

Министерство образования российской федерации

Владимирский государственный университет

Е.Н.Талицкий

ЗАЩИТА ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ ОТ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

Рекомендовано УМО Минобразования РФ по образования в области автоматике, электроники, микроэлектроники и радиотехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений по специальностям «Проектирование и технология РЭС», «Проектирования и технология ЭВС»

Владимир 2001

УДК 62.758.2
Т16

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор заведующий кафедрой ИУ-4 Московского государственного технического университета
В.А.Шахнов

Доктор технических наук, профессор Московского авиационного института
А.В.Назаров

Печатается по решению редакционно-издательского совета Владимирского государственного университета.

Талицкий Е.Н. Защита электронных средств от механических воздействий. Теоретические основы: Учеб. пособие / Владим. гос. ун-т. Владимир, 2001. с.

Рассматриваются теоретические основы защиты электронных средств подвижных объектов от вибраций и ударов. Особое внимание уделено теории полимерных демпферов, применяемых для подавления резонансных колебаний электронных средств аэрокосмического комплекса.

Предназначено для студентов специальностей 200800 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств», 220500 «Проектирование и технология электронно-вычислительных средств». Может быть полезно студентам приборостроительных специальностей, а также аспирантам и инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами вибро-, ударозащиты изделий.

Табл. Ил. Библиогр.: 35 назв.

ISBN 5-89368-232-7

© Владимирский государственный университет, 2001
©Талицкий Е.Н., 2001

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- z – перемещение (расстояние);
- S – амплитуда виброперемещения;
- $w(x, y)$ - деформация изгиба в точке с координатами x и y ;
- u, v – продольная деформация вдоль осей x и y соответственно;
- a, b, H - длина, ширина и толщина платы (пластины) соответственно;
- h – относительная толщина платы (слоя);
- W – энергия колебаний;
- Π – потенциальная энергия;
- T – кинетическая энергия;
- ΔW – энергия, рассеиваемая за цикл колебаний;
- σ - нормальное напряжение;
- τ - касательное напряжение;
- k – коэффициент жесткости;
- η - коэффициент механических потерь;
- ε - относительная продольная деформация;
- ω - угловая частота;
- f - частота, Гц;
- f_0 - собственная частота колебаний, Гц;
- ν - коэффициент Пуассона;
- m - масса;
- m_s - масса элементов;
- E - модуль продольной упругости;
- G - модуль сдвига;
- E', G' – динамический модуль продольной упругости и динамический модуль сдвига;
- A – показатель использования ВП материалов в конструкции;
- $\xi_w(x, y), \xi_{\dot{w}}(x, y)$ - показатели уменьшения резонансных амплитуд, виброперемещения и виброускорения в точке платы с координатами x и y ;
- D - цилиндрическая жесткость;
- k_x, k_y – волновые числа в направлении осей x и y ;

K_i – абсолютное значение продольной жесткости i -го слоя;
 k_i – относительное значение продольной жесткости i -го слоя;
 ρ_x, ρ_y – радиусы кривизны платы в направлении осей x и y ;
 K_s – абсолютное значение продольной жесткости i -го слоя;
 φ_x – угол изгиба пластины в направлении оси x ;
 ρ – радиус кривизны, плотность;
индекс "н" – начальное значение;
индекс "к" – конечное значение.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АРК – амплитуда резонансных колебаний;
АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;
ВП – вибропоглощающий;
ДВ – демпфирующая вставка;
ДГК – динамический гаситель колебаний;
ДМУ – динамический модуль упругости;
ДР – демпфирующее ребро;
ДС – демпфирующий слой;
КМП - коэффициент механических потерь;
КП – коэффициент передачи;
ПД – полимерный демпфер;
ППУ - пенополиуретан;
РЭС - радиоэлектронные средства;
СФК - собственная форма колебаний;
СЧК - собственная частота колебаний;
ЭРЭ – электрорадиоэлементы;
ЭС - электронное средство.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Электронные средства (ЭС) широко применяются в системах аэрокосмического комплекса и на других подвижных объектах. Работают такие ЭС в условиях воздействия вибраций, ударов и других интенсивных механических воздействий (МВ). Надежность и стабильность работы ЭС при этом без применения специальных средств защиты могут значительно снижаться.

Это вызывает необходимость овладения инженерами–конструкторами ЭС знаниями в области защиты приборов и аппаратов от механических воздействий. В связи с этим в учебные планы специальностей радио-конструкторского профиля включается дисциплина «Механические воздействия и защита ЭС», подготовлены и изданы учебник и учебные пособия [1, 6, 21 и др.]. Тем не менее создание теоретической базы указанной дисциплины далеко от завершения.

В настоящем учебном пособии автором делается попытка изложить основы теории защиты ЭС от механических воздействий с учетом специфики задач, решаемых инженерами–конструкторами ЭС. При этом учитывалось, что они являются специалистами широкого профиля и в не меньшей степени должны владеть знаниями в области компоновки ячеек, блоков; уметь обеспечивать тепловые режимы ЭС, решать вопросы электромагнитной совместимости и множество других вопросов. Поэтому противоречие, заключающееся с одной стороны, в сложности рассматриваемых вопросов, а с другой – в ограниченности времени, отводимом учебным планом на их изучение, можно преодолеть за счет различных требований на разных уровнях подготовки (бакалавров, инженеров, магистров). Основное внимание в учебном пособии уделяется аналитическим методам, так как только они способствуют развитию теории и глубокому пониманию принципов защиты ЭС от механических воздействий, но необходимо учитывать, что в некоторых сложных случаях при помощи аналитических методов могут быть получены в лучшем случае только качественные результаты. Поэтому в пособии уделено внимание и численным методам расчета (таким как метод конечных разностей), значительно расширяющих круг решаемых задач. Метод конечных элементов рассмотрен на уровне

основных понятий, так как конструкторы ЭС не имеют достаточной подготовки в области механики сплошной среды для глубокого освещения этого метода, но они могут использовать имеющиеся мощные системы конечно-элементных расчетов для ПЭВМ, типа NASTRAN, ANSYS, COSMOS и др.

В основу положены учебные пособия, подготовленные в разные годы автором лично или в соавторстве [1, 16 – 18], а также новые результаты, полученные в научно–исследовательских работах, проводимых во Владимирском государственном университете под руководством автора.

Автор благодарен аспирантам Д.Г. Акаемову и А.А. Варакину, оказавшим большую помощь при оформлении рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Практически все современные автоматизированные технические системы и объекты имеют электронные устройства, осуществляющие функции управления, регулирования, координации и связи. При этом круг задач, решаемых с помощью электронной аппаратуры, с каждым годом расширяется, а их сложность возрастает. Это привело к тому, что оснащенность электронной аппаратурой таких объектов, как корабли, самолеты, спутники, чрезвычайно возросла, и отказ в работе хотя бы одного из устройств может привести к отказу всего объекта. Поэтому требования к надежности электронных и электронно-вычислительных средств постоянно растут.

Надежность и стабильность работы ЭС значительно ухудшается при механических воздействиях - вибрациях, ударах, линейных перегрузках, акустических шумах. Источниками этих воздействий могут быть различные двигатели, в том числе и реактивные, дорожная тряска, быстро вращающиеся разбалансированные массы, взрывы и многие другие. Механические воздействия на ЭС приводят к изменению активного сопротивления в полупроводниках; магнитной проницаемости; ферритов нарушению электрических контактов; наводкам и изменению параметров электрических, магнитных и электромагнитных полей; деформации электрорадиоэлементов (ЭРЭ) и другим отрицательным явлениям [1]. Они приводят в одних случаях к помехам в каналах передачи информации, так как параметры электрорадиоэлементов и узлов могут претерпеть обратимые и необратимые изменения, в других к снижению точности работы аппаратуры, в третьих, к механическим разрушениям элементов конструкций. Сложность задачи защиты ЭС от механических воздействий обусловлена тем, что, несмотря на непрерывное повышение надежности элементной базы (резисторов, конденсаторов, микросхем и других элементов), интенсивность механических воздействий возрастает быстрыми темпами из-за увеличения скоростей подвижных объектов. Кроме того, узлы и блоки ЭС представляют собой сложные механические конструкции, в которых могут возникать резонансные колебания, усиливающие механические нагрузки в десятки раз.

Для обеспечения необходимой надежности и стабильности работы ЭС при интенсивных механических воздействиях применяется ряд способов:

использование наиболее устойчивых к механическим воздействиям электрорадиоэлементов и узлов; повышение прочности конструктивных элементов;

изоляция ЭС от источников механических воздействий;

устранение или уменьшение до допустимого уровня резонансных явлений в конструкциях ЭС, достигаемое путем выведения спектров собственных частот колебаний элементов конструкций, за верхнюю границу диапазона частот возмущающего воздействия или увеличением демпфирующих свойств;

уменьшение активности источников механических воздействий;

применение активной виброзащиты в виде автоматических систем с внешним источником энергии.

Работа по обеспечению нормального функционирования ЭС начинается с сопоставления допустимых параметров механических воздействий на электрорадиоэлементы (ЭРЭ) с требованиями технического задания (ТЗ). Если применяемые ЭРЭ удовлетворяют требованиям ТЗ, дальнейшие усилия необходимо направить на устранение резонансных колебаний и обеспечение прочности элементов конструкций ЭС. В случае успешного решения этих вопросов задачу по обеспечению защиты РЭА от механических воздействий на данном этапе проектирования можно считать выполненной. Если устранить или уменьшить резонансные колебания до допустимого уровня не удастся, то следует применить общую или локальную виброизоляцию. Для обеспечения необходимой защиты от механических воздействий часто приходится применять рассмотренные способы совместно.

Решение этих задач возможно, если конструктор ЭС глубоко понимает физические основы защиты аппаратуры от механических воздействий, знает математические методы их расчета и умеет реализовать выбранные меры защиты в конструкции. Необходимо помнить, что задача обеспечения надежности ЭС при механических воздействиях тесно связана с другими задачами конструирования, такими, как обеспечение высоких массогабаритных показателей изделий, обеспечение теплового режима, ремонтпригодности. Это оказывает существенное влияние на выбор тех или иных способов вибро- и ударозащиты. Например, заливка электронных узлов полимерными компаундами значительно повышает их жесткость и прочность, но ухудшает тепловой режим и ремонтпригодность и поэтому не всегда возможна.

Выдающийся вклад в развитие методов расчета конструкций, работающих в условиях механических воздействий, внесли отечественные ученые: Б.В. Голицын, А.Н. Крылов, С.П. Тимошенко. Значительное развитие теория колебаний получила в фундаментальных трудах академиков Н.М. Крылова, А.А. Андропова и А.А. Витта, профессоров С.Э. Хайкина, Н.Н. Боголюбова, зарубежных ученых Р. Бишопа, С. Крандалла, С. Крида и др.

В 60-е - 80-е годы в СССР появилось больше число публикаций в области теории колебаний и удара, динамической прочности конструкций [1-5]. Наиболее полно вопросы теории и практики виброзащиты приборов и машин рассмотрены в шеститомном справочнике «Вибрация в технике» под редакцией академика В.Н.Челомея [2]. Этим работам была подготовлена база для разработки методов оценки устойчивости ЭС к механическим воздействиям, а также научно обоснованных методов защиты от них. Этим вопросам посвящены труды известных наших [5, 11-15, 19 и др.] и зарубежных [8, 12] ученых.

При подготовке пособия автор учитывал, что конструкторы ЭС не имеют фундаментальной подготовки в области механики сплошной среды и стремился к максимально простому изложению материала. Такие методы анализа, как метод конечных элементов и некоторые другие, по этой причине, рассматриваются на уровне основных понятий, они необходимы для использования известных машинных систем конечно – элементных расчетов «NASTRAN», «COSMOS» и др. Значительное внимание в пособии уделено методам расчета полимерных демпферов, наиболее перспективных для устранения резонансных колебаний ЭС аэрокосмических систем.

Пособие состоит из десяти глав и приложения.

В первой главе рассматриваются виды моделей, к которым приводятся элементы конструкций ЭС, и способы их крепления, модели внешних и внутренних сил. Рассматриваются также возможные виды уравнений движения и способы их анализа.

Вторая глава посвящена анализу систем, приводимых к системам с сосредоточенными параметрами. Последовательно рассматриваются свободные и вынужденные колебания систем с одной, двумя и шестью степенями свободы. Дается вывод формул для расчета собственных частот и амплитуд резонансных колебаний при гармоническом воздействии. Рассматриваются методы анализа систем при случайном вибрационном и ударном воздействиях.

В третьей главе рассматриваются методы анализа конструкций ЭС, приводимых к системам с распределёнными параметрами. Анализируются свободные и вынужденные колебания конструкций типа балок и прямоугольных пластин. Дается вывод формул для расчета собственных частот и амплитуд колебаний таких конструкций при резонансе. Рассматриваются возможности частотной отстройки как способа устранения резонансных

колебаний ячеек ЭС. Изложение материала иллюстрируется примерами расчета.

Четвёртая глава посвящена численным методам анализа. Более подробно рассмотрен метод конечных разностей и его применение к расчету балок и пластин. Приводятся сведения о методе конечных элементов. Дается сравнительный анализ этих методов.

В пятой главе некоторые методы определения прочности элементов конструкций. Дается методика оценки усталостной долговечности электрических выводов ЭРЭ, а также расчёт прочности ячеек ЭС при ударном воздействии.

Шестая глава посвящена общим вопросам виброзащиты ЭС полимерными демпферами. Рассматриваются виды полимерных демпферов и принципы их работы; свойства, принципы модификации и математические модели вибропоглощающих материалов. Даются общие основы теории конструкций ЭС с полимерными демпферами.

В седьмой главе рассматривается теория ячеек ЭС с распределёнными полимерными демпферами. Последовательно рассматриваются конструкции с внешними и внутренними демпфирующими слоями и конструкции ячеек с демпфирующими ребрами. Дается анализ эффективности таких конструкций в температурном и частотном диапазонах.

Восьмая глава посвящена сосредоточенным полимерным демпферам, к которым относятся демпфирующие вставки между параллельно расположенными ячейками и динамические гасители колебаний с большим демпфированием. Рассматриваются методы анализа как при гармоническом, так и при случайном вибрационном воздействии.

Главы шестая-восьмая в значительной степени написаны на основе материалов, полученных автором и его аспирантами в результате проведения научно-исследовательских работ.

В девятой главе рассматривается теория виброизоляции ЭС. Последовательно анализируются этапы проектирования виброизоляции, приводятся расчётные формулы, даётся характеристика промышленных виброизоляторов.

Десятая глава посвящена рассмотрению алгоритмов синтеза виброзащиты ЭС.

Объем изучаемого материала может изменяться в зависимости от длительности обучения. При четырехлетнем цикле (бакалавры) – можно ограничиться изучением первых двух глав и главы 9. При пятилетнем сроке обучения (инженер) целесообразно дополнительно изучить главы 3, 4, 6 и приобрести практические навыки расчета и проектирования на основе материала глав 7, 8. В полном объеме материал пособия целесообразно изучать в случае специализации в области виброзащиты при обучении в магистратуре или аспирантуре.

Глава 1

Моделирование конструкций ЭС и сил

1.1. ВИДЫ МОДЕЛЕЙ

Конструкции ЭС разнообразны, но среди них можно выделить типовые [15]. Все они могут быть разбиты на иерархические уровни. К первому относят электрорадиоэлементы (ЭРЭ) - резисторы, конденсаторы, полупроводниковые приборы, микросхемы и т. п. Второй иерархический уровень объединяет конструкции, не имеющие самостоятельного применения и входящие в состав конструкции третьего уровня. К этому уровню относят печатные платы с ЭРЭ, ячейки, каркасы блочные, шасси и т. д. К третьему иерархическому уровню относят конструкции блоков и пультов. В качестве примера на рис. 1.1 показан блок РЭА, включающий конструкции первого, второго и третьего уровней.

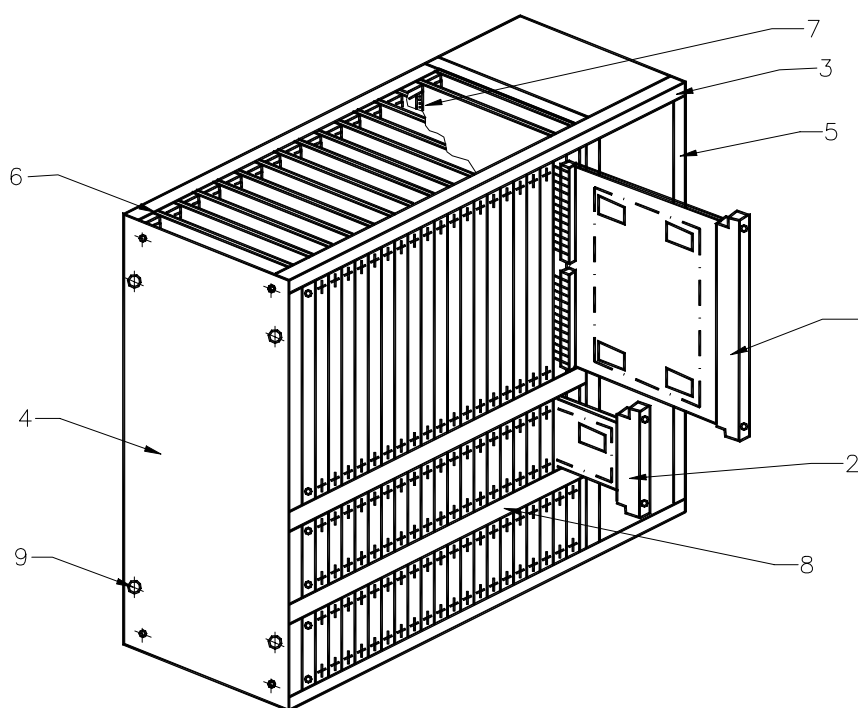


Рис. 1.1. Блок разъемной конструкции

1,2 – ячейки; 3 – каркас; 4 – панель передняя; 5 – панель задняя; 6 – плата печатная соединительная; 7 – розетка разъема ГРППЗ; 8 – направляющая; 9 – замок.

При аналитическом решении конкретных задач динамики ЭС, возникающих в процессе её конструирования и эксплуатации, прежде всего необходимо составить правильные физическую и математическую модели исследуемого объекта или процесса, которые достаточно полно учитывают

задачи исследования, характер внешних воздействий и динамические параметры исследуемой механической системы.

Если уравнения движения составлены и определены граничные и начальные условия, то дальнейшее исследование сводится к решению математической задачи. Решение задачи усложняется при учете второстепенных явлений, относящихся к внешним воздействиям и динамическим параметрам исследуемой механической системы, и побочных явлений, возникающих одновременно с изучаемым. Поэтому при аналитическом исследовании РЭА по возможности упрощают физическую и математическую модели процесса, т.е. составляют для реальной механической системы некоторую рационально выбранную приближенную схему, пригодную для решения поставленных вопросов с заданной степенью точности. Таким образом, при исследовании динамических процессов, возникающих в ЭС при механических воздействиях, неизбежен переход от реальных систем и процессов к их абстрактным моделям.

Основные допущения и приближения, которые вводятся при построении расчетной модели реальной механической системы, касаются следующих вопросов:

выбор моделей геометрической формы и способов крепления конструкции;

распределение инерционных и упругих характеристик системы и число её степеней свободы;

выбор моделей сил.

Ниже рассмотрим вопросы моделирования, составления и решения уравнений движения.

1.2. МОДЕЛИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ И СПОСОБОВ КРЕПЛЕНИЯ

Рассмотрим несколько примеров составления расчетных моделей для электрорадиоэлементов. На рис. 1.2,а показан радиоэлемент (резистор,

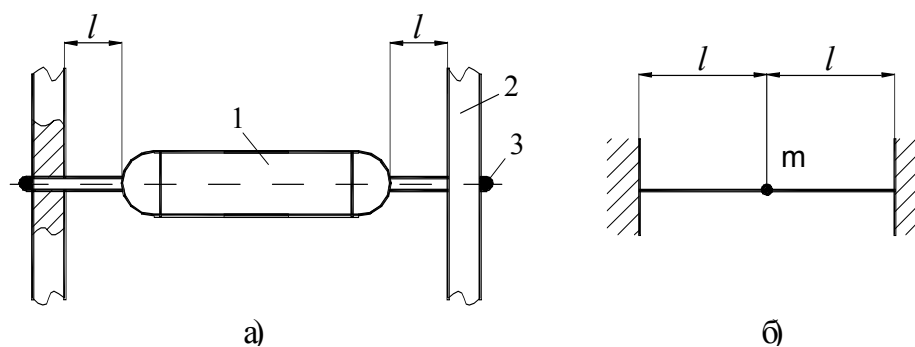


Рис. 1.2. Радиоэлемент установленный в модуле (а) и его расчетная модель (б):
1-радиоэлемент; 2-плата; 3-место пайки

конденсатор, диод), используемый в модуле. При определении, например, собственной частоты поперечных колебаний можно использовать расчетную модель в виде упругой балки с сосредоточенной массой (рис. 1.2, б). Если масса радиоэлемента значительно больше массы выводов, то последней пренебрегают. В противном случае, общую массу считают равной сумме массы радиоэлемента и одной трети массы выводов.

Расчетную модель радиоэлемента, показанного на рис. 1.3,а, можно представить в виде прямоугольной рамы с заземленными краями и

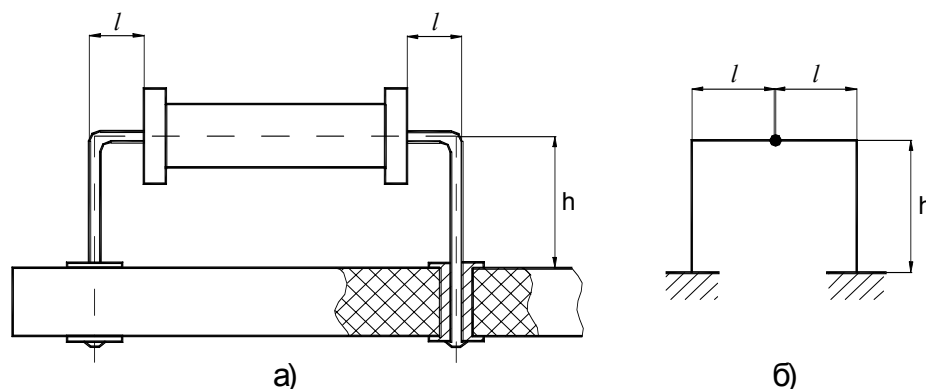


Рис. 1.3. Резистор, установленный на плате (а), и возможная расчетная модель в виде прямоугольной рамы (б)

сосредоточенной массой (рис. 1.3,б). В зависимости от направления динамической силы такую модель при определении собственных частот колебаний можно рассматривать как систему с одной или, например, тремя степенями свободы. При расчете напряжений в выводах эту же конструкцию можно рассматривать и как систему с распределенными параметрами, на которую действует инерционная сила. Такие задачи успешно решаются с использованием методов сил и перемещений, широко используемых в строительной механике для расчета статически неопределимых систем.

В качестве примера на рис. 1.4 приведены различные типы крепления радиоэлементов и возможные их расчетные модели в виде рам.

Значительные упрощения часто применяются при расчете систем виброизоляции ЭС. Блок ЭС, установленный на виброизоляторах, принимают за абсолютно твердое тело, массой виброизоляторов по сравнению с массой блока пренебрегают. Такие допущения позволяют считать блок системой, имеющей не более шести степеней свободы, которые определяются линейными перемещениями блока в направлении осей x , y , z прямоугольной системы координат и вращательными движениями вокруг этих осей. Эти допущения приводят к тому, что амплитудно-частотные характеристики реального блока и расчетной модели будут различаться. Однако,

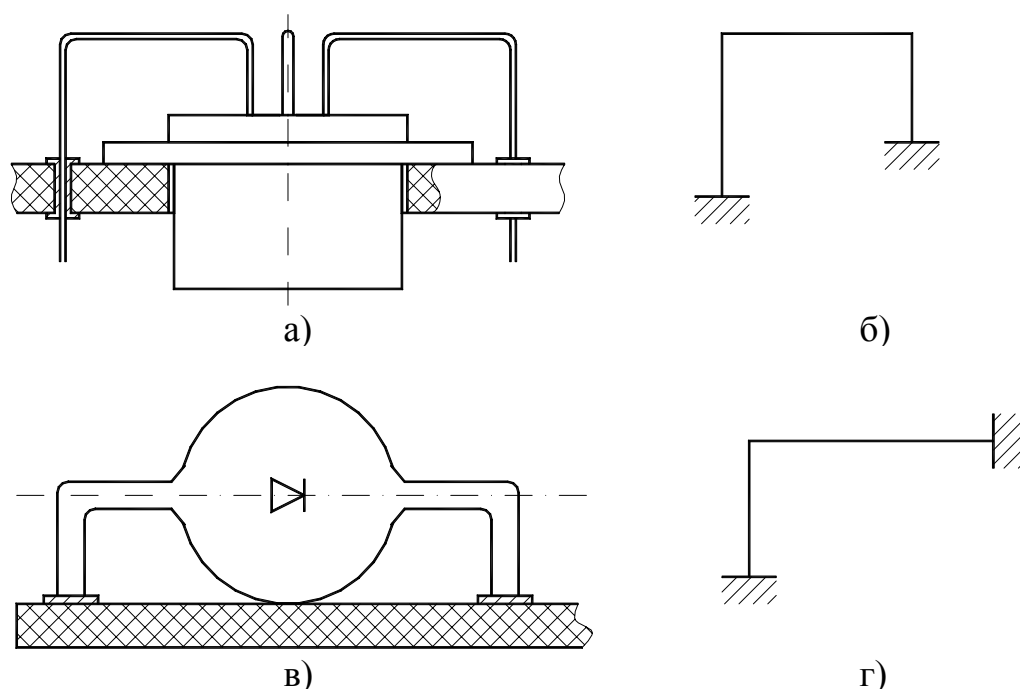


Рис. 1.4. Крепления радиоэлементов (а, в) и возможные расчетные модели выводов транзистора (б) и диода (г)

если частотный диапазон возмущения узкий и элементы внутри блока достаточно жесткие, эти различия несущественны.

При расчете динамических характеристик ячеек ЭС их часто представляют в виде пластин с жестко защемленными или шарнирно закрепленными краями. У ячеек, показанных на рис. 1.1, крепление платы наиболее точно соответствует схеме упругоподатливой заделки.

Так как конструктору часто неизвестен коэффициент жесткости такого крепления, то используют схему жесткого защемления (рис. 1.5,а) или шарнирного опирания (рис. 1.5,б). При расчете собственной частоты колебаний в первом случае получится завышенное значение, во втором - заниженное. Масса микросхем принимается равномерно распределенной по всей площади пластины, а жесткость модели можно принять примерно равной жесткости платы [1].

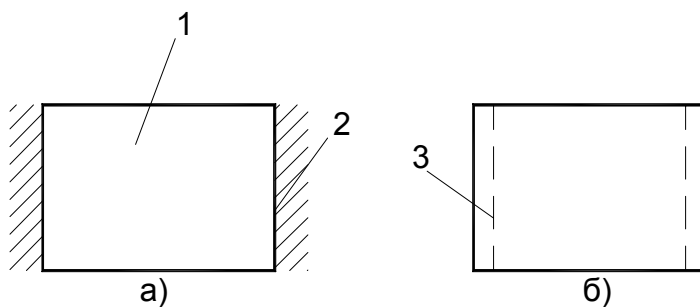


Рис 1.5. Модель ячейки:

1 - свободный край; 2 - жестко защемленный край; 3 - свободный край

1.3. СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. СТЕПЕНИ СВОБОДЫ.

Конструкция, как и любая реальная механическая система, состоит из бесконечно большого числа материальных точек. Так как связи между ними не являются абсолютно жесткими, то все конструкции ЭС или отдельные их элементы есть системы с распределенными параметрами. Тем не менее, в практике конструирования часто используются модели механических систем с сосредоточенными массами и сосредоточенными связями (упругими и демпфирующими). Для расчета отдельных деталей типа балок, стержней и других могут использоваться и модели с распределенными параметрами. На сложность решаемой задачи в значительной степени влияет также выбор числа степеней свободы.

Числом степеней свободы механической системы называется минимальное число независимых координат, однозначно определяющих положение

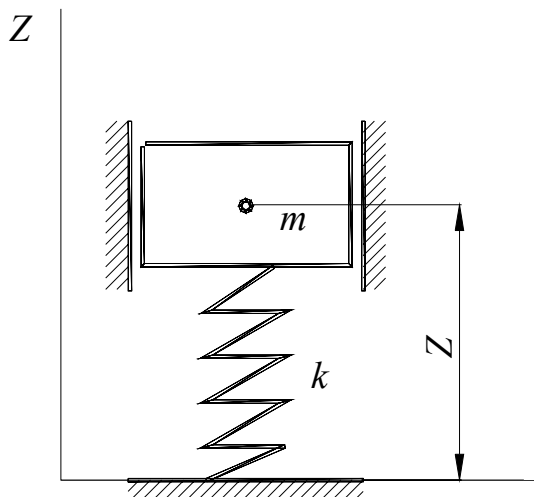
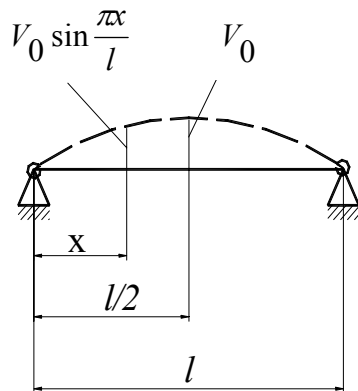


Рис. 1.6. Система с одной степенью свободы

всей системы в любой момент времени. Чаще всего оно равно числу возможных независимых перемещений. Любая реальная механическая система состоит из бесконечно большого числа материальных точек и поэтому имеет бесконечно большое число степеней свободы. Однако для решения практических задач реальные конструкции часто представляются упрощенными схемами, имеющими всего одну или несколько степеней свободы. В таких схемах некоторые части системы считаются совсем лишенными массы и представляются в виде деформируемых без-

инерционных связей, а другие части, имеющие значительную массу, считаются или материальными точками, или абсолютно твердыми телами. На рис. 1.6 приведена схема системы с одной степенью свободы, состоящая из абсолютно твердого тела массой m , установленного на упругом элементе с жесткостью s . Так как тело может перемещаться только в направлении оси Z , то координата Z_i полностью определяет положение системы. Иногда в расчетной схеме как бы признается, что инерцией, упругостью и другими свойствами обладают все элементы системы, но ограничение числа степеней свободы достигается априорным заданием конфигурации системы при колебаниях, т.е. *формы колебаний*. Например, при колебаниях однородной

балки, шарнирно закрепленной на концах (рис. 1.7), ось изгиба может быть представлена выражением



$$W(x, t) = W_0(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Следовательно, прогиб в любой точке оси может быть определен по известной величине $W_0(t)$. Если использовать более сложное представление оси изгиба, например

$$W(x, t) = W_1(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + W_2(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \quad \text{то}$$

положение любой точки будет определяться двумя величинами $W_1(t)$ и $W_2(t)$. Следова-

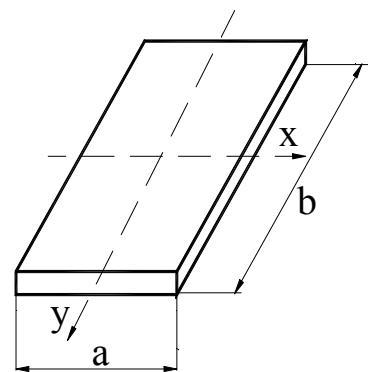


Рис. 1.7. Форма колебаний балки

тельно, такая система имеет две степени свободы.

Для решения некоторых задач форму колебаний плиты (рис. 1.8) можно представить в виде

$$W(x, y, t) = W_0(t) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

Рис. 1.8. Модель плиты

то есть также в виде системы с одной степенью свободы.

В заключение отметим, что число степеней свободы зависит не только от типа конструкции, но и от характера решаемой задачи, требуемой точности решения расчета и других факторов. Для практических целей обычно достаточно учитывать небольшое число степеней свободы.

1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ И МОДЕЛИ СИЛ

В общем случае на динамическую механическую систему могут воздействовать восстанавливающие и диссипативные силы, силы инерции и вынуждающие силы. Восстанавливающими силами наиболее часто являются силы упругости, вынуждающие силы обусловлены воздействиями вибрации, удара, линейного ускорения и акустического давления.

Силы упругости. Силы упругости могут быть линейными и нелинейными. Если между силой и вызванной ею деформацией имеется линейная зависимость, упругие свойства системы с одной степенью свободы ха-

рактируются одним числом – коэффициентом k , который определяется как отношение действующей силы P к деформации z :

$$k = P/z$$

Коэффициенты жесткости для некоторых простых систем приведены в табл. 1.1 [4].

Нелинейную связь между силой P и перемещением z обычно представляют графиком (рис. 1.9). Если наклон характеристики уменьшается, то она называется мягкой, если увеличивается – жесткой. Силы упругости имеют направление, противоположное перемещению.

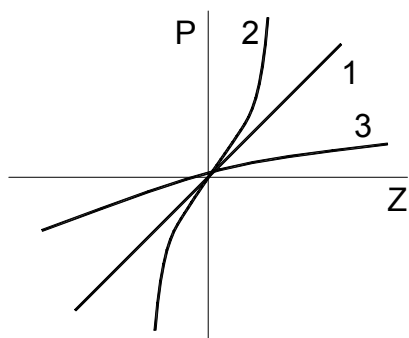


Рис. 1.9. Виды упругих характеристик: 1 – линейная; 2 – нелинейная жесткая; 3 – нелинейная мягкая

Диссипативные силы. Такие силы возникают при движении механической системы и вызывают рассеяние механической энергии, приводящее, например к уменьшению (демпфированию) вибрации. Модели диссипативных сил зависят от механизма демпфирования. Эти механизмы различны в соединениях и материалах конструкций.

Демпфирование в соединениях. При сухом трении, возникающем в соединениях, диссипативная сила P_D описывается выражением

$$P_D = P_0 \operatorname{sgn} \dot{z},$$

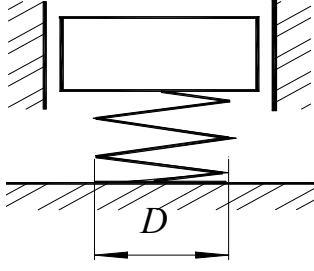
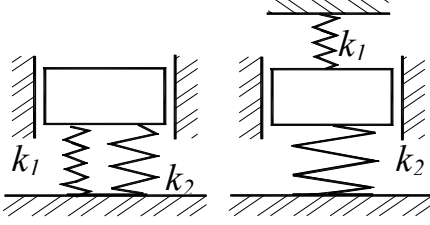
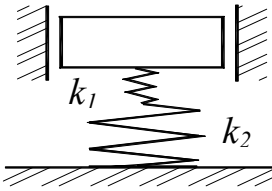
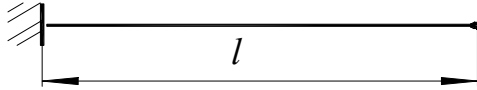
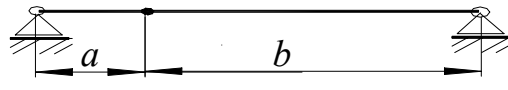
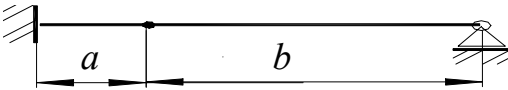
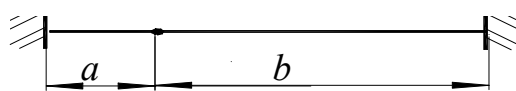
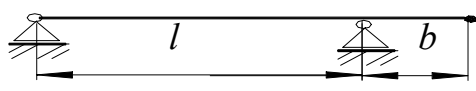
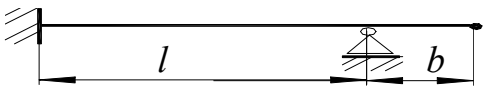
где P_0 – сила сухого трения; $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ – относительная скорость перемещения поверхностей в соединении.

Графически эта зависимость показана на рис. 1.10.

Во многих случаях разделение упругой и диссипативной силы физически невозможно. Тем не менее можно определить величину этих составляющих, если деформировать упруго-диссипативный элемент (рис. 1.11) по закону $z = Z_0 \sin \omega t$ и определить зависимость деформации от силы. В этом случае на диаграмме сила-деформация обнаруживается различие линий нагрузки и разгрузки. Появляется так называемая петля гистерезиса (рис.1.12). Площадь петли численно равна работе диссипативных сил и, следовательно, определяет энергию ΔW , рассеиваемую за один цикл деформирования

$$\Delta W = \oint P(z, \dot{z}) dz,$$

Коэффициент жесткости k для некоторых простых систем.

№ п/п	Схема	Коэффициент c
1		$\frac{G \cdot d^4}{8nD^3}$ (d – диаметр сечения витка, D – диаметр пружины; G – Модуль сдвига; n – число витков)
2		$k_1 + k_2$
3		$\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$
4		$\frac{3EJ}{l^3}$
5		$\frac{3EJ(a+b)}{a^2 b^2}$
6		$\frac{12EJ(a+b)^3}{a^3 b^2 (3a+4b)}$
7		$\frac{3EJ(a+b)^3}{a^3 b^3}$
8		$\frac{3EJ}{(b+l)b^2}$
9		$\frac{12EJ}{(4b+3l)b^3}$

где $P(z, \dot{z})$ - обобщенная сила, учитывающая диссипативную и упругую составляющие.

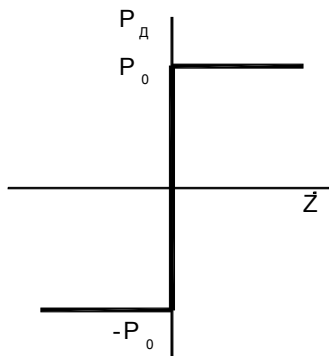


Рис.1.10. Силовая характеристика демпфера сухого трения

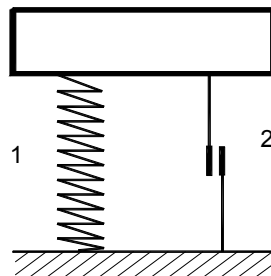


Рис.1.11. Упруго-диссипативный элемент:
1 – упругий элемент;
2 – диссипативный элемент

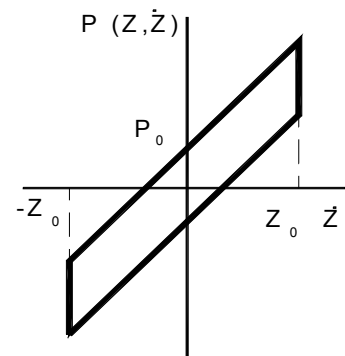


Рис.1.12. Петля гистерезиса при сухом трении

Для петли гистерезиса, показанной на рис. 1.12,

$$\Delta W = 4Z_0P_0.$$

Теоретически определить рассеянную за цикл колебаний энергию можно только для простейших соединений. Некоторые из расчетных формул приведены в справочнике [10]. Результаты экспериментальных исследований отличаются большим разбросом, но на их основе можно сделать несколько общих выводов:

- частота колебаний практически не влияет на рассеяние (поглощение) энергии;
- силы трения, действующие на поверхности контактов, приблизительно подчиняются закону Амонтона – Кулона

$$P(z) = fN,$$

где f – коэффициент трения; N – сила контактного давления.

В настоящее время практически отсутствуют работы, посвященные исследованиям демпфирования в соединениях конструкций ЭС. По данным справочника [10], в котором приводятся результаты исследований демпфирования в соединениях машиностроительных конструкций, например в плоских сухих стыках при изгибных колебаниях, коэффициент механических потерь (КМП), определяющий демпфирование, практически не зависит от давления в диапазоне $(1-20) \cdot 10^5$ Н/м². Он не зависит также от размера стыка и слабо возрастает с увеличением ширины поверхности

контакта. В резьбовых соединениях КМП практически не зависит от силы затяжки в диапазоне $(2,9 - 15) \cdot 10^6$ Н. Результаты испытаний ячеек ЭС показывают, что их КМП лежит обычно в пределах $0,025 - 0,07$. Большая доля КМП определяется демпфированием в соединениях.

Демпфирование в конструкционных материалах. Для учета внутреннего трения в конструкционных материалах часто применяются гипотезы Е. С. Сорокина и Н. Н. Давиденкова.

В соответствии с гипотезой Сорокина диссипативная сила принимается пропорциональной силе упругости

$$P_d = j\eta kz, \quad (1.1)$$

где k – коэффициент жесткости;

η – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом механических потерь и определяющий, какую часть диссипативная сила составляет от силы упругости;

j – мнимая единица, показывающая, что векторы сил сдвинуты на угол $\pi/2$.

Согласно гипотезе Давиденкова, называемой также гипотезой упругого гистерезиса, энергия, рассеиваемая за цикл колебаний может быть определена по формуле

$$\Delta W = mZ_0^{n+1},$$

где Z_0 - амплитуда виброперемещения;

n, m – коэффициенты, определяемые по виду петли гистерезиса для каждого материала отдельно.

В соответствии с этой гипотезой потери энергии зависят от амплитуды деформации (напряжения). В табл. 1.2 приведены коэффициенты механических потерь, полученные при деформациях чистого изгиба, для ряда конструкционных материалов, применяемых для изготовления несущих конструкций ЭС.

Многочисленные исследования показывают, что ΔW , а следовательно, и показатели демпфирования, зависят также от вида напряженного состояния, асимметрии цикла нагружения, структуры материала, длительности вибрационного воздействия и некоторых других факторов. Результаты этих исследований систематизированы в справочнике [20].

Среди материалов особое место занимают вязкоупругие материалы, часто относящиеся к классу полимеров. Диссипативная сила в таких материалах наиболее часто в соответствии с гипотезой Фохта принимается пропорциональной скорости

$$P_d = b\dot{z}, \quad (1.2)$$

где b – коэффициент пропорциональности, называемый – коэффициентом сопротивления.

Т а б л и ц а 1.2

Демпфирующие свойства конструкционных материалов

Материал	Напряжение $\sigma \cdot 10^7, \text{Н/м}^2$	$\eta \cdot 10^{-2}$
Алюминиевый сплав АЛ–9	2 – 10	0,06 – 0,14
Алюминиевый сплав Д–16	2 – 8	0,08 – 0,22
Магниевый сплав АмцАМ	1,5 – 6	0,12 – 0,22
Магниевый сплав Амг	2 – 8	0,1 – 0,13
Магниевый сплав Мл5	1,5 – 6	0,05 – 0,12
Красная медь	2 – 16	0,15 – 4
Латунь ЛС59 – 1	5 – 15	0,05 – 0,1
Текстолит	1 – 4	0,5 – 1,3
Гетинакс	1 – 4	0,05 – 1,3
Стеклотекстолит	0,5 – 4	0,3 – 1,3

Применяется также гипотезы Максвела – Каргина, Слонимского и другие.

Так как вязкоупругие материалы, называемые также вибропоглощающими, применяются для создания полимерных демпферов, они подробно рассмотрены в главе 6.

Модели вынуждающих сил - вибраций, ударов, линейных перегрузок и акустических давлений, называемых механическими воздействиями, рассмотрим в §1.5.

1.5. МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Как отмечалось раньше, к механическим воздействиям относятся линейные ускорения, вибрации, удары.

Непосредственное воздействие вынуждающей силы на аппарат (или на какой-нибудь элемент его конструкции) будем называть *силовым возбуждением*. Случай, когда заданы законы движения отдельных точек системы (например, закон движения основания), будем называть *кинематическим возбуждением*.

Под **вибрацией** аппаратуры понимают механические колебания её элементов или конструкции в целом. Вибрация может быть периодической

и случайной. В свою очередь, периодическая вибрация может быть гармонической и полигармонической, а случайная – стационарной, нестационарной, узкополосной и широкополосной.

Гармоническая вибрация (рис. 1.13, а) сравнительно редко встречается в реальных условиях, но широко используется при лабораторных испытаниях и при анализе, она важна также при определении динамических характеристик конструкций, которые используются для нахождения реакции системы при более сложных формах вибрации.

Виброперемещение при гармонической вибрации описывается выражением

$$z(t) = S \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.3)$$

где S – амплитуда виброперемещения, ω – угловая частота, t – время, φ – начальная фаза колебаний.

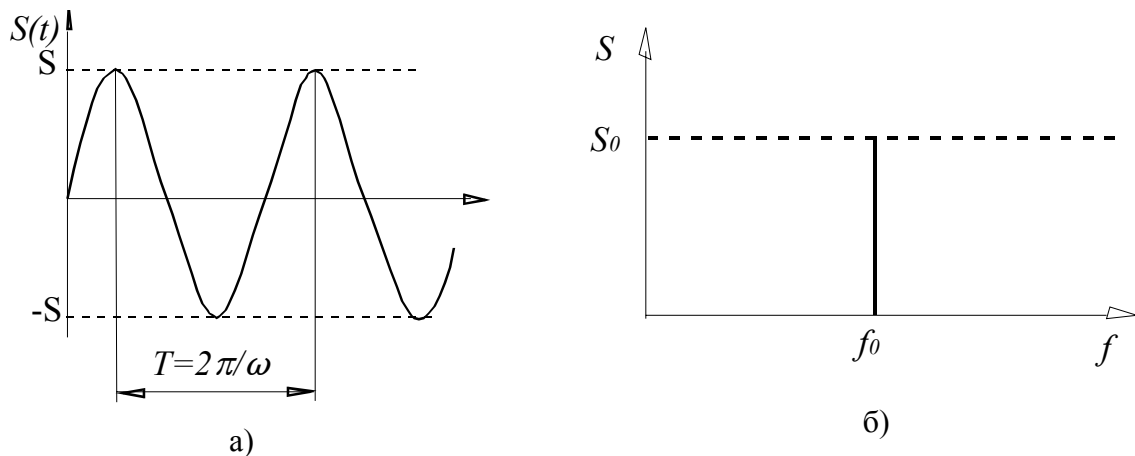


Рис.1,13 Гармоническая вибрация:
а - форма; б - частотный спектр

Виброскорость и виброускорение находят путём последовательного дифференцирования выражения (1.3):

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \omega S \cos \omega t, \\ \ddot{z}(t) &= -\omega^2 S \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где ωS – амплитуда виброскорости; $S_0 = \omega^2 S$ – амплитуда виброускорения.

Сравнивая (1.3), (1.4), можно заключить, что при синусоидальных колебаниях ускорение опережает по фазе перемещение на угол π . Так как выражение $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, называемое уравнением Эйлера, также описывает гармонические колебания с угловой частотой ω , то для описания гармонической вибрации часто используется комплексная форма записи в виде

$$z(t) = S e^{j\omega t}, \quad (1.5)$$

таким образом, основными характеристиками гармонической вибрации являются: амплитуда виброперемещения, виброскорости, виброускорения и угловая частота колебаний.

Гармоническая вибрация часто характеризуется коэффициентом виброперегрузки:

$$n_g = \frac{S_0}{g} = \frac{S\omega^2}{g} = \frac{Sf^2}{250}, \quad (1.6)$$

где f – частота, Гц.

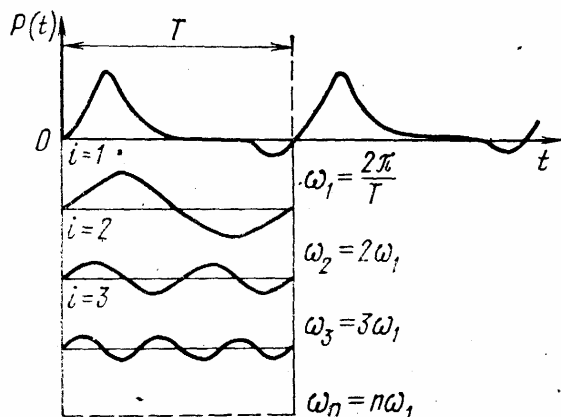


Рис. 1.14. Разложение периодической кривой в гармонический ряд

где $\omega_i = i\omega$, $\omega = 2\pi/T$ – основная частота, соответствующая периоду изменения возмущающей силы.

Коэффициенты разложения a_i и b_i определяются по известным формулам

$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos i \omega t dt; \quad b_i = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin i \omega t dt \quad (1.8)$$

и представляют собой амплитуды косинусных и синусных составляющих каждой из этих гармоник. Амплитуда S_i и начальная фаза φ_i каждой i -й гармоники с частотой $\omega_i = i\omega$ определяется по формулам

$$S_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad \text{tg } \varphi_i = b_i/a_i.$$

Коэффициент $a_0/2$ соответствует среднему значению периодической возмущающей силы $P(t)$.

Полигармоническую вибрацию создают электродвигатели, вентиляторы и другие электромеханические устройства, имеющие несбалансированные быстровращающиеся массы. Такую вибрацию, как показано на рис. 1.14, можно разложить на сумму гармонических составляющих. Аналитически это разложение может быть представлено рядом Фурье

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t), \quad (1.7)$$

Совокупность частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, расположенных в порядке их возрастания, называется *частотным спектром*, а совокупность амплитуд S_1, S_2, \dots, S_n – амплитудным спектром данного периодического возмущения (рис. 1.15).

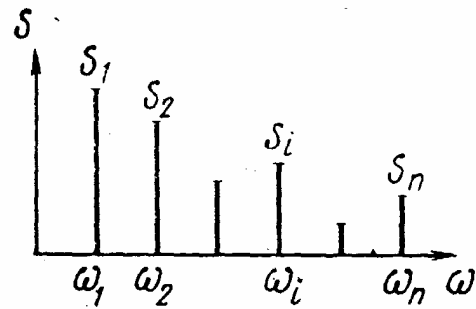


Рис.1.15. Амплитудный спектр периодического процесса

Вибрация, параметры которой (амплитуда виброперемещения, частота и др.) изменяются во времени случайным образом, называется *случайной*. Она может быть стационарной и нестационарной. У стационарной вибрации математическое ожидание виброперемещения равно нулю, математическое ожидание виброскорости и виброускорения постоянны, корреляционная функция не зависит от начала отсчета. У нестационарной вибрации постоянства статических характеристик не наблюдается. К такому виду можно отнести вибрацию, возникающую при движении транспортных средств, при работе реактивных двигателей.

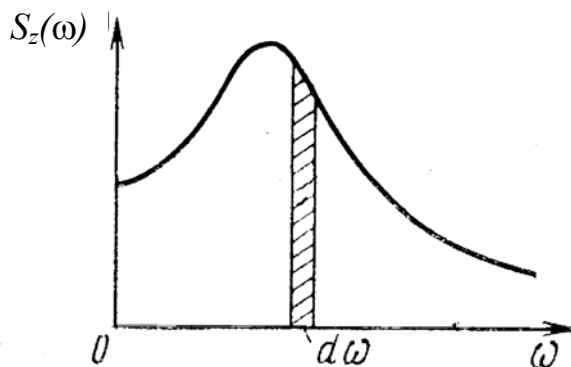


Рис.1.16. График спектральной плотности

Наиболее информативной характеристикой стационарного случайного процесса является корреляционная функция. Поэтому определение реакции динамической системы к решению задачи о преобразовании корреляционной функции износа. Такой метод получил название *корреляционного метода*. Его разновидностью, широко применяемой на практике, является *спектральный метод*, основанный на

возможности спектрального разложения стационарного случайного процесса. Важнейшая характеристика спектрального разложения – спектральная плотность дисперсии, или просто спектральная плотность $S_z(\omega)$ виброперемещения (виброускорения):

$$S_z(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_z}{\Delta\omega}, \quad (1.9)$$

где D_z - дисперсия виброперемещения.

Если спектр непрерывный, она может быть представлена в виде некоторой кривой (рис. 1.16).

Используя прямое и обратное преобразование Фурье, можно записать:

$$S_z(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} k_z(\tau) \cos \omega \tau d\tau ;$$

$$k_z(\tau) = \int_0^{\infty} S_z(\omega) \cos \omega \tau d\omega , \quad (1.10)$$

где k_z – корреляционная функция.

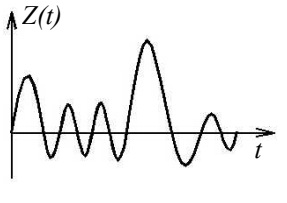
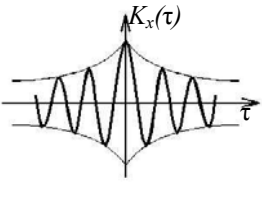
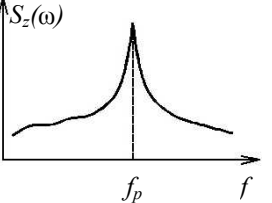
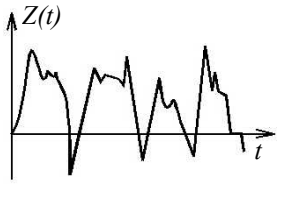
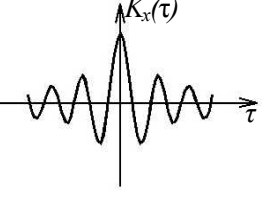
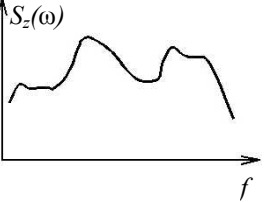
Используя формулу (1.10), нетрудно убедиться, что среднеквадратическое (действующее) значение процесса

$$\sigma_z = \sqrt{D_z} = k_z(0) = \sqrt{\int_0^{\infty} S_z(\omega) d\omega} . \quad (1.11)$$

Случайная вибрация может рассматриваться как белый шум, марковский процесс, но наиболее часто представляется как узкополосный случайный процесс. Основой деления случайной вибрации на узко- и широкополосную является относительная ширина полосы частот относительно к средней частоте. Некоторые характеристики узко- и широкополосного процессов показаны в табл. 1.3.

Т а б л и ц а 1.3

Графическое представление характеристик вибрационных процессов

Название процесса	Изображение процесса	Автокорреляционная функция	Спектральная плотность
Узкополосный			
Широкополосный			

Кроме вибрации, аппаратура может подвергаться **ударным воздействиям**, возникающим при транспортировке, монтаже или эксплуатации, при действии ударной волны и т. д. В процессе удара нагрузки к элементам аппаратуры прикладываются в течение короткого промежутка времени τ . Вследствие этого возникающие ускорения элементов аппаратуры могут

достигать больших значений [5] и вызывать различные повреждения. Интенсивность ударного воздействия зависит от формы, амплитуды и длительности ударного импульса.

Формой ударного импульса называется зависимость ударного ускорения от времени $a(t)$ (рис. 1.17). Для упрощения при расчете ударных воздействий форму ударного импульса идеализируют, заменяя ее подходящей более простой формой, например прямоугольной, треугольной, полусинусоидальной. При замене реального импульса идеализированным особое внимание обращается на крутизну фронта и среза, так как от них зависит «жесткость» удара. Амплитудой импульса называют максимальное значение ударного ускорения A , а длительностью – интервал времени действия импульса τ . Эти три характеристики $a(t)$, A и τ задаются обычно для расчета ударных воздействий и конструирования средств защиты.

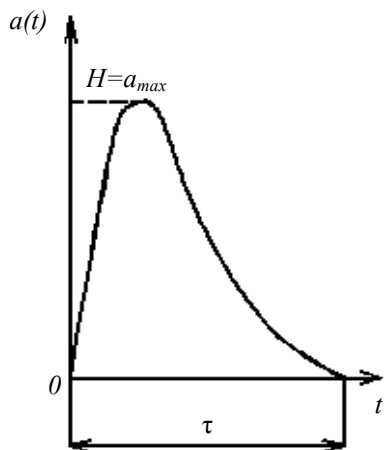


Рис. 1.17. Графическое изображение ударного импульса

На рис. 1.18 приведены простейшие формы ударных импульсов.

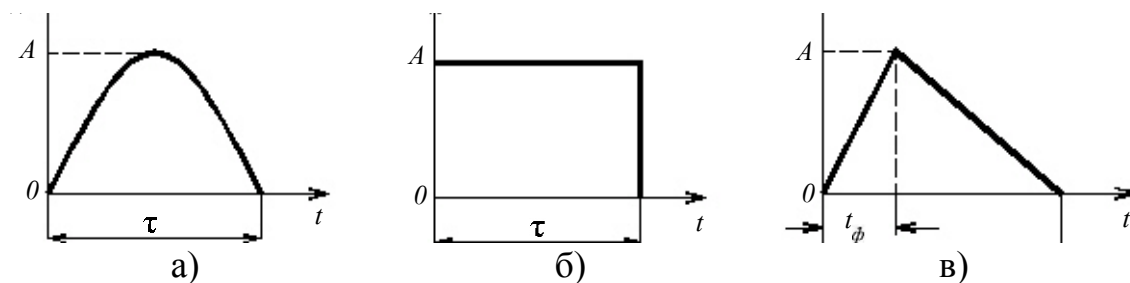


Рис. 1.18. Формы ударных импульсов
а – полусинусоидальная; б – прямоугольная; в - треугольная

Математическая модель полусинусоидального импульса

$$F(t) = A \sin \omega t \text{ при } 0 \leq t < \tau;$$

$$F(t) = 0 \text{ при } t \geq \tau,$$

прямоугольного – $F(t) = A$ при $0 \leq t < \tau$;

$$F(t) = 0 \text{ при } t \geq \tau,$$

треугольного – $F(t) = \frac{At}{\tau}$ при $0 \leq t < \tau$;

$$F(t) = \frac{A}{\tau - t_\phi} (\tau - t) \text{ при } t_\phi \leq t < t_u.$$

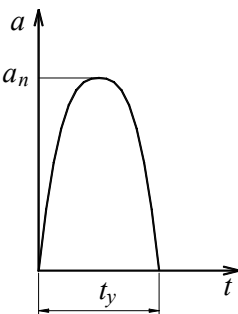
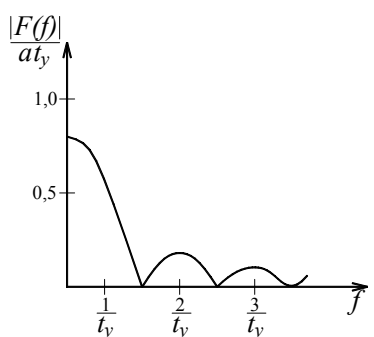
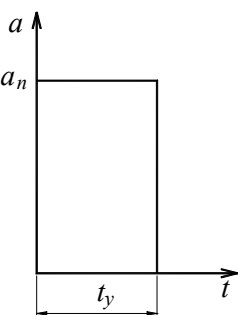
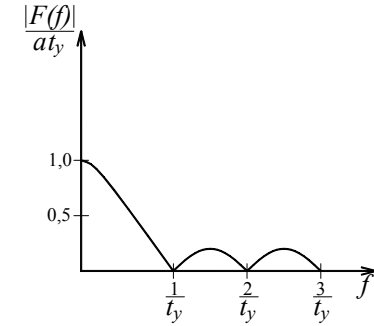
Представление ударных импульсов в виде простейших форм оправдано не всегда. К более точным результатам приводит представление ударного процесса в виде частотного спектра $F(f)$, получаемого путем преобразования Фурье:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{j\omega t} dt.$$

В табл. 1.4 приведены примеры ударных импульсов и соответствующие им преобразования Фурье и частотные спектры [25].

Т а б л и ц а 1.4

Ударные импульсы и ударные спектры

Им-пульс	Функция времени	Преобразование Фурье	Частотный спектр
Полусинусоидальный		$F(f) = \frac{2at_K}{\pi} \left \frac{\cos \pi f t_K}{1 - 4f^2 t_K^2} \right $	
Прямоугольный		$ F(f) = at_K \left \frac{\sin \pi f t_K}{\pi f t_K} \right $	

Линейные ускорения характерны для всех объектов, движущихся с переменной скоростью (например, при разгоне, торможении). Влияние линейных ускорений на детали конструкций и электрорадиоэлементы обу-

словлено инерционными силами, которые могут достигать и во много раз превышать силы тяготения. Так, если на элемент с массой m в состоянии покоя действует сила тяжести $G = ma(t)$, то при наличии ускорения тот же элемент дополнительно подвергается воздействию силы инерции $P_{и} = ma(t)$, тогда результирующая сила составит $\vec{P}_p = \vec{G} + \vec{P}_{и}$, а результирующее ускорение $\vec{a}_p(t) = \vec{g} + \vec{a}(t)$.

При движении объекта по криволинейной траектории, например по дуге окружности радиуса R , элементы конструкции аппарата будут испытывать центробежное ускорение:

$$a = m\Omega^2 R = mV^2/R,$$

где Ω – угловая, а V – линейная скорости движения объекта.

При расчетах аппаратуры, работающей в условиях линейных ускорений, последние обычно считаются равными максимальному их значению за время их действия либо изменяющимся по ступенчатому или линейному закону.

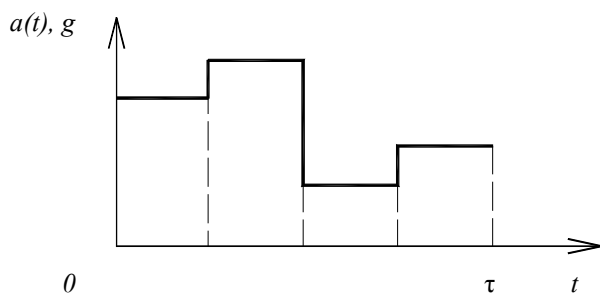


Рис. 1.19. Закон изменения линейного ускорения

В технических условиях на аппаратуру часто задают закон, изменения ускорения во времени $a(t)$ и длительность его действия τ (рис.1.19) в виде ступенчатой функции. Отношение действующего ускорения к ускорению свободного падения называют перегрузкой: $n = a / g$.

Трудность борьбы с влиянием линейных перегрузок заключается в том, что они практически не поддаются ослаблению. Только в случае кратковременного действия линейных перегрузок могут быть использованы некоторые конструктивные меры защиты [5]. Во всех же остальных случаях обеспечение работоспособности элементов конструкции может быть достигнуто только за счет увеличения жесткости или прочности, что ведет к увеличению массы. Так как нагрузкой для элементов являются силы инерции, то повышение их прочности может быть достигнуто за счет применения материалов с более высоким отношением $[\sigma]/\rho$, где $[\sigma]$ — допустимое напряжение, а ρ – плотность.

1. 6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Уравнения движения (уравнения динамики), описывающие колебательные процессы, называются также уравнениями колебаний. В общем случае на основе принципа Даламбера они включают восстанавливающие, диссипативные, вынуждающие силы и силы инерции. Имеются отличия в составлении уравнений движения систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. При составлении уравнений движения систем с сосредоточенными параметрами могут использоваться два способа – основной и прямой [4]

При основном способе используют уравнения Лагранжа [4], которые представляют наиболее общую форму уравнений движения и могут быть записаны в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + F(t), \quad (1.12)$$

где $F(t)$ – внешняя сила; Π , T , Φ – соответственно потенциальная, кинетическая энергия системы и диссипативная сила, определяемые выражениями:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} q_i q_j; \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_{ij} q_i q_j. \quad (1.13)$$

В этих выражениях s – число степеней свободы; a_{ij} , k_{ij} , b_{ij} – соответственно коэффициенты инерции, упругости и диссипации, q_i – обобщенная координата; \dot{q}_i – обобщенная скорость. Например, уравнение вынужденных колебаний для системы с одной степенью свободы может быть сразу записано из уравнения Лагранжа при $s = 1$:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + kq = F(t) \quad (1.14)$$

При прямом способе массы мысленно отделяют от упругого скелета системы и для каждой из них записывают дифференциальное уравнение движения. При этом действия упругих связей заменяют их реакциями. Например, для системы, показанной на рис. 1.6 можно записать уравнение движения в виде

$$m\ddot{z} + kz = 0, \quad (1.15)$$

где $m\ddot{z}$ – сила инерции; kz – сила упругости

В наиболее общем случае трехмерной конструкции с распределенными параметрами колебания механической системы могут быть представлены через уравнения колебания отдельных точек системы, называемых уравнениями Ламе. В прямоугольной системе координат они имеют вид:

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \\
(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \\
(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \\
\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \\
\mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Здесь E – модуль упругости, ρ – плотность материала, ν – коэффициент Пуассона. U, V, W – отклонения точки от положения равновесия в направлении осей x, y, z прямоугольной системы координат.

Уравнения Ламе могут применяться и для анализа дискретных систем, если систему с распределенными параметрами заменить системой с дискретными параметрами.

Решение системы уравнений Ламе в общем случае сложно, поэтому по возможности их стремятся упростить. При этом используются особенности формы конструкций и различные гипотезы об их деформировании. При расчете пластин, например, можно исключить координату Z , а при расчете балок – координаты Y и Z . Трехмерная задача в этих случаях приводится соответственно к двухмерной и одномерной. Если при этом использовать гипотезу прямых нормалей [6], получим известные уравнения свободных изгибных колебаний

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \left[\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right] = 0 \tag{1.16}$$

для пластин и

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0 \tag{1.17}$$

для балок.

В этих уравнениях

$$D = \frac{EH^3}{2(1-\nu^2)} \tag{1.18}$$

- цилиндрическая жесткость пластины, EJ – жесткость балки на изгиб.

Уравнения (1.16) и (1.17) могут быть получены и при помощи обратного способа составления уравнений движения.

Сущность обратного способа, применяемого, как правило, для систем с распределенными параметрами, состоит в мысленном отделении всех масс системы от ее упругого скелета и рассмотрении его деформации под действием сил инерции и внешних сил [4]. Например, из статической теории изгиба балок известно дифференциальное уравнение упругой линии балок

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = q(x), \quad (1.19)$$

где $W=W(x)$ – прогибы от поперечной нагрузки $q(x)$; E – модуль продольной упругости; J – момент инерции сечения.

Если считать, что внешние силы являются инерционными, то, заменяя в уравнении (1.19) статическую силу $q(x)$ силой инерции $m \partial^2 W / \partial t^2$, получим уравнение (1.17) свободных незатухающих колебаний балки.

Аналогично, учитывая известное из теории упругости дифференциальное уравнение упругой поверхности пластины, находящейся под статической нагрузкой $q(x, y)$,

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = q(x, y), \quad (1.20)$$

получим уравнение (1.16) свободных незатухающих колебаний пластины.

Если в выражения (1.19) и (1.20) добавить силы трения, то получим уравнения свободных затухающих колебаний стержня и пластины, а после добавления внешних вынуждающих сил – уравнения вынужденных колебаний систем с затуханием.

Несмотря на то, что уравнения (1.19), (1.20) не являются волновыми, так как не учитывают инерцию вращения и деформацию сечений, они позволяют получать в большинстве случаев приемлемые результаты при колебаниях на частотах до 3-5 кГц.

Уравнения (1.19), (1.20) решаются сравнительно просто для стационарных задач, к которым относятся и задачи об определении собственных частот и амплитуд резонансных колебаний. В этих случаях движения всех точек происходят по известному закону, например гармоническому, что позволяет представить решение в виде простой функции времени и исключить его после подстановки решения в уравнения (1.19) или (1.20).

Методы решения уравнений движения могут быть аналитическими и численными. Аналитические методы, к которым относятся методы разделения переменных, позволяют получить решение в виде формулы или группы формул, анализ которых дает наглядное представление о влиянии конструктивных параметров на характеристики динамических процессов и

оптимизировать конструкции. Основным недостатком аналитических методов в трудности математического описания собственной формы колебаний и граничных условий для сложных конструкций. Поэтому аналитические методы наиболее часто применяют для конструкций простой формы с “классическими” способами крепления типа жесткого защемления, свободного опирания или незакрепленного края пластины или конца балки.

Численные методы, среди которых наибольшее применение получили методы конечных элементов (МКЭ), конечных разностей (МКР), граничных элементов, не имеют принципиальных препятствий для решения сложных конструкций со сложными способами крепления. Характерным для них является замена исходных дифференциальных уравнений алгебраическими за счет дискретизации конструкции. К недостаткам этих методов относятся [6]:

- необходимость решения большой системы алгебраических уравнений;
- решение получается в виде таблицы чисел и любое изменение конструкции приводит к необходимости решения на ЭВМ;
- дискретизация приводит к погрешности, оценка которой часто более сложная задача, чем нахождение основного решения.

Поэтому применение численных методов целесообразно, если аналитические методы не пригодны. Это объясняет целесообразность параллельного развития как аналитических, так и численных методов. Можно ожидать наибольшего эффекта от разумного сочетания этих методов.

Контрольные вопросы

1. Какие применяются виды моделей конструкций ЭС?
2. Приведите примеры моделей геометрической формы и способов крепления.
3. Что понимается под степенью свободы механической системы?
4. Какие силы действуют при колебаниях систем? Напишите их математические модели.
5. Расскажите о гипотезах Сорокина и Фохта.
6. Что понимается под гармонической и полигармонической вибрацией? Приведите их математические описания.
7. Дайте характеристику случайной вибрации.
8. Какими параметрами описывается ударный импульс? Приведите формы ударных импульсов.
9. Что понимается под линейным ускорением?
10. Какие применяются уравнения колебаний систем с сосредоточенными параметрами?
11. Расскажите об уравнениях колебаний систем с распределенными параметрами.

Глава 2

Анализ ЭС, приводимых к системам с сосредоточенными параметрами

2.1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Свободные колебания. Можно рассматривать свободные колебания без затухания и с затуханием. Несмотря на то, что свободные колебания без затухания в природе не встречаются, их анализ часто проводится с целью определения собственных частот колебаний системы.

Допустим, что состояние равновесия системы, показанной на рис. 1.6, каким-то образом нарушено. Тогда движение системы будет представлять свободные колебания, описываемые выражением (1.15):

$$m\ddot{z} + kz = 0,$$

или, учитывая, что свободные колебания линейных систем являются гармоническими,

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad - \quad (2.2)$$

постоянная, определяемая только свойствами системы.

Очевидно, что частными решениями уравнения (2.1) являются $z = C_1 \sin \omega_0 t$ или $z = C_2 \cos \omega_0 t$, а его общее решение (общий интеграл)

$$z = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t,$$

где C_1 и C_2 – постоянные, определяемые из начальных условий ($t = 0, z = 0, \dot{z} = 0$).

Последнее выражение можно также представить в виде

$$z = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (2.3)$$

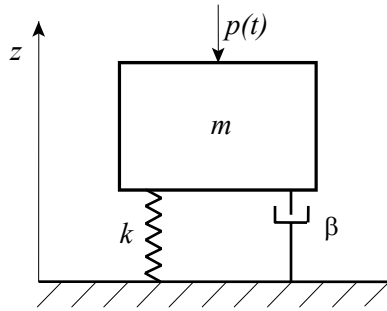
где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ – амплитуда колебаний; $\alpha = \text{arctg} \frac{C_2}{C_1}$ – начальная фаза.

Из выражения (2.3) видно, что движение системы повторяется после такого промежутка времени T , когда аргумент $\omega_0 t + \alpha$ возрастает на 2π , то есть должно быть $\omega_0(t + T) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi$.

Отсюда период колебаний $T = 2\pi/\omega_0$, а постоянная ω_0 имеет смысл *собственной угловой частоты колебаний*.

К уравнению типа (1.15) приводятся многие задачи о колебаниях механических систем и в этих случаях собственная угловая частота колебаний может быть найдена по формуле (2.2).

Силовое гармоническое возбуждение линейной системы. Уравнение движения такой системы (рис. 2.1) при действии силы $p(t) = P_0 e^{j\omega t}$ с амплитудой P_0 и частотой ω можно представить в следующем виде:



следующем виде:

$$m\ddot{z} + \beta\dot{z} + kz = P_0 e^{j\omega t}, \quad (2.4)$$

где k, β - коэффициенты жесткости и сопротивления соответственно.

Рис. 2.1. Система с одной степенью свободы при силовом воздействии

Общее решение уравнения (2.4) состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и одного из частных решений уравнения (2.4). Физически этот результат представляет собой наложение свободных и вынужденных колебаний системы, и результирующее колебание не будет гармоническим. Однако, так как через определенный промежуток времени свободные колебания затухнут, то для практики представляет интерес вторая, «стационарная» часть решения. Она может быть представлена в виде:

представляет интерес вторая, «стационарная» часть решения. Она может быть представлена в виде:

$$z = z(t) = S_B e^{j(\omega t + \alpha)}, \quad (2.5)$$

где S_B - амплитуда вибрации; α - сдвиг фаз между силой и перемещением:

$$\alpha = \arctg \frac{\beta \omega}{k - m \omega^2}. \quad (2.6)$$

Подставляя решение (2.5) в уравнение (2.4), получаем:

$$(-m\omega^2 + j\omega\beta + k)z(t) = p(t),$$

откуда $z(t) = p(t)\Phi_z(j\omega)$. Величина

$$\Phi_z(j\omega) = 1/(k - m\omega^2 + j\omega\beta), \quad (2.7)$$

являющаяся по смыслу передаточной функцией, называется *частотной характеристикой* системы. Она показывает, как изменяется амплитуда S_B вынужденных колебаний с изменением частоты возбуждения ω . Знаменатель выражения (2.7) называется *динамической жесткостью* системы. Она характеризует сопротивление системы воздействию гармонической силы.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$S_B = |z(t)| = \frac{z_{ст}}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2}}, \quad (2.8)$$

где $z_{ст} = P_0/k$ – статическое смещение системы под воздействием силы P_0 ; $\nu = \omega/\omega_0$ – коэффициент расстройки, или частотное отношение; $\eta = \beta\omega_0/k$ – коэффициент механических потерь (КМП).

Из (2.8) находим одну из основных динамических характеристик системы – коэффициент динамического усиления, или *коэффициент динамичности*:

$$\mu = \frac{S_B}{z_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + \eta^2 \nu^2}}, \quad (2.9)$$

который показывает, как изменяется амплитуда S_B вынужденных колебаний системы по отношению к ее статическому смещению под действием силы P_0 в зависимости от коэффициента расстройки ν .

Для системы с диссипативной силой в виде $j\gamma kz$ уравнение движения будет иметь вид:

$$m\ddot{z} + (1 + j\gamma)kz = P_0 e^{j\omega t}. \quad (2.10)$$

Подставляя в это уравнение частное решение (2.5), получаем:

$$S_B = |z(t)| = z_{ст} / \sqrt{(1-\nu^2)^2 + \eta^2}.$$

Откуда находим коэффициент динамического усиления

$$\mu = S_B / z_{ст} = 1 / \sqrt{(1-\nu^2)^2 + \eta^2}. \quad (2.11)$$

Для расчета резонансных амплитуд необходимо в формулы (2.9) или (2.11) подставить значение $\nu = 1$. Тогда получим: $\mu = 1/\eta$ независимо от принимаемой модели диссипативной силы.

Кинематическое гармоническое возбуждение. Пусть основание системы (рис. 2.2) перемещается по гармоническому закону

$$z_a = S_0 e^{j\omega t}, \quad (2.12)$$

где S_0 – амплитуда виброперемещения основания.

Тогда уравнение движения системы с вязким трением имеет вид:

$$m\ddot{z} + \beta(\dot{z} - \dot{z}_a) + k(z - z_a) = 0. \quad (2.13)$$

Здесь $z - z_a = z_1$ – упругая деформация связей.

Подставляя в это уравнение частное решение в виде (2.5), где угол α будет определять сдвиг фаз между перемещением

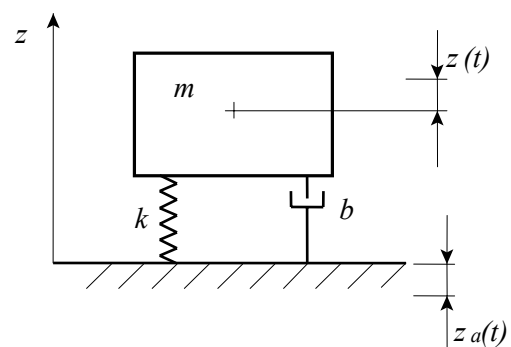


Рис. 2.2. Система с одной степенью свободы при кинематическом возбуждении

основания и системы, и выражение для виброперемещения основания z_a из (2.12), после преобразований получаем:

$$(-m\omega^2 + j\omega\beta + k)z = (j\omega\beta + k)z_a, \quad (2.14)$$

откуда найдем передаточную функцию

$$\Phi(j\omega) = z/z_a = (k + j\omega\beta)/(k - m\omega^2 + j\omega\beta). \quad (2.15)$$

Амплитуда колебаний системы

$$S_B = |z| = |z_a| \frac{\sqrt{k^2 + \omega^2\beta^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2}} = S_0 \frac{\sqrt{1 + \eta^2 v^2}}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2}}.$$

Величина

$$\mu = S_B/S_0 = \sqrt{1 + \eta^2 v^2} / \sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2} \quad (2.16)$$

получила название *коэффициента передачи*. Она выражает соотношение между амплитудами S_B системы и S_0 основания при кинематическом возбуждении колебаний.

Подставляя в (2.13) переменную z_1 и используя (2.12), получаем уравнение, описывающее деформацию связи в процессе колебаний:

$$m\ddot{z}_1 + \beta\dot{z}_1 + kz_1 = m\omega^2 S_0 e^{j\omega t}.$$

Принимая решение этого уравнения в виде $z_1 = S_{1B} e^{j\omega t}$, где S_{1B} – амплитудное значение деформации, получаем:

$$(-m\omega^2 + j\omega\beta + k)z_1 = m\omega^2 z_a.$$

Отсюда найдем коэффициент передачи для деформации связи

$$\mu_1 = \frac{S_{1B}}{S_0} = \frac{v^2}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2}}. \quad (2.17)$$

При $v = 0$ $\mu_1 = 0$; при $v = 1$ $\mu_1 = 1/\eta$; при $v \rightarrow \infty$ $\mu_1 = 1$.

