B=3$,	$S=1$;
7.21.	$A=1$,	$B=-1$,	$S=1$;	7.22.	$A=-4$,	$B=4$,	$S=1$;
7.23.	$A=-2$,	$B=-2$,	$S=1$;	7.24.	$A=3$,	$B=-3$,	$S=1$;
7.25.	$A=1$,	$B=-1$,	$S=3$;	7.26.	$A=-3$,	$B=3$,	$S=1$;
7.27.	$A=-1$,	$B=-1$,	$S=2$;	7.28.	$A=2$,	$B=2$,	$S=2$;
7.29.	$A=-1$,	$B=-1$,	$S=3$;	7.30.	$A=1$,	$B=-1$,	$S=3$.

Задача 8. Разные задачи

8.1. Доказать, что $\frac{\mathrm{Im tg}(x+iy)}{\mathrm{Re tg}(x+iy)} = \frac{\mathrm{sh} y \ \mathrm{ch} y}{\sin x \ \cos x}$.

8.2. Решить уравнение $\sin(x + i\ln y) = \sin x$.

8.3. Решить уравнение $\cos z = 10i$.

8.4. Решить алгебраическое уравнение $(1-i)(i-z)^5 = (1+i)(i+z)^5$ и сделать проверку.

8.5. Найти корни системы уравнений $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} = 1/3 \\ z_1 z_2 z_3 = 3/2. \end{cases}$

8.6. Пусть $z^4 + w^4 = 0$. Доказать, что для двух значений z имеем $\mid z - w/\sqrt{2} \mid = \mid w/\sqrt{2} \mid$.

8.7. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – корни уравнения $z^4 = -1$, занумерованные в порядке возрастания аргумента в промежутке $(0, 2\pi]$. Вычислить $(z_1 - z_2)^4 + (z_2 - z_3)^4 + (z_3 - z_4)^4$.

8.8. Пусть числа z_1, z_2, z_3 удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} = 0. \end{cases}$ Доказать, что z_j $(j = 1, 2, 3)$ являются кубическими корнями из некоторого числа v.

8.9. Решить неравенство $\operatorname{Re}\sin z > \operatorname{Im}\cos z$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

8.10. Решить уравнение $\left|e^{z^2}\right| = 1$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

8.11. Решить неравенство $\operatorname{Im}\sin z > 0$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

8.12. Решить уравнение $\left|e^{\frac{1}{z}}\right| = \frac{1}{2}$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

8.13. Решить неравенство $\operatorname{Re}\cos(x+iy) > \cos x$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

8.14. Решить уравнение $\left|e^{e^z}\right| = 1$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

8.15. Пусть $z_1/z_2 = z_2/z_3 = z_3/z_4$, $z_1 = -z_4$ и числа z_k попарно различны. Доказать, что $z_2 = z_4\, e^{\pm 4\pi/3}$.

8.16. Доказать, что $|\sin(x+iy)| \geq |\sin x|$.

8.17. Найти корни системы $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1^{-1} + z_2^{-1} + z_3^{-1} = 1/2 \\ z_1 z_2 z_3 = 2. \end{cases}$

8.18. Доказать, что $\operatorname{Re}(\cos(x+iy)\cos(x-iy)) = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x$.

8.19. Пусть z_1, z_2, z_3 – корни уравнения $z^3 = 1$. Вычислить значение выражения $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2$.

8.20. Доказать, что $\operatorname{Re}(\cos^2(3\pi/4 - i)) = 1/2$.

8.21. Решить уравнение $\overline{\cos z} = \cos z$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

8.22. Решить уравнение $\overline{\sin z} = \sin z$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

8.23. Решить неравенство $|\operatorname{Im}\ \operatorname{tg}\ z| > |\operatorname{Re}\ \operatorname{tg}\ z|$.

8.24. Равносильны ли уравнения $|\operatorname{tg}\ z| = 0$ и $|\operatorname{ch}\ y| = |\cos\ x|$?

8.25. Показать, что $17\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + i\ln 2\right) = 8 + 15i$.

8.26. Решить неравенство $\operatorname{Re}\ \operatorname{tg}\ z > 0$.

8.27. Доказать, что $\overline{\sin(x+iy)}\sin x - \cos(x+iy)\cos x = -\cos 2x\ \operatorname{ch} y$.

8.28. Решить неравенство $\operatorname{Re}\cos z > \operatorname{Re}\sin z$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

8.29. Доказать неравенство $|\sin z\cos x - \cos z\sin x| \geq \sin y$ при $z = x + iy$.

8.30. Решить неравенство $\left|e^{\sin z}\right| > 1$; изобразить множество решений на комплексной плоскости.

§ 1.2. Функциональные ряды общего вида

Говорят, что последовательность комплексных чисел $z_k = x_k + iy_k$ имеет пределом число $a = \alpha + i\beta$ (или сходится к числу a), если $\lim_{n\to\infty} \mid z_k - a \mid = 0$. Существование предела записывается в виде $a = \lim_{n\to\infty} z_k$ и равносильно тому, что $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_k$ и $\beta = \lim_{n\to\infty} y_k$. Если в полярных координатах $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $a = \rho e^{i\theta} \neq 0$, то существование предела $a = \lim_{n\to\infty} z_k$ равносильно тому, что $\rho = \lim_{k\to\infty} r_k$ и $\theta = \lim_{k\to\infty} \varphi_k$ (с точностью до $2\pi k$).

Говорят, что числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$ сходится, если последовательность его частичных сумм $z_k = \sum_{n=1}^{k} \zeta_n$ имеет предел $a = \alpha + i\beta$. Таким образом, исследование на сходимость всегда можно свести к случаю действительных последовательностей и рядов. Однако на практике это обычно не облегчает исследования и оперируют непосредственно с комплексными величинами.

При решении задач этого раздела полезно иметь в виду следующие факты, известные из теории числовых рядов:

а) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится при $|z| < 1$ к сумме $(1-z)^{-1}$ и расходится при $|z| \geq 1$;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Задача 9. Исследовать на сходимость следующие числовые ряды. Подстановки взять из задачи № 3, суммирование ведется по тем номерам, при которых знаменатель не обращается в нуль.

1) $\sum_k \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^k$;
2) $\sum_k \frac{(-1)^{(k+1)k/2}}{z_1 + k\, z_2}$;
3) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{k\, z_1}$;
4) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \sin(\pi\, k z_2)$;
5) $\sum_k \arg^k \left(\frac{z_1}{z_2}\right)$;
6) $\sum_{k=1}^{\infty} \arg(k - z_1)$;
7) $\sum_{k=1}^{\infty} \arg^2(k - z_1)$;
8) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} \arg^k z_2$.

Задача 10. Найти область сходимости функционального ряда. Подстановки взять из задачи № 3

1) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{z\cdot k\, z_1}$;
2) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{k\cdot z^2\, z_1}$;
3) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\sqrt{k}\cdot z_1 \sin(z+\bar{z})}$
4) $\sum_{k=1}^{\infty} (z \cos z_1)^k$;
5) $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Im}(z\, \cos z_1))^k$;
6) $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Re}(z\, z_2\, \cos z_1))^k$

Задача 11. Подобрать (какие-нибудь) числовые последовательности $z_k = x_k + i\, y_k$, удовлетворяющие указанным свойствам. Применяютя сокращения: сх. – сходится, расх. – расходится, & – знак конъюнкции (и).

11.1.	$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\sin z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} e^{i \cos z_k}$ сх.
11.2.	$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k^k + \bar{z}_k^k)$ сх.	&	$z_k \to \infty$ при $k \to \infty$.
11.3.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.	&	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{x_k}$ сх.

11.4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \sin x_k$ сх.

11.5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin 2z_k}$ расх.

11.6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\cos z_k|}$ расх.

11.7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(iz_k)}$ сх.

11.8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ расх.

11.9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch} z_k}$ сх.

11.10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch} z_k}$ расх.

11.11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty}(\arg z_k - \pi)$ сх.

11.12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos 2z_k}$ расх.

11.13. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos z_k e^{-z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх.

11.14. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\sin z_k}$ расх. & $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\cos z_k}$ сх.

11.15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{x_k}$ сх.

11.16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \sin x_k$ сх.

11.17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \sin x_k$ сх.

11.18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\sin z_k|}$ расх.

11.19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch} z_k}$ сх.

11.20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ расх.

11.21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{sh} z_k}$ сх.

11.22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{z_k}$ сх.

11.23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2}{z_k}$ сх.

11.24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos 4z_k}$ расх.

11.25. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin z_k e^{-z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin z_k}$ сх.

11.26. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\sin z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\sin \bar{z}_k}$ расх.

11.27. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\cos \bar{z}_k}$ расх.

11.28. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\cos z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \cos x_k$ сх.

11.29. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{iz_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k^2}{x_k}$ сх.

11.30. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\sin 2z_k}$ сх. & $\sum_{k=1}^{\infty} \cos y_k$ сх.

Пример. Подобрать числовую последовательность $z_k = x_k + iy_k$, для которой ряды $\sum_{k=1}^{\infty} e^{i\sin z_k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \cos x_k$ сходятся.

Решение. Задача сводится к тому, чтобы подобрать вещественные x_k и y_k так, чтобы общие члены указанных рядов достаточно быстро стремились к нулю.

Сходимость второго ряда будет обеспечена, если положить $x_k = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k^2}$. Действительно, в этом случае

$$\cos x_k = \sin \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k^2} \quad (k \to \infty).$$

Так как

$$|e^{i\sin z_k}| = e^{Re(i\sin z_k)} = e^{-\mathrm{Im}\sin z_k} = e^{-\cos x_k \mathrm{sh} y_k},$$

то для сходимости первого ряда достаточно, чтобы произведение $\cos x_k \mathrm{sh} y_k$ стремилось к $+\infty$ со скоростью порядка k, то есть $\mathrm{sh} y_k \to +\infty$ как k^3. Поскольку в этом случае $\mathrm{sh} y_k = (e^{y_k} - e^{-y_k})/2$, то можно положить $y_k = \ln k^3 = 3\ln k$. Тогда при $k \to \infty$

$$|e^{i\sin z_k}| = \exp\left(-\sin\frac{1}{k^2}\ \frac{k^3 - k^{-3}}{2}\right) = \exp\left((-k^{-2} + O(k^{-6}))\frac{k^3 - k^{-3}}{2}\right) =$$

$$= e^{-\frac{k}{2} + O(k^{-3})} \sim (1/\sqrt{e})^k,$$

а ряд с таким общим членом сходится.

Ответ. Указанные ряды будут сходиться, если положить $z_k = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k^2} + 3i\ln k$.

§ 1.3. Дифференцирование комплекснозначной функции по вещественным параметрам

Если считать комплекснозначную функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ($z = x + iy$) функцией двух независимых вещественных переменных x, y, то операция частного дифференцирования выполняется покомпонентно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Если $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ — функция от действительного параметра t, то, положив $F(t) = f(z(t))$, $U(t) = u(x(t), y(t))$, $V(t) = v(x(t), y(t))$, получим

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dU}{dt} + i\frac{dV}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} + i\left(\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}\right)$$

Аналогично вычисляются производные более высоких поряков. Производные $(F(t))'$, $(F(t))''$ имеют простой физический смысл, они равны соответственно векторам скорости и ускорения точки $F(t)$.

Пример. Пусть $f(z) = e^{\bar{z}}$. Вычислим частные производные по x, y. Имеем $f(z) = e^{x-iy} = e^x(\cos y - i\sin y)$, поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(\cos y - i\sin y) = f(z), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x(\sin y + i\cos y) = -if(z)$$

Пример. Пусть $F(t) = e^{5it}$. Вычислим производную по вещественному параметру t. Имеем $F(t) = \cos 5t + i\sin 5t = U(t) + iV(t)$, поэтому

$$\left(e^{5it}\right)' = \frac{dF}{dt} = \frac{dU}{dt} + i\frac{dV}{dt} = -5\sin 5t + 5i\cos 5t = 5ie^{5it}, \quad F'(t) = 5iF(t).$$

Несложно проверить, что правила параметрического дифференцирования для суммы, произведения, отношения функций те же, что и для действительных функций. Вообще, все указанные правила дифференцирования ничем не отличаются от обычных правил дифференцирования векторных функций по действительным параметрам, и i в них выполняет лишь роль разделительного символа. Другое дело — дифференцирование по всей комплексной переменной $z = x + iy$. Об этом будем подробно говорить в главе II.

