

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Т. И. КРАВЧЕНКО

В. В. ФИЛАТОВ

К. А. ДУБОВ

ПРОБЛЕМЫ ОЦЕНКИ КРИТИЧЕСКОГО  
СОСТОЯНИЯ СЛАБОЙ ГРУНТОВОЙ  
СРЕДЫ ПОД ИНЖЕНЕРНЫМИ  
СООРУЖЕНИЯМИ

Монография



Владимир 2017

УДК 621.131.43

ББК 38.58

К78

Рецензенты:

Кандидат технических наук  
профессор кафедры строительных конструкций  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*Е. А. Смирнов*

Кандидат технических наук  
доцент кафедры строительных конструкций  
Ивановского государственного политехнического университета  
*В. С. Ярыгин*

**Кравченко, Т. И.** Проблемы оценки критического состояния  
К78 слабой грунтовой среды под инженерными сооружениями : моно-  
графия / Т. И. Кравченко, В. В. Филатов, К. А. Дубов ; Владим. гос.  
ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. –  
344 с. – ISBN 978-5-9984-0824-3.

Рассмотрены вопросы теории и методики оценки критического усилия и максимальной глубины его проявления на моделях слабой грунтовой среды ( $E < 5$  МПа) от действия различных видов внешней нагрузки. В качестве моделей использованы: однородное упругое полупространство и горизонтально-слоистая толща, лежащая на упругом полупространстве. Внешняя нагрузка соответствует по действию отрицательным и положительным формам техногенного рельефа. Решения получены в рамках закона Гука для плоского напряжённого состояния. Методики расчётов предельного состояния водонасыщенных слоистых грунтов были внедрены в проектные разработки научно-исследовательских организаций.

Предназначена для проектных организаций, аспирантов и студентов, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению 08.03.01, 08.04.01 «Строительство».

Ил. 133. Табл. 60. Библиогр.: 92 назв.

УДК 621.131.43

ББК 38.58

ISBN 978-5-9984-0824-3

© Кравченко Т. И., Филатов В. В.,  
Дубов К. А., 2017

## ПРЕДИСЛОВИЕ

При строительстве и эксплуатации зданий и сооружений, возведённых на слабых грунтовых средах ( $E < 5$  МПа), нередко происходят их существенные деформации, сопровождаемые авариями. Причинами этого является плохая изученность характеристик грунта и несовершенство методов расчёта несущей способности оснований инженерных сооружений.

Анализ существующих методов расчёта несущей способности в грунтовых средах показал, что методы определения критических усилий, обусловленных действием внешних нагрузок, не всегда эффективны и не отвечают условиям строительства.

Методы теории упругости, широко используемые в практике проектирования, позволили нам получить аналитические зависимости для определения критических усилий ( $P_{кр}$ ), возникающих в слабой грунтовой среде от действия внешних нагрузок для условий естественного залегания грунтов.

При разработке методики оценки критических усилий в качестве моделей слабой грунтовой среды были использованы: однородное упругое полупространство и горизонтально-слоистая толща, лежащая на упругом полупространстве. Внешняя нагрузка по своему действию соответствовала положительным и отрицательным формам техногенного рельефа.

Изучение критических усилий под действием внешних нагрузок, эпюра которых имеет треугольную и трапециевидную формы при выборе модели среды в виде упругого полупространства, показало, что зависимость  $P_{кр}$  и максимальной глубины его проявления  $z_{\max}$  от физико-механических свойств грунта ( $\varphi, c, \gamma$ ) близки к линейным. В связи с этим была осуществлена аппроксимация аналитических зависимостей  $P_{кр}$  и максимальной глубины его проявления  $z_{\max}$  линейными функциями, аргументами которых являются  $\varphi, c, \gamma$ . Переход от сложных аналитических зависимостей к линейным, позволил применить номограммы для расчётов  $P_{кр}$  и  $z_{\max}$ .

Классические методы расчёта имеют недостатки и ограничения. Поэтому аналитические методы расчёта были дополнены решениями, имеющими другие математические и физические основы. К этим методам относятся: численные, поляризационно-оптический и радиоизотопный.

Изложенные в монографии результаты исследований посвящены решению основной проблемы в строительстве – определению критических усилий под фундаментами инженерных сооружений на участках развития слабых грунтов.

Анализ напряжённого состояния моделей слабых грунтовых сред, выполненный с помощью аналитического, численных и физических методов, свидетельствует, что эти методы имеют сопоставимые результаты. Поэтому их можно использовать в равной мере для изучения и оценки несущей способности слабых грунтовых сред с учётом условий решения конкретной задачи проектирования.

Авторы благодарят магистра Института архитектуры, строительства и электротехники В.М. Нафеева за оформление рисунков.

## INTRODUCTION

Significant deformations of buildings and structures erected on soft soil ground ( $E < 5$  MPa) and followed by breakage frequently occur during their construction and upkeep. The reasons for this is poor knowledge of the soil characteristics and the imperfection of the calculation methods of the foundations bearing capacity of engineering structures.

Analysis of the existing methods of calculating the bearing capacity in soil grounds has shown that the methods of determining the critical effort driven by the action of the external loads are not always effective and do not meet the building conditions.

Methods of the elastic theory, widely used in the design practice, have allowed us to obtain the analytical dependence for determining the critical efforts ( $P_{cs}$ ), arising in soft soil grounds as a result of the external loading effect for the undisturbed soils. A homogeneous elastic half-space or horizontal bedded formation resting on the elastic half-space has been used as a model of the soft soil ground when developing methods for the critical efforts assessment. The external loading in its effect correspond to positive and negative forms of technogenic relief.

The research of the critical efforts under the external loading action, the curve of which is of a triangular and a trapezoidal shape while choosing the model environment in the form of the elastic half-space, has shown that the dependence of  $P_{cs}$  and its maximum developing height  $z_{max}$  from physical-mechanical soil properties ( $\varphi, c, \gamma$ ) is close to linear. In this regard, the analytical dependences approximation of  $P_{cs}$  and its maximum developing height  $z_{max}$  by the linear functions, whose arguments are  $\varphi, c, \gamma$  has been carried out. Transition from the complex analytical dependences to the linear ones allowed to use the nomograms for  $P_{cs}$  and  $z_{max}$  calculation.

Classical calculation methods have drawbacks and limitations. Analytical calculation methods have been supplemented by solutions having other mathematical and physical basis. These methods include: numerical, polarization-optical and radioisotope.

Results of the investigation represented in the monograph are concerned with solving the basic problems in building – determination of critical efforts under the engineering structures foundations in areas of soft soil ground development. Analysis of the stress state of soft soil grounds models performed by using analytical, numerical and physical methods shows that these methods have comparable results. Therefore they can be used equally for investigation and evaluation of the bearing capacity of the soft soil grounds with due regard for the condition of the specific design problem solution.

The authors thank the master of the Institute of architecture, building and electrical engineering V. M. Nafeesa for making drawings.

# Глава 1. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕД ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ВНЕШНЕЙ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

## 1.1. Проблема изучения критических нагрузок в грунтовой среде (двухмерная задача)

### *Характеристика слабых водонасыщенных грунтовых сред.*

Анализ причин деформаций сооружений, расположенных на слабых грунтах показал, что их характеризуют некоторые особенности, специфичные для этой группы слабых грунтов, которые необходимо учитывать при проектировании сооружений. Слабые грунты особенно широко распространены в северо-западных районах Российской Федерации. Суммарная мощность толщ слабых грунтов сравнительно невелика, обычно не более 20-30 м; в ряде районов она достигает 50 м.

По условиям образования и залегания слабые грунты можно разбить на три группы: морские и озёрные отложения, образующие слоистые толщи (пески, супеси, суглинки, глины, органогенные и минеральные илы); покровные отложения, залегающие на плоских участках, на склонах и под склонами (торфяники, глинистый элювий коренных пород, «размоченный» лёсс, делювиальные отложения склонов, пролювий конусов выноса); техногенные отложения, залегающие в форме бугров, терриконов или во впадинах рельефа, в оврагах, в карьерах в форме карманов (городская свалка, отвалы промышленных отходов и др.).

Слабые грунты характеризуется низкими показателями механических свойств. Им присуща избыточная увлажнённость, малая прочность, высокая сжимаемость и низкая несущая способность, приводящие к большим деформациям оснований, в результате которых может происходить их разрушение.

В соответствии с исследованиями (Абелев М.Ю., 1973; 1983) к слабым грунтам относят группу водонасыщенных глинистых грунтов значение модуля общей деформации, которых равно или меньше 5,0 МПа, а степень влажности больше 0,8, т.е. более 80% пор которых заполнены водой. Для большинства слабых грунтов значение угла внутреннего трения меняется от 0 до  $14^{\circ}$ , а значения коэффициента сцеп-

ления от 0,01 до 0,02 МПа. К водонасыщенным глинистым грунтам относятся грунты различного происхождения (аллювиальные, морские делювиальные и т.д.), которые в результате литогенеза или других, природных факторов стали сильносжимаемыми и водонасыщенными. К этой группе относят илы, ленточные глины, водонасыщенные лессовые макропористые и заторфованные грунты, а также некоторые другие виды глинистых грунтов. Состав, структура, текстура, а, следовательно, и свойства слабых водонасыщенных глинистых грунтов формируются в процессе их генезиса и изменяются под влиянием постгенетических процессов (диагенеза, эпигенеза и гипергенеза). При воздействии вибрации прочность этих грунтов понижается, т. е. появляются у них тиксотропные свойства. Осадка зданий, возведённых на таких грунтах, развиваются в течение десятков лет и достигают больших величин. При изучении отдельных видов слабых водонасыщенных глинистых грунтов необходимо применять генетический подход для установления закономерностей, присущих грунтам данного вида. Свойства слабых водонасыщенных глинистых и торфяных грунтов зависят от их минералогического состава. Кроме того на свойства этих грунтов влияют органические вещества, входящие в их состав. Присутствие большого количества органических веществ (более 10 %) в торфяных грунтах создаёт новые своеобразные свойства этих грунтов. Поэтому изучение торфов и заторфованных грунтов следует проводить по специальной методике, которая в некоторых случаях может отличаться от методики исследования слабых грунтов, не содержащих органических веществ. Для определения физических и механических характеристик и свойств слабых грунтов проводились многолетние лабораторные и полевые исследования на различных участках территории РФ. Результаты этих исследований приведены в работах (Абелев М. Ю., 1973; 1983) и представлены в таблице 1.1.

По результатам исследований, приведёнными в работах (Амарян Л.Г., 1990;1995), к слабым грунтам относятся типы слаболитифицированных био-и минерогенных грунтов, состоящие из торфов, заторфованных грунтов, сапропелей и морских илов. В генетическом отношении органические и органно-минеральные типы слаболитифицированных грунтов характеризуются общностью зарождения в водной или избыточно увлажнённой среде с протеканием сложных микробиологических и биохимических процессов распада органического вещества и осадконакопления в анаэробных условиях.

Таблица 1.1.

Физико-механические характеристики слабых грунтов (Абелев М.Ю., 1973;1983)

Наименование грунтов	Уд. вес, г/см <sup>3</sup>	Влажность, %	Предел пластичности		Коэф. пористости $\epsilon_0$	Коэф. сжимаемости, см <sup>2</sup> /кгс	Кол. орган. веществ, %	Уплотняющее давление, кг/см <sup>2</sup>
			W <sub>L</sub>	W <sub>p</sub>				
Ил:								
речной (Архангельск),	2,68	72,5	75,6	39,2	1,98	0,22	5,6	-
озёрный (Красноармейск),	2,68	49,2	47,1	25	1,4	0,12	3,7	-
органо-минеральный (Рига)	2,32	158	180,2	81,2	3,83	0,81	12,8	-
Лёсс (Грозный)	2,7	-	22,3	17,4	1,06	0,09	-	-
Лёсс (Оби-Кинск)	2,71	-	0,01	18	0,76	0,06	-	-
Паста: из глины неокома (Саратов),	2,71	77,2	75,8	37	2,09	0,24	-	-
из хвалынской глины (Волгоград)	2,69	67,3	61,6	26,4	1,81	0,17	-	-
Ил речной (Кашира)	2,6	52,9-54,95	49,7	29,7	1,36 - 1,43	-	-	0,2
Каолинит (паста)	2,68	50,1	56,6	39	1,26-1,3	-	-	0,5
Бентонит (паста)	2,68	106	120,2	40,1	2,62-2,68	-	-	0,5

Таблица 1.2.

Классификация слабых органо-минеральных грунтов (Амарян Л.Г.,1990)

Подгруппа грунта	Тип грунта	Вид грунта	Сопротивление сдвигу $\tau$ , $10^5$ Па	Естественная влажность (мягкопласт. пород) $w_0$ , %	
Органический	Торф нормально-зольный	Слабо-разложившийся	$> 0,05$	$>1200$	
		Средне-разложившийся	$> 0,05$	800-1200	
		Сильно-разложившийся	$> 0,05$	500-800	
	Торф высокозольный	Слабо-разложившийся	$> 0,07$	500-600	
		Средне-разложившийся	$> 0,07$	400-500	
		Сильно-разложившийся	$> 0,07$	$< 400$	
	Сапропель	Сапропель	Слабо-минеральный	$< 0,03$	$>500$
			Средне-минеральный	$< 0,05$	300-500
			Минеральный	$> 0,05$	180-300
			Сильно-зоторфованные	$> 0,08$	300-400
Органо-минеральный	Заторфо-ванные песчаные и глинистые	Средне-зоторфованные	$> 0,08$	200-300	
		Слабо-зоторфованный	$> 0,08$	$< 200$	
	Ил	Глинистый	$> 0,05$	$> 60$	
		Суглинистый	$> 0,1$	$> 35$	
		Супесчаный	$> 0,1$	$> 30$	
Минеральный					

Вследствие этих генетико-литологических причин таким грунтам присуща – избыточная увлажнённость, низкая плотность, весьма незначительная прочность и сильная сжимаемость. Классификация слабых органо-минеральных грунтов, изложенная в работе (Амарян Л.Г.,1990), представлена в таблице 1.2.

Длительность протекания осадки грунта при нагружении объясняется существенным уменьшением объёмов порового пространства, резко

снижающим (на несколько порядков) их водонепроницаемость (Амарян Л.Г.,1990). Эти грунты могут быть использованы в инженерно – строительных целях лишь после проведения специальных мероприятий по их уплотнению или укреплению. Именно по этой причине нормативные документы не допускает возможность опирания фундаментов на названные типы грунтов слабой степени литификации, исключая возведения сооружений плавающего типа или в виде песчаных насыпей.

В торфяных основаниях дорожных насыпей за десятилетия эксплуатации влажность грунта снижается лишь до 18-22 % , а коэффициент пористости до 2,7- 3,3 , при модуле общей деформации порядка 0,3 - 0,7 МПа. Важное место в оценке устойчивости и несущей способности торфяных залежей занимает учёт сапропелевых отложений, залегающих под торфом. Это объясняется тем, что сопротивлению сдвигу или удельное сцепление сапропелей нередко на порядок ниже, чем у торфа и колеблется в слабоминерализованных сапропелях в пределах  $(0,003 - 0,03) \cdot 10^5$  Па.

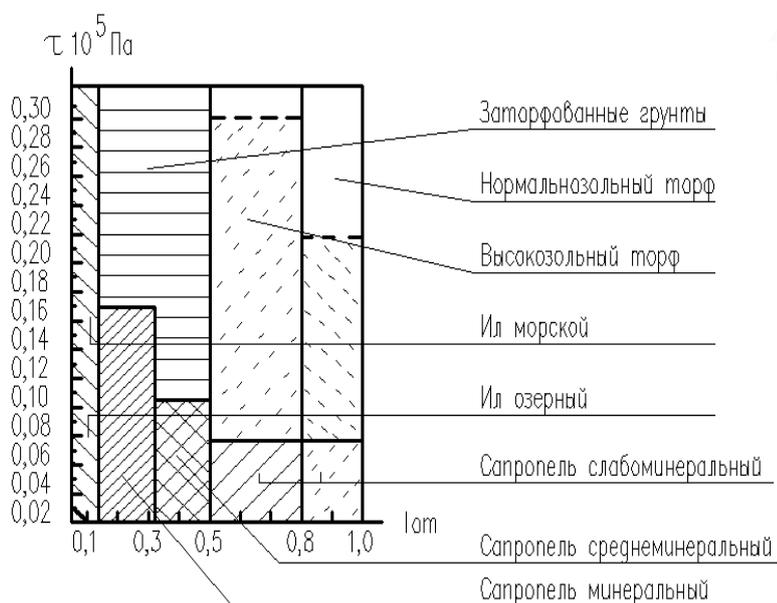


Рис. 1.1. Зависимость показателя прочности  $\tau$  слабых грунтов при различном содержании органических веществ  $I_{от}$  (Амарян Л.Г.,1990)

Это обстоятельство приводит к тому, что под действием внешней нагрузки сапропелевые отложения выдавливаются, нарушая устойчивость откосов. Изменчивость показателя прочности слабых грунтов (Амарян Л.Г.,1995) в зависимости от относительного содержания органических веществ представлена на рис. 1.1.

К категории слабых грунтов (Далматов Б.И.,1975) также относятся водонасыщенные глинистые грунты, которые при давлении до 0,3 МПа имеют модуль деформации 3-5 МПа и относительную влажность больше 0,8. Угол внутреннего трения весьма мал и может быть принят равным нулю, а сопротивление сдвигу – величине сцепления. Устойчивость сооружений, возводимых на слабых водонасыщенных грунтах, обеспечивается при соблюдении условия:

$$\tau_{\max} < c, \quad (1.1)$$

где  $\tau_{\max}$  – максимальное значение главного касательного напряжения, вызываемого нагрузкой от сооружений;  $c$  – удельное сцепление грунта.

На основании исследований (Далматов Б.И,1975) слабые грунты сгруппированы по физико-механическим свойствам и представлены в табл.1.3.

Таблица 1.3.

Физико - механические характеристики слабых грунтов (Далматов Б.И,1975)

Наименование грунтов	Удельный вес грунта $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °	Удельное сцепление грунта $c$ , кН/м <sup>2</sup>
Суглинок ленточный водонасыщенный	10	17	5
Торфяной грунт верховой	1,5-1,6	8	0,45
Торфяной грунт низинный	1,45-1,55	12	0,6
Суглинок мягкотелый	1,9	18	2
Глины мягко - пластичных пород	1,88-1,96	8-16	0,015-0,035
Глины текучих пород	1,61-1,88		0,05-0,015
Суглинки текучих пород	1,8-1,9	14-23	0,015-0,026
Глины туго-пластичных пород	1,96-2,01	8-16	0,05-0,06
Песчано - супесчаные породы, увлажнённые водой	1,7-2,1	25-32	0,013-0,035

Таблица 1.4.

Нормативные значения физических и механических характеристик инженерно-геологических элементов (ИГЭ) слабых грунтов

Наименование грунтов / Физ.- мех. свойства грунтов	ИГЭ-1. Суглинок полутвердый	ИГЭ-2. Суглинок тугопластичный	ИГЭ-3. Суглинок мягкопластичный	ИГЭ-4. Суглинок текучепластичный	ИГЭ-5. Супесь пластичная	ИГЭ-6. Песок мелкий, средней плотности, средней степени водонасыщенный
Природная влажность, $W$ , %	29.2	26.8	30.2	32.7	26.2	13.1
Число пластичности, $I_p$ %	13.3	12.5	10.7	10.1	5.4	-
Показатель текучести, $I_L$ , д.ед.	0.14	0.37	0.61	0.85	0.49	-
Плотность частиц, $\rho_s$ , г/см <sup>3</sup>	2.70	2.69	2.69	2.68	2.67	2.65
Плотность грунта, $\rho$ , г/см <sup>3</sup>	1.86	1.91	1.89	1.84	1.93	1.84
Плотность в сухом состоянии, $\rho_d$ , г/см <sup>3</sup>	1.44	1.50	1.47	1.39	1.55	1.62
Коэффиц. пористости, $e$ , д.ед.	0.88	0.80	0.84	0.93	0.72	0.63
Коэффиц. водонасыщения $S_r$ , д.ед.	0.90	0.93	0.94	0.93	0.91	0.57
Удельное сцепление, $c$ , кПа	21	20	16	14	14	2
Угол внутреннего трения, $\varphi$ , град.	20	21	18	17	23	32
Модуль деформации, $E$ , МПа	11.6	13	9.4	2.8	17.8	28
Удельный вес, $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	18.27	18.76	18.59	18.07	18.97	18.08

Результаты инженерно-геологических изысканий, выполненных в 2013 г. ООО ГП "Промнефтегазэкология" и ОАО «МАГНИТОГОРСКИЙ ГИПРОМЕЗ» на площадке, расположенной на II надпойменной террасе реки Туры показали, что к слабым грунтам относятся следующие виды грунтов, указанных в таблице 1.4. Значения физических показателей свойств грунтов были также определены лабораторными методами. Нормативные значения прочностных и деформационных характеристик ИГЭ-1 – ИГЭ-5 приняты по результатам лабораторных испытаний грунтов, значения для ИГЭ-6 и ИГЭ-7 приняты в соответствии нормативным документом (СП24.13330.2011,1995) с учётом данных статического зондирования грунтов. Нормативные значения физических и механических характеристик слабых грунтов по данным изысканий ООО ГП "Промнефтегазэкология" и ОАО «МАГНИТОГОРСКИЙ ГИПРОМЕЗ» представлены в таблице 1.4.

Водонасыщенные рыхлые пески (аллювиальные, озёрно-морские и др.) в условиях статического нагружения не испытывают больших деформаций, поэтому осадки сооружений не имеют опасного развития. Однако выполнение строительных работ в непосредственной близости от других зданий может существенно изменить картину. Сваи, погружаемые в рыхлые водонасыщенные пески вибрированием или забивкой должны располагаться на достаточном удалении от существующих фундаментов. В водонасыщенных рыхлых песках применение глубинного водоотлива при наличии сооружений возле котлована является нежелательной мерой, т.к. понижение уровня подземных вод на длительный период времени вызывает уплотнение грунта и развитие его дополнительной осадки.

Анализ природных свойств слабых грунтов указывает на их различное происхождение, различный химический и минералогический состав, но при этом они могут обладать одинаковыми характеристиками сжимаемости и прочности.

## 1.2. Влияние подземных вод на физические свойства грунтовых сред

На различной глубине от поверхности земли встречаются грунты, содержащие подземные воды. Грунтовые воды оказывают большое влияние на структуру, физическое состояние и прочность грунтов. Различные примеси, растворённые в воде, могут вредно (агрессивно) влиять на материал фундаментов и разрушать его. Поэтому при проектировании и возведении фундаментов необходимо детально изучать грунтовые воды в районе постройки. Вода в грунте скапливается вследствие конденсации паров, проникающих вместе с воздухом, и просачивания дождевых и талых снеговых вод. Поэтому уровень грунтовых вод непостоянен: наиболее высокий уровень их бывает весной, наиболее низкий – зимой и летом. Вблизи открытых водоёмов (река, канал, озеро и т. д.) колебание уровня грунтовых вод обычно связано с колебанием уровня воды в водоёме.

После проведения земляных планировочных работ условия стока и просачивания вод меняются, что может повлечь изменение режима грунтовых вод. Распределение вод в толще грунта во многом зависит от характера его напластования. Вода задерживается при просачивании над водоупорными (главным образом – тяжелыми глинистыми) грунтами и скапливается в водопроницаемых (песчаных) слоях, которые в этом случае называются водоносными. Очевидно, что этот уровень вод должен выявляться при изысканиях и учитываться при проектировании.

Необходимо отметить, что при просачивании воды небольшое количество ее всегда задерживается в верхнем почвенном слое (почвенные воды, верховодка). Не оказывая влияния на конструкцию фундаментов, наличие этих вод заставляет всегда принимать меры по изоляции фундаментов и стен от влаги. Существующее положение уровня или напора подземных вод и возможность его изменения в период строительства и последующей эксплуатации, возводимых зданий и сооружений, влияют на выбор типа фундамента и его размеров, а так же на выбор водозащитных мероприятий и характер производства строительных работ.

Изменение уровня грунтовых вод после возведения сооружения может резко понизить прочность основания и вызвать серьезные деформации

сооружения в следующих случаях; при понижении уровня или напора подземных вод могут также возникать дополнительные осадки пылевато-глинистых, биогенных и песчаных грунтов; изменения уровней подземных вод часто ведут к формированию или интенсификации опасных инженерно-геологических процессов (карст, оползни, суффозия и т.д.).

Тонко - дисперстные и пылеватые рыхлые песчаные грунты под действием внешнего давления текут вместе с водой. Такие грунты называются пльвунами. Если грунтовые воды имеют выход на поверхность (например, в местах резкого изменения рельефа, при рытье котлована или шурфа и т. д.), возникает опасность выноса частиц грунта из-под проектируемого сооружения или из-под зданий, расположенных рядом с котлованом. Поэтому при проектировании сооружения на пльвуне необходимо специальными исследованиями установить пределы распространения пльвунов, возможность выноса их в местах резких переломов поверхности рельефа, характер и рельеф подстилающих грунтов, направление и скорость движения грунтовых вод.

При проектировании оснований должна учитываться возможность изменения гидрогеологических условий в процессе строительства и эксплуатации сооружения, а именно: наличие и возможность образования верховодки; естественные сезонные и многолетние колебания уровня подземных вод; возможное техногенное изменение уровня подземных вод; степень агрессивности подземных вод по отношению к материалам конструкций и коррозионную активность грунтов на основе данных инженерных изысканий с учётом технологических особенностей производства.

При проектировании оснований следует учитывать возможность появления больших осадок при применении открытого водоотлива, вызывающего вынос частиц грунта из-под фундаментов, особенно, если верхняя часть основания сложена песками. Поэтому для уменьшения вредных последствий открытого водоотлива или глубинного водопонижения в проектах оснований должны предусматриваться соответствующие технические мероприятия.

### 1.3. Фазы напряжённого состояния в грунтовой среде

Напряжённое состояние определяется с использованием решений теории модели линейно – деформируемого грунта, если в основании фундамента или полностью отсутствуют зоны, в которых нарушена прочность грунта, и он находится в предельном состоянии или они незначительны по своим размерам. Напряжения, возникающие в грунтовой среде, могут превзойти силу внутренних связей (предельную прочность). Это приведёт к нарушению существующего равновесия, потере устойчивости грунтовых оснований сооружений. При действии увеличивающихся статических нагрузок на слабые грунты основными прочностными показателями сопротивления грунтового слоя являются показатели сопротивления их сдвигу. Показатели сопротивления грунтов сдвигу являются не постоянными и зависят от многих причин: давления, условий на контакте участков грунта, его плотности, деформативности и других факторов. Вместе с этим при действии возрастающих вертикальных давлений в грунтовой среде возникает фазовое напряженно-деформированное состояния грунта.

Анализ результатов испытания грунтовых сред штампом (Петраков А.А., 2004) позволяет выделить следующие фазы напряженно-деформированного состояния грунта: 0 – фаза упругих деформаций; I – фаза уплотнения; II – фаза сдвигов; III – фаза выпора. Кратко охарактеризуем напряженно-деформированное состояние грунта в каждой из выделенных фаз (рис.1.2).

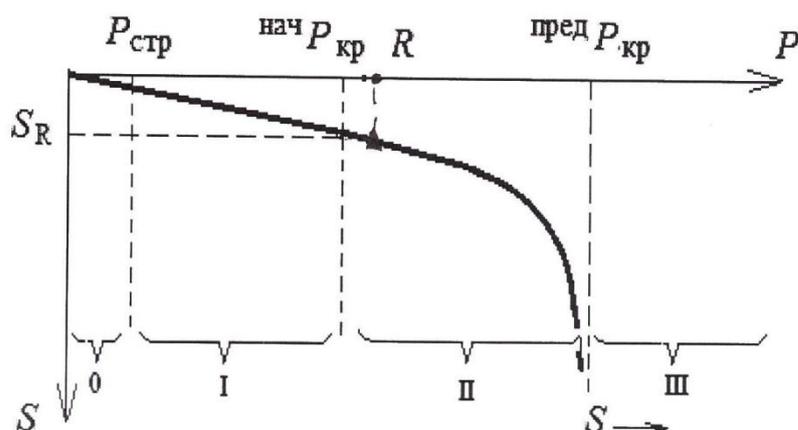


Рис. 1.2. Фазы напряженно-деформированного состояния грунта:  $P_{стр}$  – структурная прочность;  $нач P_{кр}$  – начальное критическое давление;  $пред P_{кр}$  – предельное критическое давление;  $R$  – расчетное сопротивление грунта;  $S$  – осадка, получаемая испытанием грунтов основания штампом;  $S_R$  – осадка, возникающая при действии критической нагрузки на грунт

**Фаза упругих деформаций** характеризуется уровнем напряжений в скелете грунта, не превышающим прочность структурных связей между минеральными частицами грунта или структурной прочностью грунта (Петраков А.А, 2004). Деформация грунта в этой фазе обратима и пренебрежимо мала, т. к. она обусловлена сжимаемостью минеральных частиц. Уровень напряжений, соответствующий завершению этой фазы, называется структурной прочностью грунта  $P_{стр}$  и он обычно не превышает 5-10% допустимых на грунт давлений. В этом случае в соответствии с диаграммой напряжений Мора соблюдается допредельное устойчивое напряжённое состояние, отвечающее условию (Цытович Н.А., 1983):

$$\tau \leq \operatorname{tg} \varphi + c \text{ или } \tau \leq \sigma f + c, \quad (1.2)$$

где: постоянные  $f = \operatorname{tg} \varphi$  и  $c$  – коэффициент внутреннего трения и коэффициент сцепления,  $\tau$  – касательное напряжение, действующее в заданных точках грунта,  $\sigma$  – нормальное напряжение в этих точках.

**Фаза уплотнения** соответствует уровням напряжений в грунте, в диапазоне которых процесс его деформирования удовлетворительно подчиняется закону уплотнения Терцаги К. (Терцаги К., 1961). Линейная зависимость между деформациями и напряжениями в этой фазе не является обратимой. При разгрузке штампа из диапазона давлений, соответствующего фазе уплотнения, грунт деформируется по линейной зависимости, не совпадающей с ветвью нагрузки. При полной разгрузке штампа имеет место необратимая (пластическая) осадка, соответствующая нулевым напряжениям по подошве. Таким образом, закон уплотнения Терцаги позволяет принять линейную зависимость между напряжением и суммой упругой и пластической деформации грунта при определённых условиях (Цытович Н.А., 1983).

**Фаза сдвигов** характеризует начало образования в грунте зон предельного равновесия (Петраков А.А, 2004). Зоной предельного равновесия в грунте называют геометрическое место точек, в которых не удовлетворяются условия прочности Кулона-Мора. Первоначально эти зоны образуются по краям штампа, где имеет место концентрация напряжений. Уплотнение грунта в этой фазе практически не происходит. Грунт считается несжимаемым, а коэффициент Пуассона в этой фазе близок к 0,5. Давление на грунт, соответствующее началу фазы сдвигов, называют начальным критическим давлением –  $^{нач} P_{кр}$ .