Для системы с демпфированием, пропорциональным перемещению, уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{z} + (1 + j\eta)(z - z_a)k = 0. \quad (2.18)$$

Подставляя в это уравнение выражения (2.5) и (2.12), получаем:

$$S_B = |z| = |z_a| = \sqrt{1 + \eta^2} / \sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2}.$$

Следовательно, коэффициент передачи

$$\mu = \sqrt{1 + \eta^2} / \sqrt{(1 + v^2) + \eta^2}. \quad (2.19)$$

График зависимости μ от коэффициента v приведен на рис. 2.3.

Эти графики позволяют объяснить основные способы виброзащиты ЭС – виброизоляцию, частотную отстройку, вибродемпфирование. Как видим на рис. 2.3 можно выделить три области. Первая – , когда $\nu < 0,4$ и $\mu \approx 1$, называется областью *дорезонансных колебаний*. Так как $\nu = f/f_0$, для этой области справедливо неравенство $f_0 > 2,5f$. То есть для исключения возможности резонансных колебаний необходимо, чтобы собственная частота колебаний f_0 в 2,5 раза превышала частоту возбуждения. На практике чаще используют соотношение

$$f_0 > 2f \quad (2.20)$$

Это объясняется тем, что в государственных стандартах указано: резонанс отсутствует, если $\mu \leq 2$. Это условие обычно выполняется при соотношении $\nu < 0,5$, из которого и получается условие (2.20). Этот способ устранения резонансных колебаний называется *частотной отстройкой*. Его обычно применяют, если частоты возбуждающих колебаний не превышают 500 Гц, так как при действии вибраций в более широком диапазоне для увеличения f_0 приходится повышать жесткость конструкции (см. формулу 2.2). Конструктивно это достигается увеличением толщины конструкции, применением ребер жесткости и так далее, что может привести к значительному увеличению массы.

Поэтому, если частотный диапазон возбуждения превышает 500 Гц, полностью устранить резонансные колебания не удастся и конструкция будет находиться в области *резонансных колебаний*, когда $0,5 < f/f_0 < 1,5$. В этом случае обычно $\mu \gg 1$, что недопустимо, так как могут возникать отказы из-за многократного возрастания амплитуд колебаний. Уменьшить амплитуды можно увеличением КМП, то есть увеличением *демпфирующих* свойств конструкции. Этот способ особенно перспективен для ЭС аэрокосмического комплекса и подробно рассмотрен в главах 6 – 8.

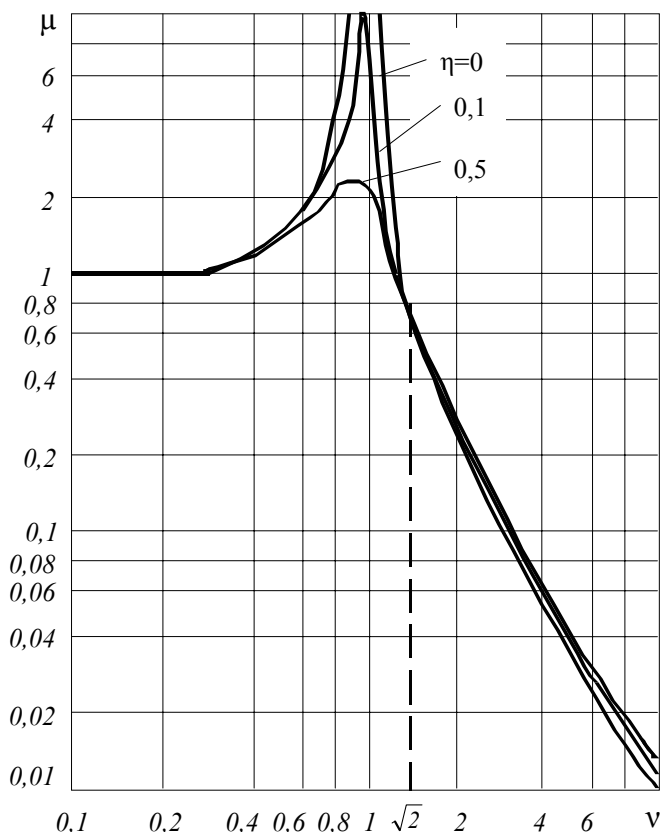


Рис. 2.3. Зависимость коэффициента передачи от коэффициента настройки для деформации связи

На практике часто возникают ситуации, когда амплитуды возбуждающих колебаний, задаваемые нормативно-технической документацией (НТД), превышают допустимые для ЭРЭ или других элементов конструкции. Это требует изоляции изделия от виброактивного основания с целью обеспечения условия $\mu < 1$. Это достигается в *резонансной области*, когда $v > \sqrt{2}$ (1.41). Для обеспечения эффективной *виброизоляции*, когда $\mu < 0,1-0,2$, необходимо выполнить условие

$$f/f_0 > 4 \div 5$$

Более подробно вопросы виброизоляции рассмотрены в главе 9.

Представляет интерес график зависимости угла сдвига фаз α между перемещениями основания и системы. Для нахождения такой зависимости на рис. 2.4 представлена векторная диаграмма сил, действующих на систему.

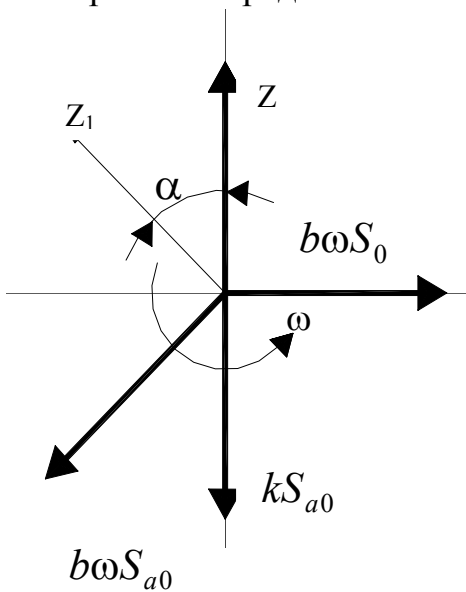


Рис. 2.4. Векторная диаграмма сил

При составлении диаграммы считалось, что в рассматриваемый момент времени система двигалась вертикально вверх. Вектор силы инерции, равный $m\omega^2 S_0$ (см. уравнение 2.14), совпадает с направлением движения. Вектор силы упругости, равный kS_0 , имеет противоположное направление. Вектор диссипативной силы опережает вектор силы упругости на 90° . Перемещение основания опережает перемещение системы на угол α , вектор силы упругости kS_{a0} совпадает с направлением перемещения основания, а вектор диссипативной силы $b\omega S_{a0}$ опережает вектор силы kS_0 на 90° . Суммы всех сил, а следовательно, и их проекции на оси координат, равны нулю. Следовательно, для проекции сил на горизонтальную и вертикальную оси можно написать соответствующие уравнения

$$m\omega^2 S_0 + kS_{a0} \cos \alpha = kS_0 + b\omega S_{a0} \cos(90^\circ - \alpha),$$

$$b\omega S_0 = kS_{a0} \cos(90^\circ - \alpha) + b\omega S_{a0} \cos \alpha$$

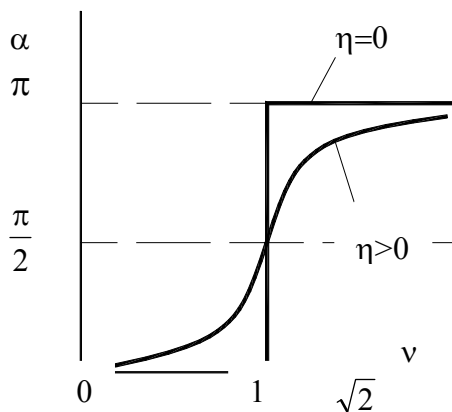


Рис. 2.5. Фазовая характеристика

Решая совместно эти уравнения, найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta v^2}{(1 - v^2 + \eta^2 v^2)}. \quad (2.21)$$

Из графиков на рис. 2.5, построенных на основе этого выражения, видно, что при резонансе сдвиг фаз между виброперемеще-

нием основания и системы равен $\pi/2$, при $v > \sqrt{2}$ сдвиг фаз приближается к π , то есть колебания становятся противофазными, чем и объясняется эффект виброизоляции.

Кинематическое случайное вибрационное возбуждение. Будем считать, что основание системы (рис. 1.6) колеблется по случайному закону с постоянной спектральной плотностью ускорения $S_{z_1}(\omega)$. В соответствии с формулой (1.11) действующее значение реакции системы

$$\sigma_{z_2} = \sqrt{D_{z_2}} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_{z_2}(\omega) d\omega}, \quad (2.22)$$

где $S_{z_2}(\omega)$ - спектральная плотность ускорения системы может быть определена по формуле [13]

$$S_{z_2}(\omega) = |H(i\omega)|^2 S_{z_1}(\omega), \quad (2.23)$$

справедливой для линейных систем. Подставляя (2.23) в (2.22) получим

$$\sigma_{z_2} = \sqrt{\int_0^{\infty} |H(i\omega)|^2 S_{z_1}(\omega) d\omega}. \quad (2.24)$$

Передаточная функция $H_{z/z_1}(i\omega)$ определена выше при анализе системы в условиях гармонического воздействия (2.15). Для расширения круга рассматриваемых задач найдем передаточную функцию $H_{z/z_1}(i\omega)$, то есть когда входом системы является ускорение основания $\ddot{z}_1(t)$, а выходом (реакцией) – перемещение $z(t)$.

Вводя обозначение $\xi = z - z_1$, а также прибавив к обоим частям уравнения (2.13) выражение $-m\ddot{z}_1$, получим

$$m\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + k\xi = -m\ddot{z}_1. \quad (2.25)$$

Так как передаточная функция не зависит от вида воздействия, будем считать, что воздействие $z_1(t)$, а следовательно и реакция ξ , представляющая в данном случае деформацию пружины, является гармоническими функциями $z_1 = z_{10}e^{i\omega t}$, $\xi = \xi_0 e^{i\omega t}$. Подставляя ξ в (2.25), получим

$$-m\omega^2 \xi + ib\omega \xi + k\xi = -m\ddot{z}_1.$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} |H_{z/z_1}(i\omega)| &= \frac{|\xi|}{|\ddot{z}_1|} = \frac{-m}{|k - m\omega^2 + ib\omega|} = \frac{m/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{b^2\omega^2}{k^2}}} = \\ &= \left(\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Подставляя (2.26) в (2.24) и принимая во внимание, что

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\pi\omega_0}{2\eta},$$

получим

$$\sigma_{\dot{z}} = \sqrt{\frac{\pi S_{\dot{z}_1}(\omega)}{2\omega_0^3\eta}} \quad (2.27)$$

На практике часто требуется определить вероятность превышения пиковыми значениями случайного процесса определенного уровня. Реакцией слабодемпфированных систем на широкополосное случайное воздействие является узкополосный случайный процесс [13]. Если он нормальный, то пиковые значения z_n процесса распределены по закону Рэлея и вероятность превышения ими заданного уровня можно найти по формуле:

$$P\left(\frac{|z_n|}{\sigma_{\dot{z}}}\right) = \exp\left[\frac{-z_n^2}{2\sigma_{\dot{z}}^2}\right]. \quad (2.28)$$

Графически эта зависимость представлена на рис. 2.6. Например, из

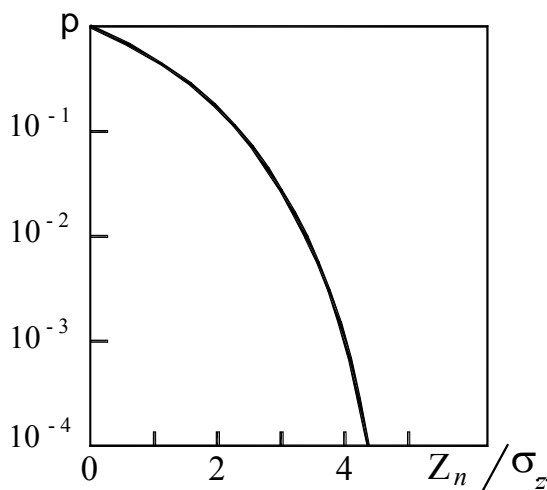


рис.2.6 видно, что только 1% всех пиков превышает среднеквадратичное значение, вычисленное по (2.27).

Ударное воздействие [5].

Рассмотрим воздействие ударного импульса на систему, показанную на рис.2.7. Будем считать, что воздействие кинематическое, то есть определяется законом по которому происходит перемещение основания $z_1 = f(t)$. Такие задачи возникают, когда аппаратура устанавливается на упругие элементы для изоляции от динамически активного основания. На практике обычно задается не смещение основания, а его уско-

Рис. 2.6. Зависимость:

$$P\left(\frac{|z_n|}{\sigma_{\dot{z}}}\right) = \exp\left[\frac{-z_n^2}{2\sigma_{\dot{z}}^2}\right].$$

рение в виде импульса определенной формы.

Рассмотрим часто встречаемую форму ударного импульса, воздействующего на основание, в виде *полуволны синусоиды* (рис.2.8)

$$\ddot{z}_1 = A \sin pt, \quad 0 \leq t \leq \pi/p = t_{\text{И}},$$

где A — амплитуда импульса в единицах ускорения; $p = \pi/t_{\text{И}}$ — условная «частота» импульса; $t_{\text{И}}$ — длительность импульса.

Уравнение движения системы имеет вид:

$$m\ddot{z} + k(z - z_1) = 0.$$

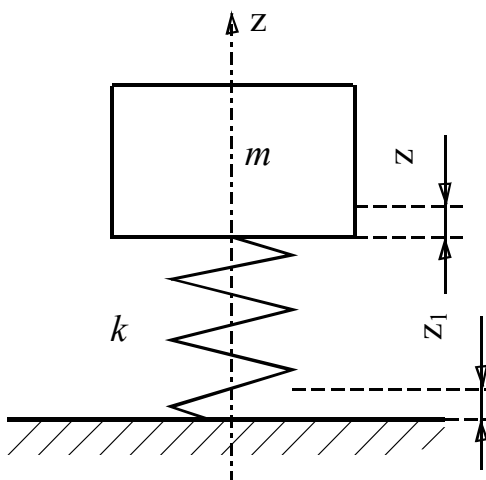


Рис. 2.7. Модель системы с одной степенью свободы

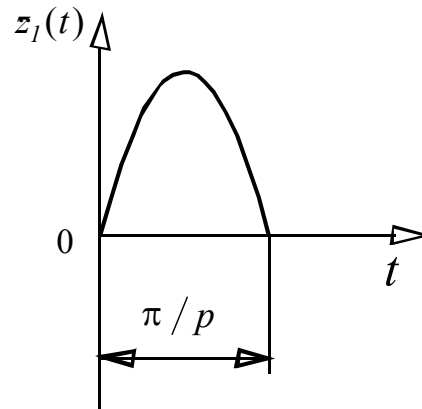


Рис.2.8. Форма ударного импульса

Перепишем его в виде $m\ddot{z} + kz = kz_1$ и продифференцируем дважды по времени

$$m\ddot{z}' + kz' = kz_1'. \quad (2.29)$$

Введем обозначения: $\dot{z} = J$; $\ddot{z} = \dot{J}$, где J — ускорение массы m .

Тогда уравнение (2.29) можно представить в виде

$$m\dot{J} + kJ = k\dot{z}_1. \quad (2.30)$$

Если подставить в уравнение (2.30) функцию $\dot{z}_1 = A \sin pt$, то найденное решение будет справедливо только для моментов времени $0 < t < t_{\text{И}}$, находящихся в пределах длительности импульса. Чтобы определить движение системы в последующие за $t_{\text{И}}$ моменты времени, \dot{z}_1 необходимо выразить в виде такой функции времени, в которой аргумент может изменяться от 0 до ∞ . Такую возможность обеспечивает *операторный метод*. Известно, что умножение функции на оператор сдвига $e^{-\lambda s}$

вызывает смещение графика на длину λ в положительном направлении оси

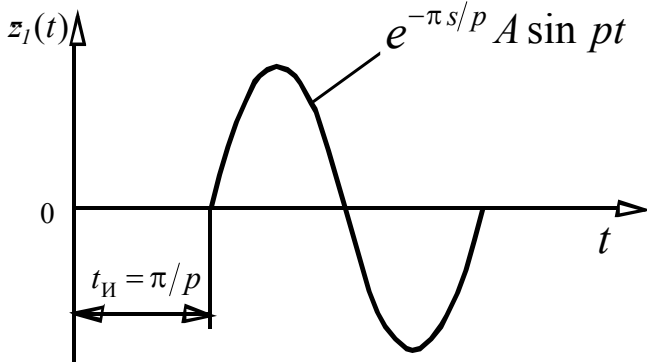


Рис.2.9. График смещённой функции

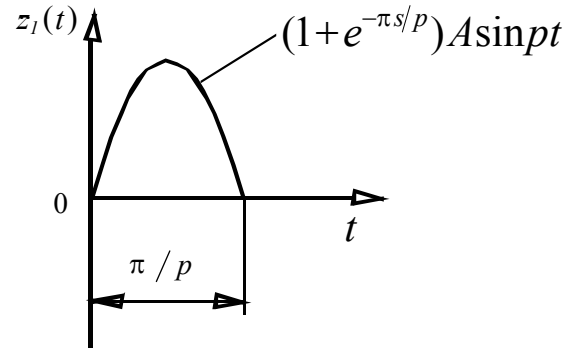


Рис. 2.10. График суммы функций

времени. Таким образом, функция $\ddot{z}_1 = A \sin pt$, будучи умноженной на $e^{-\pi s/p}$, имеет вид, показанный на рис. 2.9.

Если сложить несмещённую и смещённую функции, то получится функция, представленная на рис. 2.10. Как видим, эта функция удовлетворяет поставленным требованиям. Сохраняя вид одиночного импульса, она в то же время остается пригодной для любого момента времени $0 < t < \infty$.

Подставив полученную функцию вместо \ddot{z}_1 в выражение (2.30), получим дифференциальное уравнение, описывающее поведение массы m для любого момента времени t при действии на основание импульса ускорения в виде полуволны синусоиды

$$m\ddot{J} + kJ = k(1 + e^{-\pi s/p}) A \sin pt, \quad (2.31)$$

Учитывая начальные условия $J(0) = \dot{J}(0) = 0$, поскольку до возбуждения система была в покое, уравнение (2.31) в изображениях можно представить в виде

$$ms^2 J + kJ = kA(1 + e^{-\pi s/p}) p / (s^2 + p^2), \quad (2.32)$$

откуда

$$J = \frac{A\omega^2 p}{(s^2 + p^2)(s^2 + \omega^2)} (1 + e^{-\pi s/p}), \quad (2.33)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$.

Учитывая, что

$$\frac{A\omega^2 p}{(s^2 + p^2)(s^2 + \omega^2)} \xrightarrow{\bullet} A\omega \left(\frac{p \sin \omega t - \omega \sin pt}{p^2 - \omega^2} \right); \quad (2.34)$$

$$\frac{A\omega^2 p e^{-\pi s/p}}{(s^2 + p^2)(s^2 + \omega^2)} \xrightarrow{\bullet} A\omega \left(\frac{p \sin \omega \left(t - \frac{\pi}{p} \right) - \omega \sin p \left(t - \frac{\pi}{p} \right)}{p^2 - \omega^2} \right),$$

и полагая $t_{И} = \pi/p$, получаем в оригиналах

$$\begin{aligned} J &= A\omega(p \sin \omega t - \omega \sin pt)/(p^2 - \omega^2) + A\omega(p \sin \omega t \cos \omega t_{И} - \\ &\quad - p \cos \omega t \sin \omega t_{И} + \omega \sin pt)/(p^2 - \omega^2) = \\ &= A\omega p \sqrt{2(1 + \cos \omega t_{И})} \sin(\omega t - \omega t_{И}/2)/(p^2 - \omega^2) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ускорение на изделии отстает по фазе от ускорения на основании на величину $\theta = -\omega t_{И}$. Временной ход ускорения согласно уравнению (2.35) показан на рис. 2.11. Первый максимум ускорения на массе m наступает при значении времени

$$t_{\text{макс}} = \pi/2\omega + t_{И}/2. \quad (2.36)$$

Максимальное ускорение

$$J_{\text{макс}} = [A\omega p / (p^2 - \omega^2)] \sqrt{2(1 + \cos \omega t_{И})}. \quad (2.37)$$

Коэффициент изоляции удара

$$\mu = J_{\text{макс}} / \ddot{z}_{1\text{макс}} = [2\nu / (\nu^2 - 1)] \cos(\pi/2\nu), \quad (2.38)$$

где $\nu = p/\omega$ – «настройка» системы.

Из выражения (2.38) следует, что при $\nu \rightarrow \infty$ $\mu \rightarrow 0$; при $\nu \rightarrow 1$ $\mu \rightarrow \pi/2$; при $\nu \rightarrow 0$ $\mu \rightarrow 0$.

Пользуясь формулой (2.38), можно найти ускорение на изолируемом изделии

$$J_{И} = \mu J_{\text{ос}}, \quad (2.39)$$

если задано ускорение на основании $J_{\text{ос}}$ и «настройка» изолирующей подвески $\nu = p/\omega = T/2t_{И}$, где $T = 2\pi/\omega t_{И}$ – период свободных колебаний

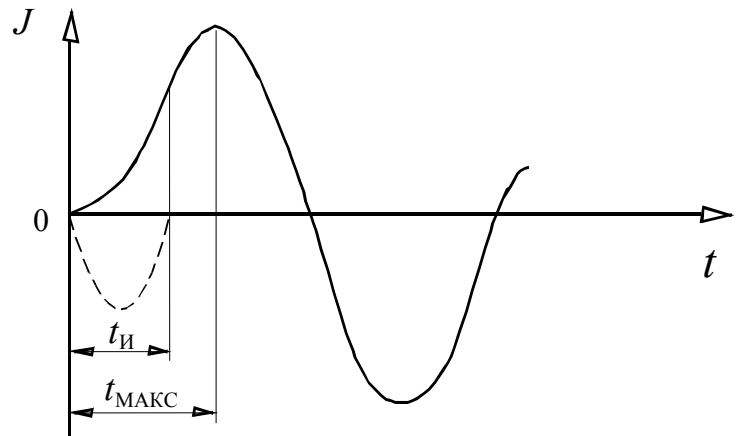


Рис. 2.11. Зависимость $J=f(t)$

объекта в направлении удара; $t_{И}$ – длительность импульса удара.

Таким образом, для определения максимальных усилий и напряжений в элементах объекта достаточно знать длительность ударного импульса $t_{И}$ и максимальное ускорение J_{oc} на основании, а также период свободных колебаний T объекта в направлении удара и коэффициент изоляции удара μ .

Если проинтегрировать выражение (2.35) по времени, то получим выражения для смещения изделия

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left[2Ap \cos(\omega t_{И} / 2) / (p^2 - \omega^2) \right] \cdot [-\cos(\omega t - \omega t_{И}) + B_1]; \\ z &= \left[2Ap / (p^2 - \omega^2) \right] \cos(\omega t_{И} / 2) \int [-\cos(\omega t - \omega t_{И} / 2) + B_1] dt = \\ &= \left[2Ap / (p^2 - \omega^2) \right] \cos(\omega t_{И} / 2) [(-1/\omega) \sin(\omega t - \omega t_{И} / 2) + B_1 t + B_2], \end{aligned}$$

где B_1 и B_2 – постоянные, определяемые из начальных условий. При $t=0$, $z = \dot{z} = 0$, например, имеем

$$B_1 = \cos(\omega t_{И} / 2); \quad B_2 = -(1/\omega) \sin(\omega t_{И} / 2);$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left[2Ap / (p^2 - \omega^2) \right] \cos(\omega t_{И} / 2) [\cos(\omega t_{И} / 2) - \cos(\omega t - \omega t_{И} / 2)]; \\ z &= \left[2Ap / (p^2 - \omega^2) \right] \cos(\omega t_{И} / 2) [t \cos(\omega t_{И} / 2) - (1/\omega) \sin(\omega t_{И} / 2) - \\ &- (1/\omega) \sin(\omega t - \omega t_{И} / 2)]. \end{aligned}$$

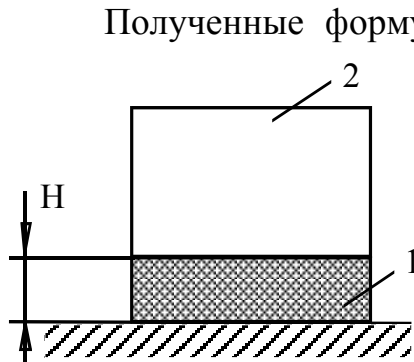


Рис. 2.12. Прокладка (1) для защита изделия (2)

Полученные формулы можно использовать для расчета толщины прокладки (рис. 2.12) для защиты от случайных падений изделий или однократных толчков при транспортировании. Будем считать, что основание испытывает вертикальные толчки в виде полусинусоидального импульса с амплитудой $\dot{Z}_{10 \max}$ и длительностью $t_{И}$, допустимое ускорение $J_{дон}$.

По формуле (2.38) найдем минимальное значение коэффициента изоляции μ_{\min} , а также значение ν , при котором правая

часть выражения (2.38) превысит μ_{\min} .

Так как $\nu = \omega/\omega_0$ и $\omega = \pi/t_{И}$, найдем

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_{И} \nu};$$

используя формулу (2.2), найдём требуемую жесткость прокладки:

$$k = m\omega_0^2 = 4\pi^2 m f_0^2.$$

Жесткость прокладки можно найти также по формуле $k = P/\Delta H$, где P - сила, а ΔH - деформация прокладки. Применяя закон Гука $\sigma = E\varepsilon$ и учитывая, что $E = \Delta H / H$, $p = \sigma S$, где S - площадь прокладки, найдем $k = \frac{ES}{H}$. Отсюда, требуемая толщина прокладки $H = \frac{ES}{k}$.

2.2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Свободные колебания. Будем считать, что приведенная на рис. 2.13 система с массами m_1 и m_2 может иметь только перемещения в направлении оси z . Такая система обладает двумя степенями свободы. Уравнения движения масс m_1 и m_2 системы, если пренебречь диссипативными силами, могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + k_1 z_1 - k_2 (z_2 - z_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2 (z_2 - z_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Принимая в качестве частных решений этой системы выражения

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= S_1 \sin(\omega t + \varphi), \\ z_2 &= S_2 \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

получим следующую систему однородных относительно S_1 и S_2 уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) S_1 - k_2 S_2 &= 0, \\ -k_2 S_1 + (k_2 - m_2 \omega^2) S_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при S_1 и S_2 :

$$\Delta = (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 = 0, \quad (2.43)$$

придем к частотному уравнению системы

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0. \quad (2.44)$$

Из (2.42) определяется также отношение амплитуд колебаний по координатам z_1 и z_2 , или коэффициент формы колебаний:

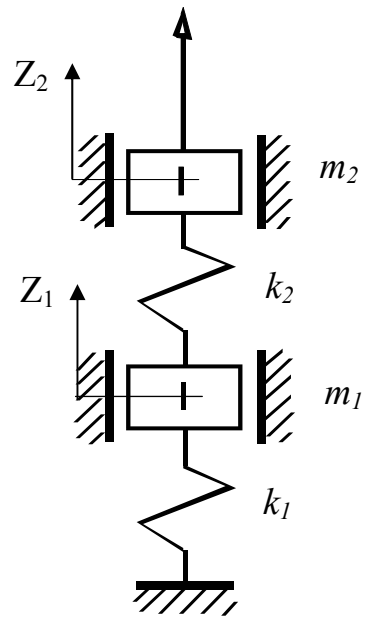


Рис. 2.13. Система с двумя степенями свободы

$$\chi = \frac{S_2}{S_1} = \frac{k_1 + k_2 - m_1 \omega^2}{k_2} = \frac{k_2}{k_2 - m_2 \omega^2}. \quad (2.45)$$

Решение уравнения (2.44) дает два значения собственных частот колебаний:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}}. \quad (2.46)$$

Следовательно, в общем случае колебания системы (рис. 2.13) происходят на двух частотах, и общие решения уравнений (2.40) будут иметь вид

$$z_1 = S_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi) + S_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi); \quad (2.47)$$

$$z_2 = S_{21} \sin(\omega_1 t + \varphi) + S_{22} \sin(\omega_2 t + \varphi).$$

Здесь ω_1 и ω_2 - первая и вторая собственные частоты (индексы у амплитуд обозначают соответственно первый—номер координаты (массы), второй—номер частоты).

При соответствующем возбуждении процесс колебаний может происходить на одной частоте ω_1 или ω_2 . Тогда в уравнениях (2.47) будут отсутствовать первые или вторые члены. Такие колебания называются *главными*. Соответствующие им *собственные формы* колебаний определяются из (2.45) подстановкой частот ω_1 и ω_2 . В частотном уравнении (2.46) члены в скобках имеют размерность квадрата частоты:

$$(k_1 + k_2)/m_1 = \omega_{01}^2; \quad k/m_2 = \omega_{02}^2.$$

Здесь ω_{01} и ω_{02} — *парциальные частоты*, т. е. собственные частоты парциальных одномассовых систем с массами m_1 и m_2 и жесткостями связей $(k_1 + k_2)$ и k_2 соответственно.

Рассмотрим соотношения между частотами и амплитудами главных колебаний на примере системы (рис. 2.13), у которой $m_1 = m_2 = m$ и $k_1 = k_2 = k$. По (2.46) найдем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \approx 0,618 \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1,618 \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\omega_1 = 0,618 \omega_{01}; \quad \omega_2 = 1,618 \omega_{02}$$

и по (2.45)

$$\chi_{21} = \frac{S_{21}}{S_{11}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618;$$

$$\chi_{22} = \frac{S_{22}}{S_{12}} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \approx -0,618.$$

Таким образом, вторая собственная частота выше первой; при колебаниях по первой форме обе массы движутся в фазе, при колебаниях по второй форме – в противофазе, о чем свидетельствуют разные знаки коэффициентов χ_{21} и χ_{22} .

Вынужденные колебания. Динамический гаситель колебаний. Рассмотрим колебания системы с двумя степенями свободы (см. рис.2.13) при кинематическом возбуждении основания по закону $z_a = S_0 \sin \omega t$. В этом случае справедливы уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + k_1(z_1 - z_a) + k_2(z_1 - z_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.48)$$

Здесь $k_1 + k_2 = r_{11}$; $r_{12} + r_{21} = -k_2$; $r_{22} = k_2$, произведение $k_1 S_0$ играет роль амплитуды вынуждающей силы. Принимая частные решения системы (2.48) в виде

$$z_1 = S_{1B} \sin \omega t; \quad z_2 = S_{2B} \sin \omega t,$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) S_{1B} - k_2 S_{2B} &= k_1 S_0 \\ -k_2 S_{1B} + (k_2 - m_2 \omega^2) S_{2B} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

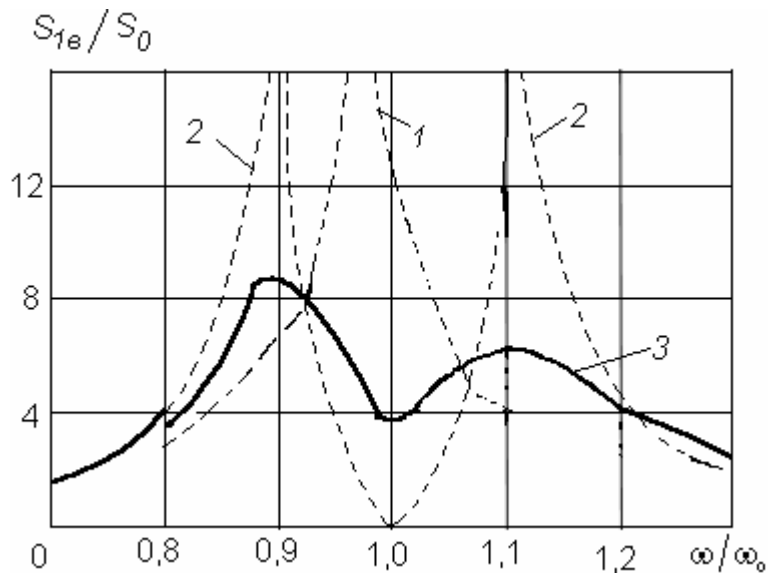


Рис. 2.14. Амплитудно-частотные характеристики: 1- масса m_1 при отсутствии массы m_2 ; 2-масса m_1 с ДГК без демпфирования; 3 – масса m_1 с ДГК с демпфированием

Отсюда находим зависимость амплитуд S_{1B} и S_{2B} от частоты:

$$S_{1B} = k_1 S_0 (k_2 - m_2 \omega^2) / \Delta; \quad (2.49)$$

$$S_{2B} = k_1 k_2 S_0 / \Delta, \quad (2.50)$$

где $\Delta = (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2$.

Из (2.49) видно, что масса m_1 не будет вибрировать ($S_{1B} = 0$), когда $k_2 - m_2 \omega^2 = 0$. Отсюда видно, что должно выполняться условие

$$\omega = \sqrt{k_2 / m_2} = \omega_{02},$$

то есть соответственная частота колебаний массы m_2 должна равняться частоте возбуждения. Это явление получило название динамического гашения колебаний, а система $m_2 - k_2$ – динамического гасителя колебаний (ДГК). Как видно, из (2.50) при $\omega = \omega_{02}$ амплитуда колебаний ДГК

$$S_{2B} = -k_1 S_0.$$

Отсюда $S_2 = -k_1 S_0 \sin \omega t = k_1 S_0 (\sin \omega t \pm \pi)$. Следовательно, эффект ДГК основан на противофазных колебаниях массы m_1 , под которой понимается виброзащищаемый объект, масса m_2 .

Недостатком ДГК является, то что он подавляет резонансные колебания только на одной частоте ω_{02} и в то же время может привести к возникновению резонансных колебаний на двух других частотах (рис. 2.14). Это ограничивает его применение для устранения резонансных колебаний ЭС, на которые часто действуют вибрации в широком диапазоне частот. Однако применение ДГК с демпфированием позволяет резко уменьшить амплитуды резонансных колебаний (рис. 2.14). Так как этот эффект достигается за счет демпфирующих свойств, ДГК можно рассматривать как демпфер. Теория таких демпферов рассмотрена в главе 8.

2.3. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

При расчете блока (аппарата) на виброизоляторах он рассматривается как абсолютно твердое тело, установленное на упругих связях, соединяющих блок с основанием (рис. 2.15). Такая система имеет шесть степеней свободы. Они определяются смещениями $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ центра масс O вдоль осей x, y, z и углами поворота $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ относительно этих осей.

Свободные колебания. Наиболее общей формой уравнений свободных колебаний системы без демпфирования являются уравнения Лагранжа.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, 6, \quad (2.50)$$

где q_i – i -я обобщенная координата; \dot{q}_i – i -я обобщенная скорость; T – кинетическая энергия системы; Π – потенциальная энергия системы.

Рассмотрим, как при помощи этой системы уравнений можно определить собственные частоты колебаний.

Как известно из теоретической механики, потенциальная энергия системы с m степенями свободы определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} q_i q_k, \quad (2.51)$$

где α_{ik} – обобщенные коэффициенты жесткости, представляющие собой единичные реакции связей в i -м направлении при перемещении системы в k -м направлении, при этом $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

Для системы с шестью степенями свободы имеющие реальный физический смысл коэффициенты жесткости можно разбить на следующие четыре группы:

- линейные: $\alpha_{11} = \sum k_x$; $\alpha_{22} = \sum k_y$; $\alpha_{33} = \sum k_z$;
- линейно-поворотные: $\alpha_{15} = \sum k_x z$;
 $\alpha_{16} = -\sum k_x y$; $\alpha_{24} = -\sum k_y z$; $\alpha_{26} = \sum k_y x$;
 $\alpha_{34} = \sum k_z y$; $\alpha_{35} = -\sum k_z x$;
- гироскопические: $\alpha_{45} = -\sum k_z xy$;
 $\alpha_{46} = -\sum k_y zx$; $\alpha_{56} = -\sum k_x yz$;
- крутильные: $\alpha_{44} = \sum (k_y z^2 + k_z y^2)$;
 $\alpha_{55} = \sum (k_z x^2 + k_x z^2)$; $\alpha_{66} = \sum (k_x y^2 + k_y x^2)$.

Здесь k_x , k_y , k_z – коэффициенты жесткости амортизаторов в направлении соответствующих осей; x , y , z – координаты их расположения.

Для примера рассмотрим определение некоторых из приведенных коэффициентов жесткости для одного из опорных виброизоляторов, изображенных на рис. 2.16.

1. Линейно-поворотный коэффициент α_{34} можно представить как вертикальную упругую реакцию P_z , возникающую в точке A крепления амортизатора (рис. 2.17) при повороте блока вокруг оси x , отнесенную к

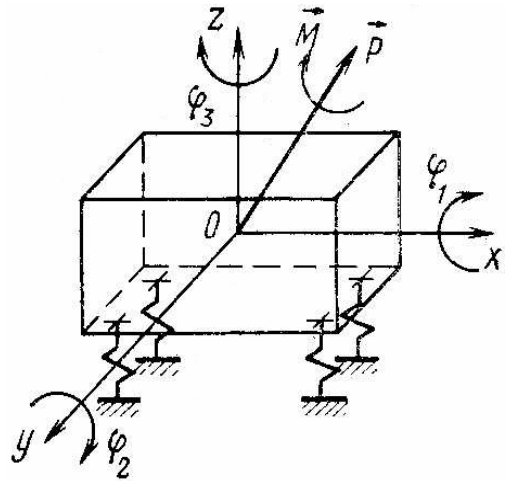


Рис. 2.15. Расчетная модель виброизолируемого прибора

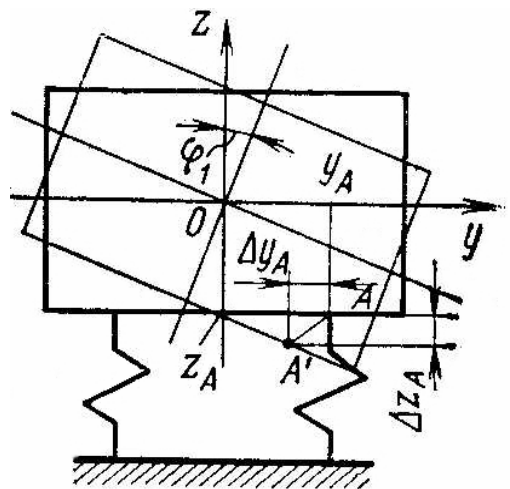


Рис. 2.16. К определению линейно-поворотного коэффициента жесткости

углу поворота φ_1 . Таким образом, $\alpha_{34} = P_z / \varphi_1 = k_z / \Delta \varphi_1 = k_z y_A$, где y_A – расстояние точки крепления амортизатора от плоскости xOz .

2. Гироскопический коэффициент

α_{45} можно выразить как момент M_2 упругой реакции P_z относительно оси Y , отнесенный к углу поворота точки A вокруг оси X (рис. 2.17):

$$M_2 = P_z x_A = k_z \Delta z x_A = k_z x_A \varphi_2 x_A.$$

Из рис. 2.17 видно, что $x_A \varphi_2 = -y_A \varphi_1$. Поэтому $\alpha_{45} = M_2 / \varphi_1 = -k_z x_A y_A$, где x_A, y_A – координаты точки крепления амортизатора.

3. Крутильный коэффициент α_{44} определим как отношение момента M_1 к углу поворота φ_1 . При вычислении момента M_1 следует учитывать, что точка A смещается в новое положение A' по дуге (рис. 2.18). Поэтому здесь будут возникать две реакции: P_z и P_y . Тогда $M_1 = P_z y_A + P_y z_A = -k_z \Delta z y_A - k_y \Delta y_A z_A = k_z y_A^2 \varphi_1 + k_y z_A^2 \varphi_1$. Откуда $\alpha_{44} = M_1 / \varphi_1 = k_z y_A^2 + k_y z_A^2$.

Аналогично вычисляются все другие коэффициенты жесткости формулы (2.51).

Кинетическая энергия системы с шестью степенями свободы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^6 \beta_{ik} q_i q_k, \quad (2.52)$$

где β – коэффициенты инерции.

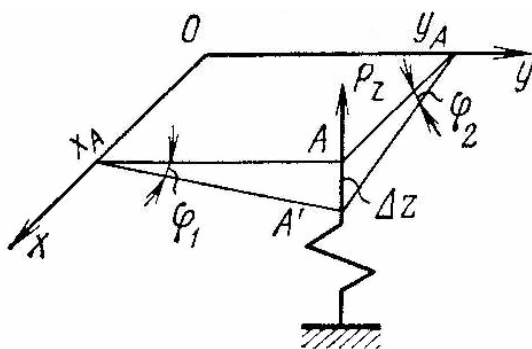


Рис. 2.17. К определению гироскопического коэффициента жесткости

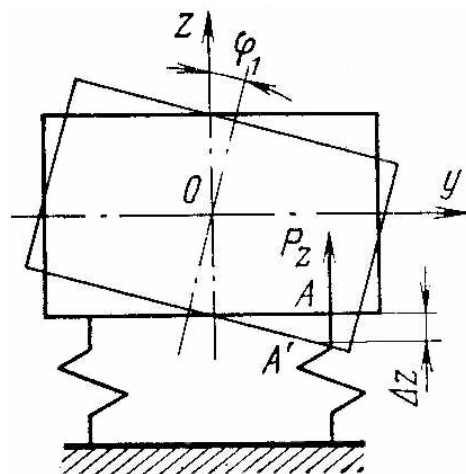


Рис. 2.18. К определению крутильного коэффициента жесткости

Для линейных смещений $\beta_{11}=\beta_{22}=\beta_{33}=m$. Для поворотов $\beta_{44}=J_x$, $\beta_{55}=J_y$, $\beta_{66}=J_z$ – моменты инерции аппарата относительно осей x , y , z ; $\beta_{46}=J_{xz}$, $\beta_{45}=J_{xy}$, $\beta_{56}=J_{yz}$ - соответствующие центробежные моменты.

Рассеиваемая энергия определяется *диссипативной функцией*, которая имеет такое же выражение, как и кинетическая энергия:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^6 h_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k ,$$

где h_{ik} – обобщенные коэффициенты трения, которые определяются аналогично коэффициентам α_{ik} через соответствующие коэффициенты трения виброизоляторов.

Если целью расчета является определение собственных частот системы, то в уравнении (2.50) можно также опустить члены, учитывающие трение, которое, как было отмечено выше, мало влияет на частоту свободных колебаний.

Учитывая сказанное, подставим выражения (2.51) и (2.52) для потенциальной и кинетической энергии в уравнение (2.50) и произведем последовательно дифференцирование по каждой из шести координат. В результате получим шесть уравнений свободных колебаний системы:

$$\begin{aligned} \beta_{11} \ddot{\delta}_1 + \alpha_{11} \delta_1 + \alpha_{15} \varphi_2 + \alpha_{16} \varphi_3 &= 0, \\ \beta_{11} \ddot{\delta}_2 + \alpha_{22} \delta_2 + \alpha_{24} \varphi_1 + \alpha_{26} \varphi_3 &= 0, \\ \beta_{11} \ddot{\delta}_3 + \alpha_{33} \delta_3 + \alpha_{34} \varphi_1 + \alpha_{35} \varphi_2 &= 0, \\ \beta_{44} \ddot{\varphi}_1 + \beta_{45} \ddot{\varphi}_2 + \beta_{46} \ddot{\varphi}_3 + \alpha_{24} \delta_2 + \alpha_{34} \delta_3 + \alpha_{44} \varphi_1 + \alpha_{45} \varphi_2 + \alpha_{46} \varphi_3 &= 0, \\ \beta_{45} \ddot{\varphi}_1 + \beta_{55} \ddot{\varphi}_2 + \beta_{56} \ddot{\varphi}_3 + \alpha_{15} \delta_1 + \alpha_{35} \delta_3 + \alpha_{45} \varphi_1 + \alpha_{55} \varphi_2 + \alpha_{56} \varphi_3 &= 0, \\ \beta_{46} \ddot{\varphi}_1 + \beta_{56} \ddot{\varphi}_2 + \beta_{66} \ddot{\varphi}_3 + \alpha_{16} \delta_1 + \alpha_{26} \delta_2 + \alpha_{46} \varphi_1 + \alpha_{56} \varphi_2 + \alpha_{66} \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Частные решения системы уравнений (2.53) можно принять в виде

$$\begin{aligned} \delta_1 &= A_1 \sin(\omega t + \alpha) , & \varphi_1 &= A_4 \sin(\omega t + \alpha) , \\ \delta_2 &= A_2 \sin(\omega t + \alpha) , & \varphi_2 &= A_5 \sin(\omega t + \alpha) , \\ \delta_3 &= A_3 \sin(\omega t + \alpha) , & \varphi_3 &= A_6 \sin(\omega t + \alpha) . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Подставив эти решения в (2.53), получим систему однородных алгебраических уравнений, определитель которой

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & \alpha_{22} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{26} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} - \beta_{11}\omega^2 & \alpha_{34} & \alpha_{35} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} - \beta_{44}\omega^2 & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 \\ \alpha_{13} & 0 & \alpha_{35} & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{55} - \beta_{55}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & 0 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 & \alpha_{66} - \beta_{66}\omega^2 \end{vmatrix} \quad (2.55)$$

Развернув этот определитель и приравняв его к нулю, получим частотное уравнение шестой степени относительно ω^2 :

$$A\omega^{12} + B\omega^{10} + C\omega^8 + D\omega^6 + E\omega^4 + F\omega^2 + G = 0, \quad (2.55)$$

где A, B, \dots, G - постоянные коэффициенты, которые могут быть найдены после развертывания определителя и сведения подобных членов. Их аналитические выражения имеют довольно громоздкий вид. Поэтому целесообразно находить собственные частоты как собственные значения матрицы (2.55). Численное значение определителя

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

можно найти по правилу

$$\Delta_n = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)},$$

где

$$a_{ii}^{(k)} = a_{ii} - a_{ik} a_{ki} / a_{kk} \quad (i=1,2,\dots,n; k=n-1),$$

например

$$a_{55}^{(4)} = a_{55} - a_{54} \cdot a_{45} / a_{44}.$$

Алгоритм определения собственных частот состоит в следующем. Задаваясь некоторым значением частоты ω (заведомо меньшим низшей собственной частоты блока), вычисляем значение определителя Δ_1 . Затем,

увеличивая последовательно частоту на 5-10% (или на другую величину в зависимости от требуемой точности), вычисляем значения Δ_2, Δ_3 и т. д., проверяя все время выполнение условия $\Delta_m - \Delta_{m+1} > 0$. Прекращение выполнения этого условия свидетельствует о том, что значение определителя перешло через нуль. Следовательно, истинное значение собственной частоты лежит между двумя последними принятыми в расчет значениями.

Аналогично можно найти остальные собственные частоты.

Вынужденные колебания. Для аппарата на виброизоляторах с внутренним демпфированием для каждой из обобщенных координат получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \beta_{11} \ddot{\delta}_1 + (1 + j\eta)(\alpha_{11}\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 + \alpha_{16}\varphi_3) &= P_1(t) ; \\
 \beta_{11} \ddot{\delta}_2 + (1 + j\eta)(\alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3) &= P_2(t) ; \\
 \beta_{11} \ddot{\delta}_3 + (1 + j\eta)(\alpha_{33}\delta_3 + \alpha_{34}\varphi_1 + \alpha_{35}\varphi_2) &= P_3(t) ; \\
 \\
 \beta_{44} \ddot{\varphi}_1 + \beta_{45} \ddot{\varphi}_2 + \beta_{46} \ddot{\varphi}_3 + (1 + j\eta)(\alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{34}\delta_3 + \\
 + \alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{45}\varphi_2 + \alpha_{46}\varphi_3) &= M_1(t) ; \\
 \beta_{45} \ddot{\varphi}_1 + \beta_{55} \ddot{\varphi}_2 + \beta_{56} \ddot{\varphi}_3 + (1 + j\eta)(\alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 + \\
 + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{55}\varphi_2 + \alpha_{56}\varphi_3) &= M_2(t) ; \\
 \beta_{46} \ddot{\varphi}_1 + \beta_{56} \ddot{\varphi}_2 + \beta_{66} \ddot{\varphi}_3 + (1 + j\eta)(\alpha_{16}\delta_1 + \alpha_{26}\delta_2 + \\
 + \alpha_{46}\varphi_1 + \alpha_{56}\varphi_2 + \alpha_{66}\varphi_3) &= M_3(t) .
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Если обобщенные возмущающие нагрузки являются гармоническими функциями времени, то целесообразно применить комплексную форму их записи:

$$P_i(t) = \bar{P}_{0i} e^{j\omega t} ; \quad M_i(t) = \bar{M}_{0i} e^{j\omega t}$$

и искать частотные решения в виде

$$\begin{aligned}
 \delta_1 = \bar{A}_{1B} e^{j\omega t} , \quad \delta_2 = \bar{A}_{2B} e^{j\omega t} , \quad \delta_3 = \bar{A}_{3B} e^{j\omega t} , \\
 \varphi_1 = \bar{A}_4 e^{j\omega t} , \quad \varphi_2 = \bar{A}_5 e^{j\omega t} , \quad \varphi_3 = \bar{A}_6 e^{j\omega t} ,
 \end{aligned}$$

где $\bar{P}_{0i}, \bar{M}_{0i}$ – комплексные амплитуды возмущающих сил и моментов; \bar{A}_{iB} – комплексная амплитуда смещения по i -й координате; ω – частота возбуждения.

Подставляя эти решения в (2.56), получим систему из шести алгебраических уравнений, из которых можно найти амплитуды A_{iB} в функции частоты ω . Решение этой задачи в общем виде весьма трудоемко, однако при рациональном размещении виброизоляторов и расположении аппарата относительно действующих нагрузок задача может быть существенно упрощена.

Контрольные вопросы

1. Как определяется СЧК системы с одной степенью свободы (ОСС)?
2. Выведите формулу коэффициента динамического усиления колебаний для системы с ОСС.
3. Выведите формулу для коэффициента передачи (КП) системы с ОСС.
4. Нарисуйте график зависимости КП от частоты и объясните основные способы защиты изделий от вибраций.
5. Приведите векторную диаграмму сил, действующих на систему с ОСС.
6. Дайте анализ системы с ОСС при случайном вибрационном воздействии.
7. Почему применяется операторный метод при анализе системы с ОСС на ударное воздействие?
8. Как определяются СЧК системы с двумя степенями свободы?
9. Что понимается под собственной формой колебаний, парциальной частотой?
10. Дайте анализ вынужденных колебаний системы с ОСС.
11. Что понимается под динамическим гасителем колебаний? Принцип работы и недостатки ДГК.
12. Напишите Уравнения Лагранжа для свободных колебаний системы с шестью степенями свободы.
13. Как определяется СЧК систем с шестью степенями свободы?
14. Как составляются уравнения вынужденных колебаний для систем с шестью степенями свободы?

Глава 3

Анализ ЭС, приводимых к системам с распределенными параметрами

3.1. СВОБОДНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА БАЛОК

Расчет собственных частот колебаний. Жесткость балки на изгиб обычно бывает значительно ниже жесткости на растяжение и кручение, поэтому расчет изгибных колебаний балок представляет для практики наибольший интерес. При расчете обычно предполагают, что упругая ось балки совпадает с линией центров масс поперечных сечений и при колебаниях все точки балки смещаются перпендикулярно первоначальному (прямолинейному) направлению оси. Все поперечные сечения при этом остаются плоскими.

В расчете учитываются только силы инерции, действующие в направлении оси z , и силы упругости, препятствующие деформации изгиба балки. В этом случае уравнение движения балки (рис. 3.1) имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ_y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] + m_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

Здесь J_y – момент инерции сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба; EJ_y – жесткость балки при изгибе, характеризующая его способность сопротивляться искривлению оси, m_0 – масса единицы длины балки.

Уравнение (3.1) выражает равенство действующих на элемент балки равномерно распределенных нагрузок от сил инерции и упругости. Для его решения представим функцию $z(x, t)$ в виде

$$z(x, t) = w_i(x) \cos(\omega_{0i} t + \varphi), \quad (3.2)$$

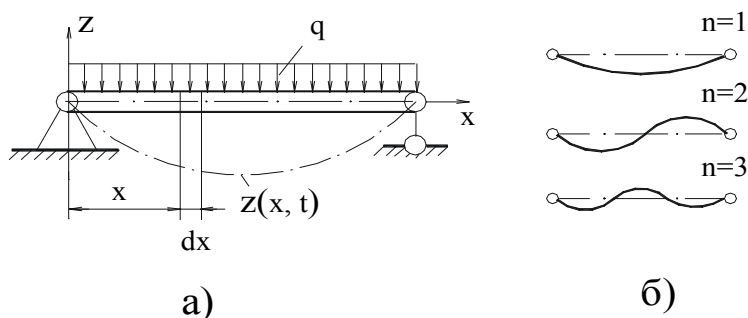


Рис. 3.1. Изгибные колебания балки:
а – схема нагружения; б – формы колебаний

где $w_i(x)$ – амплитудная функция, характеризующая отклонение точек балки от положения равновесия на i -й резонансной частоте.

Функция $w_i(x)$ называется собственной формой колебаний балки и зависит от граничных условий и номера собственной формы. Номер собственной формы n определяется по числу $n_{уз}$ внутренних узловых точек: $n = n_{уз} + 1$ (точки крепления балки не учитываются). Подстановка (3.2) в (3.1) дает

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - \omega_{0i}^2 m_0 w = 0. \quad (3.3)$$

В общем случае m_0, F, J_y могут быть переменными по длине балки, и тогда (3.3) не имеет точного решения. Поэтому для анализа основных зависимостей рассмотрим случай, когда эти значения постоянны. Уравнение (3.3) примет вид (символ аргумента у функции w опущен)

$$EJ_y \frac{d^4 w}{dx^4} - \omega_{0i}^2 m_0 w = 0$$

или

$$w^{IV} - k_i^4 w = 0, \quad (3.4)$$

где

$$k_i^4 = \omega_{0i}^2 \frac{\rho F}{EJ_y}. \quad (3.5)$$

Общее решение уравнения (3.4) состоит из суммы четырех частных решений. Оно может быть представлено в виде известных функций Крылова [3] или в виде

$$w_i(x) = A_i \sin k_i x + B_i \cos k_i x + C_i \operatorname{sh} k_i x + D_i \operatorname{ch} k_i x. \quad (3.6)$$

Таким образом, форма колебаний зависит от постоянных интегрирования A_i, B_i, C_i, D_i и параметра k_i , т. е. от частоты ω_{0i} . Для определения постоянных A_i, B_i, C_i, D_i должны быть рассмотрены граничные условия, зависящие от способа закрепления концов балки.

Наиболее часто встречаются следующие виды граничных условий:

1) на опертом конце балки (шарнирное крепление) прогиб и изгибающий момент равны нулю или $w = 0; w'' = 0$;

2) на жестко закрепленном конце прогиб и угол поворота сечения равны нулю, т. е. $w = 0; w' = 0$;

3) на свободном конце балки изгибающий момент и перерезывающая

сила равны нулю, откуда $w'' = 0; w''' = 0$.

Известны другие виды граничных условий [2, 10].

Используя решение (3.6) и граничные условия, можно найти частные виды решений и получить для каждого из них частотное уравнение, из которого вычислить параметры k (а следовательно, и частоты ω) для любой формы колебания. В частности, для приведенного выше случая балки с шарнирно закрепленными концами (рис. 3.1) граничные условия будут

$$\text{при } x = 0 \quad w = w'' = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad w = w'' = 0.$$

Используя первые два граничных условия, находим: $B_i = D_i = 0$. Два других условия приводят к следующей системе линейных однородных относительно A_i и C_i уравнений

$$\begin{cases} A_i \sin k_i l + C_i \operatorname{sh} k_i l = 0; \\ -A_i \sin k_i l + C_i \operatorname{sh} k_i l = 0. \end{cases}$$

Приравняв определитель этой системы к нулю, получим уравнение частот $\sin k_i l \operatorname{sh} k_i l = 0$. Так как $\operatorname{sh} k_i l$ обращается в нуль только при $k_i l = 0$ (что обозначает отсутствие колебаний), частотное уравнение для данного способа закрепления балки будет

$$\sin \lambda = 0 \quad (\lambda = kl), \quad (3.7)$$

а его корни $\lambda_n = i\pi$ ($i=1, 2, \dots$).

Уравнением формы колебаний для данного частного случая будет уравнение синусоиды

$$w_i(x) = A_i \sin i\pi x / l, \quad (3.8)$$

амплитуда которой A_i представляет собой максимальный прогиб балки и определяется начальными условиями.

Значение корня частотного уравнения (3.7) определяет форму колебаний (в данном случае i – число полуволн синусоидальной линии изгиба, укладываемых на длине балки) и соответствующую собственную частоту. Эта частота находится из (3.5) подстановкой в него корней частотного уравнения (3.7):

$$\omega_{0i} = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}} \quad \text{или} \quad f_{0i} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}}. \quad (3.9)$$

Для балки прямоугольного сечения $F = bh$ и $J_y = bh^3 / 12$, и тогда

$$\omega_{0i} = \frac{(i\pi)^2}{l^2} \frac{h}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.10)$$

Таким образом, собственная частота балки прямоугольного сечения не зависит от его ширины b .

Для консольно закрепленной балки (рис. 3.2) граничные условия будут:

$$\text{при } x = 0 \quad w = w' = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad w'' = w''' = 0.$$

Используя (3.6) и граничные условия, приходим к частотному уравнению

$$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda + 1 = 0. \quad (3.11)$$

Из этого уравнения находим следующие значения параметра λ :

$$\lambda_1 = 1,875; \quad \lambda_2 = 4,694; \quad \lambda_i \approx (2i - 1)\pi/2 \quad (i \geq 3). \quad (3.12)$$

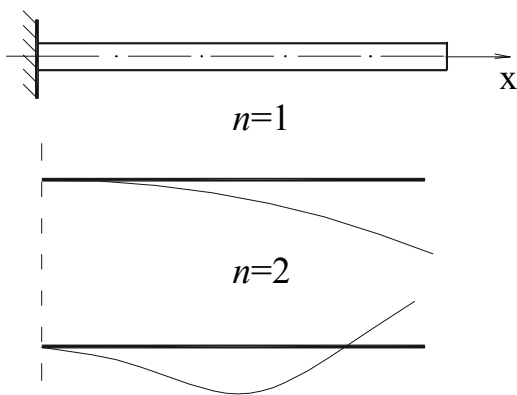


Рис. 3.2. Формы изгибных колебаний консольной балки

Подставив эти значения в (3.9), можно найти любую из собственных частот консольной балки.

Формы колебаний балки (рис. 3.2) могут быть определены из уравнения амплитудной функции подстановкой в нее соответствующих корней λ частотного уравнения (3.11) и постоянной, зависящей от начальных условий.

Для балки, оба конца которой жестко закреплены, граничные условия будут:

$$w = w' = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad x = l.$$

При этих граничных условиях получим частотное уравнение в виде

$$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda - 1 = 0, \quad (3.13)$$

которое дает следующие значения λ :

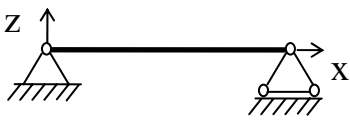
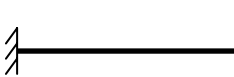


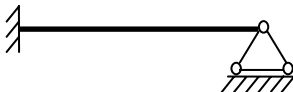
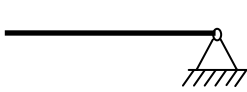
$$\lambda_1 = 4,730; \quad \lambda_2 = 7,853; \quad \lambda_i \approx (2i + 1)\pi/2 \quad (i \geq 3). \quad (3.14)$$

Подстановка этих значений в (3.9) дает собственные частоты балки, оба конца которой жестко закреплены ¹⁾.

Частотные коэффициенты для первых трех СЧК ($i=1,2,3$) и типичных способов крепления концов балки приведены в табл. 3.1.

¹⁾ Такие же частоты будет иметь балка с двумя свободными концами.

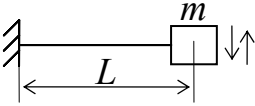
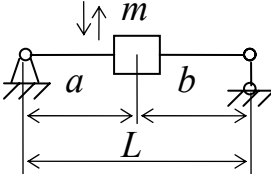
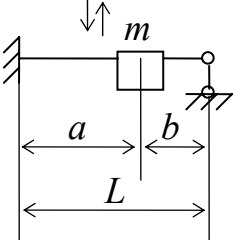
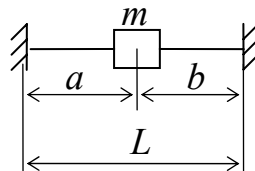
Частотные коэффициенты λ_i

Схема балки	i	λ_i	Схема балки	i	λ_i
	1	3.14		1	1.88
	2	6.28		2	4.69
	3	9.43		3	7.86
	1	4.73		1	0
	2	7.85		2	4.73
	3	11.00		3	7.85
	1	3.93		1	0
	2	7.07		2	3.93
	3	10.21		3	7.07

СЧК балок с сосредоточенной массой рассчитываются по формулам, приведенным в табл. 3.2 [10].

Таблица 3.2

Собственные частоты колебаний балок с сосредоточенными массами

Схема балки	СЧК	Схема балки	СЧК
	$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \cdot EJL}{mL^3}}$		$f_0 = \frac{1}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3 \cdot EJL}{m}}$
	$f_0 = \frac{L}{\pi ab} \sqrt{\frac{3 \cdot EJL}{ma(3a + 4b)}}$		$f_0 = \frac{L}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3 \cdot EJL}{mab}}$

Анализ (3.10) показывает, что балка имеет бесконечное число собственных форм колебаний и соответствующее им число собственных частот, при этом частоты всех тонов быстро возрастают. Из (3.10) видно также, что любая собственная частота балки сильно зависит от ее длины (обратно пропорционально квадрату длины) и в меньшей степени от размеров и формы поперечного сечения и свойств материала. Это дает возможность конструктору корректировать частотные характеристики разрабатываемой

конструкции.

Пример 3.1. Рассчитать три первые собственные частоты колебаний балки, свободно опертой на концах и имеющей следующие параметры: поперечное сечение круглое с диаметром $d = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м, длина $L = 2,8 \cdot 10^{-2}$ м. Балка (вывод ЭРЭ) выполнена из меди с характеристиками $E = 1,32 \cdot 10^{11}$ н/м²; $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³ (табл. П.1).

Решение. Для балки круглого сечения находим

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14(0,5 \cdot 10^{-3})^4}{64} = 3,1 \cdot 10^{-15} \text{ м}^4;$$

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 3,14(0,5 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}.$$

По формуле (3.9), взяв из табл.3.1 $\lambda_1 = 3,14$; $\lambda_2 = 6,28$ и $\lambda_3 = 9,33$ найдем

$$f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = \frac{3,14^2}{6,28(2,8 \cdot 10^{-2})^2} \sqrt{\frac{1,32 \cdot 10^{11} \cdot 3,1 \cdot 10^{-15}}{1,75 \cdot 10^{-3}}} = 942 \text{ Гц};$$

$$f_{02} = 3768 \text{ Гц}; f_{03} = 8478 \text{ Гц}.$$

3.2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА БАЛОК

Определение амплитуд колебаний при гармоническом возбуждении. Для определения резонансных амплитуд, деформаций и механических напряжений в элементах балочных конструкций в процессе эксплуатации необходимо рассмотреть уравнения их движения при вынужденных колебаниях. Эти уравнения будут отличаться от однородных уравнений (3.1) правой частью, в которой будут находиться внешние силы: кроме этого, в левую часть уравнений необходимо ввести диссипативную силу, которая определяет потери энергии при колебаниях. Вид уравнений вынужденных изгибных колебаний зависит от принимаемой гипотезы о диссипативной силе.

Для конструкций с демпфирующими слоями из полимерных материалов широкое распространение получила экспериментально проверенная гипотеза, согласно которой диссипативная сила принимается пропорциональной скорости деформации [3]. Уравнение вынужденных изгибных колебаний балки записывается в виде

$$m_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EJ_y \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + h \frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial t} \right) = P(x, t), \quad (3.15)$$

где $P(x, t)$ - внешняя сила, возбуждающая колебания и приложенная к

точке с координатой x ; h – коэффициент пропорциональности.

Для конструкций из металлов и жестких полимеров наиболее широко применяется гипотеза Сорокина, в соответствии с которой диссипативная сила пропорциональна упругой восстанавливающей силе, но сдвинута относительно последней на угол $\pi/2$. Уравнение движения при этой гипотезе имеет вид

$$m_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EJ_y (1 + j\eta) \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = P(x, t), \quad (3.16)$$

где η - коэффициент механических потерь (КМП).

Для решения уравнений типа (3.15) или (3.16) широко применяется метод разложения функции $z = z(x, t)$, определяющей смещение точек, балки в ряд по собственным формам [3]:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) w_i(x), \quad (3.17)$$

где $a_i(t) = A_{oi} e^{j\omega t}$; $w_i(x)$ - собственные формы колебаний, представленные в виде

$$w_i(x) = \sin k_i x + \overline{A}_i \cos k_i x + \overline{B}_i \operatorname{sh} k_i x + \overline{C}_i \operatorname{ch} k_i x. \quad (3.18)$$

Уравнение (3.18) получается из (3.6) делением левой и правой частей последнего на коэффициент A_i . Следовательно, $\overline{A}_i = B/A_i$, $\overline{B}_i = C/A_i$, $\overline{C}_i = D/A_i$. Волновые числа $k_i = \lambda_i/l$ определяются из граничных условий. Для типичных случаев крепления балок коэффициенты \overline{A}_i , \overline{B}_i , \overline{C}_i и параметр λ_i приведены в табл. П.2.

Внешнюю гармоническую силу $P(x, t) = P(x) e^{j\omega t}$ также представим в виде разложения по тем же функциям $w_i(x)$:

$$P(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) w_i(x), \quad (3.19)$$

где $b_i(t) = B_{oi} e^{j\omega t}$.

Умножая обе части (3.19) на функцию $w_i(x)$, сокращая на $e^{j\omega t}$ и интегрируя их по длине балки, получаем:

$$\int_0^l P(x) w_i(x) dx = \int_0^l B_{o1} w_1(x) w_i(x) dx + \dots + \int_0^l B_{oi} w_i^2(x) dx + \dots \quad (3.20)$$

Из условия ортогональности собственных форм колебаний [3] следу-

ет, что при $i \neq n$

$$\int_0^l w_i(x) w_n(x) dx = 0,$$

и из уравнения (3.20) найдем

$$B_{0i} = \int_0^l P(x) w_i(x) dx \Big/ \int_0^l w_i^2(x) dx. \quad (3.21)$$

Подставив разложения (3.17) и (3.19) в одно из уравнений движения, например в (3.15), получим:

$$\begin{aligned} m_0 \sum_{i=1}^{\infty} (j\omega)^2 a_i(t) w_i(x) + EJ(1 + jh\omega) \sum_{i=1}^{\infty} k_i^4 a_i(t) w_i(x) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) w_i(x). \end{aligned}$$

Учитывая (3.5), найдем

$$\begin{aligned} m_0 \sum_{i=1}^{\infty} (j\omega)^2 a_i(t) w_i(x) + m_0(1 + jh\omega) \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{0i}^2 a_i(t) w_i(x) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) w_i(x). \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых $w_i(x)$ в левой и правой частях последнего уравнения, получим:

$$a_i(t) = \frac{b_i(t)}{m_0 [(\omega_{0i}^2 - \omega^2) + jh\omega\omega_{0i}^2]}.$$

Подставляя его в разложение (3.17), найдем комплексное смещение

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i(t) w_i(x)}{m_0 [(\omega_{0i}^2 - \omega^2) + jh\omega\omega_{0i}^2]}. \quad (3.22)$$

Если считать, что балка возбуждается кинематически, т. е. за счет колебаний опор, то гармоническую возбуждающую силу можно представить в виде

$$P(x, t) = m_0 \ddot{Z}(t),$$

где $\ddot{Z}(t) = \ddot{Z}_0 e^{j\omega t}$ - ускорение мест крепления балки, не зависящее от координаты x :

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ddot{Z}(t) K_i(x)}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + jh\omega\omega_{0i}^2}, \quad (3.23)$$

где

$$K_i(x) = \frac{\int_0^l w_i(x) dx}{\int_0^l w_i^2(x) dx} \cdot w_i(x). \quad (3.24)$$

Интегралы, входящие в (3.24), для типичных случаев крепления краев можно определить при помощи табл. П4. Для ускорения расчетов можно воспользоваться табл. П.5, в которой приведены значения $K_i(x/l)$ для пяти собственных форм колебаний.

Используя (3.23), передаточную функцию балки в точке с координатой x представим в виде

$$\Phi_{z/\ddot{z}}(j\omega) = \frac{z(x,t)}{\ddot{Z}(t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i(x)}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + jh\omega\omega_{0i}^2}. \quad (3.25)$$

Коэффициент передачи в этой точке

$$\mu_{i,z/\ddot{z}}(x) = |\Phi_{z/\ddot{z}}(j\omega)| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i(x)}{\omega_{0i}^2 \sqrt{(1 - \gamma_i^2)^2 + \eta_i^2 \gamma_i^2}}, \quad (3.26)$$

где $\gamma_i = \omega / \omega_{0i}$.

При резонансе, когда частота возбуждающих колебаний равна одной из собственных частот колебаний, приближенно можно считать, что форма вынужденных резонансных колебаний совпадает с собственной формой колебаний балки, т. е. $z(x,t) = Z_0(x) = A_{0i} w_i(x)$. Отсюда следует

$$\mu_{i,z/\ddot{z}}(x) = \frac{Z_0(x)}{\ddot{Z}_0} = \frac{K_i(x)}{\omega_{0i}^2 \eta_i}. \quad (3.27)$$

Выражение (3.27) определяет коэффициент передачи для перемещения $Z_0(x)$ при заданном ускорении опор. Учитывая, что при гармоническом возбуждении $\ddot{Z}_0 = \omega^2 Z_0$ коэффициент передачи ускорения при резонансе в точке балки с координатой x по отношению к ускорению опор

$$\mu_{i,\ddot{z}_0(t)/\ddot{z}_0}(x) = \frac{\ddot{Z}_0(x)}{\ddot{Z}_0} = \frac{K_i(x)}{\eta_i}. \quad (3.28)$$

Часто требуется знать не относительное, а абсолютное ускорение. Учитывая, что при резонансе сдвиг фаз между колебаниями балки и возбуждающими колебаниями равен $\pi/2$, получим:

$$\ddot{Z}_{0\text{абс}}(x) = \sqrt{\ddot{Z}_{0i}^2 + \ddot{Z}_0^2};$$

$$\mu_{i, \ddot{Z}_{0abc} / \ddot{Z}_0}(x) = \frac{\ddot{Z}_{0abc}(x)}{\ddot{Z}_0} = \sqrt{\frac{K_i^2(x)}{\eta_i^2} + 1}. \quad (3.29)$$

Коэффициент механических потерь (КМП) балки можно приближенно найти по эмпирической формуле [8]

$$\eta_i = \sqrt{\frac{1}{f_{0i}}}, \quad (3.30)$$

где f_{0i} – i -я собственная частота колебаний, определяемая по формулам, приведенным в §3.1.

Пример 3.2. Определить амплитуду виброускорения в точке балки с координатой $x=1 \cdot 10^{-3}$ м при первом резонансе, если балка возбуждается кинематически через колебания опор с амплитудой виброускорения $5g$. Все остальные параметры балки и способ крепления соответствуют примеру.

Решение. Находим по формуле (3.30) КМП балки

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{942}} = 0,033.$$

Из табл. П.5 для относительной координаты $\xi=(1 \cdot 10^{-2}/2 \cdot 10^{-2})=0.5$ выбираем $K_i(x)=1$.

По формуле (3.29) найдем коэффициент передачи

$$\mu_1(0,5) = \sqrt{\frac{1}{0,033^2} + 1} = 5,59$$

и по формуле (3.28) – ускорение в середине балки

$$\ddot{Z}(0,5) = 5,59 \cdot 5g = 28g.$$

Расчет по (3.27), (3.29) может вызвать затруднение, если способы крепления концов балки не соответствуют строго типовым — шарнирному опиранию, жесткому заземлению и т.п. Сравнение значений коэффициентов λ в (3.9) для основного тона при различных способах крепления показывает, что наибольшая ошибка получится, если балку со свободно опертыми концами ($\lambda = 3,14$) рассчитать для случая жесткого заземления концов ($\lambda = 4,73$) и наоборот. Поэтому, если способы крепления не соответствуют строго типовым и не ясно, к какому типовому креплению ближе реальные условия, то ошибка в определении коэффициента передачи $\mu_{i, Z / \ddot{Z}}(x)$ за счет неточного определения частоты ω_{oi} может оказаться недопустимо большой. В этом случае частоту ω_{oi} целесообразно находить экспериментально. Для последующих обертонов ошибка будет меньше, и коэффициент λ_i можно принимать как среднюю величину для предельных с точки зрения определения собственной частоты способов закрепления.

Значение возможной ошибки в определении коэффициента $K_i(x)$ наглядно видно из рис. 3.3. на котором приведены графики, построенные

на основе данных табл. П.5. Видно, что максимальные значения коэффициента $K_i(x)$ при различных способах закрепления различаются несущественно, а наибольшее значение соответствует случаю жесткого защемления

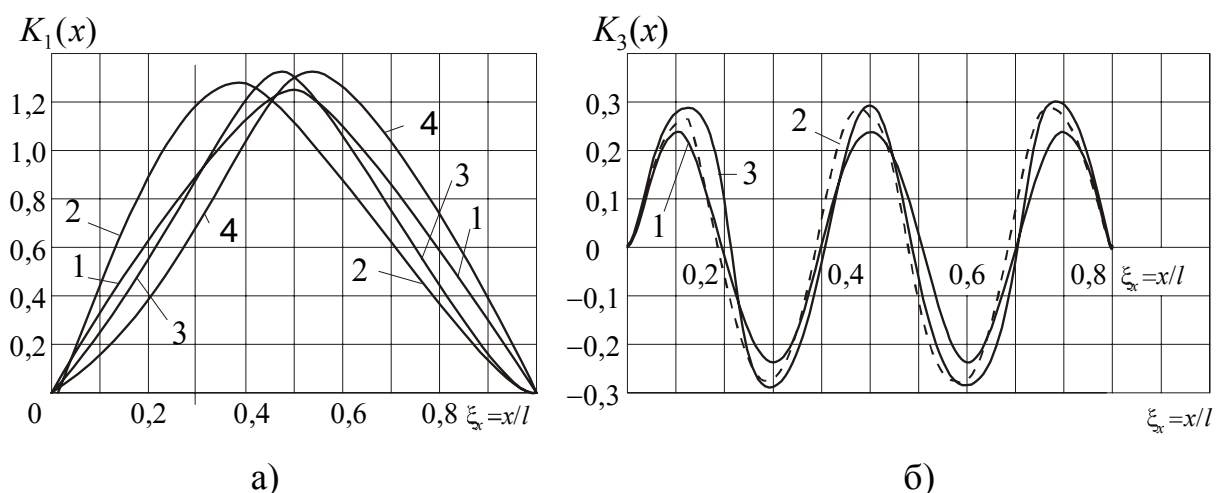


Рис. 3.3. Значения коэффициента формы колебаний в различных точках балки при первой (а) и третьей (б) гармониках:

1 - свободное опирание — свободное опирание; 2 — свободное опирание — жесткое защемление; 3 — жесткое защемление — жесткое защемление; 4 — жесткое защемление — свободное опирание

ния. Этот вывод важен для практики, так как именно максимальные амплитуды вибро смещения и напряжения часто требуется находить для определения прочности конструкции. Поэтому, если способ крепления балки не соответствует типовому, максимальную амплитуду целесообразно рассчитывать как для балки с жестко защемленными концами при $\xi_x = 0,5$ для первого резонанса, $\xi_x = 0,225; 0,775$ для второго резонанса и т. д., т. е. для сечений, у которых амплитуда и напряжения максимальны. Ошибка в этом случае не будет превышать 5...10% для первого резонанса, 15...20% для второго и последующего резонансов.

Если необходимо рассчитать амплитуды в нескольких точках балки, расчет рекомендуется также вести для наихудшего случая, выбирая из табл. П.5 наибольшие значения коэффициента $K_i(x)$ для различных способов крепления.

Определение реакции балки при случайном воздействии. Будем считать, что места крепления балки испытывают случайные колебания. Среднеквадратическое отклонение точки балки, имеющей координату x , находится по формуле

$$\sqrt{\bar{v}^2(x)} = \sqrt{\int_0^{\infty} |\Phi(j, \omega)|^2 S(\omega) d\omega},$$

где $S(\omega)$ - спектральная плотность возмущающих колебаний.

Учитывая (3.26) и принимая во внимание [13]

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\pi\omega_0}{2\eta},$$

получаем

$$\sqrt{\bar{v}^2(x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_k^2(x) S(\omega) \pi}{2\omega_{0k}^3 \eta_k}}.$$

Первое слагаемое, соответствующее перемещению на первой собственной частоте колебаний, значительно превышает все остальные, и поэтому

$$\sqrt{\bar{v}^2(x)} \approx K_1(x) \sqrt{\frac{\pi S(\omega)}{2\omega_{01}^3 \eta_1}}.$$

Учитывая, что $f = \omega/2\pi$ и $S(f) = S(\omega) 2\pi/g^2$, получаем

$$\sqrt{\bar{v}^2(x)} \approx K_1(x) \sqrt{\frac{S(f) g^2}{32\pi^3 f^3 \eta_1}}. \quad (3.31)$$

Средний квадрат относительного ускорения $\bar{\ddot{v}}_k^2(x)$ на k -й резонансной частоте

$$\bar{\ddot{v}}_k^2(x) = K_k^2(x) \frac{S(f) g^2 \pi f_k}{2\eta_k}.$$

В отличие от перемещения средний квадрат ускорения существенно зависит от средних квадратов ускорения на всех резонансных частотах [13]:

$$\sqrt{\bar{\ddot{v}}^2(x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \bar{\ddot{v}}_k^2(x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{K_k^2(x) S(f) g^2 \pi f_k}{2\eta_k}}, \quad (3.32)$$

где n – число собственных частот колебаний в заданном диапазоне частот.