Задача 12. Дано параметрическое уравнение движения точки на комплексной плоскости в виде (значения a, b взять из задачи 6)

$$z = \cos(at)\, e^{bt\, i}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Найти

1) векторы скорости $v(t) = z'(t)$ и ускорения $a(t) = v'(t)$ точки;
2) абсолютное значение $|v(t)|$ скорости и ускорения $|a(t)|$ при $t = 0$;
3) моменты t, при которых $v(t) \perp a(t)$.

Задача 13. Даны функции $f(z)$ $(z = x + i\,y)$ в виде

$$z\overline{z} + ax + b\,iy, \qquad e^{a\,\overline{z}}, \qquad \frac{1}{az - b\overline{z}}.$$

Вычислить

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

§ 1.4. Криволинейные интегралы от комплекснозначной функции

Криволинейный интеграл второго рода $I = \int_\Gamma f(z)\,dz$ от функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, вдоль кусочно гладкой ориентированной кривой Γ определяется стандартно как предел интегральных сумм $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$, где z_k – точки разбиения кривой Γ, взятые в порядке обхода, причем z_0 и z_n совпадают с началом и концом кривой Γ соответственно, а ζ_k – проивольные точки на дугах $[z_{k-1}, z_k]$ этой кривой. На практике можно использовать формулу

$$I = \int_\Gamma udx - vdy \ + i\int_\Gamma udy + vdx,$$

т.е. вычисление интеграла от ФКП сводится к вычислению четырех криволинейных интегралов от действительных функций u и v. Если $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ – параметрическое уравнение кривой Γ, причем параметр t в соответствии с ориентацией изменяется от значения t_0 к значению t_1, то из последней формулы находим

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)]dt = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt,$$

где $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ вычисляется в точках гладкости кривой Γ, а в угловых точках доопределяется произвольными конечными значениями.

В случае графического задания $y = y(x)$ кривой Γ можно ввести параметр t, положив $x = t$, $y = y(t)$.

Пример. Пусть

$$f(z) = \frac{-i + z + \bar{z}}{(-8 + z + 3\bar{z})^2(z + \bar{z} + 2i)},$$

где $\gamma = \{z = x + iy;\ y = \ln x,\ 1 \le x \le 2\}$.

Полагая $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $dz = dx + idy$, получаем

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{-i + 2x}{(-8 + 4x - 2iy)^2(2x + 2i)}(dx + idy) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(2x - i)(1 + i/x)dx}{(4x - 2i\ln x - 8)^2(x + i)} = \frac{1}{8}\int_1^2 \frac{(2 - i/x)dx}{(2x - i\ln x - 4)^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\int_1^2 \frac{d(2x - i\ln x - 4)}{(2x - i\ln x - 4)^2} = -\frac{1}{8(2x - i\ln x - 4)}\bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{i\ln 2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\left(\frac{i}{\ln 2} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16} - \frac{i}{8\ln 2}.$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл второго рода от функции $f(z) = e^{-\overline{z}}\, z$ по кривой $\gamma = \{z :\ z = 2\,t + i\},\quad t \in [0, 2]$.

Решение. Имеем $z = 2\,t + i$, тогда $\overline{z} = 2\,t - i,\quad z'(t) = 2$. Получаем

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt = \int_0^2 e^{-2\,t+i}\,(2\,t + i)\,2dt.$$

Используя интегрирование по частям, вычислим

$$I = 2\ \ (2\,t + i)\,(-\frac{1}{2}e^{-2\,t+i})\bigg|_0^2 - \frac{2}{2}\frac{1}{2}e^{-2\,t+i}\bigg|_0^2 =$$

$$= -(4 + i)e^{-4+i} + ie^i - e^{-4+i} + e^i = e^i\, i((5\,i + 1)e^{-4} + 1 - i).$$

Пример. Вычислить вещественную часть контурного интеграл от функции $f(z) = 1/(z + 7\,\overline{z})$ по кривой $\gamma = \{z :\ z = \cos t + i\,\sin t\},\quad t \in [0, \pi/2]$.

Решение. Имеем $\overline{z} = \cos t - i\,\sin t,\quad z'(t) = -\sin t + i\,\cos t$. Тогда

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt = \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin t + i\,\cos t}{\cos t + i\,\sin t + 7\,\cos t - 7\,i\,\sin t}dt.$$

Найдем вещественную часть подынтегральной функции

$$f(z(t)) = \frac{-\sin t + i\,\cos t}{8\,\cos t - 6\,i\,\sin t} = \frac{(-\sin t + i\,\cos t)(8\,\cos t + 6\,i\,\sin t)}{(8\,\cos t - 6\,i\,\sin t)(8\,\cos t + 6\,i\,\sin t)} =$$

$$= \frac{-14\sin t\cos t}{64\,\cos^2 t + 36\,\sin^2 t} + i\frac{8\cos^2 t - 6\sin^2 t}{64\,\cos^2 t + 36\,\sin^2 t}.$$

Тогда вещественная часть интеграла I есть

$$\text{Re I} = -14\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\cos t}{64\,\cos^2 t + 36\,\sin^2 t}dt = -14\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t\,d(\sin t)}{64\,(1-\sin^2 t) + 36\,\sin^2 t} =$$

$$= -7\int_0^{\pi/2}\frac{d(\sin^2 t)}{64 - 28\,\sin^2 t} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{d(64 - 28\,\sin^2 t)}{64 - 28\,\sin^2 t} = \frac{1}{4}ln|64 - 28\,\sin^2 t|\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$\frac{1}{4}(\ln 36 - \ln 64) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}.$$

Задача 14. Вычислить $\int_\gamma f\,dz$ вдоль кривой $\gamma:\ \ y = y(x)$ от точки с абсциссой α до точки с абсциссой β. В первом столбце приводимой ниже таблицы записана функция $f(z)$.

14.1. $\frac{2+iz+i\bar z}{(1+i\bar z)^2(z+\bar z+2\,i)}$;	$y = \ln x$,	$\alpha = 1$,	$\beta = 2$.
14.2. $\frac{z-\bar z+8}{(4+5\,iz+3\,i\bar z)^2(2+z-\bar z)}$;	$y = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$,	$\alpha = 0$,	$\beta = 1$.
14.3. $\frac{8\,i+z^2-2\,z\bar z+\bar z^2-4}{(2+3\,z+\bar z)^2(-4-4\,i+iz^2-2\,iz\bar z+i\bar z^2)}$;	$y = \operatorname{tg} x$,	$\alpha = 0$,	$\beta = \frac{\pi}{4}$.
14.4. $\frac{-4+z^2-2\,z\bar z+\bar z^2}{(4\,i+z-\bar z)^2(-4-4\,i+iz^2-2\,iz\bar z+i\bar z^2)}$;	$y = \operatorname{tg} x$,	$\alpha = 0$,	$\beta = \frac{\pi}{4}$.
14.5. $\frac{i+z+\bar z}{(8\,i+3\,z+\bar z)^2(z+\bar z+2\,i)}$;	$y = \ln x$,	$\alpha = 1$,	$\beta = 2$.
14.6. $\frac{-4+z^2-2\,z\bar z+\bar z^2}{(4+z-\bar z)^2(-4-4\,i+iz^2-2\,iz\bar z+i\bar z^2)}$;	$y = \operatorname{tg} x$,	$\alpha = 0$,	$\beta = \frac{\pi}{4}$.
14.7. $\frac{z-\bar z-2}{(1+2\,\bar z)^2(2+z-\bar z)}$;	$y = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$,	$\alpha = 0$,	$\beta = 1$.
14.8. $\frac{-2\,i+z+\bar z}{(-1+\bar z)^2(z+\bar z+2\,i)}$;	$y = \ln x$,	$\alpha = 2$,	$\beta = 4$.
14.9. $\frac{z-\bar z+4}{(4+3\,iz+i\bar z)^2(2+z-\bar z)}$;	$y = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$,	$\alpha = 0$,	$\beta = 1$.
14.10. $\frac{2\,z+2\,\bar z-i}{(3\,iz-i\bar z-2)^2(1+iz+i\bar z)}$;	$y = x^2$,	$\alpha = 0$,	$\beta = 1$.
14.11. $\frac{2\,z-2\,\bar z+1}{(4+5\,iz-3\,i\bar z)^2(2+z-\bar z)}$;	$y = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$,	$\alpha = 0$,	$\beta = 1$.
14.12. $\frac{2\,z+2\,\bar z-i}{(3\,z-\bar z-2)^2(1+iz+i\bar z)}$;	$y = x^2$,	$\alpha = 0$,	$\beta = 1$.
14.13. $\frac{3\,i+z+\bar z}{(8\,i+5\,z-\bar z)^2(z+\bar z+2\,i)}$;	$y = \ln x$,	$\alpha = 1$,	$\beta = 2$.
14.14. $\frac{z-\bar z-2}{(-4-4\,i+iz^2-2\,iz\bar z+i\bar z^2)(2+z-\bar z)}$;	$y = \operatorname{tg} x$,	$\alpha = 0$,	$\beta = \frac{\pi}{4}$.

14.15. $\frac{z-\bar{z}-2}{(1+\bar{z})^2(2+z-\bar{z})}$; $y=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

14.16. $\frac{1+iz+i\bar{z}}{(2+iz+3\,i\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

14.17. $\frac{1+z+\bar{z}}{(-2+z-\bar{z}+2\,iz+2\,i\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

14.18. $\frac{z+\bar{z}-2}{(2\,z+2\,\bar{z}-1+iz-i\bar{z})^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

14.19. $\frac{z+\bar{z}-2\,i}{(3\,iz+i\bar{z}-1)^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

14.20. $\frac{-1+z+\bar{z}}{(2-z+\bar{z}+2\,iz+2\,i\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

14.21. $\frac{z-\bar{z}-4}{(2+z+3\,\bar{z})^2(2+z-\bar{z})}$; $y=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

14.22. $\frac{z+\bar{z}-i}{(2\,z-1)^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

14.23. $\frac{i}{(2+z-\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

14.24. $\frac{1}{(4\,i+z-\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

14.25. $\frac{1}{(8\,i+z-\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

14.26. $\frac{z+\bar{z}+i}{(i\bar{z}+1)^2(1+iz+i\bar{z})}$; $y=x^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

14.27. $\frac{-4\,i+z^2-2\,z\bar{z}+\bar{z}^2-4}{(1+i\bar{z})^2(-4-4\,i+iz^2-2\,iz\bar{z}+i\bar{z}^2)}$; $y=\operatorname{tg} x$, $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{4}$.

14.28. $\frac{i}{(-1+2\,iz)^2}$; $y=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, $\alpha=0$, $\beta=1$.

14.29. $\frac{-1+z+\bar{z}}{(-4-z+\bar{z}+2\,iz+2\,i\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=1$, $\beta=2$.

14.30. $\frac{-i+z+\bar{z}}{(-4+z+3\,\bar{z})^2(z+\bar{z}+2\,i)}$; $y=\ln x$, $\alpha=2$, $\beta=3$.