В этом случае соблюдается предельное равновесие, отвечающее условию (Цытович Н.А.,1983):

$$\tau = \text{tg } \varphi + c \text{ или } \tau = \sigma f + c . \quad (1.3)$$

**Фаза выпора** является следствием развития фазы сдвигов в области грунтового массива, являющегося основанием штампа, с образованием поверхностей скольжения, отделяющих основание штампа от нижележащего грунтового массива. В результате этого осадки штампа происходят без увеличения нагрузки за счет перемещения грунта основания. Вокруг штампа происходит поднятие (выпор) грунта. Давление, при котором наступает фаза выпора, называется предельным критическим давлением –  $P_{\text{кр}}^{\text{пред}}$  (Петраков А.А, 2004).

В соответствии с охарактеризованными выше фазами напряженно-деформированного состояния грунта применяются его следующие расчетные модели, приведённые в таблица 1.5.

Таблица 1.5.

Расчётные модели грунта в соответствии с фазами его напряженно-деформированного состояния

Уровень давлений $P$	Расчетная модель грунта	Характеристики модели грунта	Методы анализа
$P \leq P_{\text{стр}}$	Упругая среда	Модуль упругости	Теория упругости
$P_{\text{стр}} < P < P_{\text{кр}}^{\text{нач}}$	Линейно-деформируемая неупругая среда	Модуль деформации при нагрузке и модуль упругости при разгрузке	Теория упругости анизотропной среды
$P_{\text{кр}}^{\text{нач}} \leq P < P_{\text{кр}}^{\text{пред}}$	Упругопластическая среда	Функциональная зависимость деформаций от напряжений	Теория пластичности

Рассмотрим картину напряжённо-деформированного состояния грунта под действием нагрузок для различных типов глинистых грунтов.

#### 1.4. Развитие деформаций в грунтовых средах различной консистенции под действием возрастающей нагрузки

*Развитие деформаций в грунтовых средах под заглублёнными штампами.* Решение задачи об устойчивости слабых грунтовых сред под действием вертикальной нагрузки имеет большое самостоятельное значение. Создание методов расчёта, как по несущей способности, так и по деформативности сдерживается отсутствием достаточного объёма экспериментального материала о работе глинистых грунтов.

Учитывая малый объём экспериментальных исследований для оценки несущей способности слабых глинистых грунтовых сред, Березанцев В.Г. (Березанцев В.Г., 1960,1970) предложил исходить из положений для песчаных грунтов.

Исследованиями, проведёнными с глинистыми грунтами туго- и мягкопластичной консистенции (Дубов К.А., 1980), установлена последовательность развития в них деформации. Глинистые грунты, как и песчаные, при нагружении их вертикальной нагрузкой через жесткий штамп проходят три фазы деформаций (Приложение 1).

На первой фазе приложения нагрузки ( $P = 0,3 P_{пр}$ ) в глинистых грунтах наблюдается процесс уплотнения; частицы его движутся в основном, вертикально вниз с очень незначительным отклонением в стороны. Уплотнение в грунтах тугопластичной консистенции происходит на глубине  $(1,7-1,8) b$ , где  $b$  – ширина штампа, а в грунтах мягкопластичной консистенции перемещения частиц затухают на глубине  $(2,3-2,5) b$ . По мере удаления на расстоянии  $(0,7-0,95) b$  в каждую сторону от оси штампа и на глубину до  $2,5 b$  ниже подошвы, перемещения частиц грунта затухают. На этой стадии нагружения осадку штампа можно считать пропорциональной внешней нагрузке (рис.1.3,б). Эта фаза близка к первой фазе деформации по Герсеванову Н.М. (Герсеванов Н.М.,1948), установленная им для песчаных грунтов. К окончанию этой фазы при нагрузке, составляющей  $P = (0,3-0,4) P_{пр}$ , осадка в грунтах при  $I_L > 0,5$  больше, чем в грунтах тугопластичной консистенции и в дальнейшем она возрастает более интенсивно, чем в грунтах при  $I_L < 0,5$ .

По мере дальнейшего увеличения нагрузки на штамп график  $S = f ( P )$  (рис. 1.3,б) криволинеен, осадки начинают возрастать более интенсивно. В этот период траектории перемещения частиц отклоня-

ются от вертикального направления, появляются горизонтальные деформации грунта. На этой фазе (II фаза по Герсеванову Н.М.) в грунтах полутвердой и тугопластичной консистенции деформации происходят, в основном, за счет развивающихся сдвигов частиц грунта. В начале этой фазы у краев штампа наблюдается более заметный поворот частиц грунта к поверхности. Следует особо отметить, что глинистый грунт не выдавливается сразу на поверхность, а обтекает некоторый участок, примыкающий к штампу. На этом участке глинистый грунт в силу сцепления сжимается, следуя за основным сжимаемым массивом грунта, находящимся непосредственно под штампом (рис.1.3, а,б). На участках обтекания симметрично по отношению к оси штампа появляются разрывы сплошности основания – тонкие трещины, направленные в стороны от штампа приблизительно под углом  $45^\circ$  в глубь основания и свидетельствующие о растягивающих напряжениях в грунте.

В грунтах мягкопластичной консистенции продолжается процесс уплотнения, разрывы сплошности наблюдаются редко, деформации по сравнению с грунтами при  $I_L < 0,5$  отличаются более локальным характером. Трещины в глинистых грунтах при  $I_L < 0,5$ , а иногда и при  $I_L > 0,5$  наблюдались там, где в песчаных грунтах зафиксированы зоны разрыхления (понижение плотности).

Наращение горизонтальных деформаций при нагрузках, начиная с  $P = 0,5P_{пр}$  во II фазе работы оснований, связано с деформированием уплотненного ядра. Осадки штампа возрастают, заметно увеличиваются и горизонтальные деформации, имеющие наибольшие размеры на глубине (0,65 – 0,85) *в* ниже подошвы штампа. На расстоянии (1,3 – 1,75) *в* влево и вправо от штампа горизонтальные деформации значительно уменьшаются. Траектории перемещения части грунта симметричны по отношению к оси штампа; они плавные и слева и справа переходят в криволинейные.

Переход от II фазы деформаций (фазы сдвигов) к III фазе (потере несущей способности) обуславливается возникновением областей, где явно выражен поворот частиц в стороны и вверх к поверхности основания.

При нагрузках  $P = (0,7-0,8)P_{пр}$  в грунтах при  $I_L < 0,5$  и при  $I_L > 0,5$  на расстоянии соответственно (1,5 - 2,0) *в* и (2,2 - 2,6) *в* от штампа перемещения грунта в глубь основания практически отсутствуют. Горизонтальные деформации в грунтах при  $I_L < 0,5$  в этот момент наиболее велики; максимум их находится на глубине (0,8-0,9) *в* ниже подошвы штампа. К моменту окончания формирования уплотнённой зоны (ядра) при  $P = (0,9 - 0,95)P_{пр}$  горизонтальных перемещений в грунтах при  $I_L < 0,5$  почти не наблюдаются; в грунтах при  $I_L > 0,5$  горизонтальные деформации происходят.

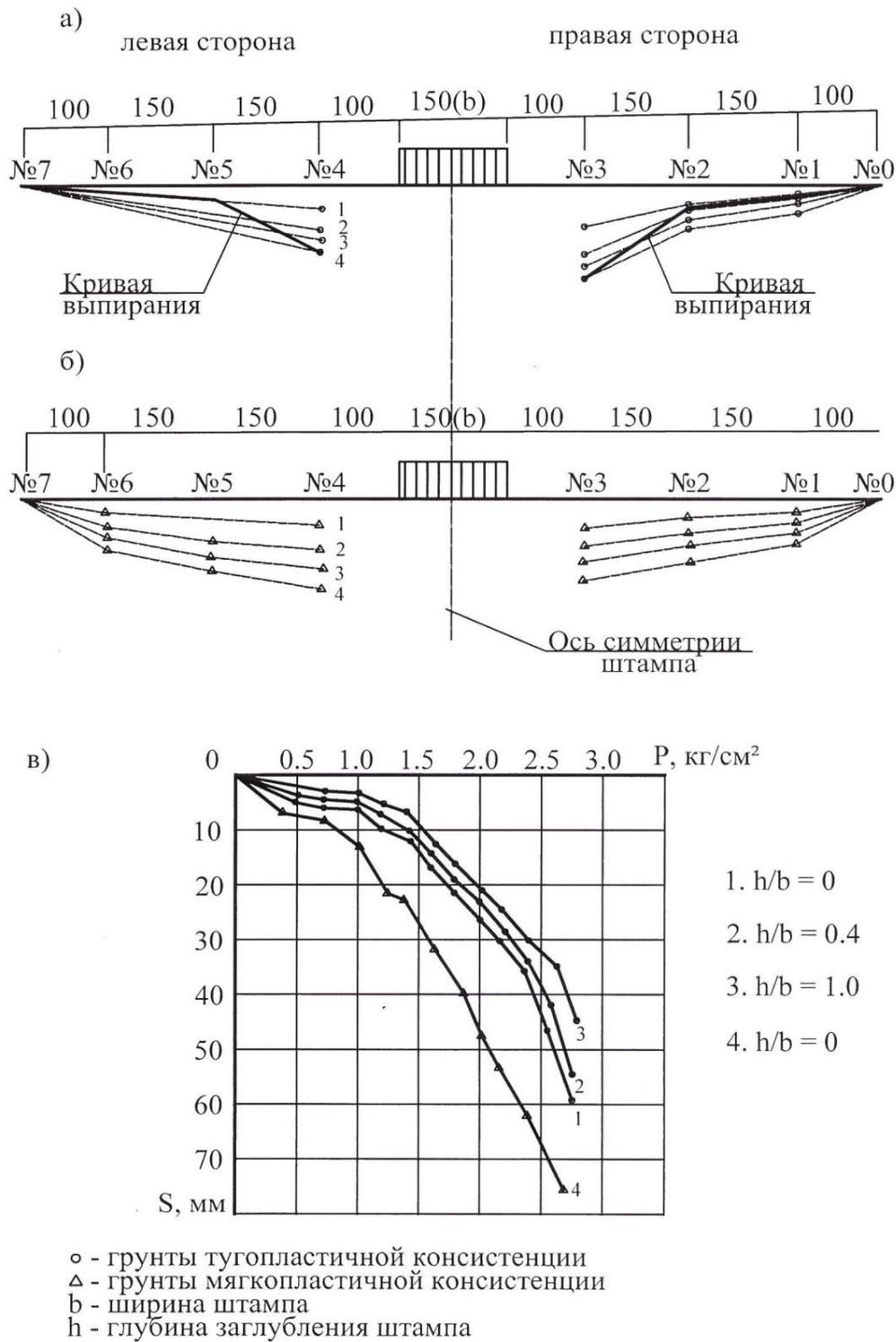


Рис.1.3. Вертикальные деформации глинистого грунта под штампом (грунт – глина с  $I_P=17,8$ ;  $I_L=0,30$ ;  $0,55$ ;  $\gamma_0 = 18,9$ ;  $18,0$  кН/м<sup>3</sup>):  
 а) положение поверхности грунта тугопластичной консистенции в точках №1 - №7 при давлении 1,2; 2,0; 2,4; 2,6 кгс/см<sup>2</sup> соответственно для кривых 1.2.3.4; б) тоже для грунтов мягкопластичной консистенции; в) зависимость  $S = f(P)$

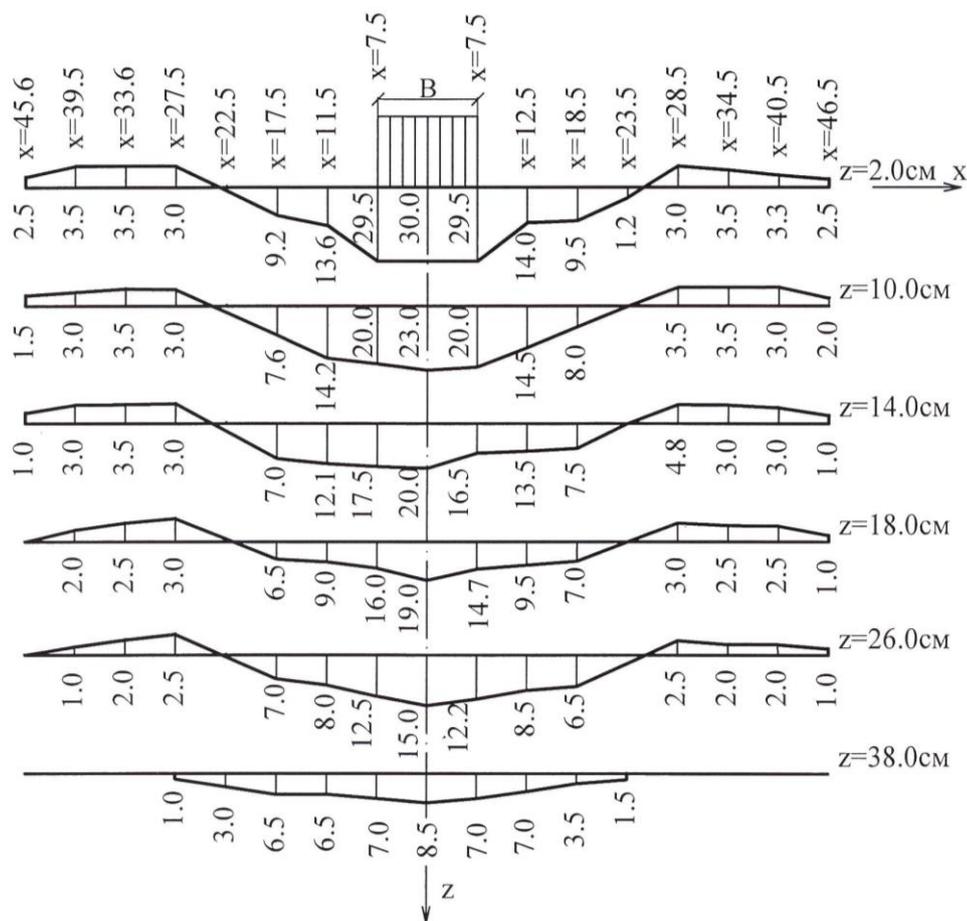


Рис.1.4. Эпюры вертикальных деформаций глинистого грунта тугопластичной консистенции к моменту потери устойчивости ( $P = 2,4 \text{ кгс/см}^2$ ; ширина штампа  $b=15\text{см}$ ).Ординаты эпюр вертикальных деформаций даны в мм.

Эпюры вертикальных перемещений (рис. 1.4) в различных горизонтальных сечениях под штампом, качественно не отличались от таковых в линейно-деформируемом основании, затухают по глубине медленнее. Величина деформируемой зоны по глубине составляет (2,0 -2,3)  $\nu$  при  $I_L < 0,5$  и (2,6-3,0)  $\nu$  в грунтах мягкопластичной консистенции.

В III фазе деформаций, к моменту потери основанием устойчивости в глинистых грунтах при  $I_L < 0,5$  явно выражены повороты траектории частиц грунта вверх к поверхности основания, при этом угол поворота тем больше, чем больше влажность, глубина заглубления штампа и меньше плотность грунта. Траектории движения частиц плавные, и они выходят на поверхность слева и справа от боковых граней штампа зоны сдвигов (пластические области) при предельной нагрузке достигают величины (2,2 – 3,5)  $\nu$  и имеют симметричную форму.

В грунтах мягкопластичной консистенции ( $I_L > 0,5$ ) эти процессы выражены слабо при значительной величине осадки штампа (рис. 1.3, в). В этом случае потеря устойчивости происходит раньше, поскольку осадка в них достигает значительных величин при небольшом развитии областей сдвигов (пластические области). При предельной нагрузке они достигали размеров (1,7 -1,9) в влево и в право от боковых граней штампа, и в ряде случаев не достигают поверхностей основания штампа. Выпирание грунта хотя и не наблюдается, но не является здесь критерием наступления предельного состояния по устойчивости основания.

Исследования показали, что последовательность развития деформаций в глинистых грунтах согласуется с тремя фазами по Герсеванову Н.М.: уплотнения, сдвигов и потери несущей способности.

Однако признаки наступления III фазы деформаций в глинистых грунтах отличаются от песчаных, для которых установлена эта последовательность. В глинистых грунтах переход к III фазе деформаций совершается постепенно, мгновенной потере несущей способности не происходит, но осадка в III фазе нередко достигает значительной величины (иногда – 0,5в) Выпирание грунта на поверхность наблюдается не всегда (рис. 1.3,б). А ярко выраженное выпирание (рис.1.3,а), разрывов сплошности основания на нижней границе сдвига и осадки типа «провальной» никогда не происходит.

Как показали исследования (рис.1.3,а,б) поверхность грунта при нагрузках, предшествующих потере устойчивости, постепенно понижается. Осадки штампа происходили не только за счёт уплотнения грунта, но и за счет его бокового расширения.

Характер развития деформаций для глинистых грунтов тугопластичной консистенции с заглубленными штампами при  $h/v = 0,4$  и  $h/v = 1$ , аналогичен для того же состояния грунта при незаглубленных штампах.

Таким образом, для глинистых грунтов полутвердой и тугопластичной консистенции за критическую нагрузку необходимо принимать нагрузку, при которой отмечается появление расширяющихся трещин у краев штампа и начало выпирание грунта (рис. 1.3,а); для мягкопластичных грунтов – резкое возрастание вертикальных и горизонтальных деформаций при незначительном увеличении нагрузки и продолжающееся развитие трещин, образовавшихся у краев штампа ( Приложение 1).

**Формы и размеры уплотнённого ядра, образующегося под действием внешней нагрузки.** Образование под жёстким фундаментом при нагрузках, близким к критическим, уплотнённого ядра известно давно (Пигулевский М.Х., 1929). Наличие ядра значительно изменяет напряжённое состояние грунта, условия его деформации, величину критической нагрузки, передаваемой фундаментом на грунт. Это обуславливает большое значение решения задач об определении формы ядра.

Практическое значение этого вопроса вытекает из того, что существующее ядро приводит к резкому возрастанию размеров сдвиговых областей грунта, а следовательно, и к возрастанию критической нагрузки. Тем самым устраняется разрыв, существующий между результатами расчёта по методам теории предельного напряжённого состояния и экспериментальными данными.

Многочисленными исследованиями формы уплотнённого ядра в песчаных грунтах показано, что можно выделить поверхность, отделяющую уплотнённое ядро от окружающего грунта. Исследования (Малышев М.В. и Зарецкий Ю.К., 1973), выполненные для нелинейных деформационных зависимостей, позволили выявить образование областей с пониженной жёсткостью на сдвиге у краёв штампа в песчаных грунтах. Снижение модуля сдвига зафиксировано под краями штампа (Кагановская С.Е., 1974) в глинистых грунтах. Однако большинством исследователей не изучалась картина изменения плотности в пределах уплотнённого ядра и поверхности, отделяющей его от окружающего грунта.

Действительно, уплотнённое ядро играет важную роль в деформации основания, поскольку оно сдвигает прилегающие к штампу объёмы грунта по линиям наименьшего сопротивления, и поэтому плотность грунта в уплотнённом ядре должна быть значительно больше, чем в переходной зоне и, соответственно, в областях пластических деформаций. Таким образом, на основе информации о плотности ядра, полученной при различных нагрузках на основание вплоть до его разрушения, можно выделить эту переходную зону. Знание границ переходной зоны позволяет установить размеры и форму уплотнённого ядра. На рис. 1.5 и 1.6 приведены очертания уплотнённого ядра «упру-

гой» и «пластической» частей в глинистых грунтах под жёстким штампом при нагрузках вплоть до потери несущей способности основания. Рассмотрение диаграмм изменения плотности показало, что внутри уплотнённого ядра образуется зона, плотность в которой больше, чем плотность самого ядра (рис. 1.7). Анализ диаграмм изменения плотности грунта по глубине под штампом показывает, что образующееся ядро состоит из двух зон уплотнения. Первая зона уплотнения распространяется на глубину (0,65-0,7) в. Внутри этой зоны образуется вторая зона уплотнения, которая начинается от подошвы штампа и распространяется на глубину (0,3-0,35) в.

Наличие двух зон уплотнения можно рассматривать как подтверждение вывода М. И. Горбунова-Посадова (Горбунова-Посадов М. И., 1962) и В.Г. Березанцева (Березанцев В. Г., 1960) о том, что уплотнённое ядро состоит из двух частей: «упругой» и «пластической». Меньшая его часть, непосредственно примыкающая к штампу, при образовании ядра остаётся в «упругом» состоянии и характеризуется большой плотностью. Другая часть, примыкающая к «упругой» части снизу, находится в «пластическом» состоянии и характеризуется меньшей плотностью (рис.1.7 и 1.8).

На стадии нагружения (первая фаза деформации), когда нагрузка ещё далека от критической по устойчивости, значительное уплотнение происходит только в пределах ядра, отчего и получается его смещение по отношению к остальному грунту и, естественно, появляются границы перепада плотностей, которые и наблюдаются на диаграммах. Увеличение нагрузки до  $0,6 P_{пр}$  приводит к возрастанию размеров уплотнённого ядра до 0,8 в. Высота «упругой» части ядра на данной ступени нагрузки составляет (0,35-0,45)в и её вершина находится на оси симметрии. Плотность грунта в пределах «упругой» зоны увеличилась на 5-7% по сравнению с первоначальной плотностью грунта и составляет 1,96-1,97 г/см<sup>3</sup>. В пластической части ядра происходит уплотнение в пределах 2,5-3%. Траектории перемещения частиц в пределах «упругой» части строго вертикальные, а в перемещениях частиц в «пластической» части ядра наблюдается отклонение от вертикального направления. Величина перепада плотности грунта в пределах переход-

ной зоны увеличилась до  $\Delta\gamma_0 = 0,03-0,05$  г/см<sup>3</sup>. Размеры уплотнённого ядра при увеличении нагрузок до  $(0,85-0,95) P_{пр}$  изменяются только за счёт незначительного увеличения нижней «пластической» зоны (рис. 1.7 и 1.8).

«Упругая» часть ядра хотя и формируется при нагрузках, предшествующих потере основанием устойчивости и не изменяет свою форму вплоть до разрушения, но плотность в её пределах возрастает вплоть до разрушения основания.

Плотность грунта в пределах «пластической» части ядра также возрастает, но увеличение её происходит медленнее. По видимому, это связано с тем, что направление и перемещение частиц грунта в этой зоне отличаются от перемещения штампа. Кроме того, в процессе роста уплотнённого ядра развитие «пластической» части происходит постепенно. Исследования показали, что при нагрузке, предшествующей разрушению ( $P = 0,95 P_{пр}$ ), а так же после потери основанием устойчивости, плотность в пределах «пластической» части возрастает постепенно, чем в «упругой» части уплотнённого ядра (рис. 1.7).

Распределение плотности грунта, представленное на рис. 1.7 показывает, что в пределах упругой части плотность характеризуется равномерностью её распределения и наибольшим значением по сравнению с «пластической» частью ядра.

Таким образом, рассматривать уплотнённое ядро, как жёсткое, при фазах, предшествующих выпиранию, по видимому, нельзя, так как процесс увеличения плотности продолжается вплоть до разрушения и даже после потери устойчивости основания. Если бы ядро было жёстким, то любая точка контакта между основанием и жёстким штампом находилась бы в одинаковом положении. Следовательно, распределение давлений от штампа на основание при нагрузках, меньших критической, обязательно было бы равномерным. Между тем все экспериментальные исследования (Дубов К.А., 1972; Завельский Ф.С., 1969; Кагановская С.Е., 1973) хотя и несколько расходящиеся в отношении формы эпюры давлений, приводят к одному основному выводу: эпюра имеет резко неравномерный характер.

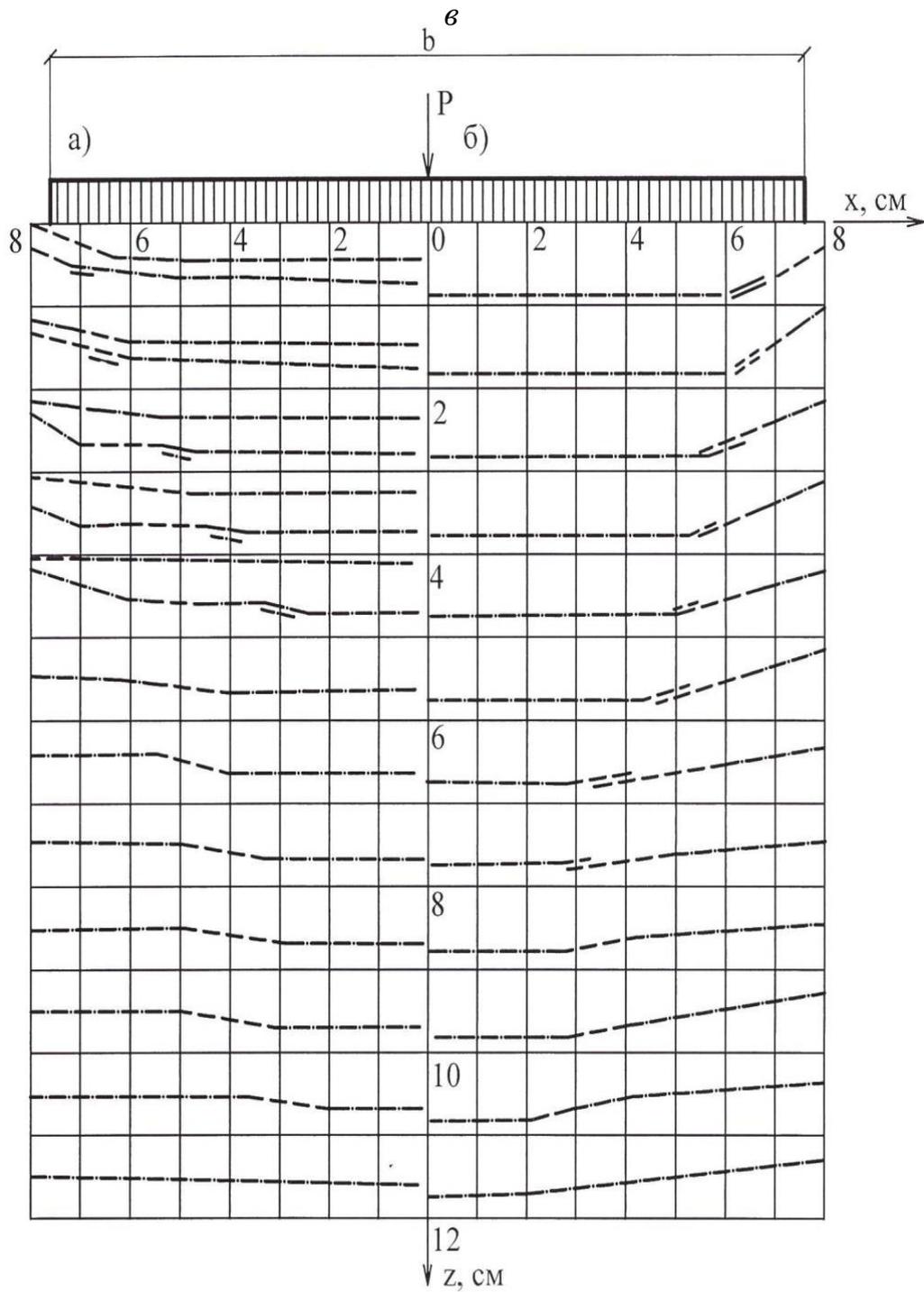


Рис.1.5. Очертание «упругой» и «пластической» части уплотнённого ядра в глинистых грунтах тугопластической консистенции под жёстким штампом шириной 15см: а) при  $P = 0,4 \text{ кгс/см}^2$ , при  $P = 1,2 \text{ кгс/см}^2$ ; б) при  $P = 1,6 \text{ кгс/см}^2$ , (глина с  $I_p = 0,18$ ;  $I_L = 0,30$ ;  $\gamma = 1,89 \text{ г/см}^3$ ;  $\varphi = 15^\circ$ ;  $c = 0,25 \text{ г/см}^2$ ).

--- граница уплотнённого ядра;  
 === граница «упругой» части ядра

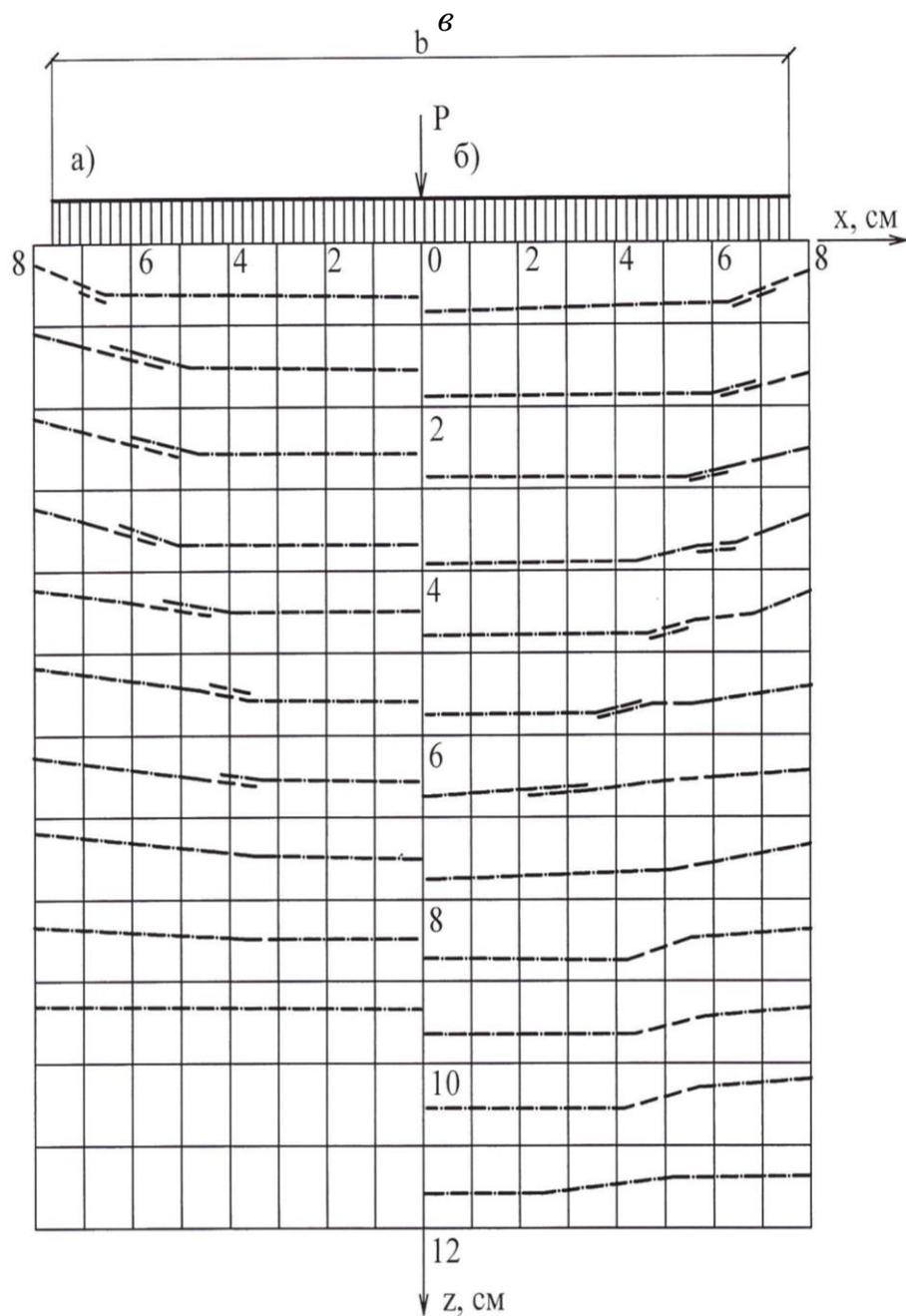


Рис.1.6. Очертание уплотнённого ядра «упругой» и «пластической» части в глинистых грунтах тугопластической консистенции под жёстким штампом к моменту потери основанием устойчивости (при  $P = 22 \text{ кгс/см}^2$ ;  $b = 15 \text{ см}$ ; грунт-глина с  $I_p = 0,21$ ;  $I_L = 0,30$ ;  $\gamma = 1,80 \text{ г/см}^3$ ;  $\varphi = 12^\circ$ ;  $c = 0,13 \text{ г/см}^2$ ).