Пример 3.3. Определить среднеквадратическое значение ускорения в точке балки с координатой $X = 0,8 \cdot 10^{-2}$ м, если балка возбуждается кинематически случайной вибрацией в диапазоне от 10 до 5000 Гц с постоянной спектральной плотностью уско-

рения $S(f) = 0,1 g^2 / \Gamma_{\text{ц}}$. Концы балки свободно оперты. Остальные параметры, как в примере 3.1.

Решение. Как было определено в примере 3.1 в диапазоне 10-5000 Гц имеется две собственные частоты колебаний $f_{01} = 942$ Гц и 3768 Гц. Из табл.П.5. для относительной координаты $\xi = (0,8 \cdot 10^{-2} / 2 \cdot 10^{-2})$ находим $K_1=0,95$; $K_2=0,59$. Используя формулу (3.32) найдем

$$\bar{\bar{V}}(x) = \left\{ 1,21^2 \frac{3,14 \cdot 9,81^2 \cdot 0,1 \cdot 942 \sqrt{942}}{2} + 0,748^2 \frac{3,14 \cdot 9,81^2 \cdot 0,1 \cdot 3768 \sqrt{3768}}{2} \right\}^{0,5} = 1612 \text{ м/с}^2.$$

3.3. СВОБОДНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ПЛАСТИН

Собственные частоты колебания пластинчатых конструкций.

При расчете пластин (рис.3.4) обычно принимают следующие допущения:

- 1) изгибные деформации пластин при колебаниях малы по сравнению с её толщиной, упругие деформации подчиняются закону Гука;
- 2) пластина имеет постоянную толщину;
- 3) в пластине имеется нейтральный слой, который при изгибных колебаниях пластины не подвержен деформациям растяжения – сжатия;

- 4) материал пластины идеально упругий, однородный и изотропный;

- 5) справедлива гипотеза прямых нормалей, согласно которой все прямые, нормальные к среднему слою пластины до деформирования остаются прямыми и нормальными к ней и после деформации.

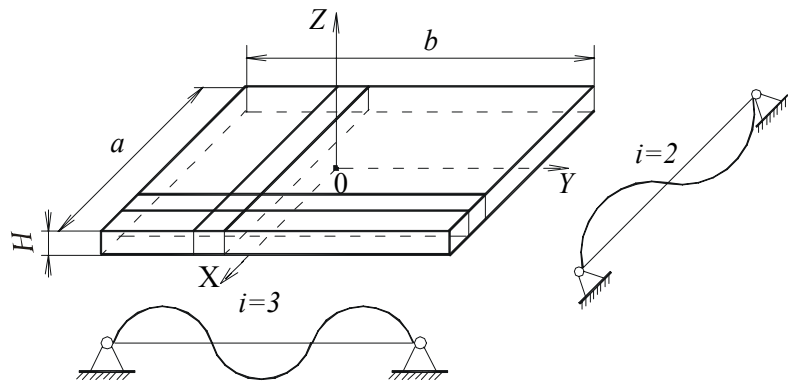


Рис. 3.4. Пластина и возможные формы ее колебаний

При составлении уравнений движения можно использовать уравнение изгиба пластины при действии распределенной статической нагрузки $q(x, y)$ [21]

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = q(x, y), \quad (3.33)$$

где $\omega = \omega(x, y)$ - прогиб пластины в точке с координатами x и y ; D - цилиндрическая жесткость пластины:

$$D = \frac{EH^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (3.34)$$

В (3.34) E и ν - соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины, а H - её толщина.

Заменяя в (3.33) в соответствии с принципом Д'Аламбера статистическую нагрузку силой инерции $m(\partial^2 z / \partial t^2)$, получим уравнение свободных незатухающих (собственных) колебаний пластины:

$$m \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right) + D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = 0, \quad (3.35)$$

где $z = z(x, y, t)$.

Наибольшее распространение для решения задач о собственных колебаниях получили точные методы, основанные на непосредственном решении уравнения (3.35), а также приближенные энергетические методы, основанные на законе сохранения энергии. В дальнейшем необходимо знать формулы для вычисления максимальных значений кинетической T_{\max} и потенциальной Π_{\max} энергии пластины:

$$T_{\max} = \frac{\rho H \omega_0^2}{2} \iint_{S_n} \omega^2 dx dy \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} = \frac{D}{2} \iint_{S_n} & \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \times \right. \\ & \left. \times \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где S_n - площадь пластины; ρ - плотность материала.

Точный метод расчета собственных частот колебаний пластин. Известно точное решение задачи о собственных колебаниях конструкции типа прямоугольных пластин, когда две противоположные стороны свободно оперты при любых граничных условиях на двух других краях. Наиболее простое решение получается, когда все края пластины свободно

оперты. Решения уравнения собственных колебаний (3.35) в этом случае имеет вид

$$z(x, y, t) = w(x, y) \cdot e^{j\omega_0 t}.$$

Амплитудная функция $w(x, y)$, называемая собственной формой колебаний пластины, определяется выражением

$$w(x, y) = A_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{f\pi y}{b}\right),$$

где a и b – размеры сторон пластины; i, f – число полуволн синусоиды в направлении осей x и y соответственно.

Нетрудно убедиться, что это решение удовлетворяет граничным условиям на контуре

$$z = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a;$$

$$z = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b,$$

которые означают равенство нулю прогибов и изгибающих моментов на краях пластины.

Подставляя решение $z(x, y, t)$ в (3.35), получаем:

$$\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{i\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{i\pi}{b}\right)^2 = \omega_0^2 \frac{\rho H}{D},$$

отсюда собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \pi^2 \left[\left(\frac{i}{a}\right)^2 + \left(\frac{f}{b}\right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho H}}. \quad (3.38)$$

Приближенные методы расчета собственных частот колебаний пластин. Рассмотренный выше точный метод расчета собственных частот колебаний применим только для однородных прямоугольных пластин, свободно опертых на двух других противоположных краях. На практике часто необходимо определить собственные частоты колебаний конструкций, не удовлетворяющих этим требованиям. В таких случаях применяются приближенные методы Рэлея, Ритца, Бубнова-Галеркина и др.

М е т о д Р э л е я. По методу Рэлея собственная частота ω_0 определяется из сопоставления выражений для кинетической и потенциальной энергии колебаний системы.

Максимальные значения кинетической и потенциальной энергий пластин, совершающих одно из главных колебаний

$$z(x, y, t) = w(x, y) \cdot \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

определяются по формулам (3.36), (3.37), тогда для ω_0 получим

$$\omega_0 = \frac{D}{\rho H} \cdot \frac{\int_0^a \int_0^b \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy}{\int_0^a \int_0^b w^2 dx dy},$$

где Δ - оператор Лапласа.

Собственная форма колебаний пластины запишется в виде

$$w_{if}(x, y) = w_i(x)w_f(y), \quad (3.38a)$$

где $w_i(x)$, $w_f(y)$ - базисные функции. Наиболее часто функции $w_i(x)$, $w_f(y)$ представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} w_i(x) &= \sin k_i x + \bar{A}_i \cos k_i x + \bar{B}_i \operatorname{sh} k_i x + \bar{C}_i \operatorname{ch} k_i x \\ w_f(y) &= \sin k_f y + \bar{A}_f \cos k_f y + \bar{B}_f \operatorname{sh} k_f y + \bar{C}_f \operatorname{ch} k_f y \end{aligned} \right\}; \quad (3.39)$$

где $k_i = \lambda_i/a$; $k_f = \lambda_f/b$.

Коэффициенты $\bar{A}_i, \bar{A}_f, \bar{B}_i, \bar{B}_f, \bar{C}_i, \bar{C}_f$ и параметры λ_i, λ_f , как было показано в §3.1 для балки, находятся из граничных условий.

Если на плате есть элементы, которые необходимо рассматривать как сосредоточенные массы m_n , то значение максимальной кинетической энергии находится по формуле

$$T_{\max} = \frac{m_0 \omega_0}{2} \iint_{(S)} w^2(x, y) dS + \sum_{n=1}^S m_n w_n^2(x, y),$$

где $w_n(x, y)$ – максимальный прогиб в точке сосредоточения n -й массы.

В РЭА часто используются платы, закрепленные в отдельных точках (рис 3.5). Если плата крепится на колонках винтами, то такому креплению наиболее точно соответствует схема свободного опирания в этих точках. Базисные функции в этом случае должны удовлетворять геометрическим и динамическим условиям как в точках крепления, так и на контуре. Для рассматриваемого случая, например, в точках крепления $w = 0$, $\partial^2 w / \partial x^2 = \partial^2 w / \partial y^2 = 0$. На краях

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

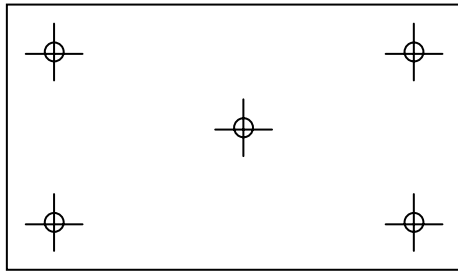


Рис. 3.5. Плата, закрепленная в пяти точках

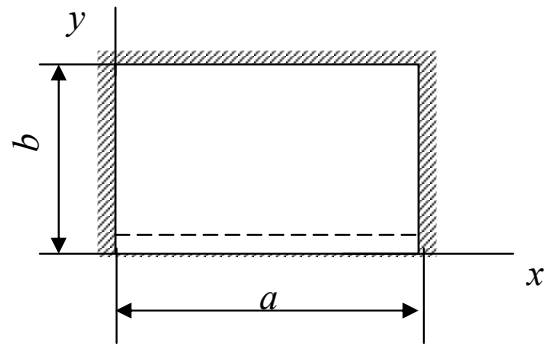


Рис. 3.6. Расчетная модель платы, у которой три края защемлены

Приведем примеры определения собственных частот колебаний методом Рэлея.

Пример 3.4. Получить формулу для определения первой собственной частоты колебаний ячейки, состоящей из прямоугольной платы с равномерно расположенными по площади платы электрорадиоэлементами с общей приведенной массой $m_э = m_0$.

Способ крепления платы позволяет считать три её края жестко закрепленными и один свободно опертым (рис.3.6).

Решение. В качестве первого приближения собственную форму колебаний представим в виде [3]

$$w_1 = w_1(x, y) = w_1(x)w_1(y), \quad (3.40)$$

где $w_1(x), w_1(y)$ - базисные функции типа (3.39), удовлетворяющие соответствующим краевым условиям для балки, жестко защемленной по концам, и балки с жестким креплением одного конца и свободным опиранием на другом.

Учитывая выражение (3.40), формулы для определения максимальных кинетической и потенциальной энергией приведем к виду

$$T_{\max} = \frac{(m_э + m_0)\omega_{01}^2}{2} \int_0^a \int_0^b w_1^2 dx dy = \frac{(m_э + m_0)\omega_{01}^2}{2} \int_0^a w_1^2(x) dx \int_0^b w_1^2(y) dy;$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\max} = & \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \frac{D}{2} \int_0^a w_1''^2(x) dx \times \\
 & \times \int_0^b w_1^2(y) dy + D \int_0^a w_1(x) w_1''(x) dx \int_0^b w_1(y) w_1''(y) dy + \\
 & + \frac{D}{2} \int_0^a w_1^2(x) dx \int_0^b w_1''^2(y) dy.
 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Значения интегралов для соответствующих способов крепления концов находим в табл. П.4. Получим

$$2T_{\max} = 1,04 \cdot 0,5(m_3 + m_0)ab\omega_{01}^2 = 0,52(m_3 - m_0)ab\omega_{01}^2;$$

$$2\Pi_{\max} = D \left(\frac{518,52 \cdot 0,5b}{a^3} + 2 \frac{12,78 \cdot 5,57}{ab} + \frac{1,04 \cdot 118,8a}{b^3} \right) = 259,26 \times$$

$$\times \left(\frac{b}{a^3} + \frac{0,549}{ab} + \frac{0,475a}{b^3} \right).$$

Из равенства $T_{\max} = \Pi_{\max}$ найдем

$$\omega_{01} = \frac{\alpha_1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{(m_3 + m_0)}},$$

где $\alpha_1 = 22,372\sqrt{1 + 0,549\beta^2 + 0,475\beta^4}$, $\beta = a/b$.

Используя эту методику можно получить формулы для определения первой собственной частоты колебаний ячеек с другими способами крепления. Некоторые из них приведены в табл. П.3.

Пример 3.5. Получить формулу для расчета основной собственной частоты колебаний шасси в виде прямоугольной пластины, нагруженной сосредоточенной массой M (рис.3.7). Способ крепления сторон соответствует шарнирному закреплению.

Потенциальная энергия пластины с сосредоточенной массой, как и для пластины без сосредоточенной массы, будет находиться по формуле (3.37). В формуле для кинетической энергии необходимо учесть и кинетическую энергию сосредоточенной массы, равную $(M\omega_0^2/2)w_m(x, y)$. Получим

$$T = \frac{m_0\omega_0^2}{2} \int_0^a \int_0^b w_1(x, y) dx dy + \frac{M\omega_0^2}{2} w_m(x, y) \quad (3.42)$$

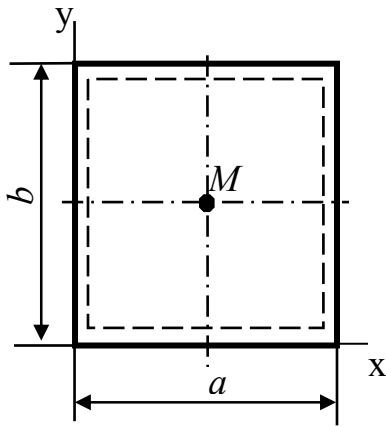


Рис. 3.7. Расчетная модель шасси, нагруженного сосредоточенной массой

где w_m - прогиб пластины в точке расположения сосредоточенной массы.

В первом приближении форму колебаний, как и в предыдущем примере, представим в виде $w_1 = w_1(x, y) = w_1(x)w_1(y)$. Используя (3.41) и табл. П.4, найдем:

$$2\Pi_{\max} = D \left(\frac{48,705 \cdot 0,5b}{a^3} + \frac{2 \cdot 4,934^2}{ab} + \frac{48,705 \cdot 0,5a}{b^3} \right) = \frac{D\pi^4}{4a^2\beta} (1 + 2\beta^2 + \beta^4),$$

где $\beta = a/b$.

Так как для шарнирного крепления (см.табл. П.2)

$$w_1(x) = \sin(\pi x/a) \text{ и } w_1(y) = \sin(\pi y/b),$$

то для координат $x = a/2, y = b/2$ получим $w_1(a/2, b/2) = 1$.

Максимальная кинетическая энергия

$$2T_{\max} = \frac{m_0 \omega_0^2 ab}{4} + \frac{M \omega_0^2}{2} = \omega_0^2 \left(\frac{m_0 ab}{4} + \frac{M}{2} \right).$$

Из равенства максимальных кинетической и потенциальной энергий найдем

$$\omega_0^2 = \frac{D \pi^4 (1 + 2\beta^2 + \beta^4)}{4a^2 \beta (m_0 ab / 4 + M / 2)}.$$

После несложных преобразований получим

$$\omega_0 = (\alpha / a^2) \sqrt{D / m_0 K_m},$$

где $\alpha = \pi^2 \sqrt{1 + 2\beta^2 + \beta^4}$, $\beta = a / b$; $K_m = \sqrt{1 + 2M / m_0 ab}$.

Коэффициент K_m учитывает влияние сосредоточенной массы на собственную частоту колебаний.

Метод Рэлея дает хорошие приближения для основного тона пластины, с ростом номера обертона точность уменьшается.

М е т о д Р и т ц а. Этот метод является развитием метода Рэлея, поэтому его часто называют методом Рэлея-Ритца.

Для пластин собственная форма колебаний ищется в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i, f=1}^n a_{if} w_{if}(x, y),$$

где $w_{if}(x, y)$ – базисные функции, выбираемые в соответствии с граничными условиями, а коэффициенты a_{if} определяются из условия экстремума функционала ($T_{\max} - \Pi_{\max}$), т.е. из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial a_{if}} (T_{\max} - \Pi_{\max}) = 0.$$

Взяв производную, найдем систему из n алгебраических уравнений. Приравняв нулю определитель, составляемый из коэффициентов при a_i , получаем частотное уравнение, решая которое, найдем n собственных частот колебаний. С помощью этого метода получены формулы расчета пластин с различными способами крепления.

Широко распространены формулы

$$\omega_i = (\alpha_i / a^2) \sqrt{D / m K_{\text{ЭРЭ}}}, \text{ рад/с}; \quad (3.43)$$

$$f_i = (\alpha_i / 2\pi a^2) \sqrt{D / m K_{\text{ЭРЭ}}}, \text{ Гц}, \quad (3.43, \text{а})$$

где $K_{\text{ЭРЭ}}$ – коэффициент, учитывающий массу ЭРЭ;

α_i – коэффициент, зависящий от способа крепления пластины, соотноше-

ния ее сторон, номера обертона и определяемый часто из таблицы ПЗ.

Формулу (3.43) иногда приводят к виду

$$f = 10^5 K_m K_{ЭРЭ} B H / a^2, \quad (3.44)$$

где $K_m = \sqrt{E\rho_c / E_c\rho}$; E, E_c – модули упругости применяемого материала и стали; ρ, ρ_c – их плотности;

$$K_{ЭРЭ} = 1 / \sqrt{1 + m_{Э} / m_{П}},$$

$m_{Э}$ – масса элементов, равномерно размещенных на плате; $m_{П}$ – масса платы; частотный коэффициент $B = (\alpha / 2\pi) \sqrt{D / m_0}$; H – толщина; a – длина платы. Значения коэффициентов $K_m, K_{ЭРЭ}$ и B даны в [29].

Для приближенных расчетов спектра собственных частот при различных граничных условиях коэффициент α , входящий в формулу (3.43), можно рассчитать по выражению [10]

$$\alpha = \pi^2 \sqrt{A_i^4 + A_f^4 \beta^4 + 2\beta^2 [\sigma B_i B_f + (1 - \sigma) C_i C_f]}. \quad (3.45)$$

Коэффициенты $A_i, A_f, B_i, B_f, C_i, C_f$ находятся при помощи табл. 3.3 для различных сочетаний краевых условий на противоположных сторонах пластины (C – заземленный, S – опертый, F – свободный края).

Т а б л и ц а 3.3

Значения постоянных А, В, С

Гранич- ные ус- ловия	$i=1$			$i=2$			$i \geq 3$		
	А	В	С	А	В	С	А	В	С
S–S	0	0	0	1	1	1	$i-1$	A2	A2
S–C	0	0	0	1.25	$A(A-1/\pi)$	В	$i-0.75$	$A(A-1/\pi)$	В
S–F	0	0	$3/\pi^2$	1.25	$A(A-1/\pi)$	$A(A+3/\pi)$	$i-0.75$	$A(A-1/\pi)$	$A(A+3/\pi)$
C–C	0	0	0	1.506	1.248	1,248	$i-0.5$	$A(A-2/\pi)$	В
C–F	0.597	0.087	0.471	1.494	1.347	3.284	$i-0.5$	$A(A-2/\pi)$	$A(A+2/\pi)$
F–F	0	0	$12/\pi^2$	1.506	1.248	5.017	$i-0.5$	$A(A-2/\pi)$	$A(A+6/\pi)$

Для расчета прямоугольной пластины, жестко заземленной по контуру, можно использовать табл. 3.4. [10].

**Частотный коэффициент α_i заземленной по контуру
прямоугольной пластины**

m_2	a/b	m_1		
		1	2	3
1	1	36.0	73.4	131.9
	1.5	27.0	65.5	126
	2	24.6	64.1	124
2	1	73.4	108.2	165
	1.5	41.7	79.8	138.6
	2	31.8	71.1	130.4
3	1	131.9	165	220.1
	1.5	66.5	103	161.2
	2	44.8	83.2	142.4

Пример 3.6. Рассчитать первые две собственные частоты колебаний жестко заземленной по контуру прямоугольной платы с размерами $a=0,16$ м, $b=0,17$ м и толщиной $H=0,0015$ м. Материал платы – стеклотекстолит, $E=3 \cdot 10^{10}$ Па, $\sigma=0,22$, $\rho=2,05 \cdot 10^3$ кг/м³. Масса ЭРЭ на плате равна 0,093 кг.

Р е ш е н и е. По формуле (3.34) находим цилиндрическую жесткость

$$D = \frac{3 \cdot 10^{10} (1,5 \cdot 10^{-3})^3}{12(1 - 0,22^2)} = 8,87 \text{ Н/м}.$$

Учитывая, что на первой СЧК в направлениях X и Y имеются по две узловые линии (в местах крепления), по формуле (3.45), используя табл. 3.3 для случая $i=j=2$, находим

$$\alpha_{22} = 3,14^2 \sqrt{1,506^4 + 1,506^4 \cdot \left(\frac{0,16}{0,17}\right)^4 + 2 \cdot \left(\frac{0,16}{0,17}\right)^2 \times \dots}$$

$$\dots \times [0,22 \cdot 1,248^2 + (1 - 0,22) \cdot 1,248^2] = 34,91.$$

По формуле (3.43а) находим

$$f_{01} = \frac{34,91}{2\pi \cdot 0,16^2} \sqrt{\frac{8,87}{2,05 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} + \frac{0,093}{0,16 \cdot 0,17}}} = 252 \text{ Гц}$$

Для второй СЧК $i=2, j=3$. Находим

$$\alpha_{23} = \pi^2 \sqrt{1,25^4 + 2,25^4 \cdot 0,94^4 + 2 \cdot 0,94^2 \times \dots}$$

$$\dots \times [0,22 \cdot 1,248 \cdot 4,66 + (1 - 0,22) \cdot 1,248 \cdot 4,66] = 64,9$$

$$f_{02} = 64,9 \cdot 7,4 = 480 \text{ Гц} .$$

Как отмечалось в §1.2, способы крепления конструкций плат часто отличаются от принимаемых моделей в виде свободного опирания, жесткого заземления и т.п. Наиболее точно реальным условиям обычно соответствует упругое закрепление с тем или иным коэффициентом упругости заземления C , который, как правило, неизвестен.

На рис.3.8. показана зависимость коэффициента α от безразмерного коэффициента заземления [10] $c_* = Ca/2D$ для прямоугольной пластины.

Причем случай, когда $c_* = 0$ соответствует свободному опиранию, а при $c_* \rightarrow \infty$ имеем случай жесткого заземления.

На основе рис. 3.8 можно сделать следующие выводы: если коэффициент упругости заземления неизвестен, целесообразно принять $1/c_* = 0,25$. В этом случае относительная ошибка определения собственной частоты колебаний не превысит 50% при низких собственных частотах ($i=1; f=1$) и 15% при высоких собственных частотах ($i=4; f=4$). Можно определить интервал, в котором будет находиться собственная частота колебаний, сделав расчет для случая свободного опирания (нижний предел) и жесткого заземления (верхний предел). Если указанная точность

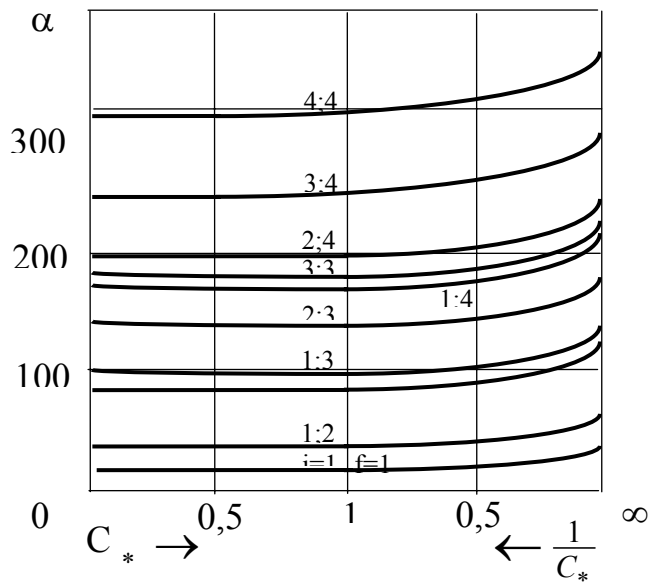


Рис. 3.8. Зависимость частотного коэффициента α от безразмерного коэффициента заземления C_* (i, f —число полуволн в направлении осей x и y соответственно)

недостаточна, собственную частоту колебаний определять экспериментально.

В других случаях, когда сосредоточенная масса расположена не в центре платы или их несколько, необходимо обратиться к специальной литературе [10]. Там же можно найти расчет СЧК пластин, свободно опертых по контуру и в отдельных точках внутри области, а также прямоугольных пластин переменной толщины.

В случае точечного крепления плат (рис. 3.9) СЧК рассчитывается по формуле [31]

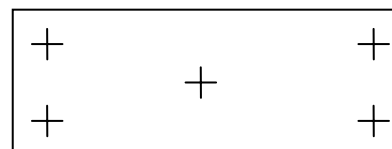
$$f_0 = 1,57 \left(A + \frac{1}{b^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$$

где $A=1/a^2$, при $n=4$; $A=4/(a^2+b^2)$, при $n=5$; $A=0,25/a^2$, при $n=6$.

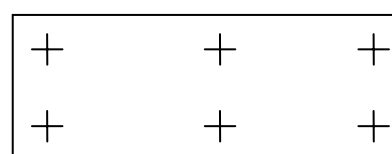
Для расчета собственных частот колебаний съемных оснований электронных модулей (ЭМ), крепящихся в направляющих, можно использовать формулы из табл. 3.5 [31].



а)



б)



в)

Рис. 3.9. Точечное крепление плат

Т а б л и ц а 3.5

СЧК прямоугольных плат в направляющих

Размер основания $a \times b$, мм	Собственная частота, Гц	Размер основания $a \times b$, мм	Собственная частота, Гц
170 × 75	$\frac{2 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + \frac{m_3}{m_n}}}$	170 × 200	$\frac{0,65 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + \frac{m_3}{m_n}}}$
170 × 150	$\frac{1,17 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + \frac{m_3}{m_n}}}$	170 × 280	$\frac{0,33 \cdot 10^5 H}{\sqrt{1 + \frac{m_3}{m_n}}}$

Пример 3.7. Рассчитать собственные частоты колебаний ЭМ, вставляемого в направляющие, в диапазоне до 800 Гц. Материал печатной платы стеклотекстолит марки СТЭФ. Общая масса ЭРЭ, равномерно расположенных по площади ПП с размерами $(1,22 \times 140 \times 140)$ мм, равна 0,05 кг.

Для стеклотекстолита СТЭФ из табл. П.1 находим $E=3,02 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho=2,05 \cdot 10^3$

кг/м³, $\nu=0.22$. Рассчитываем по формуле (3.34) цилиндрическую жесткость:

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} \cdot (1,22 \cdot 10^{-3})^3}{12(1-0,22^2)} = 4,8 \text{ Н/м};$$

Приведенная к единицы площади масса платы и ЭРЭ

$$m = \rho H + \frac{m_э}{ab} = 2,05 \cdot 10^3 \cdot 1,22 \cdot 10^{-3} + \frac{0,05}{0,14^2} = 5,05 \text{ кг/м}^2.$$

Так как на сторонах платы, не входящих в направляющие, расположены колодка и вилка разъема, жесткости которых значительно больше жесткости ПП, то создается неопределенность в выборе расчетной модели. В этом случае целесообразно провести расчет СЧК для крайних случаев - свободного опирания и жесткого защемления. Истинные значения СЧК будут находиться между расчетными значениями СЧК. По формуле (3.7) для свободного опирания найдем:

$$\alpha_1=9,87(1+1)=19,74; \alpha_2=9,87(2^2+1)=49,35; \alpha_3=9,87(2^2+2^2)=78,96;$$

и

СЧК

$$f_{01} = \frac{19.74}{6.82 \cdot 0.14^2} \sqrt{\frac{4.8}{5.05}} = 155.7 \text{ Гц}; f_{02} = 389.4 \text{ Гц}; f_{03} = 622.5 \text{ Гц}$$

Используя табл.3.2 для случая жесткого защемления по контуру, получим

$$\alpha_1(m_1 = 1, m_2 = 1) = 36,0; \alpha_2(2,1) = 73.4; \alpha_3(2,2) = 108,2,$$

и СЧК

$$f_{01}=36 \cdot 7.89=284 \text{ Гц}; f_{02}=73.4 \cdot 7.89=579.1 \text{ Гц}; f_{03}=108.2 \cdot 7.89=853.7 \text{ Гц}.$$

Следовательно, для рассчитываемой конструкции получим следующие значения:

$$155,7 \leq f_{01} \leq 284 \text{ Гц}; f_{01-p} = 219,9 \text{ Гц};$$

$$389,4 \leq f_{02} \leq 579,1 \text{ Гц}; f_{02-p} = 484,3 \text{ Гц};$$

$$622,5 \leq f_{03} \leq 853,7 \text{ Гц}; f_{03-p} = 738,1 \text{ Гц}.$$

Для сложных случаев расчета, не описанных в настоящем пособии, необходимо применить машинные системы расчета, основанные на методе конечных разностей (МКР), или методе конечных элементов (МКЭ). Широко известны, например, системы "Асоника" (МКР), "Искра" (МКЭ) и др.

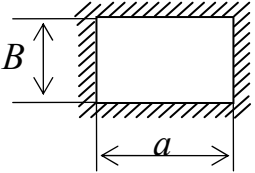
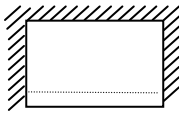

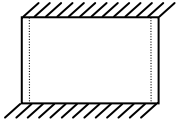


Однослойные ортотропные пластины. СЧК ортотропных прямоугольных пластин рассчитывается по формуле

$$f_0 = \frac{1,57\alpha}{b^2} \sqrt{\frac{D_1}{m}},$$

где частотные коэффициенты α находятся по формулам из табл. 3.6. [15].

Т а б л и ц а 3.6

Частотный коэффициент α

Схема крепления	α
	$\left\{ 4,5\xi^4 + 2\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 4,5 \frac{D_2}{D_1} \right\}^{0,5}$
	$\left\{ 4,5\xi^4 + 4\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 7 \frac{D_2}{D_1} - 2 \left[5,5 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 + \xi^4 + \left(\frac{D_k}{D_1} \right)^2 + 4,25\xi^2 \frac{D_k D_1}{D_1^2} \right] \right\}^{0,5}$
	$\left\{ 1,44 \left[\xi^4 + \xi^2 \frac{D_k}{D_1} + \frac{D_2}{D_1} \right] \right\}^{0,5}$
	$\left\{ \xi^4 + 2\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 4,5 \frac{D_2}{D_1} \right\}^{0,5}$
	$\left\{ \xi^4 + 4\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + 7 \frac{D_2}{D_1} - 2 \left[5,5 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 + \xi^4 \frac{D_k}{D_1} + 4,25\xi^2 \frac{D_k D_2}{D_1^2} \right] \right\}^{0,5}$
	$\left\{ 1,1\xi^4 + 2,09\xi^2 \frac{D_k}{D_1} + \frac{D_2}{D_1} \right\}^{0,5}$

В этих формулах:

$$D_1 = E_1 H^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2); \quad D_3 = D_2 \nu_1 + 2D_k;$$

$$D_2 = E_2 H^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2); \quad D_k = GH_3 / 12;$$

$$\xi = b/a,$$

где E_1, E_2 - модули упругости в осевых направлениях;
 ν_1, ν_2 - коэффициенты Пуассона в направлении осей X и Y ;
 G - модуль сдвига.

Платы с ребрами жесткости. Для прямоугольной пластины, свободно опертой по контуру и имеющей параллельные сторонам ребра жесткости с одинаковыми прямоугольными поперечными сечениями, первая собственная частота колебаний [21]

$$f_{01} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B + \frac{r+1}{k+1} \xi^4 B + aD(\xi^2 + 1)^2}{b^3 \left(m_y + \frac{r+1}{k+1} m_x + \frac{m_n}{k+1} \right)}}, \quad (3.46)$$

где a, b - длина и ширина пластины; r, k - число ребер, параллельных осям X и Y ; m_n, m_x, m_y - массы пластины и ребер, параллельных осям X и Y соответственно; $\xi = b/a$.

Цилиндрическая жесткость пластины (3.34)

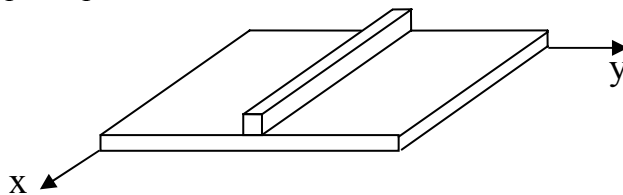
$$D = EH^3 / 12(1 - \nu^2).$$

Жесткость ребра

$$B = E_1 \frac{b_1 H_1^3}{12},$$

где E_1 - модуль упругости материала ребра; b_1, H_1 - ширина и высота ребра.

Пример 3.8. Определить, во сколько раз повысится первая собственная частота колебания ячейки, показанной на рис. 3.10, если для повышения ее жесткости применено ребро жесткости из дюралюминия Д16 с размерами поперечного сечения 2×10 мм. Плата, имеющая размеры $1 \times 100 \times 100$ мм, выполнена из стеклотекстолита.



Для дюралю $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; для стеклотекстолита $E_x = 3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho = 2,05 \cdot 10^3$ кг/м³; коэффициент Пуассона $\nu = 0,22$. Масса

элементов m_3 , равна массе платы m_n .

Решение. Для первой собственной частоты $m=n=1$. Приведем (3.46) к виду:

$$f_1 = \frac{\pi}{a^2} \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{B_x + 2aD}{2m_x + m_3 + m_n}}.$$

Подставляя численные значения параметров в формулы для B и D , находим

$$B_x = 7 \cdot 10^{10} \frac{2 \cdot 10^{-3} (10^{-2})^3}{12} = 11,7 \text{ Н/м}^2;$$

$$D = \frac{3 \cdot 10^{10} (10^{-3})^3}{12(1 - 0,22^2)} = 2,64 \text{ Н/м}^2;$$

$$m_x = \rho b_1 H_1 = 2,7 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ кг};$$

$$m_n = \rho H = 2,05 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 2,05 \text{ кг};$$

$$f_1 = \frac{3,14}{0,1^2} \sqrt{\frac{0,1}{2} \cdot \frac{11,7 + 2 \cdot 0,1 \cdot 2,64}{2 \cdot 5,4 \cdot 10^{-2} + 0,41}} = 339 \text{ Гц}.$$

Расчет для сравнения по формуле (3.43,а) показывает, что применение ребра жесткости повышает первую собственную частоту в 3,5 раза.

Многослойные пластины. Расчет ведется по формуле (3.43,а). Особенности расчета заключаются в определении цилиндрической жесткости D и плотности, которая приводится к однородной однослойной пластине [14].

Приведенная цилиндрическая жесткость пластины определяется по формуле

$$D = \frac{1}{3 \cdot (1 - \nu^2)} \sum_{i=1}^n \bar{E}_i \left[\left(Z_0 - \sum_{k=1}^{i-1} h_k \right)^3 - \left(Z_0 - \sum_{k=1}^i h_k \right)^3 \right],$$

где Z_0 - расстояние нейтральной поверхности платы от верхней граничной поверхности, определяемой по формуле:

$$Z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{E}_i h_i \left(2 \sum_{k=1}^i h_k - h_i \right)}{2 \sum_{i=1}^n \bar{E}_i h_i}, \quad (3.47)$$

где $\nu = \frac{\sum_{i=1}^n \nu_i \bar{E}_i h_i}{\sum_{i=1}^n \bar{E}_i h_i}$ - приведенный коэффициент поперечного сжатия; $\bar{E}_i = E_i (1 - \nu_i^2)$ - эффективный модуль упругости слоя; E_i , ν_i , h_i - модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина слоя материала i -го

слоя.

Приведенная плотность пластины определяется по формуле:

$$\bar{\rho} = \sum \rho_i h_i / \sum h_i,$$

где ρ_i - плотность материала i -го слоя.

Пример 3.9. Вычислить собственную частоту четырехслойной платы, имеющей схему поперечного сечения, показанную на рис.3.11. Прямоугольная плата с размерами $170 \times 110 \times 1,4$ мм, закрепляемая в углах четырьмя шпильками М3, с трех сторон поддерживается пружинами - теплоотводами, к четвертой стороне подсоединены плоские кабели, имеющие малую жесткость. Поэтому четвертую сторону можно считать свободной.

В первом приближении такую конструкцию можно считать прямоугольной пластиной, опертой по трем сторонам и свободной по четвертой (рис. 3.12). Такое допущение позволяет вычислить первую собственную частоту, значение которой будет приближенным, но достаточно точным для практики.

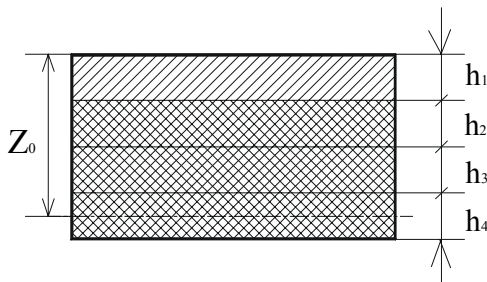


Рис.3.11. Поперечное сечение платы

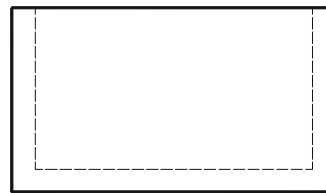


Рис. 3.12. Схема крепления платы

Плата состоит из четырех слоев, содержащих два материала - медь и стеклотекстолит, имеющих следующие характеристики:

для меди: $E_1 = 13,2 \cdot 10^6$ Н/см²; $\nu_1 = 0,3$; $\rho_1 = 8,9 \cdot 10^{-3}$ кг/см³; $h_1 = 0,2$ мм;

для стеклотекстолита: $E_{2,3,4} = 3,3 \cdot 10^6$ Н/см²; $\nu_{2,3,4} = 0,25$; $\rho_{2,3,4} = 2,4 \cdot 10^{-3}$ кг/см³;

$h_2 = h_3 = 0,1$ мм; $h_4 = 1$ мм.

Расчетные значения эффективного модуля упругости будут:

$$\bar{E}_1 = \frac{13,2 \cdot 10^6}{1 - 0,3^2} = 14,5 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2;$$

$$\bar{E}_2 = \bar{E}_3 = \bar{E}_4 = \frac{3,3 \cdot 10^6}{1 - 0,25^2} = 3,5 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2.$$

Приведенный коэффициент поперечного сжатия

$$\nu = \frac{0,3 \cdot 14,5 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 3,5 \cdot (0,01 + 0,01 + 0,1)}{(14,5 \cdot 0,02 + 3,5 \cdot 0,12) \cdot 10^6} \cdot 10^6 = 0,27.$$

Расстояние Z_0 до нейтральной поверхности вычисляется по формуле (3.47), которую в рассматриваемом примере запишем в развернутом виде:

$$Z_0 = \frac{\bar{E}_1 h_1^2 + \bar{E}_2 [2h_1(h_2 + h_3 + h_4) + 2h_2(h_3 + h_4) + 2h_3 h_4 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2]}{2[\bar{E}_1 h_1 + \bar{E}_2 (h_2 + h_3 + h_4)]}$$

Подставив в это выражение расчетные значения величин и произведя арифметические вычисления, найдем

$$Z_0 = \frac{(5,7 + 67) \cdot 10^{-4}}{(58 + 84) \cdot 10^{-3}} \approx 0,052 \text{ см.}$$

Соответственно значение приведенной изгибной жесткости будет равно:

$$D = \frac{1}{3 \cdot 0,927} [14,5 \cdot 114 + 3,5 \cdot (23,8 + 10 + 662,2)] = 1470 \text{ Н} \cdot \text{см}$$

Приведенная плотность платы вычисляется для двух материалов - меди и стеклотекстолита:

$$\rho = \frac{8,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,02 + 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,12}{0,14} = 3,34 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3.$$

Для пластины, показанной на рис. 3.12, с учетом данных табл. ПЗ, найдем:

$$\alpha = 9,87 \sqrt{1 + 0,43 \frac{a^2}{b^2}} = 9,87 \sqrt{1 + 0,43 \left(\frac{179}{110}\right)^2} = 14,43$$

Первая собственная частота по формуле (3.1)

$$f_{01} = \frac{14,06}{2\pi \cdot 0,17^2} \sqrt{\frac{14,7}{3,34 \cdot 10^3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-3}}} = 140,97 \text{ Гц.}$$

3.4. ЧАСТОТНАЯ ОТСТРОЙКА КАК СПОСОБ БОРЬБЫ С РЕЗОНАНСНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Как отмечалось, повышение жесткости элементов конструкции РЭА необходимо для смещения спектра собственных частот колебаний в более высокочастотную область. Из формулы Рэлея – Ритца видно, что влиять на спектр собственных частот колебаний можно изменением геометрических размеров плат, способов их крепления, материала, конфигурации и массы конструкции. Наибольшее применение в настоящее время находит изменение способов крепления, площади и толщины плат, а также применение ребер жесткости. Дадим оценку эффективности этих способов.

Влияние способов крепления. Для оценки возможностей этого способа рассмотрим, например, влияние способов крепления на квадратные платы. На рис. 3.13 приведено четыре способа крепления плат и соответствующие им коэффициенты усиления α . Видно, что изменение свободно-

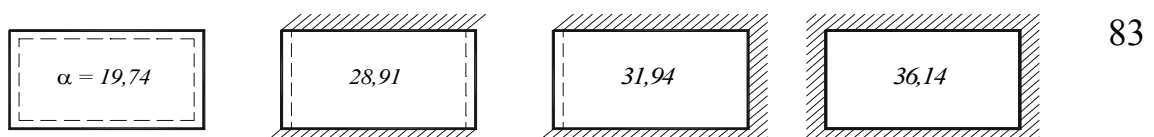


Рис. 3.13. Коэффициенты α для различных способов крепления плат

го опирания на жесткое защемление увеличивает первую собственную частоту колебаний примерно в 1,8 раза.

Влияние способов крепления, в том числе и точечного, на три первые собственные частоты колебаний прямоугольных плат из эпоксидного стеклопластика размером 2,54X10X15,25 мм показано на рис. 3.14 [8]. Видно, что увеличение точек крепления с четырех (случай б) до семи (случай 13) повышает первую собственную частоту колебаний немногим более чем в три раза. Влияние увеличения точек крепления на вторую и третью частоты еще меньше.

Влияние площади и толщины плат. Для оценки влияния площади электромонтажных плат на собственные частоты приведем пример из [1], где даны графики, показывающие зависимость частот собственных колебаний различных плат от их площади при 4-точечном закреплении. На рис.3.15 для примера приведен такой график для квадратных стеклотекстолитовых плат толщиной $1,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Из графика на рис.3.15 видно, что при уменьшении площади платы с 500 до 200 см² частота первого тона увеличивается с 100 до 250 Гц, частота второго тона с 200 до 550 Гц. Это связано с увеличением жесткости платы.

Таким образом, уменьшая площадь платы, мы смещаем весь спектр собственных частот в более высокую область.

Для монтажных плат с установленными на них микросхемами сохраняется примерно та же зависимость собственных частот от площадей плат, что и рассмотренная выше. Следовательно, при конструировании плат с высокими собственными частотами конструктор сталкивается с нежелательным уменьшением монтажного пространства, необходимого для размещения элементов монтажа.

Рассмотрим влияние толщины плат на собственные частоты колебаний, для чего воспользуемся формулой Рэлея – Ритца. Как отмечалось ранее, формулу Рэлея – Ритца можно записать в виде (3.44):

$$f = 10^5 K_m K_{ЭРЭ} BH / a^2 .$$

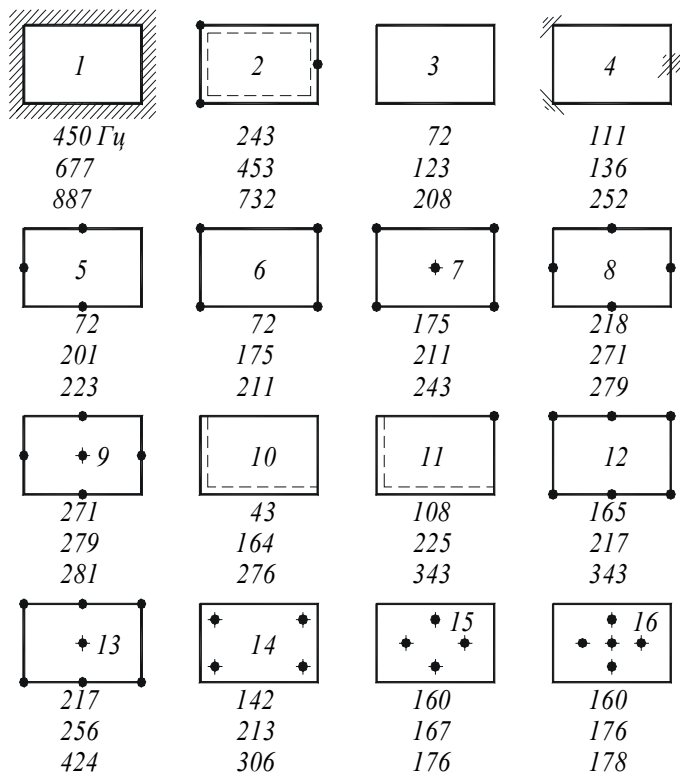


Рис. 3.14. Способы крепления плат

Из формулы следует, что увеличение толщины платы изменяет в сторону увеличения собственную частоту. Однако при этом увеличивается масса платы, что является нежелательным, особенно для аппаратуры летательных аппаратов.

На рис. 3.16 приведен график зависимости относительной собствен-

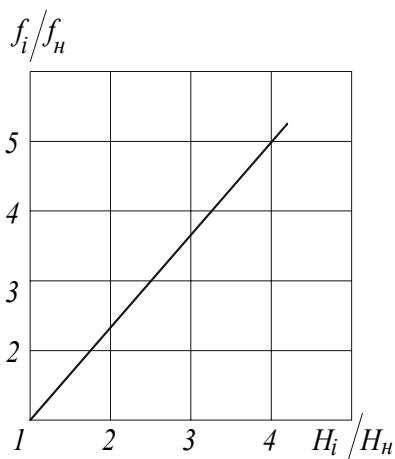


Рис. 3.16. Зависимость относительного повышения собственной частоты колебаний от относительного увеличения толщины платы (f_n , H_n – начальные значения собственной частоты и толщины платы)

ной частоты от относительной толщины платы. Видно, что увеличение толщины платы существенно повышает собственную частоту, но при этом значительно возрастает и масса конструкции. Так, в рассмотренном при-

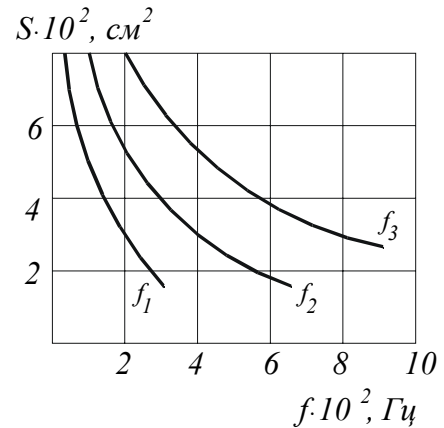


Рис. 3.15. Зависимость собственных частот колебаний от площадей плат

мере повышение толщины платы в четыре раза увеличит массу ячейки в три раза.

3.5. ВЫНУЖДЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ПЛАСТИН

Определение амплитуд колебаний при гармоническом воздействии. Уравнение вынужденных колебаний конструкций типа пластин зависит от принимаемой гипотезы о силе неупругого сопротивления. Если эти силы принимаются пропорциональными деформации, то уравнение движения имеет вид [21]

$$m_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + D(1 + i\eta) \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right) = P(x, y, t), \quad (3.48)$$

где m_0 – масса, приходящаяся на единицу площади платы.

Решим уравнение (3.48), используя метод разложения функций в ряд по собственным формам колебаний. В соответствии с этим методом форму колебаний можно представить в виде:

$$z = z(x, y, t) = \sum_{i, f=1}^{\infty} a_{if}(t) w_{if}(x, y), \quad (3.49)$$

где коэффициенты $a_{if}(t) = A_{if} e^{j\omega t}$, а $w_{if}(x, y)$ – собственные формы колебаний, удовлетворяющие однородному уравнению:

$$-m_0 \omega_0^2 w + D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0. \quad (3.50)$$

Функцию $P(x, y, t)$ также разложим в ряд по собственным формам колебаний:

$$P(x, y, t) = \sum_{i, f=1}^{\infty} b_{if}(t) w_{if}(x, y), \quad (3.51)$$

где $b_{if}(t) = B_{if} e^{j\omega t}$.

Величину $B_{if} e^{j\omega t}$ найдем из следующих соображений. Умножим обе части выражения $P(x, y, t) = \sum_{i, f=1}^{\infty} b_{if}(t) w_{if}(x, y)$ на собственную

форму колебаний $\omega_{if}(x, y)$ и проинтегрируем их по площади пластины:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} P(x, y) w_{if}(x, y) dS &= \iint_{(S)} B_{if} w_{if}(x, y) w_{if}(x, y) dS + \dots + \\ &+ \iint_{(S)} B_{if} w_{if}^2(x, y) dS + \dots \end{aligned}$$

Из условия ортогональности собственных форм колебаний следует, что при $if \neq mn$ имеем

$$\iint_{(S)} w_{if}(x, y) w_{mn}(x, y) dS = 0.$$

Следовательно,

$$B_{if} = \frac{\iint_{(S)} P(x, y) w_{if}(x, y) dS}{\iint_{(S)} w_{if}^2(x, y) dS}. \quad (3.52)$$

Подставив (3.49) и (3.50) в уравнение (3.48) вынужденных колебаний, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} & m_0 \sum_{i,f=1}^{\infty} (i\omega)^2 a_{if}(t) w_{if}(x, y) \times \\ & \times \left[\sum_{i,f=1}^{\infty} k_i^4 a_{if}(t) w_{if}(x, y) + 2 \sum_{i,f=1}^{\infty} k_i^2 k_f^2 a_{if}(t) w_{if}(x, y) + \sum_{i,f=1}^{\infty} k_f^4 a_{if}(t) w_{if}(x, y) \right] = \\ & = \sum_{i,f=1}^{\infty} b_{if}(t) w_{if}(x, y). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых $w_{if}(x, y)$ справа и слева, найдем:

$$m_0 a_{if}(t) \left[-\omega^2 + (D/m_0)(1 + j\eta)(k_i^2 + k_f^2)^2 \right] = b_{if}(t).$$

Учитывая, что $k_{if}^2 = k_i^2 + k_f^2$ и круговая if -я собственная частота колебаний $\omega_{0if} = k_{if}^2 \sqrt{D/m}$, получим:

$$a_{if}(t) = \frac{b_{if}(t)}{m_0(\omega_{0if}^2 - \omega^2 + i\eta_{if}\omega_{0if}^2)}. \quad (3.53)$$

Подставляя выражение (3.53) в разложение (3.49) найдем:

$$z(x, y, t) = \sum_{i,f=1}^{\infty} \frac{b_{if}(t) w_{if}(x, y)}{m_0 (\omega_{0if}^2 - \omega^2 + j\eta_{if} \omega_{0if}^2)}. \quad (3.54)$$

Считая, что пластина возбуждается кинематически, и применяя те же рассуждения, что и в § 3.2, получим следующие выражения для коэффициентов передачи по перемещению и ускорению:

$$\mu_{if,z/\ddot{Z}}(x, y) = \frac{z(x, y, t)}{\ddot{Z}_A(t)} = \sum_{i,f=1}^{\infty} \omega_{0if}^2 \frac{K_{if}(x, y)}{\sqrt{(1 - v_{if}^2)^2 + \eta_{if}^2 v_{if}^2}}; \quad (3.55)$$

$$\mu_{if,z/\ddot{Z}}(x, y) = \frac{z(x, y, t)}{\ddot{Z}_A(t)} = \sum_{i,f=1}^{\infty} \frac{K_{if}(x, y)}{\sqrt{(1 - v_{if}^2)^2 + \eta_{if}^2 v_{if}^2}}, \quad (3.56)$$

где $v_{if} = \omega_{0if} / \omega$.

При резонансе:

$$\mu_{if,z/\ddot{Z}}(x, y) = \frac{K_{if}(x, y)}{\omega_{0if}^2 \eta_{if}}; \quad (3.57)$$

$$\mu_{if,z/\ddot{Z}}(x, y) = \frac{K_{if}(x, y)}{\eta_{if}}. \quad (3.58)$$

Заметим, что формулы (3.55), (3.56) справедливы и в случае, если сила неупругого сопротивления принимается пропорциональной скорости.

В (3.53) – (3.56) коэффициент

$$K_{if}(x, y) = \frac{\iint_{(S)} w_{if}(x, y) dS}{\iint_{(S)} w_{if}^2(x, y) dS} w_{if}(x, y) \quad (3.59)$$

можно найти по формуле

$$K_{if}(x, y) = K_i(x) K_f(y),$$

где $K_i(x)$ и $K_f(y)$ берутся из табл. П.5.

Для абсолютного ускорения, по аналогии с формулой (3.29) для балок получим

$$\mu_{if}, \ddot{Z}_{abc} / \ddot{Z}_0(x) = \sqrt{\frac{K_{if}^2(x, y)}{\eta_{if}^2} + 1} \quad (3.60)$$

Пример 3.10. Определить первую собственную частоту колебаний и виброускорение на этой частоте в точке ячейки (рис. 3.17) с координатами $\xi_x = x/a = 0,25$ и $\xi_y = x/b = 0,35$. На ячейку, вставляемую в пазы корпуса блока, действует в направлении,

перпендикулярном плоскости платы, гармоническая вибрация с ускорением $5g$. Материал платы стеклотекстолит марки СТЭФ-1, общая масса элементов $0,05$ кг. Коэффициент механических потерь $\eta=0,05$.

Решение. Так как на двух противоположных сторонах расположены колодка и вилка разъема, жесткость которых значительно больше жесткости платы, а две другие стороны соприкасаются с направляющими, то в качестве модели для расчета можно принять пластину, у которой две противоположные стороны жестко заземлены, а две свободно оперты (рис. 3.18).

Для расчета воспользуемся формулой Рэлея-Ритца (3.43):

$$f_1 = (\alpha_1 / 2\pi a^2) \sqrt{D / m_0} K_{ЭР}.$$

Для указанного способа крепления $\alpha_1 = 29$. Для материала СТЭФ с печатной схемой:

$$H = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ м} \quad E = 3,02 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2 \quad \rho = 2,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

Рассчитываем цилиндрическую жесткость

$$D = \frac{EH^3}{12(1 - \sigma^2)} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} (1,22 \cdot 10^{-3})^3}{12(1 - 0,22^2)} = 4,8 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Масса ЭРЭ, приведенная к единице площади платы

$$m_э = 0,05 / ab = 0,05 / (0,1 \cdot 0,1) = 5 \text{ кг/м}^2.$$

Коэффициент, учитывающий массу ЭРЭ,

$$K_B = 1 / \sqrt{1 + \frac{m_э}{m_0}} = 1 / \sqrt{1 + \frac{5}{2,05 \cdot 10^3 \cdot 1,22 \cdot 10^{-3}}} = 0,58.$$

Находим первую собственную частоту колебаний:

$$f_1 = \frac{29 \cdot 0,58}{6,28 \cdot 0,12} \sqrt{\frac{4,8}{2,5}} = 371 \text{ Гц}.$$

Коэффициент передачи на первой собственной частоте рассчитывается по формуле (3.60)

$$\mu_{11}(x, y) = \frac{\sqrt{\ddot{Z}_{01}^2(x, y) + \ddot{Z}_{0A}^2}}{\ddot{Z}_{0A}} = \sqrt{\frac{K_{11}^2(x, y)}{\eta_{11}^2} + 1},$$

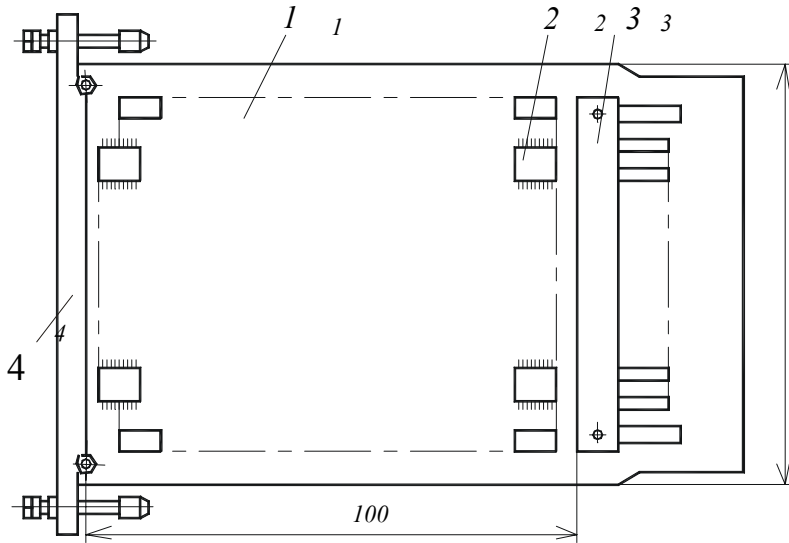


Рис. 3.17. Ячейка РЭА:

1 – плата печатная; 2 – микросхема; 3 – вилка разъема;
4 – колодка для контроля

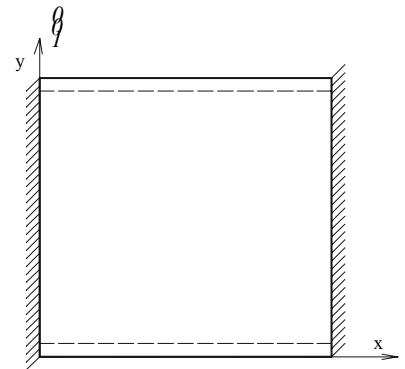


Рис. 3.18. Расчетная модель ячейки РЭА

$$\text{где } K_{11}(x, y) = \frac{\iint_{(S)} w_{11}(x, y) dS}{\iint_{(S)} w_{11}^2(x, y) dS} \omega_{11}(x, y) = \frac{\int_0^a w_1(x) dx \int_0^b w_1(y) dy}{\int_0^a w_1^2(x) dx \int_0^b w_1^2(y) dy} w_1(x) w_1(y) \cdot$$

Из табл. П.4 находим:

$$\int_0^a w_1(x) dx = 0,84a; \quad \int_0^b w_1(x) dx = 0,64b;$$

$$\int_0^a w_1^2(x) dx = 1,04a; \quad \int_0^b w_1^2(x) dx = 0,5b.$$

Для точки платы с заданными координатами, используя табл.П2 получим:

$$w_1(x/a) = w_1(0,25) = \sin 1,183 - 1,018 \cos 1,183 - \text{sh}1,183 + 1,018 \text{ch}1,183 = 0,88;$$

$$w_1(x/b) = w_1(0,35) = \sin 1,1 = 0,89;$$

$$w_{11}(x, y) = 0,88 \cdot 0,89 = 0,784.$$

Находим коэффициент передачи:

$$\mu_{11}(0,25;0,35) = \sqrt{\left(\frac{0,84 \cdot 0,64 \cdot 0,784}{0,05 \cdot 0,52} \right)^2 + 1} = 1,62,$$

и виброускорение:

$$\ddot{z}_{0,abc}(0,25;0,35) = 5g \cdot 1,62 = 81g.$$

Как видно из допущений, принимаемых при выводе формул (3.57),

(3.58), они могут быть использованы для расчета конструкций типа прямоугольных пластин, имеющих однородные краевые условия, типа свободного опирания по всему краю, жесткого защемления и т.п. Анализ конструктивных форм и способов крепления плат в ячейку РЭА, многие из которых приведены в учебнике [29], показывает, что прямоугольная форма монтажной платы наиболее типична. Однородность краевых условий также часто выполняется, но способы крепления плат (например, винтами к раме по всему контуру или путем установки в направляющие) не соответствуют строго типовым – свободному опиранию или жесткому защемлению. Как отмечалось, замена реальных условий крепления краев идеализированными приведет к ошибке определения собственной частоты колебаний, значение которой было оценено в §3.3 и к ошибке определения коэффициента формы колебаний.

Анализ показывает, что наибольшая ошибка определения коэффициента $K(x,y)$ возможна в том случае, если на краях способы крепления различны и трудно ответить на вопрос о том, у какого края жесткость защемления больше. Это обусловлено тем, что форма колебаний будет несимметрична – происходит смещение максимума амплитуды виброперемещения в сторону края с меньшей жесткостью защемления. В этом случае расчет амплитуд целесообразно вести при максимально возможных, т.е. наихудших для предполагаемых способов крепления коэффициентах $K(x,y)$.

В заключение отметим, что аналитические методы расчета собственных частот и резонансных амплитуд колебаний имеют преимущества перед другими способами, так как решение получается в виде математического выражения, удобного для анализа и решения оптимизационных задач. Расчет на ЭВМ при этом, как правило, не требует больших затрат машинного времени. Эти методы удобны при расчете прямоугольных плат, имеющих равномерное размещение элементов по площади платы и однородные по каждому из краев площади платы микросхемы, не искажают существенно ее собственную форму колебаний повышения жесткости платы за счет жесткости ЭРЭ в значительной степени компенсируется тем, что ЭРЭ увеличивают и массу ячейки. Следует учитывать, что повышение жесткости ячейки зависит от способа крепления электрорадиоэлементов на плате – только за выводы или же корпус дополнительно крепится к плате.

Аналитические методы расчета можно успешно также применить при расчете колебаний конструкций типа плоских или коробчатых экранов, обшивки корпусов блоков, стоек и других плоских конструкций.

Если конструкция имеет сложную форму, неравномерное расположение элементов, неоднородные способы крепления, вырезы, аналитиче-

ские методы не всегда применимы, так как не удается подобрать собственную форму колебаний, удовлетворяющую граничным условиям. В этих случаях широко применяют методы конечных разностей, конечных элементов и экспериментально-теоретические методы.

Определение реакции пластин при случайном воздействии. Если при воздействии гармонической вибрации можно найти стационарное значение амплитуды колебаний при резонансе $\ddot{V}(x, y)$ и проверить выполнение условия $V(x, y) < V_{дон}$, то при воздействии случайной вибрации в виде нормального процесса можно по формуле Релея

$$P\left(\frac{Y_p}{\sqrt{\bar{Y}^2}}\right)^2 = \exp\left(-\frac{Y_p^2}{2\bar{Y}^2}\right)$$

найти вероятность P превышения пиковым значением Y_p среднеквадратического (СК) значения виброперемещения $\sqrt{\bar{Y}^2}$ или виброускорения $\sqrt{\bar{\ddot{Y}}^2}$.

Определить СК значения можно на основе методов спектральных представлений и интегральных оценок. Интегральный метод основан на замене суммы вкладов каждой формы колебаний, как это делается в методе спектральных представлений, интегралом по некоторой области в пространстве волновых чисел. Обычно он применяется в условиях значительной корреляции собственных форм колебаний. Ответ на вопрос о взаимной корреляции собственных форм зависит от величины демпфирующих свойств конструкции взаимного расположения собственных частот и характера спектральной плотности внешней нагрузки типа «белого шума». Корреляцией можно пренебречь, если выполняются условия:

$$\eta_i^2 \ll 4\left|1 - \frac{f_{oi}^2}{f_{ok}^2}\right|; \quad \eta_k^2 \ll 4\left|1 - \frac{f_{oi}^2}{f_{ok}^2}\right|, \quad (3.61)$$

где f_{oi}, f_{ok} - j -я, k -я собственные частоты колебаний.

В табл.3.7 приведены значения частотного коэффициента α для первых шестнадцати СЧК у пластин со свободным опиранием и жестким защемлением по контуру при соотношении длины a и ширины b в разном $2(a/b=2)$.

Проверим выполнение условия (3.61) для наиболее близко расположенных частот. Им соответствуют частотные коэффициенты 651,2 и 672.

Определение частот можно провести по формуле:

$$f_{oi} = \frac{\alpha_i}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

но так как все параметры в этой формуле, кроме α , не изменяются, получим

$$4 \left| 1 - \left(\frac{651,2}{672} \right) \right| \gg \eta_i^2$$

или

$$0,24 \gg \eta_i^2.$$

КМП ячеек, даже с ПД, как правило не превышает 0,3. Поэтому условие (3.61) в большинстве случаев выполняется. Это дает возможность применить спектральный метод, по крайней мере, в диапазоне 2000 Гц.

Т а б л и ц а 3.7

m_1	m_2	α		m_1	m_2	α	
		ж.з.	св.оп.			ж.з.	св.оп.
1	1	95,2	49,3	3	1	155,5	366,3
1	2	161,6	79,2	3	2	173,2	396,0
1	3	323,2	129,7	3	3	207,4	445,5
1	4	651,2	197,2	3	4	251,2	514,8
2	1	672	168,3	4	1	420,3	643,5
2	2	825,6	197,2	4	2	449,0	673,2
2	3	1130	246,5	4	3	548,0	722,7
2	4	1658	316,8	4	4	580,8	792,0

Применение спектрального метода к конструкциям типа балок подробно рассмотрено в работе [13]. Применим его к анализу конструкций типа пластин.

Среднеквадратическое отклонение точки пластины, имеющей координаты x, y , находится по формуле

$$\sqrt{\bar{v}^2}(x, y) = \sqrt{\int_0^\infty |\Phi(i, \omega)|^2 S(\omega) d\omega},$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность возмущающих колебаний.

Учитывая (3.56) и принимая во внимание

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\pi\omega_0}{2\eta},$$

получаем

$$\sqrt{\bar{v}^2(x, y)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_k^2(x, y) S(\omega) \pi}{2\omega_{0k}^3 \eta_k}}.$$

Первое слагаемое, соответствующее перемещению на первой собственной частоте колебаний, значительно превышает все остальные, и поэтому:

$$\sqrt{\bar{v}^2(x, y)} \approx K_k^2(x, y) \sqrt{\frac{\pi S(\omega)}{2\omega_{0k}^3 \eta_k}}.$$

Учитывая, что $f = \omega/2\pi$ и $S(\omega)2\pi/g^2$, найдем:

$$\sqrt{\bar{v}^2(x, y)} \approx K_k^2(x, y) \sqrt{\frac{S(f)g^2}{32\pi^3 f^3 \eta_k}}. \quad (3.62)$$

Средний квадрат относительного ускорения $\bar{\ddot{V}}_k^2(x, y)$ на k -й резонансной частоте

$$\bar{\ddot{v}}_k^2(x, y) = K_k^2(x, y) \frac{S(f)g^2 \pi f_k}{2\eta_k}.$$

В отличие от перемещения средний квадрат ускорения существенно зависит от средних квадратов ускорения на всех резонансных частотах. Поэтому

$$\sqrt{\bar{\ddot{v}}_k^2(x, y)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \bar{\ddot{v}}_k^2(x, y)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{K_k^2(x, y) S(f) g^2 \pi f_k}{2\eta_k} + \bar{\ddot{Z}}^2}. \quad (3.63)$$

Если $S(f)$ постоянна в рассматриваемом диапазоне частот, то

$$\bar{\ddot{Z}}^2 = g^2 S(f) (f_{\epsilon} - f_{\eta}), \quad (3.64)$$

где f_{ϵ} и f_{η} – нижняя и верхняя частоты рассматриваемого диапазона, и коэффициент передачи

$$\mu(x, y) = \frac{\sqrt{\bar{\ddot{v}}^2 + \bar{\ddot{Z}}^2}}{\sqrt{\bar{\ddot{Z}}^2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{K_k^2(x, y) \pi f_{ok}}{2\eta_k (f_{\epsilon} - f_{\eta})} + 1}. \quad (3.65)$$

Формулы (3.56), (3.62) – (3.65) позволяют рассчитать коэффициенты передачи по перемещению и ускорению в различных точках ячейки при кинематических гармоническом и случайном воздействиях.

Однако расчет по указанным формулам возможен, если известны кроме частотного диапазона, параметр формы колебаний $K(x,y)$ и КМП. Разработка ММ для определения КМП конструкций с ПД рассматривается в разделе 3. Определение параметра $K(x,y)$ проводится по формуле (3.59) и для прямоугольных пластин с простейшими способами крепления краев типа заземления, свободного опирания или незаземленного края не представляет труда [1].

Пример 3.11. Определить среднеквадратическое значение ускорения в точке платы с относительными координатами $\xi_x = 0,3$; $\xi_y = 0,4$, если случайная вибрация со спектральной плотностью ускорения $S(f) = 0,1g^2/\text{Гц}$ в диапазоне частот от 10 до 800 Гц передается от точек крепления. Способ крепления платы и остальные данные, как в примере 3.7.

Решение. Из примера 3.7 видно, что в диапазоне частот до 800 Гц резонансные колебания возникают на трех частотах. Их средние значения 219,9; 484,3; 738,1 Гц, т.е. в формуле (3.63) $n=3$. Найдем, используя табл. П.5, коэффициенты формы колебаний для свободного опирания:

$$k_1(x, y) = k_1(x) \cdot k_1(y) = 1,03 \cdot 1,21 = 1,25; \quad k_2(x, y) = 1,21 \cdot 0,75 = 0,91;$$

$$k_3(x, y) = 0,39 \cdot (-0,75) = -0,29,$$

и для жесткого заземления

$$k_1(x, y) = 0,9 \cdot 1,21 = 1,09; \quad k_2(x, y) = 1,29 \cdot 0,89 = 1,15;$$

$$k_3(x, y) = 0,76 \cdot (-0,55) = -0,42.$$

Используя результаты расчета для свободного опирания из примера (3.7), найдем КМП:

$$\eta_1 = (\sqrt{155,7})^{-1} = 0,08; \quad \eta_2 = (\sqrt{389,4})^{-1} = 0,051; \quad \eta_3 = (\sqrt{622,5})^{-1} = 0,04,$$

а для жесткого заземления

$$\eta_1 = (\sqrt{284})^{-1} = 0,06; \quad \eta_2 = (\sqrt{579,4})^{-1} = 0,042; \quad \eta_3 = (\sqrt{853,7})^{-1} = 0,034.$$

По формуле (3.63) для свободного опирания

$$\tilde{V}^2(x, y) = \left\{ 1,25 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 155,7}{2 \cdot 0,08}} + 0,91 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 389,4}{2 \cdot 0,051}} - \right.$$

$$\left. - 0,29 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 622,5}{2 \cdot 0,04}} \right\}^{0,5} = 19,4 \text{ М/с}^2.$$

Для жесткого заземления

$$\tilde{V}^2(x, y) = \left\{ 1,09 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 284}{2 \cdot 0,06}} + 1,55 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 579,4}{2 \cdot 0,042}} - \right.$$

$$\left. - 0,034 \sqrt{\frac{\pi g^2 \cdot 0,1 \cdot 853,7}{2 \cdot 0,034}} \right\}^{0,5} = 31,34 \text{ М/с}^2.$$

Для конструкции сложной конфигурации со сложными граничными ус-

ловиями, имеющими переменную жесткость и сосредоточенные нагрузки для расчета применяются численные методы-конечных разностей, конечных элементов, вариационно-разностные и другие.

Современные системы расчета на ЭВМ, основанные на этих методах позволяют рассчитывать СЧК сложных конструкций, определять их формы колебаний, но не всегда предусматривают определение амплитуд резонансных колебаний. Возможность решения этой задачи с помощью системы конечно-элементных расчетов «Искра» рассмотрена в следующей главе.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Напишите уравнение свободных колебаний балки. Какие силы входят в это уравнение?
2. Какие виды граничных условий наиболее часто рассматриваются?
3. Как выглядит общее решение уравнения свободных колебаний балки?
4. Напишите уравнение вынужденных колебаний балки при силовом и кинематическом возбуждении.
5. Какой метод применяется при решении уравнения вынужденных колебаний балки?
6. Как можно приближенно рассчитать СЧК и АРК балок, если граничные условия точно неизвестны?
7. Какие применяются методы расчета СЧК пластин?
8. Что лежит в основе методов Релея и Ритца?
9. Какие способы применяют для повышения СЧК пластин?
10. Как рассчитывается коэффициент передачи в точках пластины при резонансе?

Глава 4

Численные методы анализа конструкций ЭС

4.1. НЕОБХОДИМОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

При определении динамических характеристик конструкций электронной аппаратуры возникает необходимость в решении двух основных задач динамики: в первой находятся собственные частоты и собственные формы колебаний конструкции, во второй определяют амплитуды вынужденных колебаний элементов в различных точках конструкции при заданных параметрах внешнего вибрационного воздействия. Далее могут быть определены механические напряжения и запасы прочности конструктивных элементов, а также оценена вероятность безотказной работы устройства при вибрации.

Практическое применение аналитических методов для решения задач динамики конструкций сопряжено с рядом трудностей. Конструкции современной аппаратуры представляют собой сложные механические системы с множеством упругих и жёстких связей, с неклассическими для строительной механики способами крепления отдельных конструктивных элементов. Для такой механической системы сложно построить расчётную модель, достаточно простую и в то же время хорошо отражающую физические и динамические свойства, тем более, что конструкция содержит множество неконтролируемых параметров, например усилия затяжки соединений при сборке плат в пакет, коэффициенты механических потерь материалов элементов. При составлении и решении уравнений движения конструкции возникает ряд математических трудностей.

Эти причины способствовали быстрому развитию численных методов, которые и получили в настоящее время широкое распространение с внедрением в практику инженерных расчётов цифровых ЭВМ. Основу численных методов расчётов динамических параметров конструкции составляют: метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ) и различные вариационные методы, в том числе и энергетический метод [15].

4.2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Для расчёта конструкции аппарата с помощью метода конечных разностей строится его упрощённая модель-сетка. В этой модели детали с непрерывно распределённой массой заменяются набором дискретных элементов с сосредоточенными массами. Точки сосредоточения массы

элементов называют узлами. Соседние узлы соединяются друг с другом невесомыми упругими связями.

Таким образом, модель стержня будет представлять собой одномерную структуру в виде цепочки узлов (рис.4.1,а), модель плиты или панели - плоскую сетку (рис.4.1,б), модель монолитного блока - пространственную трёхмерную сетку (рис.4.1,в).

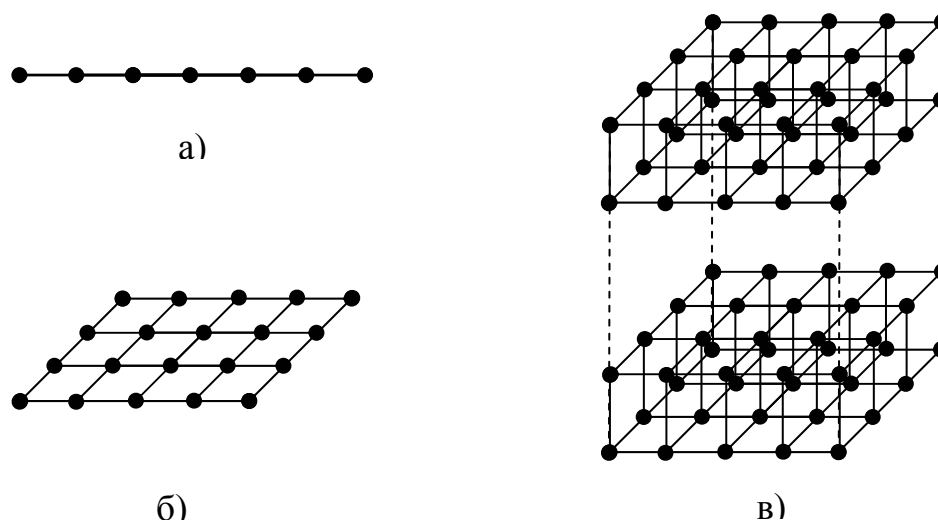


Рис. 4.1. Дискретные модели элементов конструкции РЭА
а) одномерные; б) двумерные; в) трехмерные

Расчёт модели ведётся с помощью конечно-разностных уравнений. Эти уравнения образуют из дифференциальных уравнений посредством замены в них частных и обычных производных отношениями конечных приращений рассматриваемых переменных. Так, например, производная $f'(x) = df(x)/dx$ заменяется отношением конечных приращений $\Delta f(x)$ и Δx .

Приращение аргумента - шаг $\Delta x = h$ берут обычно одинаковым во всём интервале изменения функции $f(x)$:

$$h = (X_b - X_a) / n.$$

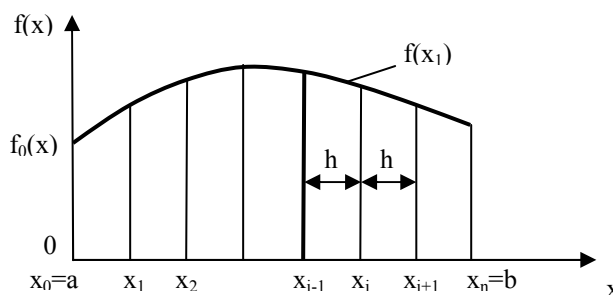


Рис. 4.2. К определению конечных разностей в одномерной задаче

Приращение функции вычисляется с помощью одного из разностных операторов Δ, ∇ или δ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ \nabla f(x) &= f(x) - f(x-h) \\ \delta f(x) &= f(x+0,5h) - f(x-0,5h) \end{aligned} \right\} . \quad (4.1)$$

В соответствии с этим в любой точке $x=x_i$ могут быть вычислены:

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i && \text{- разность, взятая вперед;} \\ \nabla f_i &= f_i - f_{i-1} && \text{- разность, взятая назад;} \\ \delta f_i &= f_{i+1/2} - f_{i-1/2} && \text{- центральная разность.} \end{aligned}$$

По этой же схеме вычисляются и разности высших порядков, например:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i. \quad (4.2)$$

Используя эти выражения, можно получить формулы для приближенного вычисления производных в точке $x=x_i$, приведены в табл.4.1.