Задача 15. Вычислить криволинейный интеграл второго рода от функции

$$f(z)=e^{S\,\bar{z}}(1+i\,b\,z)$$

по кривой

$$\gamma=\{z:\ z=t+i\,(1-N\,t)\},\qquad t\in[0,\alpha].$$

15.1. $N=0,\ S=-i,\ b=2,\ \alpha=1$;
15.2. $N=0,\ S=-i,\ b=2,\ \alpha=1$;
15.3. $N=0,\ S=-i,\ b=2,\ \alpha=2$;
15.4. $N=0,\ S=-i,\ b=2,\ \alpha=2$;
15.5. $N=0,\ S=-i,\ b=2,\ \alpha=2$;
15.6. $N=0,\ S=-i,\ b=2,\ \alpha=3$;
15.7. $N=0,\ S=-i,\ b=2,\ \alpha=3$;
15.8. $N=1,\ S=-1,\ b=3,\ \alpha=1$;
15.9. $N=1,\ S=-1,\ b=3,\ \alpha=1$;
15.10. $N=1,\ S=-1,\ b=3,\ \alpha=2$;
15.11. $N=1,\ S=-1,\ b=3,\ \alpha=2$;
15.12. $N=1,\ S=-1,\ b=3,\ \alpha=2$;
15.13. $N=1,\ S=-1,\ b=3,\ \alpha=3$;
15.14. $N=1,\ S=-1,\ b=3,\ \alpha=3$;
15.15. $N=1,\ S=-1,\ b=3,\ \alpha=3$;
15.16. $N=2,\ S=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i,\ b=4,\ \alpha=1$;
15.17. $N=2,\ S=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i,\ b=4,\ \alpha=1$;
15.18. $N=2,\ S=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i,\ b=4,\ \alpha=1$;
15.19. $N=2,\ S=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i,\ b=4,\ \alpha=2$;
15.20. $N=2,\ S=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i,\ b=4,\ \alpha=2$;

15.21. $N=2,\ S=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i,\ b=4,\ \alpha=3;$ 15.22. $N=2,\ S=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i,\ b=4,\ \alpha=3;$
15.23. $N=2,\ S=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\,i,\ b=4,\ \alpha=3;$ 15.24. $N=3,\ S=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i,\ b=5,\ \alpha=1;$
15.25. $N=3,\ S=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i,\ b=5,\ \alpha=1;$ 15.26. $N=3,\ S=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i,\ b=5,\ \alpha=1;$
15.27. $N=3,\ S=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i,\ b=5,\ \alpha=2;$ 15.28. $N=3,\ S=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i,\ b=5,\ \alpha=2;$
15.29. $N=3,\ S=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i,\ b=5,\ \alpha=3;$ 15.30. $N=3,\ S=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i,\ b=5,\ \alpha=3.$

Задача 16. Вычислить вещественную часть контурного интеграл от функции f по кривой γ:

$$f(z)=\frac{1}{a\,z+b\,\overline{z}},\qquad \gamma:=\{z:\ z=\cos t+i\,N\sin t\},\quad t\in[0,\pi/2]$$

16.1. $N=1,\ a=-7,\ b=1;$
16.2. $N=-1,\ a=1,\ b=3;$
16.3. $N=2,\ a=2,\ b=1;$
16.4. $N=2,\ a=4,\ b=1;$
16.5. $N=6,\ a=-3,\ b=-2;$
16.6. $N=2,\ a=-1,\ b=-4;$
16.7. $N=-1,\ a=1,\ b=-5;$
16.8. $N=-1,\ a=3,\ b=-2;$
16.9. $N=1,\ a=7,\ b=-1;$
16.10. $N=-3,\ a=3,\ b=2;$
16.11. $N=-3,\ a=3,\ b=1;$
16.12. $N=1,\ a=-2,\ b=-1;$
16.13. $N=-1,\ a=1,\ b=-5;$
16.14. $N=-3,\ a=-3,\ b=-5;$
16.15. $N=-5,\ a=-1,\ b=-2;$
16.16. $N=5,\ a=-2,\ b=-1;$
16.17. $N=2,\ a=5,\ b=1;$
16.18. $N=-1,\ a=1,\ b=-5;$
16.19. $N=-3,\ a=-1,\ b=-3;$
16.20. $N=-1,\ a=-2,\ b=1;$
16.21. $N=-4,\ a=1,\ b=2;$
16.22. $N=-1,\ a=3,\ b=1;$
16.23. $N=1,\ a=1,\ b=5;$
16.24. $N=1,\ a=-2,\ b=1;$
16.25. $N=1,\ a=5,\ b=1;$
16.26. $N=-6,\ a=2,\ b=3;$
16.27. $N=-2,\ a=-1,\ b=-4;$
16.28. $N=2,\ a=-1,\ b=-5;$
16.29. $N=-1,\ a=-4,\ b=-1;$
16.30. $N=-1,\ a=-1,\ b=5.$

ГЛАВА 2. Аналитические функции

§ 2.1. Производная по комплексной переменной, условия Коши-Римана

Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Говорят, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 в комплексном смысле (моногенна в точке z_0), если существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{dz\to 0} \frac{f(z_0 + dz) - f(z_0)}{dz}, \qquad dz = z - z_0.$$

Этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z_0. Подчеркнем, что предел должен существовать независимо от способа (траектории) приближения точки z к z_0. Поэтому комплексная производная существует далеко не для всякой функции, даже при условии ее гладкости относительно переменных x, y. Для моногенности таких функций необходимо и достаточно выполнение *условий Коши-Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{1}$$

где все частные производные вычислены в точке (x_0, y_0). Из моногенности f в точке z_0 следует соотношение

$$f(z_0 + dz) - f(z_0) = f'(z_0) \cdot dz + \varepsilon(dz) \cdot dz,$$

где величина $\varepsilon(dz) \to 0$ при $dz \to 0$. Пренебрегая малой величиной $\varepsilon(dz) \cdot dz$, запишем

$$f(dz + z_0) - f(z_0) \approx f'(z_0)dz.$$

Последнее выражение называется комплексным дифференциалом функции f в точке z_0 и обозначается через $df(z_0)$.

Из существования комплексного дифференциала в точке z_0 следует, что если $f'(z_0) \neq 0$, то при отображении $w = f(z)$ все малые векторы dz, выходящие из z_0, поворачиваются на угол $\arg f'(z_0)$ и растягиваются в $|f'(z_0)|$ раз (с точностью до бесконечно малых порядка более высокого, чем величина dz). Это явление называется *конформностью* в точке z_0. Итак, малый вектор $dz = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ при конформном отображении $w = f(z)$ переходит в некоторый малый вектор $f(z_0 + dz) - f(z_0) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ где

$$R = r\,|f'(z_0)|, \qquad \theta = \mathrm{Arg}\,(\mathrm{f}(\mathrm{z}_0 + \mathrm{dz}) - \mathrm{f}(\mathrm{z}_0)) = \mathrm{Arg}\,\mathrm{dz} + \mathrm{Arg}\,\mathrm{f}'(\mathrm{z}_0).$$

Это означает, что отображение $w = f(z)$ вблизи данной точки z_0 совершает лишь простейшие деформации области, которые сводятся к следующему:

1) растяжение всех векторов dz, выходящих из точки z_0, в $|\,f'(z_0)\,|$ раз;

2) поворот всех векторов dz на один и тот же угол равный $\arg f'(z_0)$ или, что то же самое, сохранение углов между кривыми, проходящими через точку z_0 (консерватизм углов).

Функция $f = u+iv$ называется аналитической в области G, если она моногенна во всех точках $z \in G$. Отметим, что при условии непрерывности частных производных u_x, v_x, u_y, v_y в области G аналитичность функции f в G равносильна выполнению условий Коши-Римана всюду в G. Для вычисления производных аналитических функций можно пользоваться формулами

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Сумма, разность, произведение двух аналитических в G функций также являются аналитическими функциями. То же относится и к отношению, если знаменатель отличен от нуля в G. Таблица производных элементарных аналитических функций (некоторые указаны в § 1.1), а также правила дифференцирования аналитических функций те же, что и в действительном анализе. Например,

$$(e^z)' = e^z, \qquad (\cos iz)' = -i\sin iz, \qquad (\sin^2 z^3)' = 2\sin z^3 \cos z^3 \cdot 3z^2 = 3z^2 \sin 2z^3.$$

Из аналитичности функции f в G следует, что u, v являются гармоническими функциями, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Гармонические функции u, v, удовлетворяющие условию Коши-Римана (1), называются гармонически сопряженными функциями (образуют гармоническую пару). Они являются действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции $f = u + iv$. По известной действительной части u с помощью (1) однозначно (с точностью до постоянного слагаемого) восстанавливается сопряженная мнимая часть v, а значит, и вся функция f. Аналогично восстанавливается f и по своей мнимой части.

Пример. Пусть задана вещественная часть $u = x - 3y + 2xy$ аналитической функции $f(z)$. Требуется восстановить эту функцию.

Решение. Сначала убеждаемся, что u гармоническая функция (иначе задача не имеет решения). Далее, по первому условию Коши-Римана имеем $v_y = u_x = 1 + 2y$. Проинтегрируем это равенство по y:

$$v(x,y) = \int (1+y)\,dy = y + y^2 + C_1(x),$$

где $C_1(x)$ зависит только от x. Второе равенство Коши-Римана: $v_x = -u_y = 3 - 2x$ Проинтегрируем его по x:

$$v(x,y) = \int (3-2x)\,dx = 3x - x^2 + C_2(y),$$

где $C_2(y)$ зависит только от y. Приравнивая найденные выражения для $v(x,y)$, находим $C_1(x) = 3x - x^2 + C$, так что

$$v = 3x + y + y^2 - x^2 + C, \qquad f = x - 3y + 2xy + i(3x + y + y^2 - x^2 + C)$$

Подставляя сюда $x = (z + \overline{z})/2$, $y = (z - \overline{z})/(2i)$ и приводя подобные в полученном выражении, окончательно находим

$$f(z) = z + 3iz + z^2 + Ci = (1 + 3i)z + z^2 + Ci.$$

ЗАДАЧИ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Задача 16. Задана мнимая часть v аналитической функции. Требуется найти гармоническую пару u и саму аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ (выразить через $z = x + i\,y$). Параметры взять из задачи 5.

1) $v = 2\,xyb + (x^2 - y^2)\,a + cy + x + dy;$
2) $v = 3\,ax^2y - ay^3 + bx;$
3) $v = \mathrm{e}^{b\,x}\,(x\cos(b\,y) + \sin(b\,y)\,(a - y))\,;$
4) $v = \mathrm{e}^{x^2 - y^2 + a}\sin(2\,xy)\,.$

Задача 17. Заданы вещественная и мнимая части u, v комплекснозначной функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Требуется найти точки $z_k = x_k + iy_k$, в кототорых эта функция дифференцируема и вычислить производную в этих точках.

17.1. $u = \mathrm{e}^{-x-y}\left(x - \frac{17}{2}\,x^2 + 7\,xy - \frac{3}{2}\,y^2\right)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-x-y}\left(y + \frac{17}{4}\,x^2 - 7/2\,xy + 3/4\,y^2\right)$

17.2. $u = \mathrm{e}^{-4\,x+2\,y}\,(x - 2\,x^2 - xy + 5/4\,y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-4\,x+2\,y}\,(y - 2\,x^2 - xy + 5/4\,y^2)$

17.3 $u = \mathrm{e}^{-2\,x+y}\left(x - \frac{13}{2}\,x^2 - 7\,xy - 9/2\,y^2\right)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-2\,x+y}\left(y + \frac{13}{4}\,x^2 + 7/2\,xy + 9/4\,y^2\right)$

17.4. $u = \mathrm{e}^{-x+3\,y}\,(x + 5/3\,x^2 - 6\,xy - 2\,y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-x+3\,y}\,(y + 5/3\,x^2 - 6\,xy - 2\,y^2)$

17.5. $u = \mathrm{e}^{-x+y}\left(x - \frac{7}{2}\,x^2 + 7\,xy - 5/2\,y^2\right)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-x+y}\,(y + 7/2\,x^2 - 7\,xy + 5/2\,y^2)$

17.6. $u = \mathrm{e}^{5\,x-7\,y}\,(x - x^2 - 5\,xy + 15\,y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{5\,x-7\,y}\,(y - x^2 - 5\,xy + 15\,y^2)$

17.7. $u = \mathrm{e}^{x-3\,y}\,(x - 1/4\,x^2 - 4\,xy + 14\,y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{x-3\,y}\,(y - 1/4\,x^2 - 4\,xy + 14\,y^2)$

17.8. $u = \mathrm{e}^{4\,x+3\,y}\left(x + \frac{1}{2}\,x^2 + 5\,xy + \frac{19}{2}\,y^2\right)$, $\quad v = \mathrm{e}^{4\,x+3\,y}\left(y - \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{5}{2}\,xy - \frac{19}{4}\,y^2\right)$

17.9. $u = \mathrm{e}^{x}\,(x + 7\,x^2 + 6\,xy + y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{x}\,(y + 7/2\,x^2 + 3\,xy + 1/2\,y^2)$

17.10. $u = \mathrm{e}^{-5\,x-3\,y}\,(x + x^2 + 3\,xy + y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-5\,x-3\,y}\,(y - x^2 - 3\,xy - y^2)$

17.11. $u = \mathrm{e}^{-x-y}\left(x - \frac{5}{3}\,x^2 + 8\,xy - 14\,y^2\right)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-x-y}\,(y - 5/3\,x^2 + 8\,xy - 14\,y^2)$

17.12. $u = \mathrm{e}^{-x+y}\,(x - 9/4\,x^2 - 6\,xy - 8\,y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-x+y}\,(y + 9/4\,x^2 + 6\,xy + 8\,y^2)$