--- граница уплотнённого ядра;  
 === граница «упругой» части ядра

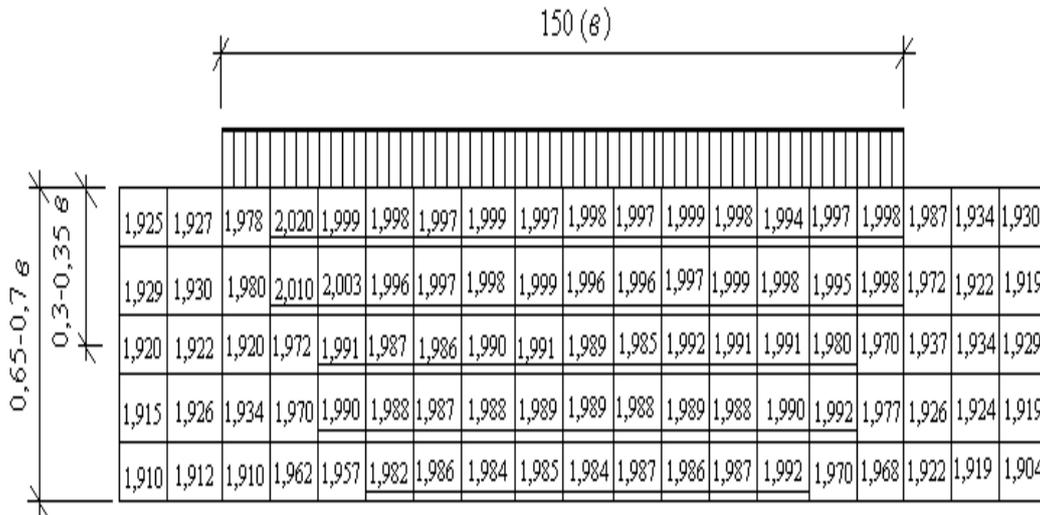


Рис.1.7. Поле плотностей глинистого грунта мягкопластичной консистенции после потери основанием устойчивости (грунт-глина с  $I_p = 0,20$ ;  $I_L = 0,55$ ;  $\gamma = 1,80 \text{ г/см}^3$ ). Подчёркнуто - плотность в пределах «упругой» части ядра и нижняя граница уплотнённого ядра

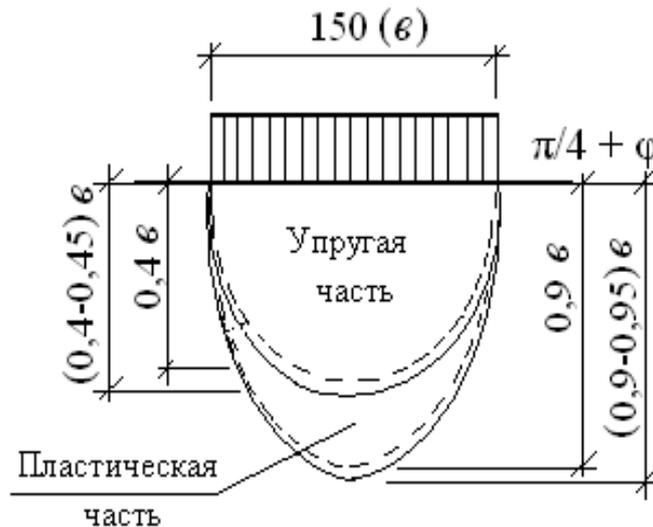


Рис.1.8. Очертание уплотнённого ядра в глинистых грунтах тугопластичной консистенции, полученного с помощью парафинированного экрана (грунт-глина с  $I_p = 0,18$ ;  $I_L = 0,30$ ;  $\gamma = 1,89 \text{ г/см}^3$ ).

- очертание «упругой» и «пластической» части уплотнённого ядра при расположении штампа на поверхности;
- очертание «упругой» и «пластической» части при заглублении штампа на  $h = 1,0 \text{ e}$

Уплотнённое ядро может быть принято за жёсткое тело только для фазы выпирания, когда вопрос о характере распределения реактивных давлений теряет смысл и когда плотность в пределах его достигает своего максимального значения.

Исследования показали, что окончание формирования уплотнённого ядра, в большинстве случаев, совпадает с потерей несущей способности основания в грунтах различных видов по консистенции. Конечная форма уплотнённого ядра, размеры и очертания «упругой» и «пластической» частей его, установленные с помощью диаграмм изменения интенсивности импульсов гамма-квантов в горизонтальных сечениях под штампом, а так же с помощью парафинированных экранов (рис.1.9) близки к их значениям, полученным по диаграммам изменения плотности грунта (Дубов К.А., 1968). Заглубление штампов в глинистых грунтах тугопластичной консистенции не приводит к существенным изменениям формы и размеров уплотнённого ядра. Процесс образования и развития уплотнённого ядра проходил аналогично, как и не для незаглублённого штампа, однако высота уплотнённого ядра в этом случае меньше (Приложение 1, рис.1.2, 1.7).

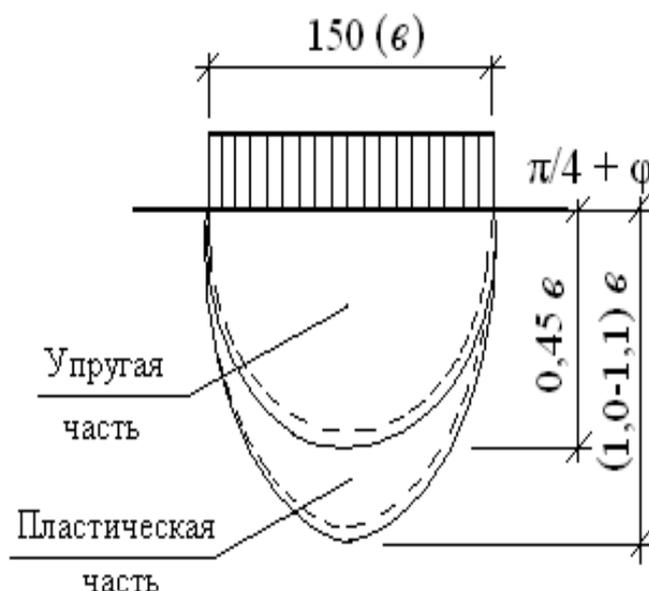


Рис. 1.9. Очертание уплотнённого ядра в глинистых грунтах мягкопластичной консистенции, полученного с помощью парафинированного экрана (грунт-глина с  $I_p = 0,20$ ;  $I_L = 0,55$ ;  $\gamma = 1,80$  г/см<sup>3</sup>).

В результате полученной экспериментальной картины изменения плотности грунта в зависимости от заглубления штампа, наглядно на диаграммах можно определить начало образования пластической зоны уплотнённого ядра, при которой основание сооружений ещё не теряет устойчивость. Поэтому возникает необходимость определения критического давления, при котором небольшое добавочное усилие на основание может нарушить несущую способность грунта.

### 1.5. Расчёт критической нагрузки в грунтовой среде

Для определения размеров подошвы фундамента важно знать давление, при котором под краями фундамента в грунте начинает образовываться пластическая зона, и затем как эта зона будет увеличиваться по мере возрастания нагрузки на грунтовое основание вплоть до своего максимального размера, соответствующего потере основанием несущей способности.

Задача о критической нагрузке на грунт была впервые рассмотрена в работе (Прандтль Л., 1921). Приняв, что среда обладает только сцеплением, и пренебрегая собственным весом грунта, он выразил критическую нагрузку в условиях плоской задачи следующей формулой (Маслов Н.Н., 1968):

$$P_{кр} = (\pi + 2,0) c = 5,14 c, \quad (1.4)$$

где  $c$  — удельное сцепление.

Учитывая шероховатость подошвы фундаментов, Терцаги для условий плоской задачи дал следующее выражение  $P_{кр}$  (Маслов Н.Н., 1968):

$$P_{кр} = 5,7 c. \quad (1.5)$$

Паукер установил более общую зависимость  $P_{кр}$  от величины заглубления фундамента, угла внутреннего трения и объёмной плотности грунта в следующем виде (Маслов Н.Н., 1968):

$$P_{кр} = \gamma h_{загл} \operatorname{tg}^4(45^\circ + \varphi/2), \quad (1.6)$$

где  $h_{загл}$  — заглубление фундамента с прямоугольной площадью подошвы.

Давление, соответствующее началу возникновения области пластической деформации и названное начальной критической нагрузкой, было установлено Пузыревским Н.П. для несвязного грунта (при  $c = 0$ ), по-

том Герсевановым Н.М. и Фрелихом О.К. Ими был рассмотрен случай, когда распределение напряжений от собственного веса в грунте было гидростатическим, т.е. коэффициент бокового давления в условиях естественного залегания  $\xi_0 = 1$ .

Согласно утверждению, высказанному Флориным В.А. (Флорин В.А., 1959 г.) этот коэффициент может изменяться в широких пределах и быть больше или меньше единицы. Кроме решения для случая  $\xi_0 = 1$ , Герсевановым Н.М. были получены зависимости для вычисления  $P_{кр}$  путем подбора  $\xi_0$  для различных значений  $\nu_0$ .

$$\xi_0 = \nu_0 / (1 - \nu_0) \leq 1 \text{ и } c = 0, \quad (1.7)$$

где  $\nu_0$  — коэффициент Пуассона грунта.

Построение границ пластических областей на основе теории упругости было обстоятельно рассмотрено в работе (Горбунов–Посадов М.И., 1949), где показано, что такие области возникают либо под краями фундамента, либо при  $\xi_0 < 1$  на оси его симметрии, на некоторой глубине с последующим её развитием, с увеличением нагрузки.

Рассмотрим задачу об условиях образования пластических зон под фундаментом при различной величине  $\xi_0$  с учётом веса грунта  $P_0$  и внешней нагрузке  $P$ , принимая во внимания результаты анализа, выполненного в разделе 1.4.

Расчётная схема этой задачи представлена на рис. 1.10.

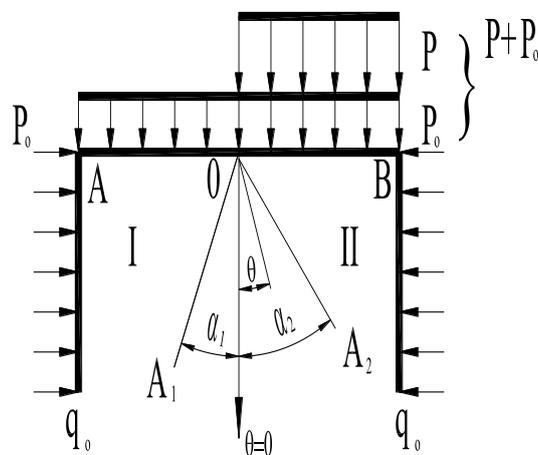


Рис. 1.10. Схема действующих нагрузок

Как показано в работе (Фёдоров И. В., 1958), зарождение пластической области начинается вдоль луча, имеющего угол наклона к вертикали  $\theta = -\varphi$ . Полуплоскость разделена на 3 клина: I –  $AOA_1$ , II –  $A_2OB$  и III –  $A_1OA_2$ . На их границах заданы следующие условия (Фёдоров И. В., 1958):

$$\begin{aligned} & \text{вдоль } AO \text{ (при } \theta = -\pi/2), \sigma_\theta = P_0; \tau_{r\theta} = 0; \\ & \text{вдоль } OB \text{ (при } \theta = \pi/2), \sigma_\theta = P + P_0; \tau_{r\theta} = 0; \\ & \text{вдоль } OA_1 \text{ (при } \theta = \alpha_1) \text{ и } OA \text{ (при } \theta = \alpha_2), \\ & \sigma_r = \sigma_\theta (1 + \sin^2 \varphi) / (\cos^2 \varphi) + 2c \operatorname{ctg} \varphi; \tau_{r\theta} = -(\sigma_\theta \operatorname{tg} \varphi + c). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для компонент напряжений в областях I и II использованы выражения, удовлетворяющие основным уравнениям теории упругости (Фёдоров И. В., 1958):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= C_1 - C_2 2\theta + D_1 \sin 2\theta - D_2 \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta &= C_1 - C_2 2\theta - D_1 \cos 2\theta + D_2 \sin 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= C_2 + D_1 \cos 2\theta + D_2 \sin 2\theta \end{aligned} \right\}, \quad (1.9)$$

где  $C_1, C_2, D_1$  и  $D_2$  – коэффициенты.

Для пластической области III используется решение Прандтля для клина ( $\sigma_\theta$  при  $\theta = \alpha_1$  обозначено  $\sigma_\theta^{\alpha_1}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= (\sigma_\theta^{\alpha_1} + c \operatorname{ctg} \varphi) e^{2(\theta - \alpha_1) \operatorname{tg} \varphi} - c \operatorname{ctg} \varphi; \\ \sigma_r &= \sigma_\theta \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + c \operatorname{ctg} \varphi; \\ \tau_{r\theta} &= -(\sigma_\theta \operatorname{tg} \varphi + c) \end{aligned} \right\}. \quad (1.10)$$

В результате преобразований было получено выражение для критической нагрузки (Фёдоров И. В., 1958):

$$P_{\text{кр}} = \pi \left[ c - \frac{P_0^2}{4c} (1 - \xi_0)^2 \right], \quad (1.11)$$

где  $P_0$  – начальная внешняя нагрузка;  $\xi_0$  – коэффициент бокового давления в условиях естественного залегания.

Более сложными, чем выражения (1.10 и 1.11), получаются зависимости, если грунт обладает трением и сцеплением, т.е.  $\varphi \neq 0$  и  $c \neq 0$ . В этом

случае образование пластической области начнётся вдоль луча, у которого величина:

$$[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2]/(\sigma_r + \sigma_\theta + 2c \operatorname{ctg}\varphi)^2, \quad (1.12)$$

достигает максимального значения и в свою очередь, равно  $\sin^2\varphi$ . Подставляя в выражение (1.12) формулу (1.11), соответствующую упругому решению, и путем последующих теоретических преобразований получим известную формулу Герсеванова - Фрелиха (Фёдоров И. В, 1958):

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi(P_0 + c \operatorname{ctg}\varphi)}{\operatorname{ctg}\varphi - \pi/2 + \varphi}, \quad (1.13)$$

где  $P_0$  – начальная внешняя нагрузка.

При начальных значениях  $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta_{\text{зар}}$  и конечных для полного раскрытия области III:  $\alpha_1 = -(\pi/4 + \varphi/2)$ ;  $\alpha_2 = (\pi/4 - \varphi/2)$ , в результате расчётов Герсеванова – Фрелиха (Фёдоров И. В, 1958) была получена формула Прандтля

$$\frac{P}{P_0 + c \operatorname{ctg}\varphi} + 1 = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} e^{\pi \operatorname{ctg}\varphi} \quad (1.14)$$

Таким образом, оказывается, что нагрузка  $P_{\text{кр}}$ , при которой происходит зарождение (начала образования) пластической области, зависит от коэффициента бокового давления  $\xi_0$ , причем  $P_{\text{кр}}$  имеет наибольшее значение при  $\xi_0=1$ . Предельное состояние может возникать как вдоль луча, направленного как под фундамент при  $\xi_0 < 1$ , так и в противоположную сторону от него при  $\xi_0 > 1$ .

Предельное напряжённое состояние полуплоскости может быть получено путём решения задачи теории предельного равновесия. Решение дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием предельного равновесия Кулона – Мора позволяет определить напряжения в полуплоскости, построить сетку линий скольжения и найти значение предельного давления на основание. Предельное давление при полосовой нагрузке на невесомую полуплоскость, описывается решением Прандтля (Маслов Н.Н., 1968) (рис. 1.11):

$${}^{\text{пред}}P_{\text{кр}} = (q + c \operatorname{ctg} \varphi) \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} - c \operatorname{ctg} \varphi, \quad (1.15)$$

где  $c$  – удельное сцепление грунта;  $\varphi$  – угол внутреннего трения;  $q = \gamma h$  – боковая нагрузка;  $h$  – глубина приложения полосообразной нагрузки;  $\gamma$  – удельный вес грунта.

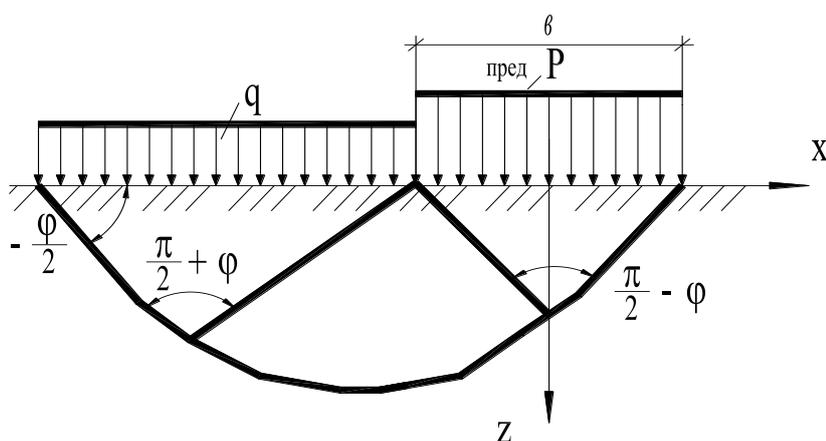


Рис. 1.11. Схема действия полосовой нагрузки

При  $P = P_{\text{пр}}$  среда во всей полуплоскости, ограниченной сверху поверхностью, снизу линиями скольжения переходит в идеальное пластическое состояние. Деформации среды задача теории предельного равновесия не рассматривает.

Для водонасыщенных глинистых грунтов и их нестабилизированного состояния (когда внутреннее трение не реализуется) была получена предельная нагрузка А.С. Строгановым (Строганов А.С., 1977):

$${}^{\text{пред}}P_{\text{кр}} = 6,025 c + \gamma h, \quad (1.16)$$

где  $c$  – удельное сцепление грунта;  $\gamma h$  – боковая нагрузка от веса грунта;  $h$  – толщина грунтового слоя от уровня поверхности земли до подошвы фундамента.

При оценке несущей способности пластичных глинистых грунтов за рубежом часто используют формулу, предложенную А. Скемптоном (Маслов Н.Н., 1968):

$$P_{кр} = cN_c + \gamma h_{загл}, \quad (1.17)$$

где 
$$N_c = 5 \left( 1 + 0,2 \frac{B}{L} \right) \left( 1 + 0,2 \frac{h_{загл}}{B} \right);$$

$B=2b$  – ширина и  $L$  – длина прямоугольного фундамента.

Таким образом, смешанная задача соединяет решение теории упругости для начальной стадии нагружения с решением теории предельного равновесия. Такой подход важен для описания поведения грунтового основания в интервале нагрузок от нуля до  $^{пред}P_{кр}$

Анализируя результаты экспериментальных исследований развития деформаций в слабых грунтовых средах, изложенные выше, а также существующие методы расчёта, было установлено отсутствие методик расчёта устойчивости при действии различных видов внешних нагрузок. К этой группе нагрузок можно отнести треугольные и трапециевидные внешние статические нагрузки, соответствующие положительным и отрицательным формам технического рельефа.

## Глава 2. РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД

В главе 1 проанализированы результаты решения задач о критической нагрузке и характере развития пластических деформаций в грунтовых средах под действием равномерно распределённой внешней нагрузки. Критические нагрузки и зоны пластических деформаций исследованы только в зависимости от изменения удельного веса грунтовой среды ( $\gamma$ ). Но поскольку от  $\gamma$  зависят также коэффициент сцепления и угол полного внутреннего трения, то возникает необходимость рассмотреть процесс развития зон пластических деформаций не только от  $\gamma$ , но также от  $c$  и  $\varphi$ .

В связи с этим, нами были рассмотрены зависимости величины критической нагрузки ( $P_{кр}$ ) с учётом физико-механических свойств грунтовой среды, т.е.  $\gamma$ ,  $c$  и  $\varphi$  не только для равномерно распределённой нагрузки, но и для других видов внешней нагрузки: треугольной и трапецевидной.

### 2.1. Нагрузка, описываемая эпюрами в форме треугольников и трапеций

Расчётная схема представляет собой полупространство с распределённой внешней нагрузкой  $P$ . Полупространство находится в гидростатическом напряжённом состоянии:  $\sigma_x^0 = \sigma_z^0 = \gamma z$ , где  $\sigma_x^0$  и  $\sigma_z^0$  – начальные составляющие напряжения;  $\gamma z$  – нагрузка от веса грунта до уровня  $z$ . Следовательно, напряжённое состояние в полупространстве определяется весом полупространства и влиянием нагрузки. Задача заключается в определении такой величины критического давления  $P_{кр}$ , при котором область предельного равновесия распространяется на глубину  $z_{\max}$ .

**Нагрузка в форме равнобедренного треугольника.** Модель грунтовой среды с нагрузкой в форме равнобедренного треугольника показана на рис. 2.1. Главные напряжения от действия внешней нагрузки найдены из выражений (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \gamma z; \quad (2.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \gamma z, \quad (2.2)$$

где  $P = P(x)$  – величина треугольной равнобедренной нагрузки;  $a$  – база действия нагрузки;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы видимости базы действия нагрузки.

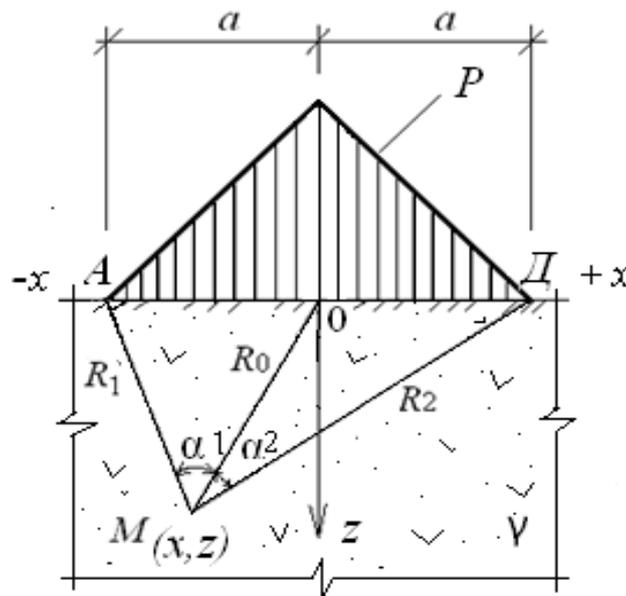


Рис. 2.1. Модель однородной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Подставив выражения (2.1) и (2.2) в условие предельного равновесия (Цытович Н.А., 1983):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sin \varphi \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + P_e \right), \quad (2.3)$$

где  $P_e = c \operatorname{ctg} \varphi$  – давление связности;  $c$  – расчётное значение сцепления связного грунта;  $\varphi$  – угол внутреннего трения грунта, получим следующее уравнение:

$$\frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \frac{P \sin \varphi}{\pi a} z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - \sin \varphi \gamma z = \frac{P \sin \varphi}{\pi a} [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \sin \varphi c \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.4)$$

Решая уравнение (2.4) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P}}. \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.5) найдём углы видимости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , при которых  $z = z_{\max}$ , продифференцировав это уравнение отдельно по  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Уравнение (2.5) продифференцируем по  $\alpha_1$  и приравняем результат дифференцирования нулю, получим

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_1} = \frac{(a+x) \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} - \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} = 0.$$

Отсюда следует:

$$(a+x)(\alpha_1 - \alpha_2) - [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] = -(a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,4} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P} + \frac{\pi a \gamma (a+x) \sin \varphi}{0,4 P},$$

тогда

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -(a+x) \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,8 P} - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{2 P} + (a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8 a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} = \\ &= (a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8 a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - (a+x) \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,8 P} - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{2 P}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Продифференцируем уравнение (2.5) по  $\alpha_2$  и приравняем результат дифференцирования нулю, получим

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_2} = \frac{(a-x) \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} - \frac{-\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} = 0, \quad (2.7)$$

при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ ,

получим, что

$$\alpha_1 = -(a-x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (a-x) \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{2P}. \quad (2.8)$$

При найденных значениях углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , следовательно, формула (2.4) примет вид (Кравченко Т. И. и др., 2015):

$$z_{\max} = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P}}. \quad (2.9)$$

Для определения  $P_{кр}$  (2.9) подставим в формулу (Маслов Н.Н., 1968):

$$z_{\max} = \frac{0,88PB}{C_z}, \quad (2.10)$$

где  $C_z = E/(1 - \nu^2)$  – коэффициент упругого полупространства,  $B = \delta$  – база действия нагрузки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль деформации, ( $\nu$  и  $E$  принимаются постоянными для полупространства) (СП 22.13330.2011, 2000). В результате получим следующие уравнения:

$$1,76P^2 \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,704P^2}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - 1,76P\pi a \gamma =$$

$$= PC_z \left[ (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2) \right] + \pi C_z c \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$\frac{1,76P^2}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)] - P \{ C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76\pi a \gamma \} -$$

$$- \pi C_z c \operatorname{ctg} \varphi = 0.$$

(2.11)

Квадратное уравнение (2.11) запишем в виде следующего выражения (Кравченко Т. И. и др., 2015):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (2.12)$$

где

$$M = \frac{1,76}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)];$$

$$N = -\{ C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76\pi a \gamma \};$$

$$L = -\pi C_z c \operatorname{ctg} \varphi.$$

(2.13)

Решая уравнение (2.12), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  (Кравченко Т. И. и др., 2015):

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (2.14)$$

Формулы (2.9) и (2.14) позволяют вычислять  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  в полупространстве. В этих формулах  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения можно получить формулы для  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. При  $a = 0$  (с правой или с левой стороны эпюры), эпюра внешней нагрузки будет иметь вид прямоугольного треугольника; при  $a \rightarrow \infty$  – будет иметь вид полубесконечной полосы.

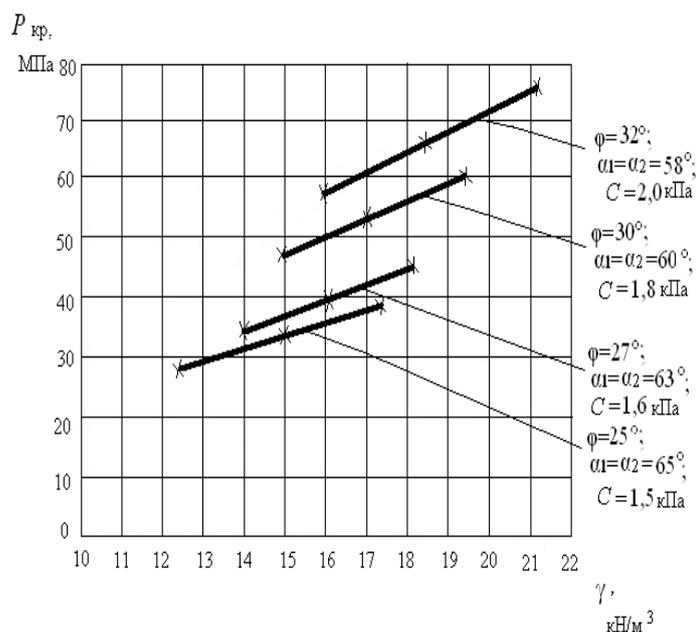
Графический вид зависимостей  $P_{кр}$  и  $z_{макс}$  от физико - механических характеристик  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $B=2a=2м$  представлен на рис. 2.2 и 2.3. Расчёт  $z_{макс}$  и  $P_{кр}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства (табл.2.1), соответствующим супесчаным водонасыщенным грунтам.

Таблица 2.1.

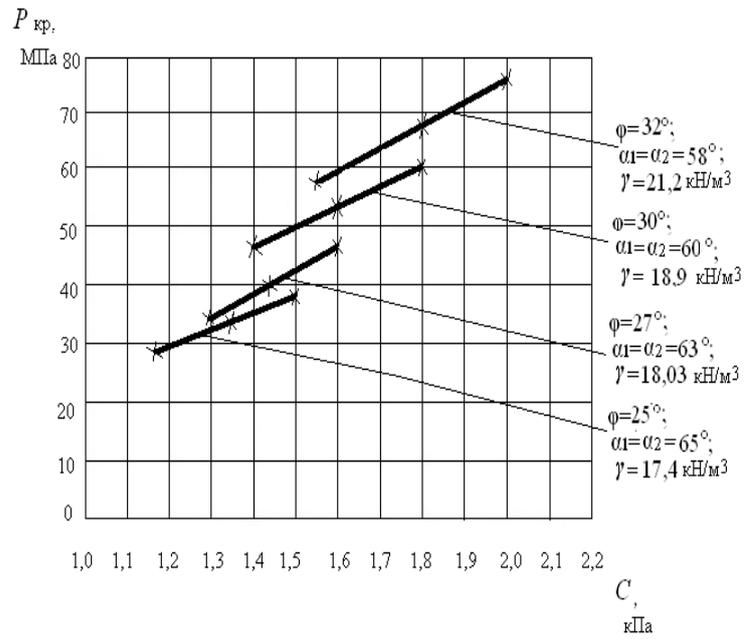
Физико - механические характеристики грунтов \*

Наименование грунтов	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , <sup>0</sup>	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа
Супесчаные водонасыщенные грунты	17,4	25	1,5	24	27,6
	18,03	27	1,6	26	29,9
	19,4	30	1,8	27	31,03
	21,2	32	2,0	28	32,18

\*вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам супесей

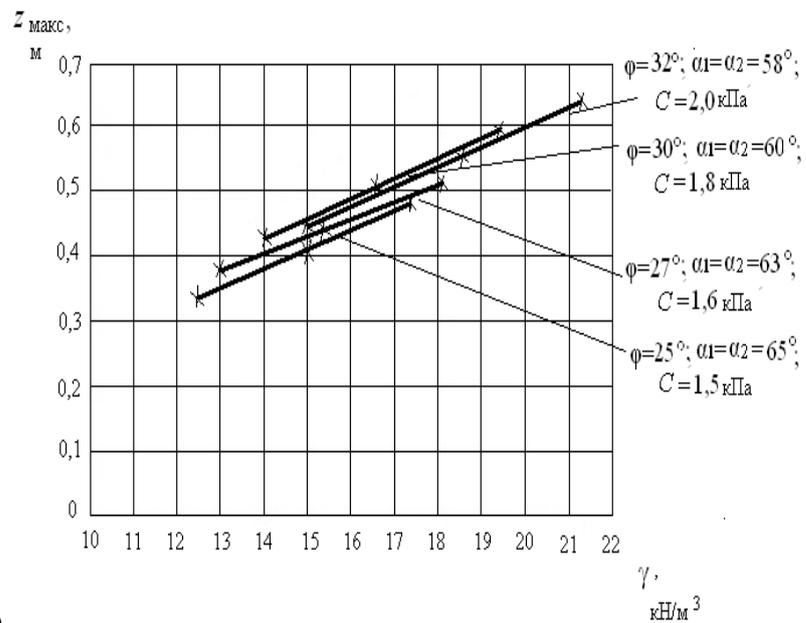


а)

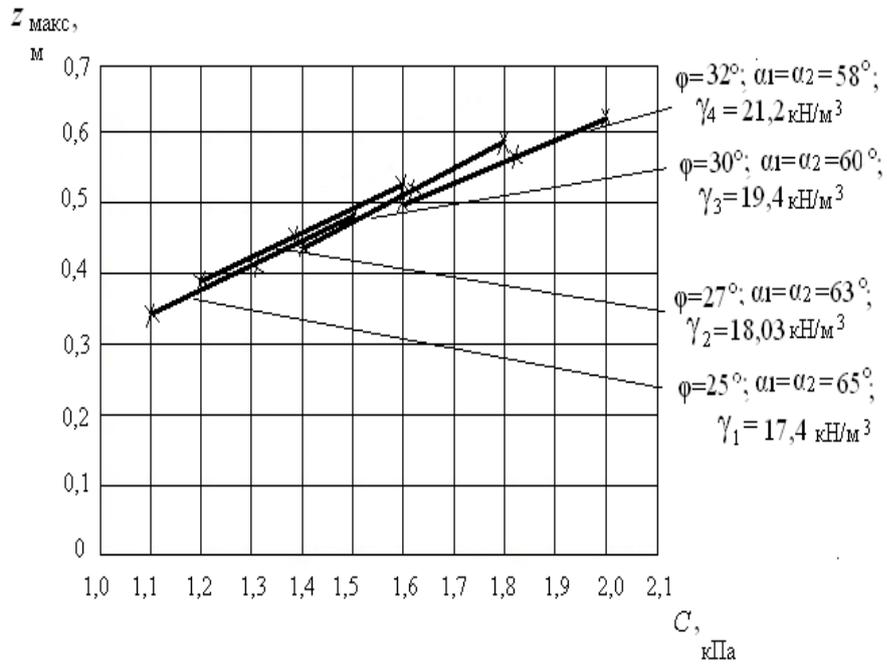


б)

Рис. 2.2. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ; б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 2.3. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

**Нагрузка в форме неравностороннего треугольника.** На рис. 2.4. изображена модель грунтовой среды от переменной нагрузки.