Применение МКР к расчету колебаний балок рассмотрим на примере.

Пример 4.1. Рассчитать собственные частоты колебаний балки с шарнирно-закрепленными концами, показанной на рис.4.3.

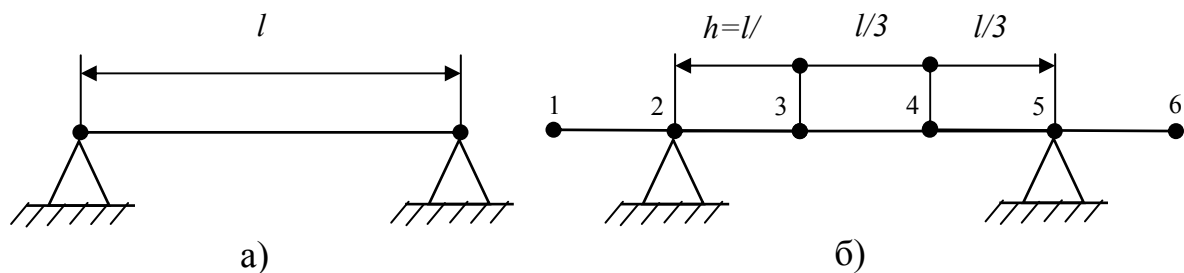


Рис.4.3. Балка (а) и ее расчетная модель (б).

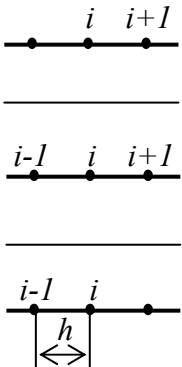
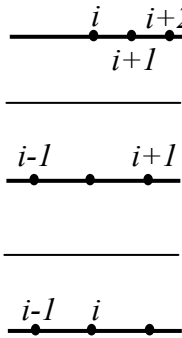
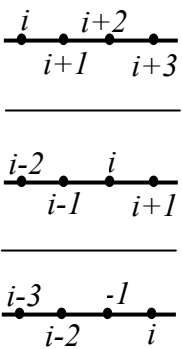
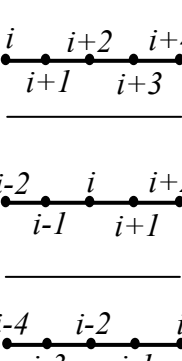
Уравнение свободных колебаний балки имеет вид

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0. \quad (4.3.)$$

Определение собственных частот колебаний балок аналитическим методом подробно рассмотрено в § 3.1. Для сравнения сделаем расчет МКР. Для этого будем считать массу балки сосредоточенной в узлах 3,4 - и напишем уравнения их движения в конечных разностях. Считая, что свободные колебания балки происходят по гармоническому закону $W(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$, уравнение (4.3) преобразуем к виду

$$-m\omega_0^2 W + EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0. \quad (4.3,a)$$

Таблица конечных разностей

Производная	Схема распол. узлов	Приближённая формула
$\frac{dt}{dx}$		$h \left(\frac{dt}{dx} \right)_i = t_{i+1} - t_i$ $2h \left(\frac{dt}{dx} \right)_i = t_{i+1} - t_{i-1}$ $h \left(\frac{dt}{dx} \right)_i = t_i - t_{i-1}$
$\frac{d^2t}{dx^2}$		$h^2 \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right)_i = t_i - 2t_{i+1} + t_{i+2}$ $h^2 \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right)_i = t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1}$ $h^2 \left(\frac{d^2t}{dx^2} \right)_i = t_i - 2t_{i-1} + t_{i-2}$
$\frac{d^3t}{dx^3}$		$h^3 \left(\frac{d^3t}{dx^3} \right)_i = t_i - 3t_{i+1} + 3t_{i+2} - t_{i+3}$ $h^3 \left(\frac{d^3t}{dx^3} \right)_i = t_{i+1} - 3t_i + 3t_{i-1} - t_{i-2}$ $h^3 \left(\frac{d^3t}{dx^3} \right)_i = t_i - 3t_{i-1} + 3t_{i-2} - t_{i-3}$
$\frac{d^4t}{dx^4}$		$h^4 \left(\frac{d^4t}{dx^4} \right)_i = t_i - 4t_{i+1} + 6t_{i+2} - 4t_{i+3} + t_{i+4}$ $h^4 \left(\frac{d^4t}{dx^4} \right)_i = t_{i-2} - 4t_{i-1} + 6t_i - 4t_{i+1} + t_{i+2}$ $h^4 \left(\frac{d^4t}{dx^4} \right)_i = t_i - 4t_{i-1} + 6t_{i-2} - 4t_{i-3} + t_{i-4}$

Подставляя в него вместо частной производной выражение в конечных разностях, для точки 3 получим:

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right)_3 = \frac{W_5 - 4W_4 + 6W_3 - 4W_2 + W_1}{h^4},$$

где $h=l/3$, или после подставления в 4.3,а,

$$W_5 - 4W_4 + 6W_3 - 4W_2 + W_1 = \beta W_3,$$

где

$$\beta = \frac{m\omega_0^2 h^4}{EJ}, \quad (4.4)$$

У рассматриваемой балки прогибы в точках 2 и 5 равны 0, т.е. $W_2=W_5=0$. Отсюда получим

$$-4W_4 + 6W_3 + W_1 = \beta W_3. \quad (4.5)$$

Рассуждая аналогично, для точки 4 получим

$$W_6 + 6W_4 - 4W_3 = \beta W_4. \quad (4.6)$$

В уравнениях (4.5) и (4.6) присутствуют прогибы в условных точках 1 и 6. Они могут быть найдены на основе разложения функции в этих точках в ряд Тейлора

$$W(x-h) = W(x) - \frac{h}{1!}W'(x) + \frac{h^2}{2!}W''(x) - \dots$$

Пренебрегая всеми членами разложения, начиная с третьего члена, ввиду их малости, для точки 1 получим

$$W_1 = W_2 - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_2 h = \frac{(W_3 - W_1)h}{2h} + W_2 + \frac{W_3 - W_1}{h};$$

Так как $W_2 = 0$, окончательно получим $W_1 = -W_3$. Для точки 6 запишем

$$W_6 = W_5 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_5 h = \frac{W_6 - W_4}{2} \text{ и окончательно } W_6 = -W_4.$$

Подставляя найденные значения для W_1 и W_6 в уравнения (4.5) и (4.6), получим

$$\begin{aligned} (5 - \beta)W_3 - 4W_4 &= 0; \\ -4W_3 + (5 - \beta)W_4 &= 0. \end{aligned}$$

Для решения этой системы составим определитель

$$\begin{vmatrix} 5 - \beta & -4 \\ -4 & 5 - \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая его, получим уравнение $(5-\beta)^2 - 16=0$. Откуда найдем $\beta_1=1$ и $\beta_2=9$. Преобразуем выражение (4.4) к виду

$$\omega_{0i} = \frac{\beta}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

найдем $\omega_{01} = \frac{9}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ и $\omega_{02} = \frac{27}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}$.

Для сравнения точный расчет аналитическим методом дает вместо 9 и 27, значения 9,86 и 39,4. Такое большое расхождение, особенно по второй частоте, можно объяснить разбиением балки всего на три участка. Обычно рекомендуется не меньше десяти.

Составление конечно – разностных уравнений конструкций типа плат. Уравнение свободных колебаний пластины имеет вид (3.35):

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (4.7)$$

Представляя решение в виде $W = W(x, y, t) = W(x, y) e^{j\omega_0 t}$ и используя данные таблицы 4.1, слагаемые уравнения (4.7) для некоторой точки i на рис.4.4 представим в виде :

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -m\omega_0^2 W;$$

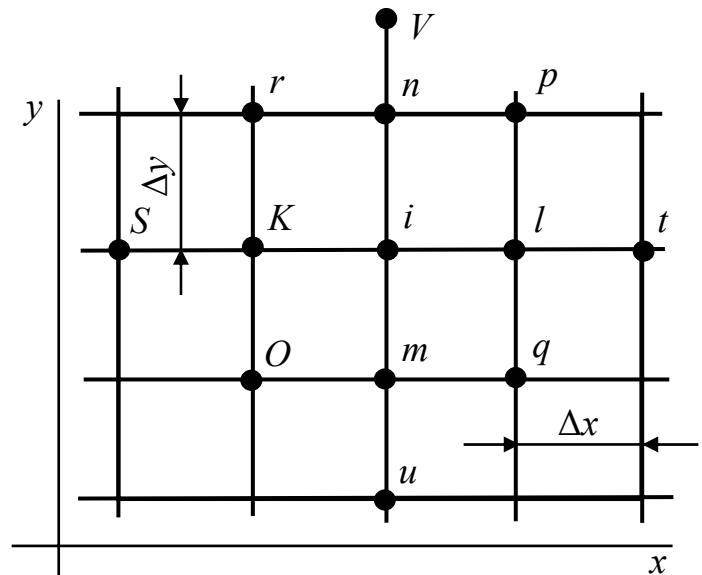


Рис. 4.4. Фрагмент сетки

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right)_i = \frac{W_S - 4W_K + 6W_i - 4W_l + W_t}{\Delta x^4};$$

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right)_i = \frac{W_u - 4W_m + 6W_i - 4W_n + W_V}{\Delta y^4};$$

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_i = \frac{4W_i - 2(W_K + W_l - W_m + W_n) + W_O + W_p + W_r + W_q}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

Подставляя найденные выражения в уравнение свободных колебаний и считая $\Delta x = \Delta y$, получим уравнение:

$$20W_i - 8(W_K + W_l + W_m + W_n) + 2(W_O + W_t + W_u + W_r) + W_S + W_t + W_u + W_V = m\omega^2 W_i \Delta x^4. \quad (4.8)$$

Для прямоугольной пластины, жестко зашечленной по контуру, уравнение типа (4.8) справедливо для точек 17,18,19,24 – 36,31 – 33 на рис.4.5.

В остальных точках появляются известные контурные значения прогиба (они равны нулю) и законтурные неизвестные значения, что приводит к уравнениям, отличным от (4.8).

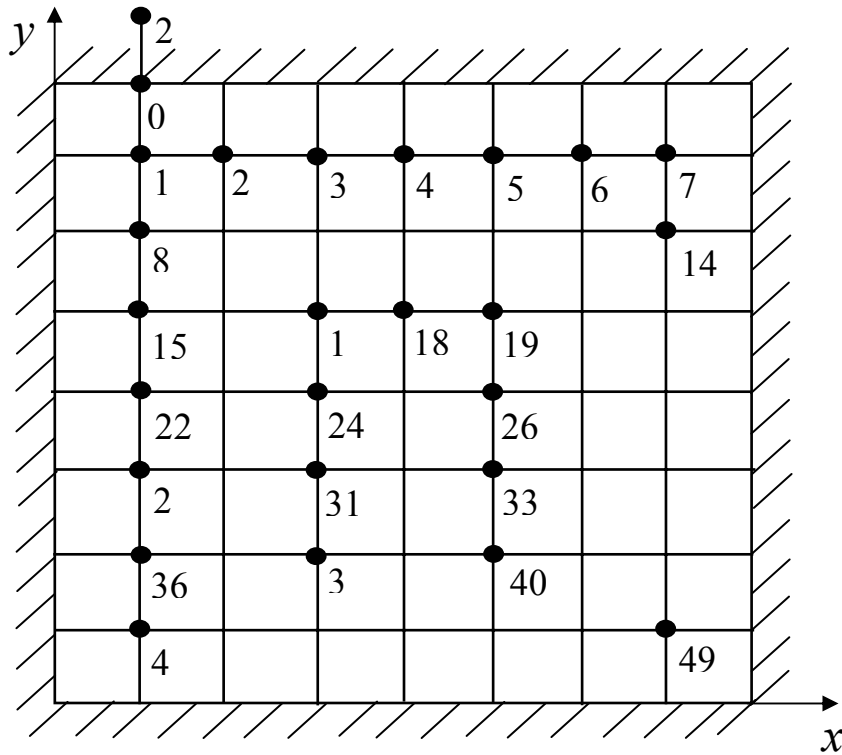


Рис.4.5. Плата ячейки, зашечленная по контуру

Применяя разложение функции в ряд Тейлора, для точки O получим:

$$W_2 = W_0 + h = W_0 + h \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_0 + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_0 + \dots$$

Используя разностные представления

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{1}{h^2} (W_1 - 2W_0 + W_2);$$

$$\left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}\right) = \frac{1}{h_3}(W_2 - 3W_0 + 3W_1 - W_8),$$

и замечая, что для пластины, жестко закрепленной по контуру, граничные условия W и $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)$ равны нулю, из уравнения (4.9) получим

$$W_2 = \frac{1}{2}(W_1 + W_2) + \frac{1}{6}(W_2 + 3W_1 - W_8).$$

Отсюда $W_2 = 3W_1 - 0,5W_8$. Полученную зависимость можно использовать для исключения лишних неизвестных при записи разностных уравнений. Например, для узла 15 получим

$$W_1 - 8W_8 + 2W_9 + 29W_{15} - 10W_{16} + W_{17} - \\ - 8W_{22} + 2W_{33} + W_{29} = \frac{mW^2}{D} h^4 W_{15}.$$

Таким образом, получим систему из 49 алгебраических уравнений, которая может быть решена различными методами. Наиболее часто применяется метод Гаусса, называемый также методом последовательного исключения переменных.

Рассмотренная схема решения является неявной. Может применяться и явная схема, когда частная производная $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ заменяется также конечными разностями, а затем решение идет на каждом шаге с интервалом Δt .

Недостатком МКР является большая трудоемкость составления конечно-разностных уравнений при подготовке задачи к решению на ЭВМ. Наиболее известным программным комплексом, реализованным на использовании МКР, является "Асоника". При наличии сложного контура ступенчатого изменения жесткости решение задач динамики конструкции при помощи МКР встречает большие трудности. В этом случае рекомендуется применять метод конечных элементов.

4.3. ¹⁾ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В МКЭ исходная область определения функции разбивается сеткой, в общем случае, в отличие от МКР неравномерной, на отдельные участки – конечные элементы [34]. Искомая непрерывная функция заменяется

¹⁾ Написана совместно с В.В. Евграфовым.

кусочно-непрерывной, определенной для множества конечных элементов. Чаще всего для этого используются полиномы, обеспечивающие непрерывность искомой формы колебаний в узлах на границах элементов. Для одномерных функций конечными элементами являются отрезки прямой, для двумерных областей наиболее часто конечные элементы представляются в виде треугольников и четырехугольников, для трехмерных – в виде тетраэдра или параллелепипеда.

Алгоритм МКЭ включает четыре этапа.

1. Разбиение заданной области, например, площади ячейки, на конечные элементы.
2. Выбор аппроксимирующей функции в виде полинома для каждого элемента.
3. Объединение полученных полиномиальных функций в систему алгебраических уравнений.
4. Решение полученной системы уравнений и определение вектора узловых значений функции (перемещений, ускорений).

Подробное рассмотрение МКЭ выходит за пределы учебного пособия. Отметим, что наиболее сложным этапом является четвертый, требующий глубоких знаний в области механики сплошной среды. Для более глубокого ознакомления с МКЭ автор рекомендует книгу [34] и для изучения - [35]. В настоящее время разработан ряд программных комплексов на основе МКЭ, позволяющих успешно их использовать инженерам-конструкторам электронных средств для анализа динамического поведения сложных конструкций.

Программные реализации метода конечных элементов. Системы конечноэлементного анализа (FEA), в зависимости от возможностей подразделяются на системы среднего уровня (NASTRAN, PATRAN, COSMOS и др.) и так называемые “тяжелые” САПР (MARC, ANSYS). Однако вне зависимости от назначения построение конечноэлементных систем выполняется по традиционной схеме, показанной на рис.4.6.

Препроцессор (один или несколько) выполняет построение геометрии модели, задание свойств материалов и разбиение модели на конечные элементы, т.е. производит подготовку задачи к решению. При этом препроцессоры современных систем позволяют импортировать геометрию модели из конструкторских САПР (AutoCAD, SolidWork и т.д.). Подготовленная конечноэлементная модель обрабатывается вычислителем (решателем) в соответствии с необходимым видом анализа. На заключительном этапе производится визуализация расчетных данных с помощью постпроцессора.

Конечноэлементные вычислители (NASTRAN, MARC, COSMOS, ANSYS) позволяют проводить линейный и нелинейный динамический

анализ при гармонических и случайных воздействиях на объект исследований представленный конечноэлементной моделью. В расчетах учитываются основные характеристики материалов, включая различные типы демпфирования:

- конструкционное демпфирование;
- внутреннее демпфирование в материалах;
- вязкоупругое демпфирование дискретных элементов;

в различных представлениях:

- эквивалентное вязкоупругое;
- часть от критического;
- качественный показатель.

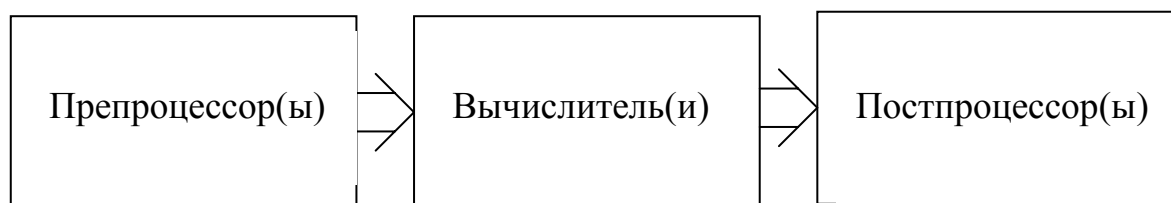


Рис.4.6. Типовая структура конечноэлементных систем

Для эффективной эксплуатации современных систем конечноэлементного анализа на IBM – совместимых персональных компьютерах предъявляются следующие обобщенные требования к оборудованию и системному программному обеспечению:

- свободное дисковое пространство не менее 200 мегабайт;
- тип процессора - Pentium;
- оперативная память не менее 32 мегабайт;
- наличие CD-ROM;
- операционная система - Windows NT/9X.

Одним из мировых лидеров конечноэлементного анализа является корпорация MacNeal Schwendler Corporation (США), выпускающая программные продукты: MSC/MARC, MSC/NASTRAN, MSC/PATRAN, MSC/InCheck и др.

MSC/MARC представляет собой универсальную конечноэлементную программу для проведения углубленного анализа высоконелинейного поведения конструкций и решения задач теплопередачи. Дополняя нелинейные функции продуктов MSC/NASTRAN и MSC/DYTRAN, MSC/MARC проводит комплексный анализ задач, по условиям которых конструкции подвергаются большим перемещениям и поворотам, имеют высоконелинейные свойства

материалов или свойства, зависящие от истории нагружения, а также анализ контактного взаимодействия конструкций. Применение современных формулировок и вычислительных методов обеспечивает надежность проектов и сокращает объем физического макетирования. MSC/MARC обладает широкими возможностями в области решения сложных нелинейных задач. MSC/MARC может работать на различных компьютерных платформах от рабочих станций до суперкомпьютеров. С помощью MARC, в частности, можно проводить динамический анализ, анализ разрушений, акустический анализ.

MSC/NASTRAN обеспечивает полный набор расчетов, включая расчеты собственных частот и форм колебаний, установившихся и неуставившихся процессов, акустики, частотных характеристик при воздействии случайных нагрузок, спектрального анализа.

Предусмотрена возможность моделирования практически всех видов материалов, в том числе композитных и гиперупругих. Расширенные функции включают технологию суперэлементов (подконструкций), модальный синтез и макроязык DMAP для создания пользовательских приложений. Наряду с расчетом конструкций MSC/NASTRAN может использоваться и для *оптимизации проектов*. Оптимизацию можно проводить для решения задач статики, устойчивости, установившихся и неуставившихся переходных процессов, собственных частот и форм колебаний, акустики. Вес, напряжения, перемещения, собственные частоты и многие другие характеристики могут рассматриваться либо в качестве целевых функций проекта (в этом случае их можно минимизировать или максимизировать), либо в качестве ограничений. Алгоритмы анализа чувствительности позволяют исследовать влияние различных параметров на поведение целевой функции и управлять процессом поиска оптимального решения.

(NASTRAN выпускается и другими производителями программного обеспечения; в частности, система UAI/ NASTRAN разработана американской компанией Universal Analytics, Inc (UAI).)

COSMOS/M DESIGNER II предназначена для расчетов прочности, теплоотдачи, устойчивости на основе метода конечных элементов. COSMOS/M DESIGNER II полностью интегрирована с MicroStation и MicroStation Modeler. Исходная модель строится непосредственно в MicroStation Modeler или импортируется из файлов форматов DXF, DWG, SAT, STEP. Расчетная модель (свойства материалов, нагрузки, расчетная сетка и т.д.) создается полуавтоматически прямо в среде MicroStation Modeler и ассоциирована с геометрической моделью. Результаты анализа представляются в виде графиков, диаграмм; с возможностью наложения

карты распределения параметра прямо на модель, создание мультипликации деформации детали и т.д. Особенность этой системы заключается в наличии блока быстрого расчета (Fast Finite Element, EFE), позволяющего резко сократить в 100 раз время расчета по сравнению с базовыми продуктами конечноэлементного анализа и совместить этапы проектирования и оптимизации модели без значительного увеличения рабочего времени. Возможно также использовать расчетные блоки систем ANSYS и NASTRAN.

COSMOS/Works представляет собой систему инженерных расчётов, созданную специально для совместного использования с системой твёрдотельного параметрического моделирования SolidWorks. Система COSMOS/Works разработана американской компанией Structural Research & Analysis Corporation и поставляется в трёх вариантах конфигурации: базовой (Basic), промежуточной (Intermediate) и расширенной (Advanced); выполняющих следующие виды расчётов:

- статический расчёт напряжений и деформаций;
- расчёт продольного изгиба для определения критической нагрузки;
- частотный анализ для определения собственных частот и форм колебаний;
- линейный динамический анализ с использованием результатов частотного анализа;
- статический и динамический нелинейный структурный анализ.

COSMOS/Works позволяет передавать результаты вычислений в системы ANSYS и MSC/NASTRAN. Кроме того, пользователь может сохранять результаты расчёта в формате VRML, а также создавать AVI – файлы на основе анимационного представления нагружения детали.

ANSYS включает в себя следующие программы анализа поведения механических конструкций:

- **ANSYS/Multiphysics** – самый мощный, многоцелевой продукт компании, представляет собой программное средство анализа для широкого круга инженерных дисциплин, которое позволяет проводить расчетные исследования не только в таких отдельных областях знания, как прочность, распространение тепла, механика жидкостей и газов или электромагнетизм, но и решать связанные задачи. Эта программа обеспечивает оптимизацию проектных разработок на уровне, позволяющем моделировать инженерные проблемы в наиболее полной постановке.

- **ANSYS/Mechanical** предназначен для выполнения проектных разработок, анализа и оптимизации: решения сложных задач прочности конструкций, теплопередачи и акустики. Эта программа, обеспечивающая проверку правильности проектных работ, является мощным инструментом для определения перемещений, напряжений, усилий, температур и давлений, а также других важных параметров.
- **ANSYS/Structural** выполняет сложный прочностной анализ конструкций с учетом разнообразных нелинейностей, среди которых геометрическая и физическая нелинейности, нелинейное поведение конечных элементов и потеря устойчивости. Используется для точного моделирования поведения больших и сложных расчетных моделей.
- **ANSYS/ED** представляет собой программу, обладающую возможностью расчетного кода ANSYS/Multiphysics, но имеющую ограничения по размерам расчетной модели. Этот доступный пакет является идеальным для обучения и подготовки персонала.

FEMAP. В настоящий момент широкое распространение приобретает система FEMAP, рекомендованная производителями международной космической станции “Альфа” в качестве основного *pre-постпроцессора* для подготовки и визуализации расчетных данных в системах конечноэлементного анализа.

Контрольные вопросы

1. Как составляются конечно-разностные уравнения?
2. Приведите примеры замены производных конечными разностями.
3. Как находятся прогибы в условных точках (за границами определения функций)?
4. В чем заключается основная идея метода конечных элементов?
5. Какие известны программные комплексы, основанные на МКЭ?
6. Что общего и чем принципиально различаются МКЭ и МКР?

Глава 5

Определение прочности конструкций ЭС при механических воздействиях

5.1. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА БАЛОК

Гармоническая вибрация. При воздействии гармонической вибрации наиболее опасно, с точки зрения возможности механического разрушения, возникновение резонансных колебаний балки. Условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma], \quad (5.1)$$

где σ_{\max} - максимальное нормальное напряжение в сечениях балки;

M_{\max} - максимальный изгибающий момент;

$[\sigma]$ - допустимое нормальное напряжение.

Момент сопротивления определяется по формуле

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \quad (5.2)$$

для круглого сечения и по формуле

$$W = \frac{bH^2}{6} \quad (5.3)$$

для прямоугольного сечения.

Изгибающий момент при изгибе балки

$$M = EJ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right), \quad (5.4)$$

где J - момент инерции сечения, определяемый по формуле

$$J = \frac{\pi d^4}{64}, \quad (5.4a)$$

где d – диаметр для балки круглого сечения

и

$$J = \frac{bH^3}{12}, \quad (5.4б)$$

где b, h – ширина и высота для балки прямоугольного сечения.

Учитывая (3.24) и (3.27) прогиб балки при резонансе на i -й гармонике [1]:

$$V_i = V_i(x) = \frac{B_i(x)W_i(x)\ddot{Z}_i}{4\pi^2\eta_i f_{0i}^2}, \quad (5.5)$$

где коэффициент

$$B_i(x) = \frac{\int_0^L W_i(x)dx}{\int_0^L W_i^2(x)dx} \quad (5.6)$$

В этих выражениях: f_{0i} - i -я СЧК, определяемая по формуле (3.9); \ddot{Z}_i - амплитуда виброускорения точек крепления. η_i - КМП, рассчитываемый по формуле

$$\eta_i = \frac{1}{\sqrt{f_{0i}}}, \quad (5.6a)$$

где f_{0i} – первая собственная частота колебаний балки;

Балочная функция и вторая производная в формуле (5.5)

$$W_i(x) = \sin \chi_x + A_i \cos \chi_x + B_i \operatorname{sh} \chi_x + C_i \operatorname{ch} \chi_x; \quad (5.7)$$

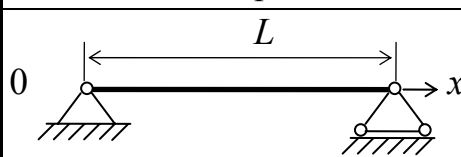


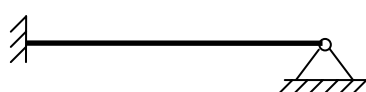
$$W_i''(x) = \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^2 (-\sin \chi_x - A_i \cos \chi_x + B_i \operatorname{sh} \chi_x + C_i \operatorname{ch} \chi_x),$$

где $\chi_x = \lambda_i x/a$.

Параметр λ_i и коэффициенты A_i, B_i, C_i выбираются из табл. П2 в зависимости от номера гармоники и способа крепления концов балки. Значения интегралов в формуле (5.6) приведены в табл. П3. Координаты наиболее опасных сечений, где $M=M_{\max}$, приведены в табл. 5.1.

Т а б л и ц а 5.1

Координаты наиболее опасных сечений

Схема крепления	X	Схема крепления	X
	$L/2$ $L/2$		0
			$3/8 L$

Пример 5.1. Определить прочность балки (медного вывода) в условиях первого резонанса, если возбуждение кинематическое с амплитудой виброускорения 10g. Размеры балки, материал и способ крепления концов соответствуют примеру.

Решение. Так как балка представляет медный проводник, то по табл. П1 найдем допустимое напряжение $[\sigma]=0,3 - 1,2 \text{ Н/м}^2$.

Для круглого сечения по формулам (5.2) и (2.3) найдем

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14(0,5 \cdot 10^{-3})^3}{32} = 12,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3;$$

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = 3,1 \cdot 10^{-13} \text{ м}^4.$$

Для балки со свободно опертыми концами с помощью табл. П3 по формуле (5.6) находим

$$B_{1x} = \frac{0,64}{0,5} = 1,28.$$

Из табл.П2 выбираем $\lambda_1=3,14$; $A_1=B_1=C_1=0$. Используя найденное в примере значение частоты $f_{01}=942 \text{ Гц}$ и КМП $\eta = \frac{1}{\sqrt{f}} = 0.033$; а также учитывая, что максимальный изгибающий момент при $x=L/2$ (см. табл.5.1), по формулам (5.4) и (5.5) получим

$$|M_{\max}| = 1,32 \cdot 10^{11} \cdot 3,1 \cdot 10^{-13} \frac{1,28 \cdot 10 \cdot 9,81}{4\pi^2 \cdot 942^2 \cdot 0,033} \left(\frac{3,14}{2 \cdot 10^{-2}} \right)^2 \sin \frac{\pi}{2} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}^2$$

По формуле (5.1)

$$\sigma_{\max} = \frac{1,1 \cdot 10^{-3}}{12,3 \cdot 10^{-12}} = 0,89 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2.$$

Применяя условие прочности (5.1), видим, что σ_{\max} больше среднего значения допустимого напряжения $[\sigma_{\text{ср}}]=0,75 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, т.е. балка разрушится.

Случайная вибрация. Если демпфирование в системе мало, то ее реакция на узкополосное случайное возбуждение представляет узкополосный случайный процесс [13]. Распределение пиковых значений напряжений можно описать законом Релея:

$$P\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = \exp\left[-\frac{\sigma_n^2}{2\sigma^2}\right], \quad (5.8)$$

где $P\left(\frac{\sigma_n}{\sqrt{\sigma^2}}\right)$ - вероятность того, что пиковые значения напряжения превысят среднеквадратическое (СК) значение.

Если принять пиковые значения равными допускаемым $[\sigma]$, то получим

$$P\left(\frac{[\sigma]}{\sqrt{\sigma_k^2}}\right) = \exp\left[-\frac{[\sigma]^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (5.9)$$

СК значения напряжения балки на k -й форме определяются по формуле

$$\tilde{\sigma}_k(x) = B_k \frac{b}{2} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \cdot \varphi''(x) \sqrt{\frac{g^2 S(f)}{8\pi\eta_k f_k}}. \quad (5.10)$$

Обозначения параметров здесь соответствуют формуле (3.32).

При действии широкополосной случайной вибрации одновременно возбуждается несколько собственных форм колебаний (СФК). Если реакции балки на каждой из форм независимы, то результирующее СК значение напряжения равно

$$\sqrt{\overline{\sigma^2}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}, \quad (5.11)$$

где n - число одновременно возбуждаемых форм колебаний.

Ударное воздействие. В соответствии с (5.1) $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$, где

W - момент сопротивления, рассчитываемый по формулам (5.2) или (5.3).

Если балку представить в виде модели с сосредоточенной массой и считать, что на нее действует сосредоточенная сила инерции

$$P = m\ddot{V}, \quad (5.12)$$

где m - сосредоточенная масса;

\ddot{V} - ускорение в точке приведения.

Максимальный изгибающий момент M_{\max} можно найти по формулам табл. 5.2 [32].

Для расчета силы P в соответствии с формулой (5.12), необходимо найти приведенную массу m и ускорение \ddot{V} .

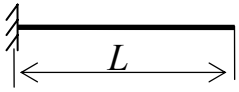


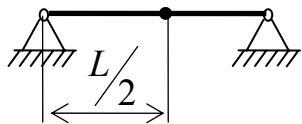
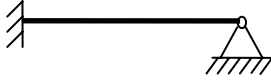
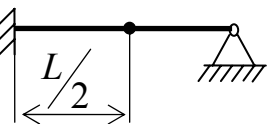

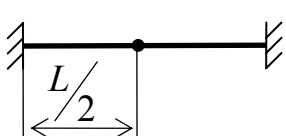
Определение приведенной массы. Будем считать, что приведенная масса эквивалентна расчетной, если не изменяется собственная частота колебаний ω_0 . Для балки с распределенной массой

$$\omega_0 = \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{B}{m}},$$

а для балки с сосредоточенной массой M

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

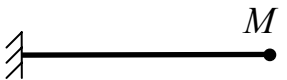
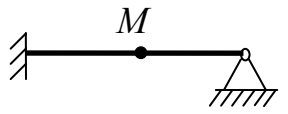
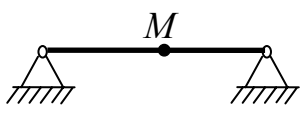
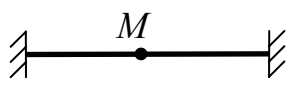
Способы крепления балок и расчетные формулы

Способ крепления	Расчетная схема	Коэффициент жесткости k	Координата наиболее опасного сечения	M_{\max}
		$3EJ/L^3$	PL	0
		$48EJ/L^3$	$PL/4$	$L/2$
		$110EJ/L^3$	$3PL/16$	L
		$148EJ/L^3$	$PL/8$	$L/2$

Приравнявая правые части этих выражений и используя значения α из табл. 3.1 и формулы табл. 5.2, получим выражения для расчета приведенных масс, сведенные в табл. 5.3. В этой таблице m - масса балки.

Т а б л и ц а 5.3

Приведенные массы

Расчетная схема	M	Расчетная схема	M
	$0.24m$		$0.46m$
	$0.49m$		$0.37m$

Расчет ускорений. Используем формулы, приведенные в главе 2 и в работе [5].

При действии синусоидального импульса ускорение

$$\ddot{V} = \frac{A \omega \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sqrt{2(1 + \cos \omega \tau)},$$

прямоугольного импульса

$$\ddot{V} = 2A \sin \frac{\omega \tau}{2},$$

где A - максимальное значение ускорения импульса;

τ - длительность импульса;

ω - условная частота возбуждения.

Максимальное ускорение при действии синусоидального импульса

$$\ddot{V}_{\max} = 1,57A,$$

при действии прямоугольного импульса

$$\ddot{V}_{\max} = 2A.$$

5.2. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА ПЛАСТИН

Гармоническая вибрация. При возбуждении колебаний пластины гармонической вибрацией наиболее опасно, с точки зрения возможности механического разрушения, возникновение ее резонансных колебаний.

Условие прочности можно представить в виде выражения (5.1).

Максимальные нормальные напряжения возникают на поверхности пластины и в направлении осей X и Y рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6M_y}{H^2}; \\ \sigma_y &= \frac{6M_x}{H^2}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где H - толщина пластины.

Изгибающие моменты

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где $V=V(x,y)$ - функция координат X и Y ;

D - цилиндрическая жесткость, определяемая по формуле (3.34).

Максимальный изгиб на k -м резонансе с учетом формулы (3.57) находится по формуле:

$$V_k(x,y) = \frac{\ddot{Z}_0 B_k(x,y) W_k(x,y)}{4\pi^2 f_{0k}^2 \eta_k} \quad (5.15)$$

Функция $W_k(x,y)$, определяющая собственную форму колебаний, для прямоугольной пластины представляется в виде

$$W_k(x,y) = W_k(x) \cdot W_k(y),$$

где балочные функции

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \sin \chi_x + A_i \cos \chi_x + B_i \operatorname{sh} \chi_x + C_i \operatorname{ch} \chi_x; \\ W_k(y) &= \sin \chi_y + A_j \cos \chi_y + B_j \operatorname{sh} \chi_y + C_j \operatorname{ch} \chi_y; \\ \chi_x &= \frac{\lambda_i x}{a}; \quad \chi_y = \frac{\lambda_j y}{b}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Параметры λ и коэффициенты A, B, C берутся из табл. П.2 в зависимости от способа крепления краев в направлении осей X и Y и номера гармоники.

Коэффициент

$$B_k(x,y) = B_k(x) \cdot B_k(y) = \frac{\int_0^a W_k(x) dx}{\int_0^a W_k^2(x) dx} \cdot \frac{\int_0^b W_k(y) dy}{\int_0^b W_k^2(y) dy}. \quad (5.17)$$

Значения интегралов берутся из табл. П4. Собственная частота колебаний (СЧК) f_{0k} и коэффициент механических потерь (КМП) η_k находятся соответственно по формулам (3.43а) и (5.6а).

Используя выражения (5.15) и (5.17), найдем частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\ddot{Z}_A B_k \lambda_i^2}{4\pi^2 f_{0k}^2 \eta_k a^2} W_j(y) \cdot (-\sin \lambda_x - A_i \cos \lambda_x + B_i \operatorname{sh} \lambda_x + C_i \operatorname{ch} \lambda_x); \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\ddot{Z}_A B_k \lambda_j^2}{4\pi^2 f_{0k}^2 \eta_k b^2} W_i(x) \cdot (-\sin \lambda_y - A_j \cos \lambda_y + B_j \operatorname{sh} \lambda_y + C_j \operatorname{ch} \lambda_y). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Для нахождения σ_{\max} можно рассчитать σ_x и σ_y , используя машинную программу, в нескольких десятках точек и наибольшее из рассчитанных значений принять равным σ_{\max} .

Случайная вибрация. Подходы, использованные в § 5.1 для расчета прочности балок при действии случайной вибрации, справедливы и для пластин.

СК значения напряжений рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_k^2(x) &= \frac{1.5DB_k g}{\pi f_{0k} H^2} \left(\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} \right) \sqrt{\frac{s(f)}{2\pi f_{0k} \eta_k}}; \\ \tilde{\sigma}_k^2(y) &= \frac{1.5DB_k g}{\pi f_{0k} H^2} \left(\frac{\partial^2 W_k}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2} \right) \sqrt{\frac{s(f)}{2\pi f_{0k} \eta_k}},\end{aligned}\quad (5.19)$$

где $W_k = W_k(x, y)$.

Пример 5.2. Рассчитать среднеквадратическое напряжение в точке прямоугольной плиты с координатами $\xi_x = x/a = 0,4$ и $\xi_y = y/b = 0,4$. Способ крепления плиты показан на рис. 5.1.

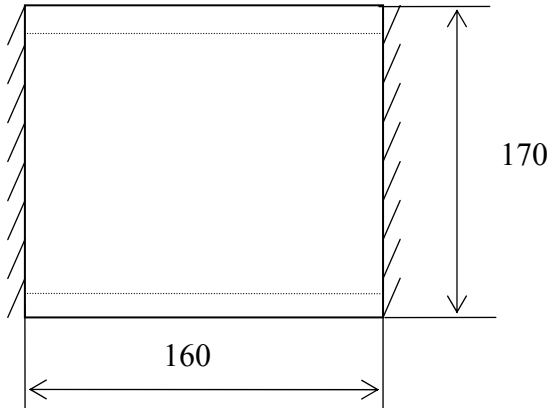


рис. 5.1.

Решение. Воспользуемся формулами (5.19) и (3.32), но вначале проведем предварительные вычисления.

По табл. П.3 находим значения интегралов:

$$\begin{aligned}\int_0^a W_1^2(x) dx &= 1,0359a; \\ \int_0^a W_2(x) dx &= 0,8594a;\end{aligned}$$

Рис. 5.1. Способ крепления плиты

$$\begin{aligned}\int_0^a W_2^2(x) dx &= 0,9985a; & \int_0^b W_1(y) dy &= 0,6366b; & \int_0^a W_1(x) dx &= 0,8456a; \\ \int_0^b W_1^2(y) dy &= 0,5b; & \int_0^b W_2(y) dy &= 0,6366b; & \int_0^b W_2^2(y) dy &= 0,5b.\end{aligned}$$

Находим по формуле (5.17) коэффициенты B_1 и B_2

$$B_1 = \frac{0,8456}{1,0359} \cdot \frac{0,6366}{0,5} = 1,038; \quad B_2 = \frac{0,8594}{0,9985} \cdot \frac{0,6366}{0,5} = 1,096.$$

Функцию $W_k(x, y)$ для прямоугольной плиты найдем по формуле

$$W_k(x, y) = W_i(x) \cdot W_j(y).$$

Балочные функции с учетом данных табл. П.2, формул (5.16) и $\xi_x = 4,73 \cdot 0,4 = 1,89$, $\xi_y = 7,853 \cdot 0,4 = 3,14$ равны

$$\begin{aligned}W_1(x) &= \sin 1,89 - 1,018 \cos 1,89 - 1 \operatorname{sh} 1,89 + 1,018 \operatorname{ch} 1,89 = 1,48; \\ W_2(x) &= \sin 3,14 - 0,999 \cos 3,14 - 1 \operatorname{sh} 3,14 + 0,999 \operatorname{ch} 3,14 = 1,03; \\ W_1(y) &= \sin 3,14 \cdot 0,4 = 0,951; & W_2(y) &= \sin 6,28 \cdot 0,4 = 0,589.\end{aligned}$$

По формулам (5.18) находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial x^2} &= 0,951 \frac{22,373}{0,16^2} [-\sin 1,89 - (-1,018) \cos 1,89 - \\ &- 1 \cdot \operatorname{sh} 1,89 + 1,0178 \cdot \operatorname{ch} 1,89] = -874,33;\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 W_2(x, y)}{\partial x^2} = 0,589 \frac{61,67}{0,16^2} [-\sin 3,14 - (-0,999) \cos 3,14 -$$

$$-1 \cdot \operatorname{sh} 3,14 + 0,999 \cdot \operatorname{ch} 3,14] = -1374,73;$$

$$\frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial y^2} = 1,48 \frac{9,87}{0,17^2} (-\sin 4,14 \cdot 0,4) = -480,55;$$

$$\frac{\partial^2 W_2(x, y)}{\partial y^2} = 1,03 \frac{39,479}{0,17^2} (-\sin 6,28 \cdot 0,4) = -828,48.$$

Рассчитываем

$$\tilde{\sigma}_1^2(x) = \frac{1,5 \cdot 8,87 \cdot 1,038 \cdot 9,8}{3,14 \cdot 183 \cdot (1,5 \cdot 10^{-3})^2} (-874,33 - 0,22 \cdot 48055) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{0,1}{2\pi \cdot 183 \cdot 183^{-0,5}}} = 3,519 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\tilde{\sigma}_2^2(x) = 2,312 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2(y)} = 2,328 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad \sqrt{\tilde{\sigma}_2^2(y)} = 1,68 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Окончательно получим:

$$\tilde{\sigma}_x^2 = \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2(x) + \sigma_2^2(x)} = \sqrt{(3,519 + 2,312)^2 \cdot 10^{12}} = 5,83 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2(y) + \sigma_2^2(y)} = \sqrt{(2,33 + 1,68)^2 \cdot 10^{12}} = 4,01 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Ударное воздействие. Проверяется условие прочности в виде (5.1). Расчет напряжений σ_x и σ_y производится по формулам (5.13) и (5.14). При действии сосредоточенной силы P в середине свободно опертой по всем сторонам прямоугольной пластины изгибающие моменты M_x и M_y рассчитываются по формулам [32]:

$$M_x = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[(1+\nu) \operatorname{th} \alpha_m - \frac{(1-\nu) \alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right] / m \right\};$$

$$M_y = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[(1+\nu) \operatorname{th} \alpha_m + \frac{(1-\nu) \alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right] / m \right\},$$

где $m=1, 3, 5, \dots$, $\alpha_m = \frac{m\pi a}{2b}$.

Если представить, что масса пластины сосредоточена в ее середине, то при действии ударного импульса сосредоточенная сила равна силе инерции

$$P = M\ddot{V},$$

где M - сосредоточенная масса;

\ddot{V} - ускорение в точке сосредоточения массы, т. е. в середине пластины.

Для прямоугольной свободно опертой пластины

$$M = m_{\text{пл}}/4,$$

где $m_{\text{пл}}$ - масса пластины.

При действии синусоидального ударного импульса

$$\ddot{V} = 1,7A,$$

при действии прямоугольного импульса

$$\ddot{V} = 2A,$$

где A - значение максимального ускорения в импульсе.

5.3. РАСЧЕТ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ВЫВОДОВ ЭРЭ

Расчет максимальных напряжений. Максимальные механические напряжения в конструкциях выводов типа рам рассчитываются по формуле

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}d}{2J}, \quad (5.20)$$

где M_{max} - максимальный изгибающий момент;

d - диаметр круглого вывода, или большая сторона сечения вывода прямоугольного сечения;

J - момент инерции сечения.

Момент J определяется по формулам (5.4а) или (5.4б). В табл. 5.4. приведены возможные способы крепления ЭРЭ, действующие силовые факторы, расчетные схемы и формулы изгибающих моментов в наиболее опасных сечениях выводов. Наибольший из расчетных изгибающих моментов в опасных точках принимается M_{max} .

Силовые факторы обычно обусловлены резонансными колебаниями ЭРЭ, закрепленными на выводах, резонансными колебаниями самих выводов и печатных плат. Особенно опасен резонанс ПП на первой собственной частоте.

В формулах табл. 5.4 Q_x и Q_y углы изгиба платы в направлениях осей X и Y , определяемые по формулам

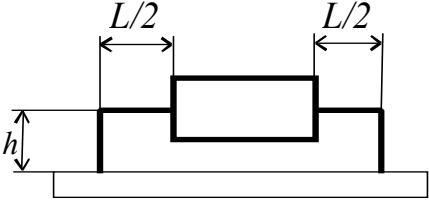
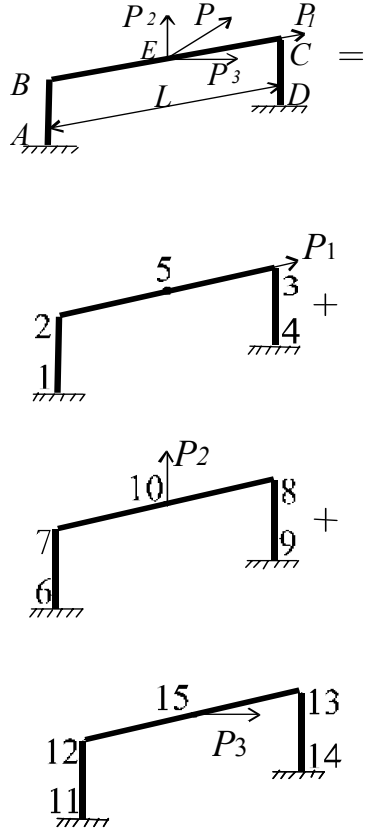
$$Q_x = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} = \frac{B_x B_y \sqrt{f_0 \lambda_x}}{4\pi^2 f_0^2 a} (\cos \chi_x - A_i \sin \chi_x + B_i \text{sh} \chi_x + C_i \text{ch} \chi_x);$$

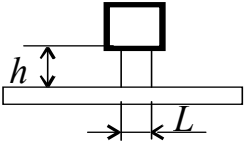
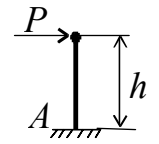
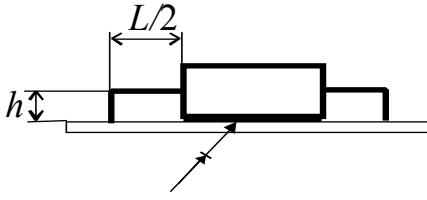
$$Q_y = \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \frac{B_x B_y W(x)}{4\pi^2 b f_0^{1.5}} (\cos \chi_y - A_j \sin \chi_y + B_j \text{ch} \chi_y + C_j \text{sh} \chi_y),$$

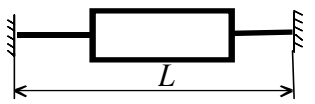
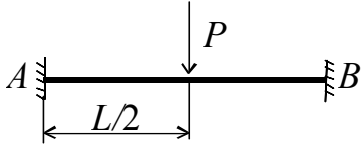
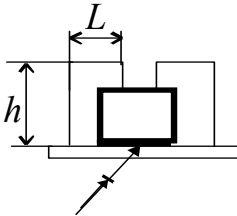
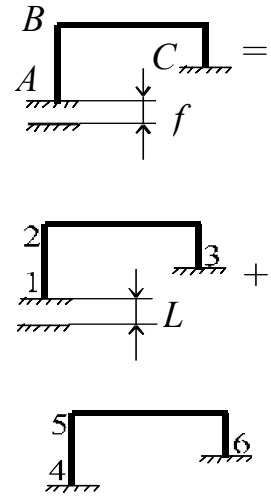
$$\text{где } \chi_x = \frac{\lambda_x x}{a}; \quad \chi_y = \frac{\lambda_y y}{a}.$$

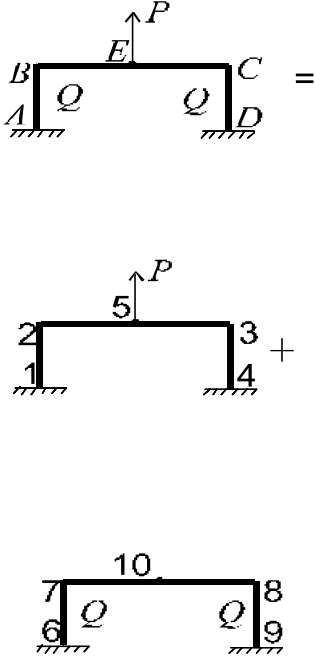
Балочные функции $W(x)$ и $W(y)$ рассчитываются по формуле (5.16), а параметры B_x и B_y - по формуле (5.17). Параметр λ , коэффициенты A , B , C и интегралы вида $\int W(x)dx$ и $\int W(y)dy$, $\int W^2(x)dx$ и $\int W^2(y)dy$ берутся из табл. П2 и П3 в зависимости от способа крепления краев.

Изгибающие моменты в опасных сечениях вывода

Способ крепления ЭРЭ	Виды ЭРЭ и дополн. услов.	Виды резонанса	Расчетная Модель	Расчетные формулы
1	2	3	4	5
	<p>1. Резисторы, конденсаторы, диоды, интегральные микросхемы</p> <p>2. На ЭРЭ действует сила инерции P с частотой вибрации</p>	Резонанс ЭРЭ		$M_A = M_1 + M_6 + M_{11}$ $M_B = M_2 + M_7 + M_{12}$ $M_E = M_5 + M_{10} + M_{15}$ $M_C = M_B; M_D = M_A$ $M_1 = \frac{P_1 h (1 + 3k)}{2 + 6k}$ $M_2 = \frac{1,5 P_1 k h}{1 + 6k}$ $M_6 = \frac{P_2 L}{8(2 + k)}$ $M_7 = \frac{P_2 L}{4(2 + k)}$ $M_{11} = \frac{P_3 h}{2}$ $M_{12} = \frac{P_3 L^3}{16EJh/6J + 8L}$

1	2	3	4	5
	<p>1. Конденсаторы, транзисторы, интегральные микросхемы</p> <p>2. На ЭРЭ действует сила инерции с частотой вибрации</p>	Резонанс ЭРЭ		$M_7 = \frac{4QEJ}{L} - kM_c$ $M_{10} = \dots\dots\dots$ $M_c = 2Q$
	<p>1. Резисторы, конденсаторы, диоды, интегральные микросхемы</p>	Резонанс платы		$M_A = \frac{P h}{N}$ $P = m a \cdot \sqrt{f_0}$ $M_A = M_1 + M_4$ $M_B = M_2 + M_5$ $M_C = M_3 + M_6$ $M_1 = \frac{3 f E J}{(1+k) h L}$ $M_2 = \frac{6 f E J}{(1+k) h L}$ $M_3 = \frac{3(1+2k) f E J}{(1+k) h^2}$ $M_4 = \frac{(3+4k) Q E J}{(1+k) h}$

				$M_5 = \frac{2EJQ}{(1+k)L}$ $M_6 = \frac{EJQ}{(1+k)L}$
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Резисторы, конденсаторы 2. На ЭРЭ действует сила инерции Р с частотой вибрации 	Резонанс ЭРЭ		$M_A = M_B = \frac{1}{2}PL$ $P = ma \cdot \sqrt{f_0}$ $M_A = M_1 + M_4;$ $M_B = M_2 + M_5$ $M_C = M_3 + M_6$
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Транзисторы 2. Корпус ЭРЭ жестко связан с платой 3. Плоскость, в которой расположен вывод, совпадает с направлением изгиба платы 	Резонанс платы		$M_1 = \frac{6(2+3k)}{4+3k} \cdot \frac{EJf}{h^2}$ $M_2 = \frac{18EJf}{(4+3k)hL}$ $M_3 = \frac{3EJ(1+2k)f}{h^2}$ $M_4 = \frac{12(1+k)}{4+2k} \cdot \frac{EJQ}{h}$ $M_5 = \frac{6EJQ}{(4+3k)L}$ $M_6 = \frac{EJQ}{(1+k)L}$

1	2	3	4	5
	1. Ось ЭРЭ совпадает с направлением изгиба	Резонанс платы		$M_A = M_1 + M_6$ $M_B = M_2 + M_7$ $M_E = M_5 + M_{10}$ $M_C = M_B; M_D = M_A$ $M_1 = \frac{PL}{8k + 16}$ $M_2 = \frac{PL}{4k + 8}$ $M_5 = \frac{PL(k + 1)}{4k + 8}$ $M_6 = \frac{2QEJ}{h} \left(\frac{3 + 2k}{2 + k} \right)$ $k = \frac{h}{L}$

В формулах табл.5.4:

N - число выводов ЭРЭ;

P_i - сила инерции;

a - амплитуда виброускорения мест крепления платы;

γ - удельный вес материала проводника;

g - ускорение силы тяжести;

m - масса ЭРЭ.

Расчет собственных частот колебаний. Типы крепления ЭРЭ, расчетные схемы в виде рам и расчетные формулы приведены в табл. 5.5.

В формулах табл. 5.5:

$$B = EJ; \quad k = h/l;$$

E, G - модуль продольной упругости и модуль сдвига материала вывода;

d - диаметр вывода;

m - масса;

J - момент инерции сечения вывода, определяемый по формулам (5.4а) или (5.4б).

Определение времени до разрушения. Время до разрушения выводов ЭРЭ при действии гармонических вибраций определяется по формуле

$$t_p = \frac{N_p}{f_0}, \quad (5.21)$$

где N_p - число циклов до разрушения;

f_0 - первая собственная частота колебаний платы, ЭРЭ или вывода.

Число циклов N_p рассчитывается по формуле $N_p = \left(\frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} \right)^n N_\delta$,

где N_δ базовое число циклов, принимаемое равным $5 \cdot 10^7$.

σ_r - предел усталости материала вывода (табл. П1).

n - параметр, зависящий от материала, размеров, формы вывода и некоторых других факторов ($n = 5 - 10$).

σ_{\max} - максимальное напряжение в сечениях вывода, определяемое с помощью формул, приведенных в табл. 5.4.

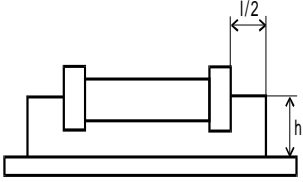

Пример 5.3. Определить долговечность выводов резистора ОМЛТ при резонансных колебаниях на первой собственной частоте. Резистор закреплен на плате, как показано на рис. 1.3, а, расчетная модель соответствует рис. 1.3, б. Масса резистора $3 \cdot 10^{-3}$ кг, размеры выводов $d=1 \cdot 10^{-3}$ м, $l=L/2=2 \cdot 10^{-3}$ м, $h=5,3 \cdot 10^{-3}$ м. Выводы выполнены из холднотянутой медной проволоки с модулем упругости $E=1,23 \cdot 10^{11}$ Н/м².

Ускорение вибровозбуждения $\xi = 10g$.

Решение. Находим

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot (10^{-3})^4}{64} = 4,91 \cdot 10^{-14} \text{ м}; \quad k = \frac{h}{l} = \frac{5,3}{4} = 1,325.$$

Собственная частота колебаний

Тип крепления	Расчетная схема и вид деформации	Собственная частота
		$f = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{24Bg}{mh^3 \left(1 + \frac{3}{6k+1} \right)} \right]^{0.5}$ $f = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\frac{2g}{m}}{\left[\frac{l^3}{24B} + \frac{h^3}{3B} \right]} \dots \dots \dots \right\}^{0.5}$ $\dots \left[\frac{l^4 GJ}{32B(2hB + lGJ)} \right]^{0.5}$ $f = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{48Bg}{ml^3 \left(1 - \frac{3}{2k+4} \right)} \right]^{0.5}$ $f = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{48Bg}{ml^3 \left(1 - \frac{9}{4(2k+3)} \right)} \right]^{0.5}$

По формуле табл.5.4 находим первую собственную частоту колебаний

$$f_1 = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \left\{ \frac{24 \cdot 1,23 \cdot 1011 \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^{-3} \cdot (5,3 \cdot 10^{-3})^3 \left[\frac{1+3}{6 \cdot 1,325+1} \right]} \right\}^{0,5} = 2112 \text{ Гц.}$$

Определяем логарифмический декремент колебаний по формуле [8]

$$\Lambda = \frac{\pi}{\sqrt{f_1}} = \frac{3,14}{\sqrt{2112}} = 0,068$$

и коэффициент передачи при резонансе

$$\mu = \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{3,14}{0,068} = 45,5.$$

Находим инерционную силу

$$P = \mu m \xi = 45,5 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 10g = 13,4 \text{ Н}$$

Используя табл.5.5, находим изгибающие моменты для характерных точек

$$M_A = M_D = \frac{1+3k}{2(1+6k)} hP = \frac{(1+3 \cdot 1,325) \cdot 5,3 \cdot 10^{-3} \cdot 13,4}{2(1+6 \cdot 1,325)} = 19,7 \cdot 10^{-3} \text{ Н м};$$

$$M_B = M_C = \frac{3khP}{2(1+6k)} = \frac{3 \cdot 1,325 \cdot 5,3 \cdot 10^{-3} \cdot 13,4}{2(1+6 \cdot 1,325)} = 15,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н м}$$

Так как при рассматриваемой схеме нагружения напряжения от продольных сил в стержнях отсутствуют, находим

$$\sigma_A = \sigma_D = \frac{M_A d}{2J} = \frac{19,7 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$\sigma_B = \sigma_C = \frac{M_B d}{2J} = \frac{15,8 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}} = 1,61 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Таким образом, в точках пайки выводов к плате $\sigma_{\max} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. По кривой ус-

талости для медной холоднокатаной проволоки, показанной на рис.5.2, находим число циклов до разрушения $N_p = 10^4$.

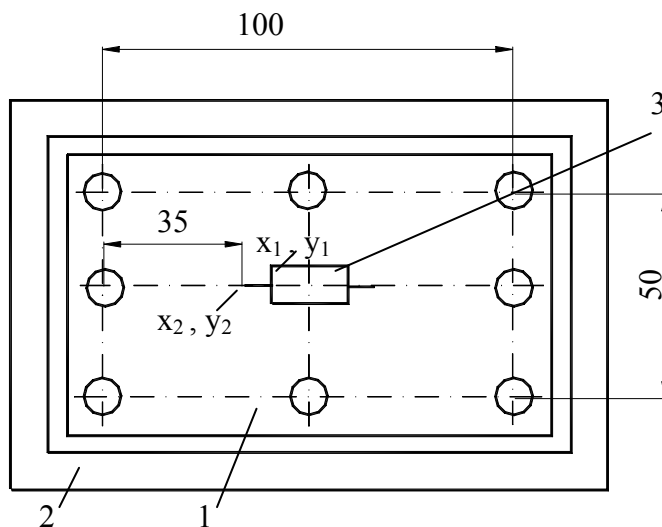


Рис.5.2 Схема крепления платы.
1 – плата; 2 – рамка; 3 – резистор.

Время работы до отказа находим по (5.21)

$$t_p = \frac{10^4}{2112} = 4,7 \text{ с.}$$

Пример 5.4. Используя условия предыдущего примера, рассчитать долговечность выводов резистора ОМЛТ, приклеенного в центре платы, показанной на рис. 5.2 и имеющей размеры $H=1 \cdot 10^{-3}$ м, $a = 1 \cdot 10^{-1}$ м, $b=5 \cdot 10^{-2}$ м. Материал платы стеклотекстолит с модулем упругости $E=3,02 \cdot 10^{10}$ Н/м², коэффициентом Пуассона $\nu=0,22$, плотностью

$\rho=3,02 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$. Плата возбуждается вибрациями с амплитудой $Z_0=0,13 \cdot 10^{-5} \text{ м}$, передаваемыми от мест крепления, и находится в условии резонанса на первой собственной частоте. При таких условиях напряжения в выводах обусловлены изгибающими моментами, действующими на эти выводы при поперечных колебаниях платы.

Решение. При схеме крепления платы, показанной на рис. 5.2, ее можно считать свободно опертой на всех краях. Тогда форму колебаний в направлении оси X можно представить в виде

$$w(x) = W_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

и угол Θ при $x = 0,035$

$$\Theta = \frac{dw}{dx} = W_0 \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} = W_0 \frac{\pi}{a} \cos \frac{0,035\pi}{0,1} = 0,454 \frac{\pi W_0}{a}.$$

Определим собственную частоту колебаний

$$f_1 = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{EH^2}{12\rho(1-\sigma^2)}} = \frac{49,35}{6,28 \cdot 0,1^2} \sqrt{\frac{3,02 \cdot 10^{10} \cdot (10^{-3})^2}{12 \cdot 2,05 \cdot 10^3 \cdot (1-0,22^2)}} = 632 \text{ Гц},$$

коэффициент механических потерь

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{f_1}} = \frac{1}{\sqrt{632}} = 0,04$$

и, используя табл.П5, параметр формы колебаний

$$K_1(0,5;0,5) = K_1(0,5) \cdot K_1(0,5) = 1,273^2 = 1,621$$

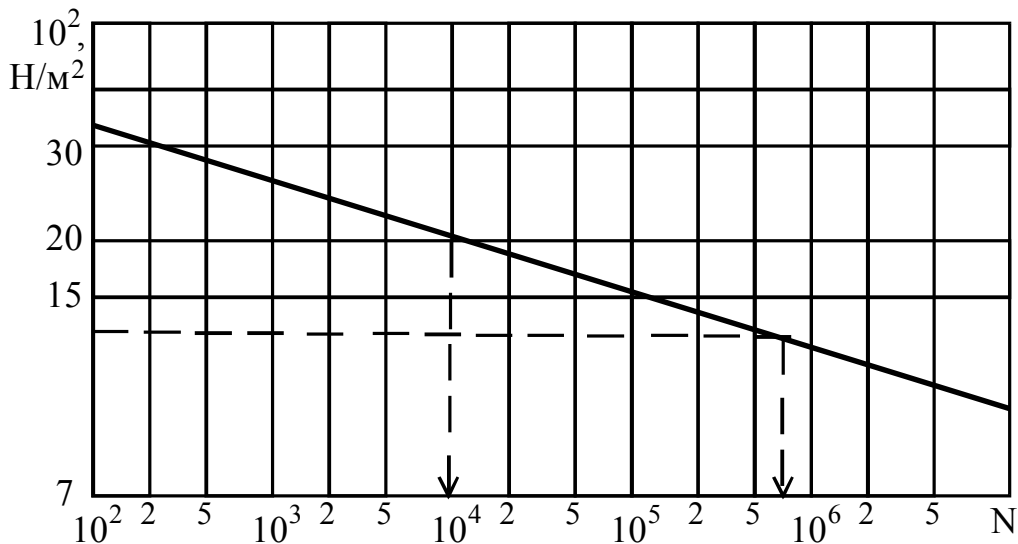


Рис.5.3 Кривая усталости

Определим прогиб в центре платы

$$W_0 = \frac{K_1(0,5;0,5)}{\eta} Z_0 = \frac{1,621}{0,04} 0,13 \cdot 10^{-5} = 5,28 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

и угол

$$\Theta = 0,454 \frac{5,28 \cdot 10^{-5} \pi}{0,1} = 0,024\pi \cdot 10^{-2} \text{ рад.}$$

Используя табл.5.5, находим изгибающие моменты в характерных точках A, B, C . Деформация $f = w_1(x) - w_2(x)$. Так как при резонансе

$$w(x) = \frac{K(\xi_x, \xi_y)}{\eta} Z_0,$$

получим

$$f = \frac{Z_0}{[K_1(\xi_x, \xi_y) - K_2(\xi_x, \xi_y)]}.$$

Относительные координаты для точек X и Y равны соответственно

$$\xi_{x_1} = \frac{37}{100} = 0,37 \text{ и } \xi_{y_1} = \frac{25}{50} = 0,5; \xi_{x_2} = \frac{35}{100} = 0,35 \text{ и } \xi_{y_2} = 0,5.$$

По табл. П5 для случая свободно опертых краев, используя интерполирование, находим $K(0,35) = 1,120$; $K(0,37) = 1,156$; $K(0,5) = 1,273$.

Прогиб

$$f = \frac{0,13 \cdot 10^{-5} (1,156 - 1,120) \cdot 1,273}{0,04} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

По формулам табл.5.5 найдем изгибающие моменты:

$$M_A = \frac{1,23 \cdot 10^{11} \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}}{(1 + 2,65) \cdot 5,3 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\frac{3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-3}} + (3 + 4 \cdot 2,65) \cdot 0,024\pi \cdot 10^{-2} \right] =$$

$$= 10,2 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

$$M_B = \frac{2 \cdot 1,23 \cdot 10^{11} \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}}{(1 + 2,65) \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \cdot \left[\frac{3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}}{5,3 \cdot 10^{-3}} + 0,024\pi \cdot 10^{-2} \right] = 15,3 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

$$M_C = \frac{1,23 \cdot 10^{11} \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}}{1 + 2,65} \cdot \left[\frac{3(1 + 2 \cdot 2,65) \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}}{(5,3 \cdot 10^{-3})^2} + \frac{0,024\pi \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3}} \right] =$$

$$= 17,1 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Для наибольшего изгибающего момента в точке C

$$\sigma_c = \frac{17,1 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 4,91 \cdot 10^{-14}} = 17,4 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2.$$

По кривой усталости на рис 5.3 находим число циклов до разрушения $N_p = 5 \cdot 10^4$ и долговечность выводов $t_p = 5 \cdot 10^4 / 632 = 79\text{с}$.

Контрольные вопросы

1. Напишите условие прочности для балок.
2. Что понимается под моментом сопротивления балки?

3. Как определяется распределение пиковых значений напряжений при случайном возбуждении?
4. Что понимается под спектральной плотностью процесса?
5. Расскажите о методике расчета прочности балок при ударном воздействии.
6. Каковы особенности расчета прочности для пластин при гармонической вибрации?
7. В чем заключается методика расчета прочности при ударном воздействии.
8. Что понимается под усталостной долговечностью конструкции?
9. Что определяет кривая Веллера?
10. Расскажите о методике расчета усталостной долговечности.

Глава 6

Виброзащита РЭС полимерными демпферами

6.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИМЕРНЫХ ДЕМПФЕРОВ

Полимерные демпферы (ПД) как средство уменьшения амплитуд резонансных колебаний. Для устранения резонансных колебаний ячеек РЭС или других элементов конструкций частотной отстройкой необходимо, чтобы первая собственная частота колебаний не менее чем в два раза превышала максимальную частоту возбуждения. Если максимальная частота имеет значение не менее 500 Гц, выполнить это условие сложно, а при максимальной частоте 1000 – 2000 Гц практически невозможно. Полная заливка электронных блоков полимерным компаундом хотя и решает эту задачу, приводит к резкому ухудшению теплового режима, ремонтпригодности и другим отрицательным явлениям и применяется редко. Поэтому практически единственным путем уменьшения амплитуд резонансных колебаний при воздействии вибраций в широком диапазоне частот до 1000 Гц и выше является повышение демпфирующих свойств конструкций РЭС на основе применения специальных устройств – демпферов. Наиболее перспективными для РЭС в настоящее время являются полимерные демпферы (ПД), выполненные на основе так называемых вибропоглощающих (ВП) полимеров. Они могут создаваться в виде демпфирующих слоев, вставок, ребер и других конструктивных элементов.

Теории и практике полимерных демпферов в настоящее время по-

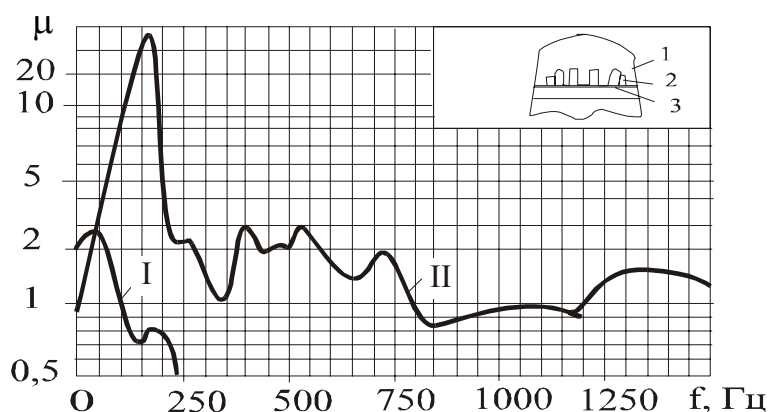


Рис 6.1. Виброзащита ЭС полимерным демпфером

- 1- корпус ракеты; 2- электрорадиоэлементы; 3 - шасси;
- I - амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) шасси;
- II - АЧХ шасси с полимерным демпфером в виде слоя

священо несколько сотен работ исследователей из США, Германии, Японии, СССР и др. стран.

Впервые практическое применение ВП полимеров для уменьшения амплитуд резонансных колебаний РЭС было показано в работе

Ружички¹⁾. На рис. 6.1 показана зависимость коэффициента передачи μ в центре платы от частоты. Видно, что введение демпфирующего слоя в конструкцию шасси снижает амплитуды его резонансных колебаний в несколько раз.

Наиболее полно теория и практика полимерных демпферов в настоящее время рассмотрены в работах [12,27].

Конструкции и принципы работы ПД. Применяемые в настоящее время для уменьшения АРК полимерные демпферы можно разделить на четыре вида:

1. Внешние и внутренние демпфирующие слои (ДС);
2. Демпфирующие ребра (ДР);
3. Демпфирующие вставки (ДВ);
4. Динамические гасители колебаний с демпфированием (ДГКД).

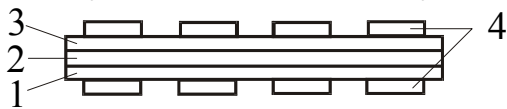
Демпфирующие слои. Внешние и внутренние ДС для уменьшения вибраций конструкций были впервые применены в пятидесятых годах этого столетия И. Славиком, И. Немецем, П. Линардом, Г. Оберстом, Е. Кервином. У нас в стране большой вклад в развитие теории и практики таких конструкций внес Б.Д. Тартаковский и его сотрудники из Акустического института АН СССР, а также другие исследователи. Часто ДС называют жесткими и мягкими вибропоглощающими (ВП) покрытиями, армированными ВП покрытиями, слоеными ВП материалами, или "сэндвичами".

Внешний ДС. Внешний ДС можно выполнить из жесткого или мягкого ВП материала. Известно, что ДС из мягкого ВП ($E < 10^8$ Па) материала становятся эффективными, только при недопустимо больших толщинах ДС, когда появляются волны растяжения-сжатия в направлении поперечном поверхности демпфируемой платы. Это происходит обычно на частотах больше 1000Гц. Поэтому такие конструкции в учебном пособии не рассматриваются.

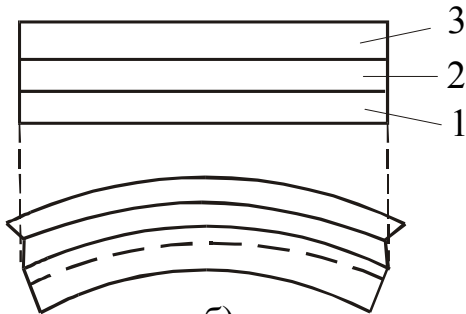
Схема конструкции ДС из жесткого ВП материала и характер его деформаций при изгибе пластины показан на рис. 6.2. Видно, что в ДС происходят в основном деформации растяжения-сжатия. Многочисленные исследования таких конструкций показали, что эффект демпфирования увеличивается не только с повышением демпфирующих свойств ВП материала, что достигается увеличением толщины ДС или применением ВП материала с большим модулем упругости, но и при увеличении его жесткости. Эффективность демпфирования можно повысить и путем применения

¹⁾ Ruzicka J.E. Vibration control: Application. Electro-Technology. – 1964. Vol. 1, №73, с. 75-81.

промежуточного слоя между конструкцией и ДС. Это приводит к значи-



а)



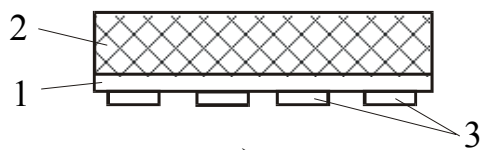
б)

Рис 6.3. Ячейка с внутренним ДС (а) и схема ее деформирования (б)

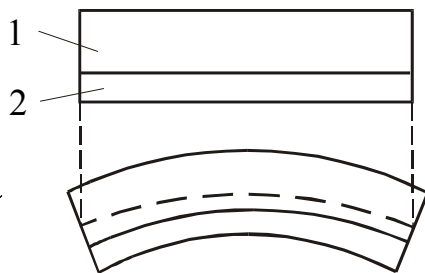
- 1,3 - слои печатной платы;
- 2 - демпфирующий слой
- 4 - электрорадиоэлементы

тельному увеличению суммарной толщины ПД и некоторому усложнению технологического процесса изготовления ячеек РЭС. Поэтому конструкции таких ДС в настоящей работе не рассматриваются, что не исключает возможности нахождения приемлемых конструктивных решений в будущем.

Внутренний ДС. Конструкции с внутренним ДС (рис. 6.3) часто подразделяют на конструкции с армированным ВП покрытием и слоеные (типа "сэндвич") ВП конструкции.



а)



б)

Рис. 6.2 Ячейка с внешним ДС (а) и схемы ее деформирования (б)

- 1 - печатная плата;
- 2 - демпфирующий слой;
- 3 - электрорадиоэлементы.

Обычно под армированными ВП покрытиями понимают покрытия, состоящие из слоев ВП материала с наклеенным на него тонким слоем из жесткого (армирующего) материала. Часто их выполняют в виде лент, приклеиваемых за счет адгезионных свойств ВП материала к демпфируемой конструкции. Слоеные ВП конструкции часто выполняются в виде специальных материалов, которые затем используются для изготовления, например, печатных плат, состоящих из двух слоев стеклотекстолита, склеенных с тонким слоем (0,1-0,3мм) ВП материала. Механика деформирования, а следовательно,

и математический аппарат, описывающий динамику таких конструкций, не имеют принципиальных отличий.

Исследования показали, что наибольшая эффективность проявляется при относительно небольшой жесткости ВП материала, когда происходит "проскальзывание" между слоями из конструкционных материалов и появление больших деформаций сдвига в ДС (рис. 6.3, б).

Демпфирующее ребро. Применение демпфирующего ребра схематически показано на рис. 6.4. Принцип работы ДР схож с внешним ДС. Однако применение ДР вместо внешнего ДС позволяет решить две важные для электронных модулей задачи:

1. Обеспечить одинаковое с внешним слоем демпфирование при меньшей массе. Это достигается за счет того, что средний слой ребра удален на большое расстояние от демпфируемой конструкции. При этом увеличивается момент инерции сечения, а следовательно, и эффективность демпфирования.

2. ДР занимает лишь небольшую площадь ячейки и может располагаться между рядами ЭРЭ, например микросхем.

ДР целесообразно устанавливать вдоль условной линии наибольшей кривизны платы, проходящей через точку максимальной амплитуды колебаний ЭМ при резонансе. Эффективность ДР повышается с увеличением его жесткости на изгиб.

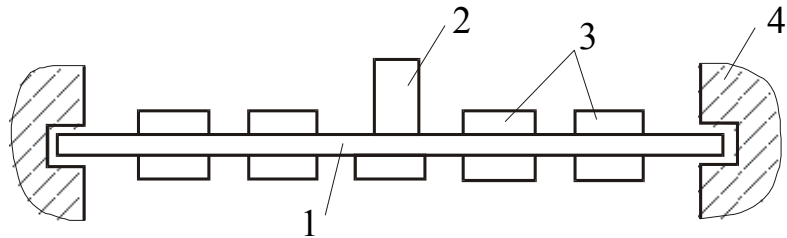


Рис. 6.4. Ячейка с демпфирующим ребром

1 - печатная плата; 2 - демпфирующее ребро;
3 - электрорадиоэлементы; 4 - корпус блока.

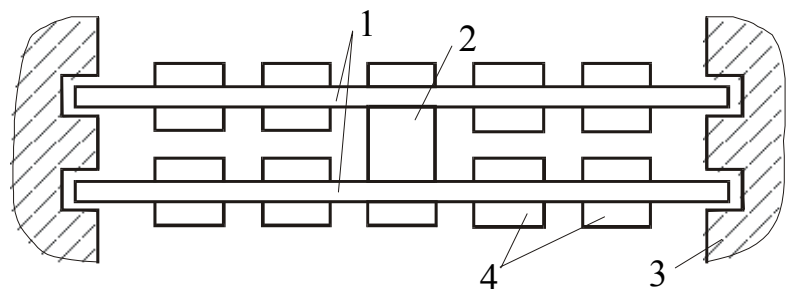


Рис. 6.5. Блок с демпфирующей вставкой.

1-печатная плата; 2-демпфирующая вставка;
3-корпус блока; 4-электрорадиоэлементы.