17.13. $u = \mathrm{e}^{3\,x-y}\,(x - 2\,x^2 - 6\,xy - 13/3\,y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{3\,x-y}\,(y - 2\,x^2 - 6\,xy - 13/3\,y^2)$

17.14. $u = \mathrm{e}^{-2\,x-y}\left(x - \frac{1}{2}\,x^2 - 5\,xy + \frac{3}{2}\,y^2\right)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-2\,x-y}\left(y - \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{5}{2}\,xy + \frac{3}{4}\,y^2\right)$

17.15. $u = \mathrm{e}^{x+3\,y}\,(x - 3/4\,x^2 + 2\,xy + 12\,y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{x+3\,y}\,(y + 3/4\,x^2 - 2\,xy - 12\,y^2)$

17.16. $u = \mathrm{e}^{-x+y}\,(x + 3/4\,x^2 - 4\,xy + 4\,y^2)$, $\quad v = \mathrm{e}^{-x+y}\,(y + 9/4\,x^2 - 12\,xy + 12\,y^2)$

17.17. $u = \mathrm{e}^{-2\,x-5\,y}\left(x - \frac{11}{4}\,x^2 + 8\,xy - \frac{9}{2}\,y^2\right)$ $\quad v = \mathrm{e}^{-2\,x-5\,y}\left(y + \frac{11}{2}\,x^2 - 16\,xy + 9\,y^2\right)$

17.18. $u = \mathrm{e}^{2x+4y}\left(x + \frac{5}{4}x^2 - 3xy + \frac{3}{2}y^2\right)$, $v = \mathrm{e}^{2x+4y}\left(y - \frac{15}{4}x^2 + 9xy - 9/2\,y^2\right)$
17.19. $u = \mathrm{e}^{x+y}\left(x - 5/4\,x^2 - 6xy - 6y^2\right)$, $v = \mathrm{e}^{x+y}\left(y + \frac{15}{4}x^2 + 18xy + 18y^2\right)$
17.20. $u = \mathrm{e}^{-4x+2y}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{13}{4}y^2\right)$ $v = \mathrm{e}^{-4x+2y}\left(y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{13}{4}y^2\right)$
17.21. $u = \mathrm{e}^{-2x-3y}\left(x - \frac{5}{4}x^2 + 3xy - \frac{5}{4}y^2\right)$ $v = \mathrm{e}^{-2x-3y}\left(y + 5/2\,x^2 - 6xy + 5/2\,y^2\right)$
17.22. $u = \mathrm{e}^{-2x+4y}\left(x - x^2 - 2xy - 1/2\,y^2\right)$, $v = \mathrm{e}^{-2x+4y}\left(y - 3x^2 - 6xy - 3/2\,y^2\right)$
17.23. $u = \mathrm{e}^{x}\left(x - 4/3\,x^2 + 6xy - 5/2\,y^2\right)$, $v = \mathrm{e}^{x}\left(y - 2/3\,x^2 + 3xy - 5/4\,y^2\right)$
17.24. $u = \mathrm{e}^{-x-3y}\left(x + x^2 + 4xy + 4y^2\right)$, $v = \mathrm{e}^{-x-3y}\left(y - 2x^2 - 8xy - 8y^2\right)$
17.25. $u = \mathrm{e}^{x+3y}\left(x + \frac{5}{4}x^2 - 5xy + \frac{5}{4}y^2\right)$, $v = \mathrm{e}^{x+3y}\left(y - 5/4\,x^2 + 5xy - 5/4\,y^2\right)$
17.26. $u = \mathrm{e}^{-x-3y}\left(x - 3x^2 - 4xy\right)$, $v = \mathrm{e}^{-x-3y}\left(y + 6x^2 + 8xy\right)$
17.27. $u = \mathrm{e}^{-3x+7y}\left(x - 4/3\,x^2 - 4xy - y^2\right)$, $v = \mathrm{e}^{-3x+7y}\left(y - 4x^2 - 12xy - 3y^2\right)$
17.28. $u = \mathrm{e}^{-3x-y}\left(x + \frac{1}{4}x^2 + 2xy + \frac{4}{3}y^2\right)$, $v = \mathrm{e}^{-3x-y}\left(y - \frac{1}{4}x^2 - 2xy - \frac{4}{3}y^2\right)$
17.29. $u = \mathrm{e}^{-x}\left(x - 9x^2 - 8xy - 3/2\,y^2\right)$, $v = \mathrm{e}^{-x}\left(y - 9/2\,x^2 - 4xy - 3/4\,y^2\right)$
17.30. $u = \mathrm{e}^{3x-2y}\left(x - \frac{7}{4}x^2 - 6xy - \frac{13}{3}y^2\right)$ $v = \mathrm{e}^{3x-2y}\left(y - \frac{7}{4}x^2 - 6xy - \frac{13}{3}y^2\right)$

Задача 18. В задачах 18.1–18-30 заданы две функции $u(x,y)$ (первый столбец) и $v(x,y)$ (второй столбец). Требуется:

1). Найти параметры a, b, при которых u и v образуют гармоническую пару, т.е. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является аналитической функцией.

2). Записать f как функцию от переменной $z = x + iy$. Вычислить прозводную и дифференциал функции f.

3). Нарисовать образы треугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1/10$ при отображениях функцией $w = f(z)$ и дифференциалом $w - f(0) = f'(0)z$. На этом примере объяснить геометрический смысл конформности (см. следующую задачу) и значения производной $f'(0)$.

4). Показать, что при указанном отображении величины углов при вершинах треугольника сохраняются, если в этих вершинах отлична от нуля производная f'.

18.1. $2ax^2 - 2ay^2 - 3bx^2 + 3by^2 + bx - ax$; $10xyb - by + 2y - ay$.
18.2. $2ax^2 - 2ay^2 - 7bx^2 + 7by^2 + bx - ax$; $18xyb - by + 4y - ay$.
18.3. $2ax^2 - 2ay^2 + 5bx^2 - 5by^2 + bx - ax$; $-6xyb - by - 2y - ay$.
18.4. $2ax^2 - 2ay^2 + 9bx^2 - 9by^2 + bx - ax$; $-14xyb - by - 4y - ay$.
18.5. $2ax^2 - 2ay^2 - 11bx^2 + 11by^2 + bx - ax$; $26xyb - by + 6y - ay$.
18.6. $2ax^2 - 2ay^2 + 13bx^2 - 13by^2 + bx - ax$; $-4xyb - by - 6y - ay$.
18.7. $2ax^2 - 2ay^2 - 4bx^2 + 4by^2 + bx - 2ax$; $-4xyb - by + 2y - 2ay$.
18.8. $2ax^2 - 2ay^2 - 2bx^2 + 2by^2 + bx + 2x - 2ax$; $-8xyb - by - 2ay$.
18.9. $2ax^2 - 2ay^2 - 5bx^2 + 5by^2 + bx - x - 2ax$; $-2xyb - by + 3y - 2ay$.
18.10. $2ax^2 - 2ay^2 - bx^2 + by^2 + bx + 3x - 2ax$; $-10xyb - by - y - 2ay$.
18.11. $2ax^2 - 2ay^2 - 6bx^2 + 6by^2 + bx - 2x - 2ax$; $-by + 4y - 2ay - 8bxy$.
18.12. $2ax^2 - 2ay^2 + bx + 4x - 2ax$; $-12xyb - by - 2y - 2ay$.
18.13. $2ax^2 - 2ay^2 - 7bx^2 + 7by^2 + bx - 3x - 2ax$; $2xyb - by + 5y - 2ay$.

18.14. $2ax^2 - 2ay^2 + bx^2 - by^2 + bx + 5x - 2ax$; $\quad -14xyb - by - 3y - 2ay$.
18.15. $2ax^2 - 2ay^2 - \frac{7}{2}bx^2 + \frac{7}{2}by^2 + bx + \frac{1}{2}x - 2ax$; $\quad -5xyb - by + \frac{3}{2}y - 2ay$.
18.16. $2ax^2 - 2ay^2 - \frac{10}{3}bx^2 + \frac{10}{3}by^2 + bx + \frac{2}{3}x - 2ax$; $\quad -\frac{16}{3}xyb - by + \frac{4}{3}y - 2ay$.
18.17. $ax + 7xb + 14x^2 - 14y^2 - 9x$; $\quad -ay - 7yb - 4xyb - 9y$.
18.18. $ax - xb - 2x^2 + 2y^2 - x$; $\quad -ay + yb - 4xyb - y$.
18.19. $ax + xb + 2x^2 - 2y^2 - 3x$; $\quad -ay - yb - 4xyb - 3y$.
18.20. $ax - 2xb - 4x^2 + 4y^2$; $\quad -ay + 2yb - 4xyb$.
18.21. $ax + 2xb + 4x^2 - 4y^2 - 4x$; $\quad -ay - 2yb - 4xyb - 4y$.
18.22. $ax - 3xb - 6x^2 + 6y^2 + x$; $\quad -ay + 3yb - 4xyb + y$.
18.23. $ax + 3xb + 6x^2 - 6y^2 - 5x$; $\quad -ay - 3yb - 4xyb - 5y$.
18.24. $ax - 4xb - 8x^2 + 8y^2 + 2x$; $\quad -ay + 4yb - 4xyb + 2y$.
18.25. $ax + 4xb + 8x^2 - 8y^2 - 6x$; $\quad -ay - 4yb - 4xyb - 6y$.
18.26. $ax - 5xb - 10x^2 + 10y^2 + 3x$; $\quad -ay + 5yb - 4xyb + 3y$.
18.27. $ax + 5xb + 10x^2 - 10y^2 - 7x$; $\quad -ay - 5yb - 4xyb - 7y$.
18.28. $ax - 6xb - 12x^2 + 12y^2 + 4x$; $\quad -ay + 6yb - 4xyb + 4y$.
18.29. $ax + 6xb + 12x^2 - 12y^2 - 8x$; $\quad -ay - 6yb - 4xyb - 8y$.
18.30. $ax - 7xb - 14x^2 + 14y^2 + 5x$; $\quad -ay + 7yb - 4xyb + 5y$.

§ 2.2. Степенные ряды

Аналитическая в некоторой ε-окрестности $U = \{z: \ |z - z_0| < \varepsilon\}$ точки z_0 функция $f(z)$ разлагается в U в степенной ряд (Тейлора) вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{2}$$

Поэтому степенные ряды являются одним из важнейших аппаратов исследования аналитических функций. Радиус сходимости R ряда (2) можно определить по формуле Коши или по формуле Даламбера: т.е. соответственно

$$1/R = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad R = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$$

(если последний предел существует). Например, удобно применять формулу Даламбера, если в выражении для общего члена степенного ряда присутствуют факториалы. При этом часто полезной оказывается формула Стирлинга

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\Theta_n},$$

где $\Theta_n \to 0$ при $n \to \infty$ (точнее, $|\Theta_n| \le \frac{1}{12n}$). Представляется три случая.
Если $R = 0$, то ряд (2) сходится только при $z = z_0$;
если $R = \infty$, то ряд (2) абсолютно сходится при всех $z \in \mathbf{C}$;

если $0 < R < \infty$, то он сходится абсолютно при $|z-z_0| < R$ и расходится при $|z-z_0| > R$.

В точках z, лежащих на границе круга сходимости (т.е. при $|z-z_0| = R$), ряд (2) может как сходиться, так и расходиться. Это предмет дополнительных исследований (см. пример ниже).