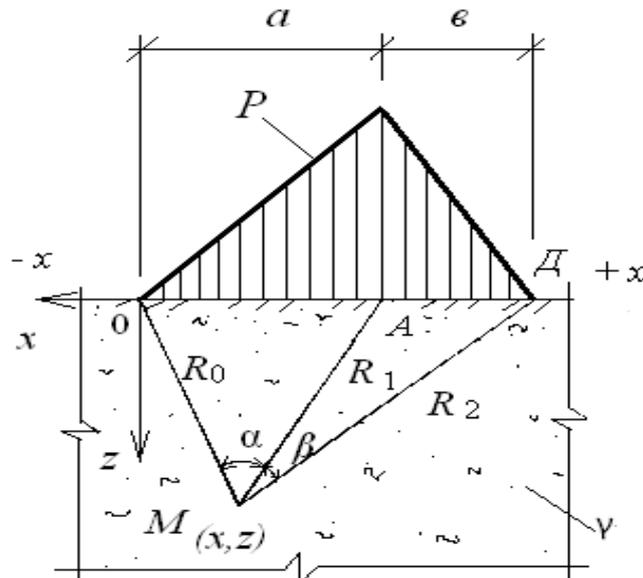


Рис. 2.4. Модель однородной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Формулы главных напряжений от неравносторонней треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{z}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right)^2} + \gamma z; \quad (2.15)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{z}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right)^2} + \gamma z, \quad (2.16)$$

где  $P = P(x)$  – внешняя нагрузка ;  $x, z$  – координаты точки М;  $\alpha$  и  $\beta$  – углы видимости базы действия внешней нагрузки;  $R_0, R_1$  и  $R_2$  – расстояния от точки М ( $x, z$ ) до точек А, О, Д базы внешней нагрузки ;  $\gamma$  – удельный вес однородного слоя полупространства ;  $a = AO, \epsilon = OD$ .

Подставим выражения (2.15) и (2.16) в условие предельного равновесия (2.3) , получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{Pz}{\pi} \left[ \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right)^2} - \frac{\sin \varphi}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1 \sin \varphi}{R_0} \right] - \\ & - \gamma z \sin \varphi = \sin \varphi \left[ \frac{P}{\pi} \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta \right) + c \operatorname{ctg} \varphi \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Решая уравнение (2.17) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta \right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (2.18)$$

Из уравнения (2.18) найдём углы видимости  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых  $z = z_{\max}$ , продифференцировав его отдельно по  $\alpha$  и  $\beta$ . Продифференцируем уравнение (2.18) по  $\alpha$  и приравняем результат дифференцирования нулю, получим:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{\frac{x}{a} \left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}^2} - \frac{\frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi}{P} c \operatorname{ctg} \varphi \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}^2} = 0.$$

В результате будем иметь:

$$\beta = \frac{x\varepsilon(0,96 - \sin \varphi)}{0,4(a + \varepsilon)} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{\pi \gamma x \varepsilon \sin \varphi}{0,4P(a + \varepsilon)} - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P(a + \varepsilon)}. \quad (2.19)$$

Продифференцируем уравнение (2.46) по  $\beta$  и приравняем результат дифференцирования нулю, тогда получим

$$\frac{dz}{d\beta} = \frac{\frac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} \left\{ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right\} - \frac{\pi \gamma}{P}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}^2} - \frac{\left( -\frac{0,4}{\varepsilon \sin \varphi} \right) \left\{ \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}^2} = 0.$$

Найдём угол  $\alpha$

$$\alpha = \frac{\pi \gamma a(a + \varepsilon - x) \sin \varphi}{0,4P(a + \varepsilon)} - \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P(a + \varepsilon)} - \frac{a(a + \varepsilon - x)}{0,4(a + \varepsilon)} (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right). \quad (2.20)$$

При найденных значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$  глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , следовательно, формула (2.18) примет вид (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$\zeta_{\max} = \frac{\left(\frac{x}{a}\alpha + \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon}\beta\right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon}\right) - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (2.21)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (2.21) в формулу (2.10), в этом случае получим

$$\begin{aligned} \frac{0,88P(a+\varepsilon)}{C_z} &= \frac{\left(\frac{x}{a}\alpha + \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon}\beta\right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon}\right) - \frac{\pi \gamma}{P}}; \\ \frac{0,88P^2}{\sin \varphi} &[(0,96 - \sin \varphi)\left(\varepsilon \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + 0,4(\varepsilon\alpha - a\beta)] - P\{0,88\pi a \varepsilon \gamma + \\ &+ \frac{C_z a \varepsilon}{(a+\varepsilon)}(\varepsilon x \alpha + a(a+\varepsilon-x)\beta) - \frac{\pi a \varepsilon C_z c \operatorname{ctg} \varphi}{(a+\varepsilon)}\} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Квадратное уравнение (2.22) приведём к следующему выражению (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \frac{0,88P^2}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi)\left(\varepsilon \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + 0,4(\varepsilon\alpha - a\beta)]; \\ N &= -\{0,88\pi a \varepsilon \gamma + \frac{C_z a \varepsilon}{(a+\varepsilon)}(\varepsilon x \alpha + a(a+\varepsilon-x)\beta)\}; \\ L &= -\frac{\pi a \varepsilon C_z c \operatorname{ctg} \varphi}{(a+\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Решая уравнение (2.23), получим формулу для вычисления  $P_{\text{кр}}$  (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (2.25)$$

Придавая различные значения  $\varepsilon, c, \varphi, \gamma$  можно получить формулы для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки.

При  $v = 0$ , эпюра внешней нагрузки будет иметь вид прямоугольного треугольника; при  $a = v$  – равнобедренного треугольника; при  $v \rightarrow \infty$  – полубесконечной полосы. На рис. 2.5 и 2.6 приведены зависимости  $P_{кр}$  от удельного веса  $\gamma$ , удельного сцепления  $c$  и угла полного внутреннего трения  $\varphi$  упругого полупространства.

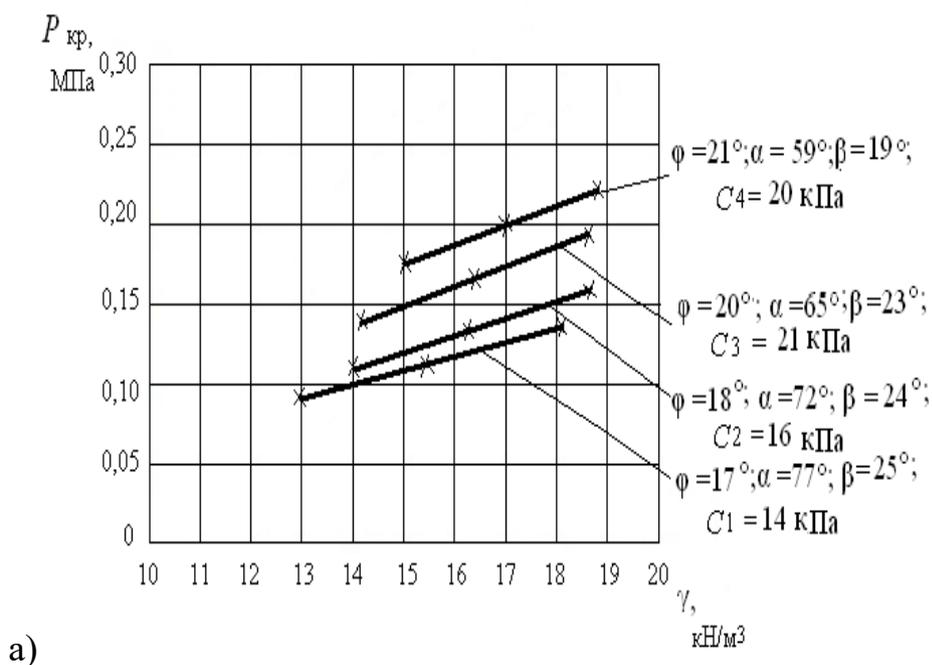
Графический вид зависимостей  $P_{кр}$  и  $z_{макс}$  от физико - механических характеристик  $c, \varphi, \gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $B=a+v=3м$  представлен на рис. 2.5 -2.6. Физико - механические характеристики слабых грунтов приведены в таблице 2.2.

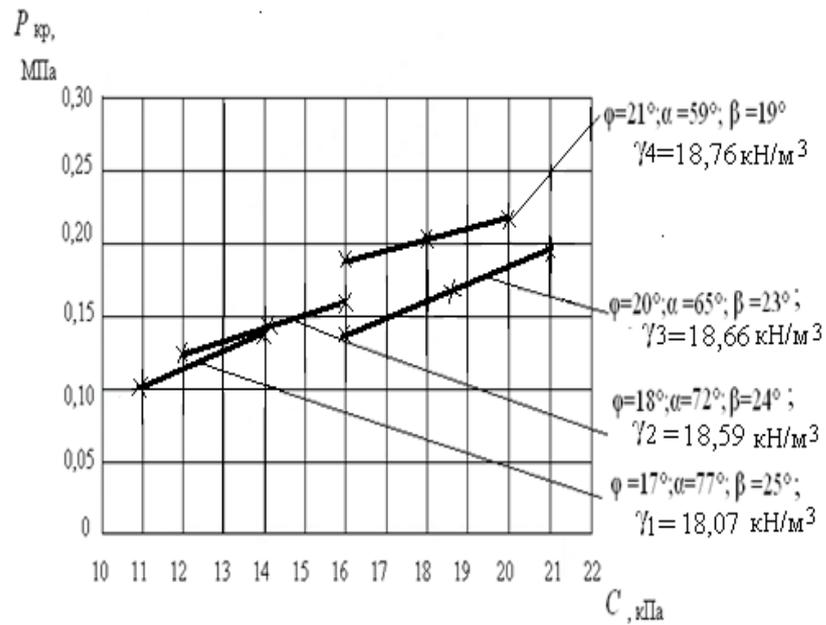
Таблица 2.2.

Физико - механические характеристики грунтов \*

Наименование грунта	$\gamma, \text{кН/м}^3$	$\varphi, ^\circ$	$c, \text{кПа}$	$E, \text{МПа}$	$C_z, \text{МПа}$
Суглинки мягко- пластич- ных пород	18,07	17	14	2,8	2,84
	18,59	18	16	9,4	9,54
	18,66	20	21	11,6	12,80
	18,76	21	20	13	13,19

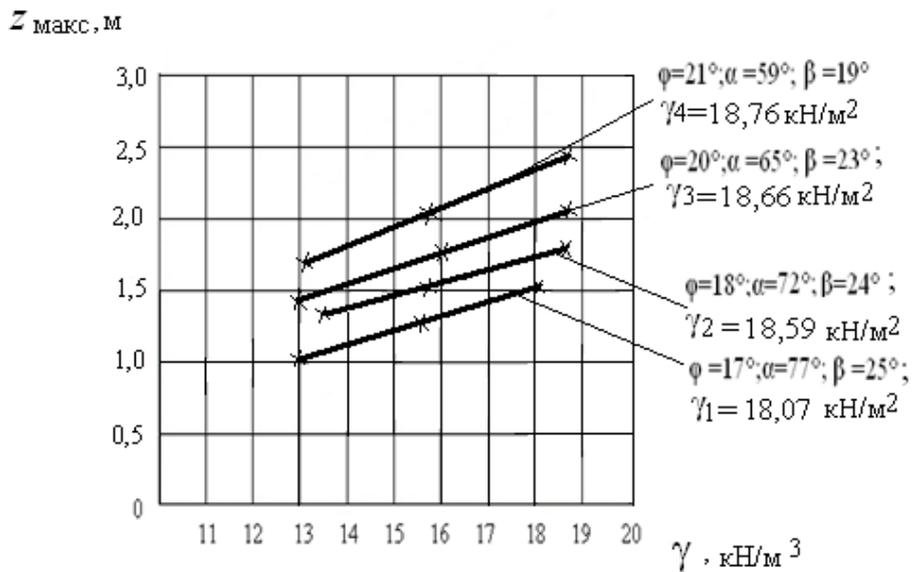
\* вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам мягко-пластичных суглинков



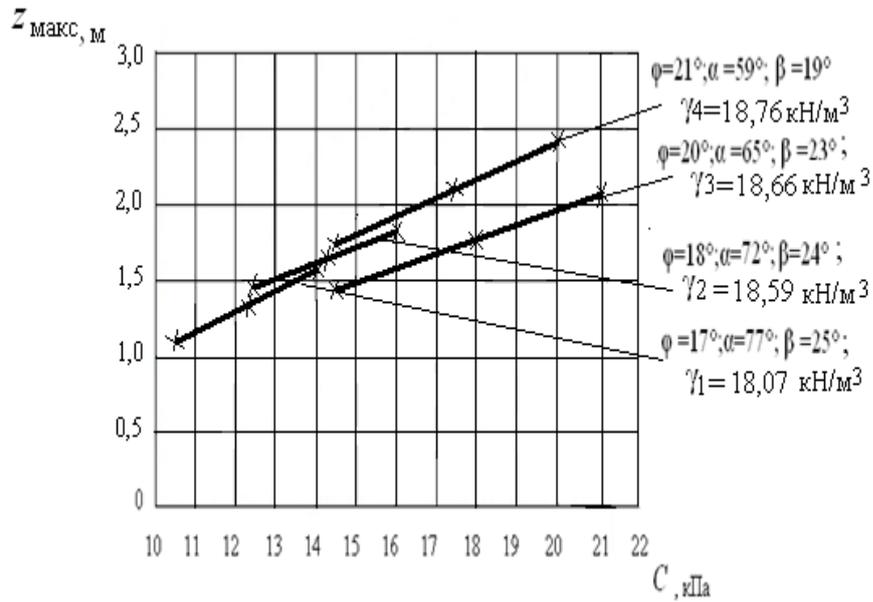


б)

Рис. 2.5. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ;  
 б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 2.6. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

**«Отрицательная» нагрузка в форме трапеции.** На рис. 2.7. изображена модель грунтовой среды, находящееся под действием «отрицательной» нагрузки в форме трапеции.

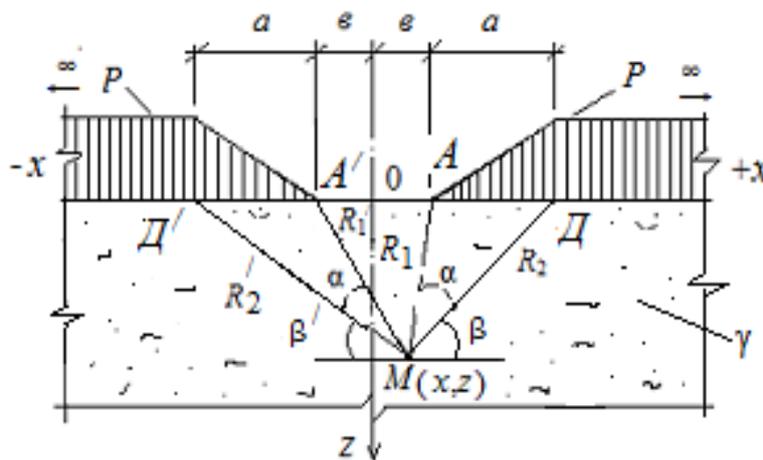


Рис. 2.7. Модель однослойной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Формулы главных напряжений, обусловленных действием симметричной нагрузки (рис. 2.7), имеют следующий вид ( Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} + \gamma z; \quad (2.26)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} + \gamma z, \quad (2.27)$$

где  $P = P(x)$  – внешняя нагрузка ;  $x, z$  – координаты точки М;  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  – углы видимости баз действия нагрузки ;  $R_1, R_1'$  и  $R_2, R_2'$  – расстояния от точки М( $x, z$ ) до точек А, Д, А', Д' баз внешней нагрузки ;  $\gamma$  – удельный вес однородного слоя полупространства;  $a = АД, a = А'Д', v = ОА$  и  $v = ОА'$ .

Подставив выражения (2.26) и (2.27) в формулу условия предельного равновесия (2.3), получим следующее выражение:

$$\frac{z}{\sin \varphi} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} - z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi z a}{P} \gamma = \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P}. \quad (2.28)$$

Решая уравнение (2.28) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P}}. \quad (2.29)$$

Найдём угол видимости  $\beta$ , при котором  $z = z_{\max}$ , продифференцировав для этого уравнение (2.29) по  $\alpha$  и, приравняв результаты дифференцирования нулю, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{(x - \epsilon) \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} - \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} c \operatorname{ctg} \varphi \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0. \quad (2.30)$$

Из уравнения (2.30) получим следующее выражение :

$$-(\beta + \beta') = \frac{-(x - \epsilon)}{0,4a} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} - \frac{2\alpha' \epsilon}{a},$$

в результате получим угол видимости  $\beta$ :

$$\beta = \frac{(x - \epsilon)}{0,4a} \left[ 0,96 - \sin \varphi \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} + \frac{2\alpha' \epsilon}{a} - \beta. \quad (2.31)$$

Найдём угол видимости  $\beta'$ , продифференцировав для этого уравнение (2.29) по  $\alpha'$  и, приравняв результаты дифференцирования нулю, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right] (-x - \epsilon)}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} + \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} c \operatorname{ctg} \varphi \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0, \quad (2.32)$$

в результате получим следующее выражение:

$$\beta + \beta' = \frac{(x + \epsilon)}{0,4a} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] + \frac{2\epsilon \alpha}{a} - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P}. \quad (2.33)$$

Из выражения (2.33) получим угол видимости  $\beta'$ :

$$\beta' = \frac{(x+\varepsilon)}{0,4a} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P}] + \frac{2\delta\alpha}{a} - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} - \beta. \quad (2.34)$$

Найдём угол видимости  $\alpha$ , продифференцировав для этого уравнение (2.29) по  $\beta$  и, приравняв результаты дифференцирования нулю, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right] a - 0 \cdot \left[ a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a}{P} c \operatorname{ctg} \varphi}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0. \quad (2.35)$$

В результате получим следующее выражение:

$$\alpha - \alpha' = -\frac{1}{0,4} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P}] = \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4P} - \frac{1}{0,4} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'}]. \quad (2.36)$$

Из выражения (2.36) получим угол видимости  $\alpha$ :

$$\alpha = -\frac{1}{0,4} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P}] + \alpha'. \quad (2.37)$$

Найдём угол видимости  $\alpha'$ , продифференцируем уравнение (2.29) по  $\beta'$  и приравняем его к нулю, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{a \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left[ a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0. \quad (2.38)$$

Из уравнения (2.38) получим следующее выражение :

$$-\frac{0,4\alpha'}{\sin \varphi} = -\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{\pi a \gamma}{P} - \frac{0,4\alpha}{\sin \varphi} \left( \frac{\sin \varphi}{0,4} \right),$$

в результате получим угол видимости  $\alpha'$  :

$$\alpha' = \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4P} + \alpha. \quad (2.39)$$

При найденных значениях углов видимости  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\text{макс}}$ , следовательно, формула (2.29) примет вид (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$z_{\text{макс}} = \frac{\left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P}}. \quad (2.40)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (2.40) в формулу (2.10), в этом случае  $B = 2(a + v)$ .

$$\frac{1,76Pa}{C_z} = \frac{\left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P}}; \quad (2.41)$$

$$\frac{1,76P^2}{\sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha') \right] - P \left\{ 1,76\pi a \gamma + \frac{C}{a} \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] \right\} - \pi C_z c \operatorname{ctg} \varphi = 0.$$

(2.42)

Приведём уравнение (2.42) к следующему виду:

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (2.43)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1,76}{\sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha') \right]; \\ N &= - \left\{ 1,76\pi a \gamma + \frac{C}{a} \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] \right\}; \\ L &= -\pi C_z c \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Решая уравнение (2.43), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]. \quad (2.45)$$

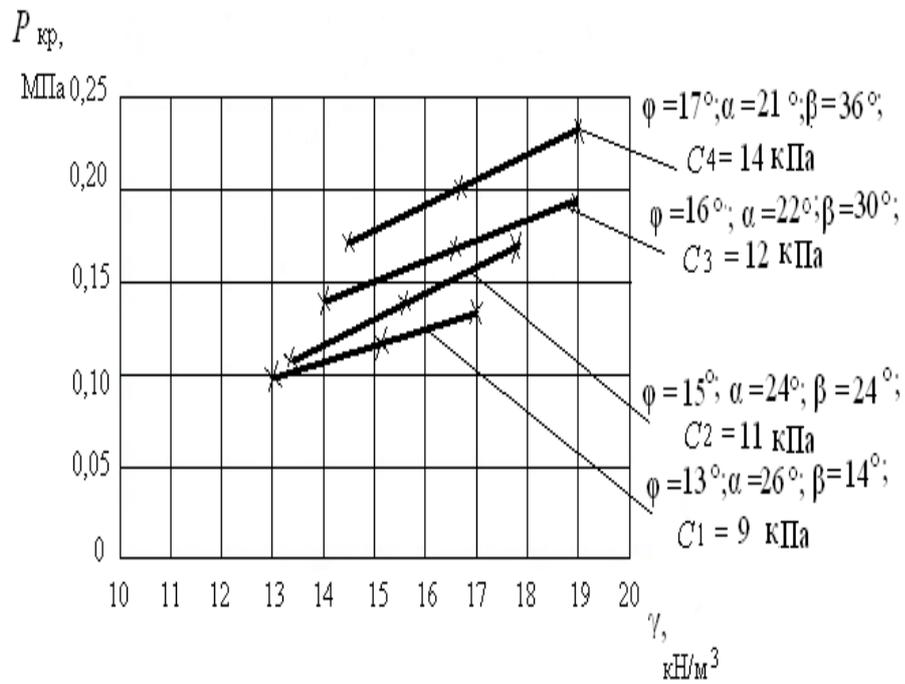
Формулы (2.40) и (2.45) позволяют вычислять  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  в полупространстве грунтовой среды. В этих формулах  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения, можно получить формулы для  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. Например при  $\nu = 0$ , т. е. когда точки А, и А' совпадут с 0, эпюра будет иметь другой вид симметричной нагрузки; придавая ширине базы полубесконечной нагрузки определённое конечное значение, можно получить эпюру для симметричной треугольной и ленточной нагрузки. На рис. 2.8 а,б приведены зависимости  $P_{кр}$  от удельного веса  $\gamma$ , удельного сцепления  $c$  и угла внутреннего трения  $\varphi$ , на рис. 2.9 а,б приведены зависимости глубин развития критического усилия  $z_{\max}$  от тех же характеристик. Расчёт  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства (табл. 2.3), соответствующим пластичным супесям.

Таблица 2.3.

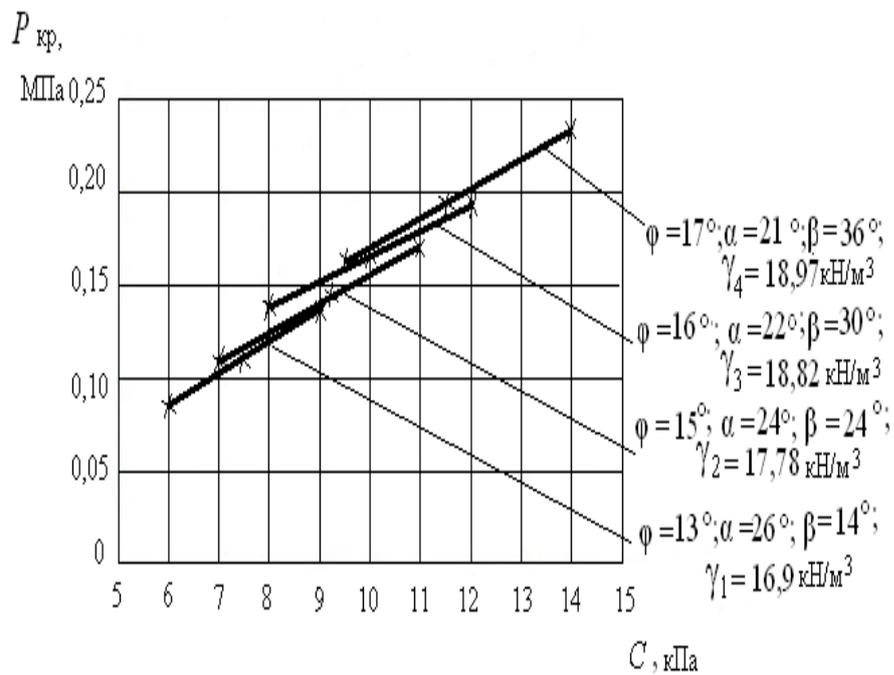
Физико-механические характеристики грунтов \*

Наименование грунта	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , <sup>0</sup>	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа
Супеси	16,90	13	9	15,8	16,07
пластичные	17,78	15	11	16,2	16,48
	18,82	16	12	16,6	17,0
	18,97	17	14	17,8	18,1

\*вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам пластических супесей

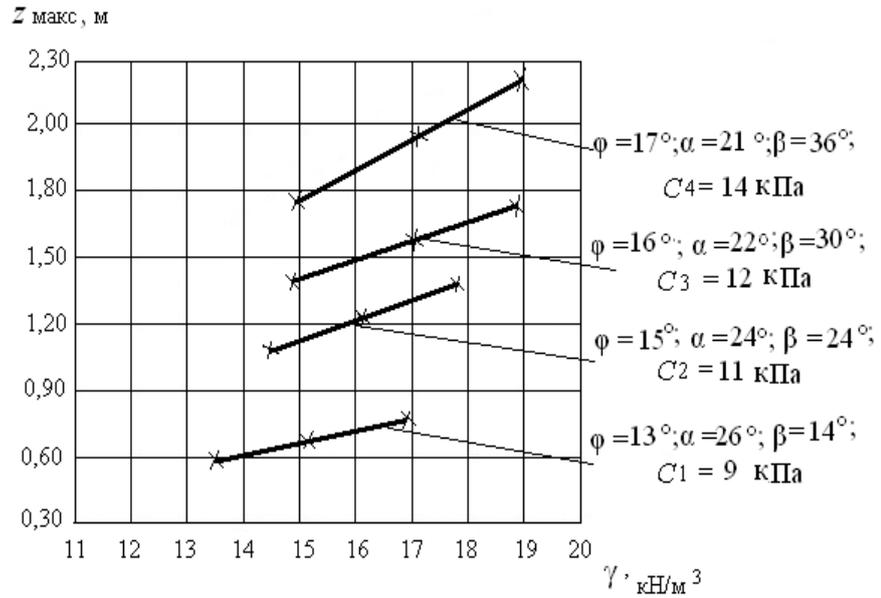


а)

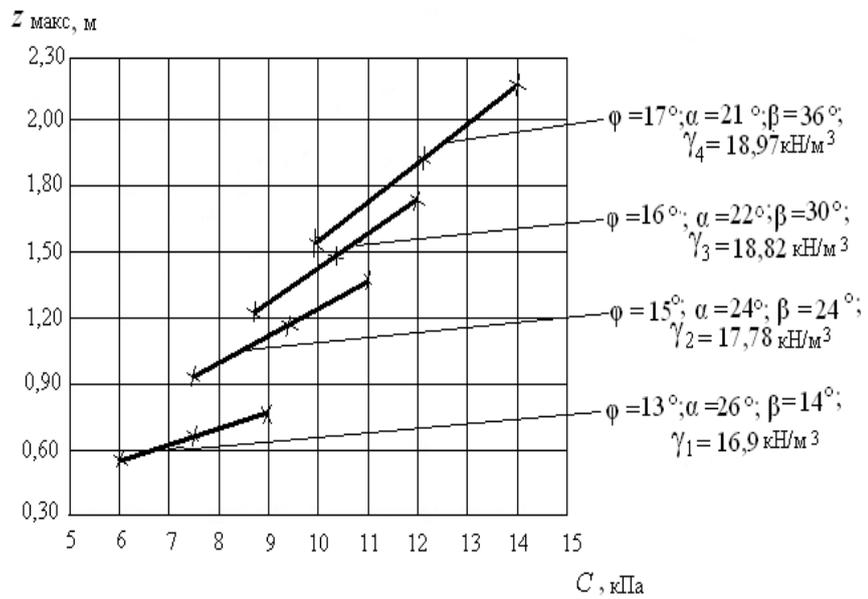


б)

Рис. 2.8. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ; б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 2.9. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

**«Отрицательная» нагрузка в форме треугольника.** На рис. 2.10. изображена модель грунтовой среды с нагрузкой в форме треугольника.