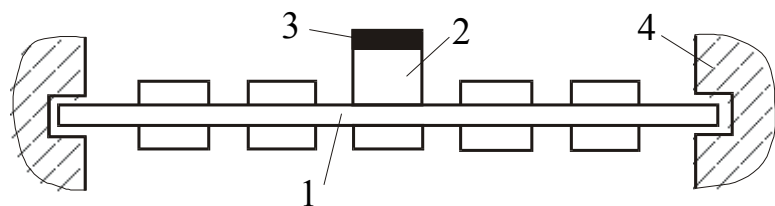


Рис. 6.6. Ячейка с ДГК с демпфированием

1 - печатная плата; 2 - вязкоупругий элемент;
3 - инерционный груз; 4 - корпус блока.

Демпфирующие вставки (рис 6.5). Для обеспечения эффективной работы ДВ необходимо, чтобы СЧК связанных ДВ ячеек существенно различались. Установлено, что СЧК ячеек должны различаться не менее чем в два раза. При этом ДВ должна устанавливаться в точке, где имеют место наибольшие деформации растяжения-сжатия. Разность СЧК ячеек обеспечивается выбором различных толщин печатных плат, применением на одной из ячеек ребер жесткости, различными способами крепления и другими способами.

Динамические гасители колебаний с демпфированием. Принцип работы ДГК был описан Фрамом еще в 1909 году. Если применяется ДГК с демпфированием, то при изгибных колебаниях ячеек инерционный груз деформирует ВП материал, находящийся между платой и грузом (рис. 6.6). В зависимости от конструктивного решения в ВП материале могут происходить как деформации растяжения-сжатия, так и деформации сдвига.

Принципиальное отличие ДГКД от ДГК заключается в том, что в ДГКД используется свойство ВП материала уменьшать амплитуду резонансных колебаний за счет поглощения энергии механических колебаний, в то время как в ДГК используется свойство подавлять колебания конструкций на частоте, равной СЧК гасителя.

6.2. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЗМЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Основные понятия и факторы, определяющие демпфирование колебаний. Термины и определения, относящиеся к вибрации, даются в ГОСТ 24346-80 “Вибрация. Термины и определения”. В соответствии с указанным стандартом:

Демпфер – виброзащитное устройство, или его часть, создающая демпфирование вибраций.

Демпфирование вибраций – уменьшение вибраций в следствие рассеивания механической энергии.

Под уменьшением вибрации понимают уменьшение значений каких-либо определенных величин, характеризующих вибрацию. Например, уменьшение амплитуд виброперемещения и виброускорения.

Демпфирование вибрации обусловлено действием диссипативной силы.

Диссипативная сила – сила, возникающая при движении механической системы и вызывающая рассеивание механической энергии.

Рассеивание механической энергии обусловлено переходом ее в тепло. Поэтому при вибрации может наблюдаться некоторое повышение температуры демпферов или их частей.

Демпфирование колебаний обусловлено следующими тремя факторами:

1. «Внешним» трением при колебаниях конструкции в окружающей среде.
2. «Внутренним трением» в материале.
3. Трением в подвижных и неподвижных соединениях.

Окружающей средой для ячеек обычно является воздух, обладающий небольшой вязкостью, поэтому «внешнее» трение обычно невелико. Обусловленное им аэродинамическое демпфирование, как правило, не превышает 5% от общего демпфирования колебаний конструкции, и им при расчетах можно пренебречь.

«Внутреннее» трение в материалах имеет различную физическую природу. В кристаллических материалах оно обусловлено микропластическими деформациями по границам кристаллов и в объеме материала, в полимерах – преодолением сил молекулярного взаимодействия и т. д. В широко применяемых в конструкциях РЭС материалах – стеклотекстолите, алюминии, его сплавах и других – «внутреннее» трение обычно также невелико. Однако имеются полимеры, «внутреннее» трение которых в десятки и даже сотни раз превышает «внутреннее» трение обычных конструкционных материалов. Эти материалы получили название вибропоглощающих. Они и составляют основу полимерных демпферов, позволяющих существенно увеличить рассеяние энергии механических колебаний.

Трение в подвижных и неподвижных соединениях обуславливает большую часть общего демпфирования колебаний, если не применяются демпферы колебаний. Обычно это трение между поверхностями в кинематических парах, а также в соединениях прессовых, шлицевых, резьбовых, заклепочных и т.п. Несмотря на то, что такие соединения называют неподвижными, при их динамическом нагружении возникают малые проскальзывания по контактными поверхностям. Возникающие при этом силы совершают работу, определяющую потери энергии механических колебаний.

Характеристика демпфирования. В литературе, посвященной анализу колебаний конструкций, применяется значительное количество характеристик демпфирования. Остановимся подробнее на рассмотрении основных характеристик и взаимосвязей между ними. Отношение

$$\Psi = \frac{\Delta W}{W}, \quad (6.1)$$

где W – полная энергия системы за цикл колебаний получило название *коэффициента поглощения*. Так как энергия потерь ΔW равняется работе, совершаемой системой за период колебаний, то

$$\Delta W = \int_0^T F(Z, \dot{Z}) dZ = \int_0^T F_D(\dot{Z}) \dot{Z} dt.$$

Для случая вязкоупругого сопротивления, когда $F_D(\dot{Z}) = b\dot{Z}$, и гармонических колебаний по закону $Z = Z_0 \cos \omega t$.

$$\Delta W = \int_0^T b\dot{z}^2 dt = bZ_0^2 \omega^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \pi \omega b Z_0^2.$$

Принимая полную энергию колебаний, равную $W = \frac{kZ_0^2}{2}$, т.е. максимальному амплитудному значению энергии, получим

$$\Psi = \frac{2\pi b \omega}{k}, \quad (6.3)$$

Широкое распространение получил коэффициент *механических потерь* (КМП), определяемый по формуле

$$\eta = \frac{b\omega_0}{k}, \quad (6.4)$$

Сравнивая (6.3) и (6.4), получим

$$\eta = \frac{\Psi \omega_0}{2\pi \omega}.$$

При резонансе, когда $\omega = \omega_0$,

$$\eta = \frac{\Psi}{2\pi} = \frac{\Delta W}{2\pi W}. \quad (6.5)$$

Величина $Q = 1/\eta$ получила название *добротности*. При резонансе системы с одной степенью свободы (рис. 2.1) добротность численно равна коэффициенту передачи системы μ .

Несовершенная упругость материала, определяющая диссипацию энергии колебаний, проявляется в сдвиге фаз между силой и обусловленной ею деформацией. Из векторной диаграммы сил (рис. 6.7), действующих на систему с одной степенью свободы, видно, что величина этого сдвига

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F''}{F'} = \frac{b\omega}{k}. \quad (6.6)$$

Сравнивая (6.4) и (6.6), определяем, что при резонансе
 $\eta = \operatorname{tg} \varphi$.

Ещё одной широко распространенной характеристикой является *логарифмический декремент колебаний*

$$\delta = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}},$$

где a_i, a_{i+1} – амплитуды колебаний (рис.6.8).

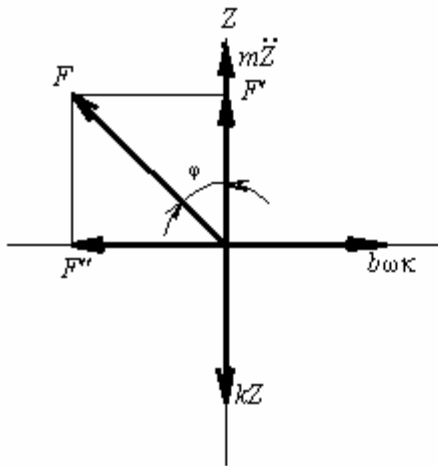


Рис. 6.7. Векторная диаграмма сил системы с одной степенью свободы.

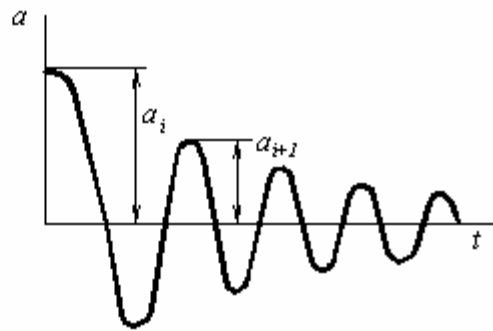


Рис. 6.8. Свободно затухающие колебания.

Учитывая, что коэффициент поглощения можно представить в виде

$$\Psi = - \int_{W_0}^{W_{t+T}} \frac{dW}{W},$$

принимая во внимание $W = \frac{kZ_0^2}{2}$, получим

$$\Psi = - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{2da}{a} = 2 \ln \frac{a_i}{a_{i+1}} = 2\delta.$$

Сравнивая с (6.5), найдём

$$\eta = \frac{\delta}{\pi}. \quad (6.7)$$

6.3. ХАРАКТЕРИСТИКА ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

Особенности физико-механических свойств полимеров. В качестве ВП материалов могут применяться различные материалы с большим внутренним рассеиванием энергии механических колебаний, но наиболее перспективными с учетом всех факторов (технологических, эксплуатационных и др.) являются полимеры. Особенность полимеров, резко выделяющая их из среды других материалов, - способность в зависимости от скорости приложения силы вести себя как жидкость или как твердое упругое тело, или же одновременно проявлять свойства того и другого.

Эта особенность определяется структурой полимеров, состоящих из длинных цепных молекул, участки которых, так называемые звенья, находятся в хаотическом тепловом движении. Приложение внешней силы приводит к некоторой ориентации звеньев в направлении внешней силы. Величина этой ориентации и, следовательно, деформация полимера зависят не только от величины силы, но и от ее скорости. Ориентация звеньев связана с преодолением сил межмолекулярного взаимодействия, которые тем слабее, чем энергичнее тепловое движение, т.е. чем выше температура. Эти обстоятельства обуславливают резкую зависимость механических свойств полимеров от скорости (частоты) деформирования и температуры. На рис. 6.9 приведены типичные зависимости динамического модуля упругости и коэффициента механических потерь полимеров от температуры и частоты колебаний. Можно выделить три зоны - высокоэластичного, стеклообразного (или кристаллического) состояния и переходную зону. Каждый аморфный полимер, в зависимости от температуры и частоты колебаний, может находиться в одном из этих состояний (или вязкотекучем). Например, жесткие пластмассы при нормальных условиях - это полимеры в области стеклообразного или кристаллического состояния, а резины и другие каучукоподобные материалы - полимеры в

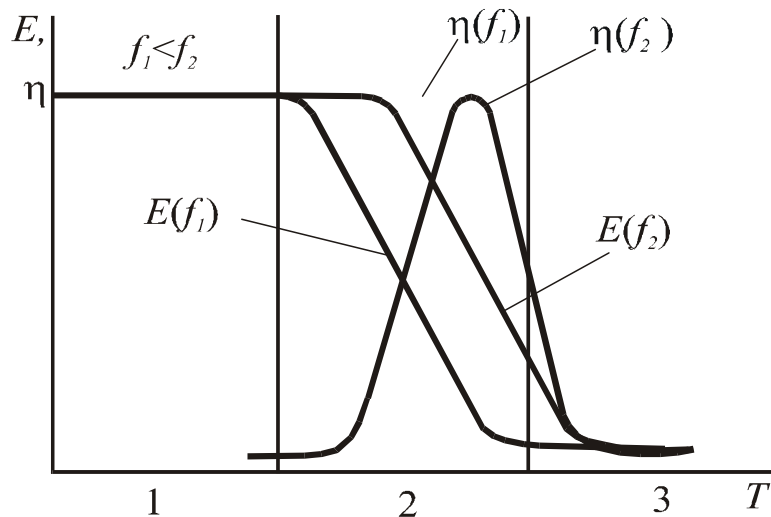


Рис. 6.9. Зависимости динамического модуля упругости и коэффициента механических потерь полимеров от температуры и частоты колебаний
1- зона стеклообразного состояния; 2- переходная зона; 3 - зона высокоэластичного состояния

высокоэластичного (или кристаллического) состояния и переходную зону. Каждый аморфный полимер, в зависимости от температуры и частоты колебаний, может находиться в одном из этих состояний (или вязкотекучем). Например, жесткие пластмассы при нормальных условиях - это полимеры в области стеклообразного или кристаллического состояния, а резины и другие каучукоподобные материалы - полимеры в

области высокоэластического состояния. Рис. 6.9 наглядно показывает, что в качестве ВП материалов для ПД могут выбираться не любые полимеры, а только те, физико-механическое состояние которых соответствует переходной зоне, так как при этом полимер имеет максимальные демпфирующие свойства. Видно также, что и упругие, и демпфирующие свойства полимеров в этой зоне резко изменяются. Динамический модуль упругости обычно изменяется в пределах $(10^5 - 10^9) \text{ Н/м}^2$, а коэффициент механических потерь от 0,01 до $1 \div 2$. При использовании полимеров в качестве ВП материалов необходимо также учитывать зависимость физико-механических свойств полимеров от частоты вибраций и особенно от температуры.

Требования к вибропоглощающим материалам. В предыдущем разделе показано, что в качестве ВП материалов могут применяться полимеры которые по своему физико-механическому состоянию соответствуют области перехода. На рис. 6.10. показаны области перехода для трех поли-

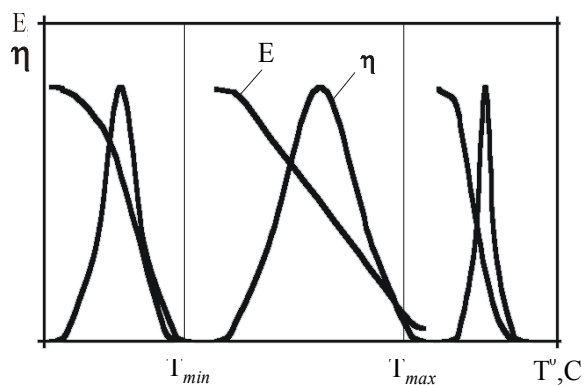


Рис. 6.10. Характеристики полимеров в различных температурных областях

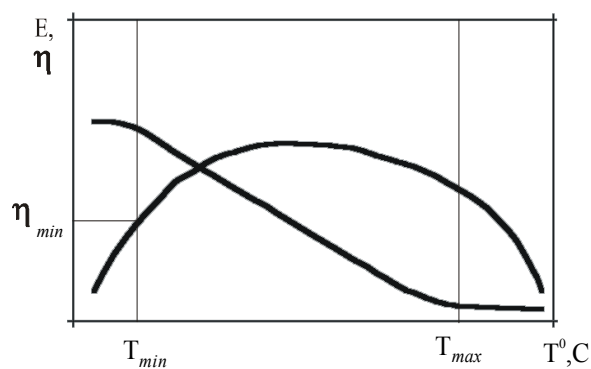


Рис. 6.11. Требуемые характеристики ВП полимера.
 T_{min} , T_{max} – температурный диапазон эксплуатации изделия

меров. Очевидно, что в качестве ВП материала может рассматриваться только полимер, область перехода которого совпадает с температурным диапазоном эксплуатации изделия. Однако этого требования недостаточно. У большинства полимеров область перехода лежит в сравнительно узком интервале температур ($30-35^\circ$), в то время как температурный диапазон эксплуатации ЭС может лежать в пределах от $T_{min} = -40 \div -60^\circ\text{C}$ до $T_{max} = +50 \div +80^\circ\text{C}$, то есть в интервале температур, равном $90 - 140^\circ\text{C}$. Очевидно, что такие полимеры так же не могут быть применены в качестве ВП материалов ЭС (рис 6.10). Следовательно, полимер может применяться в качестве ВП материала для конструкций ЭС, только если выполняются оба эти требования – совпадение переходной области полимера с температурным диапазоном эксплуатации и широкая температурная область перехода по-

лимера, как показано на рис. 6.11. Это обычно требует специальной разработки таких полимеров.

6.4 СПОСОБЫ СОЗДАНИЯ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ ПОЛИМЕРОВ

Рассмотрим факторы, которые влияют на свойства полимеров и могут быть положены в основу создания таких материалов.

Химическое строение. В качестве примера влияния химического строения на положение и ширину переходной зоны на рис. 6.13 даны зависимости динамического модуля сдвига G' и коэффициента потерь η от частоты, приведенные к 100 °С для трех полимеров Н – алкилметакрилатов, эфирные группы которых соответственно содержат 2, 4 и 12 атомов углерода. Как видно, с увеличением длины боковых групп переходная область сдвигается в сторону высоких частот почти на шесть порядков по логарифмической шкале частот. Наблюдается также некоторое изменение ширины переходной зоны.

Сополимеризация. В качестве примера на рис. 2.8 показаны зависи-

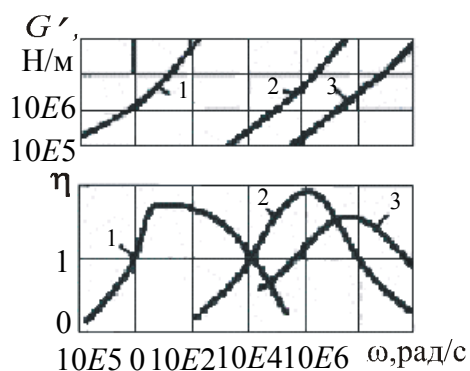


Рис. 6.12. Влияние химического строения полимера на переходную зону:

1-этил; 2-гексил; 3-додecilметакрилата

мости E и η от температуры для сополимера винилхлорида и 2-этилгексилакрилата при различных их весовых соотношениях. Видно, что при сополмеризации наблюдаются две смежные переходные зоны, приводящие к расширению температурного диапазона, в котором наблюдаются значительные величины коэффициента потерь η . Этот способ позволяет также смещать переходную зону в другой температурный диапазон.

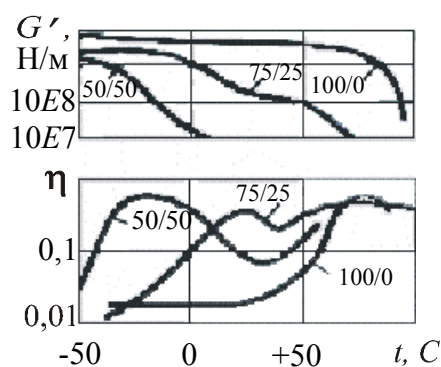


Рис 6.13. Влияние сополимеризации на переходную зону

Пластификация. В отличие от сополимеризации пластификация не приводит к образованию химических связей между полимером и растворителем. Введение пластификатора снижает силы когезии между макромолекулами полимера, вследствие чего ослабляется межмолекулярное взаимодействие. Это эквивалентно уменьшению частоты или повышению температуры. В качестве примера влияния пластификации - на рис.6.14 показаны зависимости G' и η от температуры, измеряемые на частоте 2 ГГц, для поливинилхлорида, пластифицированного диэтилсукцинатом. Как видно, пластификацией можно добиться значительного смещения и расширения переходной зоны. Наполнение и вулканизация. Влияние твердых наполнителей и вулканизации показано на рис. 6.15.

Видно, что эти факторы также существенно влияют на механические и динамические свойства полимеров. Исследование физико-химических свойств полимеров показало, что на положение и ширину переходной зоны влияют также степень полимеризации и молекулярный вес. Характеристики некоторых вибропоглощающих полимеров, которые могут быть использованы при конструировании РЭС, приведены в табл. П7 приложения.

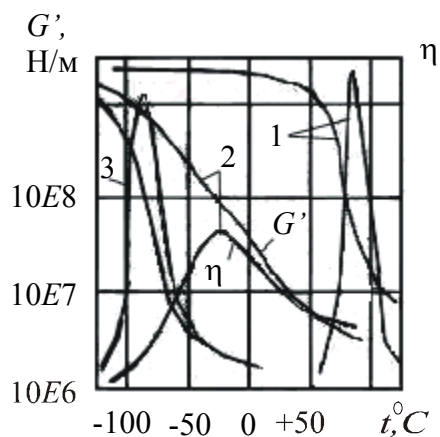


Рис. 6.14. Влияние пластификации на переходную зону.
Концентрация полимера: 1-100%;
2-60,7%; 3-40,8%

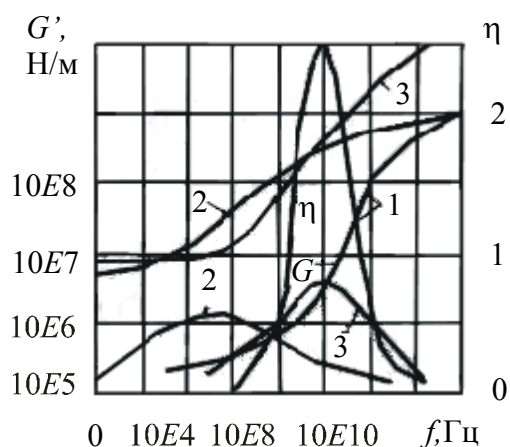


Рис.6.15. Влияние наполнения и вулканизации на переходную зону:
1-невулканизированная; 2-вулканизированная; 3-вулканизированная с наполнением.

Методы экспериментального определения динамических характеристик полимеров. Применяемые методы можно разделить на *прямые*, основанные на непосредственном измерении величины энергии, рассеиваемой в образце, и *косвенные*, направленные на получение относительных характеристик рассеяния энергии.

К *прямым* методам относятся методы энергетический, термический, петли гистерезиса, к *косвенным* – метод резонансных колебаний, метод

свободных затухающих колебаний, фазовый метод. Наибольшее распространение при исследовании демпфирующих свойств радиотехнических материалов и конструкций в настоящее время нашли косвенные методы, которые более подробно рассмотрены в настоящем пособии.

Метод резонансных колебаний. Метод основан на зависимости ширины резонансной кривой от величины демпфирования. Коэффициент механических потерь можно найти по формуле [6].

$$\eta = K_{0,7} \frac{\Delta f_{0,7}}{f_0},$$

где $\Delta f_{0,7}$ - ширина резонансной кривой на уровне 0,707 от максимальной амплитуды (рис. 6.16);

f_0 - резонансная частота,

$K_{0,7}$ - коэффициент нелинейности, определяемый по формуле

$$K_{0,7} = \sqrt{\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}}.$$

Параметр n , характеризующий зависимость демпфирующих свойств от амплитуды колебаний, находится по формуле

$$n = 1 - \frac{\ln \left[\left(\frac{\Delta f_{0,5}}{\Delta f_{0,7}} \right)^2 - 2 \right]}{\ln 2},$$

где $\Delta f_{0,5}$ - ширина резонансной кривой на уровне 0,5 от максимальной амплитуды (рис. 6.16).

Например, если демпфированный амплитудно независимо ($n=1$), то $K_{0,7}=1$ и

$$\eta = \frac{\Delta f_{0,7}}{f_0}. \quad (6.8)$$

Эта формула обычно используется для определения КМП вязкоупругих материалов.

Блок-схема экспериментальной установки, в которой возбуждаются резонансные колебания консольно закрепленного образца, показана на рис. Электромагнитный возбудитель колебаний позволяет возбуждать первую вторую и последующие формы колебаний (рис. 6.18), т.е. можно

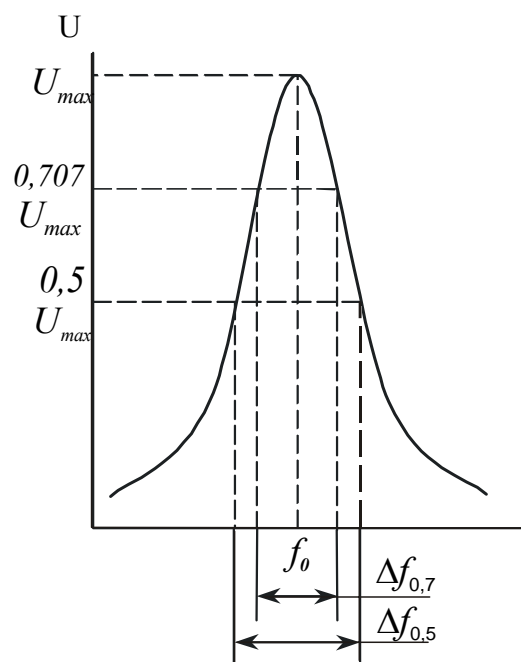


Рис 6.16. Резонансная кривая

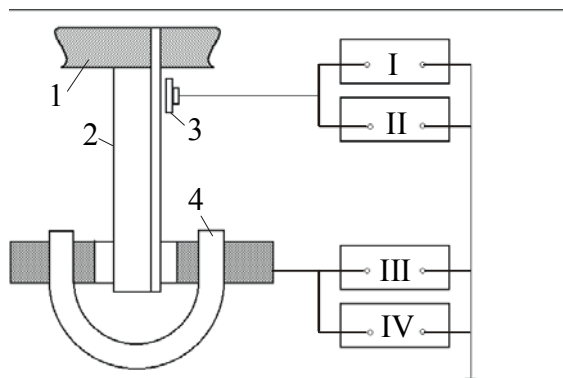


Рис. 6.17 Схема испытаний

1-держатель образца; 2-образец;
3-датчик; 4-возбудитель колебаний;
I-осциллограф; II-милливольтметр;
III-звуковой генератор; IV-частотомер

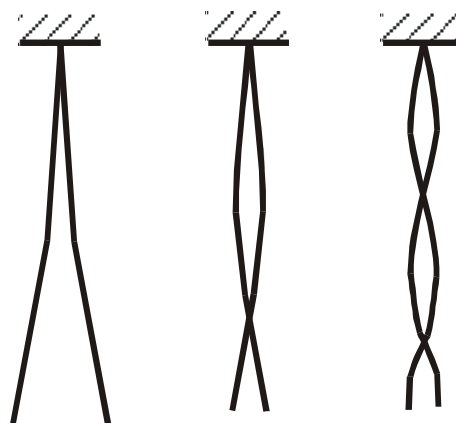


Рис. 6.18 Собственные формы колебаний консольно закрепленного образца

определить КМП на нескольких частотах без изменения конструкции или расположения образца, возбудителя и датчика, что позволяет проводить испытания в температурном диапазоне. Для этого установка, за исключением измерительных приборов, помещается в термокамеру. Если испытываемый образец выполнен из жесткой пластмассы (модуль упругости $E > 1 \cdot 10^8$ Па) то на него в районе возбудителя колебаний и напротив измерительного датчика наклеиваются тонкие пластинки из ферромагнитного материала. Этот метод позволяет определять и величину динамического модуля упругости (ДМУ), необходимую при расчетах конструкций РЭС с полимерными демпферами, по формуле [28]

$$E' = \frac{48\pi^2}{a_{on}} \rho \frac{l^4}{d^2} f_0^2,$$

где ρ - плотность материала; l , d - длина незакрепленной части и толщина образца;

a_{on} - числовой коэффициент, который для первых трех собственных форм колебаний равен $a_{01} = 1,875$; $a_{02} = 4,694$; $a_{03} = 7,855$.

Для испытаний низко модульных материалов ($E < 1 \cdot 10^7$ Па) их необхо-

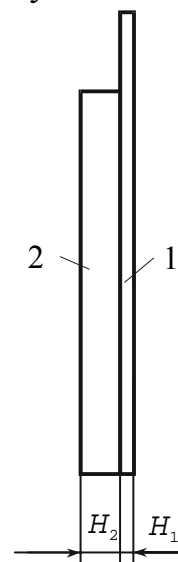


Рис. 6.19. Образец для испытаний
1-стальная линейка;
2-исследуемый материал

димо наклеивать на металлическую, обычно стальную основу. Образец такого типа показан на рис. 6.19. КМП и ДМУ рассчитываются по формулам

$$\eta = \frac{\eta_k - \eta_n}{1 - \frac{B_1}{B}};$$

$$E_2 = E_1 = \frac{\frac{B_1}{B_2} - 1}{4h_2 + 6h_2^2 + 4h_2^3 - \frac{B_1}{B_2}h_2},$$

где η_n, η_k - КМП металлической подложки и составной конструкции, определяемые по формуле (6.8);

$h_2 = \frac{H_2}{H_1}$ - относительная толщина испытываемого материала;

B_1, B - жесткости на изгиб металлической линейки и составного образца. Отношение

$$\frac{B}{B_1} = \left(\frac{f}{f_1} \right)^2 \frac{m}{m_1}.$$

Резонансные частоты подложки f_1 и составного образца f , масса подложки m_1 и образца m находятся экспериментально.

Фазовый метод. Демпфирующие свойства определяются по величине сдвига фаз между возбуждающей гармонической силой и деформацией (перемещением) исследуемого образца. КМП определяется по формуле

$$\eta = \left(1 - \frac{f^2}{f_0^2} \right) \operatorname{tg} \varphi,$$

где f, f_0 - частота возбуждения и собственная частота колебаний образца;

φ - угол сдвига фаз.

Метод свободных колебаний. Демпфирующие свойства определяются по скорости затухания свободных колебаний. Используя спектрограмму свободных затухающих колебаний (см. рис. 6.8), найдем

$$\eta = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} \right).$$

Значение η для вязкоупругих полимеров не зависит от амплитуды колебаний и может определяться по любым двум смежным амплитудам. Свободные колебания возбуждаются или заданием предварительного из-

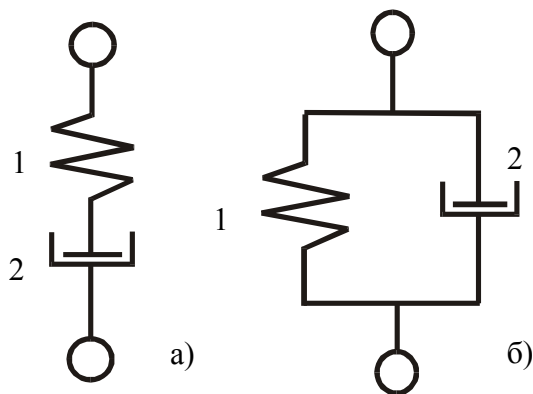


Рис. 6.20. Модели ВП материалов
а) – модель Максвелла; б) – модель Фохта;
1-элемент с упругими свойствами;
2-элемент с вязкими свойствами.

гиба конструкции, или приложением ударного импульса, или возбуждением резонансных колебаний с последующим снятием возбуждающей силы.

Математические модели. Для описания вязкоупругих материалов применяется несколько механических моделей, из которых простейшие модели Максвелла и Фохта показаны на рис.6.23. Связь между напряжением и деформацией для этих моделей представляется в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} = E_1 \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\sigma E}{b}$$

для модели Максвелла, и

$$\sigma = E_1 \varepsilon + b \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (6.9)$$

для модели Фохта. Если напряжение изменяется по гармоническому закону, то у вязкоупругих тел наблюдается сдвиг фаз между напряжением и деформацией (рис. 6.24) на некоторый угол φ .

Из рисунка видно, что напряжение можно представить в виде сумм двух составляющих:

$$\sigma = \sigma' + i\sigma'' \quad (6.10)$$

Составляющая напряжения σ' совпадает по направлению с деформацией и, как известно из теории колебаний, связана с упругой (запасаемой) энергией тела, вторая составляющая σ'' , опережающая деформацию на 90° , связана с энергией, теряемой системой (энергией потерь). Пусть деформация описывается выражением

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t},$$

тогда для модели Фохта получим

$$\sigma = E_1 \varepsilon + ib\omega \varepsilon \quad (6.11)$$

и соответственно

$$\sigma' = E_1 \varepsilon ; \quad \sigma'' = b \omega \varepsilon . \quad (6.12)$$

Величины

$$E' = E_1 ; \quad (6.13)$$

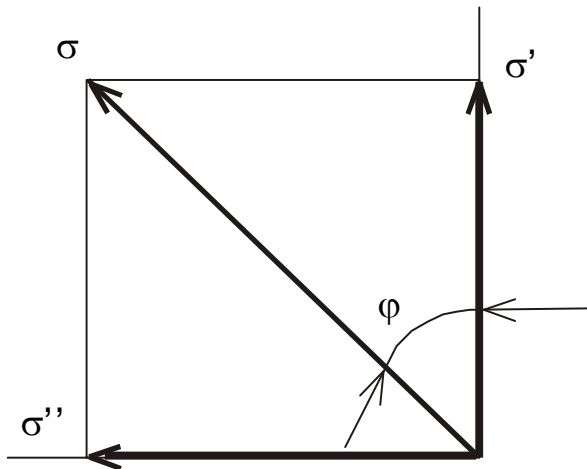


Рис. 6.21. Векторная диаграмма

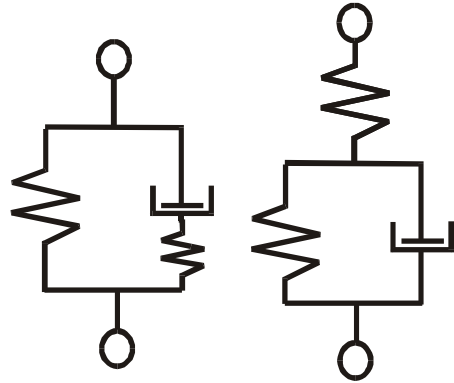


Рис. 6.22. Модель стандартного линейного тела

$$E'' = b \omega \quad (6.14)$$

получили название динамического модуля упругости E' и модуля потерь E'' . Из диаграммы (рис.6.21) и выражений (6.12)-(6.14) получим

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{b \omega}{E'} = \frac{E''}{E'}. \quad (6.15)$$

Это выражение по форме совпадает с выражением для коэффициента механических потерь η при $\omega = \omega_0$. Для модели Максвелла можно получить

$$E' = \frac{E_1 \omega^2 b^2}{E_1^2 + b^2 \omega^2}; \quad E'' = \frac{E_1^2 \omega b}{E_1^2 + b^2 \omega^2}; \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{E_1}{\omega b}.$$

В общем случае ни одна из указанных моделей не описывает достаточно точно поведение вязкоупругих материалов. Поэтому часто используют модель стандартного линейного тела, имеющего две разновидности, показанные на рис. 6.18; но и они не описывают частотно-температурную зависимость свойств вязкоупругих тел. Известны и другие механические модели, например Каргина-Слонимского, имеющая большую точность, но значительно усложняющая решение уравнений колебаний.

Модель Больцмана-Вольтерра. Наиболее точны модели, состоящие из набора вязкоупругих пружин с различными значениями вязкости и упругости. Использование кроме этого принципа суперпозиции Больцмана, предполагающего, что действие каждой деформации не зависит от других, позволяет отразить и частотно-температурную зависимость вязкоупругих тел при различных видах нагружения.

Математическое обоснование идеи Больцмана дал Вольтерра. Уравнение Вольтерра записывается в виде [11]

$$\sigma(t) = E[\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t R(t - \xi)\varepsilon(\xi)d\xi(t)],$$

где $R(t - \xi)$ - функция скорости релаксации полимера, называемая ядром релаксации.

Наиболее часто в качестве ядра релаксации принимается табулированная функция

$$R(t) = Ae^{-\frac{\beta t}{\alpha}},$$

где A , α и β - параметры, которые определяют скорость релаксации материала.

Для решения динамических задач с использованием уравнения Вольтерра необходимо определить поправочные коэффициенты к ядру релаксации [11].

Как видим, анализ колебаний "больцмановского тела" приводит к сложной математической задаче, включающей решение интегро-дифференциального уравнения с частными производными.

Использование же модели Фохта в сочетании с частотно-температурными зависимостями параметров E' и φ эквивалентно описанию конкретного вязкоупругого материала при помощи более сложной модели. Именно такой подход нашел в настоящее время широкое распространение на практике, и он использован в настоящем пособии.

6.5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ КОНСТРУКЦИЙ ЭС С ПОЛИМЕРНЫМИ ДЕМПФЕРАМИ

Общая формула коэффициента механических потерь конструкций с полимерными демпферами. Конструкции РЭС с полимерными демпферами включают элементы, выполненные как из обычных конструкционных, так и виброупругих материалов. В конструкциях с малым демпфированием, которые характеризуются незначительным сдвигом фаз между силой и соответствующим перемещением, формулу для коэффициента потерь в общем виде можно представить так:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta \Pi_i}{2\pi \sum_{i=1}^n \Pi_i}, \quad (6.16)$$

где $\Delta\Pi_i$ - потери энергии за цикл колебаний в i -м слое,

Π_i - амплитудное значение энергии в i -м слое, определенная в момент максимальной деформации.

В высокодемпфированных конструкциях будет наблюдаться значительный сдвиг фаз в вибропоглощающих и конструкционных слоях, величина которого в разных слоях может быть существенно различной. Определение энергии колебаний таких конструкций в конкретный момент времени требует точного знания механизмов рассеяния и накопления энергии и предыстории нагружения, что, как правило, неизвестно в любом случае привело бы к сложным вычислительным методам. Поэтому целесообразно применять приближенные методы, которые бы достаточно хорошо отвечали условиям поставленной задачи.

Исходя из комплексного представления жесткости и модуля упругости, можно считать, что фактически любая линейная система при резонансе может быть аппроксимирована параллельно – последовательной комбинацией безмассовых вязкоупругих пружин с прикрепленными точечными массами, количество которых будет зависеть от точности желаемого приближения. При этом, определяя коэффициент потерь, систему можно рассматривать как безмассовую, состоящую только из вязкоупругих пружин. Для последовательного ряда вязкоупругих пружин сила, приложенная ко всему ряду, равна силе, приложенной к каждой i -й пружине, а деформация ряда равна сумме деформаций пружин.

Тогда, если \bar{F} - приложенная сила, а \bar{Z}_s, \bar{Z}_i - прогибы всего ряда и i -й пружины соответственно можем записать:

$$\bar{F} = \bar{K}_s \bar{Z}_s = \bar{K}_i \bar{Z}_i; \quad \bar{Z}_s = \sum \bar{Z}_i, \quad (6.17)$$

где $\bar{K}_s = K'_s(1 + i\eta_s)$ - комплексная жесткость ряда

$\bar{K}_i = K'_i(1 + i\eta_i)$ - комплексная жесткость i -й пружины.

Если x_s^* определяет сопряженные комплексные свойства, то $\bar{Z}_s^* = \sum \bar{Z}_i^*$, и из уравнения (6.17) можем получить

$$\bar{K}_s \bar{Z}_s \bar{Z}_s^* = \bar{K}_s \bar{Z}_s \sum \bar{Z}_i^* = \sum \bar{K}_i \bar{Z}_i \bar{Z}_i^*. \quad (6.18)$$

Для ряда параллельных пружин сила, приложенная к ряду, равна сумме сил, приложенных к индивидуальным пружинам, а деформация ряда и каждой пружины будет одинаковой. Тогда получим

$$\bar{F} = \bar{K}_s \bar{Z}_s = \sum \bar{K}_i \bar{Z}_i; \quad \bar{Z}_s = \bar{Z}_i. \quad (6.19)$$

Или, умножив выражение (6.19) на \bar{Z}_s^* , получим:

$$\bar{K}_s \bar{Z}_s \bar{Z}_s^* = (\sum \bar{K}_i \bar{Z}_i) \bar{Z}_s^* = \sum \bar{K}_i \bar{Z}_i \bar{Z}_i^*. \quad (6.20)$$

Сравнивая выражения (6.19) и (6.20), придем к выводу, что для любой комбинации пружин можем записать:

$$\bar{K}_s |\bar{Z}_s|^2 = \sum \bar{K}_i |\bar{Z}_i|^2.$$

Выделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\bar{K}_s |\bar{Z}_s|^2 = \sum K_i' |\bar{Z}_i|^2;$$

$$\eta_s K_s' |\bar{Z}_s|^2 = \sum \eta_i K_i' |\bar{Z}_i|^2$$

Так как

$$\Pi_i = \frac{K_i' |\bar{Z}_i|^2}{2}; \quad \Pi_s = \frac{K_s' |\bar{Z}_s|^2}{2}; \quad \Pi_s = \sum \Pi_i,$$

получим

$$\eta_s = \frac{\sum \eta_i \Pi_i}{\sum \Pi_i}. \quad (6.21)$$

Так как $\Delta \Pi_i = 2\pi \Pi_i \eta_i$, то

$$\eta_s = \frac{\sum \Delta \Pi_i}{2\pi \sum \Pi_i}. \quad (6.22)$$

Сравнивая (6.16) и (6.22), можно заключить, что, несмотря на различие фаз колебаний в разных слоях, полная энергия колебаний может быть определена как сумма энергий всех слоев в момент их наибольшей деформации. Это соответствует принципу, применяемому и для легкодемпфируемых систем, но с той разницей, что энергия определяется с учетом только действительной части комплексной жесткости, соответствующей чисто упругим свойствам.

Формула (6.21) учитывает «внутреннее» трение во всех элементах, как упругих, так и демпфирующих. Для полной оценки демпфирующих свойств конструкции необходимо учесть также демпфирование в соединениях, т.е. конструкционное демпфирование. Учитывая различную природу демпфирования в материалах и соединениях, получим

$$\eta = \eta_k + \frac{\sum \eta_i \Pi_i}{\sum \Pi_i}, \quad (6.23)$$

где η_k - составляющая КМП, учитывающая конструкционное демпфирование.

Для конструкции, состоящей из одного демпфирующего элемента (см. рис. 6.2) и одного несущего, можем написать

$$\eta = \eta_k + 1 + \frac{\eta_1 \Pi_1 + \eta_2 \Pi_2}{\Pi_1 + \Pi_2} - \eta_1.$$

Обозначая $\eta_H = \eta_k + \eta_1$, после неложных преобразований получим

$$\eta = \eta_n + (\eta_2 - \eta_1)A, \quad (6.24)$$

где

$$A = \left(1 + \frac{\Pi_1}{\Pi_2}\right)^{-1} \quad (6.25)$$

показатель использования демпфирующих свойств ВП материала в конструкции: η_n - КМП, определяющий начальное демпфирование, т.е. демпфирование, которым обладала система до применения ВП элемента.

Для трехслойных конструкций (рис. 6.3)

$$A = \left(1 + \frac{\Pi_1 + \Pi_3}{\Pi_2}\right)^{-1}. \quad (6.26)$$

Как видим из формулы (6.25), для увеличения показателя A необходимо уменьшать отношение $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}$, т.е. стремиться, чтобы энергия колебаний демпфирующего элемента Π_2 превышала энергию колебаний конструктивного элемента Π_1 .

Показатели эффективности конструкций РЭС с полимерными демпферами. Так как полимерные демпферы в конструкциях РЭС применяются для уменьшения АРК, их эффективность целесообразно оценивать показателем уменьшения резонансной амплитуды виброперемещения

$$\xi_w(x, y) = \frac{W_n(x, y)}{W_k(x, y)} \quad (6.27)$$

и показателем уменьшения резонансной амплитуды виброускорения

$$\xi_{\ddot{w}}(x, y) = \frac{\ddot{W}_n(x, y)}{\ddot{W}_k(x, y)}. \quad (6.28)$$

В этих выражениях $W(x, y)$ и $\ddot{W}(x, y)$ - резонансные амплитуды виброперемещения и виброускорения в точках с координатами x, y , индекс "н" означает амплитуду до применения ПД, индекс "к" – после применения ПД. Например, $\xi_w(x, y) = 3$ означает, что амплитуда виброперемещения после применения ПД уменьшилась в 3 раза.

Учитывая формулу (6.28), получим

$$\xi_{\ddot{w}}(x, y) = \xi_z \xi_k(x, y) \xi_\eta \quad (6.29)$$

где $\xi_z = \frac{\ddot{Z}_{он}}{\ddot{Z}_{ок}}$ - показатель, учитывающий изменение амплитуды виброускорения входного воздействия;

$\xi_k(x, y) = \frac{K_n(x, y)}{K_k(x, y)}$ - показатель, учитывающий изменение формы колебаний;

$\xi_\eta = \frac{\eta_k}{\eta_H}$ - показатель, учитывающий изменение демпфирования.

Часто $\xi_{\ddot{z}}$ и $\xi_k(x, y)$ равны единице и

$$\xi_{\ddot{w}}(x, y) = \xi_\eta, \quad (6.30)$$

т.е. в этом случае изменение амплитуды виброускорения при резонансе зависит только от изменения демпфирующих свойств конструкции. На основе формулы (6.27) можем написать

$$\xi_w(x, y) = \xi_z \xi_\varepsilon(x, y) \xi_\eta, \quad (6.31)$$

где $\xi_z = \frac{Z_{OH}}{Z_{OK}}$ – показатель, учитывающий изменение амплитуды виброперемещения входного воздействия.

Если входное воздействие характеризуется амплитудой виброускорения, используя соотношение $Z_o = (2\pi f)^2 Z_o$, получим

$$\xi_z = \frac{\ddot{Z}_{i\hat{e}} f_{\hat{e}}^2}{\ddot{Z}_{i\hat{e}} f_i^2}. \quad (6.32)$$

Учитывая формулу Релея-Ритца

$$f = \frac{\alpha}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

получим

$$\xi_z = \xi_{\ddot{z}} \xi_\alpha \xi_D \xi_a \xi_m,$$

где $\xi_\alpha = \alpha_H / \alpha_k$ – показатель, учитывающий изменение частотного коэффициента α ;

$\xi_D = D_H / D_k$ – показатель, учитывающий изменение цилиндрической жесткости D ;

$\xi_a = a_k / a_H$ – показатель, учитывающий изменение длины (ширины) платы a ;

$\xi_m = m_k / m_H$ – показатель, учитывающий изменение массы.

При использовании ПД в виде слоя можно считать, что α , a не изменяются. Если амплитуда виброперемещения входного воздействия также не изменяется, получим

$$\xi_{\ddot{w}}(x, y) = \xi_\eta \xi_D \xi_m. \quad (6.33)$$

Примеры использования указанных показателей приведены ниже.

Учитывая (6.24) и (6.30), получим

$$\xi_{\dot{w}}(x, y) = \frac{\eta_H}{\eta'_H} + \chi A, \quad (6.34)$$

где $\chi = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta'_H}$.

Заметим, что η'_H - КМП конструкции до применения ПД, η_H - КМП той же части конструкции, но после применения ПД. Их величины совпадают из-за различных амплитуд колебаний до и после применения ПД. Так как $\eta_2 \gg \eta_H$ и $\eta_2 \gg \eta_K$ в конструкциях с ПД можно принимать $\eta_H = \eta'_H$.

Как видно из приведенных формул, величины показателей $\xi_{\ddot{w}}(x, y)$ и $\xi_w(x, y)$ зависят не только от координат x, y точки платы, но и от жесткости конструкции, а следовательно, и модуля упругости и КМП ВП материала, которые могут изменяться в несколько раз в диапазонах частот и температур эксплуатации РЭС.

Возникают вопросы, какой показатель (ξ_w или $\xi_{\ddot{w}}$) принимать для оценки эффективности применения полимерного демпфера, в какой точке платы и при каких условиях эксплуатации его рассчитывать.

Ответ на первый вопрос дается в зависимости от наблюдаемых или прогнозируемых видов отказов РЭС. Если отказы обусловлены разрушением конструкции, то их причины объясняются большими амплитудами виброперемещения, а следовательно, механического напряжения в материале конструкции. В этом случае полимерные демпферы должны снижать амплитуды виброперемещения при резонансе, и их эффективность необходимо оценивать показателем $\xi_w(x, y)$. Если отказы параметрические, т.е. обусловлены недопустимым изменением выходных параметров РЭС, это свидетельствует о недопустимо больших перегрузках на ЭРЭ и необходимо уменьшить амплитуды виброускорения. В этом случае необходимо применять показатель $\xi_{\ddot{w}}(x, y)$. Очевидно, что если могут возникать отказы того и другого вида, то и эффективность ПД следует оценивать обоими показателями.

Ответ на второй вопрос можно дать в зависимости от последствий отказа. Если отказ РЭС не допустим, то эффективность ПД целесообразно оценивать минимальной, т.е. наихудшим значением показателей $\xi_{\ddot{w}}(x, y)$ или $\xi_w(x, y)$.

Если в основу оценки системы положен общий экономический эффект от применения РЭС данного типа, то эффективность ПД целесообразно оценивать по среднему в условиях эксплуатации системы значениям $\bar{\xi}_{\ddot{w}}(x, y)$ и $\bar{\xi}_w(x, y)$

Указанные показатели могут определяться как для точки максимальной амплитуды колебаний, так и усредняться по площади платы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение демпфера, демпфирования вибраций, диссипативной силы.
2. Какие факторы влияют на демпфирование колебаний?
3. Как можно определить энергию потерь в соединениях?
4. Назовите особенности демпфирования в соединениях конструкций.
5. Какие гипотезы используются для учёта демпфирования в материалах? Их сущность.
6. Что понимается под коэффициентом поглощения? Его связь с параметрами системы.
7. Что понимается под коэффициентом механических потерь? Его связь с параметрами системы и другими характеристиками демпфирования.
8. Как определяется логарифмический декремент колебания?
9. Какие виды полимерных демпферов применяются в РЭС?
10. Дайте краткую характеристику полимерных демпферов в виде ДС, ДР, ДВ.
11. Как определяется КМП через энергии потерь и потенциальные энергии элементов конструкций РЭС?
12. Дайте вывод общей формулы КМП конструкций с полимерными демпферами.
13. Как зависит КМП конструкции от КМП и потенциальных энергий отдельных конструктивных элементов?
14. Напишите общую формулу КМП конструкций РЭС?
15. Расскажите о показателе использования демпфирующих свойств ВП материала в конструкции.
16. Каков смысл и как определяются показатели уменьшения резонансных амплитуд виброперемещения и виброускорения конструкций РЭС?
17. В чем причина различия в показателях уменьшения резонансных амплитуд виброперемещения и виброускорения?
18. Расскажите о принципах выбора показателей для оценки эффективности применения ПД.

Глава 7

Теоретические основы расчета ячеек ЭС с распределенными полимерными демпферами

7.1. ЯЧЕЙКИ С ВНЕШНИМ ДЕМПФИРУЮЩИМ СЛОЕМ

При изгибных колебаниях конструкций ячеек с внешним ДС (рис. 7.1) основными видами деформации слоев являются изгиб и растяжение [11]. Деформации сдвига значительно меньше и ими обычно пренебрегают. При нанесении ВП материала на основную конструкцию, например

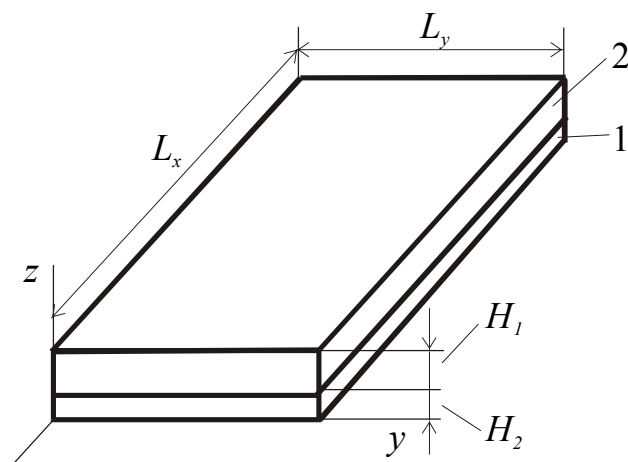


Рис. 7.1. Плата с внешним демпфирующим слоем: 1 – несущий слой, 2 – демпфирующий слой

плату или шасси, нейтральный слой конструкции смещается в направлении ДС. Вид деформации конструкции показан на рис. 7.2. Так как основными видами деформации являются изгиб и растяжение - сжатие, то потенциальная энергия каждого слоя:

$$\Pi_i = \Pi_{iu} + \Pi_{ip} \quad (7.1)$$

где Π_{iu} , Π_{ip} — составляющие потенциальной энергии в i -м слое, обусловленные деформациями изгиба и растяжения-сжатия соответственно.

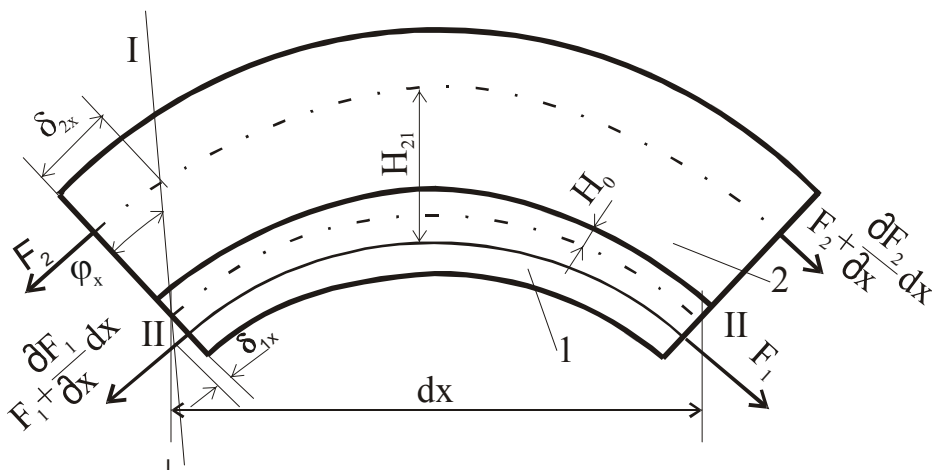


Рис. 7.2. Вид деформации платы:
1 – несущий слой; 2 - демпфирующий слой

Величины Π_{iu} и Π_{ip} можно найти по известным формулам теории упругости [3]

$$\Pi_{iu} = \frac{D_2}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu_i) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (7.2)$$

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i H_i}{2(1-\nu_i)} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_i}{\partial y} \right)^2 + 2\nu_i \frac{\partial U_i}{\partial x} \frac{\partial V_i}{\partial y} \right] dx dy, \quad (7.3)$$

где $W = W(x, y)$ – деформация изгиба;

U_i, V_i – продольные деформации i -го слоя в направлении x и y соответственно.

Так как для прямоугольных плат, свободно опертых по всем краям, форма колебаний при резонансе определяется выражением

$$W(x, y) = A_{lf} \sin k_x x \sin k_y y, \quad (7.4)$$

где волновые числа $k_x = l\pi/a$, $k_y = f\pi/b$, то выражение в формуле (7.2)

$$\int_0^a \int_0^b \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

Представим связь между деформациями изгиба $W(x, y)$ и растяжения–сжатия U_i, V_i в виде

$$U_i = R_{ix} \frac{\partial W}{\partial x}; \quad V_i = R_{iy} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad (7.5)$$

где R_{ix}, R_{iy} – неизвестные коэффициенты связи деформаций.

Подставляя (7.4) и (7.5) в (7.2) и (7.3) получаем:

$$\Pi_{iu} = \frac{D_i}{8} \left(k_x^2 + k_y^2 \right)^2 A_{lf}^2 ab; \quad (7.6)$$

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i H_i}{8(1-\nu_i^2)} \left(R_{ix}^2 k_x^4 + R_{iy}^2 k_y^4 + 2\nu_i R_{ix} R_{iy} k_x^2 k_y^2 \right) A_{lf}^2 ab. \quad (7.7)$$

Коэффициенты связи деформаций найдем из статических и геометрических соотношений при изгибе. Для изгиба в направлении оси X можно записать

$$U_1 + U_2 = \varphi_x H_{21}; \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial F_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial x} = 0. \quad (7.9)$$

Продольные силы F_{ix} найдем из следующих соображений. В каждом слое, как показано на рис. 7.3, действуют нормальные напряжения σ_x , обусловленные продольными и изгибными деформациями.

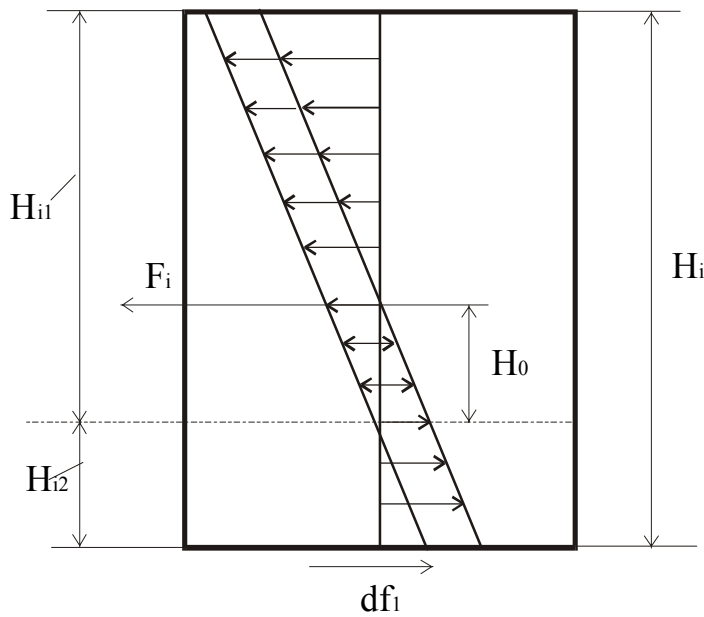


Рис. 7.3. Силы, действующие в i -м слое при изгибе двухслойной платы

Силу F_{ix} найдем интегрированием этих напряжений по площади поперечного сечения:

$$F_i = \int_0^{l_y} \int_{-H_{i2}}^{H_{i1}} \sigma_x dy dx.$$

Подставляем в это выражение формулу обобщенного закона Гука

$$\sigma_x = -\frac{E_i Z}{1 - \nu_i} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu_i \frac{1}{\rho_y} \right),$$

где ρ_x, ρ_y – радиусы кривизны плат в направлении осей X и Y ; Z – расстояние от некоторого слоя до нейтрального слоя.

Интегрируя получаем:

$$F_i = -\frac{E_i b}{1 - \nu_i^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu_i \frac{1}{\rho_y} \right) \left(\frac{H_{i1}^2 - H_{i2}^2}{2} \right). \quad (7.10)$$

Для малых прогибов справедливы соотношения:

$$\frac{1}{\rho_x} \approx \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\rho_y} \approx \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Учитывая выражение (7.4), получаем:

$$\frac{1}{\rho_x} = -k_x^2 W; \quad \frac{1}{\rho_y} = -k_y^2 W.$$

Подставим их в (7.10). Замечая, что $H_{i1} + H_{i2} = H_i$, и обозначая $k_i = \frac{E_i H_i}{(1 - \nu_i^2)}$, выражение (7.10) приведем к виду:

$$F_i = K_i b \frac{H_{i1} - H_{i2}}{2\rho_x} \left(1 - \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right).$$

Заметим, что выражение $H_{i1} - H_{i2}/2\rho_x$ определяет относительную продольную деформацию $\varepsilon_{ix} = \partial U_i / \partial x$ средней плоскости i -го слоя при действии силы F_i .

Учитывая соотношение $\partial^2 U_i / \partial x^2 = -k_x^2 U_i$, получаем:

$$\frac{\partial F_{ix}}{\partial x} = -k_i b k_x^2 U_i \left(1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right).$$

Подставляя это выражение в (7.10), запишем:

$$k_1 U_1 \left(1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right) - k_2 U_2 \left(1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right) = 0. \quad (7.11)$$

Решая совместно уравнения (7.8) и (7.11), находим:

$$U_1 = \frac{H_{21} k_{2x}}{1 + k_{2x}} \varphi_x; U_2 = \frac{H_{21}}{1 + k_{2x}} \varphi_x, \quad (7.12)$$

где

$$k_{2x} = \frac{E_2 H_2 (1 + \nu_1^2) (1 + \nu_2 k_y^2 / k_x^2)}{E_1 H_1 (1 + \nu_2^2) (1 + \nu_1 k_y^2 / k_x^2)}. \quad (7.13)$$

Сравнивая (7.12) и (7.5) и принимая во внимание, что $\varphi_x = \partial W / \partial x$

$$R_{1x} = \frac{H_{21} k_{2x}}{1 + k_{2x}}; \quad R_{2x} = \frac{H_{21}}{1 + k_{2x}} \quad (7.14)$$

Выражения (7.1), (7.6), (7.7), (7.14) совместно с (6.24), (6.25) являются математической моделью однородной прямоугольной платы, свободно опертой по краям, с внешним демпфирующим слоем.

Приближенные формулы. Математическая модель, полученная в предыдущем разделе, использована для исследования влияния собственной формы колебаний, определяемой в основной способом крепления, на величину отклонения $\Delta = \frac{A_i - A_1}{A_1} \cdot 100\%$. Здесь A_i обозначен коэффициент

A , определенный при некотором соотношении волновых чисел K_y / K_x , а A_1 — коэффициент A при $K_y / K_x = 1$. При вычислениях принимались $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.4$; $k_2 = 10$. Результаты исследования представлены на рис. 7.4.

Видно, что влияние собственной формы колебаний на коэффициент A зависит от k_2 : оно может быть несущественным при большой величине и

значительным (30 %) при малой величине k_2 . В связи с тем, что k_2 ВП материалов в значительной степени зависит от температуры и для одного и того же материала в заданном интервале температур, например от -60 °С до $+70$ °С, может изменяться на несколько порядков, расчет демпфирующих свойств целесообразно вести с учетом влияния собственной формы колебаний.

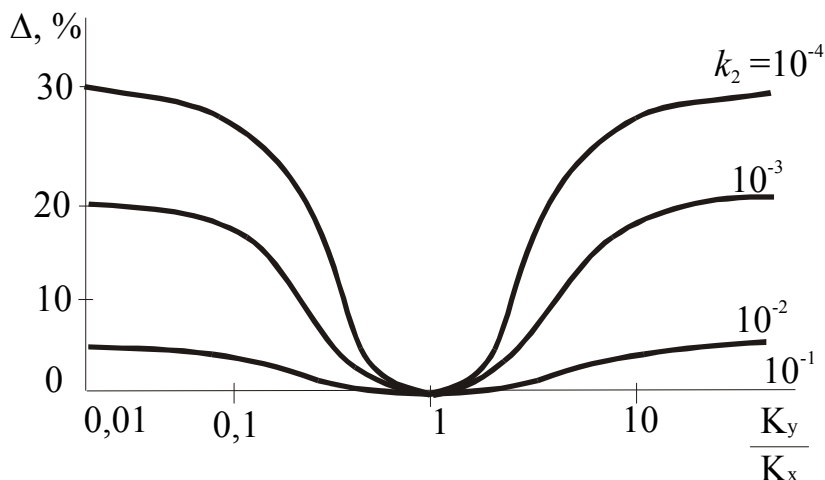


Рис. 7.4. Зависимость Δ от соотношений волновых чисел

На практике обычно используются способы крепления плат, отличные от свободного опирания. В связи с чем собственные формы колебаний не могут быть строго описаны выражением (7.4) и определить волновые числа K_x и K_y не удастся. В этой ситуации расчет мож-

но производить для крайних случаев, когда $K_x=K_y$ и $K_y=0$. При $K_y=0$, преобразовав полученные соотношения, мы придем уже к известному выражению [12], а при $K_x=K_y$, вводя обозначения

$$X = 2 \left[\frac{C_v}{1 + k_2 C_v} + \sigma_1 \frac{C_v^2}{(1 + k_2 C_v)^2} \right];$$

$$Y = 2 \left[\frac{1}{1 + k_2 C_v} + \sigma_1 \frac{1}{(1 + k_2 C_v)^2} \right];$$

$$C_v = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1},$$

получим выражение

$$A = \frac{k_2 \cdot [h_2^2 + 0,75 \cdot (1 + h_2)^2 Y]}{1 + k_2 \cdot [h_2^2 + 0,75 \cdot (1 + h_2)^2 \cdot (Y + k_2 x)]}. \quad (7.15)$$

Расчет по формуле (7.15) будет соответствовать наихудшему случаю. Для предварительных расчетов, учитывая, что $C_v=1$ и $1+k_2 \approx 1$, можно использовать соответственно выражения

$$A_{max} = \left\{ 1 + \frac{1}{k_2 [3(1+h_2)^2 + h_2^2]} \right\}^{0.5} \quad (7.15a)$$

при $K_y=0$ и

$$A_{min} = \left\{ 1 + \frac{1}{k_2 [1.5(1+v_2)(1+h_2^2) + h_2^2]} \right\} \quad (7.15b)$$

при $K_y=K_x$.

Таким образом расчеты по формулам (7.15a) и (7.15b) позволяют найти интервал, в котором будут находиться значения КМП и КП независимо от формы колебаний.

На рис. 7.5 показана зависимость, рассчитанная по формуле (7.15a), показателя A от относительной толщины ДС h_2 и относительного модуля упругости ВП материала e_2 . Видно, что повышение толщины и модуля

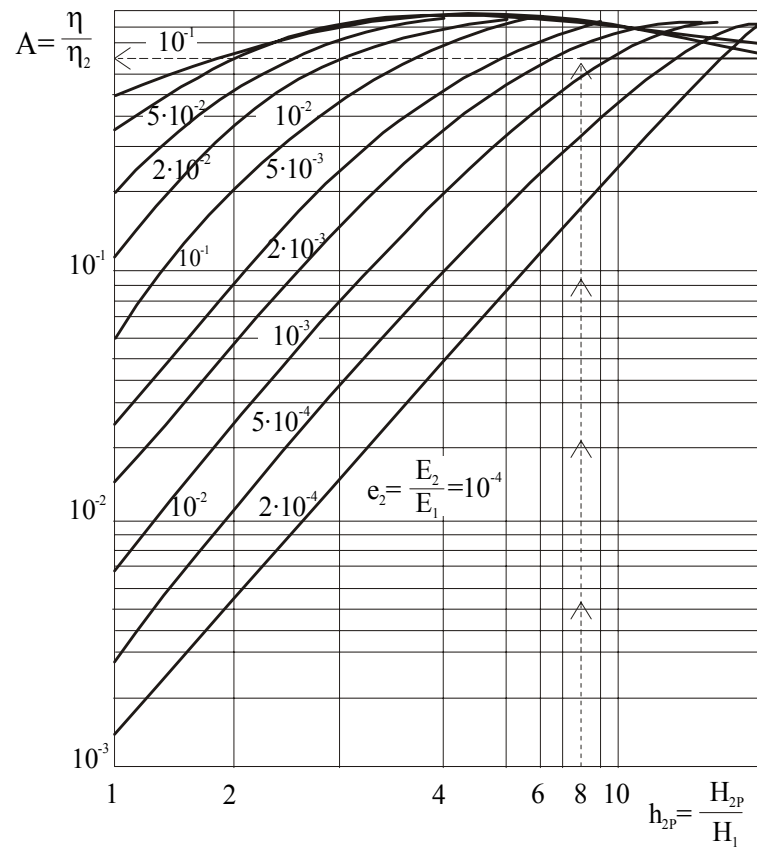


Рис. 7.5. Зависимость $\frac{\eta}{\eta_2}$ относительных толщин h_2 и модуля упругости E_2 вибропоглощающего материала

упругости ВП материала приводит к повышению показателя A , следовательно, и к увеличению демпфирующих свойств конструкции.

Необходимость обеспечения большой относительной толщины ДС часто приводит к недопустимому увеличению массы конструкции РЭС.

Эту сложность можно преодолеть, если уменьшить первоначальную толщину ДС, выбираемую, как правило, из требований обеспечения статической жесткости конструкции, например, печатной платы. Нанесение ДС компенсирует уменьшение статической жесткости.

Если задается огра-

нение на массу конструкции, то максимально допустимую толщину ДС можно найти из необходимости соблюдения равенства

$$m_k = Nm_H, \quad (7.16)$$

где N - допустимый коэффициент увеличения начальной массы конструкции m_H , приведенной к единице площади;

m_k - приведенная к единице площади масса конструкции после нанесения ДС.

Выражение (7.16) можно представить в виде

$$H_1\rho_1 + H_{2\rho} \rho_2 + m_{\text{э}} = NH_{1H}\rho_1 + m_{\text{э}}, \quad (7.17)$$

где ρ_1, ρ_2 - плотность материала несущего и ДС;

$m_{\text{э}}$ - масса ЭРЭ.

Из (7.17) получим

$$H_{2\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (Nh_1 - 1)H_{1k}, \quad (7.18)$$

где $h_1 = \frac{H_{1H}}{H_{1K}}$.

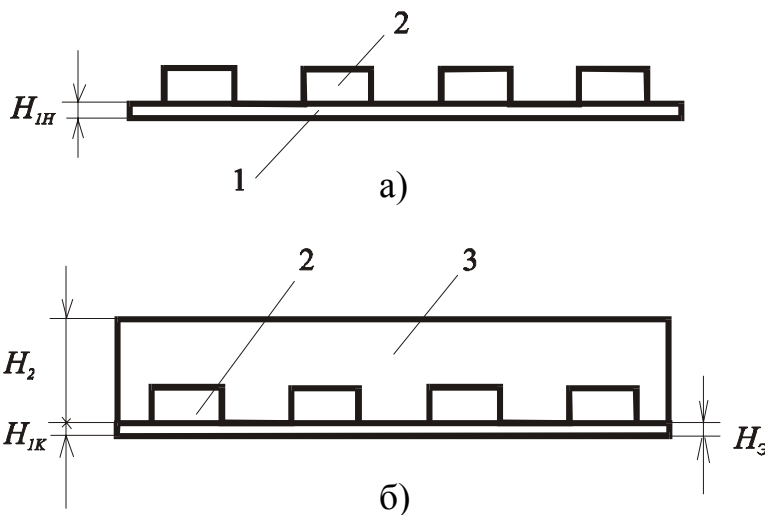


Рис. 7.6. Ячейка РЭС без демпфирующего (а) и с демпфирующим покрытием (б):

1 - плата; 2 - ЭРЭ; 3 - демпфирующее покрытие

Если ВП слой наносится, например заливкой со стороны ЭРЭ (рис. 7.6), толщина $H_{2\rho}$ должна увеличиваться, так как часть объема будет занята ЭРЭ. Ее можно найти по выражению

$$H_2 = \frac{H_{2\rho}}{K_S}, \quad (7.19)$$

если $H_{2\rho} \leq H_{\text{э}}$, и по выражению

$$H_2 = H_{2\rho} + H_{\text{э}}(1 - K_S), \quad (7.20)$$

если $H_{2\rho} > H_{\text{э}}$

В этих выражениях $K_S = \frac{v_{ВП}}{v_{ВП} + v_{\text{э}}}$ - коэффициент заполнения ячейки

в пределах высоты ЭРЭ ВП материалом; $v_{ВП}, v_{\text{э}}$ - объемы, занимаемые ВП материалом и радиоэлементами.

Пример 7.1. Исходные данные. Для уменьшения резонансных колебаний на ячейку (рис. 7.7) нанесен слой пенополиуретана ППУ-202-2 толщиной 7 мм, динамические, механические характеристики которого приведены в табл. П.7. Плотность пенополиуретана $\rho=220 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,45$. Рассчитать коэффициент передачи μ_1 в центре ячейки при первом резонансе в диапазоне температур от -60 до $+70^\circ\text{C}$. Плата ячейки выполнена из стеклотекстолита марки СТЭФ толщиной 0,5 мм. Коэффициент заполнения объема ВП пенополиуретаном $K_S = 0,7$. Общая масса радиоэлементов 0,0098 кг. Для стеклотекстолита СТЭФ

$$E = 3,08 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \rho = 2,05 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \nu = 0,22, \eta_1 = 0,02.$$

КМП ячейки до нанесения ВП слоя $\eta_H = 0,056$.

Решение. Выбираем расчетную модель в виде пластины, свободно опертой по контуру, с размерами $a = b = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, находим ее цилиндрическую жесткость до нанесения вп слоя

$$D_1 = \frac{E_1 H_1^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} (0,5 \cdot 10^{-3})^3}{12(1 - 0,22^2)} = 0,33 \text{ Н/м.}$$

и первую собственную частоту колебаний по формуле

$$f = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}} = 1,57 \left(\frac{1}{0,07^2} + \frac{1}{0,07^2} \right) \sqrt{\frac{0,33}{2,05 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}} = 363 \text{ Гц}$$

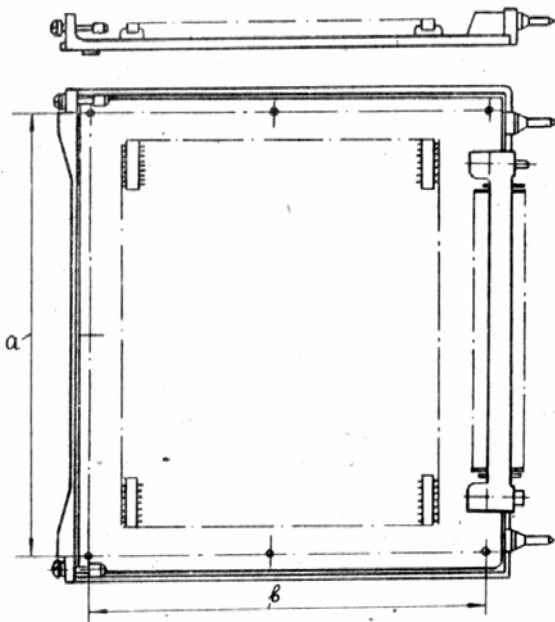


Рис. 7.7. Ячейка РЭС

для наихудшего случая, когда $k_y = k_x$

Рассчитываем собственную частоту колебаний пластины с демпфирующим слоем методом последовательного приближения.

Так как после нанесения демпфирующего слоя можно предположить, что частота колебаний будет больше, чем f_1 , в первом приближении выберем $f_1^I = 600 \text{ Гц}$ и для этой частоты и температуры $t = -60^\circ\text{C}$ из табл. П.7 найдем

$$E^I = 1200 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \text{ Определив}$$

относительную расчетную толщину демпфирующего слоя (7.19)

$$h_{2\rho} = h_2 k_S = \frac{7}{0,5} 0,7 = 9,8$$

(7.21)

и относительную жесткость (7.13)

$$k_{2x} = \frac{E_2^I H_{2\rho} (1 - \nu_1)}{E_1 H_1 (1 - \nu_2)} = \frac{1200 \cdot 10^5 \cdot 9,8(1 - 0,22)}{3,02 \cdot 10^{10} (1 - 0,45)} = 5,25 \cdot 10^{-2}$$

найдем коэффициент увеличения жесткости [17, с. 44]

$$d = 1 + k_{2x} h_{2\rho}^2 + \frac{3k_{2x} (1 + h_{2\rho})^2}{1 + k_{2x}} = 1 + 5,52 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8^2 + \frac{3 \cdot 5,52 \cdot 10^{-2} (1 + 9,8)^2}{1 + 5,52 \cdot 10^{-2}} \approx 24,6$$

цилиндрическую жесткость [17]

$$D = D_1 d = 0,33 \cdot 24,6 = 8,12 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Собственная частота во втором приближении, учитывая, что

$$m = \rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 + m_g / S = 2,05 \cdot 10^3 + 0,22 \cdot 10^4 \cdot 4,9 \cdot 10^{-3} + 9,8 \cdot 10^{-3} / (7 \cdot 10^{-2})^2 = 4,1 \text{ кг},$$

равна $f_1^{II} = 640,8 \sqrt{8,12 / 4,1} = 902 \text{ Гц}$.

Для частоты 902 Гц из табл. П.7 интерполированием находим

$$E_2^{II} = 1200 + \left(\frac{2200 - 1200}{1200 - 600} \right) (902 - 600) = 1703 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Находим третье приближение частот, последовательно вычисляя

$$k_{2x} = \frac{1703 \cdot 10^5 \cdot (1 - 0,22)}{3,02 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0,45)} = 7,83 \cdot 10^{-2};$$

$$d = 1 + 7,83 \cdot 10^{-2} \cdot 9,8^2 + \frac{3 \cdot 7,83 \cdot 10^{-2} (1 + 9,8)^2}{1 + 7,83 \cdot 10^{-2}} \approx 33,93;$$

$$D = 0,33 \cdot 33,93 = 11,2 \text{ Н/м};$$

$$f_1^{III} = 640,8 \sqrt{11,2 / 4,1} = 1959 \text{ Гц}.$$

Для частоты 1059 Гц интерполированием, используя табл. П.7, находим

$$E_2^{III} = 12000 + \left(\frac{2200 - 1200}{1200 - 600} \right) (1059 - 600) = 1965 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Находим четвертое приближение частоты, последовательно вычисляя

$$k_{2x} = 9,03 \cdot 10^{-2}; d = 38,66; D = 12,76 \text{ Н/м};$$

$$f_1^{IV} = 640,8 \sqrt{12,76 / 4,1} = 1130 \text{ Гц}.$$

Так как третье и четвертое приближения различаются меньше, чем на 10%, принимаем $f_1 = 1130$ Гц. Для $t = -60^\circ$ и $f_1 = 1130$ Гц из табл. G/7 интерполированием $\eta_2 = 0,1$.

3. По формуле (7.15в) рассчитываем параметр A

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{9,03 \cdot 10^{-2} [1,5(1 + 0,45)(1 + 9,8)^2 + 9,8^2]} \right\}^{0,5} = 0,95.$$

4. Находим коэффициент механических потерь по формуле (6.24):

$$\eta = 0,056 + (0,1 - 0,02)0,95 = 0,132.$$

5. Рассчитываем, используя табл. П5, коэффициент $K(x,y)$:

$$K(0,5;0,5) = K^2(0,5) = 1,27^2 = 1,61.$$

6. Определяем коэффициент передачи в центре при первом резонансе по формуле (3.60)

$$\mu_1(0,5;0,5) = \sqrt{\frac{1,61^2}{0,132^2} + 1} = 12,2$$

7. Находим по формуле (6.34) коэффициент уменьшения амплитуды колебаний

$$\xi_w(0,5;0,5) = 1 + \frac{0,1 - 0,02}{0,056} \cdot 0,95 = 2,66.$$

Аналогично проводится расчет для других температур. Результаты расчета приведены в табл. 7.1.

Т а б л и ц а 7.1

Результаты расчета

t°, C	$f, Гц$	μ	ξ_w	t°, C	$f, Гц$	μ	ξ_w
-60	1130	12,2	2,56	+20	250	12,6	2,13
-40	550	7,2	4,00	+40	237	15,2	1,89
-20	400	11,1	2,63	+60	230	11,7	2,50
0	326	12,7	2,27	+70	224	10,7	2,70

Среднее значение коэффициента $\bar{\xi}_w(0,5;0,5) = 2,57$.