Аналитическая в некоторой проколотой ε-окрестности $U = \{z: \ 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$ точки z_0 функция $f(z)$ разлагается в U в ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

При этом коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\delta}(z-z_0)^{-n-1}f(z)dz,$$

где $0 < \delta < \varepsilon$ и интеграл не зависит от выбора δ. Для оценки погрешностей в окрестности точки z_0 при аппроксимации функции f ее рядом Лорана можно применять неравенство Коши $|a_n| \le \delta^{-n}M(\delta)$, $n \in \mathbf{Z}$, где $M(\delta) = \max_{|z-z_0|=\delta}|f(z)|$, $0 < \delta < \varepsilon$. Тогда, если требуется при некотором целом N оценить остаток

$$R_N(z) = f(z) - \sum\nolimits_{n=-\infty}^{N} a_n(z-z_0)^n = \sum\nolimits_{n=N+1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

на некоторой окружности $|z-z_0| = r$ с $0 < r < \delta$, то находим

$$|R_N(z)| \le M(\delta)\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{r}{\delta}\right)^n = M(\delta)\left(\frac{r}{\delta}\right)^{N+1}\frac{\delta}{\delta-r}.$$

Пример. Исследовать на сходимость степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)^k(2k)!!2^k}{(2k)!}(z-1)^{2k}.$$

Решение. Сделав замену $\zeta = (z-1)^2$, перейдем к ряду стандартного вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$, где

$$a_k = \frac{(2k+1)^k(2k)!!2^k}{(2k)!} > 0, \qquad \zeta = (z-1)^2.$$

Его радиус сходимости R_1 найдем по формуле Даламбера

$$R_1 = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2k+1)^k(2k)!!2^k}{(2k)!}\frac{(2k+2)!}{(2k+3)^{k+1}(2k+2)!!2^{k+1}}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(2k+1)^k(2k+1)(2k+2)}{(2k+3)^{k+1}(2k+2)2} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k+1}{2k+3}\right)^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{2}{2k+3}\right)^{k+1} = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} e^{-\frac{2(k+1)}{2k+3}} = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

Следовательно, $R = \sqrt{R_1} = 1/\sqrt{2e}$, ряд сходится при $|z-1| < 1/\sqrt{2e}$ и расходится при $|z-1| > 1/\sqrt{2e}$. Пусть теперь $|z-1| = 1/\sqrt{2e}$. Тогда

$$\left|\frac{(2k+1)^k(2k)!!2^k}{(2k)!}(z-1)^{2k}\right| = \frac{(2k+1)^k 2^k k! 2^k}{(2k)!(2e)^k} = \frac{(2k+1)^k 2^k k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}e^{\Theta_k}}{(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{4\pi k}e^{\Theta_{2k}}e^k} =$$

$$= \frac{(2k+1)^k e^{\Theta_k}}{(2k)^k\sqrt{2}e^{\Theta_{2k}}} = \left(1+\frac{1}{2k}\right)^k \frac{e^{\Theta_k}}{\sqrt{2}e^{\Theta_{2k}}} \to \sqrt{e/2}.$$

Так как общий член не стремится к 0, то ряд расходится.

Ответ. Ряд сходится при $|z-1| < 1/\sqrt{2e}$.

Пример. Пусть задана функция

$$f(z) = \frac{e^z+1}{z\ \sin 2z}.$$

Точка $z=0$ является полюсом второго порядка. Подставим в выражение $f(z)$ разложения числителя и знаменателя по степеням z и приравняем это к разложению в ряд Лорана функции $f(z)$:

$$\frac{2+z+z^2/2!+z^3/3!+...}{2z^2-2^3z^4/3!+2^5z^6/5!-...} = \frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+2\frac{c_1}{z}+... \tag{3}$$

Приводим к общему знаменателю и находим следующие уравнения для равенства коэффициентов слева и справа в (3) при одинаковых степенях z:

$z^0:\quad 2-2\,c_{-2}=0,$

$z^1:\quad 1-2\,c_{-1}=0,$

$z^2:\quad 1/2-2\,c_0+4/3\,c_{-2}=0,$

$z^3:\quad 4/3\,c_{-1}-2\,c_1+1/6=0,$

$z^4:\quad -2\,c_2+1/24+4/3\,c_0-4/15\,c_{-2}=0,$

$z^5:\quad 4/3\,c_1-4/15\,c_{-1}+1/120-2\,c_3=0,$

$z^6:\quad 4/3\,c_2+1/720+8/315\,c_{-2}-4/15\,c_0-2\,c_4=0.$

Решаем последовательно и получаем: $c_{-2}=1$, $c_{-1}=1/2$, $c_0=11/12$, $c_1=5/12$, $c_2=359/720$, $c_3=31/144$, $c_4=6761/30240$. Отсюда

$$f(z) = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{11}{12}+\frac{5}{12}z+\frac{359}{720}z^2+\frac{31}{144}z^3+\frac{6761}{30240}z^4+\Theta(z), \tag{4}$$

где $\Theta(z)=O(z^5)$. Поскольку функция $f(z)$ аналитична в кольце $0<|z|<\pi/2$ (почему?), то и ряд (3) сходится в этом кольце. Оценим модуль остатка $\Theta(z)$ по указанной формуле. В данном случае $N+1=5$. Пусть $z=\delta e^{it}$ и $\delta \le 1$. Тогда

$$|e^z+1| \le |e^z|+1 = e^{\Re z}+1 \le e^{\delta}+1 \le 1+e;$$

$$|\sin 2z| \geq 2\delta - \delta^3(2^3/3! + 2^5/5! + 2^7/7! + ...) > 2\delta - 9\delta^3/5 \geq \delta/5.$$

Итак, при $\delta = 1$ имеем $M(\delta) \leq (1{+}e)/(\delta^2/5)) = 5(1{+}e)$. Отсюда при всех $|z| = 1/5$ получаем $|\Theta(z)| \leq 5(1{+}e)\cdot 5^{-5}(1/(1{-}1/5)) < 0.007$. Наконец, проведя вычисления суммы (4) с $z = (1+i)\sqrt{2}/10$, получим $f(z) = 2.74... - 26.68...i$.

Задача 19. Найти радиус R сходимости данного степенного ряда. В случае конечных R исследовать ряд на сходимость на границе круга. Применяется обозначение: $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$, $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$.

19.1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k (2k)!!}{(k!)^2}(z-i)^k$.

19.2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!\cos(ik)}{(2k+1)!!}(2z+i)^k$.

19.3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!k^k}{(4k)!!}(z+i)^k$.

19.4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!\mathrm{sh}k}{k^k\, k!}(2z+i)^k$.

19.5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!(2k+1)!!}{(2k)!}(2z-i)^k$.

19.6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch}(k\ln k)}{(k+1)!\cos(ik)}(z+2i)^{2k}$.

19.7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{ch}k\,\sin(ik\ln k)}{5^k\, k!}(z-2i)^{2k}$.

19.8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\mathrm{ch}k}{3^k(2k)!!}(z+i)^{4k}$.

19.9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!\mathrm{sh}(3k)}{k!(2k+1)!!}(z+i)^{2k}$.

19.10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(i\ln k)k!}{(2k-1)!!}(2z+i)^k$.

19.11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2k}5^k}{k!(2k+1)!!}(2z+i)^k$.

19.12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2k}3^k}{((2k)!!)^2}(2z-i)^{2k}$.

19.13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4(k+1)^k}{(2k+1)!!\mathrm{ch}k}(z-2i)^{3k}$.

19.14. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k!)^2\sin(ik)}{k^k(2k+1)!}(2z-3i)^k$.

19.15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!\cos(3ik)}{k!\sin(2ik)}(z+3i)^k$.

19.16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\mathrm{ch}(k)}{\sqrt{k}(2k+1)!!}(z+i)^{4k}$.

19.17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+3)!!\cos(ik)}{k^{k+1}}(z-2i)^{3k}$.

19.18. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k!\mathrm{sh}(k)}{(2k+2)!!}(2z-i)^{2k+1}$.

19.19. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k)!!k!}{k^k\,\mathrm{sh}(k\ln k)}(z+i)^k$.

19.20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^3(ik)(2k)!}{k^k k!}(z-2i)^{2k}$.

19.21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ik)\mathrm{ch}(2k\ln k)}{(k!)^2}(2z+i)^{k-1}$.

19.22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(k\ln k)}{3^k(2k-1)!!}(z-2i)^{2k+1}$.

19.23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k\mathrm{sh}(k\ln k)}{k!(2k)!!}(4z+i)^{2k-1}$.

19.24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+3)!!}{e^k(2k)!!}(2z+i)^{3k}$.

19.25. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k!)^2 5^k}{k(2k+1)!}(z-3i)^{k+2}$.

19.26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k k!}{k^2(2k-1)!!}(2z+i)^{4+k}$.

19.27. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k!(2k)!!}{((2k+1)!!)^2}(2z+1)^k$.

19.28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2\sin(ik)}{(2k+1)!}(z-2i)^k$.

19.29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{4^k k!}(-2z+1)^{k!}$.

19.30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4^k+1)!!}{k!}(z-2i)^{k^2+k+1}$.

Задача 20. Разложить в степенной ряд в окрестности точки $z = a$.

1) $f(z) = \frac{1}{(z+a)^2}$; 2) $f(z) = \frac{bz+c}{z+1}$; 3) $f(z) = \frac{z}{z^2-az+a^2}$;

4) $f(z) = \cos(z\,b\,\pi)$; 5) $f(z) = \cos^2(z\,b\,\pi)$; 6) $f(z) = \cos^3(z\,b\,\pi)$;

7) $f(z) = \frac{e^{cz+b}}{z-a}$; 8) $f(z) = \frac{z-a}{e^{cz+b}}$; 9) $f(z) = \frac{e^{cz+b}}{(z-a)^2}$;

По номеру k варианта параметры вычисляются по формулам

$$a = 1 + (k \bmod 3), \quad b = a - (k \bmod 4), \quad c = 2 + a + b - (k \bmod 5)$$

Задача 21.

1). В задачах 21.1-21.30 с четными номерами написать разложение функции f в ряд (Тейлора или Лорана) по степеням z в окрестности точки $z = 0$ с указанием общего члена ряда. В задачах с нечетными номерами, пользуясь рекуррентными формулами для коэффициентов, написать 7 членов разложения функции f в ряд по степеням z (привести не только ответ, но и подробные выкладки).

2). Найти область сходимости.

3). Оценить абсолютную погрешность 7-членной аппроксимации заданной функции ее степенным рядом на окружности $|z| = 1/5$ (т.е. взять в указанной выше формуле $r = 1/5$, значение δ выбрать самостоятельно, N определится из вида разложения, см. пример ниже). Вычислить с помощью разложения приближенное значение $f(\sqrt{2}(1+i)/10)$.

21.1. $f = z/(1-\cos z)$;	21.2. $f = z^{-2}\ \sin^2 2z$;
21.3. $f = 1/(z\sin z)$;	21.4. $f = z^{-3}\operatorname{sh} iz\ \sin z$;
21.5. $f = (1-e^z)/\sin z$;	21.6. $f = z^{-4}e^{-iz}\ \cos z$;
21.7. $f = (1-z)/(1-e^z)$;	21.8. $f = z^{-4}e^{-z}\ \operatorname{ch} z$;
21.9. $f = \sin z/(z^2\cos 2z)$;	21.10. $f = z^{-2}\cos iz\ \operatorname{sh} 2z$;
21.11. $f = (1-\cos z)/(1-e^{-z})$;	21.12. $f = z^{-2}\ e^{2z}\sin iz$;
21.13. $f = \sin 2z/(z+z^3)$;	21.14. $f = z^{-1}\ \cos^3 z$;
21.15. $f = (1-e^{-z})/(z\sin z)$;	21.16. $f = z^{-4}\ \sin^3 z$;
21.17. $f = (1-\cos z)/(1-e^{2z})$;	21.18. $f = z^{-2}\operatorname{sh} 2z\ \sin iz$;
21.16. $f = z/(\sin(z^2))$;	21.20. $f = z^{-1}e^{2iz}\ \cos z$;
21.21. $f = (z-\sin z)/(1-e^{2z})$;	21.22. $f = z^{-3}e^{iz}\ \operatorname{sh} z$;
21.23. $f = z/(1-\cos 2z)$;	21.24. $f = z^{-1}e^{-z}\ \operatorname{sh} 2z$;
21.25. $f = (1+z)/(\sin 2z)$;	21.26. $f = z^{-1}e^{z}\ \operatorname{sh} iz$;
21.27. $f = (e^z-1)/(\sin z)$;	21.28. $f = z^{-2}e^{-2z}\ \operatorname{ch}^z$;
21.27. $f = (z-\sin 2z)/(z\sin z)$;	21.28. $f = z^{-3}\operatorname{sh} 3z\cdot\cos z$;
21.29. $f = (z+\cos z)/(z^2+z^4)$;	21.30. $f = z^{-4}\operatorname{ch}^2 3z\ \sin iz$;

§ 2.3. Вычеты и их применение

Пусть аналитическая в проколотой ε-окрестности $U = \{z:\ 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ точки z_0 функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Если $a_n = 0$ при всех $n < 0$, то точка z_0 называется устранимой особенностью (или правильной точкой); ряд Лорана в окрестности такой точки состоит лишь из правильной части (т.е. из членов с неотрицательными номерами) и является рядом Тейлора функции f, доопределенной значением $f(z_0) = a_0$. Верна теорема: точка z_0 является правильной точкой тогда и только тогда, когда $M(\delta) < C < \infty$ при всех достаточно малых δ.