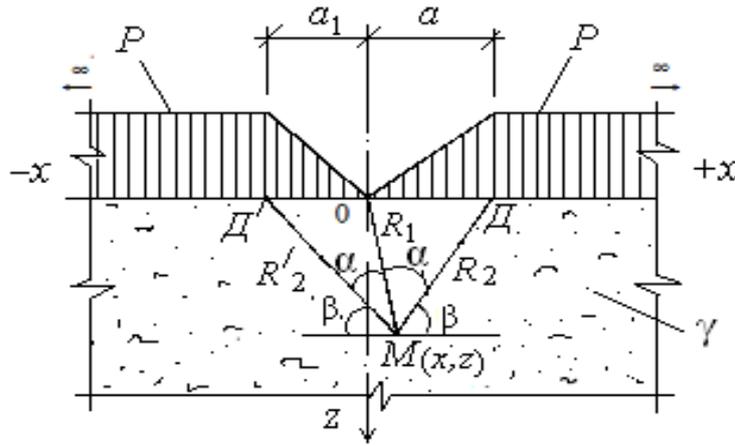


Рис. 2.10. Модель однородной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Формулы главных напряжений, обусловленных действием комбинированной нагрузки, представлены следующими выражениями вид (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} [(\beta + \beta') + (\frac{x}{a}\alpha - \frac{x}{a_1}\alpha')] + (\frac{z}{a}\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1}\ln \frac{R_2'}{R_1'}) + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{(\frac{1}{a}\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1}\ln \frac{R_2'}{R_1'})^2 + (\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1})^2} + \gamma z; \quad (2.46)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} [(\beta + \beta') + (\frac{x}{a}\alpha - \frac{x}{a_1}\alpha')] + (\frac{z}{a}\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1}\ln \frac{R_2'}{R_1'}) - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{(\frac{1}{a}\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1}\ln \frac{R_2'}{R_1'})^2 + (\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1})^2} + \gamma z, \quad (2.47)$$

где  $P = P(x)$  – внешняя нагрузки;  $x, z$  – координаты точки М;  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  – углы видимости баз действия нагрузки;  $R_1, R_2, R_2', R_1'$  – расстояния от точки М ( $x, z$ ) до точек О, Д, О, Д' баз внешней нагрузки;  $\gamma$  – удельный вес основания подстилающего слоя;  $a = OD, a_1 = OD'$ .

Подставим выражения (2.46) и (2.47) в условие предельного равновесия (2.3), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{Pz}{\pi \sin \varphi} \sqrt{(\frac{1}{a}\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1}\ln \frac{R_2'}{R_1'})^2 + (\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1})^2} - \frac{Pz}{\pi} (\frac{1}{a}\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1}\ln \frac{R_2'}{R_1'}) - \gamma z = \\ & = \frac{P}{\pi} [(\beta + \beta') + (\frac{x}{a}\alpha - \frac{x}{a_1}\alpha')] + c \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Решая уравнение (2.48) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{(\beta + \beta') + \left(\frac{x}{a}\alpha - \frac{x}{a_1}\alpha'\right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (2.49)$$

Найдём угол видимости  $\beta$ , при котором  $z = z_{\max}$ , продифференцировав для этого уравнение (2.49) по  $\alpha$  и, приравняв результаты дифференцирования нулю, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{x}{a} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{\frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left(\frac{x}{a}\alpha - \frac{x}{a_1}\alpha'\right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0. \quad (2.50)$$

Выполним преобразование в уравнении (2.50):

$$(x - \varepsilon) \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right] - \frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} \operatorname{ctg} \varphi \right\} = 0.$$

В результате получим следующее выражение:

$$\beta + \beta' = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right] - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P},$$

из которого следует выражение для угла видимости  $\beta$ :

$$\beta = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right] - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} - \beta'. \quad (2.51)$$

Найдём угол видимости  $\beta'$ , продифференцировав для этого уравнение (2.49) по  $\alpha'$  и, приравняв результаты дифференцирования нулю, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'} = \frac{-\frac{x}{a_1} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{\frac{0,4}{a_1 \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0. \quad (2.52)$$

В результате получим следующее уравнение:

$$\beta + \beta' = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right] - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P},$$

из которого найдём выражение для угла видимости  $\beta'$ :

$$\beta' = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right] - \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} - \beta. \quad (2.53)$$

Найдём угол видимости  $\alpha$ , продифференцируем для этого уравнение (2.49) по  $\beta$  и приравняем результаты дифференцирования нулю, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0. \quad (2.54)$$

Выполним преобразование в уравнении (2.54), в результате получим следующее выражение:

$$\left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) = - \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,4P},$$

из которого найдём выражение для угла видимости  $\alpha$ :

$$\alpha = - \frac{a(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4P} + \frac{a \alpha'}{a_1}. \quad (2.55)$$

Найдём угол видимости  $\alpha'$ , продифференцировав уравнение (2.49) по  $\beta'$  и, приравняв его к нулю, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0. \quad (2.56)$$

Выполним преобразование в уравнении (2.56), в результате получим следующее выражение:

$$\left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) = - \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln^2 \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,4P},$$

из которого найдём выражение для угла видимости  $\alpha'$ :

$$\alpha' = \frac{a_1(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln^2 \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi a_1 \gamma \sin \varphi}{0,4P} + \frac{a_1 \alpha}{a}. \quad (2.57)$$

При найденных значениях углов глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\text{макс}}$ , следовательно, уравнение (2.49) примет вид (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$z_{\text{макс}} = \frac{(\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi c \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (2.58)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (2.58) в формулу (2.10), в этом случае  $B = a + a_1$  – база действия нагрузки.

В результате получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{0,88P^2(a + a_1)}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - \\ & - P \left[ \frac{0,88(a + a_1)}{C_z} \pi \gamma + (\beta + \beta') + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - \pi c \operatorname{ctg} \varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Приведём квадратное уравнение (2.59) к следующему виду (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (2.60)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{0,88(a + a_1)}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \\ N &= - \left[ \frac{0,88(a + a_1)}{C_z} \pi \gamma + (\beta + \beta') + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \\ L &= -\pi c \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Решая уравнение (2.60), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (2.62)$$

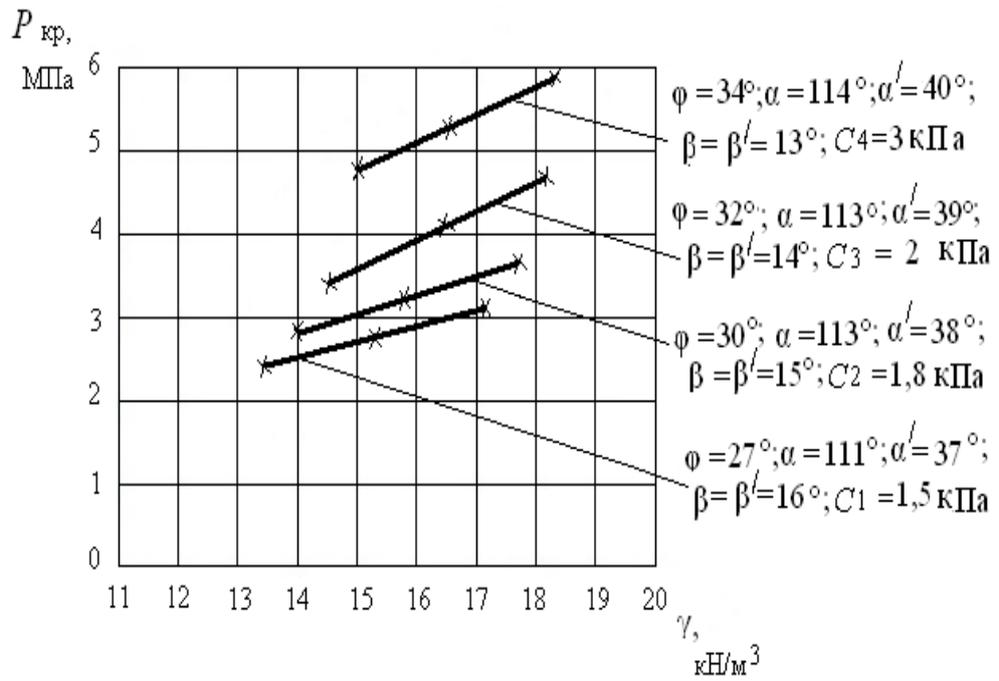
Формулы (2.58) и (2.62) зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения, можно получить формулы для  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для различных вариантов эпюр внешней нагрузки. Например, при  $a = a_1$ , эпюра будет иметь вид симметричной нагрузки; придавая ширине базы полубесконечной нагрузки определённое конечное значение, можно получить эпюру для комбинированной треугольной и ленточной нагрузки. На рис. 2.11 а,б приведены зависимости  $P_{кр}$  от удельного веса  $\gamma$ , удельного сцепления  $c$  и угла внутреннего трения  $\varphi$ , на рис. 2.12 а,б приведены зависимости глубин развития критического усилия  $h$  от тех же характеристик. Расчёт  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках грунтов полупространства (табл. 2.4.), соответствующим мелкой фракции водонасыщенным пескам.

Таблица 2.4.

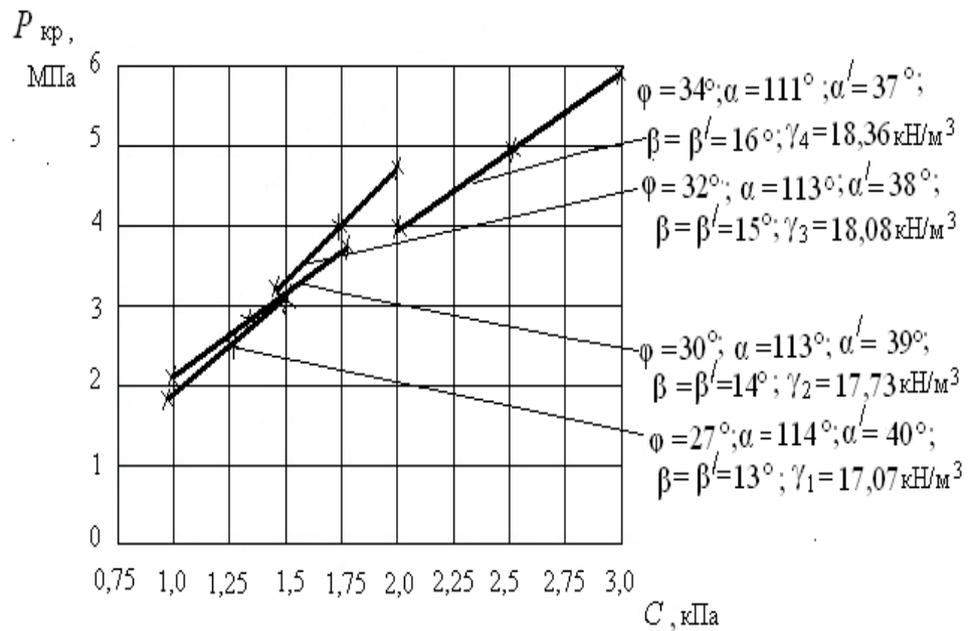
Физико - механические характеристики грунтов \*

Наименование грунтов	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , °	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа
Песок мелкий, средн. степени водонасыщенный	17,07	27	1,5	25,8	26,25
	17,73	30	1,8	26,2	26,65
	18,08	32	2	28	28,48
	18,36	34	3	29	29,30

\* вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам песка

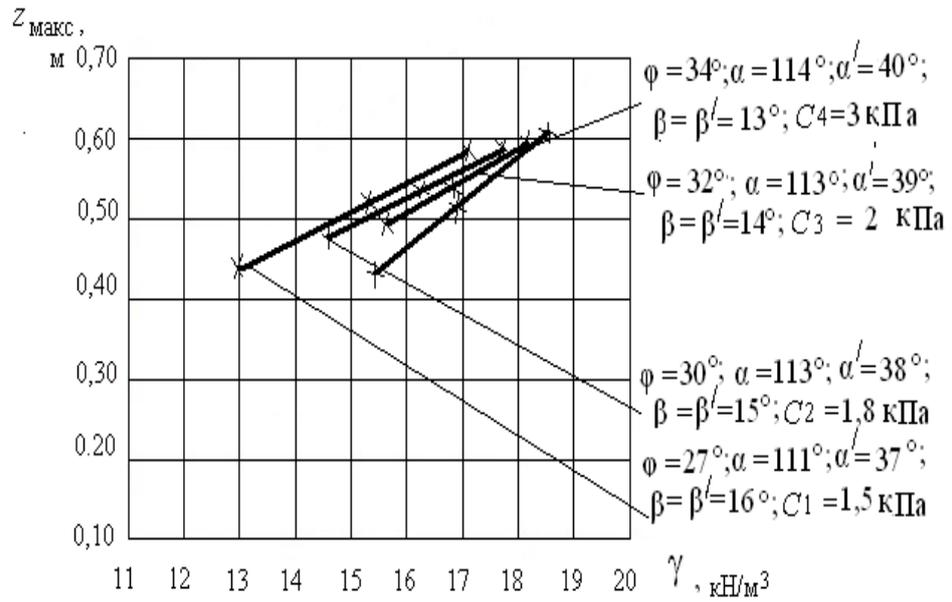


а)

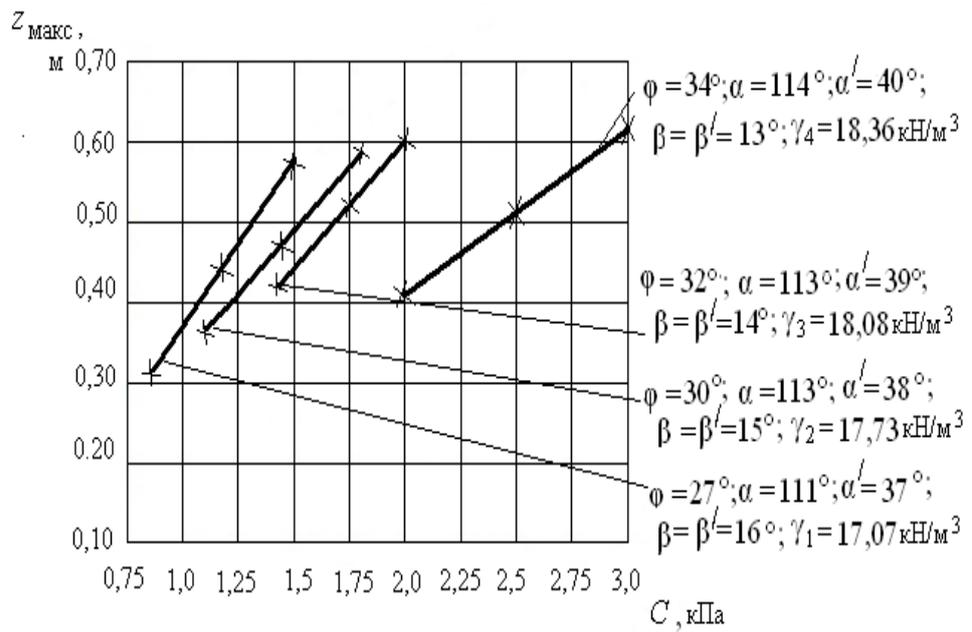


б)

Рис. 2.11. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ; б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 2.12. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

Из результатов выполненных расчётов следует:

- с увеличением величин физико-механических характеристик происходит увеличение  $P_{кр}$  и  $z_{макс}$  для всех исследуемых случаев;

- для зависимости  $P_{кр}(\gamma)$  увеличения критического усилия происходит не только с ростом  $\gamma$ , но также с увеличением  $\varphi$  и  $c$ ; при этом угловой коэффициент (угол наклона графиков  $P_{кр}(\gamma)$  к оси абсцисс) увеличивается с ростом  $\varphi$  и  $c$ ;

- для зависимости  $P_{кр}(c)$  увеличение критического усилия происходит в основном только с ростом  $c$ ; за счёт увеличения  $\gamma$  и  $\varphi$  критическое усилие изменяется не более чем на 8%; поэтому для всех рассмотренных значений  $\gamma$  и  $\varphi$  можно предложить единую (усреднённую) зависимость  $P_{кр}(c)$ .

- для зависимости  $z_{макс}(\gamma)$  увеличение максимальной глубины развития критического усилия происходит так же с ростом  $\gamma$  и с увеличением  $\varphi$  и  $c$ ; за счёт увеличения  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $c$  изменение максимальной глубины происходит в пределах 7%, следовательно, для всех рассмотренных значений характеристик можно предложить единую (усреднённую) зависимость  $z_{макс}(\gamma)$ .

## 2.2. Расчёт критической нагрузки с помощью рекуррентных формул

Расчётная схема представляет собой однородное грунтовое полупространство с треугольной нагрузкой  $P$  (рис. 2.13) (Кравченко Т.И. и др., 2015).

Полупространство находится в гидростатическом напряженном состоянии:  $\sigma_x^0 = \sigma_z^0 = \gamma z$ , где  $\sigma_x^0$  и  $\sigma_z^0$  – начальные составляющие напряжения;  $\gamma z$  – нагрузка от веса грунта до уровня  $z$ . В этом случае напряжённое состояние в полупространстве определяется весом полупространства и влиянием нагрузки. Задача заключается в определении такой величины критического давления  $P_{кр}$ , при котором область предельного равновесия распространяется на глубину  $z_{макс}$ .

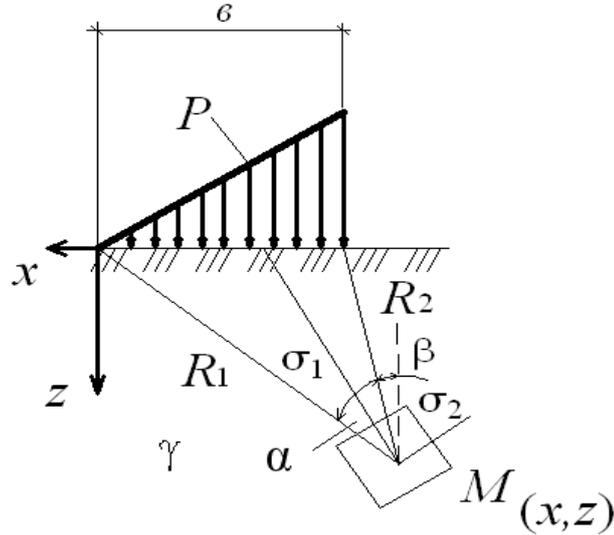


Рис. 2.13. Схема действия треугольной нагрузки в условиях плоской задачи

Формулы для составляющих напряжений, обусловленных действием треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{b} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{z} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{z} \right) - \frac{z(x-b)}{(x-b)^2 + z^2} \right], \quad (2.63)$$

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{z}{b} \left( \ln \frac{(x-b)^2 + z}{x^2 + z^2} \right) + \frac{x}{b} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{z} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{z} \right) + \frac{z(x-b)}{(x-b)^2 + z^2} \right], \quad (2.64)$$

где  $P=P(x)$  – величина треугольной нагрузки;  $b$  – база действия нагрузки.

Путём преобразований формулы (2.63) и (2.64) можно привести к следующему виду:

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{2x}{b} \alpha - \sin 2\beta \right], \sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{2z}{b} \left( \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{2x}{b} \alpha + \sin 2\beta \right], \quad (2.65)$$

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right),$$

где  $\alpha$  – угол видимости базы действия нагрузки;  $\beta$  – угол с вершиной в точке  $M$ , образованный лучом  $R_1$  и осью  $z$ .

Для точки  $M$  (рис. 2.13), расположенной на глубине  $z$ , найдем главные напряжения при  $\beta = \alpha/3$ , т.к. наибольшие и наименьшие нормальные напряжения возникают на площадках, расположенных по биссектрисам углов видимости и площадкам им перпендикулярным

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} + \gamma z \quad (2.66)$$

или

$$\sigma_{1,2} = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma z. \quad (2.67)$$

Подставив выражение (2.67) в условие предельного равновесия (2.3), получим следующее уравнение:

$$1,42 \frac{P}{\pi} \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 1,42 \frac{P}{\pi} \sin \frac{2}{3} \alpha = 2 \sin \varphi \left( \frac{P}{\pi} \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{2P}{\pi} \frac{x}{b} \alpha + \gamma \cdot z + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \right) \quad (2.68)$$

Решая уравнение (2.68) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{2 \sin \varphi \frac{Px}{\pi b} \alpha - 0,71 \frac{P}{\pi} \sin \frac{2}{3} \alpha + c \cdot \cos \varphi}{\frac{P}{\pi b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - \gamma \sin \varphi}. \quad (2.69)$$

Найдём угол видимости  $\alpha$ , при котором  $z = z_{\max}$ , продифференцировав для этого уравнение (2.69) по  $\alpha$  и приравняем результаты дифференцирования нулю, тогда получим:

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{\frac{P}{\pi} \left( 2 \frac{x}{b} \sin \varphi - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha \right)}{\frac{P}{\pi b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - \gamma \sin \varphi}, \quad (2.70)$$

при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ .

$$\frac{P}{\pi} \left( 2 \frac{x}{b} \sin \varphi - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha \right) = 0 ;$$

$$\frac{x}{b} \sin \varphi - 0,355 \cos \frac{2}{3} \alpha = 0; \quad \frac{x}{0,355b} \sin \varphi = \cos \frac{2}{3} \alpha ;$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \arccos \left( \frac{x}{0,355b} \sin \varphi \right) . \quad (2.71)$$

Подставляя (2.71) в (2.69) получим формулу для  $z_{\max}$  в виде (Кравченко Т.И. и др., 2015)

$$z_{\max} = \frac{3 \sin \varphi \frac{Px}{\pi b} \arccos \left( \frac{x}{0,355b} \sin \varphi \right) - 0,71 \frac{P}{\pi} \sin \left[ \arccos \left( \frac{x}{0,355b} \sin \varphi \right) \right] + c \cdot \cos \varphi}{\frac{P}{\pi b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - \gamma \sin \varphi}, \quad (2.72)$$

где  $b$  – длина базы треугольной нагрузки  $P$ ;  $x$  – ордината центра тяжести эпюры треугольной нагрузки;  $R_1$  и  $R_2$  – направляющие, соединяющие начало и конец полосовой нагрузки с точкой  $M$  на глубине  $z$ .

В уравнении (2.72) содержится два неизвестных  $z_{\max}$  и  $P_{\text{кр}}$ . Для определения  $P_{\text{кр}}$  найдём  $z_{\max}$  по рекуррентным формулам краевой задачи (Соколовский В.В., 1969) (рис. 2.14).

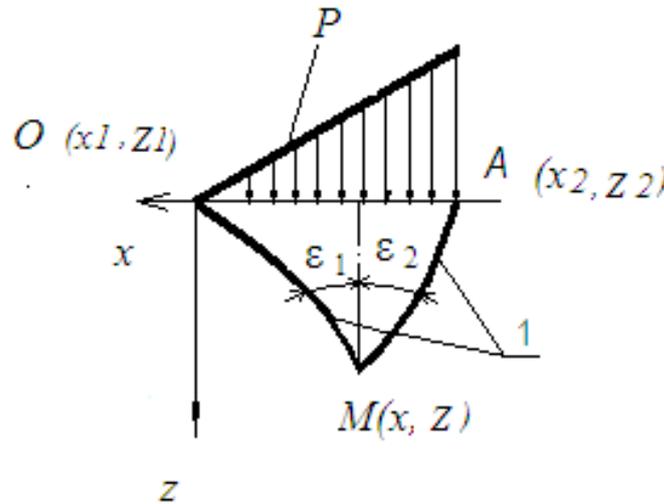


Рис. 2.14. Краевые условия при действии треугольной нагрузки:

1 - линии влияния от действия нагрузки

$$\begin{cases} z - z_2 = (x - x_1) \operatorname{tg}(90^\circ - \varepsilon_1), \\ z - z_2 = (x - x_2) \operatorname{tg}(90^\circ + \varepsilon_2), \end{cases} \quad (2.73)$$

где  $\varepsilon_1 = 2/3 \alpha$ ;  $\varepsilon_2 = 1/3 \alpha$ ;  $x_1, y_1$  - координаты точки О (начало базы действия нагрузки);  $x_2, z_2$  - координаты точки А (конец базы действия нагрузки).

Решая систему (2.73), получаем значение  $z_{\text{макс}}$ . Подставим  $z_{\text{макс}}$  в уравнение (2.72), получим формулу для вычисления критического усилия  $P_{\text{кр}}$  (Кравченко Т.И., 2015):

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi(\gamma \cdot z_{\text{макс}} \sin \varphi + c \cdot \cos \varphi)}{\frac{z_{\text{макс}}}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \varphi + 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha}, \quad (2.74)$$

где  $\gamma$  - удельный вес грунта.

Из формулы (2.74) при  $z_{\text{макс}} = 0$ , найдём начальное критическое усилие (Кравченко Т.И. и др., 2015)

$$P_{\text{нач.кр}} = \frac{\pi \cdot c \cdot \cos \varphi}{0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \varphi}. \quad (2.75)$$

Рассмотрим зависимость  $P_{\text{кр}}$  от физико - механических характеристик  $c, \varphi, \gamma$  увлажнённых заторфованных грунтов при длине базы нагрузки  $b = 1$  м. Графический вид этих зависимостей представлен на рис. 2.15 и 2.16.

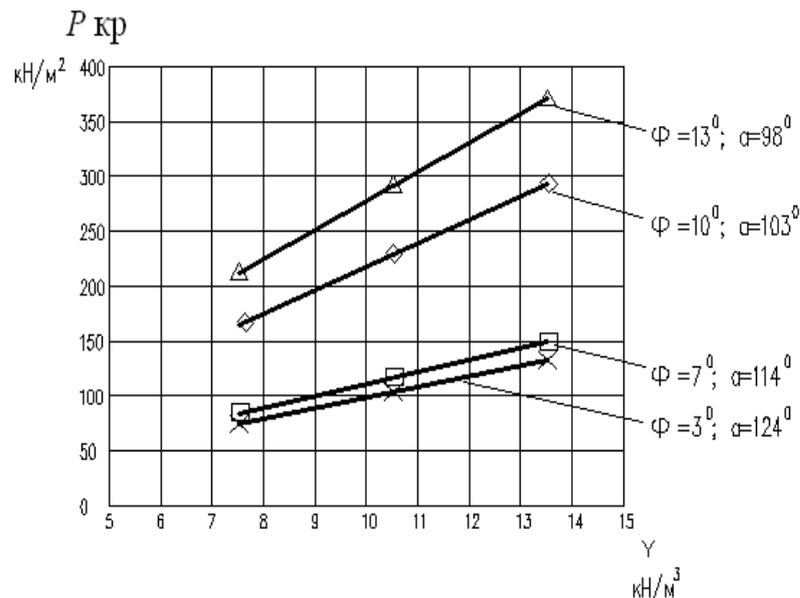


Рис. 2.15. Зависимость критической нагрузки  $P_{\text{кр}}$  от удельного веса грунта  $\gamma$

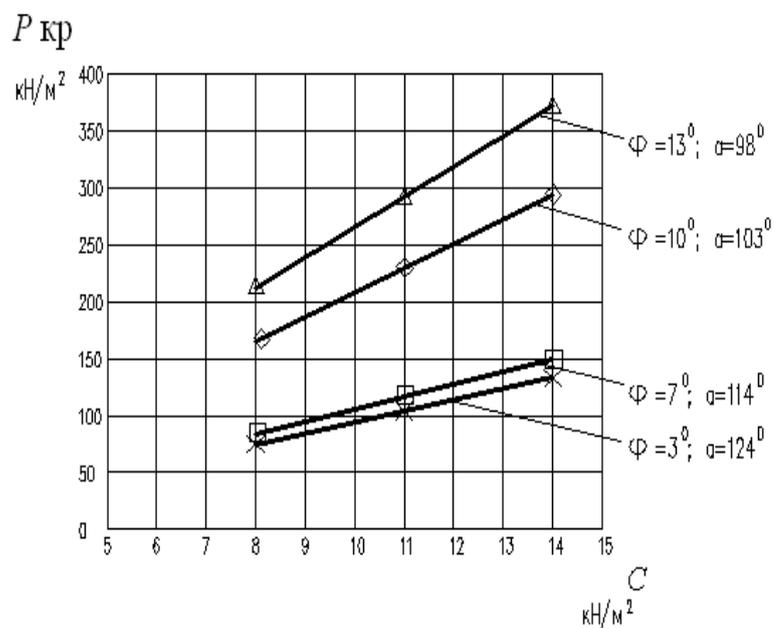


Рис. 2.16. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от удельного сцепления грунта  $c$

Значения критических нагрузок для разных типов грунтов, определённые по формулам (2.72) и (2.74) представлены в табл.2.5.

Таблица.2.5.

Критические нагрузки для разных типов грунтов

№ п/п	Типы грунтов	$\gamma$ , МПа/м	$\varphi$ , °	$c$ , МПа	$P_{кр}$ , МПа	$z_{\max}$ , м
1	Сапрпель	0,0013	3	0,00025	0,050	0,73
2	Торф низинный	0,0015	7	0,0045	0,063	0,77
3	Глины мягко-пластичной консистенции	0,0019	8	0,0005	0,075	1,0
4	Ил озёрный	0,0014	4	0,0003	0,060	0,74
5	Суглинок водонасыщенный	0,002	13	0,005	0,125	1,2

Из анализа зависимости  $P_{кр}$  от параметров грунтов ( $\varphi, \gamma, c$ ) следует :

- при увеличении угла внутреннего трения  $\varphi$  происходит возрастание критической нагрузки  $P_{кр}$  и максимальной глубины залегания  $z_{макс}$ , но при этом угол видимости  $\alpha$  уменьшается;
- при увеличении удельного веса грунта и удельного сцепления происходит возрастание критической нагрузки  $P_{кр}$  и максимальной глубины залегания  $z_{макс}$ , но с уменьшением угла  $\alpha$ .

Линейные зависимости  $P_{кр}$  от  $\varphi, \gamma, c$ , представленные на рис. 2.15 и 2.16 позволяют упростить расчёты критических усилий при исследовании грунтов. Метод определения критических усилий и максимальных глубин залегания грунтов находящихся в предельном состоянии, позволяет получить достаточно точное решение плоской задачи для оценки устойчивости оснований сооружений.

**Нагрузка в форме прямоугольного треугольника.** Расчётная схема представляет собой полупространство с внешней треугольной нагрузкой  $P$  (рис. 2.17).