7.2. ЯЧЕЙКИ С ВНУТРЕННИМ ДЕМПИРУЮЩИМ СЛОЕМ

На рис. 7.5 показана трёхслойная плата. Используя формулу (6.26) и учитывая, что в ВП слое будут развиваться деформации изгиба, сдвига и растяжения, а в несущих слоях преимущественно - изгиба и растяжения [11], выражение для коэффициента A платы можно представить в виде

$$A = \left(1 - \frac{\Pi_{1u} + \Pi_{3u} + \Pi_{3p}}{\Pi_{2u} + \Pi_{2p} + \Pi_{2c}} \right)^{0.5}, \quad (7.22)$$

где Π_{iu} , Π_{ic} , Π_{ip} - потенциальные энергии, определяемые деформациями изгиба, сдвига и растяжения i -го слоя. Для получения формулы пригодной для практических расчётов, необходимо выразить коэффициент A через физические и геометрические параметры слоёв. С этой целью воспользуемся известными из теории упругости формулами для энергий изгиба, сдвига и растяжения-сжатия однородных пластин и будем считать, что форма колебаний описывается простейшим выражением (7.4), справедливым для пластины, свободно опертой по всем краям. Волновые числа k_x и k_y для прямоугольной пластины определяются выражениями $k_x = l\pi/a$, $k_y = f\pi/b$ и связаны соотношением

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (7.23)$$

где $k = f_0^{0.5} \left(\frac{m}{D} \right)^{0.25}$ - волновое число.

Энергия изгиба определяется выражением (7.2). Производные, входящие в это выражение, после подстановки (7.4) равны

$$\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} = -k_x^2 W(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = -k_y^2 W(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} = k_x A_{ef} \cos k_x x \cdot \cos k_y y.$$

После интегрирования получим

$$\Pi_{iu} = \frac{D_i}{8} (k_x^2 + k_y^2)^2 A_{ef} ab. \quad (7.24)$$

Для определения энергий Π_{ic} , Π_{ip} представим зависимости между деформацией изгиба $W(x, y)$ и деформациями растяжения U_i , V_i и сдвига γ_{ix} , γ_{iy} в направлении осей x, y соответственно в виде:

$$U_i = R_{ix} \frac{\partial W(x, y)}{\partial x}; \quad \gamma_{ix} = Z_{ix} \frac{\partial W(x, y)}{\partial x}; \quad (7.25a)$$

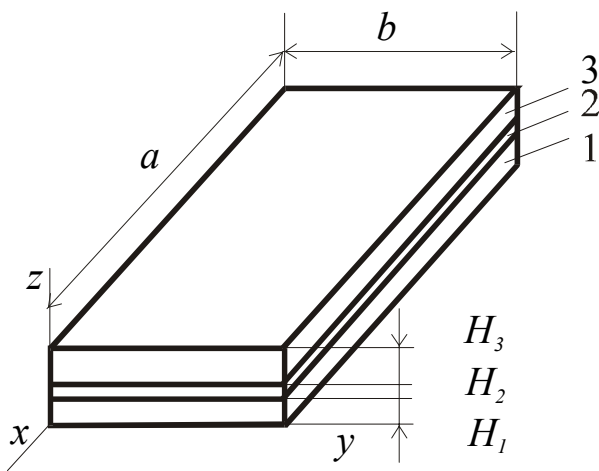


Рис. 7.8. Плата с внутренним демпфирующим слоем:
1, 3 – несущие слои; 2 – демпфирующий слой

$$V_i = R_{iy} \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}; \quad \gamma_{iy} = Z_{iy} \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}; \quad (7.25B)$$

где $R_{ix}, R_{iy}, Z_{ix}, Z_{iy}$ - коэффициенты связи деформации в i -м слое, а частные производные $\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}$ определяют углы изгиба в направлении соответствующих осей.

Потенциальная энергия растяжения-сжатия прямоугольной пластинки, имеющей размеры сторон a и b и толщину H_i ,

$$\Pi_{ip} = \frac{H_i}{2} \int_0^a \int_0^b (\sigma'_{ix} \varepsilon_{ix} + \sigma'_{iy} \varepsilon_{iy}) dx dy,$$

где $\sigma'_{xy}, \sigma'_{iy}$ - действительные части напряжений, $\varepsilon_{ix}, \varepsilon_{iy}$ - относительные деформации растяжения - сжатия в направлении соответствующих осей.

Используя формулу закона Гука для растяжения-сжатия в двух направлениях

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x),$$

получим

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i H_i}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b (\varepsilon_{ix}^2 + \varepsilon_{iy}^2 + 2\nu_i \varepsilon_{ix} \varepsilon_{iy}) dx dy. \quad (7.26)$$

Согласно выражениям (7.25), напомним

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = R_x \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = R_y \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2}.$$

Подставляя эти выражения в (7.26) и интегрируя, найдём

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i H_i}{8(1-\nu_i^2)} (R_{ix}^2 k_x^4 + R_{iy}^2 k_y^4 + 2\nu_i R_{ix} R_{iy} k_x^2 k_y^2) A_{if} ab. \quad (7.27)$$

Потенциальная энергия сдвига в i -м слое

$$\Pi_{ip} = \frac{E_i H_i}{8(1-\nu_i^2)} (R_{ix}^2 k_x^4 + R_{iy}^2 k_y^4 + 2\nu_i R_{ix} R_{iy} k_x^2 k_y^2) A_{if} ab. \quad (7.28)$$

Потенциальная энергия сдвига в i -м слое

$$\Pi_{ic} = \frac{H_i}{2} \int_0^a \int_0^b \tau'_{ixy} \gamma_{ixy} dx dy, \quad (7.29)$$

где τ'_{ixy} -действительная часть касательного напряжения. Смысл принятых обозначений виден из рис. 7.9. Учитывая соотношение $\gamma_{xy} = (\gamma_{ix}^2 + \gamma_{iy}^2)^{0.5}$

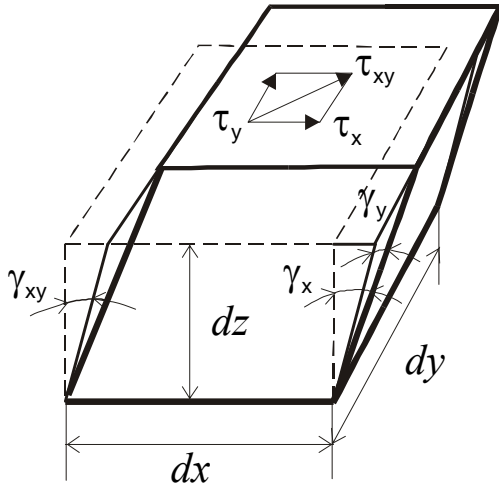


Рис. 7.9. Вид деформации элемента демпфирующего слоя

и закон Гука для касательных напряжений $\tau_{ixy} = G_i \gamma_{ixy}$, выражение (7.29) приведём к виду

$$\Pi_{ic} = \frac{G'_i H_i}{2} \int_0^a \int_0^b (\gamma_{ix}^2 + \gamma_{iy}^2) dx dy.$$

Подставляя в него соотношение (7.25) и учитывая, что

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{k_x^2}{4} A_{lf}^2 ab;$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} \right)^2 dx dy = \frac{k_y^2}{4} A_{lf}^2 ab,$$

после интегрирования получим

$$\Pi_{ic} = \frac{G'_i H_i}{8} (L_{ix}^2 k_x^2 + L_{iy}^2 k_y^2) A_{lf}^2 ab. \quad (7.30)$$

С учётом выражений (7.23), (7.25), (7.27) и (7.30) формулу для коэффициента A представим в виде:

$$A = \left[1 + \frac{(D_1 + D_3)(k_x^2 + k_y^2)^2 + K_1(R_{1x}^2 k_x^4 + R_{1y}^2 k_y^4 + \dots}{D_2(k_x^2 + k_y^2)^2 + K_2(R_{2x}^2 k_x^4 + R_{2y}^2 k_y^4 + \dots} \right. \\ \left. + \frac{2\nu_1 R_{1x} R_{1y} k_x^2 k_y^2}{\dots} + K_3(R_{3x}^2 k_x^4 + R_{3y}^2 k_y^4 + \dots} \right. \\ \left. + \frac{2\nu_2 R_{2x} R_{2y} k_x^2 k_y^2}{\dots} + \frac{2\nu_3 R_{3x} R_{3y} k_x^2 k_y^2}{\dots} + G'_2 H_2 (L_{2x}^2 k_x^4 + L_{2y}^2 k_y^4) \right]^{0.5}, \quad (7.31)$$

где $K_i = \frac{H_i E_i}{(1 - \nu_i^2)}$.

В формулу (7.31) входят коэффициенты $R_{ix}, R_{iy}, L_{ix}, L_{iy}$, определяющие связь деформаций растяжения-сжатия и сдвига во всех слоях. Они могут быть найдены анализом геометрических, физических и статических условий при изгибе трёхслойных плит.

При определении коэффициентов связи деформаций будем считать справедливой гипотезу Кирхгофа-Лява, принимаемую в теории колебаний при рассмотрении поперечных колебаний пластин. Кроме того, будем считать: 1) длины волн значительно больше толщин слоёв и все слои совер-

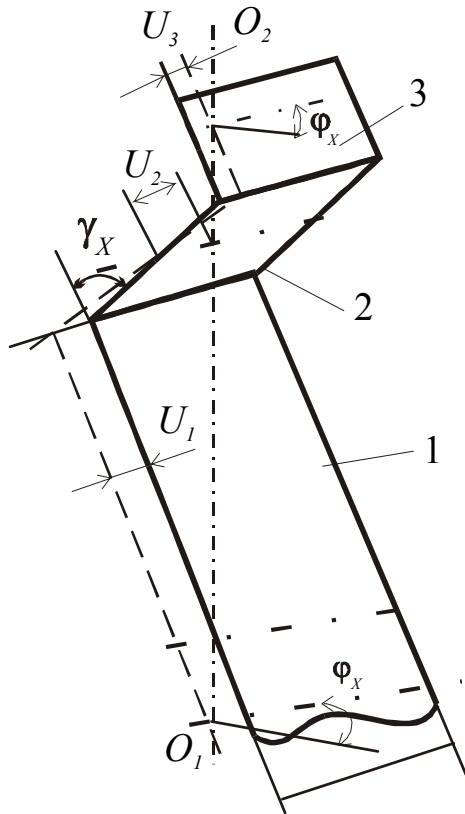


Рис. 7.7. Вид деформации элемента трехслойной платы

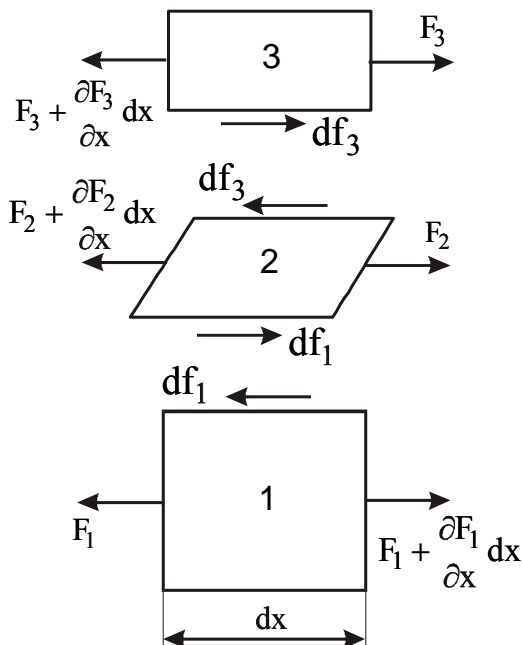


Рис. 7.8. Силы, действующие на элементы слоев

шают одинаковые поперечные колебания; 2) проскальзывание между поверхностями упругих и демпфирующего слоя отсутствует; 3) жесткость демпфирующего слоя значительно меньше упругих слоёв.

На рис. 7.7 показан вид деформаций элемента трёхслойной пластины в направлении оси x . Очевидно, что при жёсткости вибропоглощающего слоя, равного нулю, деформации u_1 и u_3 , вызываемые действием этого слоя, будут отсутствовать и слои займут положение, показанное пунктиром. Сдвиг между поперечными сечениями, которые в недеформированном состоянии расположены в одной плоскости O_1O_2 , будут максимальны.

При увеличении жёсткости вибропоглощающего слоя до некоторой величины возникнут продольные силы, действующие на упругие слои, и соответствующие им деформации сжатия и растяжения.

Из простых геометрических рассуждений можем получить:

$$-2u_1 = u_1 - u_3 - \varphi_x \left(\frac{H_1 - H_3}{2} \right); \quad (7.32)$$

$$-H_2\gamma_x = u_1 + u_3 - \varphi_x H_{31}, \quad (7.33)$$

где γ_x - угол сдвига; φ_x - угол изгиба пластины; u_i - абсолютная деформация растяжения-сжатия i -го слоя.

Аналогичные уравнения можно получить, если рассматривать изгиб в направлении оси y . В дальнейшем индексы x будут опущены, так как ре-

зультаты будут одинаковы для обоих направлений.

Под статическими условиями понимается равенство нулю всех внутренних и внешних сил, действующих как на пластину в целом, так и на каждый слой в отдельности. На основании рис. 7.8, на котором показаны силы, действующие на элементы слоёв пластины при максимальном изгибе, можно написать:

$$\begin{aligned} dF_2 &= df_1 - df_3; \quad dF_1 = df_1; \\ dF_3 &= df_3; \end{aligned} \quad (7.34)$$

где $dF_i = \frac{dF_i}{dx} dx$ - приращение силы F_i , действующей на i -й слой;

df_i - приращение касательной силы, приложенной к поверхности 2-го слоя.

Касательная сила, определяющая сдвиг в вибропоглощающем слое, $F_k = df_3$. Учитывая (7.34), получим

$$F_k = \frac{dF_3}{dx} dx.$$

Используя закон Гука для касательных напряжений $\tau = G_2 \gamma$ и выражение $\tau = \frac{F_k}{dx} = \frac{dF_3}{dx}$, с учётом (7.32) найдём

$$\frac{dF_3}{dx} = -\frac{G_2}{H_2} (\sigma_1 + \sigma_3 - \phi H_{31}). \quad (7.35)$$

Применяя закон Гука для растяжения-сжатия в двух направлениях, получим

$$\sigma_x = -\frac{E_i Z}{1 - \nu_i^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right); \quad \sigma_y = -\frac{E_i Z}{1 - \nu_i^2} \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right); \quad (7.36)$$

где ρ_x, ρ_y - радиусы кривизны пластины в направлениях x и y соответственно;

Z - расстояние от нейтрального слоя; ν_i - коэффициент Пуассона материала i -го слоя. Выразим силу F_3 через соответствующую деформацию.

На рис. 7.3 показаны эпюры напряжений в слое при наличии продольной силы F_i и без неё. Видно, что появление силы приводит к смещению нейтральной плоскости на некоторую величину H_0 .

Величину F_i можно найти интегрированием нормальных напряжений по поперечному сечению слоя:

$$F_i = \int_{-H_{i2}}^{H_{i1}} \sigma_x dz.$$

Учитывая выражение (7.36), после интегрирования получим

$$F_1 = -\frac{E_i}{1-\nu_i^2} \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu_i \frac{1}{\rho_y} \right) \left(\frac{H_{i1}^2 - H_{i2}^2}{2} \right).$$

Обозначив $K_i = \frac{E_i H_i}{1-\nu_i^2}$ и заметив, что $H_i = H_{i1} + H_{i2}$, найдём

$$F_i = -K_i \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu_i \frac{1}{\rho_y} \right) \left(\frac{H_{i1} - H_{i2}}{2} \right). \quad (7.37)$$

Для малых прогибов справедливы соотношения :

$$\frac{1}{\rho_x} \approx \frac{dW(x,y)}{dx^2}; \quad \frac{1}{\rho_y} \approx \frac{dW(x,y)}{dy^2}.$$

Учитывая (7.4), приведём их к виду

$$\frac{1}{\rho_x} = -k_x^2 W(x,y); \quad \frac{1}{\rho_y} = -k_y^2 W(x,y).$$

Подставляя эти выражения в (7.37), получим

$$F_i = -K_i \frac{H_{i1} - H_{i2}}{2\rho_x} \left(1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right).$$

Заметив, что выражение $\frac{H_{i1} - H_{i2}}{2\rho_x}$ определяет деформацию $\varepsilon_x = \frac{du_i}{dx}$

растяжения-сжатия средней плоскости i -го слоя при действии силы F_{ix} и учитывая соотношение

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = -k_x^2 u_i,$$

найдём

$$\frac{dF_{ix}}{dx} = K_i k_x^2 u_i \left(1 + \nu_i \frac{k_y^2}{k_x^2} \right). \quad (7.38)$$

Подставляя это соотношение в (7.35) и вводя обозначения

$$g_x = \frac{G_2}{K_3 H_2 k_y^2 \left(1 + \nu_3 \frac{k_y^2}{k_x^2} \right)}, \quad (7.39)$$

после несложных преобразований получим

$$-u_1 = g_x(u_1 + u_3 - \varphi_x H_{31}). \quad (7.40)$$

Уравнение равновесия всей платы в направлении оси X в соответствии с рис. 7.8 можно представить в виде:

$$\left(-\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_3}{dx} \right) dx = 0$$

или

$$-\frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_3}{dx} = 0.$$

Используя выражение (7.38) и вводя обозначения

$$k_{ix} = \frac{E_i H_i}{E_1 H_1} C_{\nu i} C_{xi}; \quad C_{\nu i} = \frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_i^2}; \quad C_x = \frac{1 + \nu_i k_y^2 / k_x^2}{1 + \nu_i k_y^2 / k_x^2},$$

получим уравнение

$$-u_1 + u_2 k_{2x} + k_{3x} u_3 = 0. \quad (7.41)$$

Соотношения (7.32), (7.33), (7.40), (7.41) образуют систему уравнений, которую приведем к виду:

$$u_1 = R_{1x} \varphi_x;$$

$$u_2 = R_{2x} \varphi_x;$$

$$u_3 = R_{3x} \varphi_x;$$

$$\gamma_x = Z_{2x} \varphi_x,$$

где

$$R_{1x} = \frac{\left[k_2 \left(\frac{H_1 - H_3}{2} \right) (1 - g_x) - g_x H_{31} (k_2 + 2k_3) \right]}{\Delta x};$$

$$R_{2x} = \frac{\left[\left(\frac{H_1 - H_3}{2} \right) (1 - g_x - g_x k_3) - g_x H_{31} (1 - k_3) \right]}{\Delta x}; \quad (7.42)$$

$$R_{3x} = \frac{\left[\left(\frac{H_1 - H_3}{2} \right) g_x k_2 - g_x H_{31} (2 + k_2) \right]}{\Delta x};$$

$$Z_{2x} = \frac{\left[H_{31} (2 + k_2) - k_2 \left(\frac{H_1 - H_3}{2} \right) \right]}{H_2 \Delta x};$$

$$\Delta x = 2 + k_2 - 2g_x(k_3 + k_2 + 1).$$

Применяя аналогичные рассуждения при рассмотрении изгиба пластины в направлении оси Y , найдем коэффициенты $R_{1y}, R_{2y}, R_{3y}, Z_{2y}$.

Эти коэффициенты могут быть получены из выражений (7.42) заменой индекса x на y .

Для определения цилиндрической жесткости трехслойной платы воспользуемся известным выражением из теории изгиба пластин [3]

$$D = M_x \frac{\partial x}{\partial \varphi_x},$$

которое для i – слоя можно представить в виде:

$$D_i = (M_{ii} + F_i H_{i0})_x \frac{\partial x}{\partial \varphi_x},$$

где M_{ii} - момент сил на i -й слой относительно собственной нейтральной оси; F_i - сила растяжения-сжатия i -го слоя, H_{i0} - расстояние от средней поверхности i -го слоя до нейтральной поверхности трехслойной платы.

Используя выражение

$$\begin{aligned} M_{ii} &= K_i \frac{H_i^2}{12} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; & F_1 &= K_1 H_{10} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}; \\ F_2 &= K_2 \left(H_{20} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - \frac{H_2}{2} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right); \\ F_3 &= K_3 \left(H_{30} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - H_2 \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

где $H_{i0} = H_{i0} - H_0$, после подстановки в выражение для D_i получим:

$$\begin{aligned} D_1 &= K_1 \left(\frac{H_1^2}{12} + H_0^2 \right); \\ D_2 &= K_2 \left(\frac{H_2^2}{12} - \frac{H_2^2}{12} \frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} + H_{20}^2 - \frac{H_2}{2} H_{20} \frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} \right); \\ D_3 &= K_3 \left(\frac{H_3^2}{12} + H_{30}^2 - H_{30} H_2 \frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} \right). \end{aligned} \quad (7.43)$$

В эти выражения входят неизвестные величины H_0 и $\frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x}$. Из условия равенства нулю продольных сил, приложенных к пластине $\sum_{i=1}^3 F_i = 0$, найдем

$$H_0 = \frac{K_3 H_{31} + K_2 H_{21} - \left(\frac{K_2}{2} + K_3 \right) H_2 \frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x}}{K_1 + K_2 + K_3}. \quad (7.44)$$

Представляя $\frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} = \frac{\partial \gamma_x / \partial x}{\partial \varphi_x / \partial x}$ и учитывая, что $\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x}$

$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} = Z_{2x} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x}$, получим

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial \varphi_x} = Z_{2x}, \quad (7.45)$$

где Z_{2x} определяется выражением (7.42).

Формула (7.24) совместно с выражениями (7.35) – (7.38) позволяет рассчитать коэффициент A свободно опертой по всем краям платы с внутренним вибропоглощающим слоем. Недостатки ее в значительной сложности и ограниченности применения – только для плат свободно опертых по всем краям.

Приближенные формулы. На рис. 7.9 приведены зависимости КМП от соотношения волновых чисел.

Видно, что во всех случаях при соблюдении условия $K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$ наибольшие демпфирующие свойства имеют место при $K_y=0$, т.е. когда деформации происходят преимущественно в одном направлении, что характерно для конструкций типа балок, и наименьшее при $K_y=K_x$. При этом разница составляет величину от нескольких процентов до нескольких десятков процентов (более 70%).

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. Собственная форма колеба-

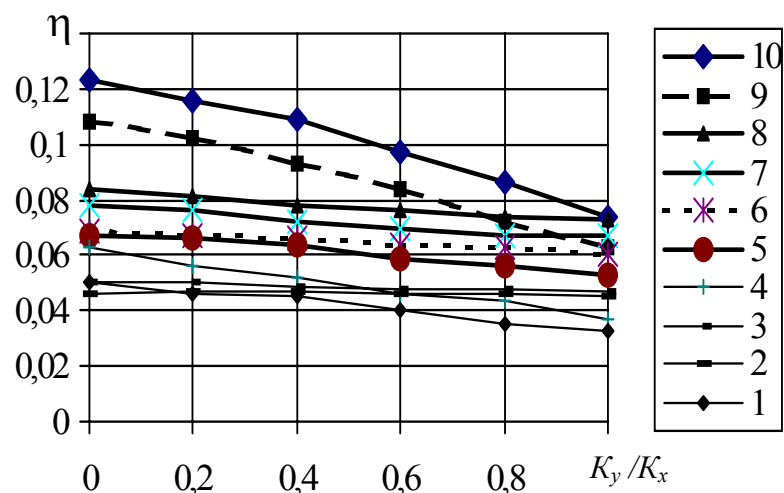


Рис. 7.9. Зависимость коэффициента механических потерь

ний ВП слоистой платы может существенно влиять на величину ее демпфирующих свойств.

2. Наименьшие демпфирующие свойства имеют место при равенстве изгибных деформаций в продольном и поперечном направлениях платы, наибольшие - при деформации только в одном направлении.

3. В тех случаях, когда определение собственной формы колебаний не представляется возможным, можно найти предельные значения демпфирующих свойств (максимальное и минимальное), подставляя в полученные выражения соответственно $K_x = K$, $K_y = 0$ и $K_x = P\sqrt{2}$, $K_x = K_y$.

Рассмотрим эти случаи.

Математическую модель ВП платы при $K_y = 0$ представим в виде

$$\eta = \frac{\eta_2 G'_2 H_2 L_{2x}^2}{DK_x^2}. \quad (7.46)$$

Значения L_{2x} , D и K_x находятся из выражений:

$$L_{2x} = \frac{H_{31}}{H_2 [1 + g_x (1 + k_3)]}, \quad (7.47)$$

$$D = \frac{K_1 H_1^2}{12} + \frac{K_3 H_3^2}{12} + \frac{g_x H_{31}^2 K_3}{1 + g_x (1 + k_3)}, \quad (7.48)$$

где параметр сдвига

$$g_x = \frac{G'_2 \sqrt{1 + \eta_2^2}}{H_2 K_3 K_x^2}, \quad (7.49)$$

жесткость i -го слоя при растяжении-сжатии

$$K_i = E_i H_i / (1 - \nu_i^2),$$

относительная жесткость i -го слоя $k_i = K_i / K_1$;

$$H_{31} = H_1 / 2 + H_2 + H_3 / 2.$$

В этих выражениях E_i , H_i , ν_i - модуль упругости при растяжении-сжатии, толщина и коэффициент Пуассона материала i -го слоя соответственно.

Подставляя соотношения (7.47) - (7.49) в (7.46), после ряда преобразований найдём

$$\eta = \frac{\eta_2 Y G (1 + k_3)}{1 + g_x (1 + k_3) (2 + Y) + g_x^2 (1 + k_3)^2 (1 + Y)}, \quad (7.50)$$

где геометрический параметр

$$Y = \frac{12 k_3 h_{31}^2}{(1 + k_3) (1 + k_3 h_3^2)};$$

$$g = g_x / \sqrt{1 + \eta_{22}^2}; \quad h_3 = H_{\text{Э}} / H, \quad h_{\dots} = H_{\dots} / H.$$

Выражение (7.50), полученное при условии $K_y=0$, практически совпадает с формулой [11] для расчёта конструкции типа балок.

Принимая $K_y=K_x$, математическую модель ВП плат представим в виде

$$\eta = \frac{\eta_{22}^2 G_2' H_2 L_{2x}^2}{2DK_x^2}, \quad (7.51)$$

где

$$L_{2x} = \frac{H_{31} C_3}{H_2 [C_3 + g_x (1 + k_3 c_3)]}, \quad (7.52)$$

$$D = \frac{K_1 H_1^2}{12} + \frac{K_3 H_3^2}{12} + \frac{g_x H_{31} K_3}{c_3 + g_x (1 + k_3 c_3)}, \quad (7.53)$$

где

$$g_x = \frac{G_2' \sqrt{1 + \eta_{22}^2}}{K_3 H_2 P_X^2 (1 + \nu_1)}, \quad (7.54)$$

$$c_3 = (1 + \nu_3) / (1 + \nu_1).$$

Подставляя выражения (7.52) - (7.54) в (7.51), получим

$$\eta = \frac{0.5 \eta_{22} Y c_3 g (1 + k_3 c_3) (1 + \nu_1)}{c_3^2 + g_x c_3 (1 + k_3 c_3) (2 + Y) + g_x^2 (1 + k_3 c_3)^2 (1 + Y)}, \quad (7.55)$$

где

$$g = g_x / \sqrt{1 + \eta_{22}^2}, \quad Y = \frac{12 k_3 h_{31}^2}{(1 + k_3 c_3) (1 + k_3 h_3^2)}. \quad (7.55a)$$

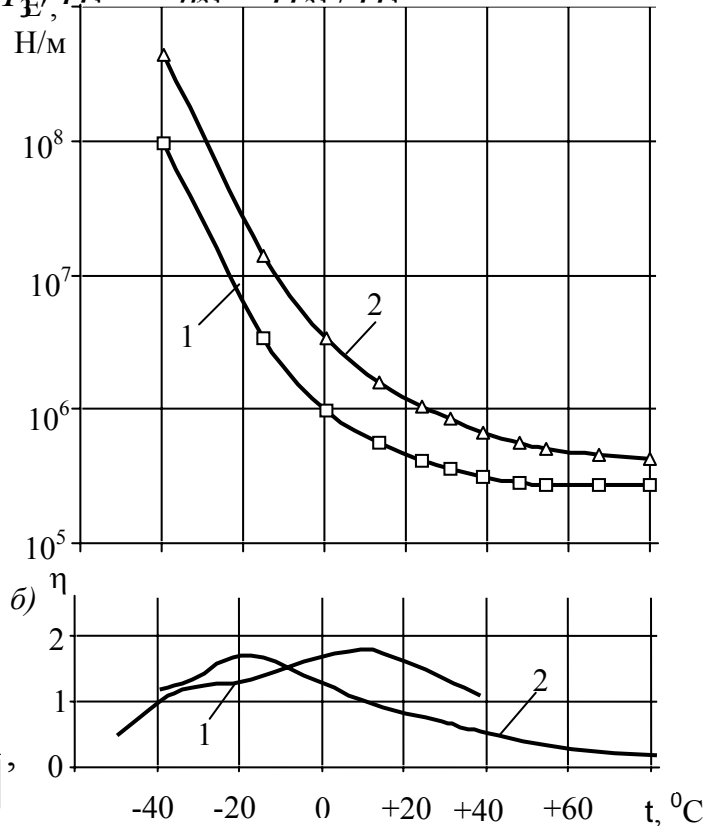


Рис. 7.10. Зависимость динамического модуля упругости E' (а) и коэффициента механических потерь η (б) от температуры и частоты для высокомолекулярного полиизобутилена: 1 - 100 Гц; 2 - 1000 Гц

Расчеты по формулам (7.50) и (7.55) позволяют найти соответственно наибольшее и наименьшее значения коэффициента потерь, не принимая во внимание собственную форму колебаний платы.

Волновое число K_x можно определить из выражения

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2,$$

где
$$K = (2\pi f)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{D} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Здесь f - собственная частота колебаний платы в герцах, m - масса её единицы площади.

Допущение о незначительной жесткости второго слоя по сравнению с жесткостью первого и третьего слоёв оправдано только в определенных пределах, так как динамический модуль упругости ВП полимера может увеличиваться на несколько порядков при понижении температуры и повышении частоты колебаний и стать соизмеримым с модулем упругости конструкционного материала. В качестве примера на рис. 7.10 показаны зависимости E' и коэффициента потерь η от температуры и частоты для одного из лучших ВП материалов - высокомолекулярного полиизобутилена. Такие зависимости типичны и для других полимеров.

Результаты сравнения расчетов по точным и приближенным формулам показывают, что при определенных значениях K_2 и K_3 расхождение между точной и приближенными формулами может достигать 30% и более.

Если считать допустимой ошибку в 20%, то необходимо выполнение условий $k_2 \leq 10^{-5}$ и $k_3 \leq 0.3$. Это означает, например, что при толщинах слоев $H_1=1 \cdot 10^{-3}$ м, $H_2=1 \cdot 10^{-5}$ м, $H_3=1 \cdot 10^{-4}$ м и модулях $E_1=E_3=1 \cdot 10^{10}$ Н/м², которые примерно соответствуют стеклотекстолитам, модуль упругости ВП материала не должен превышать $1 \cdot 10^8$ Н/м². Из рис.7.10 видно, что это условие не выполняется при частотах больше 100 Гц и температуре ниже -40 °С. В этом случае для расчета целесообразно использовать точную формулу.

Пример 7.2 Исходные данные. Рассчитать коэффициенты передачи μ_1 и уменьшения резонансных колебаний $\xi_w(x,y)$ при первом резонансе в центре ячейки, показанной на рис. в диапазоне температур от -25 до +65°С, если вместо обычной стеклотекстолитовой платы толщиной 2 мм применена плата, состоящая из двух слоев стеклотекстолита СТЭФ толщиной 0,5 мм каждая, склеенных высокомолекулярным полиизобутиленом толщиной 0,1 мм. На плате ячейки равномерно расположены ЭРЭ с общей массой 0.0098 кг. Механические динамические характеристики полиизобутилена приведены в табл. Остальные данные те же, что и в предыдущем примере.

Р е ш е н и е. В качестве примера подробно приведем расчет при температуре +15°С.

1. Рассчитываем первую собственную частоту колебаний субблока. Для этого необходимо знать ДМУ и КПМ, которые являются функцией частоты. Поэтому, учитывая, что для платы без демпфирующего слоя $f_1 = 363\text{Гц}$, в качестве начального значения принимают $f_1' = 400\text{Гц}$, из табл. находим

$$\eta_2 = 1,33; \quad G_2' = 1,7 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Жесткость третьего слоя

$$K_3 = \frac{E_3 H_3}{1 - \nu_3^2} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{1 - 0,22^2} = 1,58 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Учитывая, что первый и третий слои одинаковы, т.е. $K_1 = K_3$, то

$$k_{3x} = \frac{K_3}{K_1} = 1; \quad C_{3x} = \frac{1 + \nu_3}{1 + \nu_1} = 1; \quad h_3 = \frac{H_3}{H_1} = 1;$$

$$h_{31} = \frac{H_3 + 2H_2 + H_1}{2H_1} = 1,2$$

Волновое число

$$k_{ij}^2 = \pi^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) = 9,87 \left(\frac{1}{0,07^2} + \frac{1}{0,07^2} \right) = 4028,4.$$

Параметр сдвига в первом приближении

$$g^I = \frac{2G_2 \sqrt{1 + \eta_2^2}}{K_3 H_2 k_{11} (1 + \nu^3)} = \frac{2 \cdot 1,7 \cdot 10^6 \sqrt{1 + 1,33^2}}{1,58 \cdot 10^7 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 4028,4 (1 + 0,22)} = 0,73.$$

Цилиндрическая жидкость

$$D_1 = \frac{E_1 H_1^3}{12(1 - \nu_1^2)} = \frac{3,02 \cdot 10^{10} (0,5 \cdot 10^{-3})^3}{12(1 - 0,22^2)} = 0,33 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$d = 1 + k_{3x} h_3^2 + \frac{12 k_{3x} h_{31}^2 g}{1 + g(1 + k_{3x})} = 1 +$$

$$+ 1 + \frac{12 \cdot 1 \cdot [0,6 \cdot 10^{-3} / (0,5 \cdot 10^{-3})]^2 \cdot 0,73}{1 + 0,73(1 + 1)} = 7,12.$$

$$D = D_1 d = 0,33 \cdot 7,12 = 2,35 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Масса единицы площади субблока

$$m = \rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 + \rho_3 H_3 + m_g / S_{nn} = 2 \cdot 2,05 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} +$$

$$+ 1,1 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} + 9,8 \cdot 10^{-3} / 0,07^2 = 4,16 \text{кг}.$$

Первая собственная частота колебаний в первом приближении

$$f_1^I = \frac{k_{11}^2}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{4028,4}{6,28} \sqrt{\frac{2,35}{4,16}} = 482 \text{ Гц.}$$

Интерполированием, используя данные табл. П.7, находим

$$G_2' = \left[1,7 + \frac{2,3 - 1,7}{600 - 400} (482 - 400) \right] \cdot 10^6 = 1,95 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$\eta_2 = 1,33 + \frac{1,49 - 1,33}{200} (482 - 400) = 1,4.$$

Параметр сдвига во втором приближении

$$g^{II} = \frac{2 \cdot 1,95 \cdot 10^6 \sqrt{1 + 1,4^2}}{7,8 \cdot 10^6} = 0,86.$$

Цилиндрическая жесткость

$$\alpha = 1 + 1 + \frac{12 \cdot 1,2^2 \cdot 0,86}{1 + 0,86 \cdot 2} = 7,46; \quad D = 0,33 \cdot 7,46 = 2,46 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Частота во втором приближении

$$f_1^{II} = 641,5 \sqrt{2,46 / 4,16} = 493 \text{ Гц.}$$

Видим, что первое и второе приближения различаются менее чем на 5%, поэтому принимаем

$$f_1 = 493 \text{ Гц}; \quad G_2' = 1,95 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \quad \gamma_2 = 1,4; \quad g = 0,86.$$

2. По формуле (7.55а) рассчитываем геометрический параметр

$$Y = \frac{12 \cdot 1,2^2 \cdot 1}{(1+1)(1+1)} = 4,32.$$

3. Находим коэффициент использования демпфирующих свойств ВП материала, используя формулу (7.55)

$$A = \frac{0,5 \cdot 4,32 \cdot 0,86(1+1)(1+0,22)}{1 + 0,86(1+1)(2 + 4,32) + 0,86^2(1 + 4,32)} = 0,164.$$

4. Определяем коэффициент механических потерь по формуле (6.24)

$$\gamma = 0,056 + (1,4 - 0,02) \cdot 0,164 = 0,282.$$

5. Рассчитываем коэффициент передачи на первом резонансе по выражению (3.60)

$$\mu_1(0,5; 0,5) = 1 + \chi A = 1 + \frac{1,4 - 0,02}{0,056} \cdot 0,164 = 5,00.$$

6. Находим коэффициент уменьшения резонансных колебаний

$$\xi_{\&w\&}(0,5; 0,5) = 1 + \chi A = 1 + \frac{1,4 - 0,02}{0,056} \cdot 0,164 = 5,00.$$

Аналогично рассчитываются коэффициенты передачи при других температурах. Результаты расчета приведены в табл. 7. 2

Результаты расчета трехслойных конструкций

t°, C	$f, Гц$	μ	ξ_w	t°, C	$f, Гц$	μ	ξ_w
-25	546	18,4	1,57	+35	438	5,3	5,56
-5	536	12,2	2,42	+60	387	7,7	3,70
+15	493	5,8	5,00	+80	371	12,4	2,42

Среднее значение коэффициента $\bar{\xi}_w = 2.78$

7.3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ С ДЕМПФИРУЮЩИМИ СЛОЯМИ

Программа позволяет рассчитывать минимальную толщину внешнего или внутреннего демпфирующего слоя, обеспечивающего необходимое уменьшение амплитуд резонансных колебаний. Так как демпфирующие характеристики платы зависят от формы колебаний, определить которую часто сложно, расчет может проводиться для двух предельных случаев, обеспечивающих максимальное и минимальное демпфирование. На рис. 7.11 приведена схема алгоритма.

В блоке I вводятся исходные данные:

H_1, H_3 – толщины слоев из конструкционных материалов;

$F(1:K), T(1:L)$ – массивы частот и температур, для которых определены параметры ВП материалов E_2, η_2 ;

H_{2max} – максимальная толщина демпфирующего слоя;

Σ - величина приращения толщины H_2 демпфирующего слоя;

Δ - допустимая ошибка в определении собственных частот колебаний;

M – число собственных частот колебаний;

шифр ВП материала;

способы крепления краев платы.

В блоке 2 определяется число собственных частот, блок 3 служит для организации цикла по расчету собственных частот колебаний.

В блоке 4 определяется волновое число $P[m]$ по формуле

$$P[m] = (\alpha_m / 2\pi a^2)^{0,5},$$

где α_m – частотный коэффициент, определяемый по формулам (3.43а), (3.45).

В блоке 5 в зависимости от того, требуется рассчитать η_{max} или η_{min} , процесс разветвляется. Если необходимо η_{min} , то волновое число в направлении оси X (блок 6),

$$P_x = P[m] / \sqrt{2}, \quad P_y = P_x;$$

если - η_{\max} , то $P_x=P[m]$ и $P_y=0$ (блок 7).

В блоке 8 определяется собственная частота колебаний

$$f[m] = p^2[m] \sqrt{\frac{D_1}{m_n}} \cdot K_9, \quad \text{где } D_1 = E_1 H_1^3 / 12(1 - \nu_1^2).$$

В блоках 9, 11 проводится обнуление номера температуры K и частоты l , блоки 10, 12, 13, 25 служат для организации циклов вычислений при разных температурах и частотах.

В блоке 14 проверяется попадание собственной частоты в интервал частот $F[l] - F[l+1]$, где $F[l]$ и $F[l+1]$ частоты, при которых известны и находятся в базе данных значения E_2 , η_2 для ВП материала. Если частота не находится в интервале, то l увеличивается на единицу (блок 10), проверяется попадание в интервал $F[l] - F[l+1]$ и т.д.

В блоке 13 проверяется выполнение условия $l < L$, где L – максимальная частота. Если условие не выполняется, то осуществляется переход в блок 25, если выполняется, то по интерполяционным формулам в блоке 15 рассчитываются динамический модуль упругости (ДМУ) и коэффициент механических потерь (КМП) ВП материала для частоты $f[m]$ и температуры k .

Формулы имеют вид:

$$E_2 = E_2(k, l) + \frac{(f[m] - F[l])(E_2[k, l+1] - E_2[k, l])}{F(l+1) - F(l)};$$

$$\eta_2 = \eta_2(k, l) + \frac{(f[m] - F[l])(\eta_2[k, l+1] - \eta_2[k, l])}{F(l+1) - F(l)};$$

$$G_2 = E_2 / 2(1 + \nu^2).$$

В блоке 16 производится обнуление и в блоке 17 задается начальное значение толщины H_2 ВП слоя.

Если $H_2 \geq H_{2\max}$ (блок 18), вычисления прекращаются, а при $H_2 < H_{2\max}$ в блоке 19 вычисляется цилиндрическая жесткость D по формулам.

$$K_i = E_i H_i / (1 + \nu_i^2);$$

$$C_{xi} = (1 + \nu_i P_y^2 / P_x^2) / (1 + \nu_1 P_y^2 / P_x^2);$$

$$C_{yi} = (P_y^2 + \nu_i P_x^2) / (P_y^2 + \nu_1 P_x^2);$$

$$k_{xi} = K_i C_{xi} / K_1; \quad k_{yi} = K_i C_{yi} / K_1;$$

$$H_{21} = 0,5(H_1 + H_2); \quad H_{31} = 0,5(H_1 + 2H_2 + H_3);$$

$$g_x = G_2 / H_2 P_x^2 (1 + \nu_3 P_y^2 / P_x^2);$$

$$g_y = G_2 / H_2 (P_y^2 + \nu_3 P_x^2);$$

$$\begin{aligned}
\Delta x &= 2K_3 + k_{2x}K_3 + 2g_x(K_{3x} + K_{2x} + 1); \\
\Delta y &= 2K_3 + k_{2y}K_3 + 2g_y(K_{3y} + K_{2y} + 1); \\
L_{2x} &= \left[H_{31}(2 + k_{2y})K_3 - k_{2x}K_3 \frac{H_1 - H_3}{2} \right] / \Delta_x H_2; \\
L_{2y} &= \left[H_{31}(2 + k_{2x})K_3 - k_{2y}K_3 \frac{H_1 - H_3}{2} \right] / \Delta_y H_2; \\
H_0 &= \left[H_{31}K_{31} - K_2H_{21} - \left(\frac{K_2}{2} + K_3H_2L_{2x} \right) \right] / (K_1 + K_2 + K_3); \\
H_{20} &= H_{21} - H_0; \quad H_{30} = H_{31} - H_0; \\
D_1 &= K_1(H_1^2/12 + H_0^2); \\
D_2 &= K_2(H_2^2 - H_2^2L_{2x})/12 + H_{20}^2 - H_2H_{20}L_{2x}/2; \\
D_3 &= K_3(H_3^2/12 + H_{30}^2 - H_{30}H_2L_{2x}), \\
D &= D_1 + D_2 + D_3.
\end{aligned}$$

В блоке 20 определяется первое приближение частоты $f[m]$, а в блоке 21 проверяется расхождение между $f_0[m]$ и $f[m]$, если разность $f_0[m] - f[m] < \Delta$, где Δ - допускаемая погрешность, то в блоке 22 рассчитывается η_m по формулам

$$\begin{aligned}
R_{1x} &= [k_{2x}(H_1 - H_3)(K_3 + g_x)/2 + g_x H_{31}(k_{2x} + 2k_{3x})] / \Delta x; \\
R_{2x} &= [K_3(H_1 - H_3) + g_x + g_x K_{3x})/2 + g_x H_{31}(1 - k_{3x})] / \Delta x; \\
R_{3x} &= [k_{2x}g_x(H_1 - H_3)/2 + g_x H_{31}(k_{2x} + 2)] / \Delta x; \\
R_{1y} &= [k_{2y}(H_1 - H_3)(K_3 + g_y)/2 + g_y H_{31}(k_{2y} + 2k_{3y})] / \Delta y; \\
R_{2y} &= [K_3(H_1 - H_3) + g_y + g_y K_{3y})/2 + g_y H_{31}(1 - k_{3y})] / \Delta y; \\
R_{3y} &= [k_{2y}g_y(H_1 - H_3)/2 + g_y H_{31}(k_{2y} + 2)] / \Delta y; \\
W_{2\tilde{n}\tilde{a}\tilde{a}} &= G_2 H_2 (L_{2x}^2 P_x^2 + L_{2y}^2 P_y^2) / 8 \\
W_{pi} &= \frac{E_i H_i}{8(1 - v_i^2)} (R_{xi}^2 P_x^4 + R_{yi}^2 P_y^4 + 2v_i R_{xi} R_{yi} P_x^2 P_y^2); \\
W_{ui} &= D_i (P_x^2 + P_y^2)^2 / 8;
\end{aligned}$$

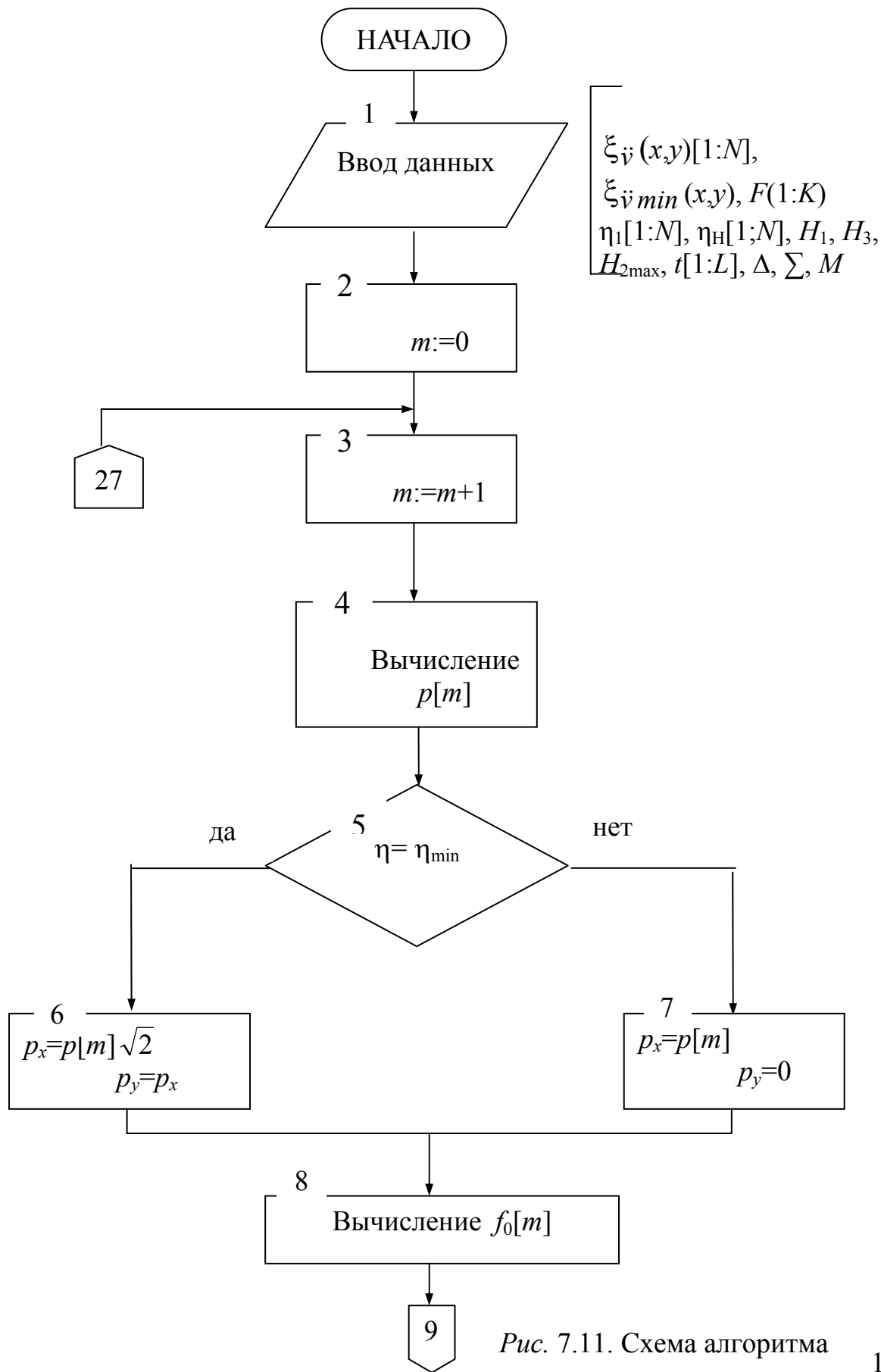
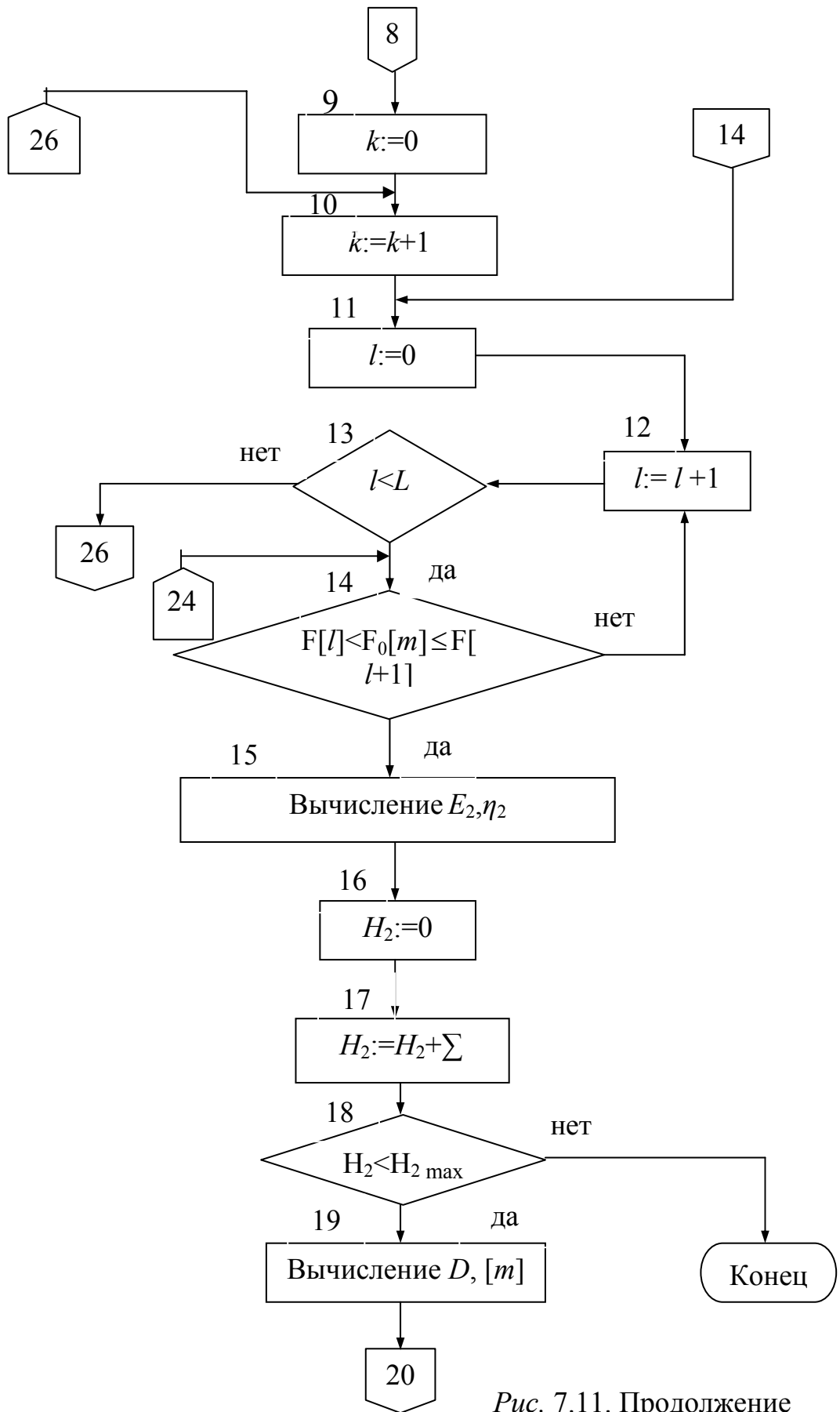


Рис. 7.11. Схема алгоритма



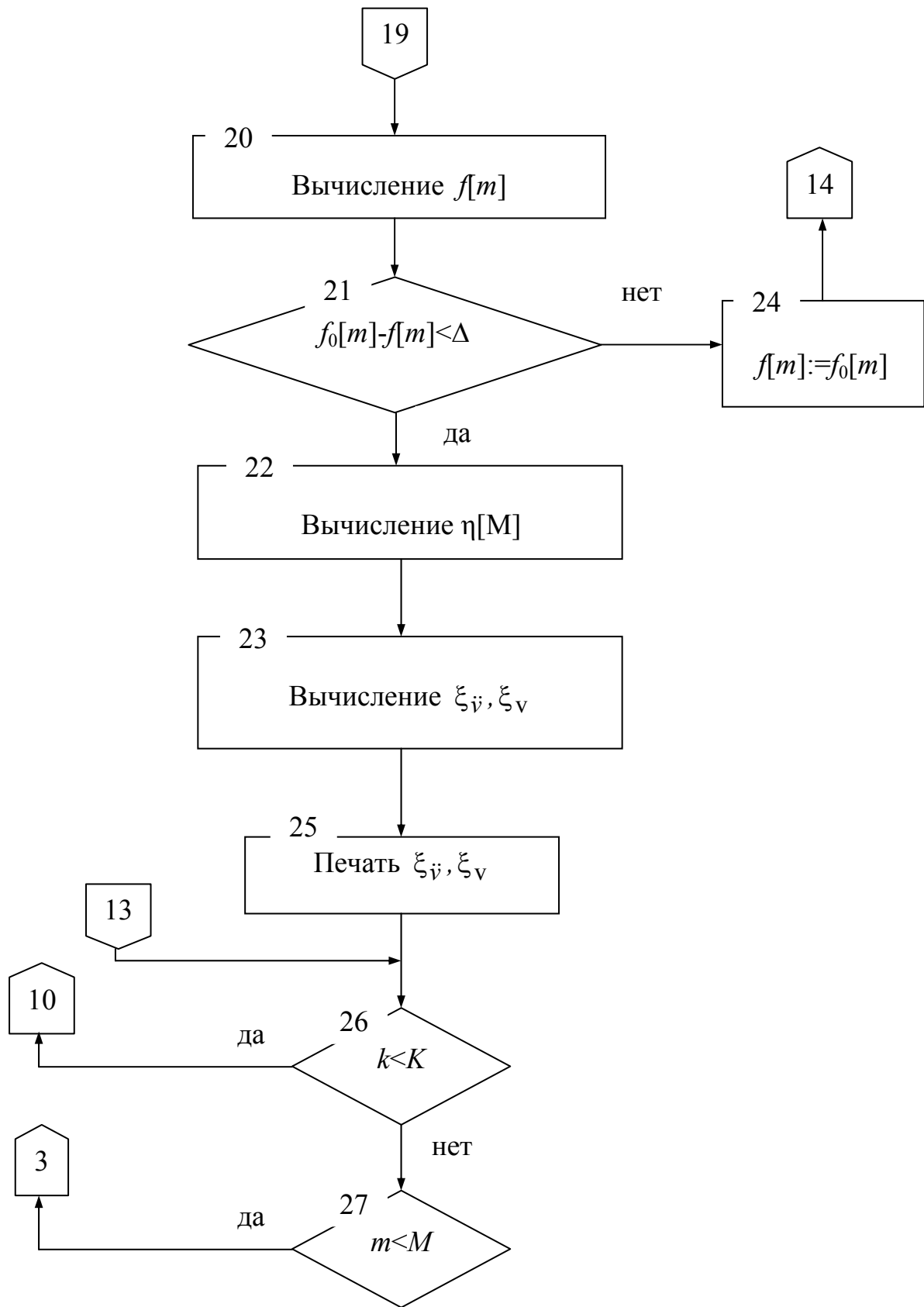


Рис. 7.11. Окончание

$$W_i = W_{pi} + W_{ui};$$

$$W_2 = W_{u2} + W_{\ddot{a}a2} + W_{p2};$$

$$A = \frac{1}{1 + \frac{W_1 + W_2}{W_3}};$$

$$\eta = \eta_i + (\eta_2 - \eta_1)A;$$

Если $f_0[m]-f[m]>\Delta$, то $f[m]=f_0[m]$ и вычисления повторяются с блока 14.

В блоке 23 рассчитываются показатели уменьшения амплитуд виброускорения и виброперемещения

$$\xi_v(x, y) = \eta_m / \eta_n,$$

$$\xi_v(x, y) = \frac{\eta_m}{\eta_n} \frac{f^2[m]}{f_0^2[m]};$$

а в блоке 25 они выводятся на печать.

После блока 26, если K не превышает номер максимальной температуры, расчеты повторяются, начиная с блока 10.

После того как для первой части определены значения ξ_v , ξ_v при всех следующих заданных температурах расчеты проводятся для 2-й и последующих собственных частот, начиная с блока 3.

7.4. ЯЧЕЙКА С ПОЛИМЕРНЫМИ ДЕМПФЕРАМИ В ВИДЕ ДЕМПФИРУЮЩЕГО РЕБРА

Математическую модель конструкции ячейки РЭС с демпфирующими ребрами (рис. 7.12) целесообразно представить в виде аналитической зависимости показателей изменения амплитуд виброперемещения $\xi_w(x, y)$ и виброускорения $\xi_{\ddot{w}}(x, y)$ от геометрических и физических параметров платы и демпфирующих ребер (ДР).

Примем следующие допущения:

Печатная плата ячейки – прямоугольная.

Способ крепления ячейки – свободное опирание по контуру.

Демпфирующие ребра расположены параллельно сторонам ячейки по всей длине и (или) ширине платы. Рассматривается только первый резонанс.

При первом резонансе и свободном опирании по контуру максимальные амплитуды резонансных колебаний $w(x, y)$, $\dot{w}(x, y)$ находятся в центре платы, и поэтому показатели $\xi_w(x, y)$, $\xi_{\dot{w}}(x, y)$ будем определять для этой точки.

Собственную частоту колебаний (СЧК) до применения ДР можно найти по формуле Рейля-Ритца

$$f_0 = \frac{\alpha}{2 \pi a^2} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

которую для случая свободного опирания платы по контуру, когда $\alpha = \pi^2 (1 + a^2/b^2)$, можно привести к виду:

$$f_0 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4a_0^2} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{D}{m}}, \quad (7.56)$$

где $D = EH^3/12(1 - \nu^2)$ - цилиндрическая жесткость платы;

E, ρ, ν - модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала платы.

Выражение для частоты платы с ребрами f_k получим с использованием энергетического метода, в соответствии с которым максимальные потенциальная и кинетическая энергии равны. Напишем выражения для кинетической и потенциальной энергии ребер и платы отдельно.

Потенциальная энергия изгиба платы определяется по формуле (7.2)

Форму колебаний $w(x, y, t)$ можно представить в виде:

$$w(x, y, t) = w(x, y) \cos \omega t, \quad (7.57)$$

где $w(x, y)$ - собственная форма колебаний, равная для случая свободного опирания прямоугольной платы

$$w(x, y) = W_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (7.58)$$

Максимальной потенциальной энергией плата обладает, когда $\cos \omega t = 1$.

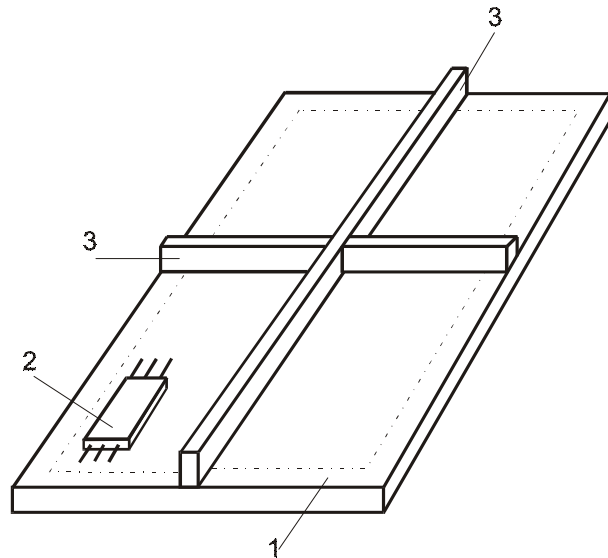


Рис. 7.12. Ячейка ЭС с демпфирующими ребрами:
1 - плата; 2 - ЭРЭ; 3 - демпфирующие ребра

Подставляя (7.58) в (7.57) и учитывая, что

$$\int_0^a \int_0^{b_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = W_0^2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 \frac{ab}{4};$$

$$\int_0^a \int_0^{b_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = W_0^2 \left(\frac{\pi}{b_0} \right)^4 \frac{ab}{4};$$

$$\int_0^a \int_0^{b_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy = W_0^2 \left(\frac{\pi}{ab_0} \right)^2 \frac{ab}{4},$$

получим

$$P_{n \max} = \frac{\pi^4 ab}{8} D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 W_0^2. \quad (7.59)$$

Кинетическая энергия платы

$$T_n = \frac{\rho h}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy. \quad (7.60)$$

Подставляя (7.58) в (7.60), получим

$$T_n = \frac{\rho h}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \int_0^a \int_0^b w^2(x, y) dx dy =$$

$$= \frac{\rho hab}{8} \omega^2 W_0 \sin \omega t;$$

$$T_{n \max} = \frac{\rho hab}{8} \omega^2 W_0^2. \quad (7.61)$$

Потенциальная энергия всех ребер [21]

$$P_p = \sum_{i=1}^p \int_0^b \frac{B_{ix}}{2} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right)_{x=x_i}^2 dy + \sum_{j=1}^r \int_0^a B_{jy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=y_j}^2 dx, \quad (7.62)$$

где B_{ix}, B_{jy} - жесткость на изгиб ребер, параллельных осям X и Y (см. рис.7.13);

r, p - число ребер, параллельных осям X и Y соответственно;

x_i, y_j - координаты ребер;

$w_i = w(x_i, t)$ - форма колебаний ребра.

Жесткости ребер с прямоугольным поперечным сечением на изгиб определяются по формулам

$$B_{xi} = \frac{b_i E_i H_i}{12};$$

$$B_{yj} = \frac{a_j E_j H_j}{12}$$

где E , H - модуль упругости материала ребра и его высота соответственно;

a_j , b_i ширина ребер, параллельных осям Y и X соответственно.

Для случая свободного опирания прямоугольной пластины по контуру формы свободных колебаний ребер, предполагая, что они незначительно влияют на форму колебаний, в первом приближении можно представить

$$w_i = w_0 \sin \frac{\pi x_i}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad w_j = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y_j}{b}, \quad (7.63)$$

где w_0 - амплитуда колебаний платы.

Подставляя выражение (7.56) в формулу (7.55) и учитывая, что

$$\int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=y_j}^2 dx = \int_0^a \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(w_0 \sin \frac{\pi x_i}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) \right]^2 dy =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} \right) w_0^2 \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} \int_0^b \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy = \frac{\pi^4}{2b^3} w_0^2 \sin^2 \frac{\pi x_i}{a};$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=x_i}^2 dy = \frac{\pi^4}{2a^3} w_0^2 \sin^2 \frac{\pi y_j}{b},$$

получим

$$P_p = \left(\frac{B x_i \pi^4}{4 b^3} \sum_{i=1}^r \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \frac{B y_j \pi^4}{4 a^3} \sum_{j=1}^p \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} \right) w_0 \cos^2 \omega t$$

или

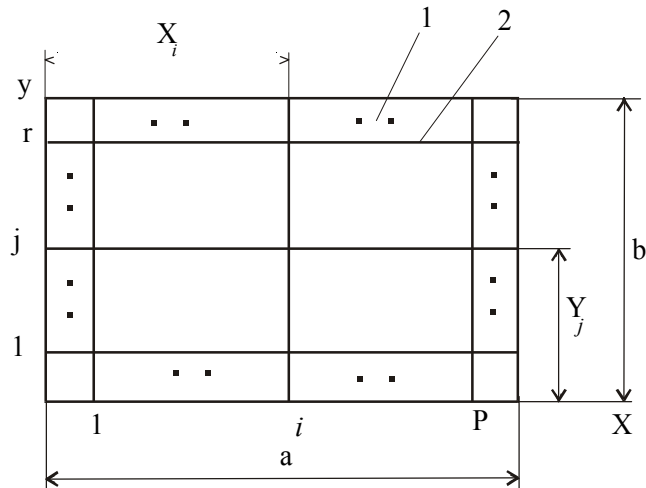


Рис. 7.13 Схема ячейки с демпфирующими ребрами:
1 - плата; 2 - демпфирующие ребра.

$$\Pi_{p \max} = \left(\frac{Bx_i \pi^4}{4b^3} \sum_{i=1}^r \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \frac{By_j}{4a^3} \sum_{j=1}^p \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} \right) w_0^2. \quad (7.64)$$

Кинетическая энергия ребер

$$T_p = \left[\frac{Bx_i \pi^4}{4b^3} \sum_{i=1}^r \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \frac{By_j}{4a^3} \sum_{j=1}^p \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} \right] \omega^2 \sin \omega t.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^b w_i^2 dy = \int_0^b w_0^2 \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy = \frac{w_0^2 b}{2} \sin^2 \frac{\pi x_i}{a};$$

$$\int_0^a w_j^2 dx = \int_0^a w_0^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} dx = \frac{w_0^2 a}{2} \sin^2 \frac{\pi y_j}{b},$$

получим

$$T_{p \max} = \frac{\omega^2}{4} \left[\sum_{i=1}^p Q_i \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \sum_{j=1}^r Q_j \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} \right] w_0^2, \quad (7.65)$$

где Q_i, Q_j - массы ребер в направлении осей Y и X соответственно.

Учитывая, что в соответствии с законом сохранения энергии

$$T_{n \max} + T_{p \max} = \Pi_{n \max} + \Pi_{p \max}$$

и учитывая формулы (7.59), (7.61), (7.64), (7.65), получим

$$f_k^2 = \left[\frac{\frac{D_{ab}}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{1}{b^3} \sum_{i=1}^p B_i \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \dots}{\sum_{i=1}^p Q_i \sin^2 \frac{\pi x_i}{a} + \sum_{j=1}^r Q_j \sin^2 \frac{\pi y_j}{b} + \dots} \dots \right. \\ \left. \frac{\frac{1}{a^3} \sum_{j=1}^r B_j \sin^2 \frac{\pi y_j}{b}}{+ \rho h a b} \right]. \quad (7.66)$$

Показатель использования демпфирующих свойств A можно представить в виде

$$A = \left(1 + \Pi_{u \max} / \Pi_{p \max} \right)^{-1}.$$

Учитывая выражения (7.52), (7.57), получим

$$\frac{\Pi_{u \max}}{\Pi_{p \max}} = \frac{Db}{2} \frac{(1 + \xi^2)^2}{\sum_{i=1}^p B_i \sin^2 \frac{\pi y_i}{b} + \xi^3 \sum_{j=1}^r B_j \sin^2 \frac{\pi x_j}{a}}$$

Поделив числитель и знаменатель на Db и используя формулы

$$D = EH^3 / 12 (1 - \nu^2); B_{xi} = \frac{b_i E_i H_i}{12}; B_{yj} = \frac{a_j E_j H_j}{12},$$

получим

$$A = \left[1 + \frac{(1 + \xi^2)^2}{2(1 - \nu^2) \sum_{i=1}^p \left(\frac{E_i}{E} \right) \left(\frac{b_i}{b} \right) \left(\frac{H_i}{H} \right)^3 \sin^2 \frac{\pi y_i}{b} + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{1}{+ \xi^3 \sum_{j=1}^r \left(\frac{E_j}{E} \right) \left(\frac{b_j}{b} \right) \left(\frac{H_j}{H} \right)^3 \sin^2 \frac{\pi x_j}{a}} \right]^{-1}. \quad (7.67)$$

Если ребра выполнены из одного материала и имеют одинаковую толщину и высоту, формула (7.67) примет вид

$$A = \left[1 + \frac{1}{2(1 - \nu^2)} \left(\frac{E}{E_1} \right) \left(\frac{b}{b_1} \right) \left(\frac{H}{H_1} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{(1 + \xi^2)^2}{\sum_{i=1}^p \sin^2 \frac{\pi y_i}{b} + \xi^3 \sum_{j=1}^r \sin^2 \frac{\pi x_j}{a}} \right]^{-1}. \quad (7.68)$$

Формулы (6.24), (6.25), (7.56), (7.68) и составляют математическую модель ячейки ЭС с демпфирующими ребрами, свободно опертой по всем краям.

Влияние различных факторов на эффективность демпфирования. На рис. 7.14 и 7.15 приведены зависимости показателей уменьшения амплитуд виброускорения и виброперемещения при резонансе ячейки от относительной высоты и относительного модуля упругости материала ДР.

Размеры платы 1.5x150x200 мм, относительная ширина ребра 0.05, КМП ячейки до приклеивания ребра $\eta_H=0.05$. Характеристики материалов платы: $E=2 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu=0.3$; $\eta_1=0.01$; $\rho=2000$ кг/м³ и ребра: $E_1=2 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1=0.3$; $\eta_2=0.01$; $\rho=2000$ кг/м³.

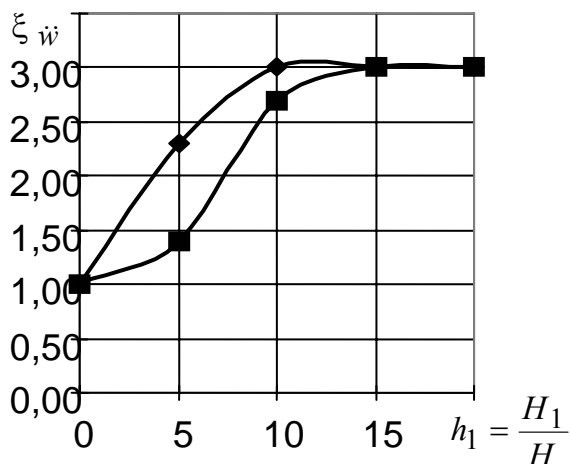


Рис. 7.14. График зависимости $\xi_{\ddot{w}} = f(h_1)$
 ◆ $e_1=0.1$ ■ $e_1=0.01$

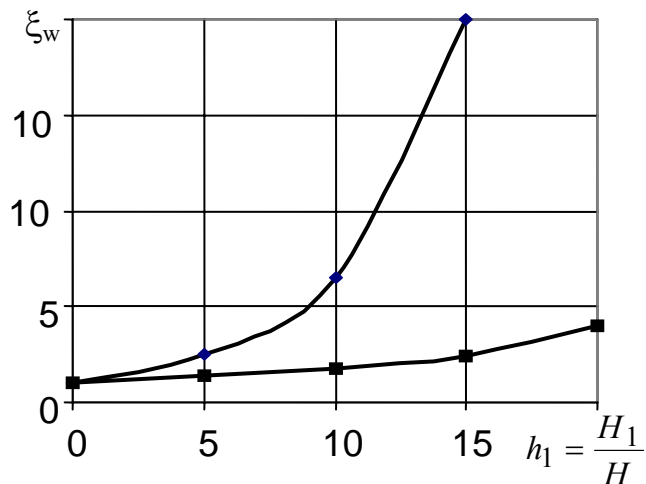


Рис. 7.15. График зависимости $\xi_w = f(h_1)$
 ◆ $e_1=0.1$ ■ $e_1=0.01$

На основе анализа графиков можно сделать следующие выводы:

1. Амплитуда виброперемещения при резонансе с повышением относительной высоты и относительно модуля упругости материалов ДВ уменьшается неограниченно, а амплитуда виброускорения только до определенного уровня.

2. Уменьшить высоту ребер при заданном уменьшении АРК можно применением ВП материала с более высоким модулем упругости.

Контрольные вопросы

1. Выведите формулу для потенциальных энергий изгиба и растяжения конструкции с внешними ДС.
2. Как находятся коэффициенты связи между деформацией изгиба и деформацией растяжения в конструкции с внешними ДС?
3. Как находится формула для определения предельных значений КМП в конструкциях с внешними ДС?
4. Приведите графики зависимости показателя A от относительных толщины и модуля упругости ДС.
5. Как рассчитывается толщина ДС при ограничениях на массу конструкции ячейки?

6. Какие деформации необходимо учитывать при выведении формулы для показателя A в конструкции с внешним ДС?
7. В каком виде устанавливается связь между деформацией изгиба и деформациями растяжения и сдвига в слоях конструкции с внутренним ДС.
8. Выведите формулы для энергии сдвига и растяжения в слоях конструкций с внутренним ДС.
9. Выведите формулы для коэффициентов связи деформаций конструкций с внутренним ДС.
10. Получите формулу для цилиндрической жесткости конструкции с внутренним ДС.
11. Как получаются приближенные формулы для расчета предельных значений показателя A в конструкциях с внутренним ДС?
12. В чем заключается принцип работы ячеек с ДВ?
13. Нарисуйте АЧХ ячеек без ДВ и с ДВ.
14. Приведите дискретные физические модели ячеек РЭС с ДВ:
 - в общем случае;
 - для расчета СЧК;
 - для расчета амплитуд резонансных колебаний.
15. Напишите дифференциальные уравнения собственных частот колебаний (СЧК) ячеек РЭС с ДВ.
16. Выведите формулу для расчета СЧК ячеек РЭС с ДВ.
17. Напишите дифференциальные уравнения движения ячеек РЭС с ДВ для случая кинематического возбуждения.
18. Выведите формула для расчета коэффициентов передачи ячеек РЭС с ДВ.
19. Получите формулу для сосредоточенных массы и жесткости ячеек РЭС.

Глава 8

Теоретические основы расчета ячеек ЭС с сосредоточенными полимерными демпферами

8.1. ДВУХЪЯЧЕЕЧНАЯ КОНСТРУКЦИЯ С ОДНОЙ ДЕМПФИРУЮЩЕЙ ВСТАВКОЙ

Принцип работы и физические модели. Как отмечалось в разделе 6.1, для уменьшения амплитуд резонансных колебаний можно применять между ячейками РЭС демпфирующие вставки (см. рис. 6.5). Механика процесса заключается в следующем: при резонансных колебаниях ячеек, между которыми находится ДВ, в последней возникают продольные деформации растяжения-сжатия, как показано на рис. 8.1. Так как КМП ВП

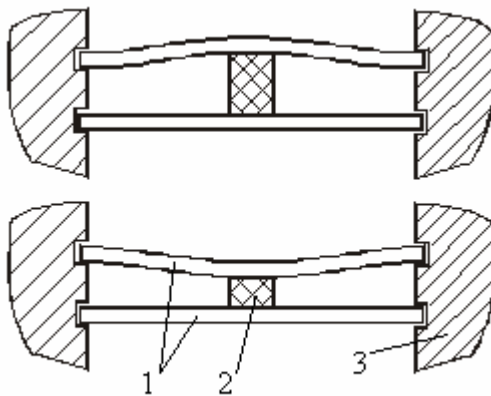


Рис. 8.1. Вид деформации вставки при резонансе верхней ячейки: 1-ячейки; 2-вставка; 3-корпус блока

увеличится. Это приведет к уменьшению амплитуд резонансных колебаний (рис. 8.2).

Значительное уменьшение амплитуд будет наблюдаться только при выполнении двух условий:

- КМП ВП вставки должен быть большим;
- деформации вставки должны быть значительными.

Для выполнения второго условия платы должны иметь различные собственные частоты колебаний, так как в противном случае резонанс плат наступит одновременно, их колебания будут синхронными и деформации вставки, а следовательно, и потери энергии ΔW_B минимальными.

материала значительно превышает КМП плат, то КМП конструкции, связанной демпфирующей вставкой, в соответствии с формулой

$$\eta = \frac{\Delta W_1 + \Delta W_B + \Delta W_2}{W_1 + W_2 + W_B} = \frac{\eta_1 W_1 + \eta_B W_B + \eta_3 W}{W_1 + W_2 + W_B},$$

где ΔW_1 и ΔW_2 , ΔW_B - потери энергии колебаний в платах и вставке; W_1 , W_2 , W_B - максимальные энергии колебаний в ячейке и вставке, значительно

Физическую модель выберем из следующих соображений. Причиной отказа РЭА часто являются резонансные колебания ячеек на основной, первой, собственной частоте. Возникающие при этом большие амплитуды виброперемещения приводят к установленным явлениям в выводах ЭРЭ и других элементах конструкций и, как следствие, к отказам. Поэтому во многих случаях достаточно иметь модель, пригодную для анализа динамического поведения конструкции только в области первого резонанса, что позволяет представить реальную конструкцию моделью в виде системы всего лишь с двумя степенями свободы (рис.8.3,а).

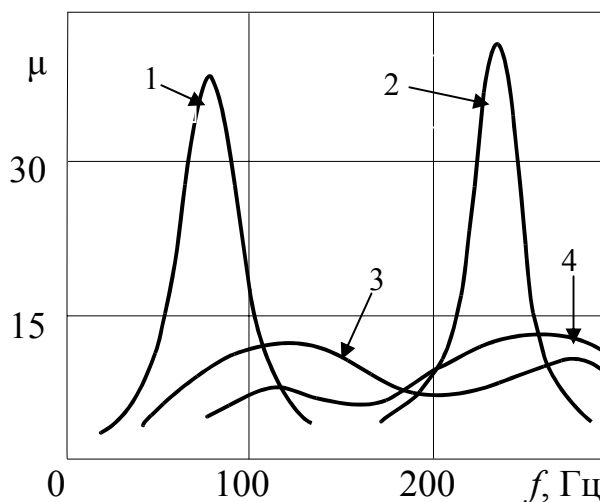


Рис. 8.2. Амплитудно-частотные характеристики ячеек РЭС:
1,2 - до установки вставки; 3,4 - после установки демпфирующей вставки

В этой модели m_i , k_d , η_i ($i = 1,2$) - сосредоточенные в центре ячейки масса, жесткость и КМП i -й платы; k_d , η_d - коэффициент жесткости и КМП демпфера.