Если $a_n = 0$ при всех $n < n_0 < 0$ и $a_{n_0} \neq 0$, то точка z_0 называется полюсом порядка n_0; при этом $M(\delta) \sim \delta^{-n_0}$, т.е. $M(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$. Если главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много членов (т.е. членов с отрицательными номерами), то точка z_0 называется существенно особой. В двух последних случаях (полюс, существенно особая точка) определяется *вычет* функции f в точке z_0 по формуле: $\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$.

Пример. По определению для функции (4) $\mathrm{Res}_{\,\mathrm{z=0}} f = \mathrm{c}_{-1} = 1/2$.

На практике для вычисления вычета в полюсе z_0 порядка n_0 применяют формулу

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^n \ f(z) \right)^{(n-1)},$$

где $(n-1)$ означает порядок производной. В частном случае, когда $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где φ и ψ — аналитические в окрестности точки z_0 функции, причем ψ имеет в этой точке простой нуль, т.е.

$$\psi(z_0) = 0, \qquad \psi'(z_0) \neq 0,$$

иногда удобно применять формулу

$$\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Отметим, что для вычисления вычета в существенно особой точке удобных формул для нахождения вычетов не существует.

Важнейшую роль в ТФКП играют *теорема Коши и основная теорема о вычетах.* Сформулируем их в рамках одного предложения. *Если функция $f(z)$ аналитична внутри простой замкнутой кусочно гладкой кривой* Γ (*контура*) *и непрерывна в некоторой ее окрестности, то* (*терема Коши*)

$$\oint_{\gamma} f(z) \ dz = 0.$$

Если же внутри контура Γ *имеются изолированные неустранимые особенности* $z_1, \cdots, z_n$ *функции f, то* (*основная теорема о вычетах*)

$$\oint_{\gamma} f(z) \ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{\,\mathrm{z=z_k}} f.$$

Таким образом, теорема о вычетах является мощным инструментом для вычисления интегралов по замкнутому контуру.

Пример. Показать, что $\int_{|z|=1} f(z) \ dz = 0$ при всех значениях параметра p, для которых заданная функция f определена:

$$f(z) = \frac{9z - p - 9p \operatorname{ctg} p}{81z^2 - 18pz + 82p^2} \, e^z.$$

Находим корни знаменателя: $z_{1,2} = (p \pm p\sqrt{1-82})/9 = (\pm i + 1/9)p$. Отсюда

$$f(z) = \frac{9z - p - 9p\,\mathrm{ctg}\,p}{(9z-p+9pi)(9z-p-9pi)}\; e^z.$$

Так как $|z_1| = |z_2|$, то обе особые точки будут находиться либо вне, либо внутри контура. Поскольку

$$\mathrm{Res}_{(1/9\pm i)p} f(z) = \left.\frac{(9z - p - 9p\mathrm{ctg}\,p)e^z}{9(9z - p \pm 9pi)}\right|_{z=(1/9\pm i)p} =$$

$$= \frac{p \pm 9ip - p - 9p\mathrm{ctg}\,p}{\pm 9\cdot 18pi} e^{p/9\pm pi} = \frac{\pm i\mathrm{ctg}\,p + 1}{18} e^{p/9\pm pi} =$$

$$= \frac{1 \pm i\mathrm{ctg}\,p}{18} e^{p/9}(\cos p \pm i\sin p) = \pm i\frac{e^{p/9}}{18\sin p},$$

то сумма вычетов равна нулю, откуда и вытекает требуемый результат.

Задача 22. Найти особые точки и вычеты в них функции $f(z,a,b,...)$ в зависимости от значений параметров a, b,..

$$1)\ f(z) = \frac{e^{az}}{\sin(cz)};\quad 2)\ f(z) = \frac{e^{az}}{z\sin(cz)};\quad 3)\ f(z) = \frac{e^{az}}{z^2\sin(cz)};$$

$$4)\ f(z) = \frac{\cos(az) - 1}{\mathrm{e}^{cz} - c};\quad 5)\ f(z) = \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{icz}+1};\quad 6) f(z) = \frac{\sin(az)}{\mathrm{e}^{icz} - i};$$

$$7)\ f(z) = \frac{1+z^2}{z^2 - i\,(a+c)\,z - ac};\quad 8)\ f(z) = \frac{z^2+b^2}{z^3 - i\,(2\,a+c)\,z^2 - a\,(a+2\,c)\,z + ia^2c}.$$

$$9)\ f(z) = \frac{z+b}{z^3 - a^3};\quad 10)\ f(z) = \frac{z+bi}{(z^2+c^2)^2};\quad 11)\ f(z) = \frac{(z^2+c^2)^2}{z+bi}.$$

По номеру k варианта параметры вычисляются по формулам

$$a = 1 + (k \bmod 3),\quad b = a - (k \bmod 4),\quad c = 2 + a + b - (k \bmod 5)$$

Задача 23. В задачах 23.1-23.30 найти вычет функции $f(z,a,b,...)$ в точке $z=0$ в зависимости от значений параметров a, b,.. Кроме того, следует указать тип особенности в точке $z=0$ при различных значениях указанных параметров.

23.1. $f = \frac{\sin bz + z^2}{1 - \cos az - 1/2\,a^2z^2}$.

23.2. $f = \frac{\sin bz + z^2}{e^{az} - 1 - bz}$.

23.3. $f = \frac{1}{a\sin bz - b\sin az}$.

23.4. $f = \frac{z}{z\sin bz + b\sin az^2}$.

23.5. $f = \frac{1}{a\sin az - b\sin bz}$.

23.6. $f = \frac{a\sin z + 4\sin cz}{z\sin bz + b\sin az^2}$.

23.7. $f = \frac{\cos z}{a\sin bz - b\sin az}$.

23.8. $f = \frac{a\sin z + \sin bz}{z\sin bz + b\sin az^2}$.

23.9. $f = \frac{bz - \sin az}{(1-e^{az})\sin bz - z^2}$.

23.10. $f = \frac{b - a\cos az}{(1-e^{az})\cos bz}$.

23.11. $f = \frac{a\sin z-1}{z-b\sin(2\,z)}$.

23.12. $f = \frac{\sin z-az}{z-b\sin az}$.

23.13. $f = \frac{cz-\sin az}{(1-e^{bz})\sin bz-z^2}$.

23.14. $f = \frac{z}{1-\cos az+bz^2}$.

23.15. $f = \frac{e^{az}-\cos bz}{\sin az-z-\sin bz}$.

23.16. $f = \frac{e^{az}-e^{bz}}{\sin az-z-\sin bz}$.

23.17. $f = \frac{e^{az}-e^{bz}}{\sin az-az-z\sin bz}$.

23.18. $f = \frac{\cos az-e^{bz}}{\sin bz-bz-z\sin az}$.

23.19. $f = \frac{\cos az-b}{\sin bz-bz-z\sin az}$.

23.20. $f = \frac{\sin az-z}{z\cos bz+(a-1)z-\sin az}$.

23.21. $f = \frac{e^z-a\cos z}{az+b\sin z}$.

23.22. $f = \frac{ae^z-\cos z}{az-b\sin z}$.

23.23. $f = \frac{ae^z-b\cos z}{z\cos z-b\sin z}$.

23.24. $f = \frac{ae^z-\cos z}{z\cos z-b\sin z-z}$.

23.25. $f = \frac{a\cos(3\,z)-\cos z}{z\cos(2\,z)-b\sin z}$.

23.26. $f = \frac{a\cos z-e^z}{z\cos z-b\sin(2\,z)}$.

23.27. $f = \frac{a\cos z-be^z}{z-b\sin(2\,z)}$.

23.28. $f = \frac{a\cos z-b}{z-b\sin(2\,z)}$.

23.29. $f = \frac{\sin az-\sin bz}{1-e^z\cos bz+z}$.

23.30. $f = \frac{\cos az-b\cos z}{1-e^z\cos bz+z}$.

Контурные интегралы

Задача 24. Применяя основную теорему о вычетах, показать, что $\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 0$ при всех значениях параметра p, для которых заданная ниже функция f определена (исключая те случаи, когда полюсы функции f лежат на окружности $|z|=1$).

24.1. $\frac{3\,z-3\,p-5\,\ln 2\ \operatorname{tg} p}{z^2-2\,pz+p^2+(\ln 2)^2}\sin z$.

24.2. $\frac{4\,z-\pi-4\,p\ \operatorname{cth} p}{16\,z^2-8\,\pi\,z+\pi^2+16\,p^2}\sin z$.

24.3. $\frac{8\,z-\pi+8\sqrt{2}p\ \operatorname{cth} p+8\,p\ \operatorname{cth} p}{64\,z^2-16\,\pi\,z+\pi^2+64\,p^2}\cos z$.

24.4. $\frac{6\,z-6\,p-\pi\sqrt{3}}{36\,z^2-72\,pz+36\,p^2+\pi^2}\mathbf{e}^z$.

24.5. $\frac{8\,z-8\,p-\pi\sqrt{2}-\pi}{64\,z^2-128\,pz+64\,p^2+\pi^2}\mathbf{e}^z$.

24.6. $\frac{z-p-p\ \operatorname{ctg} p}{z^2-2\,p\,z+2\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.7. $\frac{z-2\,p-p\ \operatorname{ctg} p}{z^2-4\,p\,z+5\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.8. $\frac{3\,z-1-3\,p\ \operatorname{ctg} p}{9\,z^2-6\,z+1+9\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.8. $\frac{2\,z-1-2\,p\ \operatorname{ctg} p}{4\,z^2-4\,z+1+4\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.10. $\frac{4\,z-1-4\,p\ \operatorname{ctg} p}{16\,z^2-8\,z+1+16\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.11. $\frac{-z+1/2+p\ \operatorname{cth} p\operatorname{tg}(1/2)}{z^2-z+1/4+p^2}\sin z$.

24.12. $\frac{-z+1/3+p\ \operatorname{cth} p\operatorname{tg}(1/3)}{z^2-2/3\,z+1/9+p^2}\sin z$.

24.13. $\frac{5\,z-1-5\,p\ \operatorname{ctg} p}{25\,z^2-10\,z+1+25\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.14. $\frac{6\,z-1-6\,p\ \operatorname{ctg} p}{36\,z^2-12\,z+1+36\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.15. $\frac{7\,z-1-7\,p\ \operatorname{ctg} p}{49\,z^2-14\,z+1+49\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.16. $\frac{2\,z-p-2\,p\ \operatorname{ctg} p}{4\,z^2-4\,p\,z+5\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.17. $\frac{6\,z-\pi+6\sqrt{3}p\ \operatorname{cth} p}{36\,z^2-12\,\pi\,z+\pi^2+36\,p^2}\cos z$.

24.18. $\frac{4\,z-\pi+4\,p\ \operatorname{cth} p}{16\,z^2-8\,\pi\,z+\pi^2+16\,p^2}\cos z$.

24.19. $\frac{3\,z-p-3\,p\ \operatorname{ctg} p}{9\,z^2-6\,p\,z+10\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.20. $\frac{4\,z-p-4\,p\ \operatorname{ctg} p}{16\,z^2-8\,p\,z+17\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.21. $\frac{5\,z-p-5\,p\ \operatorname{ctg} p}{25\,z^2-10\,p\,z+26\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.22. $\frac{6\,z-p-6\,p\ \operatorname{ctg} p}{36\,z^2-12\,p\,z+37\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.23. $\frac{6\,z-\pi-2\sqrt{3}p\ \operatorname{cth} p}{36\,z^2-12\,\pi\,z+\pi^2+36\,p^2}\sin z$.

24.24. $\frac{8\,z-\pi-8\sqrt{2}p\ \operatorname{cth} p+8\,p\ \operatorname{cth} p}{64\,z^2-16\,\pi\,z+\pi^2+64\,p^2}\sin z$.

24.25. $\frac{7\,z-p-7\,p\,\mathrm{ctg}\,p}{49\,z^2-14\,p\,z+50\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.26. $\frac{8\,z-p-8\,p\,\mathrm{ctg}\,p}{64\,z^2-16\,p\,z+65\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.27. $\frac{-z+1/4+p\,\mathrm{cth}\,p\,\mathrm{tg}(1/4)}{z^2-1/2\,z+1/16+p^2}\sin z$.