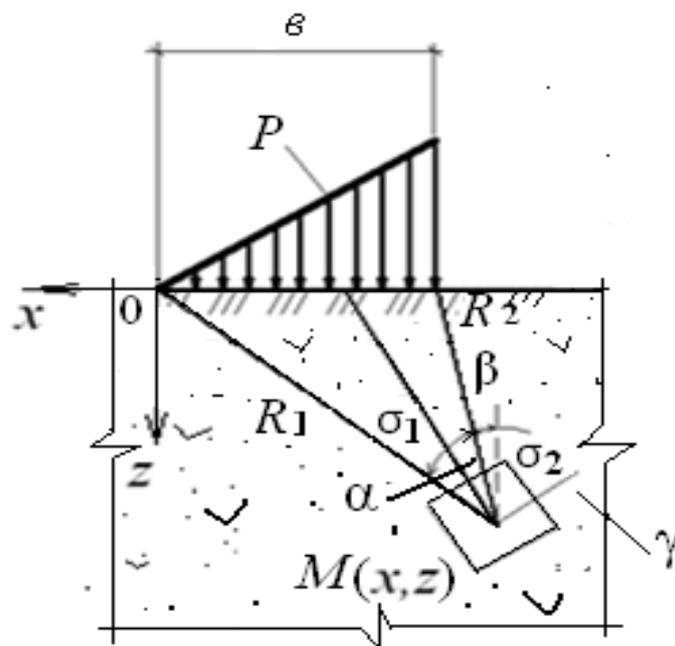


Рис. 2.17. Модель грунтовой среды и эпюра треугольной нагрузки

Формулы для главных напряжений, обусловленных действием треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{\epsilon} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{\epsilon} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma z ; \quad (2.76)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{\epsilon} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{\epsilon} \alpha \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{\epsilon} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma z , \quad (2.77)$$

где  $P = P(x)$  – величина треугольной нагрузки;  $\epsilon$  – база действия нагрузки;  $\alpha$  – угол видимости базы действия нагрузки. Подставив выражения (2.76) и (2.77) в условие предельного равновесия (2.3), получим следующее уравнение:

$$z \left[ \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{\epsilon} \right) - \frac{\pi}{P} \gamma \sin \varphi \right] = -0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{2x \sin \varphi}{\epsilon} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} c \cdot \operatorname{ctg} \varphi. \quad (2.78)$$

Решая уравнение (2.78) относительно  $z$ , получим (Кравченко Т.И. и др., 2015)

$$z = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{\epsilon} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi}{P} c \cdot \cos \varphi}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{\epsilon} \right) - \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{P}}. \quad (2.79)$$

Найдём угол видимости, продифференцируем для этого уравнение (2.79) по  $\alpha$  и приравняем результаты дифференцирования нулю, тогда получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{\epsilon} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{\epsilon} \right) - \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{P}} = 0, \quad (2.80)$$

при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{2x \sin \varphi}{\epsilon} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha &= 0; \\ \alpha &= \frac{3}{2} \arccos\left(\frac{x}{0,36\epsilon} \sin \varphi\right). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Подставляя (2.81) в уравнение (2.79) получим формулу для  $z_{\max}$  (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$z_{\max} = \frac{3 \sin \varphi \frac{x}{\epsilon} \arccos\left(\frac{x}{0,355\epsilon} \sin \varphi\right) - 0,71 \sin\left[\arccos\left(\frac{x}{0,355\epsilon} \sin \varphi\right)\right] + c \cdot \cos \varphi}{\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - \frac{\pi}{P} \gamma \sin \varphi}, \quad (2.82)$$

где  $\epsilon$  – длина базы треугольной нагрузки  $P$ ;  $x$  – ордината центра тяжести эпюры треугольной нагрузки;  $R_1$  и  $R_2$  – направляющие, соединяющие начало и конец полосовой нагрузки с точкой  $M$  на глубине  $z$ .

Для определения  $P_{\text{кр}}$  (2.82) подставим в формулу (Маслов Н.Н., 1968):

$$z_{\max} = \frac{0,88PB}{C_z}, \quad (2.83)$$

где  $C_z = E/(1 - \nu^2)$  – коэффициент упругого полупространства,  $B = \epsilon$  – база действия нагрузки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль деформации, ( $\nu$  и  $E$  приняты постоянными для полупространства) (СП22.13330. 2011,2000).

Получим следующее уравнение:

$$\frac{0,88P\epsilon}{C_z} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{\epsilon} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi}{P} c \cdot \cos \varphi}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(\frac{0,71 - \sin \varphi}{\epsilon}\right) - \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{P}}. \quad (2.84)$$

Выражение (2.84) приведём к квадратному уравнению 2-й степени.

$$\begin{aligned} 0,88P^2 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - P(0,88 \pi \epsilon \gamma \sin \varphi + \frac{2xC_z \sin \varphi}{\epsilon} \alpha - 0,71C_z \sin \frac{2}{3} \alpha) - \\ - \pi C_z \cdot c \cdot \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Уравнение (2.85) приведём к следующему виду:

$$P^2 + NP + L = 0. \quad (2.86)$$

Решая уравнение (2.86), получим формулы для вычисления критического усилия  $P_{кр}$  (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}, \quad (2.87)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= 0,88 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi); \\ N &= - \left( 0,88 \pi v \gamma_3 + \frac{2x C_z \sin \varphi}{v} \alpha - 0,71 C_z \sin \frac{2}{3} \alpha \right); \\ L &= -\pi C_z \cdot c \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

Рассмотрим зависимость  $P_{кр}$  от физико-механических характеристик:  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $v = 1$  м. Характеристики грунтов указаны в таблице 2.6. Графический вид этих зависимостей представлен на рис. 2.18-2.19.

Таблица 2.6.

Физико - механические характеристики грунтов \*

Наименование грунтов	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , °	$z_{\text{макс}}$ , М	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа
Глины	18,8	8	0,20	28	10	11,24
мягко-	18,9	9	0,22	29	13	14,61
пластич-	19,1	11	0,24	30	14	15,73
ных пород	19,3	13	0,30	31	16	17,98

\* вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам глин

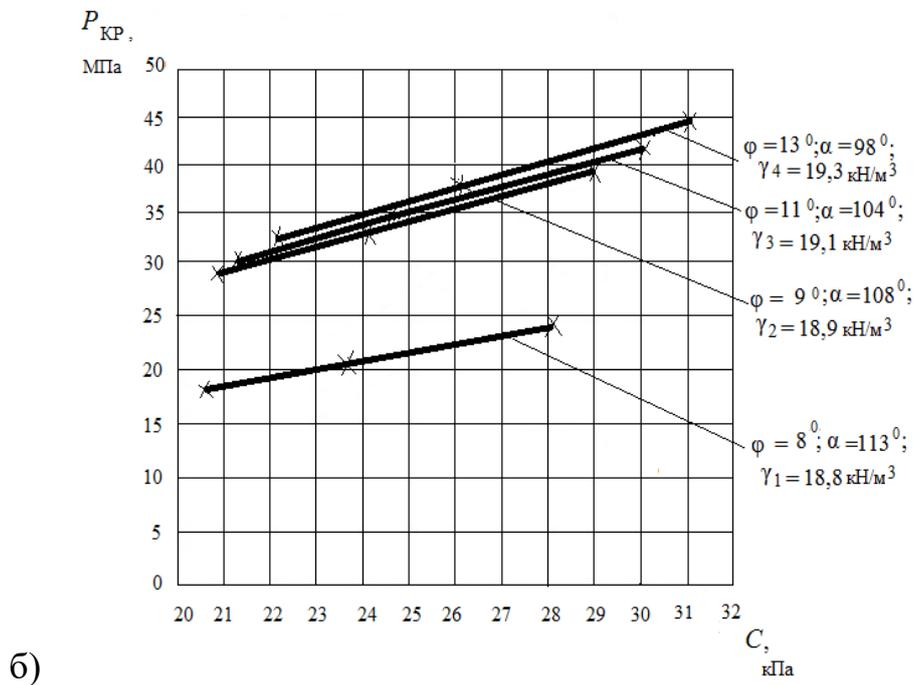
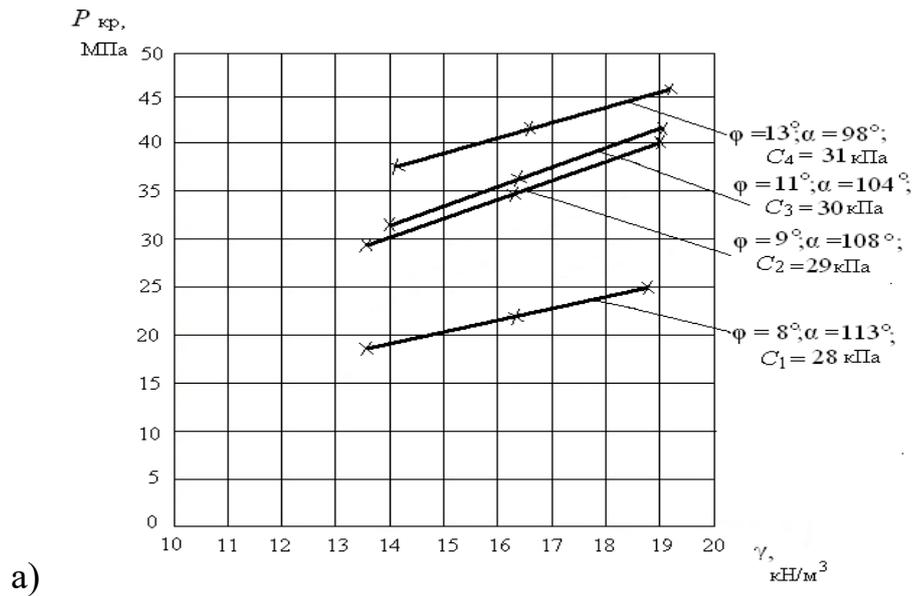
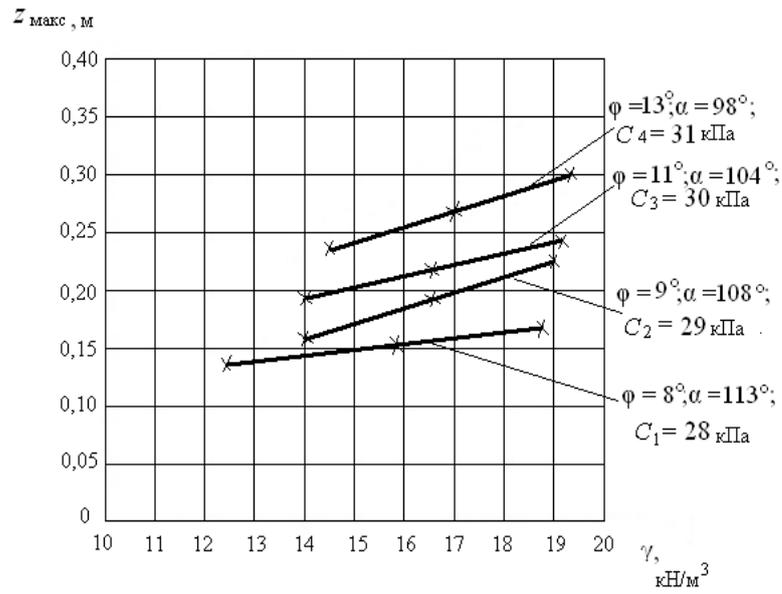
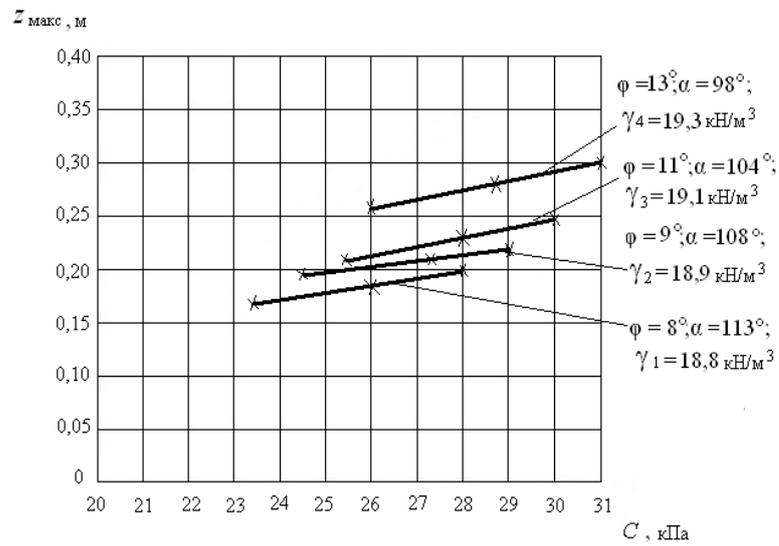


Рис. 2.18. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ; б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 2.19. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

### 2.3. Расчёт критической нагрузки грунтовой среды от действия внешнего усилия в форме прямоугольного треугольника с помощью безразмерных коэффициентов

Решение задачи о критическом усилии  $P_{кр}$  для модели грунтовой среды, состоящей из горизонтальных слоёв постоянной мощности, лежащих на однородном полупространстве (рис. 2.20), было получено на основе аналитических решений (Герсеванов Н.И., 1948; Горбунов-Посадов, 1962; Далматов Б.И., 1975) с использованием расчётных коэффициентов  $M_\gamma, M_q, M_c$ , полученных в зависимости от угла внутреннего трения грунта и схем загрузки.

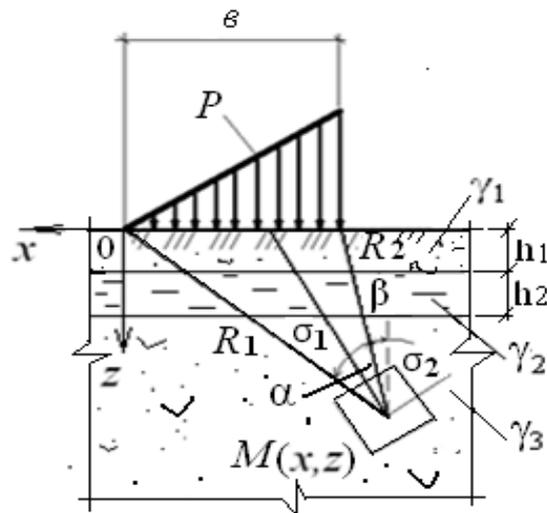


Рис. 2.20. Модель слоистой грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Формулы главных напряжений, обусловленных действием треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (2.89)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)], \quad (2.90)$$

где  $P = P(x)$  – внешняя нагрузки;  $x, z$  – координаты точки М;  $e$  – длина базы действия треугольной нагрузки;  $\alpha$  – угол видимости базы действия нагрузки;  $\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3[z - (h_1 + h_2)]$  – давление от собственного веса слоёв грунта с учётом водонасыщенного слоя до уровня  $z$ .

Подставив выражения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в формулу условия предельного равновесия (Цытович Н.А., 1983):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sin \varphi \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + P_e \right), \quad (2.91)$$

где  $P_e = c \operatorname{ctg} \varphi$  – давление связности;  $c$  – удельное сцепление связного грунта;  $\varphi$  – угол внутреннего трения грунта, получим следующее уравнение:

$$\frac{\sqrt{2}P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) = 2 \sin \varphi \left( \frac{Pz}{\pi b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{2P}{\pi b} x \alpha + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)] + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \right). \quad (2.92)$$

Решая уравнение (2.92) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (2.93)$$

Найдём угол видимости  $\alpha$ , при котором  $z = z_{\max}$ , продифференцировав для этого уравнение (2.93) по  $\alpha$  и приравняем результаты дифференцирования нулю, тогда получим:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{2x \sin \varphi - 0,71 b \cos \frac{2}{3} \alpha}{(0,71 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{\pi b \gamma_3}{P}} = 0, \quad (2.94)$$

при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ ,

$$2x \sin \varphi - 0,71 b \cos \frac{2}{3} \alpha = 0; \quad (2.95)$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \arccos \left( \frac{x}{0,36e} \sin \varphi \right). \quad (2.96)$$

Подставляя (2.96) в уравнение (2.93), получим формулу для  $z_{\text{макс}}$  (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$z_{\text{макс}} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \text{ctg} \varphi]}{\left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{\pi \gamma_3}{P}}, \quad (2.97)$$

где  $x$  – ордината центра тяжести эпюры треугольной нагрузки;  $R_1$  и  $R_2$  – направляющие, соединяющие начало и конец полосовой нагрузки с точкой  $M$  на глубине  $z$ .

Решим уравнение (2.97) относительно критической нагрузки  $P_{\text{кр}}$  при принятой глубине развития зон пластических деформаций путём последующих преобразований:

$$\left[ \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right] z_{\text{макс}} = \frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \text{ctg} \varphi] \quad (*P); \quad (2.98)$$

$$\left[ P \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \pi \gamma_3 \right] z_{\text{макс}} = \frac{2xP \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71P \sin \frac{2}{3} \alpha + \pi \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \text{ctg} \varphi]; \quad (2.99)$$

$$- \pi \gamma_3 z_{\text{макс}} = \frac{2xP \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71P \sin \frac{2}{3} \alpha - P \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) z_{\text{макс}} + \pi \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \text{ctg} \varphi]; \quad (2.100)$$

$$- \pi \gamma_3 z_{\text{макс}} = P \left[ \frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha - \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) z_{\text{макс}} \right] + \pi \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \text{ctg} \varphi]; \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}
& -\pi \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi] - \pi \gamma_3 z_{\max} = \\
& = P \left[ \frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha - \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) z_{\max} \right].
\end{aligned}
\tag{2.102}$$

Из выражения (2.102), получим формулу для вычисления критического усилия  $P_{\text{кр}}$ :

$$P_{\text{кр}} = \frac{-\pi \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi] - \pi \gamma_3 z_{\max}}{\left[ \frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha - \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) z_{\max} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \right]}.
\tag{2.103}$$

Подставим выражение угла видимости (2.96) в формулу (2.103), получим окончательную формулу  $P_{\text{кр}}$ :

$$P_{\text{кр}} = \frac{-\pi \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi] - \pi \gamma_3 z_{\max}}{\frac{3x \sin \varphi}{b} \left[ 1,5 \arccos \left( \frac{x}{0,36\varrho} \sin \varphi \right) \right] - 0,71 \sin \left[ \arccos \left( \frac{x}{0,36\varrho} \sin \varphi \right) \right] - \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) z_{\max}}.
\tag{2.104}$$

Упростим формулу (2.104), заменяя коэффициенты  $M_\gamma$ ,  $M_q$  и  $M_c$  следующим образом

$$-M_\gamma \gamma_1 h_1 = \frac{\pi \sin \varphi}{\frac{3x \sin \varphi}{b} \left[ 1,5 \arccos \left( \frac{x}{0,36\varrho} \sin \varphi \right) \right] - 0,71 \sin \left[ \arccos \left( \frac{x}{0,36\varrho} \sin \varphi \right) \right] - \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) z_{\max}};
\tag{2.105}$$

$$-M_\gamma \gamma_2 h_2 = \frac{\pi \sin \varphi}{\frac{3x \sin \varphi}{b} \left[ 1,5 \arccos \left( \frac{x}{0,36\varrho} \sin \varphi \right) \right] - 0,71 \sin \left[ \arccos \left( \frac{x}{0,36\varrho} \sin \varphi \right) \right] - \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) z_{\max}};
\tag{2.106}$$

$$M_{\gamma} \gamma_3(h_1 + h_2) = \frac{\pi \sin \varphi}{\frac{3x \sin \varphi}{b} \left[ 1,5 \arccos\left(\frac{x}{0,36e} \sin \varphi\right) - 0,71 \sin \left[ \arccos\left(\frac{x}{0,36e} \sin \varphi\right) \right] - \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(\frac{0,71 - \sin \varphi}{b}\right) z_{\max}} \right]} ;$$

(2.107)

$$-M_q \gamma_3 = \frac{\pi z_{\max}}{\frac{3x \sin \varphi}{b} \left[ 1,5 \arccos\left(\frac{x}{0,36e} \sin \varphi\right) - 0,71 \sin \left[ \arccos\left(\frac{x}{0,36e} \sin \varphi\right) \right] - \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(\frac{0,71 - \sin \varphi}{b}\right) z_{\max}} \right]} ;$$

(2.108)

$$-M_c c = \frac{\pi \cos \varphi}{\frac{3x \sin \varphi}{b} \left[ 1,5 \arccos\left(\frac{x}{0,36e} \sin \varphi\right) - 0,71 \sin \left[ \arccos\left(\frac{x}{0,36e} \sin \varphi\right) \right] - \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(\frac{0,71 - \sin \varphi}{b}\right) z_{\max}} \right]} .$$

(2.109)

После выполнения всех преобразований, получим следующую формулу для вычисления  $P_{кр}$  (Кравченко Т.И. и др., 2015):

$$P_{кр} = \frac{\gamma_{c1} \gamma_{c2}}{k} \{ M_{\gamma} [\gamma_3(h_1 + h_2) - \gamma_1 h_1 - \gamma_2 h_2] - M_q \gamma_3 - M_c c \}$$

(2.110)

где  $\gamma_{c1}, \gamma_{c2}$  – коэффициенты условий работы, принимаемые по таблице 2.7 (СП22.13330.2011,2000);  $k$  – коэффициент, принимаемый равным 1, если прочностные характеристики грунта ( $c$  и  $\varphi$ ) определены непосредственными испытаниями, и  $k = 1,1$ , если они приняты по рекомендациям норм и справочников;  $M_{\gamma}, M_q$  и  $M_c$  – коэффициенты, принимаемые в зависимости от угла внутреннего трения  $\varphi$  и схемы загрузки основания;  $c$  – расчётное значение удельного сцепления грунтового полупространства.

Формула 2.110 применима при условии, что  $z \leq 0,25 e$  для вычисления расчётного сопротивления грунта, т.е.  $P_{кр} = R$  (СП22.13330.2011,2000).

Рассмотрим зависимость  $P_{кр}$  и  $z_{\max}$  от физико-механических характеристик грунтов при длине базы нагрузки  $e = 1-2$  м: угла внутреннего трения  $\varphi$ , удельного веса полупространства  $\gamma$  и удельного сцепления  $c$ . Характеристики грунтов указаны в таблице 2.7. Графический вид этих зависимостей представлен на рис. 2.21-2.22.

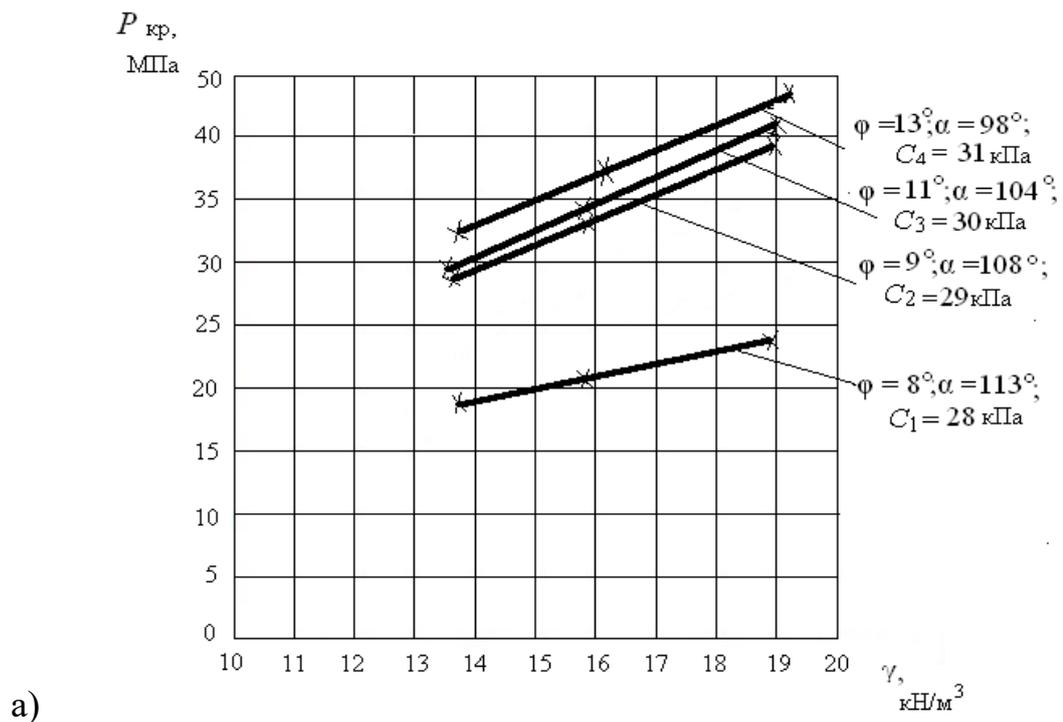
Таблица 2.7.

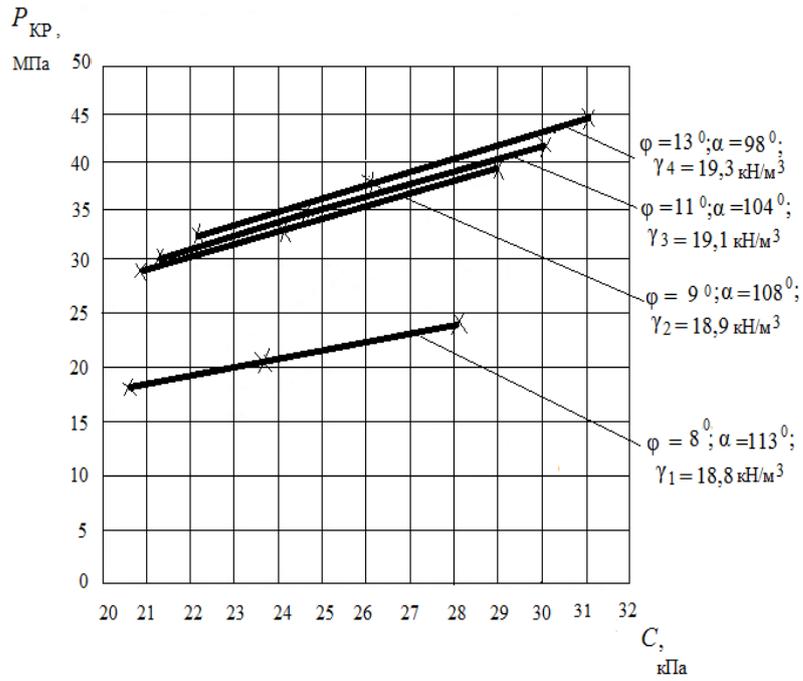
## Физико - механические характеристики грунта \*

Наименование грунтов	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , <sup>0</sup>	$c$ , кПа	$z_{\text{макс}}$ , м	$M\gamma$	$Mq$	$Mc$	$z_{\text{макс}}$ , м	$M\gamma$	$Mq$	$Mc$
				$b=1\text{м}$				$b=2\text{м}$			
Глины мягко- плас- тичных конси- стенций	18,8	8	28	0,17 $\kappa_z$	25,7	184,71	182,86	0,33 $\kappa_z$	21,8	314	155,4
	18,9	9	29	0,19 $\kappa_z$	10,21	65,41	64,63	0,38 $\kappa_z$	10,0	128,16	63,3
	19,1	11	30	0,24 $\kappa_z$	5,61	29,35	28,82	0,49 $\kappa_z$	4,76	49,84	24,4
	19,3	13	31	0,30 $\kappa_z$	2,65	11,76	11,45	0,60 $\kappa_z$	2,59	23,0	11,2

\*вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам глин ;

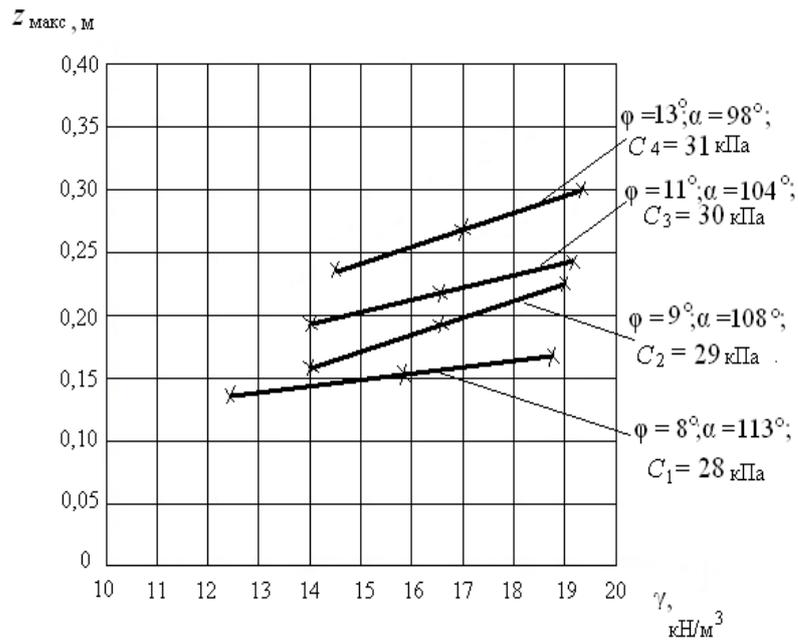
\*  $\kappa_z$  – коэффициент, принимаемый при  $b > 10\text{м}$  равным  $\kappa_z = z_{\text{макс}}/b + 0,2$ ,  
при  $b \leq 10\text{м}$   $\kappa_z = 1$ ;



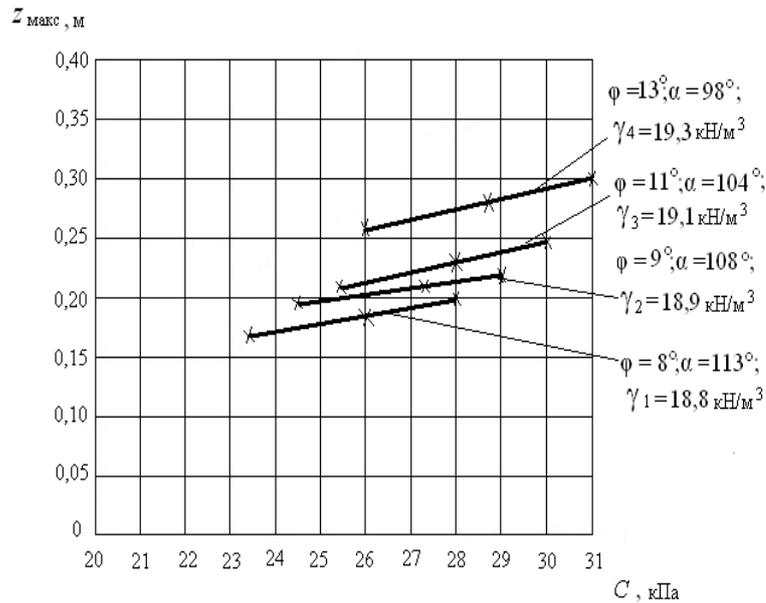


б)

Рис. 2.21. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ; б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 2.22. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

#### 2.4. Расчёт критической нагрузки грунтовой среды под фундаментами больших размеров

В настоящее время разработаны в основном методы расчёта для проектирования фундаментов небольших размеров при их неглубоком залегании. Эти методы применяются в том случае, когда глубина развития зон пластических деформаций не превышает  $z=0,25$  в, где  $v$ —ширина подошвы фундамента, т. е. глубина развития зон пластических деформаций является переменной величиной, зависящей от ширины подошвы фундамента. Коэффициенты  $M_\gamma, M_q, M_c$ , приводимые в (СП22.13330.2011,2000) соответствуют глубине развития зон предельного равновесия  $z = 0,25$  в.

Изменение допустимой глубины развития зон пластических деформаций приводит к пропорциональному изменению коэффициента  $M_\gamma$  от  $\phi$ , а коэффициенты  $M_q, M_c$ , остаются прежними. Анализ глубины развития зон пластических деформаций для фундаментов разной ширины  $v$  показал, что давление в начале развития зон пластических деформаций не зависит от  $v$ , но в дальнейшем их развитие идет по разному (Пилягин А.В., 2006).

Для фундаментов больших размеров  $z_{\text{макс}}$  – максимальная глубина развития зон пластических деформаций при  $\varphi = 0$  будет находиться на вертикали, проходящей через край фундамента, а при других значениях угла внутреннего трения – за пределами фундамента (рис. 2.23).

Для фундаментов небольших размеров зоны пластических деформаций при небольших значениях  $\varphi$  находятся под подошвой фундамента, а при больших – выходят за наружную грань фундамента (Кравченко Т.И., 2016, Пилягин А.В., 2006).