При определении собственных частот колебаний демпфирующими свойствами конструкции можно пренебречь ($\eta_1 = \eta_2 = \eta_d = 0$), и модель примет вид, показанный на рис. 8.3,б.

Определяя амплитуды резонансных колебаний, демпфирующие свойства плат можно не учитывать ввиду их малости ($\eta_1 = \eta_2 = 0$), и модель будет иметь вид, показанный на рис. 8.3,в. Вопросы приведения конструкций к системам с сосредоточенными параметрами рассмотрены ниже.

Математическую модель конструкции с ДВ представим в виде аналитических выражений, определяющих собственные частоты и амплитуды резонансных колебаний - основные динамические характеристики, интересные конструктора РЭС.

Методы приведения распределенных характеристик к сосредоточенным, рассмотрены в разделе 8.2.

Собственные частоты колебаний. На основе модели, показанной на рис.8.3 б, уравнения движения масс m_1 и m_2 запишем в виде

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{Z}_1 + k_1 Z_1 + k_{\text{Д}}(Z_1 - Z_2) &= 0; \\
 m_2 \ddot{Z}_2 + k_2 Z_2 + k_{\text{Д}}(Z_2 - Z_1) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

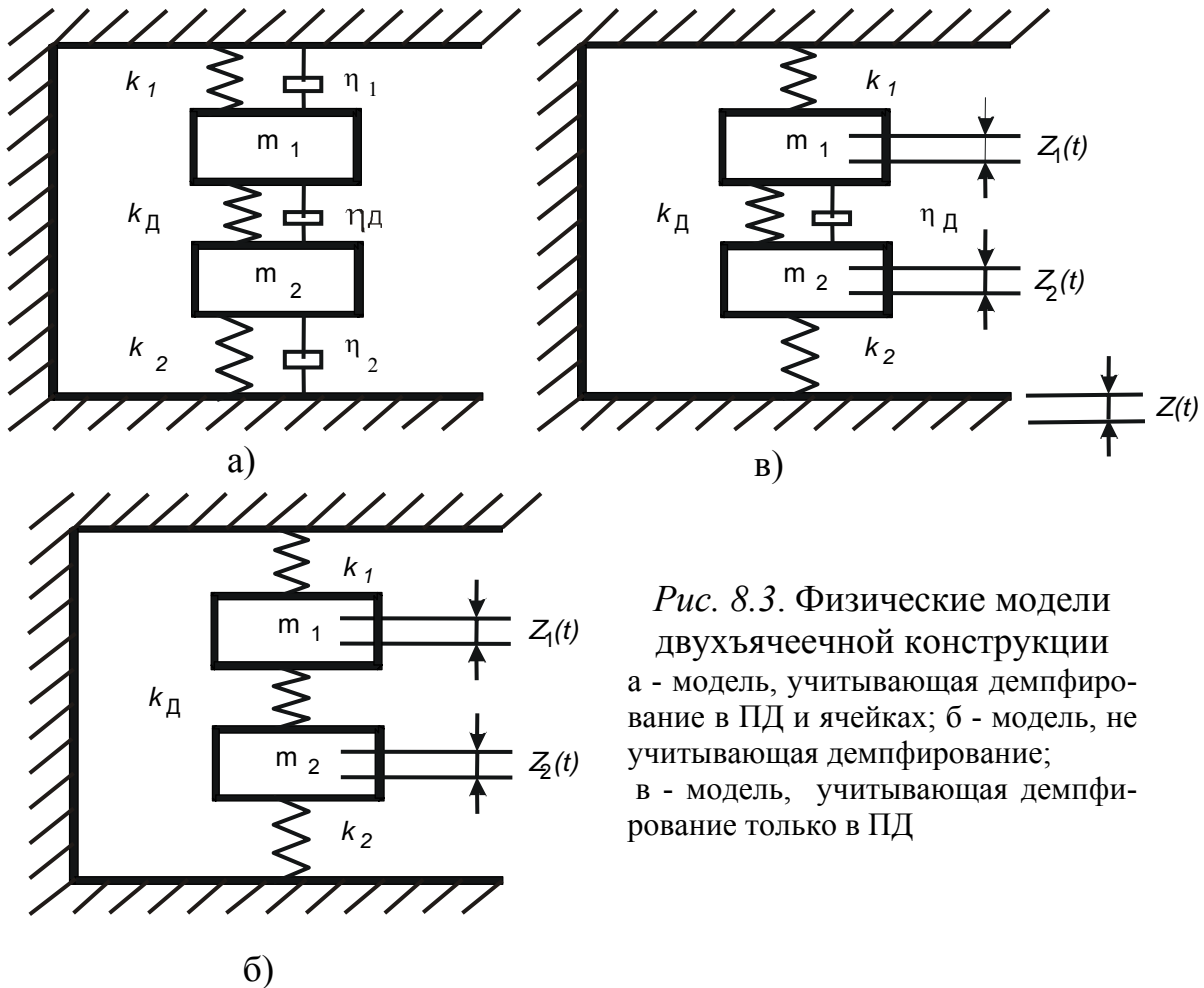


Рис. 8.3. Физические модели двухъярусной конструкции
 а - модель, учитывающая демпфирование в ПД и ячейках; б - модель, не учитывающая демпфирование; в - модель, учитывающая демпфирование только в ПД

Так как свободные колебания масс можно описать гармоническими, например, синусоидальными функциями:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= Z_1(t) = Z_{01} \sin \omega t; \\
 Z_2 &= Z_2(t) = Z_{02} \sin \omega t,
 \end{aligned}$$

то после подстановки их в систему (8.1) получим

$$\begin{aligned}
 -m_1 \omega^2 Z_1 + (k_1 + k_{\text{Д}}) Z_1 - k_{\text{Д}} Z_2 &= 0; \\
 -m_2 \omega^2 Z_2 + (k_1 + k_{\text{Д}}) Z_2 - k_{\text{Д}} Z_1 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{8.2}$$

Система алгебраических уравнений (8.2) имеет решения, отличные от нуля, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix}
 k_1 + k_{\text{Д}} - m_1 \omega^2 & -k_{\text{Д}} \\
 -k_{\text{Д}} & k_2 + k_{\text{Д}} - m_2 \omega^2
 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(k_1 + k_{\text{Д}} m_1 \omega^2)(k_2 + k_{\text{Д}} - m_2 \omega^2) - k_{\text{Д}}^2 = 0$$

или после преобразований

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_{\text{Д}}}{m_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{m_2} \right) \omega^2 + \left(\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} + \frac{k_1 k_{\text{Д}}}{m_1 m_2} + \frac{k_2 k_{\text{Д}}}{m_1 m_2} \right) = 0.$$

Решая его, найдем собственные частоты колебаний ω_1 и ω_2 ячеек

$$\omega_{12} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_{\text{Д}}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{\text{Д}}}{m_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 + k_{\text{Д}}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{\text{Д}}}{m_2} \right)^2 - \left(\frac{k_1 k_2 + k_1 k_{\text{Д}} + k_2 k_{\text{Д}}}{m_1 m_2} \right)} \right]^{0.5} \quad (8.3)$$

Коэффициенты передачи. Уравнения вынужденных колебаний масс m_1 и m_2 , если пренебречь демпфированием в ячейках, при кинематическом возбуждении системы (см. рис. 8.1в) имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{Z}_1 - k_1(Z_0 - Z_1) + k_{\text{Д}}(1 + i\eta)(Z_1 - Z_2) &= 0; \\ m_2 \ddot{Z}_2 - k_2(Z_0 - Z_1) - k_{\text{Д}}(1 + i\eta)(Z_1 - Z_2) &= 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Если кинематическое возбуждение описывается гармонической функцией

$$Z = Z_0 \sin \omega t, \quad (8.5)$$

то и колебания масс m_1 и m_2 также будут описываться гармоническими функциями

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{01} \sin(\omega t - \varphi_1); \\ Z_2 &= Z_{02} \sin(\omega t - \varphi_2). \end{aligned} \quad (8.6)$$

Подставляя выражения (8.5) - (8.6) в систему (8.4), приведем ее к алгебраическому виду

$$Z_2(k_2 + k_{\text{Д}} - m_2 \omega^3 + ik_{\text{Д}} \eta_{\text{Д}}) - Z_1(k_{\text{Д}} + ik_{\text{Д}} \eta_{\text{Д}}) = k_2 Z_0. \quad (8.7)$$

$$Z_1(k_1 + k_{\text{Д}} - m_1 \omega^3 + ik_{\text{Д}} \eta_{\text{Д}}) - Z_2(k_{\text{Д}} + ik_{\text{Д}} \eta_{\text{Д}}) = k_1 Z_0. \quad (8.8)$$

Из уравнения (8.7) получим

$$Z_1 = \frac{k_1 Z_0 + (1 + i\eta_{\text{Д}}) Z_2 k_{\text{Д}}}{k_2 - m_1 \omega^2 + k_{\text{Д}} (1 + i\eta_{\text{Д}})}.$$

Подставляя последнее выражение в (8.8), получим

$$Z_2 = \frac{k_2 \left[k_1 - m_1 \omega^2 + k_{\bar{A}} (1 + i \eta_{\bar{A}}) \right] + k_1 k_{\bar{A}} (1 + i \eta_{\bar{A}})}{\left(k_2 + k_{\bar{A}} - m_2 \omega^2 + i k_{\bar{A}} \eta_{\bar{A}} \right) \left(k_1 + k_{\bar{A}} - m_1 \omega^2 + i k_{\bar{A}} \eta_{\bar{A}} \right) - \left(k_{\bar{A}} + i k_{\bar{A}} \eta_{\bar{A}} \right)^2}$$

или после ряда преобразований получим выражение для передаточной функции

$$\phi_2(i\omega) = \frac{Z_2}{Z_0} = \frac{k_1 k_2 + k_2 k_{\bar{A}} - k_2 m_1 \omega^2 +}{k_1 k_2 + k_1 k_{\bar{A}} + k_2 k_{\bar{A}} - \omega^2 (k_2 m_1 + k_{\bar{A}} m_1 + k_1 m_2 + k_{\bar{A}} m_2) + \dots} \dots$$

$$\dots \frac{k_1 k_{\bar{A}} + i \eta_{\bar{A}} k_{\bar{A}} (k_1 + k_2)}{\dots + (k_2 m_1 + k_{\bar{A}} m_1 + k_1 m_2 + k_{\bar{A}} m_2) + m_1 m_2 \omega^4 + i \eta_{\bar{A}} k_{\bar{A}}}$$

Коэффициент передачи

$$\mu_2 = \frac{Z_{20}}{Z_0} = \left\{ \frac{\left(1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} - \frac{m_1}{k_1} \omega^2 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} \right)^2 +}{\left[1 + \frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} - \omega^2 \left(\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{k_{\text{Д}} m_1}{k_1 k_2} + \frac{k_{\text{Д}} m_2}{k_1 k_2} \right) + \frac{m_1 m_2}{k_1 k_2} \omega^2 \right] + \dots} \dots \right\}^{0.5} \cdot \quad (8.9)$$

$$\dots \frac{+ \eta_{\text{Д}}^2 \left(\frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} \right)^2}{+ \eta_{\text{Д}}^2 \left(\frac{k_{\text{Д}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Д}}}{k_2} - \frac{k_{\text{Д}} m_1}{k_1 k_2} \omega^2 - \frac{k_{\text{Д}} m_2}{k_1 k_2} \omega^2 \right)}$$

Коэффициент передачи μ_1 найдем следующим образом. Из уравнения (8.8) получим

$$Z_2 = \frac{k_2 Z_0 + Z_1 k_{\bar{A}} (1 + i \eta_{\bar{A}})}{k_2 + k_{\bar{A}} - m_2 \omega^2 + i k_{\bar{A}} \eta_{\bar{A}}}$$

Подставляя это выражение в (8.7), найдем

$$Z_1 = \frac{\left[k_1 \left(k_2 + k_{\bar{A}} - m_{\bar{A}} \omega^2 + i k_{\bar{A}} \eta_{\bar{A}} \right) + k_2 k_{\bar{A}} (1 + i \eta_{\bar{A}}) \right] Z_0}{\left(k_1 + k_{\bar{A}} - m_1 \omega^2 + i k_{\bar{A}} \eta_{\bar{A}} \right) \left(k_2 + k_{\bar{A}} - m_2 \omega^2 + i k_{\bar{A}} \eta_{\bar{A}} \right) - \left(k_{\bar{A}} + i k_{\bar{A}} \eta_{\bar{A}} \right)^2};$$

$$\mu_1 = \frac{Z_{01}}{Z_0} = \left\{ \frac{\left(1 + \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \frac{m_2}{k_2} \omega^2\right)^2 + \dots}{\left[1 + \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \omega^2 \left(\frac{m_1}{k_1} + \frac{m_2}{k_2} + \frac{k_D m_1}{k_1 k_2} + \frac{k_D m_2}{k_1 k_2}\right) + \frac{m_1 m_2}{k_1 k_2} \omega^4\right]^2 + \dots} \right\}^{0,5} \quad (8.10)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \eta_D \left(\frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2}\right)^2 \\ &\dots \frac{\dots}{\dots} \\ &+ \eta_D^2 \left(\frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \frac{k_D m_1}{k_1 k_2} \omega^2 - \frac{k_D m_2}{k_1 k_2} \omega^2\right)^2 \end{aligned} \right\} \cdot$$

Амплитуды колебаний масс m_1 и m_2 при резонансе

$$Z_{10} = \mu_1 Z_0; \quad (8.11)$$

$$Z_{20} = \mu_2 Z_0. \quad (8.12)$$

Формулы (8.9) - (8.10) для случая резонансных колебаний, когда $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$, можно представить в виде:

$$\mu_1 = \left\{ \frac{\left(1 + \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \frac{\omega_1^2}{\omega_{02}^2}\right)^2 + \dots}{\left\{1 + \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} \left[\left(1 + \frac{k_D}{k_2}\right) + \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2} \left(1 + \frac{k_D}{k_1}\right)\right]^2 + \frac{\omega_1^4}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}\right\} + \dots} \right\}^{0,5} \quad (8.12a)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \eta_D^2 \left(\frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2}\right)^2 \\ &\dots \frac{\dots}{\dots} \\ &+ \eta_D^2 \left[\frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \left(\frac{k_D \omega_1^2}{k_2 \omega_{01}^2} + \frac{k_D \omega_1^2}{k_1 \omega_{02}^2}\right)\right]^2 \end{aligned} \right\} ;$$

$$\mu_2 = \left\{ \frac{\left(1 + \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \frac{\omega_2^2}{\omega_{01}^2}\right) + \dots}{\left\{1 + \frac{k_D}{k_1} + \frac{k_D}{k_2} - \frac{\omega_2^2}{\omega_{02}^2} \left[\left(1 + \frac{k_D}{k_1}\right) + \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{01}^2} \left(1 + \frac{k_D}{k_2}\right)\right]^2 + \frac{\omega_2^4}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}\right\} + \dots} \right\}$$

$$\left. \dots \frac{\left. + \eta_{\text{ä}}^2 \left(\frac{k_{\text{Ä}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Ä}}}{k_2} \right)^2 \right.}{\left. + \eta_{\text{Ä}}^2 \left[\frac{k_{\text{Ä}}}{k_1} + \frac{k_{\text{Ä}}}{k_2} - \left(\frac{k_{\text{Ä}}}{k_2} \frac{\omega_2^2}{\omega_{01}^2} + \frac{k_{\text{Ä}}}{k_1} \frac{\omega_2^2}{\omega_{01}^2} \right) \right]^2 \right.} \right\}^{0,5}, \quad (8.12 \text{ б})$$

где

$$\omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1}; \quad \omega_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2};$$

ω_1, ω_2 - частоты резонансных колебаний ячеек при наличии ДВ.

При выводе формул (8.13) и (8.14) учитывались только потери энергии в ДВ, т.к. они значительно превышают потери за счет других факторов. Если ЭС эксплуатируется в широком диапазоне температур и переходная область ВП полимера не превышает ее, то эффективность ДВ может существенно уменьшиться и пренебрежение потерями в самих ячейках (конструкционным демпфированием) может привести к неправильным выводам.

Для модели на рис.8.3, а, учитывающей также и потери энергии в ячейках, можно записать следующую систему уравнений движения:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{Z}_1 + k_1(Z_1 - Z_0)(1 + i\eta_1) + k_{\text{д}}(Z_1 - Z_2)(1 + i\eta_{\text{д}}) &= 0 \\ m_2 \ddot{Z}_2 + k_{\text{д}}(Z_2 - Z_1)(1 + i\eta_{\text{д}}) + k_2(Z_2 - Z_0)(1 + i\eta_2) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (8.13)$$

Решая эту систему методом, описанным выше, можно получить аналитические выражения для коэффициентов передачи и амплитуд резонансных колебаний. Однако математические выражения в этом случае становятся чрезмерно громоздкими. Особенно это будет проявляться, если рассмотреть систему с тремя или бóльшим количеством ячеек (см. разд. 8.2). В этом случае целесообразно решать систему уравнений движения одним из методов непосредственного решения системы алгебраических уравнений, например методом Крамера. Решения многоячеечных конструкций рассмотрены в § 8.3.

8.2. МЕТОДЫ ПРИВЕДЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЯЧЕЕК К СОСРЕДОТОЧЕННЫМ ПАРАМЕТРАМ

Статический метод. Жесткость демпфирующей вставки в общем виде

$$k_{\text{д}} = \frac{P}{\Delta H}, \quad (8.14)$$

где P - сила, ΔH - деформация ДВ.

Учитывая, что сила

$$P = \sigma S,$$

где σ - нормальное напряжение в сечениях ДВ, а S - площадь, и принимая во внимание закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta H}{H},$$

где E - модуль упругости материала ДВ, ε - относительная деформация, а H - высота вставки, получим

$$k_d = \frac{ES}{H}. \quad (8.15)$$

Приведенные значения коэффициентов жесткости и масс плат найдем из условия равенства собственных частот колебаний плат и соответствующих им приведенных масс m_1 и m_2 . Сравнивая формулу расчета собственных частот колебаний плат

$$\omega_i = \frac{\alpha_i}{a_i^2} \sqrt{\frac{D_i a_i b_i}{m_{пл.i}}},$$

где α_i - частотный коэффициент; a_i, b_i - длина и ширина платы; D_i - цилиндрическая жесткость; $m_{пл.i}$ - масса платы. В соответствии с формулой расчета собственных частот колебаний систем с одной степенью свободы

$$\omega_{0i} = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}},$$

где k_i, m_i - приведенные к сосредоточенным жесткости и массы плат, получим

$$k_i = \frac{m_i}{m_{пл.i}} \cdot \frac{\alpha_i^2 D_i}{a_i^2 \xi_i}, \quad (8.16)$$

где $D_i = \frac{E_i H_i^3}{12(1 - \nu_i^2)}$; $\xi_i = \frac{a_i}{b_i}$.

Коэффициенты α_i для различных способов крепления прямоугольных плат приведены в табл. ПЗ.

Связь между приведенной (сосредоточенной) массой m_i и массой платы $m_{пл.i}$ устанавливается из предположения о равенстве статической и динамической жесткости плат, что будет приводить к некоторой ошибке.

Известно, что статический коэффициент жесткости в общем случае

находится по формуле типа (8.14)

$$k = \frac{P}{\delta},$$

где P - сила, δ - деформация.

Используя, например, известную формулу [32] для прогиба в центре прямоугольной пластины, свободно опертой по краям при действии в центре сосредоточенной силы P :

$$\delta = \frac{4Pa^3b^3}{\pi^4 D(a^2 + b^2)^2},$$

найдем

$$k_i = \frac{P_i}{\delta_i} = \frac{\pi^4 D_i (a_i^2 + b_i^2)^2}{4a_i^3 b_i^3}. \quad (8.17)$$

Сравнивая формулы (8.16) и (8.17), получим

$$m_i = \frac{m_{пл.i}}{4}. \quad (8.18)$$

Следовательно,

$$k_i = \frac{D_i \alpha_i^2}{4a_i^2 \xi_i}. \quad (8.19)$$

Пример 8.1. Для уменьшения амплитуд резонансных колебаний двух параллельно расположенных ячеек между ними в центре установлена ДВ. Размеры ячеек $2 \times 100 \times 200$ мм и $1 \times 100 \times 200$ мм, ДВ- $10 \times 10 \times 20$ мм. Материал плат - стеклотекстолит с характеристиками: $E=1 \cdot 10^6$ Па; $\rho=2000$ кг/м³; $\nu=0,3$. ДВ выполнена из пенополиэтилена с характеристиками: $E=1 \cdot 10^6$ Па, $\eta=0,5$. На каждой ячейке установлены ЭРЭ, равномерно расположенные по площади платы, с общей массой 0,04 кг. Рассчитать коэффициенты передачи в центре каждой ячейки.

Решение. Расчет сосредоточенных параметров модели. Находим цилиндрические жесткости плат:

$$D_1 = \frac{EH_1^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^{10} (2 \cdot 10^{-3})^3}{12(1-0,3^2)} = 14,7 \text{ Н/м};$$

$$D_2 = \frac{EH_2^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^{10} (2 \cdot 10^{-3})^3}{12(1-0,3^2)} = 1,84 \text{ Н/м}.$$

Считая ячейку свободно опертой по краям, найдем

$$\alpha_1 = 9,87 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = 9,87 \left(\frac{1}{0,2^2} + \frac{1}{0,1^2} \right) = 49,35.$$

По формуле (8.19) рассчитаем приведенные значения коэффициентов жесткости

$$k_1 = \frac{D_1 \alpha_1^2}{4a^2 \xi} = \frac{14,7 \cdot 49,35^2}{4 \cdot 0,2^2 \cdot 2} = 111877 \text{ Н/м};$$

$$k_2 = \frac{D_2 \alpha_1^2}{4a^2 \xi} = \frac{1,84 \cdot 49,35^2}{4 \cdot 0,2^2 \cdot 2} = 13985 \text{ Н/м}.$$

Приведенные массы ячеек рассчитаем по формуле (8.18)

$$m_{\text{пр.}i} = \frac{m_i}{4} (i = 1, 2);$$

где

$$m_1 = \rho ab H_1 + m_{\text{exp}} = 2000 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 0,04 = 0,08 + 0,04 = 0,12;$$

$$m_2 = 2000 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 0,04.$$

$$\text{Получим: } m_{\text{пр.}1} = \frac{0,12}{4} = 0,03; \quad m_{\text{пр.}2} = \frac{0,08}{4} = 0,02.$$

Коэффициент жесткости ДВ найдем по формуле (8.15)

$$k_{\ddot{a}} = \frac{ES}{H} = \frac{1 \cdot 10^6 (0,01)^2}{0,02} = 5000 \text{ Н/м}.$$

Расчет собственных частот колебаний. Используя формулу (6.3), получим

$$\omega_{1,2}^2 = \left(\frac{111877 + 5000}{2 \cdot 0,03} + \frac{13985 + 5000}{2 \cdot 0,02} \right) \pm \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{111877 + 5000}{2 \cdot 0,03} + \frac{13985 + 5000}{2 \cdot 0,02} \right)^2 - \\ - \frac{111877 \cdot 13985 + 111877 \cdot 5000 + \dots + 13985 \cdot 5000}{0,03 \cdot 0,02} \end{array} \right\}^{0.5}$$

$$= (2,37 \pm 1,4) \cdot 10^6.$$

$$\omega_{01} = 1940 \text{ рад/с}; \quad \omega_{02} = 986 \text{ рад/с}.$$

Расчет коэффициентов передачи. Проведем вспомогательные расчеты:

$$\frac{k_{\ddot{a}}}{k_1} = 0,045; \quad \frac{k_{\ddot{a}}}{k_2} = 0,36; \quad \omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1} = 3,7 \cdot 10^6 \text{ (рад/с)}^2;$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2} = 0,7 \cdot 10^6 \text{ (рад/с)}^2; \quad \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2} = 5,4;$$

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2} = 1,02; \frac{\omega_1^2}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2} = 5,49;$$

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_{01}^2} = 0,26; \frac{\omega_2^2}{\omega_{02}^2} = 1,39; \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{01}^2} = 0,19; \frac{\omega_2^4}{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2} = 0,36.$$

Подставляя найденные значения в формулы (8.9а)-(8.10а), получим

$$\mu_1 = \left\{ \frac{(1,405 - 5,4)^2 + \{1,405 - 1,02[1 + 0,36 + 5,29(1 + 0,045)] + 5,49\}^2 + 0,5^2 \cdot 0,405^2}{+ 0,25[0,405 - (0,36 \cdot 1,02 + 0,045 \cdot 5,4)]^2} \right\}^{0.5} = 15,1;$$

$$\mu_2 = \left\{ \frac{(1,405 - 0,26)^2 + \{1,405 - 1,39[1 + 0,045 + 0,19(1 + 0,36)] + 0,36\}^2 + 0,25 \cdot 0,405^2}{+ 0,25[0,405 - (0,36 \cdot 0,26 + 0,405 \cdot 1,39)]^2} \right\}^{0.5} = 4,55.$$

$$= 0,08 + 0,04 = 0,12$$

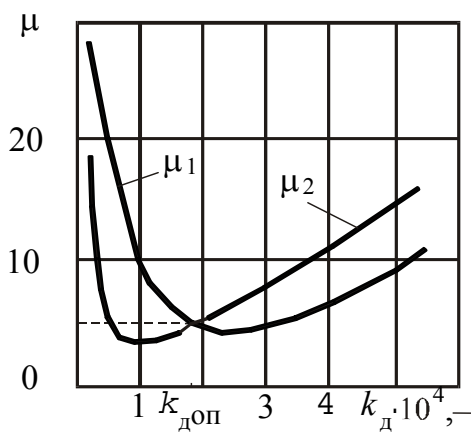


Рис. 8.4. Зависимость коэффициентов передачи ячеек от жесткости ДВ

На рис. 8.4 приведены зависимости коэффициентов передачи μ_1 и μ_2 от жесткости демфера k_d . Видно, что, подбирая величину k_d , можно получить минимальное значение μ_1 или μ_2 . Наиболее часто требуется уменьшить амплитуды резонансных колебаний обеих ячеек, т.е. $\mu_1 = \mu_2$. В данном конкретном примере это достигается при $k_{\bar{A}} = 1,8 \cdot 10^4$ и $\mu_1 = \mu_2 = 4,8$.

Динамический метод.¹⁾ Приведение коэффициентов механических

потерь ячеек. Рассмотрим эту задачу для случая кинематического возбуждения, как наиболее часто встречающуюся на практике.

¹⁾ Способ определения приведенных параметров механической системы: Патент №2006717 РФ, F16F15/22/. Долгов Г.Ф., Талицкий Е.Н. (РФ).

Искомые динамическими параметрами системы, как указывалось, являются циклическая частота и амплитуда колебаний. И поэтому выбранный метод приведения должен обеспечивать точное определение именно этих параметров.

При кинематическом возбуждении уравнение движения системы с одной степенью свободы (рис. 8.5)

$$\widehat{m}(\ddot{\widehat{Z}} - \ddot{\widehat{Z}}_A) + \widehat{k}\widehat{Z}(1 + j\widehat{\eta}) = 0, \quad (8.20)$$

где знак « $\widehat{}$ » означает принадлежность к системе с сосредоточенными параметрами (ССП).

Считая ускорение основания $\ddot{\widehat{Z}}_A$ изменяющимся по гармоническому закону $\ddot{\widehat{Z}}_A(t) = \ddot{\widehat{Z}}_A e^{j\omega t}$, из (8.20) найдем:

$$\widehat{Z}(t) = -\frac{\omega^2 Z_A(t)}{\widehat{\omega}_0^2 - \omega^2 + j\widehat{\eta}\omega_0^2}. \quad (8.21)$$

Перемещение ячейки в области резонанса в точке с координатами X, Y

$$Z(x, y, t) = -\frac{\omega^2 Z_A(t) K_{if}(x, y)}{\omega_{0if}^2 - \omega^2 + j\eta\omega_{0if}^2}, \quad (8.22)$$

где индексы i, f обозначают количество полувольт в направлениях оси X и Y соответственно и, следовательно, определяют форму колебаний ячейки.

Сравнивая выражения (8.21) и (8.22), нетрудно заметить, что при равенстве частот ω_{0if} и ω_0 есть два пути приведения КМП:

1. Считать, что

$$Z(x, y, t) = \widehat{Z}(t).$$

Тогда

$$\widehat{\eta} = \frac{(\omega_{0if}^2 - \omega^2) \cdot [1 - K_{if}(x, y)] + j\eta\omega_{0if}^2}{jK_{if}(x, y)\omega_{0if}^2}.$$

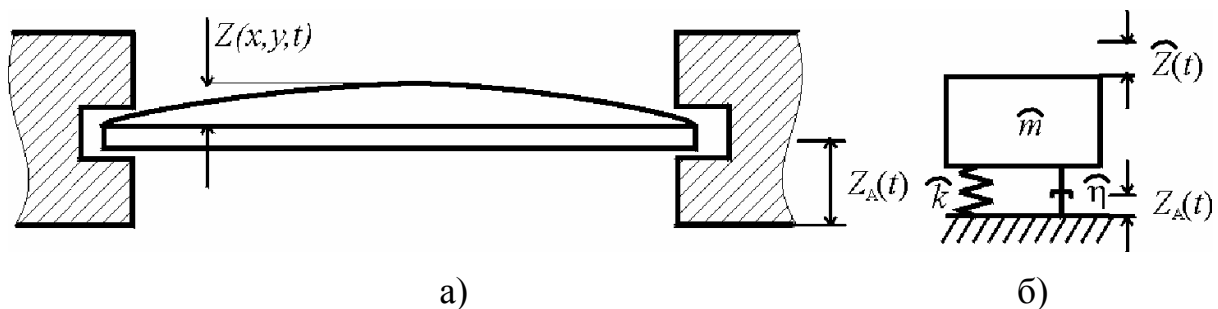


Рис. 8.5. Модель ячейки

2. Принимать, что $\hat{\eta} = \eta$. В этом случае:

$$Z(x, y, t) = \hat{Z}(t)K_{if}(x, y), \quad (8.23)$$

где $\hat{Z}(t)$ находится по формуле (8.21), а коэффициент формы колебаний $K_{if}(x, y)$ - методами, изложенными в гл. 3.

Второй путь более экономичен с точки зрения затрат машинного времени, особенно при решении оптимизационных задач.

Приведение массы и жесткости ячейки. Собственная форма колебаний ячейки известна. При приведении распределенных параметров к сосредоточенным необходимо выполнение условия: энергия ССП должна равняться энергии системы с распределенными параметрами (СРП) [3].

Кинетическая (T_c) и потенциальная (Π_c) энергии ССП равны:

$$T_c = \frac{1}{2} \hat{m} \hat{Z}^2(t); \quad \Pi_c = \frac{1}{2} \hat{K} \hat{Z}^2(t). \quad (8.24)$$

После подстановки выражения (8.21), получим

$$T_c = \frac{1}{2} \frac{\hat{m} \omega^4 Z_A^2(t)}{(\hat{\omega}_0^2 - \omega^2 + j\hat{\eta}\hat{\omega}_0^2)^2}; \quad (8.25)$$

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \frac{\hat{K} \omega^4 \hat{Z}_A^2(t)}{(\hat{\omega}_0^2 - \omega^2 + j\hat{\eta}\hat{\omega}_0^2)^2}. \quad (8.26)$$

Кинетическая энергия СРП описывается выражением

$$T = \frac{1}{2} \iint_S m_0 Z^2(x, y, t) dx.$$

После подстановки выражения для перемещения ячейки $Z(x, y, t)$ при кинематическом возбуждении (3.55), (3.59) и ряда преобразований получим

$$T = \frac{1}{2} m_0 \omega^4 Z_A^2(t) \frac{\left(\iint_S W_{if}(x, y) ds \right)^2}{\left(\omega_{oif}^2 - \omega^2 + j\eta\omega_{oif}^2 \right)^2 \left(\iint_S W_{if}^2(x, y) ds \right)^2}. \quad (8.27)$$

Потенциальную энергию пластины (3.37) после подстановки $Z(x, y, t)$ можно привести к виду:

$$\Pi = \frac{D}{2} \frac{\omega^4 Z_A^2(t) \left[\iint_{(S)} W_{if}(x, y) ds \right]^2}{\left(\omega_{0if}^2 - \omega^2 + j\eta \omega_{0if}^2 \right)^2 \left[\iint_S W_{if}^2(x, y) ds \right]^2} \iint_S [W''(x) + W''(y)]^2 ds. \quad (8.28)$$

Приравнявая выражения (8.25) и (8.27), а затем (8.26) и (8.28), найдем, что сосредоточенная масса

$$\hat{m} = m_0 \frac{\left[\iint_S W_{if}(x, y) ds \right]^2}{\iint_S W_{if}^2(x, y) ds}, \quad (8.29)$$

а сосредоточенная жесткость

$$\hat{K} = D \frac{\left[\iint_S W_{if}(x, y) ds \right]^2}{\iint_S [W_{if}''(x) + W_{if}''(y)]^2 ds}. \quad (8.30)$$

Рассмотренный метод приведения легко применим для однородных прямоугольных пластин с классическими способами типа жесткого защемления, свободного опирания или незакрепленного края. Собственная форма колебаний $W(x, y)$ таких пластин описывается выражением (3.39).

Собственная форма колебаний неизвестна. Приведение распределенных параметров к сосредоточенным параметрам ячеек, у которых неизвестно аналитическое выражение формы колебаний, необходимо проводить другими методами.

Если предположить, что система с одной степенью свободы адекват-

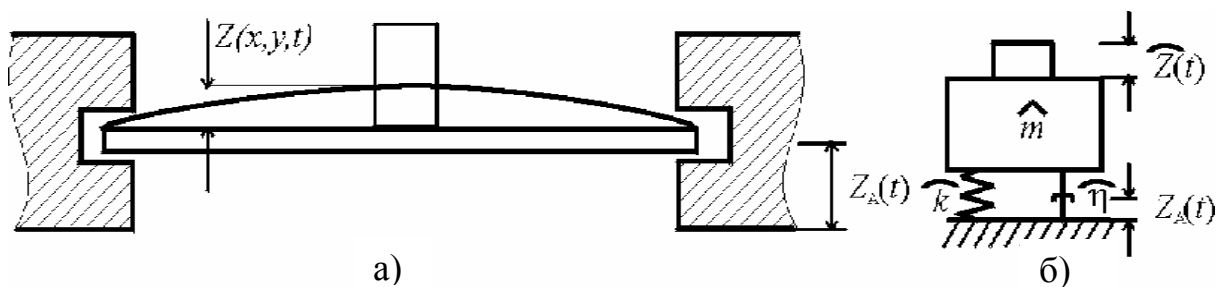


Рис. 8.6. Модель ячейки с дополнительным инерционным элементом

но моделирует колебания ячейки в точке с координатами X, Y , то максимальные кинетические (T_{\max}) и потенциальные (Π_{\max}) энергии колебаний ячейки должны быть равны максимальной кинетической и потенциальной

энергии системы с одной степенью свободы [3], т.е.

$$\Pi_{\text{макс}} = \frac{\widehat{K}\widehat{Z}_{\text{макс}}^2}{2}; \quad T_{\text{макс}} = \frac{\widehat{m}\widehat{Z}_{\text{макс}}^2\omega_0^2}{2}, \quad (8.31)$$

где $\widehat{Z}_{\text{макс}} = Z(x, y, t) / K_{\text{фг}}(x, y)$;

Если на ячейку в точку с координатами (x, y) установить дополнительный инерционный элемент массой $m_г$ (рис. 8.6, а), то кинетическая энергия такой системы опишется формулой

$$T_{\text{смакс}} = T_{\text{пмакс}} + T_{\text{гмакс}} = \frac{\widehat{m}\widehat{Z}_{\text{макс}}^2\omega_{0г}^2}{2} + \frac{m_г\widehat{Z}^2(x, y)\omega_{0г}^2}{2},$$

где $\widehat{Z}_{\text{макс}} = Z(x, y, \omega_{0г}) / k_{\text{фг}}(x, y)$;

$T_{\text{пмакс}}$ – максимальная кинетическая энергия ячейки;

$T_{\text{гмакс}}$ – максимальная кинетическая энергия дополнительного инерционного элемента;

$\omega_{0г}$ – круговая резонансная частота ячейки с дополнительным инерционным элементом.

Если масса дополнительного инерционного элемента $m_г$ много меньше сосредоточенной массы ячейки, то $K_{\text{ф}}(x, y) = K_{\text{фг}}(x, y)$. Потенциальная энергия ячейки при установке точечного дополнительного инерционного элемента остается без изменения. Учитывая, что при резонансе $\Pi_{\text{макс}} = T_{\text{макс}}$ для ячейки без дополнительного инерционного элемента и $\Pi_{\text{смакс}} = T_{\text{смакс}}$ для ячейки с дополнительным инерционным элементом, правомерно записать систему уравнений

$$\begin{cases} \widehat{K} - \widehat{m}\omega^2 = 0, \\ \widehat{K} - \widehat{m}\omega_{0г}^2 = m_г^2 K_{\text{ф}}^2(x, y)\omega_{0г}^2. \end{cases}$$

Решение системы относительно неизвестных \widehat{K} и \widehat{m} дает выражения

$$\widehat{K} = \frac{m_г K_{\text{ф}}^2(x, y) f_0^2 f_{0г}^2 4\pi^2}{f_0^2 f_{0г}^2}; \quad (8.32)$$

$$\widehat{m} = \frac{m_г K_{\text{ф}}^2(x, y) f_{0г}^2}{f_0^2 f_{0г}^2}, \quad (8.33)$$

где f_0 и $f_{0г}$ – собственные частоты колебаний ячейки и ячейки с дополнительным инерционным элементом соответственно.

Собственные частоты колебаний f_0 и $f_{0г}$ находятся либо экспериментально, либо теоретически, например, определяется по программам, реализующим численные методы расчета колебаний пластинчатых конструкций.

Определение сосредоточенной жесткости демпфирующей вставки.
 Физическая модель конструкции, содержащая упругий элемент, установленный между основаниями ячейки и корпуса, может быть представлена в виде системы с одной степенью свободы (рис. 8.7). Потенциальная энергия конструкций с упругим элементом Π_c складывается из потенциальной энергии ячейки Π , рассчитываемой по выражению (8.31), и потенциальной энергии упругого элемента Π_d , рассчитываемой по формуле [3]

$$\Pi_d = \frac{K_d Z^2(x, y, t)}{2}.$$

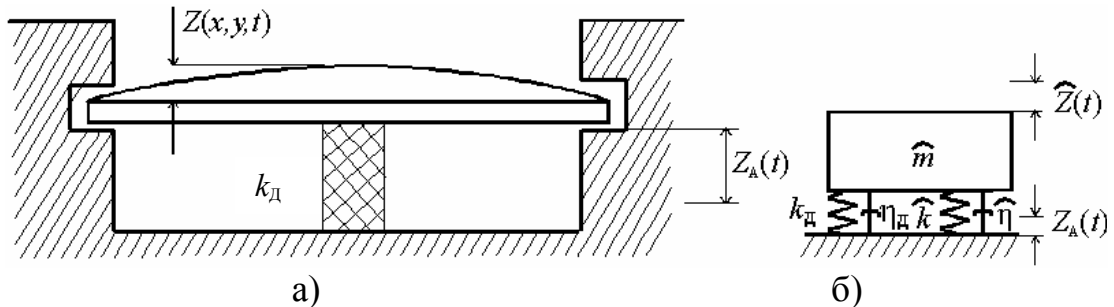


Рис. 8.7. Модель ячейки с дополнительным упругим элементом

После подстановки перемещения ячейки в точку крепления упругого элемента, учитывая (8.24), получим

$$\Pi_c = \Pi + \Pi_d = \frac{\widehat{K} \widehat{Z}^2}{2} + \frac{K_d [\widehat{Z} k_{\phi d}(x, y)]^2}{2} = \frac{[\widehat{K} + \widehat{K}_d k_{\phi d}(x, y)] \widehat{Z}^2}{2}.$$

Аналогично получим выражение для потенциальной энергии системы с одной степенью свободы

$$\Pi_c = \frac{(\widehat{K} + \widehat{K}_d) \widehat{Z}^2}{2},$$

где \widehat{Z} находится из выражения (8.21). Если $K_d \ll \widehat{K}$, то $k_{\phi d}(x, y) \approx k_{\phi}(x, y)$. Условия равенства энергии будет выполняться только в случае, когда

$$\widehat{K}_d = K_d k_{\phi}^2. \quad (8.34)$$

Жесткость упругой вставки находится из геометрических размеров и модуля упругости 1-го рода E материалов вставки по формуле

$$K_d = \frac{ES}{H}, \quad (8.35)$$

где S и H – площадь поперечного сечения вставки и ее высота соответственно.

8.3. КОНСТРУКЦИИ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ С n ЯЧЕЙКАМИ¹⁾

Если в блоке РЭС установлено n ячеек с $n-1$ ДВ, физическую модель можно представить в виде, показанном на рис. 8.8.

Колебания ячеек в этом случае описываются системой n уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{m}\ddot{Z}_1 - \widehat{K}_1(Z_A - \ddot{Z}_1)(1 + j\widehat{\eta}_1) - P_{Д0} + P_{Д1} = 0; \\ \widehat{m}\ddot{Z}_2 - \widehat{K}_2(Z_A - \ddot{Z}_2)(1 + j\widehat{\eta}_2) - P_{Д1} + P_{Д2} = 0; \\ \widehat{m}\ddot{Z}_3 - \widehat{K}_3(Z_A - \ddot{Z}_3)(1 + j\widehat{\eta}_3) - P_{Д2} + P_{Д3} = 0; \\ \dots \\ \widehat{m}\ddot{Z}_i - \widehat{K}_i(Z_A - \ddot{Z}_i)(1 + j\widehat{\eta}_i) - P_{Дi-1} + P_{Дi} = 0; \\ \dots \\ \widehat{m}\ddot{Z}_n - \widehat{K}_n(Z_A - \ddot{Z}_n)(1 + j\widehat{\eta}_n) - P_{Дn-1} + P_{Дn} = 0; \end{array} \right.$$

где n - количество ячеек в блоке;

$i = \overline{1, n}$ - текущий номер ячейки;

Z_i - перемещение инерционных элементов;

Z_A - перемещение основания;

$P_{Дi}$ - силы, действующие со стороны i -й ДВ.

Указанные силы находятся по выражению

$$P_{\ddot{A}i} = K_{\ddot{A}i}(Z_i - Z_{i+1})(1 + j\eta_{\ddot{A}i})$$

при $1 \leq i \leq n-1$, а $P_{Д0} = P_{Дn} = 0$.

Таким образом, существует система уравнений, позволяющая рассчитать колебания n ячеек с ДВ, у которых известны сосредоточенные параметры.

Если блок РЭА содержит двух- и трехъячеечные конструкции с ДВ, то система n уравнений разбивается на несколько подсистем из двух и трех уравнений. Так, подсистема уравнений, описавших колебания трехъячеечной конструкции с ДВ при кинематическом возбуждении, будет выглядеть

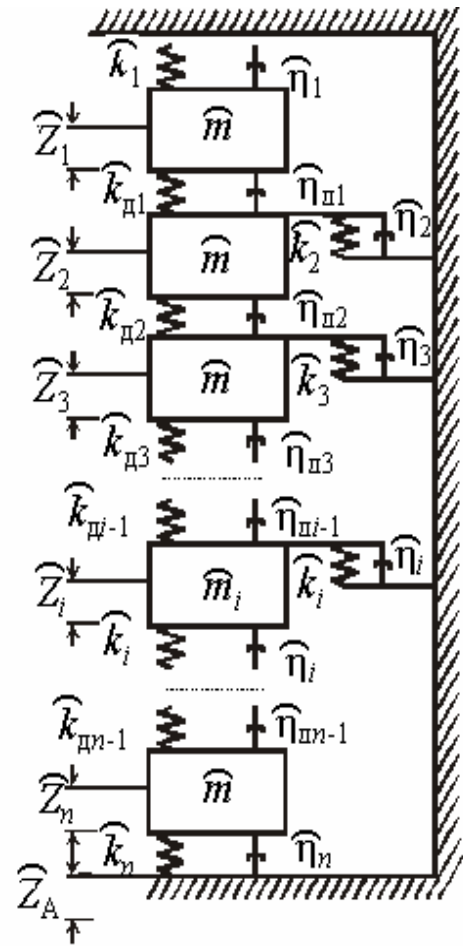


Рис. 8.8. Физическая модель n - ячеечной конструкции

¹⁾ Написан совместно с Долговым Г.Ф.

$$\begin{cases} \widehat{m}\widehat{Z}_1 - \widehat{K}_1(Z_A - \widehat{Z}_1)(1 + j\widehat{\eta}_1) - P_{D0} + P_{D1} = 0; \\ \widehat{m}\widehat{Z}_2 - \widehat{K}_2(Z_A - \widehat{Z}_2)(1 + j\widehat{\eta}_2) - P_{D1} + P_{D2} = 0; \\ \widehat{m}\widehat{Z}_3 - \widehat{K}_3(Z_A - \widehat{Z}_3)(1 + j\widehat{\eta}_3) - P_{D2} + P_{D3} = 0, \end{cases}$$

где

$$P_{D1} = K_{D1}(Z_1 - Z_2)(1 + j\eta_{D1}),$$

$$P_{D2} = K_{D2}(Z_2 - Z_3)(1 + j\eta_{D2}).$$

Так как свободное колебания масс описывается гармоническими функциями $\widehat{Z}_i = \widehat{Z}_i(t) = \widehat{Z}_i e^{j(\omega t - \varphi)}$, получим

$$\begin{cases} -\widehat{m}_1\omega^2\widehat{Z}_1 + \widehat{K}_1\widehat{Z}_1(1 + j\widehat{\eta}_1) - \widehat{K}_1\widehat{Z}_A(1 + j\widehat{\eta}_1) + \widehat{K}_{\bar{A}1}\widehat{Z}_1(1 + j\widehat{\eta}_{\bar{A}1}) - \\ - \widehat{K}_{\bar{A}1}\widehat{Z}_2(1 + j\widehat{\eta}_{\bar{A}1}) = 0, \\ -\widehat{m}_2\omega^2\widehat{Z}_2 + \widehat{K}_2\widehat{Z}_2(1 + j\widehat{\eta}_2) - \widehat{K}_2\widehat{Z}_A(1 + j\widehat{\eta}_2) + \widehat{K}_{\bar{A}1}\widehat{Z}_2(1 + j\widehat{\eta}_{\bar{A}1}) - \\ - \widehat{K}_{\bar{A}1}\widehat{Z}_2(1 + j\widehat{\eta}_{\bar{A}1}) + \widehat{K}_{\bar{A}2}\widehat{Z}_2(1 + j\widehat{\eta}_{\bar{A}2}) - \widehat{K}_{\bar{A}2}\widehat{Z}_3(1 + j\widehat{\eta}_{\bar{A}3}) = 0, \\ -\widehat{m}_3\omega^2\widehat{Z}_3 + \widehat{K}_3\widehat{Z}_3(1 + j\widehat{\eta}_3) - \widehat{K}_3\widehat{Z}_A(1 + j\widehat{\eta}_3) + \widehat{K}_{\bar{A}2}\widehat{Z}_3(1 + j\widehat{\eta}_{\bar{A}2}) - \\ - \widehat{K}_{\bar{A}2}\widehat{Z}_2(1 + j\widehat{\eta}_{\bar{A}2}) = 0. \end{cases}$$

После подстановки в эту систему уравнений выражения $\widehat{K}_d = K_d k_\Phi$

и деления всех членов на $Z_A(t)$ получим

$$\begin{cases} -\widehat{m}_1\omega^2\Phi_1 + \widehat{K}_1\Phi_1(1 + j\eta_1) - \widehat{K}_1(1 + j\eta_1) + K_{D1}k_{\Phi1}^2\Phi_1(1 + j\eta_{D1}) - \\ - K_{D1}k_{\Phi1}^2\Phi_1(1 + j\eta_{D1}) = 0, \\ -\widehat{m}_2\omega^2\Phi_2 + \widehat{K}_2\Phi_2(1 + j\eta_2) - \widehat{K}_2(1 + j\eta_2) - K_{D1}k_{\Phi1}^2\Phi_1(1 + j\eta_{D2}) - \\ - K_{D1}k_{\Phi2}^2\Phi_2(1 + j\eta_{D1}) + K_{D2}k_{\Phi2}^2\Phi_2(1 + j\eta_{D1}) - K_{D1}k_{\Phi3}^2\Phi_3(1 + j\eta_{D2}) = 0, \\ -\widehat{m}_3\omega^2\Phi_3 + \widehat{K}_3\Phi_3(1 + j\eta_3) - \widehat{K}_3(1 + j\eta_3) - K_{D1}k_{\Phi3}^2\Phi_3(1 + j\eta_{D2}) - \\ - K_{D2}k_{\Phi2}^2\Phi_2(1 + j\eta_{D2}) = 0. \end{cases}$$

где $\Phi_i = Z_i(t)/Z_A(t)$ при $i=1, 2, 3$.

Получилась система уравнений с тремя неизвестными Φ_i , которая легко решается на ЭВМ при любом значении частоты ω .

КП ячейки в точке с координатами (x, y) рассчитывается по формуле

$$\mu_i = |\Phi_i k_{TM}(x, y) - k_{TM}(x, y) + 1|.$$

Эта формула преобразует значение функции передачи колебания (которые вибрируют) к абсолютному КП ячейки (относительно неподвижного объекта, например Земли).

Подсистема уравнений, описывающих колебания двухъячеечной конструкции, получается из подсистемы трехъячеечной конструкции при $m_3=K_3=K_{д2}=0$.

$$\begin{cases} -\hat{m}_1\omega^2\Phi_1 + \hat{K}_1\Phi_1(1 + j\hat{\eta}_1) - \hat{K}_1(1 + j\hat{\eta}_1) + K_{\bar{A}1}k_{\Phi1}^2\Phi_1(1 + j\hat{\eta}_{\bar{A}1}) - \\ - K_{\bar{A}1}k_{\Phi2}^2\Phi_1(1 + j\hat{\eta}_{\bar{A}1}) = 0, \\ -\hat{m}_2\omega^2\Phi_2 + \hat{K}_2\Phi_2(1 + j\hat{\eta}_2) - \hat{K}_2(1 + j\hat{\eta}_2) + K_{\bar{A}1}k_{\Phi2}^2\Phi_2(1 + j\hat{\eta}_{\bar{A}1}) - \\ - K_{\bar{A}1}k_{\Phi1}^2\Phi_2(1 + j\hat{\eta}_{\bar{A}1}) = 0. \end{cases}$$

Если $k_{\Phi1}=k_{\Phi2}=1$, а $\eta_1 = \eta_2 = 0$, то получится подсистема уравнений

$$\begin{cases} \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_A} [-\hat{m}_1\omega^2 + \hat{K}_1 + K_{\bar{A}}(1 + j\eta_{\bar{A}})] + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_A} [-K_{\bar{A}}(1 + j\eta_{\bar{A}})] = \hat{K}_1, \\ \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_A} [-K_{\bar{A}}(1 + j\eta_{\bar{A}})] + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_A} [-m_2\omega^2 + \hat{K}_2 + K_{\bar{A}}(1 + j\eta_{\bar{A}})] = \hat{K}_2, \end{cases}$$

аналогичная (8.4).

Разработанная ММ блока электронного средства с ДВ учитывает форму, потери энергии и рассчитывает амплитуды колебаний ячеек в точке приведения распределенных параметров к сосредоточенным.

8.4. ДИНАМИЧЕСКИЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ¹⁾

Теория динамического гасителя колебаний (ДГК) без демпфирования рассмотрена в гл. 2 (с. 47). Было показано, что такой гаситель устраняет резонансные колебания только на частоте, совпадающей с собственной частотой колебаний ДГК. Одновременно могут возникнуть резонансные колебания на двух других частотах. Это делает неприемлемым применение ДГК, когда требуется устранить резонансные колебания в широком диапазоне частот. Там же (см. рис. 2.14) показано, что применение ДГК с демпфированием позволяет значительно уменьшить амплитуды резонансных колебаний и во многих случаях довести их до уровня, не превышающего допустимый. В этом случае ДГК используется уже как демпфер.

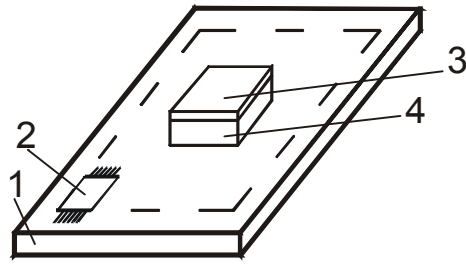


Рис. 8.9. Ячейка с ДГК с демпфированием:
1 – печатная плата; 2 – ЭРЭ; 3,4 – ДГК;
3 – инерционный груз, 4 – вибропоглощающий полимер

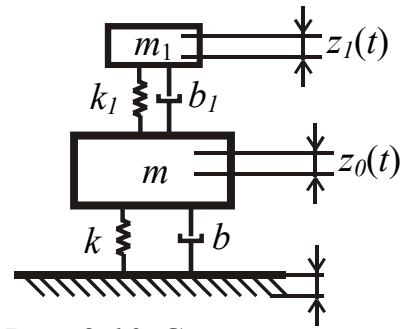


Рис. 8.10. Система с двумя степенями свободы

Пример практической реализации такого ДГК с демпфированием показан на рис. 8.9. В качестве инерционного груза используется обычно стальная пластина, а в качестве упругодемпфирующего элемента - вибропоглощающий полимер. Площадь ДГК с демпфированием приблизительно равна площади, занимаемой одной микросхемой. При анализе динамического поведения такой системы (ячейка – ДГК) целесообразно представить ячейку в виде сосредоточенной массы, установленной на пружине, и расчетную модель конструкции (рис.8.9.) можно представить в виде системы с двумя степенями свободы, как показано на рис. 8.10. В этой модели для упрощения анализа демпфированием в ячейке пренебрегаем.

ДГК с демпфированием при кинематическом гармоническом воздействии. Для системы, показанной на рис. 8.10, уравнения движения можно представить в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + b(\dot{z} - \dot{z}_0) + k(z - z_0) - b_1(\dot{z}_1 - \dot{z}) - k_1(z_1 - z) = 0; \\ m_1\ddot{z}_1 + b_1(\dot{z}_1 - \dot{z}) + k_1(z_1 - z) = 0, \end{cases}$$

где k, b – коэффициенты жесткости и сопротивления соответственно.

Будем считать, что колебания системы возбуждаются кинематически, то есть за счет колебаний основания по закону $z_0 = z(t) = z_0 e^{i\omega t}$. Тогда получим

$$z = z_0 e^{(i\omega t - \varphi_1)}; \quad z_1 = z_0 e^{(i\omega t - \varphi_2)};$$

Подставим эти решения в уравнения (8.30)-(8.31), запишем:

¹⁾ Написан совместно с Акаемовым Д.Г.

$$\begin{cases} -m\omega^2 z + b(i\omega z - i\omega z_0) + kz - kz_0 - b_1(i\omega z_1 - i\omega z) - k_1 z_1 + k_1 z = 0; \\ -m_1 \omega^2 z_1 + b_1(i\omega z_1 - i\omega z) + k_1 z_1 - k_1 z = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} ((-m\omega^2 + k + k_1) + i\omega(b + b_1))z - (k_1 + i\omega b_1)z_1 - (k + i\omega b)z_0 = 0; \\ (k_1 + i\omega b_1)z - (m_1 \omega^2 - k_1 + i\omega b_1)z_1 = 0. \end{cases}$$

Разделим эти уравнения на $k = m\omega_0^2$ и введем обозначения

$$\frac{k + k_1 - m\omega^2}{m\omega_0^2} = 1 + Mv^2 - \Omega^2;$$

$$\frac{k_1 + i\omega b_1}{m\omega_0^2} = Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1;$$

$$i \frac{\omega(b + b_1)}{m\omega_0^2} = i \frac{\omega}{\omega_0} \frac{b + b_1}{m\omega_0} = i\Omega(\eta + Mv\eta_1),$$

$$\frac{m_1 \omega^2 + k_1 + i\omega b_1}{m\omega_0^2} = M\Omega^2 + Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1;$$

$$\frac{k + i\omega b}{m\omega_0^2} = 1 + i \frac{\omega b}{m\omega_0^2} = 1 + i\Omega \frac{b}{m\omega_0} =$$

$$= 1 + i\Omega \frac{\omega_0 b}{m\omega_0^2} = 1 + i\Omega \eta,$$

где

$$v = \frac{\omega_1}{\omega_0}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad M = \frac{m_1}{m}; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\eta = \frac{b\omega_0}{k}; \quad \eta_1 = \frac{b_1\omega_1}{k_1};$$

$$\begin{cases} ((1+Mv^2 - \Omega^2) + i\Omega(\eta + Mv\eta_1))z - (Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1)z_1 - (1+i\Omega\eta)z_0 = 0, \\ (Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1)z - (M\Omega^2 - Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1)z_1 = 0. \end{cases}$$

Разделим эти уравнения на z_0 и получим

$$\begin{cases} (1+Mv - \Omega^2 + i(\eta + Mv\eta_1)\Omega)\mu - (Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1)\mu_1 = 1, \\ (Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1)\mu - (Mv^2 - M\Omega^2 + i\Omega Mv\eta_1)\mu_1 = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение относительно μ_1

$$\mu_1 = \frac{Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1}{Mv^2 - M\Omega^2 + i\Omega Mv\eta_1} \mu$$

и, подставив в систему уравнений, получим

$$\begin{aligned} & (1+Mv - \Omega^2 + i(\eta + Mv\eta_1)\Omega)\mu - \\ & - (Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1) \frac{Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1}{Mv^2 - M\Omega^2 + i\Omega Mv\eta_1} \mu = 1, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \mu \left[1 + Mv - \Omega^2 + i(\eta + Mv\eta_1)\Omega - \right. \\ & \left. - \frac{(Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1)(Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1)}{Mv^2 - M\Omega^2 + i\Omega Mv\eta_1} \right] = 1 \\ \bar{\mu} = & \frac{(v^2 - \Omega^2) + i\eta_1 v \Omega}{(1 + Mv^2 - \Omega^2 + i(\eta + Mv\eta_1)\Omega) [(v^2 - \Omega^2) + i\eta_1 v \Omega] -} \dots \\ & \dots \frac{- (Mv^2 + i\Omega Mv\eta_1)(v^2 + i\eta_1 v \Omega)}{} \end{aligned}$$

Выделим действительную и мнимую части в знаменателе, учитывая, что основное рассеяние энергии будет в демпфере гасителя, т.е. $\eta \ll \eta_1$, и можно считать, что $\eta = 0$.

Знаменатель в выражении для $\bar{\mu}$ будем преобразовывать частями. Перемножим комплексные числа $(A \cdot B$ и $C \cdot D)$, вычтем произведения друг из друга $(A \cdot B - C \cdot D)$: Получим

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= [(1 + Mv^2 - \Omega^2) + i(\eta + Mv\eta_1)\Omega][(v^2 - \Omega^2) + i\eta_1 v\Omega] = \\
&= ((1 + Mv^2 - \Omega^2)(v^2 - \Omega^2) - \Omega^2 \eta_1 v(\eta + Mv\eta_1)) + \\
&+ i((1 + Mv^2 - \Omega^2)v\eta_1\Omega + \Omega(v^2 - \Omega^2)(\eta + Mv\eta_1)) = \\
&= ((1 + Mv^2 - \Omega^2)(v^2 - \Omega^2) - Mv^2\eta_1^2\Omega^2) + \\
&+ i(v\eta_1\Omega - v\eta_1\Omega^3 + 2Mv^3\Omega\eta_1 - Mv\eta_1\Omega^3); \\
C \cdot D &= (Mv^2 + iM\eta_1\Omega v)(v^2 + i\eta_1 v\Omega) = \\
&= (Mv^4 - M\eta_1^2 v^2 \Omega^2) + i2Mv^3\eta_1\Omega.
\end{aligned}$$

Решая $A \cdot B - C \cdot D$, получим:

$$\begin{aligned}
&((1 + Mv^2 - \Omega^2)(v^2 - \Omega^2) - M\eta_1^2 v^2 \Omega^2 - Mv^4 + M\eta_1^2 v^2 \Omega^2) + \\
&+ i(\eta_1 v\Omega - \eta_1 v\Omega^3 + 2M\eta_1 v^3 \Omega - M\eta_1 v\Omega^3 - 2M\eta_1 v^3 \Omega) = \\
&= (\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - v^2) - Mv^2 \Omega^2 + i(-\eta_1 v\Omega(\Omega^2 - 1 + M\Omega^2))
\end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\mu = \sqrt{\frac{(v^2 - \Omega^2) + (\Omega v \eta_1)^2}{(\Omega v \eta_1)^2 ((\Omega^2 - 1) + M\Omega^2)^2 + (Mv^2 \Omega^2 + (1 - \Omega^2)(\Omega^2 - v^2))^2}} \quad (8.36)$$

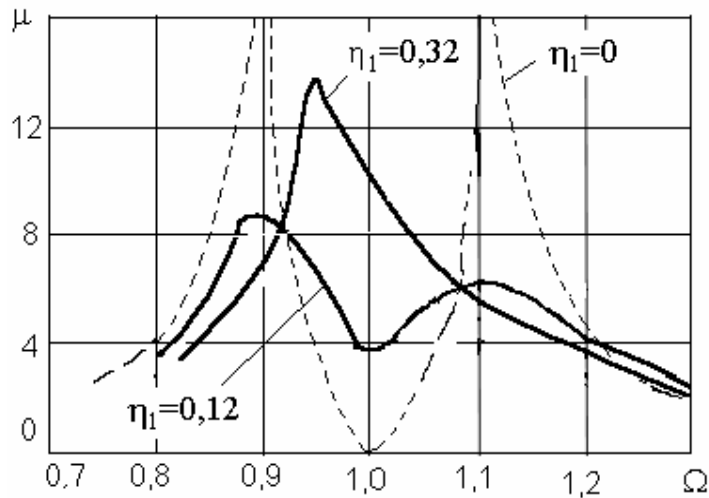


Рис. 8.11. Резонансные кривые системы

На рис. 8.11 приведены графики зависимости μ от соотношения частот $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ при различном демпфировании $\eta_1 = \frac{b_1 \omega_0}{k_1}$. Принималось, что $v=1$, $M=0,05$.

Видно, что при $\eta_1=0,12$ АРК существенно уменьшается. Очевидно, также, что можно найти такое значение η_1 , при котором обе резонансные амплитуды будут одинаковы и минимальны (оптимальная настройка).

Применение динамического гасителя колебаний для защиты от случайных воздействий. Радиоэлектронные средства в процессе эксплуатации подвергаются различным возмущающим вибрационным воздействиям, носящим подчас нерегулярный характер. В качестве примера таких воздействий можно отметить качку корабля, неровности дороги, шум реактивных двигателей и т.п.

Задача об эффективности динамического гасителя колебаний при случайных воздействиях имеет важные практические приложения. В частности, применение динамических гасителей может оказаться целесообразным, если кинематическая виброизоляция приборов, ячеек и других устройств, при случайном возбуждении основания недостаточно эффективна или вообще невыполнима.

Для исследования явления гашения случайных колебаний линейной механической системы динамическим гасителем (см. рис. 8.10) рассмотрим уравнение движения системы:

$$\begin{cases} m\ddot{z} + b(\dot{z} - \dot{z}_0) + k(z - z_0) - b_1(\dot{z}_1 - \dot{z}) - k_1(z_1 - z) = f(t) \\ m_1\ddot{z}_1 + b_1(\dot{z}_1 - \dot{z}) + k_1(z_1 - z) = 0, \end{cases} \quad (8.37)$$

где m, m_1 – массы основной системы и гасителя соответственно;

b, b_1 – коэффициенты сопротивления подвески основной системы и гасителя;

k, k_1 – жесткость подвески основной системы и гасителя;

$f(t)$ – стационарная нормальная случайная функция внешнего воздействия.

Случайные колебания системы характеризует дисперсия амплитуды колебаний основной массы. Из теории случайных колебаний [2, 13] известно, что дисперсию амплитуд колебаний можно определить из формулы

$$\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} |\Phi(i\omega)|^2 G_f(\omega) d\omega, \quad (8.38)$$

где σ_x^2 – дисперсия амплитуды колебаний основной массы;

$\Phi(i\omega)$ – передаточная функция для основной массы;

$G(\omega)$ – спектральная плотность случайного воздействия $f(t)$;

ω - круговая частота.

Передаточную функцию для основной массы найдем, решая систему уравнений (8.37) следующим образом:

записывая уравнения системы в операторном виде

$$\begin{aligned} (mp^2 + bp + k)z + (b_1p + k_1)(z - z_1) &= f(t), \\ m_1p^2z_1 + (b_1p + k_1)(z_1 - z) &= 0, \end{aligned} \quad (8.39)$$

где - $p \equiv \frac{d}{dt}$.

Разрешая алгебраически эту систему уравнений относительно x_1 , получим операторную связь между действующими возмущением и перемещениями защищаемого объекта:

$$x(t) = \frac{m_1p^2 + b_1p + k_1}{(mp^2 + bp + k)(m_1p^2 + b_1p + k_1) + m_1p^2(b_1p + k_1)} f(t). \quad (8.40)$$

С помощью полученного выражения можно определить передаточную функцию для основной массы $\Phi(i\omega)$, необходимую для определения дисперсии σ_x^2 процесса $x(t)$ в соответствии с (8.38). Другой сомножитель подынтегрального выражения в этой формуле $G(\omega)$ – спектральная плотность случайного воздействия $f(t)$ - определяется используемой моделью случайного процесса. Так, для воздействия типа белый шум $G(\omega) = S = const$.

Таким образом, выражение примет вид

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty \frac{(k_1 + b_1i\omega - m_1\omega^2)^2 S d\omega}{\left| (k + b i\omega - m\omega^2)(k + b i\omega - m_1\omega^2) - m_1\omega^2(b_1i\omega + k_1) \right|^2}. \quad (8.41)$$

Решение данного интеграла можно найти, сведя несобственный интеграл от дробно-рациональной функции к табличному значению.

Полезно рассмотреть несколько частных случаев решения выражения (8.41).

Так при отсутствии трения в гасителе ($b_1=0$), выражение для дисперсии основной системы примет вид: $\sigma_x^2 = \frac{S}{2bk}$.

Аналогичное значение σ_x^2 получается и в отсутствии динамического

гасителя. Следовательно, чисто упругое присоединение динамического гасителя не изменяет результирующий характер широкополосных случайных колебаний объекта.

Теперь рассмотрим возмущающее воздействие типа белого шума на систему, защищенную динамическим гасителем с демпфированием. Для упрощения вычислений можно не рассматривать упругую составляющую динамического гасителя колебаний ($k_1=0$) и пренебречь рассеянием энергии в защищаемой системе (b) малым по сравнению с гасителем. Учитывая, описанные выше замечания, из (8.37) находим

$$\sigma_x^2 = \frac{s b_1^2 (m_1 + m) + k m_1^2}{2 b_1 k^2 m_1^2}. \quad (8.42)$$

Дисперсия амплитуды колебаний защищаемой системы, определяемая выражением (8.42), при значениях демпфирования гасителя $b_1=0$ и $b_1=\infty$ стремится к бесконечности. Следовательно, оптимизация динамического гасителя может быть осуществлена путем проведения исследования (8.38) на экстремум.

В результате исследования на экстремум легко получить следующее выражение, определяющее настройку гасителя:

$$\frac{b_1^2}{4k m} = \frac{m_1/m}{4 \left(1 + m_1/m \right)}.$$

Минимальную величину σ_x^2 , которая при этом получается, можно определить следующим образом:

$$\frac{\sigma_x^2}{S/k^2 m_1} = 1 + \frac{m}{m_1}.$$

На рис. 8.12 представлена примерная зависимость дисперсии амплитуды колебаний защищаемой системы от величины демпфирования динамического гасителя для различных значений отношения массы гасителя и массы основной системы.

Из рис. 8.12 видно, что при увеличении массы груза гасителя дисперсия амплитуды колебаний основания уменьшается, при этом оптимальное значение коэффициента демпфирования $b=0,25 \dots 0,55$.

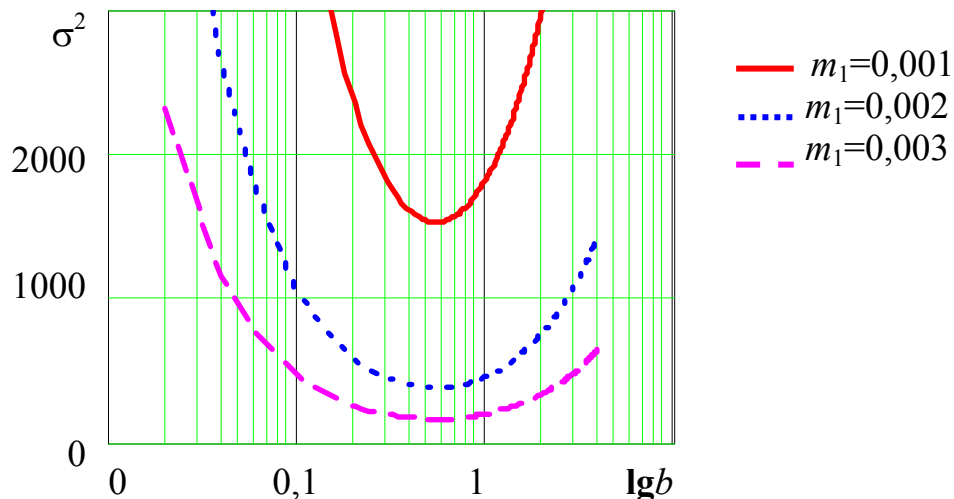


Рис. 8.12. Зависимость дисперсии отклонений главной массы от коэффициента демпфирования для различных значений массы груза

Контрольные вопросы

1. В чем заключается принцип работы ячеек с ДВ?
2. Нарисуйте АЧХ ячеек без ДВ и с ДВ.
3. Приведите дискретные физические модели ячеек РЭС с ДВ:
 - в общем случае;
 - для расчета СЧК;
 - для расчета амплитуд резонансных колебаний.
4. Напишите дифференциальные уравнения собственных частот колебаний (СЧК) ячеек РЭА с ДВ.
5. Выведите формулу для расчета СЧК ячеек РЭА с ДВ.
6. Напишите дифференциальные уравнения движения ячеек РЭА с ДВ для случая кинематического возбуждения.
7. Выведите формулы для расчета коэффициентов передачи ячеек РЭС с ДВ.
8. Получите формулу для сосредоточенных массы и жесткости ячеек РЭС.
9. В чем заключается разница между классическим динамическим гасителем и ДГК с демпфированием?
10. Напишите дифференциальные уравнения СЧК ячейки РЭА с высокодемпфированным ДГК.
11. Выведите формулу коэффициента передачи ячейки РЭА с установленным на ней ДГК при гармоническом воздействии.
12. Опишите подход, используемый при определении дисперсии амплитуды отклонений ячейки.

Глава 9

Основы расчета систем виброизоляции

9.1. ПОРЯДОК РАСЧЕТА СИСТЕМ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ [33]

Конструирование системы виброизоляции РЭА обычно начинают с выбора типа виброизоляторов и схемы их расположения. При выборе виброизоляторов учитывают допустимые нагрузки и предельные значения параметров, характеризующих условия эксплуатации. Принципиальная схема системы виброизоляции зависит в основном от особенностей расположения аппаратуры на носителе и условий динамического воздействия (некоторые рекомендации по выбору схем виброизоляции даны ниже). После того как тип виброизоляторов и схема системы виброизоляции выбраны, переходят к расчету статических нагрузок на виброизоляторы, а также параметров собственных и вынужденных колебаний виброизолируемой аппаратуры. На основании данных расчета выбирают типоразмер виброизоляторов, которые устанавливают в соответствующих точках системы виброизоляции. При необходимости по результатам расчета можно уточнять схему расположения виброизоляторов.

В результате вибрационного расчета должны быть известны частоты собственных колебаний виброизолируемой аппаратуры, амплитуды перемещения или ускорения вынужденных колебаний, а также эффективность виброизоляции. При расчете на ударное воздействие надо оценить поведение системы в момент удара, будет ли виброизоляция ослаблять или, наоборот, усиливать удар и в какой степени.

При расчете реальная конструкция виброизолируемой аппаратуры должна быть заменена эквивалентной системой с одной или несколькими степенями свободы в зависимости от сложности схемы виброизоляции и требуемой точности расчета.

Чтобы выбрать и рассчитать систему виброизоляции, должны быть известны следующие исходные данные.

1. Параметры внешних динамических воздействий:
 - диапазон частот возбуждающих колебаний;
 - амплитуды перемещения или ускорения и направления действия

возбуждающих колебаний;

- продолжительность действия возбуждающих колебаний;
- величины и направления действия линейных ускорений, а также продолжительность их действия;
- максимальные ударные ускорения и длительность ударных импульсов, как одиночных, так и многократных;
- число многократных ударов;
- высота возможного падения при транспортировании.

2. Параметры внешней окружающей среды:

- интервал рабочих температур;
- максимальная относительная влажность;
- атмосферное давление;
- сроки эксплуатации и хранения виброизоляторов в составе аппаратуры;
- условия транспортирования виброизолированной аппаратуры.

3. Кинетические параметры и габариты виброизолируемой аппаратуры:

- масса и положение центра тяжести аппаратуры;
- осевые и центробежные моменты инерции;
- основные габаритные и присоединительные размеры.

4. Допустимые величины динамических воздействий на виброизолируемую аппаратуру в заданном диапазоне частот:

- амплитуды перемещения и ускорения;
- коэффициенты динамичности в заданном диапазоне частот.

5. Статические и динамические силовые характеристики виброизоляторов.

На практике не все из перечисленных параметров бывают необходимы или могут быть известны. Число их определяется в зависимости от условий конкретной задачи.

9.2. СХЕМЫ СИСТЕМ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ И ТИПЫ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ [33]

Схемы систем виброизоляции. Схемы расположения виброизоляторов относительно центра тяжести аппаратуры могут быть самые разнообразные. В зависимости от конкретных условий монтажа конструктор выбирает ту или иную схему с учетом эксплуатационных режимов и зазоров между аппаратурой и смежными конструкциями носителя.

Каждая схема (рис. 9.1) имеет свои преимущества и недостатки.

Схема нижнего монтажа (рис. 9.1,а) – наиболее простая схема, и часто ее выбирают по привычке без учета недостатков. Главный из них заключается в том, что при боковых нагрузках для исключения соударения необходимо предусматривать достаточный зазор между виброизолируемым блоком и смежными конструкциями. Такие же последствия вызывает несовпадение центра жесткости системы виброизоляции с центром тяжести аппаратуры. Поэтому схема (рис. 9.1,а) применяется главным образом в обычной самолетной аппаратуре.

Схему, в которой виброизоляторы расположены в плоскости, проходящей через центр тяжести (рис.9.1,б), целесообразно использовать в условиях пространственного нагружения на реактивных самолетах и ракетах. Такая схема позволяет уменьшить колебания по горизонтальным осям, развязывая колебания в соответствии с осями симметрии. Наиболее выгодное расположение виброизоляторов такое, при котором их расстояние от центра тяжести блока равно радиусу инерции. Однако не всегда удастся выдержать расстояния между сторонами блока и его центром тяжести, равным радиусу инерции, так как это связано с увеличением габаритных размеров.

Виброизоляторы не обязательно располагать в горизонтальной плоскости, проходящей через центр тяжести аппаратуры. Эффективность их не ухудшится при установке на наклонной плоскости, проходящей через центр тяжести, на расстояниях, равных радиусу инерции (рис. 9.1,в). Для такого монтажа требуется несколько больше места, чем для аппаратуры таких же размеров, установленной по схеме нижнего монтажа, но это компенсируется тем, что благодаря большей устойчивости системы виброизоляции требуется меньший зазор между виброизолируемым блоком РЭА и окружающими его конструкциями. Если установить аппаратуру таким образом не удастся, то в системе виброизоляции будут возбуждаться вращательные колебания с частотами, приблизительно равными частотам поступательных колебаний.

Монтаж виброизоляторов в двух горизонтальных плоскостях (рис. 9.1,г) обычно используется при защите блоков РЭА, у которых отношение высоты к ширине больше двух. Установка виброизоляторов в верхней плоскости обеспечивает дополнительные точки опоры. Если виброизоляторы расположены несимметрично относительно центра тяжести, то все режимы собственных колебаний будут связаны.