24.28. $\frac{3\,z-3\,p+5\,\ln 2\,\mathrm{ctg}\,p}{z^2-2\,pz+p^2+(\ln 2)^2}\cos z$.

24.29. $\frac{8\,z-1-8\,p\,\mathrm{ctg}\,p}{64\,z^2-16\,z+1+64\,p^2}\mathbf{e}^z$.

24.30. $\frac{9\,z-p-9\,p\,\mathrm{ctg}\,p}{81\,z^2-18\,p\,z+82\,p^2}\mathbf{e}^z$.

Интегралы от тригонометрических функций

Задача 25. Вычислить определенный интеграл от заданного тригонометрического выражения $f(\cos\varphi, \sin\varphi)$ по отрезку $[0, 2\pi]$. Для этого следует применить комплексную подстановку $z = e^{i\varphi}$. Тогда

$$\cos\varphi = (z + 1/z)/2,\ \sin\varphi = -i(z - 1/z)/2,\ d\varphi = -i\ dz/z,$$

и интеграл $\int_0^{2\pi} f(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$ преобразуется к контурному интегралу $\oint_{|z|=1} R(z)dz$, где $R(z)$ – некоторая рациональная дробь.

25.1. $\frac{-\cos\varphi-\sin\varphi-1}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.2. $\frac{-\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.3. $\frac{\cos\varphi+3\,\sin\varphi-1}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.4. $\frac{-\cos\varphi-4\,\sin\varphi+2}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.5. $\frac{-\cos\varphi-4\,\sin\varphi-3}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.6. $\frac{1-\sin\varphi}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.7. $\frac{2\,\cos\varphi+2\,\sin\varphi-2}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.8. $\frac{-2\,\cos\varphi+3\,\sin\varphi+2}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.9. $\frac{-2\,\cos\varphi+3\,\sin\varphi+4}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.10. $\frac{2\,\cos\varphi+4\,\sin\varphi+1}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.11. $\frac{-2\,\cos\varphi+4\,\sin\varphi+3}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.12. $\frac{-2\,\cos\varphi-3\,\sin\varphi+3}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.13. $\frac{2\,\cos\varphi-3\,\sin\varphi-4}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.14. $\frac{2\,\cos\varphi-4\,\sin\varphi+4}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.15. $\frac{2\,\cos\varphi-4\,\sin\varphi-1}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.16. $\frac{-2\,\cos\varphi-4\,\sin\varphi-4}{3\,\cos\varphi+\sin\varphi+4}$;

25.17. $\frac{3\,\cos\varphi+4\,\sin\varphi+3}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.18. $\frac{-3\,\cos\varphi+4\,\sin\varphi+3}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.19. $\frac{3\,\cos\varphi-3\,\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi+2}$;

25.20. $\frac{3-4\,\sin\varphi}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.21. $\frac{4\,\cos\varphi-\sin\varphi+4}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.22. $\frac{4\,\cos\varphi-\sin\varphi-2}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.23. $\frac{4\,\cos\varphi+2}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.24. $\frac{-4\,\cos\varphi+4}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.25. $\frac{4\,\cos\varphi-2}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.26. $\frac{-4\,\cos\varphi-4\,\sin\varphi}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.27. $\frac{4\,\cos\varphi-4\,\sin\varphi+1}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.28. $\frac{4\,\cos\varphi-4\,\sin\varphi-2}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$;

25.29. $\frac{-4+3\,\sin\varphi}{2\,\cos\varphi+\sin\varphi+3}$;

25.30. $\frac{-2\,\cos\varphi-2\,\sin\varphi+1}{\cos\varphi+2\,\sin\varphi+3}$.

Несобственный интеграл

Задача 26. Используя теорему о вычетах, вычислить несобственный криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L \frac{2x+1}{ky^2+mx^2+n}dy$$

вдоль параболы $L: y = ax^2 + b$, $-\infty < x < \infty$. В условиях задач задаются необходимые параметры.

26.1.	$a=-7$	$b=-3$	$k=1$	$m=8$	$n=-8$
26.2.	$a=3$	$b=2$	$k=1$	$m=-2$	$n=-3$
26.3.	$a=17$	$b=1$	$k=9$	$m=-8$	$n=-8$
26.4.	$a=-2$	$b=-3$	$k=1$	$m=-7$	$n=-8$
26.5.	$a=-1$	$b=-1$	$k=4$	$m=-3$	$n=-3$
26.6.	$a=-7$	$b=-1$	$k=4$	$m=-3$	$n=-3$
26.7.	$a=6$	$b=2$	$k=4$	$m=1$	$n=-7$
26.8.	$a=4$	$b=1$	$k=9$	$m=1$	$n=-5$
26.9.	$a=2$	$b=3$	$k=1$	$m=8$	$n=7$
26.10.	$a=-6$	$b=-5$	$k=1$	$m=-8$	$n=-9$
26.11.	$a=-14$	$b=-2$	$k=1$	$m=-3$	$n=-3$
26.12.	$a=-1$	$b=-2$	$k=1$	$m=6$	$n=5$
26.26.	$a=-5$	$b=-4$	$k=1$	$m=-6$	$n=-7$
26.14.	$a=3$	$b=2$	$k=4$	$m=-3$	$n=-7$
26.15.	$a=1$	$b=5$	$k=1$	$m=7$	$n=-9$
26.16.	$a=3$	$b=2$	$k=4$	$m=-3$	$n=-7$
26.17.	$a=16$	$b=2$	$k=1$	$m=4$	$n=-3$
26.18.	$a=-2$	$b=-4$	$k=1$	$m=-3$	$n=-7$
26.19.	$a=-5$	$b=-3$	$k=1$	$m=-4$	$n=-8$
26.20.	$a=-7$	$b=-5$	$k=1$	$m=-5$	$n=-9$
26.21.	$a=-4$	$b=-4$	$k=1$	$m=9$	$n=9$
26.22.	$a=-3$	$b=-4$	$k=1$	$m=10$	$n=9$
26.23.	$a=3$	$b=0$	$k=1$	$m=10$	$n=1$
26.24.	$a=20$	$b=4$	$k=1$	$m=9$	$n=-7$
26.25.	$a=-18$	$b=-1$	$k=9$	$m=9$	$n=-8$
26.26.	$a=-5$	$b=-5$	$k=1$	$m=-9$	$n=-9$
26.27.	$a=2$	$b=2$	$k=1$	$m=5$	$n=5$
26.28.	$a=-18$	$b=-1$	$k=9$	$m=9$	$n=-8$
26.29.	$a=1$	$b=1$	$k=9$	$m=-8$	$n=-8$
26.30.	$a=2$	$b=1$	$k=1$	$m=9$	$n=8$

Пример. Вычислить интеграл

$$I \equiv \int_L \frac{2x+1}{4y^2+8x^2-7}dy$$

вдоль параболы $y = -14x^2 - 2$.

Решение. Имеем $y^2 = 196x^4 + 56x^2 + 4$, $dy = -28xdx$, а I преобразуется в несобственный интеграл от функции $F(x)$ действительной переменной x:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-56x^2 - 28x}{784x^4 + 232x^2 + 9} dx.$$

Так как подынтегральная функция $F(z)$ (рассматриваемая как функция комплексной переменной z) есть $O(|z|^{-2})$ при $z \to \infty$, то интеграл I равен величине $2\pi i$, умноженной на сумму вычетов функции F в особых точках верхней полуплоскости.

Найдем особые точки:

$$z^2 = \frac{-116 \pm \sqrt{13456 - 7056}}{784} = \frac{-116 \pm 80}{784},$$

то есть $z^2 = -9/196$ или $z^2 = -1/4$. В верхней полуплоскости находятся точки $z = 3i/14$ и $z = i/2$. Вычислим вычеты в этих точках.

$$\mathrm{Res}_{z=i/2} F = \left. \frac{-56z^2 - 28z}{(196z^2 + 9)2(2z + i)} \right|_{z=i/2} = \frac{14 - 14i}{4i(-49 + 9)} = \frac{7i - 7}{80i},$$

$$\mathrm{Res}_{z=3i/14} F = \left. \frac{-56z^2 - 28z}{(4z^2 + 1)14(14z + 3i)} \right|_{z=3i/14} = \frac{18/7 - 6i}{84i(-9/49 + 1)} = \frac{3 - 7i}{80i}.$$

Следовательно,

$$I = 2\pi i \left(\frac{7i - 7}{80i} + \frac{3 - 7i}{80i} \right) = 2\pi i \frac{-4}{80i} = -\frac{\pi}{10}.$$

ГЛАВА 3. Дополнения

§ 3.1. Теорема Руше

Теорема Руше. *Пусть область G ограничена кусочно-гладким контуром Γ и для двух аналитических в замкнутой области $\bar{G}$ функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеем $|f(z)| > |\varphi(z)|$ всюду на границе Γ. Тогда уравнения $f(z) = 0$ и $f(z) + \varphi(z) = 0$ имеют равное число корней в области G*

Задача 27. С помощью теоремы Руше показать, что в кольце $r < |z| < R$ многочлен $P(z) = az^m - bz^n + cz - d$ имеет $m - 1$ корней. Параметры a, b, c, d, m, n, R, r заданы в следующей таблице.

	a	b	c	d	m	n	R	r
27.1.	2	5	91	65	4	2	4	3
27.2.	2	3	93	89	4	2	4	3
27.3.	3	11	54	36	5	4	4	1
27.4.	2	3	71	29	5	4	3	2
27.5.	3	5	100	21	5	4	3	2
27.6.	2	7	66	43	4	3	5	2
27.7.	2	10	86	4	4	2	4	3
27.8.	2	4	92	76	4	2	4	3
27.9.	2	6	83	84	4	3	5	2
27.10.	3	12	74	3	4	3	5	2
27.11.	2	8	49	1	4	3	5	2
27.12.	2	9	87	17	4	2	4	3
27.13.	2	6	90	53	4	2	4	3
27.14.	2	7	89	41	4	2	4	3
27.15.	2	10	100	93	5	2	3	2
27.16.	3	17	102	86	4	2	4	2
27.17.	7	1	93	41	4	5	3	2
27.18.	6	1	74	17	4	5	3	2
27.19.	5	1	61	9	4	5	4	2
27.20.	5	6	48	30	3	2	4	2
27.21.	5	5	78	35	4	3	3	2
27.22.	7	6	72	62	3	2	4	2
27.23.	3	6	52	31	4	2	3	2
27.24.	5	1	93	97	4	3	3	2

27.25.	3	1	54	78	3	2	5	2
27.26.	3	7	56	58	3	2	6	2
27.27.	4	10	88	30	4	3	4	2
27.28.	4	3	67	89	3	2	5	2
27.29.	6	10	84	78	3	2	5	2
27.30.	2	1	38	38	4	2	3	2

Пример. Определить число корней многочлена $P(z) = z^4 + z^2 - 4z + 1$ в кольце $1 < |z| < 2$.

Решение. Найдем сначала количество корней в круге $|z| < 1$. Для этого представим $P(z)$ в виде суммы $f(z) + g(z)$, где $f(z) = -4z$, $g(z) = z^4 + z^2 + 1$. Тогда на границе круга имеем строгое неравенство $|g(z)| < |f(z)|$, поскольку

$$|g(z)| \le |z^4| + |z^2| + 1 = 3 < 4 = |f(z)|.$$

По теореме Руше в круге $|z| < 1$ число корней функций $P(z) = f(z) + g(z)$ и $f(z) = -4z$ одинаково. Итак, число корней многочлена $P(z)$ в круге $|z| < 1$ равно 1.

Чтобы найти количество корней P(z) в круге $|z| < 2$, положим $f_1(z) = z^4$, $g_1(z) = z^2 - 4z + 1$. Тогда при $|z| = 2$ имеем

$$|f_1(z)| = 16, \quad |g_1(z)| \le 4 + 8 + 1 = 13,$$

то есть $|g_1(z)| < |f_1(z)|$. Поскольку $f_1(z)$ имеет в круге $|z| < 2$ четыре корня (именно, корень $z = 0$ кратности 4), то и $P(z) = f_1(z) + g_1(z)$ в этом круге имеет 4 корня. А так как на границе кольца корней у $P(z)$, очевидно, нет, то число корней внутри кольца равно 4-1=3.