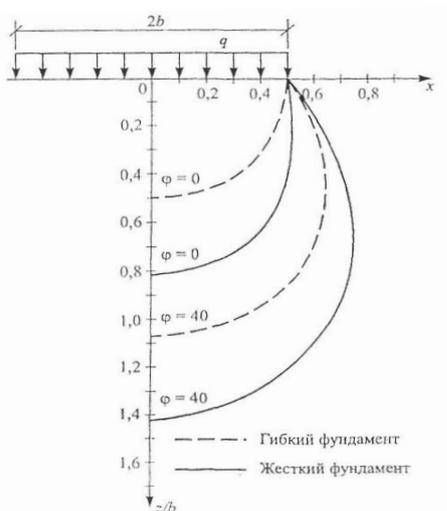


Рис. 2.23. Развитие зон пластических деформаций

При применении формулы 2.111 к фундаментам больших размеров, например, в виде сплошных плит, роль первого слагаемого  $M\gamma$ ,  $\kappa_z$ ,  $b$ ,  $\gamma_{II}$  становится существенной, что приводит к значительному возрастанию расчётного сопротивления оснований и как следствие, к развитию существенных осадок зданий на плитных фундаментах, трудно прогнозируемых линейными методами (Пилягин А.В., 2006).

$$R = \frac{\gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2}}{\kappa} [M_{\gamma} \cdot \kappa_z \cdot b \cdot \gamma_{II} + M_q \cdot d_1 \cdot \gamma'_{II} + (M_q - 1)d_B \cdot \gamma'_{II} + M_c \cdot c_{II}]. \quad (2.111)$$

Поэтому в последней редакции норм в (СП 22.13330.2011, 2000) был введён эмпирический коэффициент  $\kappa_z = 8/b + 0,2$ , снижающий влияние первого слагаемого на увеличение расчётного сопротивления грунтов оснований фундаментов больших размеров.

При определении величины расчётного сопротивления оснований плитных фундаментов при  $z = 0,25 b$  получены те же коэффициенты  $M\gamma$ ,

$Mq, Mc$ , что и в (СП 22.13330.2011, 2000) .В этом случае формулы определения компонентов напряжений не содержат в качестве параметра ширины подошвы фундамента.

Следовательно, в общем случае глубина развития зон пластических деформаций не может приниматься в относительных величинах, т.е. в долях от  $b$  или  $d_1$ . Значение нормальных и касательных напряжений в любой точке основания можно получить проинтегрировав решение Фламана для линейной нагрузки в пределах от 0 до  $-\infty$ , от 0 до  $+\infty$  и от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Полученные в результате интегрирования выражения представлены ниже

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{2q}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{z^3 \cdot d \cdot \xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} = \frac{\gamma \cdot h}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{x \cdot z}{x^2 + z^2} - \arctg q \frac{x}{z} \right]; \\ \sigma_x &= \frac{2q}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{(x-\xi)^2 \cdot z \cdot d \cdot \xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} = \frac{\gamma \cdot h}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{x \cdot z}{x^2 + z^2} - \arctg q \frac{x}{z} \right]; \\ \tau_{xz} &= \frac{2q}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{(x-\xi)^2 \cdot z^2 \cdot d \cdot \xi}{[(x-\xi)^2 + z^2]^2} = \frac{\gamma \cdot h}{\pi} \cdot \frac{z^2}{x^2 + z^2} . \end{aligned} \right\} (2.112)$$

При интегрировании в пределах от 0 до  $\infty$  значения напряжений от собственного веса грунта и любой полубесконечной нагрузки (пригрузки) вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\gamma \cdot h}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{x \cdot z}{x^2 + z^2} + \arctg q \frac{x}{z} \right]; \\ \sigma_x &= \frac{\gamma \cdot h}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{x \cdot z}{x^2 + z^2} + \arctg q \frac{x}{z} \right]; \\ \tau_{xz} &= \frac{\gamma \cdot h}{\pi} \cdot \frac{z^2}{x^2 + z^2} . \end{aligned} \right\} (2.113)$$

При интегрировании решения Фламана в пределах от от  $-\infty$  до  $+\infty$  получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_x - \gamma \cdot h ; \\ \tau_{xz} &= 0. \end{aligned} \right\} (2.114)$$

Вертикальная ( $P_u$ ) и горизонтальная ( $P_t$ ) составляющие предельной критической нагрузки в любой точке загруженной поверхности определяется по формуле (Ухов С.Б., 2007) :

$$\left. \begin{aligned} P_u &= N_\gamma \gamma x + N_q q + N_c c; \\ P_t &= P_u \operatorname{tg} \delta, \end{aligned} \right\} \quad (2.115)$$

где  $N_\gamma$ ,  $N_q$ ,  $N_c$  – безразмерные коэффициенты несущей способности грунта основания, зависящие от угла внутреннего трения  $\varphi$  угла наклона равнодействующей распределённой нагрузки к вертикали  $\delta$ .

Соответствующие формулы определения расчётного сопротивления и несущей способности оснований близки по структуре. Формула определения расчётного сопротивления содержит в своей структуре коэффициенты  $M_\gamma$ ,  $M_q$ ,  $M_c$ , зависящие от угла внутреннего трения грунта, а именно

$$\left. \begin{aligned} M_\gamma &= \frac{0,25\pi}{\operatorname{ctg}\varphi - \frac{\pi}{2} + \varphi}; \\ M_q &= \frac{\pi}{\operatorname{ctg}\varphi - \frac{\pi}{2} + \varphi} + 1; \\ M_c &= \frac{\pi \cdot \operatorname{ctg}\varphi}{\operatorname{ctg}\varphi - \frac{\pi}{2} + \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.116)$$

Формула вычисления несущей способности оснований содержит безразмерные коэффициенты  $N_\gamma$ ,  $N_q$ ,  $N_c$  вычисляемые в зависимости от угла внутреннего трения и угла наклона равнодействующей внешней нагрузки. Рассмотрение отношений указанных коэффициентов при различных значениях угла внутреннего трения показывает увеличение по одинаковой закономерности.

В общем случае при изучении закономерности изменения отношение коэффициентов  $N_i / M_i$  (где  $i$  принимает обозначения  $\gamma$ ,  $q$  и  $c$ ), отношение  $N_\gamma / M_\gamma$  не подчиняется общей закономерности, если коэффициент  $M_\gamma$  вычислен по формуле 2.116.

В тенденции изменения  $N_i / M_i$  необходимо коэффициент  $M_\gamma$  увеличить в  $n$  раз, а в формулу определения расчетного сопротивления вместо ширины подошвы фундамента  $b$  подставить глубину развития зон пластических деформаций. В этом случае величина расчетного сопротивления грунтов оснований фундаментов больших размеров должна вычисляться по формуле (СП 22.13330.2011, 2000):

$$R = \frac{\gamma_{c1} \cdot \gamma_{c2}}{k} [n \cdot M_\gamma \cdot z \cdot \gamma_{II} + M_q \cdot d_1 \cdot \gamma'_{II} + M_c \cdot c_{II}]. \quad (2.117)$$

По данным (Пилягин А.В., 2006)  $n$  рекомендуется принимать равным 4, а по данным других исследователей  $n$  рекомендуется принимать от 2 до 5 ( $0,25 \text{ в}$ ), т.е. величина  $z$  берётся равной допустимой глубине развития зон пластических деформаций вне зависимости от размера подошвы фундамента.

Формула 2.117 вычисления расчетного сопротивления оснований  $R$  содержит произведение коэффициентов  $\gamma_{c1}$ ,  $\gamma_{c2}$  которое приводит в зависимости от грунтовых условий и конструктивных особенностей здания к увеличению  $R$  в 1,1-1,96 раз. Причем, предусматривается и увеличение коэффициентов  $Mq$ ,  $Mc$ , которые, как указывалось выше, не зависят от глубины развития зон пластических деформаций. Следовательно, фактическое увеличение  $R$  в 1,1-1,96 раза только за счёт увеличения коэффициента  $M \gamma$  приводит к тому, что допускается глубина развития зон пластических деформаций значительно превышающая ту, при которой происходит их смыкание на оси симметрии. Некоторые авторы рекомендуют принимать глубины развития зон пластических деформаций переменной и равной  $z = \text{в} \text{tg } \varphi$  полагая, что при этом исключается выход зон пластических деформаций за пределы вертикали, проходящей через край фундамента. По данному условию при  $\varphi = 0$  допустимая глубина развития зон пластических деформаций будет равна нулю, а фактические зоны предельного состояния будут развиваться одновременно по дуге окружности от  $z = 0$  под краем фундамента до  $z = 0,5\text{в}$  на оси симметрии.

Далее, только при  $\varphi = 0$  зоны пластических деформаций не выходят за пределы наружных граней фундаментов. При других значениях  $\varphi$  часть зон пластических деформаций всегда находится за пределами фундаментов. Для плитных фундаментов при всех значениях  $\varphi > 0$  зоны пластических деформаций находятся за пределами фундаментов.

Таким образом, величина расчётного сопротивления оснований плитных фундаментов может быть вычислена по формуле 2.117 с обоснованным принятием глубины развития зон пластических деформаций. На возможность значительного увеличения глубины развития зон пластических деформаций, например, для песчаных грунтов в свое время указано в (Горбунов-Посадов М.И., 1962), где было показано, что даже при нагрузках, приводящих к смыканию зон на оси симметрии, зависимость  $S = f(P)$  в песчаных грунтах мало отличается от линейной.

### Глава 3. РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ МОДЕЛИ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВОДОНАСЫЩЕННОГО СЛОЯ

#### 3.1. Напряжённое состояние модели горизонтально-слоистой грунтовой среды с водонасыщенным слоем

Под действием внешней нагрузки, во многих случаях вода, как и частицы скелета грунта, могут считаться практически несжимаемыми. Поэтому уплотнение водонасыщенного грунта возможно только при отжати части воды из его пор. Этот процесс, сопровождающийся отжатием воды из его пор, называется фильтрационной консолидацией.

Консолидация полностью водонасыщенного грунта при действии внешней нагрузки интенсивностью  $P$  представлена в виде простейшей механической модели Терцаги-Герсеванова (Ухов С.Б., 2007). Эта модель учитывает дискретность грунта и позволяет рассматривать отдельно напряжения, возникающие в скелете грунта и в поровой жидкости.

В момент приложения нагрузки  $P$  (при  $t = 0$ ) поровая вода ещё не успевает отжаться через поры, скелет ещё не деформируется, поэтому вся нагрузка воспринимается только водой. В результате в начальный момент времени в воде возникает избыточное (поровое) давление  $u_w$ , равное приложенной к нагрузке ( $u_{w0} = P$ ). Напряжение в скелете грунта (эффективное напряжение) в этот момент равно нулю ( $\bar{\sigma}_0 = 0$ ).

По мере выдавливания воды из грунта давление в поровой воде уменьшается, а давление в скелете грунта увеличивается. Избыточное давление в воде приводит к её отжатию через поры грунта в области с меньшим давлением. В любой момент времени выполняется условие равновесия системы

$$P_{\Sigma} = \bar{\sigma}_t + u_{wt}, \quad (3.1)$$

где  $\bar{\sigma}_t$  – эффективное напряжение в скелете грунта,  $u_{wt}$  – поровое давление в произвольный момент времени  $t$ . С увеличением эффективного напряжения поровое давление уменьшается.

После выдавливания определённого количества воды из пор в момент времени  $t \rightarrow \infty$  поровое давление упадёт до нуля ( $u_{wt} = 0$ ) и

дальнейшее отжатие воды прекратиться, в этом случае фильтрационная консолидация грунта завершается, и его уплотнение прекращается и наступает стабилизированное состояние.

Таким образом, в соответствии с моделью грунта (Ухов С.Б.,2007) в процессе консолидации эффективное напряжение постепенно возрастает от 0 до  $P$ , а поровое давление соответственно уменьшается от  $u_{wt}$  до 0.

Деформирование по-разному проявляются у различных типов слабых грунтов и существенно зависят от состояния грунта и интенсивности действующих нагрузок. Модели такой среды показаны на рис. 3.1.

В верхней части модели располагается горизонтально-слоистая среда, включающая водоносный слой мощностью  $h_2$ . Эта среда залегает на полупространстве. На рис. 3.1, б полупространство представляет собой водоупор. На рис. 3.1, а полупространство водоупором не является.

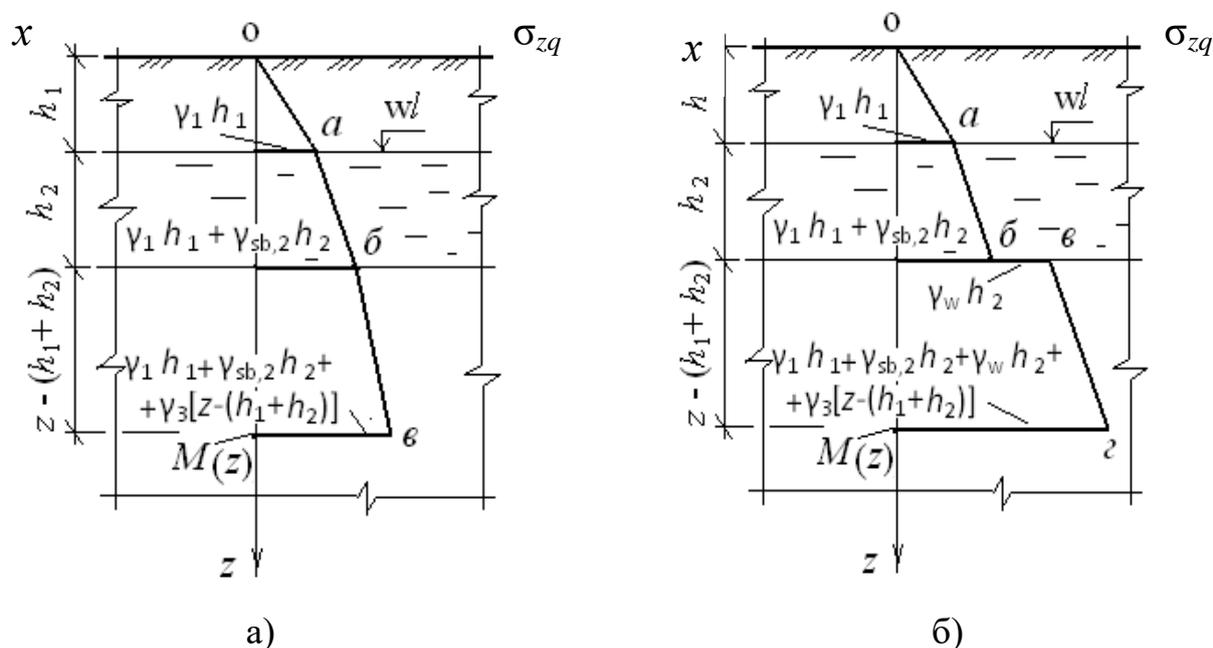


Рис. 3.1. Модели грунтового массива без водоупора (а) и с водоупором (б)

Выполним анализ формулы 3.1. При

- 1)  $t=0$ ,  $P_\Sigma = \overline{u_{wt}}$ ;
- 2)  $t > 0$ ,  $P_\Sigma = \overline{\sigma_t} + u_{wt}$ ;
- 3)  $t \rightarrow \infty$ ,  $\overline{\sigma_t} = \sigma_z = \sigma_{zq} + \sigma_{zp}$ ;  
 $P_\Sigma = \sigma_z = \sigma_{zq} + \sigma_{zp}$ ,

где  $\sigma_{zq}$  – начальное напряжение или напряжение, обусловленное собственным весом грунта;  $\sigma_{zp}$  – дополнительное напряжение, обусловленное внешней нагрузкой

$$\sigma_{zq} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot h_i, \quad (3.2)$$

где  $\gamma_i$  – удельный вес грунта в  $i$ -вом слое;  $h_i$  – мощность  $i$ -го слоя;

$$\sigma_{zpi} = \alpha \sigma_{zp},$$

где  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий уменьшение дополнительного напряжения с глубиной  $\sigma_{zpi}$ ;  $\sigma_{zp}$  – дополнительное напряжение  $i$ -го слоя от внешней нагрузки.

Рассмотрим определение  $\sigma_{zi}$  для модели грунтовой среды, изображённой на рис. 3.1, а, б. Для варианта модели (а) вертикальные напряжения в произвольной точке М равно:

$$\sigma_{zq} = \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]. \quad (3.3)$$

На границах слоёв угол наклона эпюры изменяется в связи с изменением величины удельного веса грунта. На уровне грунтовых вод ( $w_L$ ) происходит существенное увеличение угла наклона эпюры в связи с резким уменьшением величины объёмной плотности водонасыщенного грунта.

Для варианта модели рис. 3.1, б вертикальное напряжение в произвольной точке М равно:

$$\sigma_{zq} = \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_w h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)], \quad (3.4)$$

где  $\gamma_{sb,2} = (\gamma_s - \gamma_w)/(1+e)$ ;  $\gamma_s$  – объёмная плотность (удельный вес) частиц грунта;  $\gamma_w$  – удельный вес воды;  $e$  – коэффициент пористости грунтов;  $\gamma_{sb,2}$  – удельный вес грунта с учётом взвешивающего действия воды на взвешенные частицы грунта.

На границе водоупора эпюра имеет скачок, равный величине гидростатического давления веса столба воды над водоупором.

### 3.2. Оценка критической нагрузки для различных видов внешних усилий

Рассмотренный выше вопрос анализа напряжения  $\sigma_z$  позволяет определять его для модели горизонтально-слоистой грунтовой среды, содержащей водонасыщенный слой (рис. 3.1, а, б). В практике проектирования и строительства возникает нередко необходимость определения напряжений и критической нагрузки не только от действия веса грунта, содержащего водонасыщенный слой, но и внешних усилий, обусловленных различными искусственными объектами (насыпи, отвалы, плотины и др.)

Эпюры, обусловленные этими искусственными объектами, могут быть представлены прямоугольным треугольником, равнобедренным и равносторонним треугольниками, положительной и «отрицательной» трапециями.

Для этих видов внешних усилий нами были получены решения плоской задачи для оценки критической нагрузки и глубины её максимального проявления в грунтовой среде для двух случаев, указанных на рис. 3.1, а, б.

**Внешняя нагрузка в форме прямоугольного треугольника.** Расчётная схема представляет собой горизонтально-слоистую среду, лежащую на полупространстве, нагруженную внешней силой, эпюра которой представляет прямоугольный треугольник (рис. 3.2). При этом один из слоёв является водонасыщенным.

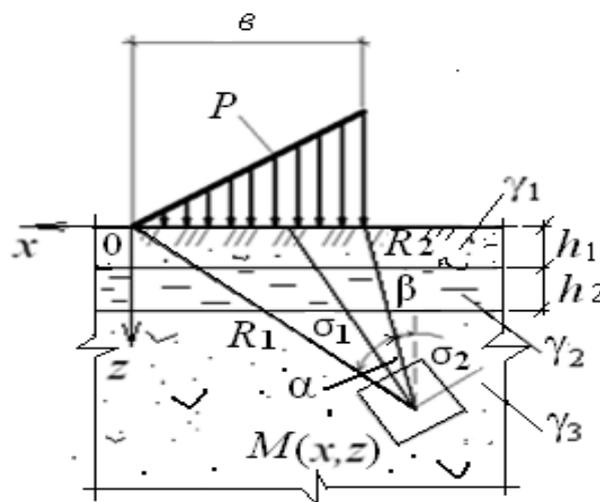


Рис. 3.2. Модель многослойной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Найдём критическую нагрузку в грунтовой среде для случая, когда полупространство не является водоупором. Главные напряжения, обусловленные действием внешней треугольной нагрузки с учётом собственного веса грунтовой толщи и порового давления представлены выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma_1 z + u_w; \quad (3.5)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma_1 z + u_w, \quad (3.6)$$

где  $P = P(x)$  – величина треугольной нагрузки;  $b$  – база действия нагрузки;  $\alpha$  – угол видимости базы действия нагрузки;  $u_w$  – поровое давление в водонасыщенном слое.

Подставив выражения (3.5) и (3.6) в условие предельного равновесия (Цытович Н.А., 1983):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sin \varphi \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + P_e \right), \quad (3.7)$$

где  $P_e = c \operatorname{ctg} \varphi$  – давление связности;  $c$  – удельное сцепление связного грунта;  $\varphi$  – угол внутреннего трения грунта, получим следующие уравнения:

$$\frac{\sqrt{2}P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) = 2 \sin \varphi \left\{ \frac{P}{\pi} \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{2P}{\pi} \frac{x}{b} \alpha + u_w + \gamma z + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \right\},$$

из которой следует

$$0,71 \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{z \sin \varphi}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{\pi \gamma}{P} z = -0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{2x}{b} \alpha \sin \varphi + \frac{\pi}{P} \sin \varphi (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \quad (3.8)$$

Решая уравнение (3.8) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} (u_w + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.9) найдём угол видимости  $\alpha$ , при котором  $z = z_{\max}$ . Для этого продифференцируем уравнение (3.9) по  $\alpha$  и приравняем результат дифференцирования нулю

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}} = 0, \quad (3.10)$$

при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ , получим формулу для угла  $\alpha$

$$\alpha = \frac{3}{2} \arccos \left( \frac{x}{0,36b} \sin \varphi \right). \quad (3.11)$$

При найденном значении угла видимости  $\alpha$  глубина, на которой усилие достигнет критического значения, будет равна  $z_{\max}$ ; для этого поставим в формулу (3.9) формулу (3.11) (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$z_{\max} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} (u_w + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (3.12)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (3.12) в формулу (Маслов Н.Н., 1968):

$$z_{\max} = \frac{0,88 P \nu}{C_z}, \quad (3.13)$$

где  $C_z = E/(1-\nu^2)$  – коэффициент упругого полупространства;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль деформации ( $\nu$  и  $E$  полагаются постоянными для полупространства) (СП 22.13330.2011,2000). В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{0,88 P \nu}{C_z} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} (u_w + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (3.14)$$

Выражение (3.14) приведём к квадратному уравнению:

$$\begin{aligned} & \frac{0,44 P^2}{C_z} (0,71 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} - P \left( \frac{x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,36 \sin \frac{2}{3} \alpha + \right. \\ & \left. + \frac{0,44 \nu}{C_z} \pi \gamma \right) - \frac{\pi}{2} \sin \varphi (u_w + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) приведём к следующему виду:

$$M P^2 + N P + L = 0, \quad (3.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{0,44}{C_z} (0,71 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2^2}{R_1^2}; \\ N &= - \left( \frac{x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,36 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{0,44 \nu}{C_z} \pi \gamma \right); \\ L &= - \frac{\pi}{2} \sin \varphi (u_w + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Решая уравнение (3.16), получим формулу для вычисления критического усилия  $P_{\text{кр}}$  (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.18)$$

Найдём начальное критическое усилие с учётом порового давления в водонасыщенном слое. Для этого формулу (3.12) для вычисления  $z_{\text{макс}}$  приравняем к нулю:

$$z_{\text{макс}} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} (u_w + c \cdot \text{ctg} \varphi)}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}} = 0, \quad (3.19)$$

в результате получим следующее выражение:

$$P \left( 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha - \frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha \right) = \pi \sin \varphi (u_w + c \cdot \text{ctg} \varphi). \quad (3.20)$$

Из выражения (3.20) получим формулу для начальной критической нагрузки:

$$P_{\text{кр}}^{\text{нач}} = \frac{\pi \sin \varphi (u_w + c \cdot \text{ctg} \varphi)}{0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha - \frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha}. \quad (3.21)$$

Согласно модели (рис. 3.1, б), содержащей водонасыщенный слой, лежащий на водоупоре (Ухов С.Б., 2007), найдём критическую нагрузку в грунтовой среде в момент времени  $t \rightarrow \infty$ , когда поровое давление равно нулю ( $u_w = 0$ ) т. е. к моменту завершения процесса консолидации грунта. Эпюра природных напряжений при наличии водоупорного слоя имеет следующий вид (рис. 3.1, б). Подошва водоносного слоя является границей обеспеченного питания. Согласно (Ухов С.Б., 2007) на кровле водоупорного слоя учитывается давление от столба вышележащей воды и давление на границе полупространства от взвешивающего действия воды. Полупространство будет находиться в гидростатическом напряженном состоянии:  $\sigma_x = \sigma_z = \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_w h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$ . Формулы главных напряжений, обусловленных действием внешней треугольной нагрузки и собственным весом грунтовой толщи для полупространства в виде водоупора, представлены следующими выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 + \gamma wh_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (3.22)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 + \gamma wh_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]. \quad (3.23)$$

Подставив выражения (3.22) и (3.23) в условие предельного равновесия (3.7), получим следующие уравнение:

$$\frac{\sqrt{2}P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) = 2 \sin \varphi \left\{ \frac{P}{\pi} \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{2P}{\pi} \frac{x}{b} \alpha + \gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 + \gamma wh_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)] + c \cdot \text{ctg } \varphi \right\},$$

из которого в результате преобразований следует:

$$z \left[ \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi}{P} \gamma_3 \right] = -0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 + \gamma wh_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \text{ctg } \varphi]. \quad (3.24)$$

Решая уравнение (3.24) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 + \gamma wh_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \text{ctg } \varphi]}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (3.25)$$

Из уравнения (3.25) найдём угол видимости  $\alpha$ , при котором  $z = z_{\text{макс}}$ . Для этого продифференцируем это уравнение (3.25) по  $\alpha$  и приравняем результат дифференцирования нулю

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}} = 0, \quad (3.26)$$

при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ , получим выражение

$$\frac{2x \sin \varphi}{b} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha = 0,$$

из которого определим

$$\alpha = \frac{3}{2} \arccos \left( \frac{x}{0,36b} \sin \varphi \right). \quad (3.27)$$

При найденном значении угла видимости глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , в результате формула (3.25) примет следующий вид (Кравченко Г.И. и др., 2016):

$$z_{\max} = \frac{\frac{2x_u \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_{wh} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi]}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}, \quad (3.28)$$

где  $x_u$  – абсцисса центра тяжести эшюры треугольной нагрузки.

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (3.28) в формулу (3.13), в результате получим следующее уравнение:

$$\frac{0,88 P b}{C_z} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_{wh} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi]}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (3.29)$$

Полученное выражение (3.29) приведём к квадратному уравнению.

$$0,88 P^2 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - P (0,88 \pi b \gamma_3 + \frac{2x C_z \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 C_z \sin \frac{2}{3} \alpha) - \pi C_z \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_{wh} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi] = 0. \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) представим в следующем виде:

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= 0,88 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi); \\ N &= -2(0,44 \pi b \gamma_3 + \frac{x C_z \sin \varphi}{b} \alpha - 0,36 C_z \sin \frac{2}{3} \alpha); \\ L &= -\pi C_z \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_{wh} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi]. \end{aligned} \right\} (3.32)$$

Решая уравнение (3.31), получим формулы для вычисления критического усилия  $P_{кр}$  (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.33)$$

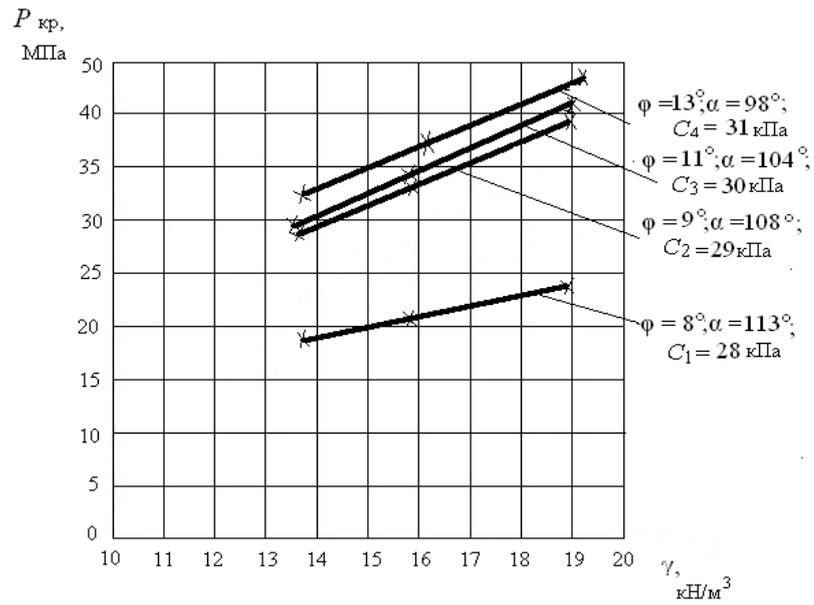
Рассмотрим зависимость  $P_{кр}$  от физико-механических характеристик  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  модели грунтовой среды при длине базы нагрузки  $b = 1\text{ м}$ . Характеристики грунтов указаны в таблице 3.1. Графический вид этих зависимостей представлен на рис. 3.3-3.4.

Таблица 3.1.

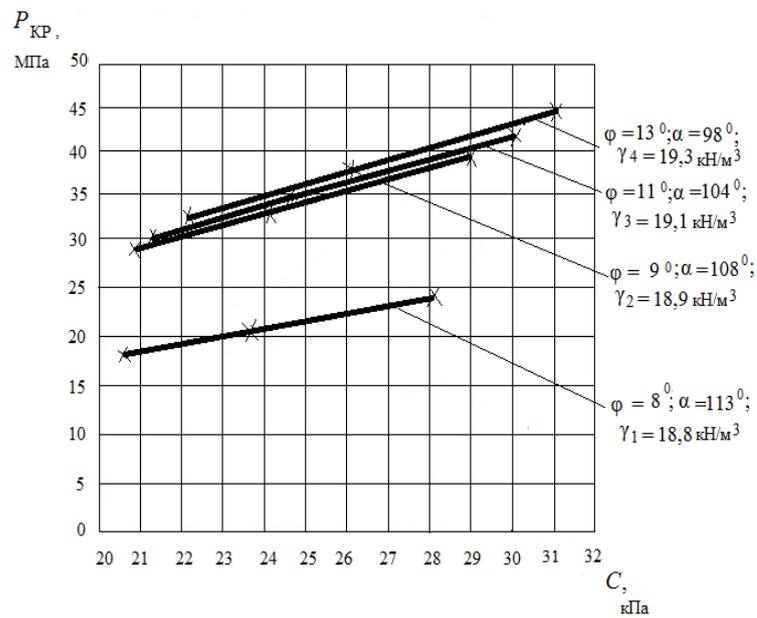
Физико - механические характеристики грунтов\*

Наименование грунтов	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , °	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа
Глины	18,8	8	28	10	11,24
мягко-	18,9	9	29	13	14,61
пластич-	19,1	11	30	14	15,73
ных консо-	19,3	13	31	16	17,98
стенции					

\*вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам глин

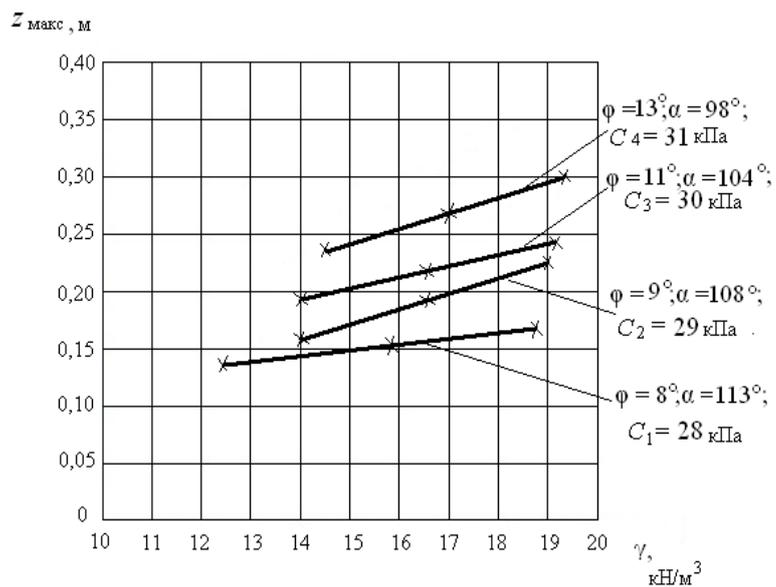


a)

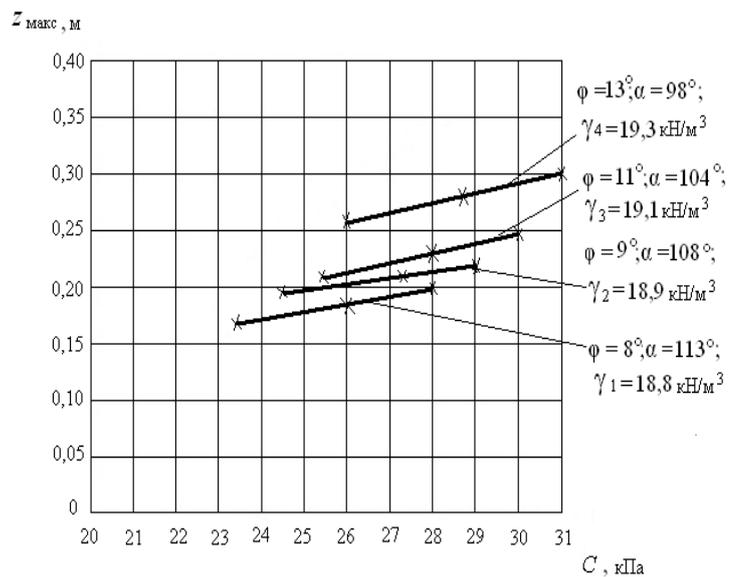


б)

Рис. 3.3. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ; б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 3.4. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

**Нагрузка по закону равнобедренного треугольника.** Расчётная схема представляет собой горизонтально слоистую среду на полупространстве, нагружённую внешней силой, эпюра которой имеет вид равнобедренного треугольника (рис. 3.5). При этом один из горизонтальных слоёв является водонасыщенным, а полупространство рассматривается как в виде водоупора, так и в виде не водоупора.