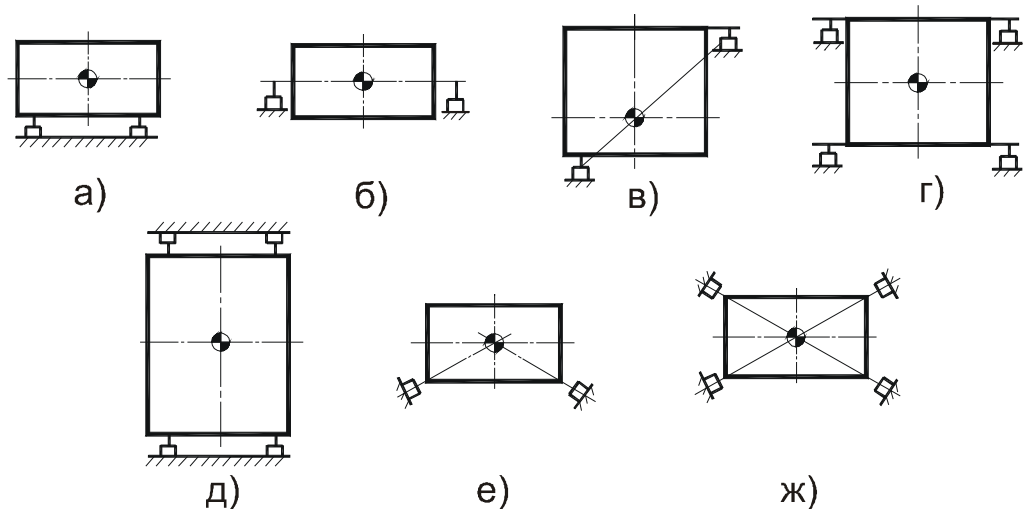


Рис. 9.1. Схемы монтажа виброизоляторов:

а – нижний монтаж; б – монтаж в плоскости центра тяжести; в – монтаж в диагональной плоскости, проходящей через центр тяжести; г – монтаж в двух горизонтальных плоскостях; д – двусторонний монтаж; е – монтаж под углом, односторонний; ж – монтаж под углом, двусторонний.

Схема монтажа, в которой виброизоляторы расположены навстречу один другому, называется двухсторонней (рис. 9.1,д). Она обеспечивает защиту от воздействия внешних сил, действующих во всех направлениях. Виброизоляторы предварительно нагружены так, что каждому расположенному в нижней части системы соответствует виброизолятор в верхней части. Предварительное поджатие делает систему более жесткой, сдвигает ее собственную частоту в область более высоких частот.

Схема монтажа виброизоляторов под углом к осям симметрии блока (рис. 9.1,е) является наиболее пригодна для изоляции пространственных вибраций, но вместе с тем она и наиболее сложная, так как при небольшом нарушении симметрии в системе возникают все шесть связанных видов собственных колебаний.

Если же центр жесткости совпадает с центром тяжести блока, то все действующие силы будут уравновешены, вращательные колебания будут невелики. Этому условию удовлетворяет схема монтажа виброизоляторов, расположенных под углом внизу и сверху блока (рис. 9.1,ж). В такой схеме все внешние силы уравновешиваются в направлении центра тяжести, что снижает влияние вращательных колебаний. Поскольку характеристики системы виброизоляции во всех положениях блока одинаковы, то характер движения объекта установки может быть любым.

Типы виброизоляторов. При выборе типа виброизоляторов учитываются следующие факторы:

климатические условия, определяющие в основном вид упругого элемента;

масса виброизолируемого аппарата, определяющая диапазон характеристик виброизолятора по грузоподъемности;

заданный срок службы, определяющий характеристики виброизолятора по надежности;

направленность воздействующих нагрузок, определяющую характер нагружения виброизоляторов;

эксплуатационный диапазон возбуждающих частот, определяющий группу виброизолятора по собственным частотам.

В настоящее время существует большое количество различных типов виброизоляторов, которые отличаются как по виду упругого элемента, так и по конструктивному оформлению. Это является следствием широкого диапазона эксплуатационных условий и допустимых уровней перегрузки элементов аппаратуры. В этих условиях создание универсальных защитных устройств, пригодных для всех возможных случаев, становится чрезвычайно сложным. В данном случае конструктор сталкивается с задачей выбора виброизоляторов, наилучшим образом удовлетворяющих техническим требованиям, которые разделяются на три группы: динамические, климатические и конструктивные.

Динамические – обеспечивают надежную виброизоляцию аппарата по всем координатным осям в заданном диапазоне частот, а также защиту от ударов. Для уменьшения амплитуды колебаний в случае возникновения резонансных режимов и быстрого гашения колебаний при толчках виброизоляторы должны иметь достаточное демпфирование. Для перекрытия всего диапазона рабочих частот виброизоляторы выполняются с различными частотными характеристиками. Частота собственных колебаний нагруженного номинальной нагрузкой виброизолятора¹⁾ (вдоль основной оси) составляет 3 – 4 Гц для низкочастотных, 8 – 10 Гц для среднечастотных и 20 – 25 Гц для высокочастотных виброизоляторов.

Климатические требования – сохранить работоспособность в различных эксплуатационных условиях. Виброизоляторы должны обеспечивать защиту аппаратуры при температуре окружающей среды от +60 до –60°С,

1) Под номинальной нагрузкой виброизолятора подразумевается такая нагрузка, при которой статическая деформация упругого элемента находится в пределах рекомендуемых значений. Эта нагрузка является одной из основных характеристик виброизолятора [5].

относительной влажности до 98%, атмосферном давлении 5 ГПа, при действии морского тумана, инея, росы, пыли, плесневых грибов и паров горюче-смазочных материалов.

Конструктивные требования – нормально работать при любой схеме нагружения, быть удобными в монтаже и креплении оборудования и удовлетворять условиям взаимозаменяемости, иметь малые массу и габаритные размеры, быть простыми в изготовлении. Они должны выдерживать воздействия вибрации, ударов и линейных нагрузок в соответствии с техническими условиями и иметь срок непрерывной работы не менее 2000 ч [5].

Конструкции виброизоляторов обязательно включают упругий элемент (или упругие элементы) определенной жесткости, обеспечивающий выполнение условия $\nu > \sqrt{2}$, и детали внешнего оформления, необходимые для крепления виброизолятора. В конструкцию виброизолятора входят детали или узлы, обеспечивающие демпфирование.

Упругий элемент выполняется обычно из резины или другого эластичного материала либо из пружинной стали или бериллиевой бронзы. Форма упругого элемента из резины может быть различной, а металлические упругие элементы выполняются в виде пружины (цилиндрической, конической, экспоненциальной), лепестков, троса, металлической структуры типа плетенки (путанки). Упругие элементы из резины работают на все виды деформаций, а металлические – на изгиб (лепестковые виброизоляторы), растяжение–сжатие (пружинные виброизоляторы), изгиб и кручение (тросовые виброизоляторы).

Рассеяние колебательной энергии (демпфирование) в виброизоляторах происходит за счет «внутреннего трения» в материале при деформации упругого элемента или специальных устройств, обеспечивающих воздушное (вязкое) или фрикционное (сухое) трение. При использовании демпфирующих устройств рассеяние колебательной энергии значительно больше, но конструкция прибора в целом при этом сложнее. Перспективны виброизоляторы, использующие в качестве упругого элемента полимеры с большим «внутренним трением».

В зависимости от типа упругого элемента и способа демпфирования виброизоляторы можно разделить на следующие четыре группы: резинометаллические; пружинные с воздушным демпфированием; пружинные с фрикционным демпфированием; цельнометаллические со структурным демпфированием.

К первой группе относятся виброизоляторы типа АП, АЧ, АР, АН, АКСС, ко второй – АД, к третьей – АФД, АПН, АПНМ, к четвертой – ДК, АРМ, АЦП, характеристики которых подробно описаны в [5, 33].

В качестве примера ниже рассмотрены виброизоляторы, относящиеся к каждой из перечисленных групп.

Отметим, что виброизоляторы с упругим элементом из резины, как правило, конструктивно более просты, могут работать при всех видах деформаций, но обладают меньшей прочностью, подвержены старению, их характеристики существенно зависят от температуры. Виброизоляторы с упругим пружинным элементом имеют сложную конструкцию, более прочны и долговечны, обладают большей стабильностью при действии климатических факторов. Дадим краткую характеристику основных групп виброизоляторов.

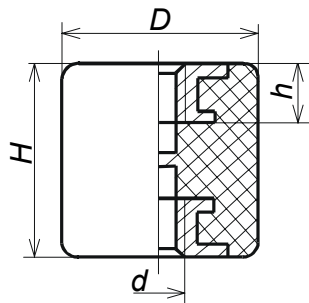
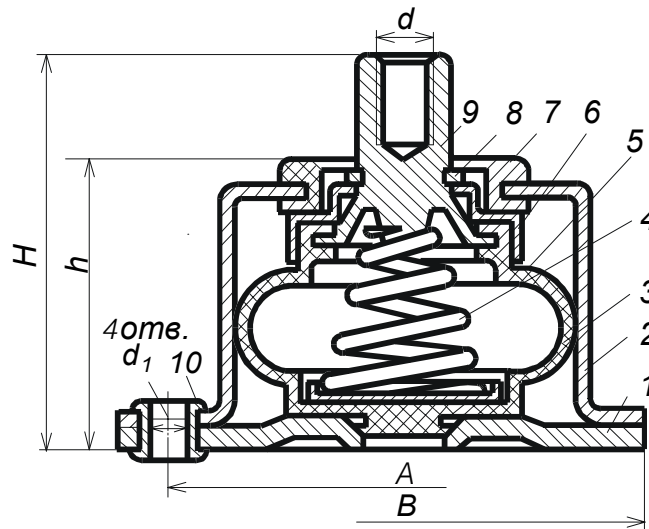


Рис. 9.2.
Виброизолятор АН

Рис. 9.3.
Виброизолятор АД:
1-основание; 2-корпус;
3-подкладка;
4-пружина; 5-баллон;
6-крышка; 7-резиновое
кольцо; 8-стопорное
кольцо; 9-бобышка;
10-пистон



В и б р о и з о л я т о р ы АН («ножка») (рис. 9.2) работают на изгиб и на сжатие. Номинальная нагрузка на сжатие от 60 до 500 Н, на изгиб – вчетверо меньше. Собственная частота номинально нагруженного виброизолятора: в осевом направлении 11 ... 13 Гц, в поперечном 6 ... 8 Гц. Диапазон рабочих температур –45 ... +80 °С. Виброзащита начинается с частоты 15 Гц при комнатной температуре и с частоты 40 Гц при температуре 10 °С и амплитуде вибрации 0,5 м. Основной недостаток виброизоляторов – их низкая вибропрочность.

В и б р о и з о л я т о р АД (рис. 9.3) имеет в качестве упругого элемента пружину экспоненциального профиля, обеспечивающую равночастотность¹⁾. Для демпфирования колебаний используется резиновый баллончик, скрепленный с фланцем, имеющим калиброванное отверстие. При деформации пружины воздух проходит через это отверстие, создавая сопротивление, примерно пропорциональное скорости движения. При низких температурах и малом давлении воздуха демпфирование осуществляется за счет сопротивления резины изгибу.

Виброизоляторы АД предназначены для нагрузок, от 0,3 до 15 кг, действующих вдоль оси пружины. Собственная частота нагруженного номинальной нагрузкой виброизолятора 8 – 10 Гц. Виброзащита при нормальных условиях начинается с частоты 12 Гц при амплитуде вибрации до 0,5 – 1,5 мм (в зависимости от номера серии виброизолятора). Интервал

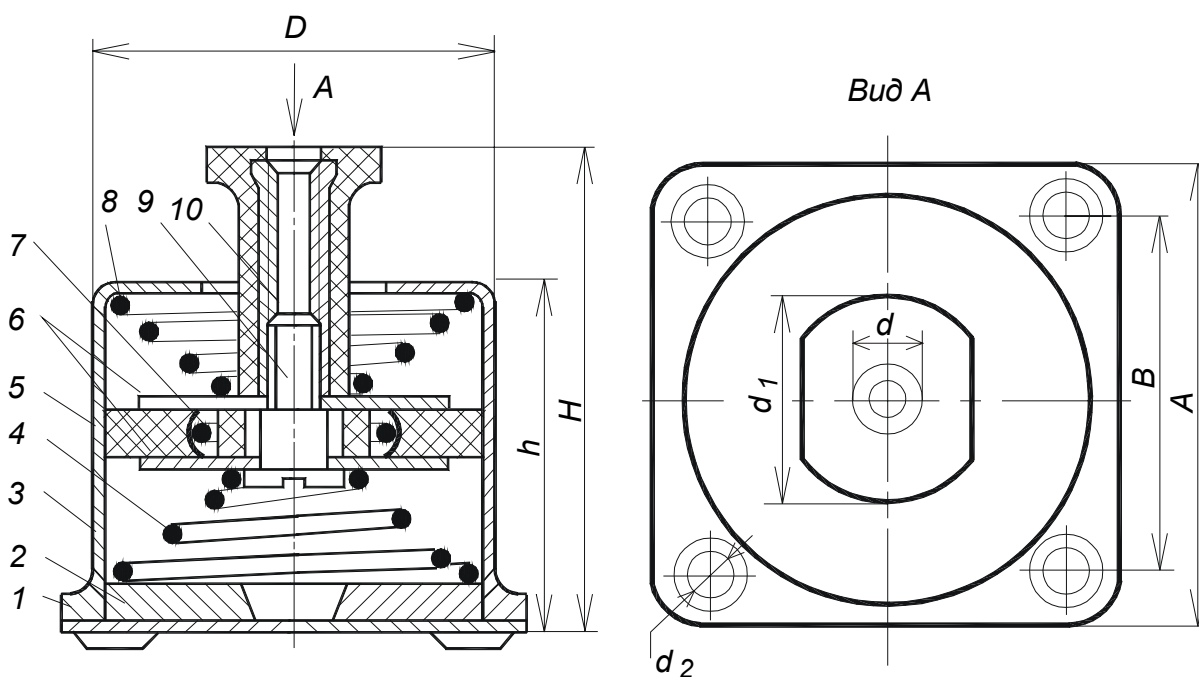


Рис. 9.4. Виброизолятор АПН:

1 – основание; 2 – ограничитель; 3 – корпус; 4, 8 – пружины; 5 – фрикционные сухари; 6 – шайбы; 7 – распорное кольцо; 9 – винт; 10 – втулка

рабочих температур $-60 \dots +70 \text{ }^\circ\text{C}$. Коэффициент демпфирования $\beta=0,06-0,12$ при $\beta=20^\circ\text{C}$ и достигает 0,5 при $t= -60 \text{ }^\circ\text{C}$. Виброизоляторы АД удовлетворительно работают при ударных нагрузках.

1) При действии статической нагрузки вдоль главной оси виброизолятора.

В и б р о и з о л я т о р ы АПН (пространственного нагружения) (рис. 9.4) предназначены для работы при нагрузках, действующих как вдоль оси виброизолятора, так и в поперечном направлении или под углом. Упругий элемент виброизолятора состоит из двух конических пружин одинаковой жесткости и, следовательно, имеет симметричную характеристику. Профиль пружин обеспечивает равночастотность виброизолятора. Под нижней пружиной установлена сетчатая подушка – ограничитель ударных нагрузок.

Демпфирование колебаний осуществляется с помощью фрикционного демпфера. Продольные колебания демпфируются за счет трения сухарей демпфера о стенки корпуса виброизолятора, поперечные – за счет их трения об опорные шайбы. Максимальное демпфирование наблюдается на резонансных частотах (10 – 20 Гц) и соответствует значению $\beta = 0,4 - 0,5$. С увеличением частоты коэффициент демпфирования снижается, что благоприятно сказывается на виброизоляции в зарезонансной области (см. рис. 2.3).

Виброизоляторы АПН рассчитаны на нагрузки 10 – 15 Н, вибрацию любого направления в диапазоне частот 30 – 200 Гц при максимальном ускорении до 15g, ударных ускорениях до 12g и линейном ускорении вдоль оси виброизолятора до 15g, $t = -60 \dots +150^\circ\text{C}$.

Ц е л ь н о м е т а л л и ч е с к и е с е т ч а т ы е в и б р о и з о л я т о р ы. Упругим элементом сетчатого виброизолятора АЦП является подушка, отформованная штамповкой из тонкой стальной спирали. Для навивки спирали используют легированную сталь (типа ЭИ 708 или 1Х18Н9Т) или бериллиевую бронзу, что обеспечивает работу виброизолятора в широком диапазоне температур и в условиях агрессивных сред. Конструкция виброизолятора зависит от формы упругого элемента [5].

Упругий элемент из сетки благодаря трению между проволочками при деформации обладает высокими демпфирующими свойствами, близкими к свойствам резины (поэтому материал получил условное наименование МР – металлическая резина). Виброизоляторы из МР имеют достаточно высокую ударную прочность. Основным недостатком виброизоляторов из МР является низкая стабильность характеристик вследствие усадки сетчатого элемента под нагрузкой. В связи с этим более рациональным считаются пружинно-сетчатые виброизоляторы (рис. 9.5), у которых основным несущим элементом является пружина, а сетчатая подушка – демпфирующим элементом.

9.3. СТАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТЫ ВИБРОИЗОЛЯТОРОВ

Статический расчет виброизоляторов. Включает задачи определения типоразмера виброизоляторов, их статической осадки и размеров нивелирующих прокладок.

Типоразмер виброизолятора определяется по его статической нагрузке. При заданной схеме расположения виброизоляторов их реакции на статическую весовую нагрузку находятся из условий статики. В системе с однонаправленным нагружением, например вдоль оси, эти условия суть следующие:

$$\sum_{i=1}^n P_i = G; \quad \sum_{i=1}^n P_i x_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n P_i y_i = 0, \quad (9.1)$$

где G – вес аппарата; P_i – реакция i -го виброизолятора n —число виброизоляторов; x_i, y_i – координаты точек их крепления.

При числе виброизоляторов, большем трех, система становится статически неопределимой, и для определения опорных реакций на них должны быть наложены $(n-3)$ дополнительных условий. Одним из таких условий обычно является следующее:

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i y_i = 0 \quad (9.2)$$

Это условие выражает равенство нулю центробежных моментов опорных реакций.

Могут быть также произвольно заданы $(n-3)$ опорных реакций, после чего остальные реакции находят из статического расчета (из уравнений (9.1)). Если значения всех реакций получаются положительными, то система виброизоляции рассчитана правильно.

В пространственных схемах нагружения должны быть определены составляющие опорных реакций P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} . Они должны удовлетворять шести уравнениям статики:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} &= G_x; \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = G_y; \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = G_z; \\ \sum_{i=1}^n (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i); \quad \sum_{i=1}^n (P_{iy} z_i - P_{iz} y_i); \\ \sum_{i=1}^n (P_{iz} x_i - P_{ix} z_i); \end{aligned} \quad (9.3)$$

В статически неопределимых системах для нахождения реакций должны быть наложены $(3n-6)$ дополнительных условий. В системах, имеющих плоскости симметрии, такими условиями будут равенства реакций симметрично расположенных виброизоляторов. В табл. 9.1 приведены формулы расчета статических нагрузок для некоторых схем виброизоляции.

После определения опорных реакций выбирается типоразмер каждого из виброизоляторов и находится его статическая осадка по формуле $\delta_{\text{н0}} = P_i/k_i$. Если осадка разных виброизоляторов получается различной, то аппарат выравнивается с помощью нивелирующих прокладок. Их размеры определяются как разность осадок по отношению к наименьшей из них (см. пример на стр. 231).

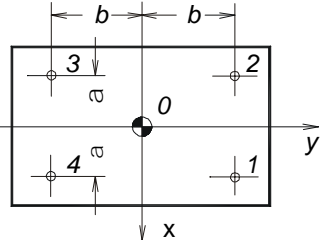
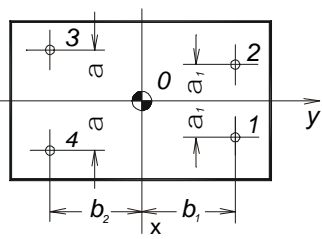
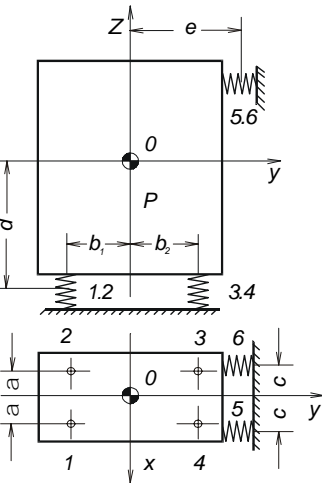
В схемах с пространственным нагружением выравнивание производится в отношении каждой из трех осей каждого виброизолятора. При этом компенсация разности деформаций виброизоляторов в направлении их главной оси осуществляется с помощью прокладок, а в плоскости, перпендикулярной главной оси – посредством соответствующего смещения виброизоляторов в этой плоскости.

Как отмечалось выше, наиболее часто применяется установка аппаратов на виброизоляторах, расположенных на днище корпуса (или каркаса). При этом по соображениям прочности и жесткости корпуса виброизоляторы размещаются преимущественно симметрично, по углам днища, и их общий центр жесткости совпадает с геометрическим центром (в плане). Блоки небольшой массы могут монтироваться без специального корпуса на общей виброизоляционной платформе (раме), снабженной опорными виброизоляторами [5].

При произвольном размещении блоков внутри аппарата (или на виброизоляционной платформе) их общий центр масс в общем случае может не совпадать с вертикалью, проведенной через центр жесткости виброизоляторов. В таком случае нагрузки на отдельные виброизоляторы окажутся различными, а при возбуждении колебаний аппарата вдоль оси z будут возникать сложные пространственные формы колебаний, что ухудшает работу виброизоляторов.

Этот недостаток может быть устранен или ослаблен посредством рационального (с точки зрения механики) размещения блоков в аппарате или на виброизоляционной платформе. Условием такого размещения является

Формулы для расчета статических нагрузок

Схема нагружения	Расположение точек крепления (в плане)	Дополнительные условия	Расчетные формулы для определения реакций
Однонаправленная		$P_1 - P_2 = P_3 - P_4$	$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{P}{4}$
		$P_1 = P_2;$ $P_3 = P_4$	$P_1 = P_2 = P \frac{b_2}{2(b_1 + b_2)};$ $P_3 = P_4 = P \frac{b_1}{2(b_1 + b_2)}$
		$P_{1x} = P_{2x} = P_{3x} = P_{4x} =$ $= P_{5x} = P_{6x} = 0;$ $P_{1y} = P_{2y} = P_{3y} = P_{4y} =$ $= P_{5y} = P_{6y} = 0;$ $P_{1z} = P_{2z} = P_{3z} = P_{4z};$ $P_{5z} = P_{6z} = KP_{4z}$	$P_{1z} = P_{2z} = \frac{P(b_2 + Ke)}{2[b_1 + b_2 + K(b_1 + e)]};$ $P_{3z} = P_{4z} = \frac{Pb_1}{2[b_1 + b_2 + K(b_1 + e)]};$ $P_{5z} = P_{6z} = \frac{Pb_1K}{2[b_1 + b_2 + K(b_1 + e)]}$

минимальное отклонение проекции центра масс аппарата от точки, соответствующей центру жесткости виброизоляторов (рис. 9.6). Это условие может быть выражено уравнением

$$(x_{ц} - x_0)^2 + (y_{ц} - y_0)^2 = R^2 \quad (9.4)$$

где x_0, y_0 —координаты центра масс аппарата; $x_{ц}, y_{ц}$ — координаты центра жесткости; R —минимально допустимое отклонение центра масс (в плане) от центра жесткости.

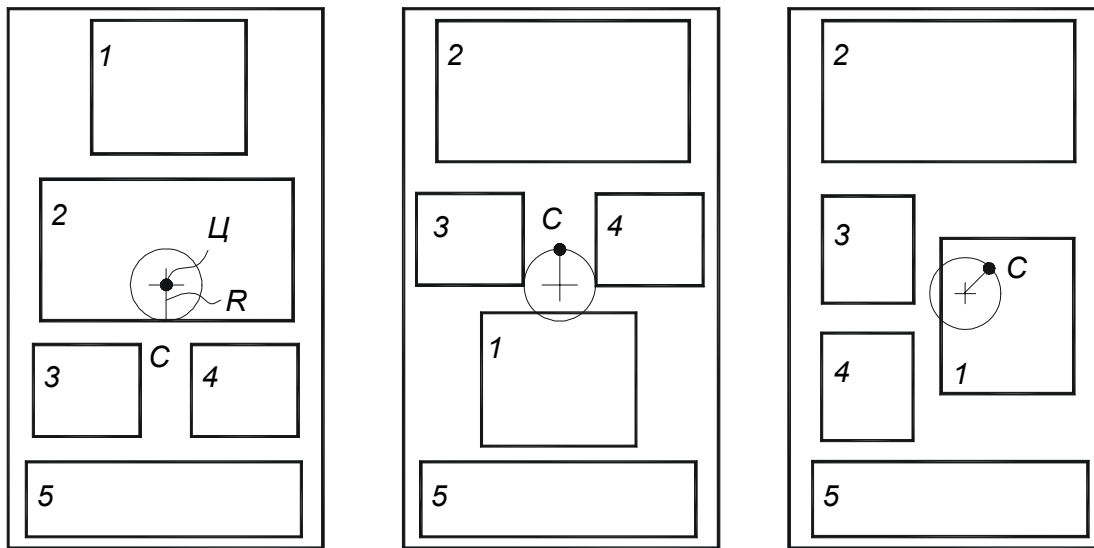


Рис. 9.6. Варианты размещения блоков в аппарате

Координаты центра масс определяются из уравнений статических моментов масс блоков относительно выбранных осей координат:

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = m x_{ц}; \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i = m y_{ц}, \quad (9.5)$$

где n —число блоков; m_i —масса i -го блока; x_i, y_i — координаты центра масс i -го блока; m —общая масса всех блоков.

После определения центра масс все варианты размещения блоков сравниваются между собой с помощью (9.4). Наилучшим будет тот вариант, в котором отклонение R окажется наименьшим, лучше всего – близким к нулю.

При большом числе блоков и возможных вариантов их расположения задача может быть легко запрограммирована для решения на ЭВМ.

Динамический расчет виброизоляторов. Включает определение собственных частот, максимальных смещений и ускорений виброизоляторов блока и оценку качества его виброизоляции в целом.

Собственные частоты определяются по методикам приведенным в § 2.3 с учетом упрощений, вносимых рациональной схемой размещения виброизоляторов.

Максимальные смещения и ускорения определяются через соответствующие коэффициенты передачи при виброизоляции. Для определения возможных смещений и ускорений аппарата во всем диапазоне эксплуатационных частот необходимо построить соответствующие резонансные кривые. На основании анализа резонансных кривых делается вывод о качестве виброизоляции аппарата с помощью выбранной системы виброизоляции.

Пример. Подобрать виброизоляторы для аппарата со следующими данными: вес аппарата $G=25-10$ Н; габаритные размеры $A \times B \times H=40 \times 60 \times 50$ см; диапазон возбуждающих частот $f=20 - 400$ Гц; виброускорение $a_0 - 10g$; диапазон температур $t=-60...+80$ °С, влажность $B=98$ % при $t=40$ °С в течение 48 ч.

Решение. Определим предварительно максимальную амплитуду возбуждающей вибрации по формуле (1.6). На низкочастотном участке диапазона $S_0=250 n_B / f^2 = 6,25$ мм.

Учитывая условия эксплуатации и амплитуду вибрации, выбираем виброизоляторы типа АПН. Исходя из конструктивных соображений, принимаем плоскую схему расположения с четырьмя виброизоляторами, с координатами в плане (рис. 9.7):

$x_1=-x_2=25$ см; $y_1=y_2=15$ см; $x_3=x_4=20$ см, $-y_3=-y_4=12$ см.

Статические нагрузки на виброизоляторы определим из уравнений

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = G;$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 = 0;$$

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 = 0.$$

Дополнительным условием будет симметричное размещение виброизоляторов относительно плоскости uoz , вследствие чего $P_1 = P_2, P_3 = P_4$. В результате получим два уравнения

$$2P_1 + 2P_3 = G; P_1 y_1 - P_3 y_3 = 0,$$

откуда находим $P_1=P_2=55,6$ Н, $P_3=P_4=69,4$ Н.

По этим данным выбираем типоразмер виброизолятора АПН=4, его жесткость $k_z=33$ Н/мм. Определим статические осадки виброизоляторов

$$z_{1cm} = z_{2cm} = P_1/k_z = 1,68 \text{ мм}, \quad z_{3cm} = z_{4cm} = P_3/k_z = 2,3 \text{ мм}.$$

Толщина нивелирующих прокладок $z_{1cm} - z_{2cm} = 0,42$ мм.

Собственная частота колебаний аппарата на виброизоляторах вдоль оси z (приближенно):

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4k_z}{m}} = \frac{1}{6.28} \sqrt{\frac{4 \cdot 3,3 \cdot 10^4}{25}} = 11,5 \text{ Гц}$$

(для точного определения частоты f_3 необходимо учесть вращательное движение аппарата – относительно оси x).

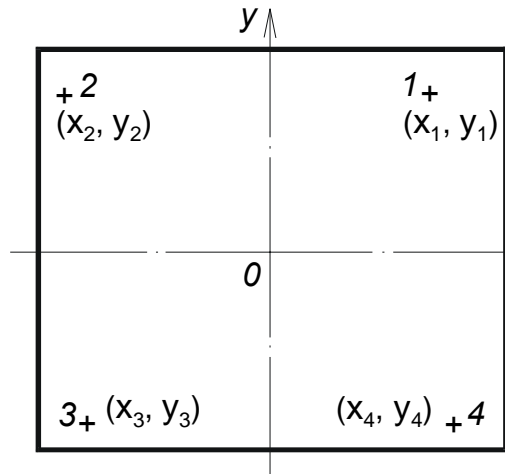


Рис. 9.7. Схема расположения виброизоляторов (в плане)

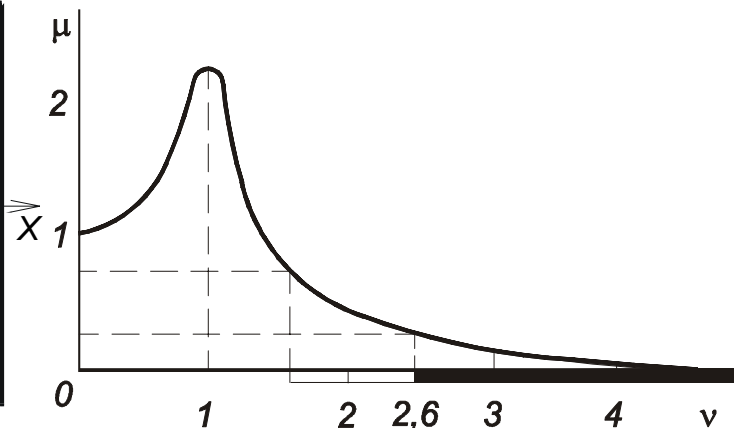


Рис. 9.8. К расчету виброизоляции

Максимальную амплитуду колебаний аппарата (на низкочастотном участке эксплуатационного диапазона частот) найдем по формуле $S_c = \mu S_a$, где

$$\mu = \sqrt{1 + \eta^2 v^2} / \sqrt{(1 - v^2)^2 + \eta^2 v^2}$$

Рассчитав $v = f/f_3 = 30/11,5 = 2,6$ и приняв $\eta=0,5$, находим: $\mu=0,28$, $S_c=1,75$ мм.

Максимальное ускорение $a_{\max}=a_0\mu=10g \cdot 0,28=2,8g$. Это ускорение будет действовать на электрорадиоэлементы внутри аппарата.

Для определения качества виброизоляции на всем диапазоне эксплуатационных частот построим график зависимости $\mu=\mu(v)$, для чего рассчитаем ряд точек:

Т а б л и ц а 9.2

Результаты расчета

v	0	0,5	0,8	1,0	1,41	2	3	4
μ	1,0	1,30	2,0	2,24	1,0	0,45	0,22	0,16

Из графика рис. 9.8 видно, что виброизоляция достигается во всем диапазоне эксплуатационных частот. На низкочастотном участке диапазона эффективность виброизоляции составляет $\mathcal{E}=(1-\mu) \cdot 100=72\%$, что в большинстве случаев может быть

признано достаточным. Для обеспечения лучшей виброизоляции в области низких частот следует применить более мягкие виброизоляторы.

Проверим выбранные виброизоляторы на действие ударной нагрузки. Пусть на систему действует синусоидальный ударный импульс с амплитудой $H=10g$ и длительностью $\tau=20$ мс.

Подсчитаем максимальные значения смещения и ускорения аппарата. Собственная частота аппарата $\omega_3 = 2\pi f_3 = 72,6 \text{ с}^{-1}$; условная частота импульса $\omega = \pi/\tau = 157 \text{ с}^{-1}$; частотное отношение $\omega/\omega_3=2,16$. Коэффициент ударной перегрузки (2.38)

$$\mu_{\dot{A}} = \frac{2\nu}{\nu^2 - 1} \cos \frac{\pi}{2\nu} = \frac{2 \cdot 2,16}{2,16^2 - 1} \cos \frac{\pi}{4,32} = 0,88.$$

Амплитуда ускорения аппарата

$$S_{\max} H \mu_{\dot{A}} = 10g \cdot 0,88 = 8,8g.$$

Амплитуда смещения

$$z_{\max} = \frac{H \mu_{\dot{A}}}{\omega_3^2} = \frac{8,8 \cdot 9,81 \cdot 10^3}{72,6^2} = 16,35 \text{ мм.}$$

Из этих данных видно, что амплитуда смещения превышает конструктивный ход виброизолятора. В результате в конце движения произойдет удар штока виброизолятора об ограничитель хода и виброизоляция удара аппарата достигнута не будет. Расчет виброизолятора на удар длительностью $\tau=10$ мс показывает, что в этом случае цель будет достигнута: максимальное ускорение не превысит $4,5g$ при максимальном смещении около 8 мм.

Для того чтобы достичь двукратного уменьшения ударного ускорения при длительности импульса $\tau=20$ мс, потребуются виброизоляторы с жесткостью менее 10 Н/мм. При этом «просадка» виброизолятора при ударе составит около 35 мм. Это условие накладывает ограничение на выбор типа виброизолятора (могут быть, например, выбраны тросовые виброизоляторы). В компоновке аппарата на объекте должны быть предусмотрены меры, обеспечивающие возможные смещения.

Некоторые сведения о характеристиках виброизоляторов даны в приложении (табл. П. 8).

Контрольные вопросы

1. Расскажите о последовательности этапов проектирования систем ВИ.
2. Из каких соображений выбираются виброизоляторы?
3. Какие задачи решаются при статическом расчете СВИ?
4. В чем заключаются цели динамического расчета СВИ?
5. Какие основные группы виброизоляторов применяются?
6. Какие достоинства и недостатки у резинометаллических виброизоляторов?
7. Какие преимущества у металлопружинных по сравнению с резинометаллическими виброизоляторами?
8. Что является условием эффективной виброизоляции?

Глава 10

Основы системного подхода к виброзащите электронных средств

10.1. СТРУКТУРА СИСТЕМЫ ВИБРОЗАЩИТЫ ЭС

Рассмотрим виброзащиту (ВЗ) ЭС с позиций системного подхода. В самом общем виде система виброзащиты представлена на рис. 10.1. Целью системы ВЗ является обеспечение вибрационной надежности ЭС, управляемость достигается путем введения обратной связи, под которой понимается применение одного или нескольких способов виброзащиты. Входом являются вибрации, которые могут быть периодическими или случайными. Процесс предполагает преобразование параметров воздействующей вибрации как количественно (увеличиваются амплитуды колебаний и т.д.), так и качественно (возникают механические напряжения в материалах, изменяются параметры полупроводниковых и магнитных материалов и т.п.). Под выходом будем понимать показатели надежности или устойчивости ЭС, например среднюю наработку до отказа, или другие показатели. На процесс будут влиять внешние воздействия – повышенная и пониженная температуры, линейные ускорения и т.д. Если рассчитанные показатели надежности окажутся ниже заданных, “в работу” должна вступить обратная связь, цель которой воздействовать на процесс с целью увеличения надежности и устойчивости ЭС. Это воздействие можно реализовать за счет повышения жесткости конструкции, виброизоляции, увеличения демпфирования и других способов виброзащиты.

С учетом вышесказанного, а также учитывая, что дестабилизирующее действие вибраций обусловлено преимущественно возникновением резонансных колебаний печатных плат и других элементов конструкций, схему на рис. 10.1 можно представить более подробно в виде структурной схемы, представленной на рис 10.2.

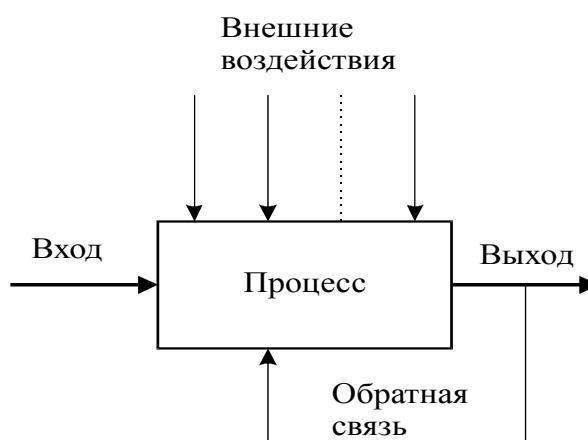


Рис. 10.1. Обобщенная схема структуры виброзащиты ЭС

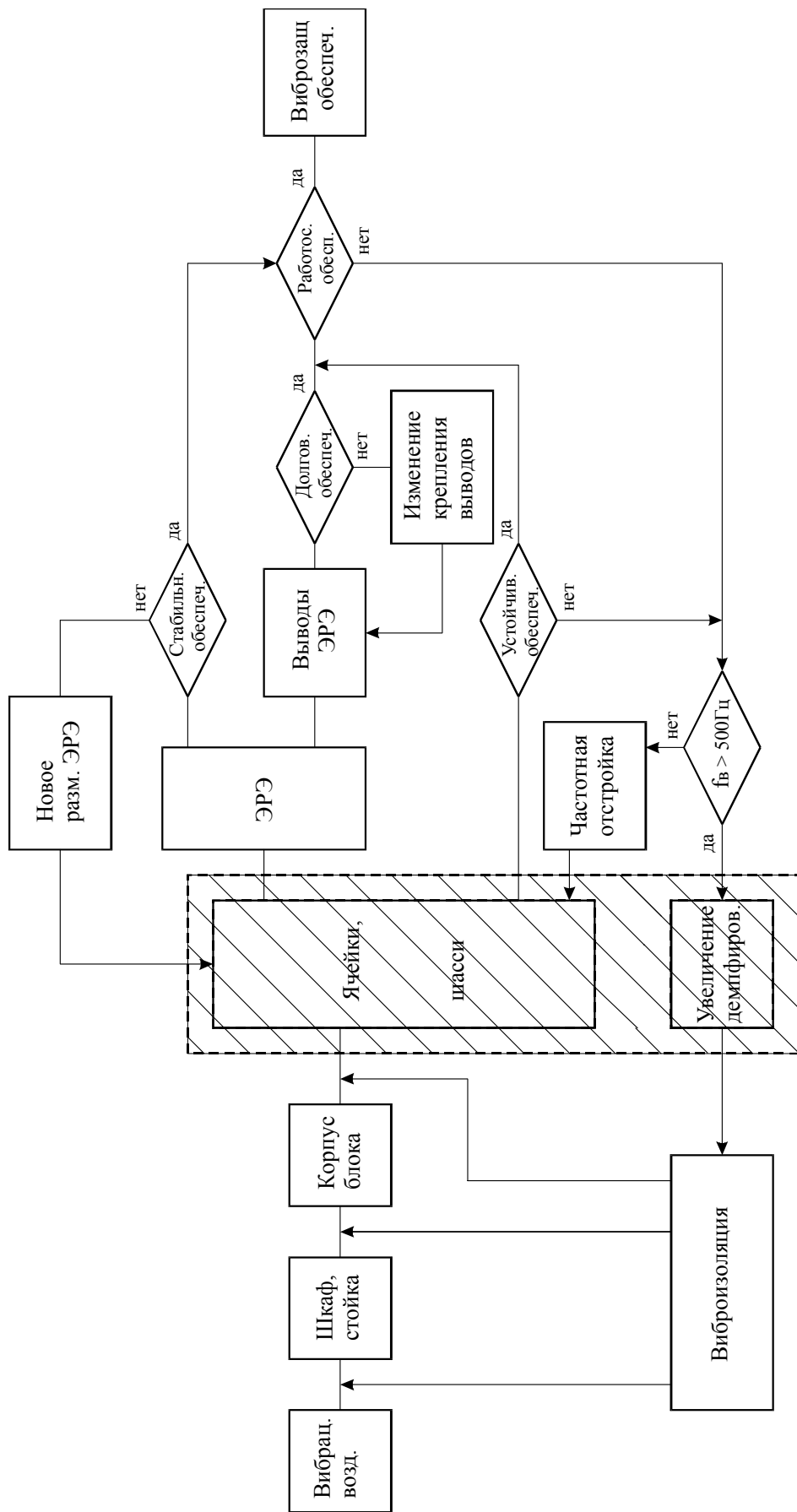


Рис. 10.2. Структура виброзащиты ЭС - структурная схема  - область применения ПД

Вибрационное воздействие передается к точкам крепления шасси или функциональных ячеек через корпуса ЭС (шкафов, стоек), корпуса блоков в виде волновых процессов. Характеристики вибрации мест крепления ячеек могут быть определены с использованием методов конечных разностей или конечных элементов. Действие печатной платы ячейки на ЭРЭ прежде всего обусловлено возможными резонансными колебаниями платы. При этом виброперемещения и виброускорения в точках крепления могут возрасти в пучностях колебаний в десятки раз. Определить амплитуды можно при помощи аналитических методов, если плата рассматривается в виде прямоугольной пластины с простейшими способами крепления краев в виде свободного опирания, жесткого защемления и т.д. В других случаях наиболее часто используются методы конечных разностей и конечных элементов. Следует учитывать, что затраты машинного времени при этом резко возрастают.

Колебания ячеек ЭС и прежде всего резонансные колебания могут привести к трем отрицательным явлениям. Первое – амплитуда виброускорения в одной или нескольких точках платы превысят допустимые значения, указанные в ТУ на ЭРЭ, то есть не будет обеспечена устойчивость работы ЭС. Второе – резонансные колебания ячеек приведут к усталостным явлениям в электрических выводах ЭРЭ и, как следствие, к уменьшению долговечности выводов ЭРЭ и ЭС в целом. Эти вопросы подробно рассмотрены в работе [8]. Третье – большие ускорения при резонансе ячеек приводят вследствие изменения характеристик ЭРЭ за счет проявления тензорезистивного эффекта в полупроводниковых материалах, изменения магнитной проницаемости ферритов и т.д., к изменению параметров сигналов ЭС, то есть возникновению нестабильности за счет появления виброшумов. Эти явления подробно рассмотрены на основе обобщения литературных данных в работе [1].

Если виброустойчивость, стабильность или долговечность выводов ниже нормы, необходимо применить меры виброзащиты. Это может быть изменение способов крепления ЭРЭ, новая компоновка ЭРЭ на плате и тому подобное. Наиболее эффективными способами являются частотная отстройка, увеличение демпфирующих свойств и виброизоляция. Практика и исследования показали, что при действии вибрации в диапазоне частот до 500 Гц и выше, что характерно для самолетной, ракетной и космической аппаратуры, наиболее эффективным является увеличение демпфирующих свойств конструкций.

Если ни один из упомянутых способов не обеспечивает необходимую виброзащиту, можно применить виброизоляцию или применить эти способы совместно. Ниже рассмотрен вариант структурно-функциональной схемы создания виброзащиты на уровне блока ЭС.

10.2. СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА ВИБРОЗАЩИТЫ БЛОКА ЭС

Конструкции ЭС могут быть разделены на четыре иерархических уровня.

Электрорадиоэлементы (ЭРЭ) составляют нулевой уровень. Они входят в радиоэлектронные ячейки или кассеты, выполненные на основе несущей конструкции первого уровня (НК1). Ячейки и кассеты, а также отдельные ЭРЭ, входят в состав блоков или рам, выполненных на несущих конструкциях второго уровня (НК2). Блоки или рамы, а также ячейки (кассеты), на несущих конструкциях третьего уровня образуют шкаф, пульт или стойку. Результаты анализа отказов ЭС в условиях воздействия вибраций в широком диапазоне частот (до 500 Гц и выше) показывают, что наиболее часто отказывают ЭРЭ из-за недопустимо больших виброускорений и виброперемещений, возникающих при резонансных колебаниях ячеек. Таким образом, ячейки ЭС являются наиболее «слабым звеном». Появление резонансных колебаний ячеек обусловлено двумя причинами:

1. Небольшой изгибной жесткостью ячеек, выполняемых обычно на подложках из стеклотекстолита малой толщины (1-3 мм), а следовательно имеющих низкие значения СЧК (<200-300 Гц).
2. Широким диапазоном частот воздействующей вибрации (до 500 Гц и выше).

Поэтому первой, а часто основной, задачей при обеспечении виброзащиты ЭС является устранение или уменьшение до допустимого уровня АРК ячеек.

Рассмотрим один из возможных вариантов схем проектирования, показанный на рис. 10.3.

Исходными данными (блок 1) являются диапазон частот и амплитуда действующей на РЭС вибрации, допустимые ускорения на ЭРЭ, конструктивные параметры блока и узлов - размеры, модули упругости материалов и т.д., условия эксплуатации температурный диапазон и другие условия.

В блоке 2 проводится расчет собственных частот колебаний ячеек и ЭРЭ. Расчет может проводиться на основе аналитических или сеточных моделей в зависимости от сложности конструкций. Если ячейки имеют прямоугольную форму и закреплены только по краям одним из "классических" способов, однородны, то предпочтение следует отдать аналитическим методам моделирования.

В блоке 3 проверяется возможность возникновения резонансных колебаний ячеек и ЭРЭ путем сравнения диапазона частот вибраций с собственными частотами колебаний элементов конструкций.

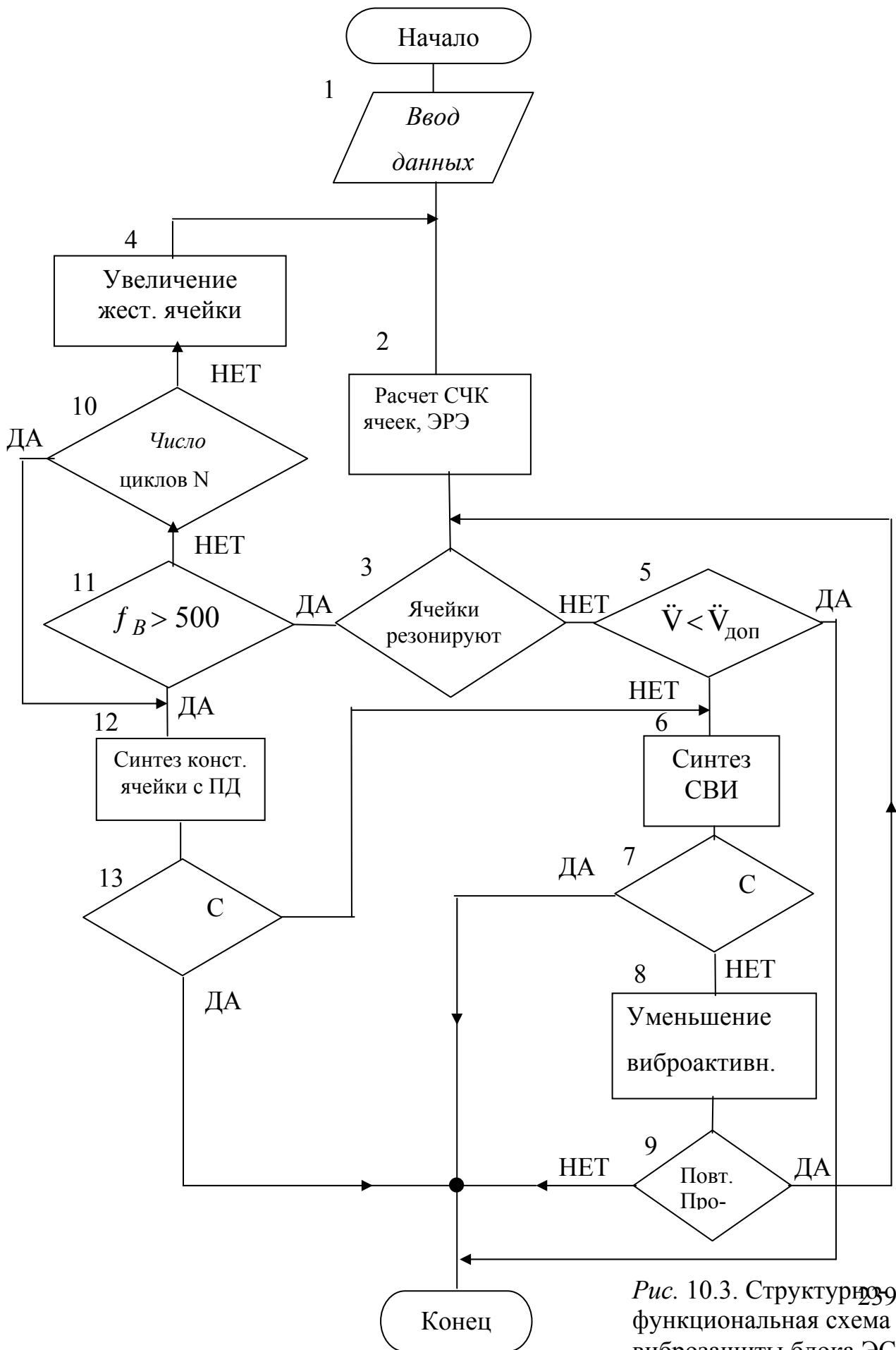


Рис. 10.3. Структурно-функциональная схема виброзащиты блока ЭС

Если резонансные колебания отсутствуют, то необходимо определить, не превышают ли виброускорения, действующие на ЭРЭ и заданные в ТЗ, допустимые виброускорения для ЭРЭ (блок 5). Если не превышают, то никаких мер по виброзащите применять не нужно. В противном случае необходима виброизоляция с целью уменьшения виброускорений, действующих на РЭС.

В блоке 6 проводится синтез системы виброизоляции. Он включает определение центра тяжести блока, расчет моментов инерции, выбор схемы расположения виброизоляторов и их статический расчет, выбор типа изоляторов, определения собственных частот блока на виброизоляторах и оценку эффективности системы виброизоляции. Могут проводиться также расчеты на ударное воздействие и воздействие линейного ускорения. Если синтез удачен, т.е. удалось уменьшить виброускорения до допустимого уровня, то дальнейшие шаги по виброзащите не предпринимаются (блок 7). Если синтез неудачен, что может произойти из-за жестких ограничений на размеры системы виброизоляции (СВИ) и очень низкой наименьшей частоты действующих вибраций (меньше 5 Гц), то необходимо уменьшить вибрации системы, в которых применяются РЭС. Если заказчик согласен на это и соответствующую корректировку ТЗ, то может проводиться повторное проектирование виброзащиты с учетом проведенной корректировки или использовано уже найденное решение СВИ.

Если проверка на наличие резонансных колебаний показывает, что ячейки или другие элементы будут резонировать (блок 3), то необходимо применить частотную отстройку или увеличить демпфирующие свойства системы. Выбор одного из этих способов определяется двумя факторами. Во первых, тем, что частотная отстройка, как правило, конструктивно-технологически выполняется проще, во вторых при частотах возбуждения больше 500 Гц она приводит к значительному часто недопустимому, увеличению массы и габаритных размеров конструкции. Поэтому в блоке 11 проверяется, превышает ли верхняя частота возбуждения частоту, равную 500 Гц. Если нет, то для устранения резонансных колебаний целесообразнее применить частотную отстройку. Для этого можно увеличить толщину конструкции, уменьшить площадь подложки, изменить способ крепления, применить ребро жесткости. В программе может быть заложено несколько десятков различных вариантов частотной отстройки. Выбор того или иного варианта должен проводиться по различным критериям - стоимости, массе, габаритам и другим. После применения каждого варианта ведется расчет и проверяется условие отсутствия резонансных колебаний. Если за определенное число циклов частотную отстройку провести не удастся (блок 10), то необходимо увеличивать демпфирующие свойства конструкции (блок 12).

Демпфирующие свойства обычно повышаются за счет применения полимерных демпферов (ПД) в виде демпфирующих слоев (ДС), демпфирующих ребер (ДС), демпфирующих вставок (ДВ). Выбор вида полимерного демпфера в настоящее время базируется на знаниях и опыте специалистов. Методы оптимального выбора не разработаны. Если синтез удачен, т.е. удалось уменьшить амплитуды резонансных колебаний до допустимого уровня, то задача виброзащиты считается выполненной. Если неудачен, то можно применить различные виды полимерных демпферов, например ДВ и ДР, или совместить полимерный демпфер с ребром жесткости и т.д. При неудачном итоге, можно дополнительно применить виброизоляцию (блок 7).

Контрольные вопросы

1. Что понимается под входом, выходом, процессом и обратной связью в системе ВЗ электронных средств?
2. К каким отрицательным явлениям могут привести вибрации ячеек ЭС?
3. Почему ячейки ЭС являются наиболее «слабым местом» при механических воздействиях?
4. Нарисуйте структурно-функциональную схему виброзащиты блока ЭС.
5. На какие иерархические уровни можно разделить конструкции ЭС?
6. Какие способы ВЗ применяются для ЭРЭ, ячеек, блоков, стоек?


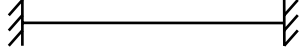
Т а б л и ц а П.1

Физические параметры материалов



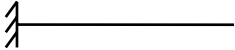
Материал	$E \cdot 10^{11}, \text{Н/м}^2$	$\rho \cdot 10^3, \text{кг/м}^3$	ν	$[\sigma] \cdot 10^8, \text{Н/м}^2$
Сталь	2 – 2,2	7,8	0,24 – 0,3	1,6
Алюминий	0,68	2,7	0,32 – 0,36	0,3 – 0,8
Медь	1,27	8,9	0,31 – 0,34	0,3 – 1,2
Серебро	0,82	10,5	---	---
Золото	0,78	19,3	---	---
Дюралюминий	0,72	2,7	---	0,8 – 1,5
Стеклотекстолит				
СТЭФ (Н=1,33 мм)	0,33	2,47	0,279	---
СТЭ (Н=1,22 мм)	0,35	1,98	0,14	---
НФД (Н=0,92 мм)	0,345	2,32	0,238	---
СТЭФ (с печатной схемой, Н=1,22 мм)	0,302	2,05	0,22	---
Текстолит	0,06 – 0,1	---	---	0,3 – 0,4
Гетинакс	0,1 – 0,17	---	---	0,5 – 0,7

Т а б л и ц а П.2

Значения параметров λ_i и коэффициентов A_i, B_i, C_i , базисных функций.


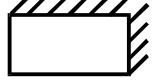
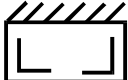
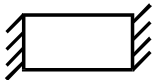
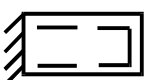


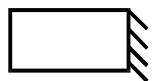
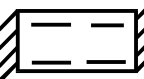
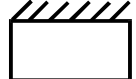

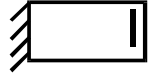
Условия закрепления	i	λ_i	A_i	B_i	C_i
	1	3,142	0	0	0
	2	6,283	0	0	0
	3	9,425	0	0	0
	4	12,566	0	0	0
	5	15,708	0	0	0
	1	4,730	-1,0178	-1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	-1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	-1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	-1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	-1	-1,0000001

Окончание табл. П.3

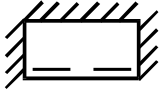

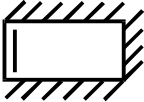
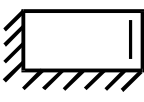

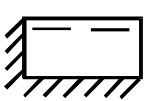
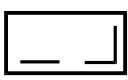
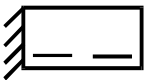
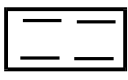
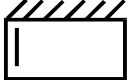
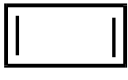

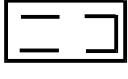
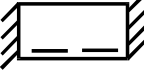
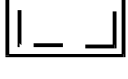
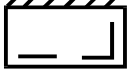
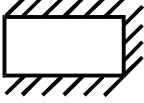
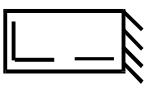
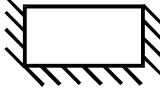
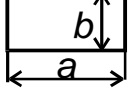
	1	4,730	-1,0178	1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	1	-1,0000001
	1	3,927	0	0,027875	0
	2	7,069	0	-0,0012041	0
	3	10,210	0	0,0000520	0
	4	13,352	0	-0,0000022	0
	5	16,494	0	0,0000001	0
	1	1,875	-1,3622	-1	1,3622
	2	4,694	-0,98187	-1	0,98187
	3	7,855	-1,000777	-1	1,000777
	4	10,996	-0,999965	-1	0,999965
	5	14,137	-1,0000015	-1	1,0000015

Т а б л и ц а П.3

Частотный коэффициент.


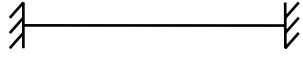

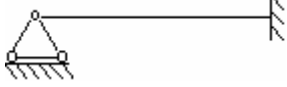
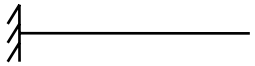
Эскизы	α	Эскизы	α
	$9.87 \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$		$3.52 \sqrt{1 + 2.48 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	$9.87 \sqrt{1 + 2.33 \frac{a^2}{b^2} + 2.44 \frac{a^4}{b^4}}$		22.37
	$15.42 \sqrt{1 + 0.95 \frac{a^2}{b^2} + 0.41 \frac{a^4}{b^4}}$		$22.37 \frac{a^2}{b^2}$
	$9.87 \sqrt{1 + 2.57 \frac{a^2}{b^2} + 5.14 \frac{a^4}{b^4}}$		3.52
	$22.37 \sqrt{1 + 0.48 \frac{a^2}{b^2} + 0.19 \frac{a^4}{b^4}}$		$3,52 \frac{a^2}{b^2}$
	$15.42 \sqrt{1 + 1.11 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		15.42

Окончание табл. П.3

Эскизы	α	Эскизы	α
	$22.37 \sqrt{1 + 0.57 \frac{a^2}{b^2} + 0.47 \frac{a^4}{b^4}}$		$15.42 \frac{a^2}{b^2}$
	$22.37 \sqrt{1 + 0.61 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		$3.52 \sqrt{1 + 5.56 \frac{a^2}{b^2} + 19.2 \frac{a^4}{b^4}}$
	$22.37 \sqrt{1 + 0.61 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		$15.42 \sqrt{1 + 0.29 \frac{a^2}{b^2} + 0.05 \frac{a^4}{b^4}}$
	$3.52 \frac{a}{b}$		$3.52 \sqrt{1 + 1.58 \frac{a^2}{b^2}}$
	$9.87 \frac{a^2}{b^2}$		$3.52 \sqrt{1.58 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	9.87		$22.37 \sqrt{0.1 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	$9.87 \sqrt{0.43 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$		$22.37 \sqrt{1 + 0.1 \frac{a^2}{b^2}}$
	$9.87 \sqrt{1 + 0.43 \frac{a^2}{b^2}}$		$15.42 \sqrt{0.34 \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}}$
	$3.52 \sqrt{1 + 5.97 \frac{a^2}{b^2} + 40.5 \frac{a^4}{b^4}}$		$15.42 \sqrt{1 + 0.34 \frac{a^2}{b^2}}$
	$22.37 \sqrt{1 + 0.14 \frac{a^2}{b^2} + 0.02 \frac{a^4}{b^4}}$		a - длинная сторона b - короткая сторона






Т а б л и ц а П. 4

Численные значения некоторых интегралов

Способ крепления	i	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i dx$	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i^2 dx$	$l \int_0^l x_i'^2 dx$	$l^3 \int_0^l x_i''^2 dx$
	1	0,6366	0,5	4,9348	48,70454
	2	0,6366	0,5	19,739	779,2727
	3	0,6366	0,5	44,413	3945,068
	4	0,6366	0,5	78,956	12468,36
	5	0,6366	0,5	123,37	30440,34
	1	0,8456	1,0358	12,748	518,4548
	2	0,8594	0,9985	45,975	3797,111
	3	0,8737	1,0026	98,664	14347,29
	4	0,8764	0,9976	172,08	39844,88
	5	0,9152	1,0447	256,77	93140,375
	1	0,8903	1,0357	51,250	518,4726
	2	0,8863	0,9984	108,75	3797,502
	3	0,8910	1,0000	186,85	14618,15
	4	0,8921	0,9973	283,14	39838,21
	5	0,9068	1,0448	436,23	93132,35
	1	0,6078	0,4995	5,7524	118,8525
	2	0,6208	0,4999	21,450	1248,754
	3	0,6256	0,4999	47,021	5432,763
	4	0,6334	0,4992	108,74	15865,02
	5	0,6309	0,5008	127,54	37076,88
	1	1,0664	1,8552	8,6228	22,93523
	2	0,8426	0,9639	31,248	468,0322
	3	0,8738	1,0017	77,461	3813,367
	4	0,8819	1,0026	143,85	14656,03
	5	0,8785	0,9814	215,65	39201,60

Т а б л и ц а П.5






Коэффициенты формы колебаний $K(x)^1$

Способ крепления	Относительная координата X/L											
	i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	1	0	0,393	0,748	1,03	1,21	1,27	1,21	1,03	0,748	0,393	0
	2	0	0,748	1,21	1,21	0,748	0	-0,74	-1,2	-1,2	-0,74	0
	3	0	1,03	1,21	0,393	-0,74	-1,2	-0,74	0,393	1,21	1,03	0
	1	0	0,157	0,514	0,910	1,20	1,31	1,20	0,910	0,514	0,156	0
	2	0	0,391	1,03	1,29	0,889	0	-0,88	-1,2	-1,0	-0,39	0
	3	0	0,668	1,31	0,766	-0,53	-1,2	-0,56	0,735	1,31	0,69	0
	1	-1,74	-0,93	-0,17	0,475	0,910	1,06	0,910	0,476	-0,17	-0,93	-1,74
	2	-1,77	-0,40	0,704	1,17	0,857	0	-0,85	-1,1	-0,70	0,403	-1,77
	3	-1,78	0,092	1,14	0,707	-0,58	-1,2	-0,58	0,707	1,14	0,092	-1,78
	1	0	0,479	0,889	1,17	1,29	1,24	1,03	0,729	0,391	0,115	0
	2	0	0,805	1,22	1,05	0,370	-0,50	-1,1	-1,3	-0,94	-0,33	0
	3	0	1,06	1,11	0,098	-1,0	-1,1	-0,18	0,992	1,30	0,610	0
	1	0	0,026	0,100	0,213	0,359	0,531	0,722	0,925	1,13	1,35	1,56
	2	0	0,158	0,516	0,903	1,17	1,22	1,01	0,544	-0,12	-0,89	-1,71
	3	0	0,398	1,05	1,32	0,918	0,034	-0,82	-1,1	-0,68	0,399	1,74

¹ Рассчитана Г.Ф. Долговым

Т а б л и ц а П.6

Значения балочной функции

Способ крепления	Относительная координата X/L											
	i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	1	0	,30901	,58778	,80901	,95105	1	,95105	,80901	,58778	,30901	0
	2	0	,58778	,95105	,95105	,58778	0	-,5877	-,9510	-,9510	-,5877	0
	3	0	,80901	,95105	,30901	-,5877	-1	-,5877	,30901	,95105	,80901	0
	1	0	,19246	,63040	1,1154	1,4813	1,6163	1,4812	1,1154	,63024	,19236	0
	2	0	,45536	1,2057	1,5043	1,0338	,00014	-1,033	-1,504	-1,206	-,4557	0
	3	0	,76708	1,5072	,87911	-,6132	-1,405	-,6508	,87896	1,5069	,76681	0
	1	-2,036	-1,093	-,1989	,55370	1,0590	1,2373	1,0591	,55385	-,1986	-1,093	-2,035
	2	-1,998	-,4545	,79383	1,3229	,96538	,00014	-,9651	-1,322	-,7940	,45433	1,9984
	3	-2,001	,10399	1,2857	,79375	-,6559	-1,422	-,6553	,79424	1,2858	,10384	-1,999
	1	0	,39391	,73132	,96486	1,0641	1,0212	,85283	,59956	,32191	,09455	0
	2	0	,64855	,98537	,84762	,29871	-,4034	-,9329	-1,057	-,7595	-,2700	0
	3	0	,85269	,89121	,07906	-,8074	-,9196	-,1446	,79335	1,0427	,48810	0
	1	0	,04569	,17399	,37179	,62623	,92490	1,2561	1,6096	1,9763	2,3493	2,7241
	2	0	,18189	,59117	1,0331	1,3421	1,4014	1,1576	,62273	-,1373	-1,028	-1,963
	3	0	,45651	1,2099	1,5136	1,0525	,03925	-,9483	-1,315	-,7898	,45830	2,0031

Т а б л и ц а П. 7

Динамические характеристики вибропоглощающих полимеров

Температура °С	Вилад-13-1		ППЭ-Р3005			
	300 Гц		200 Гц		600 Гц	
	Е 10 ⁵ , Па	η	Е 10 ⁵ , Па	η	Е 10 ⁵ , Па	Н
-60	22000	0,01	152	0,02	156	0,02
-40	20000	0,02	134	0,03	136	0,03
-20	15500	0,05	103	0,06	103	0,1
0	8500	0,22	66	0,09	68	0,16
+20	2500	0,52	48	0,09	48	0,09
+40	500	0,20	34	0,08	34	0,09
+60	—	—	18	0,12	18	0,11
+70	—	—	—	—	—	—
Температура °С	Вилад-8П		ППУ 92		ППУ305А	
	200 Гц		200 Гц		200 Гц	
	Е 10 ⁵ , Па	η	Е 10 ⁵ , Па	η	Е 10 ⁵ , Па	η
-60	—	—	1100	0,24	1941	0,075
-40	—	—	600	0,21	1744	0,025
-20	160	0,7	370	0,24	1649	0,023
0	75	0,5	70	0,65	1557	0,040
+20	50	0,35	34	0,30	1364	0,030
+40	40	0,40	29	0,20	1261	0,033
+60	—	—	27	0,09	1150	0,034
+70	—	—	—	—	—	—
Температура °С	ППУ202-2					
	200 Гц		600 Гц		1200 Гц	
	Е 10 ⁵ , Па	η	Е 10 ⁵ , Па	η	Е 10 ⁵ , Па	η
-60	950	0,10	1200	0,10	2200	0,10
-40	350	0,17	500	0,10	1000	0,25
-20	200	0,12	250	0,13	450	0,17
0	120	0,11	150	0,11	180	0,14
+20	50	0,12	70	0,14	80	0,13
+40	40	0,11	50	0,12	60	0,11
+60	35	0,18	40	0,18	45	0,20
+70	30	0,23	35	0,22	40	0,25
Температура °С	ПОЛИИЗОБУТИЛЕН					
	200 Гц		400 Гц		600 Гц	
	G10 ⁵ , Па	η	G10 ⁵ , Па	η	G10 ⁵ , Па	η
-60	—	—	—	—	—	—
-45	—	—	3810	0,81	4330	0,70
-25	—	—	440	1,26	540	1,24
-5	46	1,48	73	1,57	97	1,52
+15	11	1,1	17	1,33	23	1,49
+35	4,2	0,69	5,8	0,88	6,9	0,98
+60	3,0	0,27	3,2	0,42	3,5	0,51
+80	3,0	0,15	3,0	0,22	3,0	0,28

Технические характеристики некоторых виброизоляторов

Тип виброизолятора	Номинальная нагрузка, Н	Прогиб, мм	Коэффициент жесткости, Н/мм		Масса, кг
			K_y	K_x	
Резинометаллические стержневые					
АН-6	60	1,6-0,4 (для всех идов)	40	9,3	0,012
АН-10	100		65	15	0,012
АН-15	150		95	25	0,038
АН-30	300		185	46	0,038
АН-50	500		310	80	0,046
Резинометаллические пластинчатые					
АП-1-0.45	4.5	-	2,5	10	от 0,007 до 0,008
АП-1-1.80	18	-	11,5	22.8	-
АП-2-2.70	27	-	17,2	34.2	от 0,007 до 0,008
АП-2-4.50	45	-	28,6	60	-
АП-3-9	90	-	57	140	от 0,007 до 0,008
АП-3-11.35	112.5	-	70	160	-
Резинометаллические судовые со страховкой					
АКСС-10	100	0,8	120	110	0,172
АКСС-15	150	0,8	170	150	0,213
АКСС-25	250	0,9	280	250	0,213
АКСС-30	600	1,1	430	380	0,702
АКСС-85	850	1,4	610	540	1,155
АКСС-120	1200	1,3	920	830	1,57
Пружинные с воздушным демпфированием					
АД-0.6	3,0-6,12	2,5-5,5	1,2	-	-
АД-1.5	10,2-15,3	5,5-7,5	2	-	-
АД-3	15,3-30,6	4,0-7,0	4	-	-
АД-5	30,6-51,0	5,0-7,5	7	-	-
АД-10	71,4-102	5,5-7,5	12	-	-
АД-15	102-152	5,5-8,0	19	-	-
Пружинные с фрикционным демпфированием					
АПН-1	5-10	-	6,8	-	0,041
АПН-2	9,8-24,5	-	13,7	-	0,074
АПН-3	19,6-49	-	22,5	-	0,079
АПН-4	39,2-68,7	-	32,3	-	0,126
АПН-5	58,9-98,1	-	49	-	0,135
АПН-6	88,3-147,2	-	58,8	-	0,225

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Токарев М.Ф., Талицкий Е.Н., Фролов В.А.** Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.А.Фролова. — М.: Радио и связь, 1984. — 224 с.
2. Вибрации в технике: Справ.: В 6 т. / Ред. совет: В.Н.Челомей (пред.), — М.: Машиностроение, 1978 — 1981.
3. **Бабаков И.М.** Теория колебаний. — М.: Наука, 1968. — 560 с.
4. **Пановко Я.Г.** Основы прикладной теории колебаний и удара. 3-е изд., перераб. и доп. — Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-ние), 1976.—320 с.
5. **Ильинский В.С.** Защита РЭА и прецизионного оборудования от динамических воздействий. — М.: Радио и связь, 1982. — 296 с.
6. **Маквецов Е.Н., Тартаковский А.М.** Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: Учеб. для вузов. — М.: Радио и связь, 1993. — 200с.:
7. **Маквецов Е.Н., Тартаковский А.М.** Дискретные модели приборов. — М.: Машиностроение, 1982. — 136 с.
8. **Steinberg D.S.** Vibrations analysis for electronic equipment. — New York, 1973. — 456p.
9. **Тимошенко С.П.** Колебания в инженерном деле.— М.: Наука. 1967. — 444 с.
10. Прочность, устойчивость, колебания. Справ. в 3-х т. Под ред. И.А.Биргера, Я.Г.Пановнко.—М.: Машиностроение, 1968. т.3 — 568с.
11. Виброзащита радиоэлектронной аппаратуры полимерными компаундами / Ю.В.Зеленев, А.А.Кирилин, Э.Б.Слободник, Е.Н.Талицкий; Под ред. Ю.В.Зеленева. — М.: Радио и связь, 1984. — 120 с.
12. **Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.** Демпфирование колебаний: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. - 488 с.
13. Случайные колебания: Пер. с англ. / Под ред. А.А.Первозванцева. — М.: Мир, 1967. — 356 с.
14. **Карпушин В.Б.** Виброшумы радиоаппаратуры. — М.: Сов. радио, 1977. - 320 с.
15. Справочник конструктора РЭА: Общие принципы конструирования / Под ред. Р.Г. Варламова. — М.: Сов. радио, 1980. — 480 с.
16. **Талицкий Е.Н.** Защита РЭА от механических воздействий: Уменьшение резонансных колебаний: Учеб. пособие. — Владимир: Владим. политехн. ин-т, 1979. - 90 с.
17. **Талицкий Е.Н.** Виброзащита РЭС полимерными демпферами: Учеб. пособие. — Владимир: Владим. политех. ин-т, 1993. — 86 с.

18. **Галицкий Е.Н.** Расчет вибро-, ударопрочности и устойчивости конструкций электронных средств: Учебн. пособ. — Владимир: Владим. гос. ун-т, 1998. — 58 с.
19. **Чеканов А.Н.** Вероятностные расчеты и оптимизация несущих конструкций: Учеб. пособие. — М.: ИЧП "Издательство магистр", 1997. — 134 с.
20. **Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.** Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справ. — Киев: Наук. думка, 1971. — 376 с.
21. **Филиппов А.П.** Колебания деформируемых систем. — М.: Машиностроение, 1970. — 734 с.
22. **Феодосьев В.И.** Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
23. **Ковалев Н.А.** Прикладная механика: Учебник для вузов. — М.: Высш. шк., 1972 — 400с.
24. **Каленкович Н.И., Фастовец Е.П., Шамгин Ю.В.** Механические воздействия и защита радиоэлектронных средств: Учеб. пособие для вузов. — Минск: Выш. шк., 1989. — 244с.
25. Приборы и системы для измерения вибрации, шума и удара: Справ. в 2 кн. / Под ред. В.В.Клюева. — М.: Машиностроение, 1978.
26. **Болотин В.В.** Случайные колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979. — 336с.
27. **Никифоров А.С.** Вибропоглощение на судах. — Л.: Судостроение, 1979. — 184с.
28. **Перепечко И.И.** Акустические методы исследования полимеров. — М.: Химия, 1973. — 296с.
29. **Рошин Г.И.** Несущие конструкции и механизмы РЭА. — М.: Высш. школа, 1981. — 375с.
30. **Ruzicka. J.E.** Vibration control: Application. Electro-Technology. — 1964. vol.1, N 73, p.75-82.
31. **ОСТ 4Г 0.010.009-84.** Модули электронные первого и второго уровней радиоэлектронных средств. Конструирование.
32. **Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.** Справочник по сопротивлению материалов. — Киев.: Наук. думка, 1988. — 536 с.
33. **Суровцев Ю.А.** Амортизация радиоэлектронной аппаратуры. — М.: Сов. радио, 1974. — 176 с.
34. **Трудоношин В.А., Пивоваров Н.В.** Математические модели технических объектов: Учеб. пособие для втузов / Под ред. И.П. Норенкова. — М.: Высш. шк., 1986. — 160 с.
35. **Секулович М.** Метод конечных элементов / Пер. с серб. Ю.Н. Зуева; Под ред. В.Ш. Барбакадзе. — М.: Стройиздат, 1993. — 664 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения.	3
Список сокращений	4
Предисловие	5
Введение.	7
Глава 1. Моделирование конструкций ЭС и сил.	11
1.1. Виды моделей.	11
1.2. Модели геометрической формы и способов крепления.	12
1.3. Системы с распределенными и сосредоточенными параметрами. Степени свободы.	15
1.4. Классификация и модели сил.	16
1.5. Модели механических воздействий.	21
1.6. Уравнения движения и методы анализа.	29
Контрольные вопросы.	32
Глава 2. Анализ ЭС, приводимых к системам с сосредоточенными параметрами.	33
2.1. Колебания систем с одной степенью свободы.	33
2.2. Колебания систем с двумя степенями свободы.	45
2.3. Колебания систем с шестью степенями свободы.	48
Контрольные вопросы.	54
Глава 3. Анализ ЭС, приводимых к системам с распределенными параметрами.	55
3.1. Свободные изгибные колебания конструкций типа балок.	55
3.2. Вынужденные колебания конструкций типа балок.	56
3.3. Свободные изгибные колебания конструкций типа пластин.	67
3.4. Частотная отстройка как способ борьбы с резонансными колебаниями.	83
3.5. Вынужденные изгибные колебания конструкций типа пластин	86
Контрольные вопросы.	96
Глава 4. Численные методы анализа конструкций ЭС.	97
4.1. Необходимость применения численных методов.	97
4.2. Метод конечных разностей.	97
4.3. Метод конечных элементов.	104
Контрольные вопросы.	109
Глава 5. Определение прочности конструкций ЭС при механических воздействиях.	110
5.1. Расчет прочности конструкций типа балок.	110
5.2. Расчет прочности конструкций типа пластин.	115
5.3. Расчет усталостной долговечности выходов ЭРЭ.	119
Контрольные вопросы.	128
Глава 6. Виброзащита РЭС полимерными демпферами.	130
6.1. Общая характеристика полимерных демпферов.	130
6.2. Основные механизмы и характеристики демпфирования.	134
6.3. Характеристика вибропоглощающих материалов.	138
6.4. Способы создания вибропоглощающих полимеров.	140
6.5. Основы теории конструкций ЭС с полимерными демпферами	147
Контрольные вопросы.	153

Глава 7. Теоретические основы расчета ячеек ЭС с распределенными полимерными демпферами.	154
7.1. Ячейки с внешним демпфирующим слоем.	154
7.2. Ячейки с внутренним демпфирующим слоем.	163
7.3. Алгоритм расчета конструкций с демпфирующими слоями.	178
7.4. Ячейка с полимерными демпферами в виде демпфирующего ребра.	184
Контрольные вопросы.	190
Глава 8. Теоретические основы расчета ячеек ЭС с сосредоточенными полимерными демпферами.	192
8.1. Двухъячеечная конструкция с одной демпфирующей вставкой.	192
8.2. Методы приведения распределенных параметров ячеек к сосредоточенным параметрам.	198
8.3. Конструкции электронных средств с n ячейками.	208
8.4. Динамический гаситель колебаний с демпфированием.	210
Контрольные вопросы.	218
Глава 9. Основы расчета систем виброизоляции.	219
9.1. Порядок расчета систем виброизоляции и исходные данные [33].	219
9.2. Схемы систем виброизоляции и типы виброизоляторов [33].	220
9.3. Статический и динамический расчеты виброизоляторов.	228
Контрольные вопросы.	234
Глава 10. Основы системного подхода к виброзащите электронных средств.	235
10.1. Структура системы виброзащиты ЭС.	235
10.2. Структурно-функциональная схема виброзащиты блока ЭС.	238
Контрольные вопросы.	241
Приложение.	242
Список литературы.	250