§ 3.2. Конформные отображения

Мы знаем, что из дифференцируемости функции f в точке z_0 следует, что $\Delta f = f(z) - f(z_0) \approx df$, где $df = f'(z_0)dz$ – комплексный дифференциал функции f в точке z_0. Отсюда при $f'(z_0) \ne 0$ следует, как отмечалось, конформность отображения f в точке z_0, состоящая в том, что отображение $w = f(z)$ вблизи данной точки z_0 совершает лишь простейшие деформации области: постоянное растяжение всех векторов dz, выходящих из точки z_0, и поворот таких векторов на один и тот же угол. Верно и обратное, т.е. из конформности отображения $w = f(z)$ следует его дифференцируемость в комплексном смысле. Функция f называется конформной в некоторой области, если она конформна во всех точках этой области.

Центральным результатом в теории конформных отображений является теорема Римана (1851 г.).

Теорема. *Для любых двух односвязных областей D и G, граница каждой из которых состоит более чем из одной точки, существует взаимно однозначное (однолистное) конформное отображение области D на всю область G.*

В гидродинамике, аэродинамике, в теории упругости возникают задачи построения таких отображений Римана для конкретных областей. Например, в гидродинамике задача об обтекании идеальной жидкостью заданного контура Г обычно решается построением отображения верхней полуплоскости или неограниченной полосы на внешность контура Г.

Задача 28. Построить конформное однолистное отображение вида $w = \sqrt{z^2 - h^2}$ верхней полуплоскости на вехнюю полуплоскость с исключенным отрезком $[0, ih]$ $(h > 0)$ мнимой оси. Нарисовать линии тока идеальной жидкости, являюшиеся образами линий $y = \mathrm{const}$ при указанном отображении. Вещественный параметр $h = 1 + k_1 + \ldots + k_5$, где числа $(k_5, k_4, k_3, k_2, k_1)$ равны либо нулю, либо единице и находятся как цифры номера варианта, записанного в двоичной системе.

Так, в задаче 28.26 получаем $26 = (11010)_2$ и $k_5 = 1$, $k_4 = 1$, $k_3 = 0$, $k_2 = 1$, $k_1 = 0$, в задаче 28.1 получаем $1 = (00001)_2$ и $k_5 = k_4 = k_3 = k_2 = 0$, $k_1 = 1$.

Задача 29. Построить конформное однолистное отображение $w = f(z)$ угловой области

$$D = D(z_0, \alpha_1, \alpha_2) = \{z : \ \alpha_1 < \arg(z - z_0) < \alpha_2\}$$

на единичный круг $G = \{w : \ |w < 1|\}$. Параметры (вершина угла и углы наклона его сторон) z_0, α_1, α_2 определяются с помощью определенных в предыдущей задаче чисел $k_1 \div k_5$ по следующим формулам

$$z_0 = (k_2 + k_3) + i(1 + 2k_1); \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{k_2 + k_4 + 6}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{k_1 + k_3 + k_5 + 2}.$$

2). Нарисовать образ лучей, делящих угол D на три равные части, при отображении $w = f(z)$. Какой из лучей, выходящих из вершины угла, переходит в диаметральный (прямолинейный) отрезок?

3). Нарисовать образ дуг окружностей радиусов 1,2,3,... с центром в точке z_0, лежащих внутри угла D (при том же отображении). Какая из дуг указанного вида переходит в диаметральный (прямолинейный) отрезок? Какая точка переходит в центр круга?

Указание. Искомое отображение получается как суперпозиция следующих отображений: $z_1 = z - z_0$; $z_2 = e^{-i\alpha_1} z_1$; $z_3 = z_2^{\pi/(\alpha_2 - \alpha_1)}$; $w = (z_2 - i)/(z_2 + i)$.

Задача 30. По заданному комплексному потенциалу $w = z + h^2/z$ обтекания окружности (указать ее радиус и центр) построить эквипотенциальные линии (т.е. $\mathrm{Re}\, w = \mathrm{const}$) и линии тока (т.е. $\mathrm{Im}\, w = \mathrm{const}$). Найти скорость течения $V = \mathrm{grad}\ (\mathrm{Re}\ w)$). Параметр h определен в задаче 28.

§3.3. Задачи повышенной сложности

31.1 Показать, что следующее выражение вещественно.

$$(z_2\,\overline{z_3} + z_1\overline{z_2} + z_3\overline{z_1} - z_2\,\overline{z_1} - z_1\,\overline{z_3} - z_3\overline{z_2})\,i/4.$$

Каков его геометрический смысл?

31.2. Решить уравнение $2x + 1 + iy = e^{i\,\mathrm{arctg}(y/x)}$.

31.3. При каких действительных значениях a и b уравнение $z^{10} - az + b = 0$ не имеет дейтвительных корней z?

31.4. Доказать, что уравнение $9\cos z - z^2 = 4\pi^2$ имеет ровно 4 решения в квадрате $|x| < 2\pi$, $|y| < 2\pi$ $(z = x + iy)$.

31.5. Доказать, что уравнение $5\cos z - z^2 = \pi^2$ имеет ровно 2 (чисто мнимых) решения в квадрате $|x| < \pi$, $|y| < \pi$ $(z = x + iy)$.

31.6. Показать, что корни алгебраического уравнения $\sum_{k=0}^{n} z^k/k! = 0$ лежат во внешности круга $|z| < n/5$.

31.7. Доказать, что уравнение $\sin\ z = z$ кроме корня $z = 0$ имеет и другие комплексные корни.

31.8. Доказать, что уравнение $\sin\ z = z$ имеет бесконечно много различных комплексных корней $z_n = x_n + iy_n$. Кроме того, для отличных от нуля корней имеем оценку $C_1 \ln x_n < |y_n| < C_2 \ln x_n$.

31.9. Доказать, что все корни уравнения $z\sin\ z = a$ вещественны, если 1) $a = 1$; 2) $a = 1.8$. Доказать, что при $a = 3$ не все корни вещественны.

31.10. Доказать, что все корни уравнения $z\,\mathrm{tg}\ z = 1$ вещественны.

31.11. Пусть $z_1^n + z_2^n + z_3^n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать, что все $|z_j| < 1$ $j = 1, 2, 3$.

31.12. Пусть $0 <\ _1 < |z_1^n + z_2^n + z_3^n| < C_2$ при всех натуральных n. Доказать, что модуль одного из чисел z_j $(j = 1, 2, 3)$ равен единице.

31.13. Существуют комплексные числа $z_1,\ z_2,\ z_3$ такие, что $z_1 = 1$, $|z_2| < 1$, $|z_3| < 1$ и $|\ \sum_{j=1}^{3} z_j^k\ | < 9/10$ при $k = 1, 2, 3$. Привести пример.

31.14. Если $|\ \sum_{j=1}^{3} z_j^k\ | \le 1$, при $k = 1, 2, 3$, то $|\ \sum_{j=1}^{3} z_j^n\ | \le (1.9)^n$, при достаточно больших $n \ge n_0$. Доказать.

31.15. Вычислить сумму ряда $f(z) = 1 + z + \dots + z^{n-1} - nz^n + z^{n+1} + \dots + z^{2n} - nz^{2n+1} + \cdots$. Убедиться, что $f(z)$ представляет собой логарифмическую производную многочлена $P(z) = z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1$.

31.16. Доказать, что ряд $\sum_{k=2}^{\infty} z^{\ln n}$ расходится при $|z| > 1/e$ (здесь $z^\alpha = r^\alpha\ e^{\alpha\varphi i}$ при $z = r\ e^{\varphi i}$ и действительных α).

31.17. Имеется многочлен вида $P(z) = z^n + az^{n-1} + \dots + bz + 1$, причем все его корни лежат в единичном круге $|z| < 1$. Доказать, что всюду на единичной окружности (т.е. при $|z| = 1$) не может выполняться неравенство $|P(z)| > 1$ и не может выполняться неравенство $|P(z)| < 1$.

31.18. Доказать, что в каждой области, ограниченной линией уровня $\gamma:\ |P(z)| = C$ многочлена $P(z)$ лежит по крайней мере один корень многочлена $P(z)$.

31.19. Доказать, что на линии уровня $\gamma:\ |f(z)| = C$ аналитической функции $f(z)$ значения $i\tau f'(z)/f(z)$ действительны всюду, где существует τ – вектор касательной к γ в точке z.

31.20. Пусть $f(z) = \sum_{k=1}^{n} z_k/(z - z_k)$, где z_k – произвольные комплексные числа, $n \in \mathbf{N}$. Показать, что на окружности $|z| = 1$ найдется точка ζ такая, что значение $f(\zeta)$ – вещественно.

31.21. Пусть $P(z) = z^2 + az + b$, a, b – комплексные параметры. Исследовать процесс итерации вида $z_{k+1} = P(z_k)$, $k = 0, 1, \cdots$. Именно, при каких начальных z_0 множество $E = \{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ 1) ограничено, 2) состоит из конечного числа различных точек, 3) состоит из двух точек.

31.22. Пусть $P(z) = z^2 - \frac{7}{2}z + 3$. Проверить, что в процессе указанной в предыдущей задаче итерации при начальном $z_0 = 0$ получается $z_3 = 0$ (т.е. P(P(P(0)))=0). Существуют ли другие многочлены второй степени, обладающие таким же свойством?

31.23. $P(z) = z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1$, $Q(z) = z^{n+1} + z^n + \cdots + z + 1$. Доказать, что логарифмическая производная $R(z) = Q'(z)/Q(z)$ интерполирует многочлен $P(z)$ в точке $z = 0$ с кратностью n, т.е. выполняются равенства $R^{(s)}(0) = P^{(s)}(0)$ при $s = 0, 1, \cdots n$.

31.24. В условиях предыдущей задачи показать, что при $0 < x < 1$ имеем $|R(x) - P(x)| \le (1 + n/2)x^{n+1}$.

31.25. Вычислить повторный интеграл

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{d\varphi}{x - e^{i\varphi}}.$$

31.26. С помощью теоремы о среднем для гармонических функций вычислить $\int_0^{2\pi} \ln(1 + 2r\cos\varphi + r^2)\, d\varphi$, где r – произвольный вещественный параметр.

31.27. Пусть на единичной окружности максимум модуля многочлена $P(z)$ достигается в точке z_0, $|z_0| = 1$. Показать, что значение $z_0 P'(z_0)/P(z_0)$ вещественно и положительно.

31.28. (*Задача В.К.Дзядыка.*) Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая функция. Показать, что площади поверхностей-графиков $z = u(z, y)$ и $z = v(z, y)$ с одинаковыми проекциями на плоскость XOY равны (всюду, где эти площади определены).

31.29. Пусть $0 \le a < 1$, $b(z) = (z - a)/(1 - z\, a)$, заданы натуральное n и вещественное α. Тогда при $\varphi_k := \alpha + 2\pi k/n$ верно тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mid b'(e^{i\varphi_k}) \mid = \Re[(e^{i\alpha n} + a^n)/(e^{i\alpha n} - a^n)].$$

31.30. Если $\mid \sum_{j=1}^{m} z_j^k \mid \le 1$, при $k = 1, \cdots, m$, то $\mid \sum_{j=1}^{m} z_j^n \mid \le 2^n$, при достаточно больших $n \ge n_0(m)$. Доказать.

Если $\mid \sum_{j=1}^{m} z_j^k \mid \leq 1/2$, при $k = 1, \cdots, m$, то $\mid \sum_{j=1}^{m} z_j^n \mid \leq m\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Доказать.

31.31. Если $P(z) = 1+z+z^2+\cdots+z^n$, то при $f(z) = \int_0^z P(t)\,dt$ функция $F(z) = e^{f(z)}$ имеет следующее разложение в ряд Тейлора $F(z) = 1+z+z^2+\cdots+z^{n+1}+\cdots$. Доказать.

31.32. Пусть множество Γ задается уравнением $\bar{z} = R(z)$, где R – рациональная функция, т.е. отношение многочленов. Доказать, что Γ есть окружность или прямая, а R – дробно-линейная функция.

Литература

1. Голузин Г.М., Геометрическая теория функций комплексного переменного. Изд. "Наука", М., 1966.

2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. "Наука", М. 1977.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. "Наука", М. 1987.

4. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. "Наука", М. 1978.

5. Евграфов М.А. Аналитические функции. "Наука", М. 1965.

6. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. "Наука", М. 1970.

7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. "Наука", М. 1971.

8. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. "Высшая школа", М. 1988.

Работа поддержана грантами РФФИ 16-31-00252 мол_а, 18-01-00744 А, грантом Мин.обр. и науки России 1.574.2016/1.4