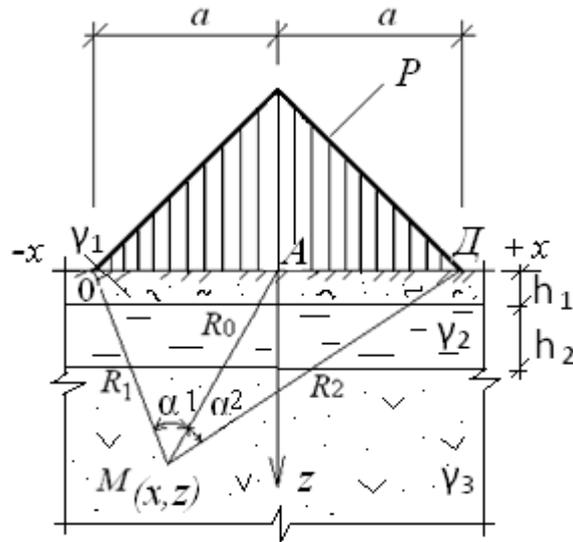


Рис. 3.5. Модель многослойной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Найдём критическую нагрузку в грунтовой среде, изображённой на рис. 3.5, когда полупространство не является водоупором. Главные напряжения от действия равнобедренной нагрузки с учётом собственного веса грунтовой толщи и порового давления имеют вид (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \gamma z + u_w; \quad (3.34)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \gamma z + u_w, \quad (3.35)$$

где  $P = P(x)$  – величина нагрузки;  $b = 2a$  – база действия нагрузки;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы видимости базы действия нагрузки.

Подставив выражения (3.34) и (3.35) в условие предельного равновесия (3.7), получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{2Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} = \\ & = 2 \sin \varphi \left\{ \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] + \gamma z + u_w + c \operatorname{ctg} \varphi \right\}; \\ & \frac{z}{\sin \varphi} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - \frac{\pi a}{P} \gamma z = \\ & = [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Решая уравнение (3.36) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) \right] - \frac{\pi a}{P} \gamma}. \quad (3.37)$$

Для определения угла видимости  $\alpha_2$  уравнение (3.37) продифференцируем по  $\alpha_1$  и приравняем результат дифференцирования нулю; получим выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} &= \frac{(a+x) \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} - \\ & - \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} = 0, \end{aligned}$$

в результате преобразований получим формулу (3.38)

$$(a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4(a+x)}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma (a+x)}{P} -$$

$$- \frac{0,4}{\sin \varphi} [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{0,4}{\sin \varphi} \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) = 0.$$

(3.38)

Из выражения (3.38) найдём угол видимости  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = (a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - (a+x) \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi}{2P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi).$$

(3.39)

Определим угол  $\alpha_1$ . Для этого продифференцируем уравнение (3.37) по  $\alpha_2$  и приравняем результат дифференцирования нулю

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_2} = \frac{(a-x) \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} -$$

$$- \frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}$$

$$- \frac{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} = 0.$$

Преобразовав это выражение, получим формулу

$$(a-x)(\alpha_1 - \alpha_2) + [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] = -(a-x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,4} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (a-x) \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4P} -$$

$$- \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi).$$

(3.40)

Из выражения (3.40) найдём угол видимости  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 = -(a-x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (a-x) \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi}{2P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi).$$

(3.41)

При найденных значениях углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , следовательно, формула (3.37) примет вид (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$z_{\text{макс}} = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P}(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P}}. \quad (3.42)$$

В формуле  $z_{\text{макс}}$  углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  описываются выражениями (3.39) и (3.41).

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (3.42) в формулу (3.13), получим следующее уравнение:

$$\frac{1,76P^2}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)] - P \{ C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76\pi a \gamma \} - \pi C_z (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) = 0. \quad (3.43)$$

Приведём уравнение (3.43) к следующего виду (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.44)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1,76}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)]; \\ N &= -\{ C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76\pi a \gamma \}; \\ L &= -\pi C_z (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Из уравнения (3.44), получим формулу для вычисления  $P_{\text{кр}}$  (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.46)$$

Формулу начальной критической нагрузки с учётом порового давления в водонасыщенном слое получили, приравняв  $z_{\text{макс}}$  (3.42) нулю:

$$z_{\text{макс}} = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P}(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P}} = 0, \quad (3.47)$$

в результате получим следующее выражение:

$$P[x(\alpha_2 - \alpha_1) - a(\alpha_1 + \alpha_2)] = \pi a(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \quad (3.48)$$

Из выражения (3.48) найдём формулу для начальной критической нагрузки:

$$P_{\text{кр}}^{\text{нач}} = \frac{\pi a(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{x(\alpha_2 - \alpha_1) - a(\alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (3.49)$$

Для случая, когда полупространство является водоупором, найдём критическую нагрузку в грунтовой среде в момент времени  $t \rightarrow \infty$ , когда поровое давление равно нулю ( $u_{\text{вх}} = 0$ ) т. е. в момент завершения консолидации грунта в соответствии с моделью Терцаги-Герсеванова (Ухов С.Б., 2007). Эпюра природных напряжений будет иметь следующий вид (рис. 3.1, б). Полупространство находится в гидростатическом напряжённом состоянии:  $\sigma_x = \sigma_z = \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$ . Подошва водоносного слоя является границей с постоянным напором. В этом случае наблюдается наличие подземных вод в пределах нижележащего полупространства. Поэтому в соответствии с (Ухов С.Б., 2007) необходимо учесть уменьшение удельного веса грунта в этом случае за счёт взвешивающего действия воды на минеральные частицы. Удельный вес грунта во взвешенном состоянии определяется по формуле (3.4).

Главные напряжения от действия равнобедренной нагрузки с учётом собственного веса грунтовых слоёв и полупространства, являющегося водоупором, определяются формулами (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]}; \quad (3.50)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]. \quad (3.51)$$

Подставив выражения (3.50) и (3.51) в условие предельного равновесия (3.7), получим следующее уравнение:

$$\frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \frac{P \sin \varphi}{\pi a} z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - \sin \varphi \gamma_3 z = \frac{P \sin \varphi}{\pi a} [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \sin \varphi \gamma_1 h_1 + \sin \varphi \gamma sb,2h_2 - \sin \varphi \gamma_3 (h_1 + h_2) + \sin \varphi \cdot c \cdot c \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.52)$$

Решая уравнение (3.52) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot c \operatorname{tg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}. \quad (3.53)$$

Из уравнения (3.53) найдём углы видимости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , при которых  $z = z_{\max}$ , продифференцировав это уравнение отдельно по  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , и приравняв результаты дифференцирования нулю, получим формулы для углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = -(a+x) \frac{\pi \gamma_3 \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi}{2P} [\gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot c \operatorname{tg} \varphi] + (a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} = (a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - (a+x) \frac{\pi \gamma_3 \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi}{2P} [\gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot c \operatorname{tg} \varphi]. \quad (3.54)$$

$$\alpha_1 = -(a-x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (a-x) \frac{\pi \gamma_3 \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi}{2P} [\gamma_1 h_1 + \gamma sb,2h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \cdot c \operatorname{tg} \varphi]. \quad (3.55)$$

При найденных значениях углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , поэтому формула (3.53) примет следующий вид

$$z_{\max} = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}. \quad (3.56)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (3.56) в формулу (3.13), при условии, что  $B = 2a$ , получим следующее выражение:

$$\frac{1,76P^2}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)] - P \left\{ C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76\pi a \gamma_3 \right\} - \pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] = 0. \quad (3.57)$$

Квадратное уравнение (3.57) запишем в виде следующего выражения (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$M P^2 + N P + L = 0, \quad (3.58)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1,76}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)]; \\ N &= -\left\{ C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76\pi a \gamma_3 \right\}; \\ L &= -\pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Из уравнения (3.58), получим формулу для вычисления  $P_{\text{кр}}$  (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.60)$$

Формулы (3.56) и (3.60) позволяют вычислять  $z_{\max}$  и  $P_{\text{кр}}$  в полупространстве. В этих формулах  $z_{\max}$  и  $P_{\text{кр}}$  зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели.

Придавая им различные значения можно получить формулы для  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. При  $a = 0$  (с правой или с левой стороны эпюры), эпюра внешней нагрузки будет иметь вид прямоугольного треугольника; при базе действия нагрузки  $b \rightarrow \infty$  – полубесконечной полосы.

Графический вид зависимости  $P_{\text{кр}}$  и  $z_{\text{макс}}$  от физико - механических характеристик  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $b = 2a = 2\text{м}$  представлен на рис. 3.6 и 3.7.

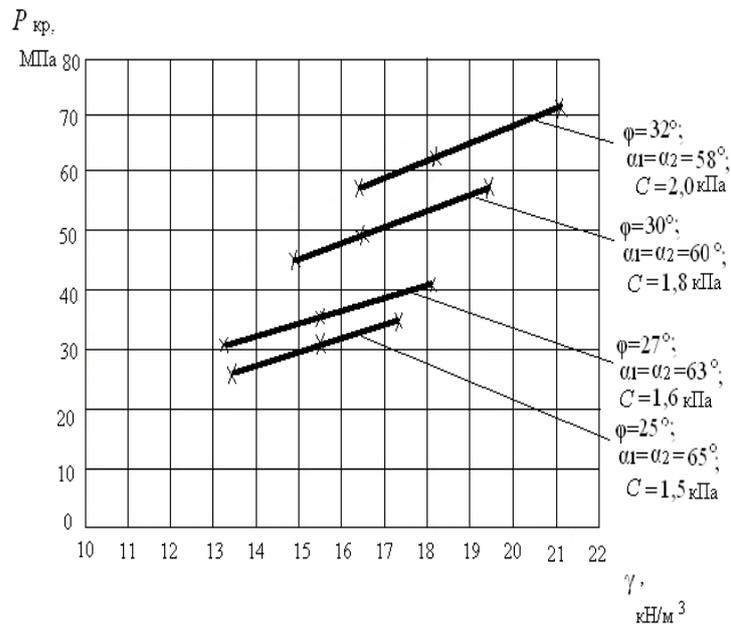
При расчёте принято  $h_1 = h_2 = 0,3\text{ м}$ ,  $\gamma_1=15,05\text{ кН/м}^3$ ,  $\gamma_2=10,3\text{ кН/м}^3$ ,  $a = 1\text{ м}$ , коэффициент Пуассона для всех вариантов грунтовой среды  $\nu = 0,12$ . Расчёт  $z_{\text{макс}}$  выполнен при различных физико-механических характеристиках грунтов полупространства (табл.3.2), соответствующих супесчаным водонасыщенным грунтам. Результаты расчётов  $P_{\text{кр}}$  и  $z_{\text{макс}}$  приведены на рис. 3.6 и 3.7.

Таблица 3.2.

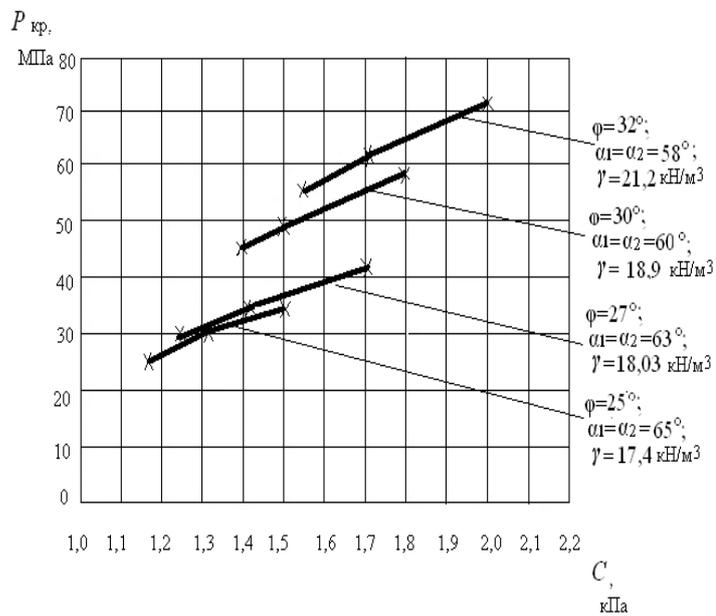
Физико-механические характеристики грунтов \*

Наименование грунтов	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , <sup>0</sup>	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа
Супесчаные	17,4	25	1,5	24	27,6
водо-	18,03	27	1,6	26	29,9
насыщенные	19,4	30	1,8	27	31,03
грунты	21,2	32	2,0	28	32,18

\* вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам супесей

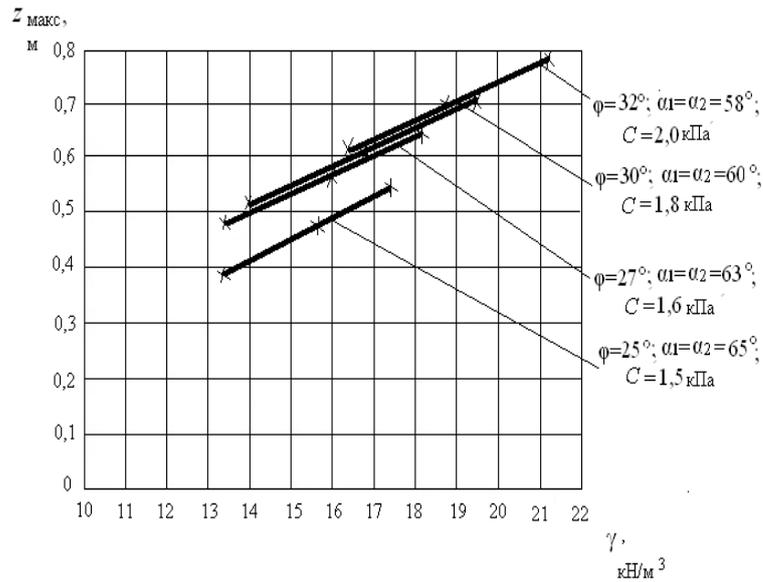


а)

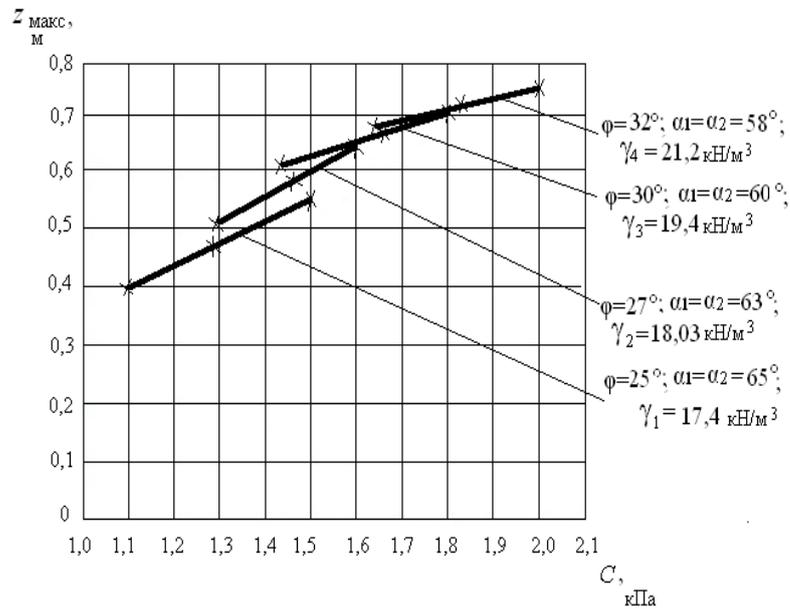


б)

Рис. 3.6. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ; б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 3.7. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

**Нагрузка в форме неравностороннего треугольника.** Расчётная схема представляет собой горизонтально-слоистую среду на полупространстве, нагружённую внешней силой, эпюра которой имеет вид неравностороннего треугольника (рис. 3.8). Полупространство рассматривается таким же, как и в предыдущих случаях. При этом один из слоёв является водонасыщенным.

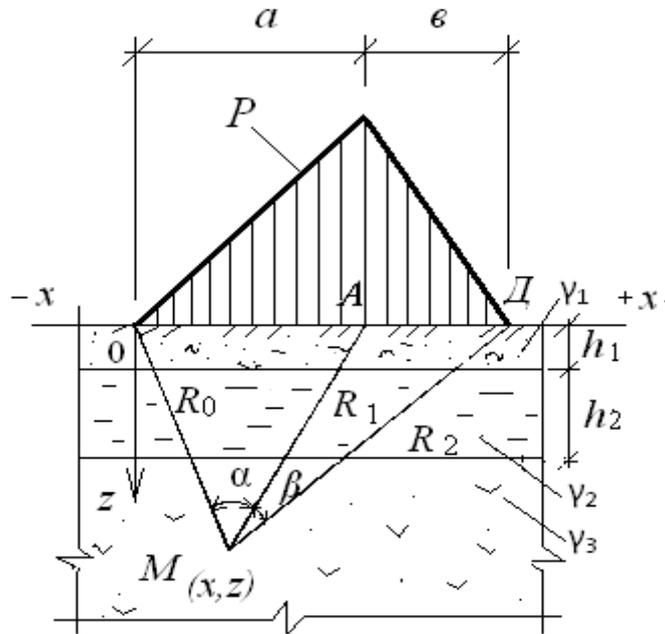


Рис. 3.8. Модель грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Найдём критическую нагрузку в грунтовой среде (рис. 3.8). Главные напряжения от действия внешней треугольной нагрузки с учётом собственного веса грунтовой толщи и порового давления водонасыщенного слоя, лежащего на поверхности не водоупора, представлены следующими выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+v-x}{v} \beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{z}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{v} \right)^2} + \gamma z + u_w; \quad (3.61)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+v-x}{v} \beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{z}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{v} \right)^2} + \gamma z + u_w, \quad (3.62)$$

где  $P = P(x)$  – внешняя нагрузка;  $x, z$  – координаты точки  $M$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  – углы видимости базы действия внешней нагрузки;  $R_0, R_1$  и  $R_2$  – расстояния от точки  $M(x, z)$  до точек  $A, O, D$  базы внешней нагрузки;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – удельный вес плоско-параллельных слоёв и полупространства;  $h_1, h_2$  – мощности плоско-параллельных слоёв;  $a = AO, v = OD$ .

Подставив выражения (3.61) и (3.62) в условие предельного равновесия (3.7), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{Pz}{\pi} \left[ \sqrt{\left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right)^2} - \frac{\sin \varphi}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1 \sin \varphi}{R_0} \right] - \\ & - \gamma z \sin \varphi = \sin \varphi \left[ \frac{P}{\pi} \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \epsilon - x}{\epsilon} \beta \right) + u_w + c \operatorname{ctg} \varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Решая уравнение (3.63) относительно  $z$ , получим следующее выражение:

$$z = \frac{\left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \epsilon - x}{\epsilon} \beta \right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (3.64)$$

Из уравнения (3.64) найдём углы видимости  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых  $z = z_{\max}$ , продифференцировав его по  $\alpha$  и  $\beta$ . Продифференцируем уравнение (3.64) по  $\alpha$ ; в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\alpha} = & \frac{\frac{x}{a} \left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}^2} - \\ & - \frac{\frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \epsilon - x}{\epsilon} \beta \right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.65)$$

или

$$\frac{0,4(a + \epsilon)}{\epsilon \sin \varphi} \beta = \frac{x(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{\pi \gamma x}{P} - \frac{0,4\pi}{P \sin \varphi} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \quad (3.66)$$

Найдём угол видимости  $\beta$  из уравнения (3.66):

$$\beta = \frac{xv(0,96 - \sin \varphi)}{0,4(a+v)} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{\pi \gamma xv \sin \varphi}{0,4P(a+v)} - \frac{\pi v}{P(a+v)} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \quad (3.67)$$

Продифференцируем уравнение (3.64) по  $\beta$ ; в результате получим

$$\frac{dz}{d\beta} = \frac{\frac{a+v-x}{v} \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{v} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{v} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{\left( -\frac{0,4}{v \sin \varphi} \right) \left[ \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+v-x}{v} \beta \right] + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{v} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.68)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{0,4(a+v)}{a} \alpha &= \frac{\pi \gamma (a+v-x) \sin \varphi}{P} - \frac{0,4\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) - \\ &- (a+v-x)(0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Из уравнения (3.69) найдём угол видимости  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi \gamma a(a+v-x) \sin \varphi}{0,4P(a+v)} - \frac{\pi a}{P(a+v)} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) - \\ &- \frac{a(a+v-x)}{0,4(a+v)} (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

При найденных значениях углов видимости  $\alpha$  и  $\beta$  максимальное значение глубины развития критического усилия  $z_{\max}$  будет равна следующему выражению

$$z_{\max} = \frac{\left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+v-x}{v} \beta \right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{v} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{v} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}}, \quad (3.71)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  определяются формулами (3.67) и (3.70).

Для определения  $P_{кр}$  подставим формулу (3.71) в формулу (3.13), при  $B = a + e$  – база действия нагрузки; в результате получим следующие уравнения:

$$\frac{0,88P(a+e)}{C_z} = \frac{\left(\frac{x}{a}\alpha + \frac{a+e-x}{e}\beta\right) + \frac{\pi}{P}(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{e} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{e}\right) - \frac{\pi \gamma}{P}}, \quad (3.72)$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{0,88}{av \sin \varphi} P^2 \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( e \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + 0,4(e\alpha - a\beta) \right] - \\ & - P \left[ 0,88\pi \gamma + \frac{C_z}{(a+e)} \left( \frac{x}{a}\alpha + \frac{a+e-x}{e}\beta \right) \right] - \frac{\pi C_z}{(a+e)} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Квадратное уравнение (3.73) представим в виде следующего выражения (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad M &= \frac{0,88}{av \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( e \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + 0,4(e\alpha - a\beta) \right]; \\ N &= - \left[ 0,88\pi \gamma + \frac{C_z}{(a+e)} \left( \frac{x}{a}\alpha + \frac{a+e-x}{e}\beta \right) \right]; \\ L &= - \frac{\pi C_z}{(a+e)} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Из уравнения (3.74), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.76)$$

Найдём формулу начального критического усилия с учётом порового давления в водонасыщенном грунте, для этого выражение (3.71) приравняем к нулю:

$$z_{\text{макс}} = \frac{\left(\frac{x}{a}\alpha + \frac{a+\vartheta-x}{\vartheta}\beta\right) + \frac{\pi}{P}(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\vartheta} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\vartheta}\right) - \frac{\pi \gamma}{P}} = 0, \quad (3.77)$$

В результате получим следующее выражение:

$$P\left(\frac{x-a-\vartheta}{\vartheta}\beta - \frac{x}{a}\alpha\right) = \pi(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \quad (3.78)$$

Из выражения (3.78) найдём формулу для вычисления начальной критической нагрузки с учётом порового давления:

$$\text{нач } P_{\text{кр}} = \frac{\pi(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\left(\frac{x-a-\vartheta}{\vartheta}\beta - \frac{x}{a}\alpha\right)}. \quad (3.79)$$

Согласно модели (рис. 3.1, б), найдём критическую нагрузку в грунтовой среде в момент времени  $t \rightarrow \infty$ , когда поровое давление равно нулю ( $u_{\text{вх}} = 0$ ). Эпюра природных напряжений будет иметь следующий вид (рис. 3.1, а). Полупространство будет находиться в гидростатическом напряженном состоянии:  $\sigma_x = \sigma_z = \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$ , где  $\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$  – давление от собственного веса слоёв грунта с учётом водонасыщенного слоя до уровня  $z$ ,  $\gamma_{sb,2}$  – удельный вес грунта во взвешенном состоянии, вычисленный по формуле (3.3).

Формулы для главных напряжений от неравносторонней нагрузки в форме треугольника, представлены следующими выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a}\alpha + \frac{a+\vartheta-x}{\vartheta}\beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{z}{\vartheta} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\vartheta} \ln \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\vartheta}\right)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (3.80)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a}\alpha + \frac{a+\vartheta-x}{\vartheta}\beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{z}{\vartheta} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\vartheta} \ln \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\vartheta}\right)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]. \quad (3.81)$$

Подставим выражения (3.80) и (3.81) в условие предельного равновесия (3.7), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{Pz}{\pi} \left[ \sqrt{\left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right)^2} - \frac{\sin \varphi}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1 \sin \varphi}{R_0} \right] - \\ & - \gamma_3 z \sin \varphi = \sin \varphi \left[ \frac{P}{\pi} \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \epsilon - x}{\epsilon} \beta \right) + \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi \right]. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Решая уравнение (3.82) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\left(\frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \epsilon - x}{\epsilon} \beta\right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (3.83)$$

Из уравнения (3.83) найдём углы видимости  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых  $z = z_{\max}$ , продифференцировав его по  $\alpha$  и  $\beta$ . Продифференцируем сначала уравнение (3.83) по  $\alpha$ ; в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\alpha} = & \frac{\frac{x}{a} \left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right\}^2} - \\ & - \frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ \left(\frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \epsilon - x}{\epsilon} \beta\right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right\}^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.84)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{0,4(a + \epsilon)}{\epsilon \sin \varphi} \beta = & \frac{x(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left[ \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{\pi \gamma_3 x}{P} - \frac{0,4\pi}{P \sin \varphi} [\gamma_1 h_1 + \right. \\ & \left. + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Из выражения (3.85) найдём угол видимости  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{x\epsilon(0,96 - \sin \varphi)}{0,4(a + \epsilon)} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{\pi \gamma_3 x \epsilon \sin \varphi}{0,4P(a + \epsilon)} - \frac{\pi \epsilon}{P(a + \epsilon)} [\gamma_1 h_1 + \\ & + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Продифференцируем уравнение (3.83) по  $\beta$ :

$$\frac{dz}{d\beta} = \frac{\frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} \left\{ \frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) - \frac{\pi\gamma_3}{P} \right\}}{\left[ \frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) - \frac{\pi\gamma_3}{P} \right]^2} - \frac{\left( -\frac{0,4}{\varepsilon \sin\varphi} \right) \left\{ \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left[ \frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) - \frac{\pi\gamma_3}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.87)$$

или

$$\frac{0,4(a+\varepsilon)}{a} \alpha = \frac{\pi\gamma_3(a+\varepsilon-x)\sin\varphi}{P} - \frac{0,4\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] - (a+\varepsilon-x)(0,96-\sin\varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right). \quad (3.88)$$

В результате из (3.88) найдём угол видимости  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\pi\gamma_3 a(a+\varepsilon-x)\sin\varphi}{0,4P(a+\varepsilon)} - \frac{\pi a}{P(a+\varepsilon)} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] - \frac{a(a+\varepsilon-x)}{0,4(a+\varepsilon)} (0,96-\sin\varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right). \quad (3.89)$$

При найденных значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$  глубина развития критического усилия будет равна  $z_{\max}$ ; следовательно, формула (3.83) примет вид

$$z_{\max} = \frac{\left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) - \frac{\pi\gamma_3}{P}}, \quad (3.90)$$

где углы  $\alpha$  и  $\beta$  определяются по формулам (3.86) и (3.89).

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (3.90) в формулу (3.13), при  $B = a + \varepsilon$ .

$$\frac{0,88P(a+\varepsilon)}{C_z} = \frac{\left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) - \frac{\pi\gamma_3}{P}}, \quad (3.91)$$

или

$$\frac{0,88P^2}{a\epsilon \sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi)(\epsilon \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2}) + 0,4(\epsilon \alpha - a\beta)] -$$

$$- P \left[ 0,88\pi \gamma_3 + \frac{C_z}{(a+\epsilon)} \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta \right) \right] - \frac{\pi C_z}{(a+\epsilon)} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 b, 2h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] = 0. \quad (3.92)$$

Квадратное уравнение (3.92) запишем в виде следующего выражения (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.93)$$

где

$$M = \frac{0,88}{a\epsilon \sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi)(\epsilon \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2}) + 0,4(\epsilon \alpha - a\beta)];$$

$$N = - \left[ 0,88\pi \gamma_3 + \frac{C_z}{(a+\epsilon)} \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta \right) \right];$$

$$L = - \frac{\pi C_z}{(a+\epsilon)} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 b, 2h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]. \quad (3.94)$$

Решая уравнение (3.93), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.95)$$

Придавая различные значения  $\gamma, c, \varphi, \epsilon$ , можно так же получить формулы для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. При  $\epsilon = 0$  эпюра внешней нагрузки будет иметь вид прямоугольного треугольника; при  $a = \epsilon$  – равнобедренного треугольника; при  $\epsilon \rightarrow \infty$  – полубесконечной полосы; при  $h_1 = h_2 = 0$  получим формулу  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для полупространства с различными видами эпюр внешней нагрузки. На рис. 3.9 и 3.10 приведены зависимости  $P_{кр}$  от удельного веса, удельного сцепления  $c$  и угла полного внутреннего трения  $\varphi$ . При расчёте принято, что  $h_1 = h_2 = 0,3$  м,  $\gamma_1 = 15,05$  кН/м<sup>3</sup>,  $\gamma_2 = 10,3$  кН/м<sup>3</sup>,  $a = 2$  м,  $\epsilon = 1$  м, коэффициент Пуассона для всех вариантов грунтовой среды равен  $\nu = 0,12$ .

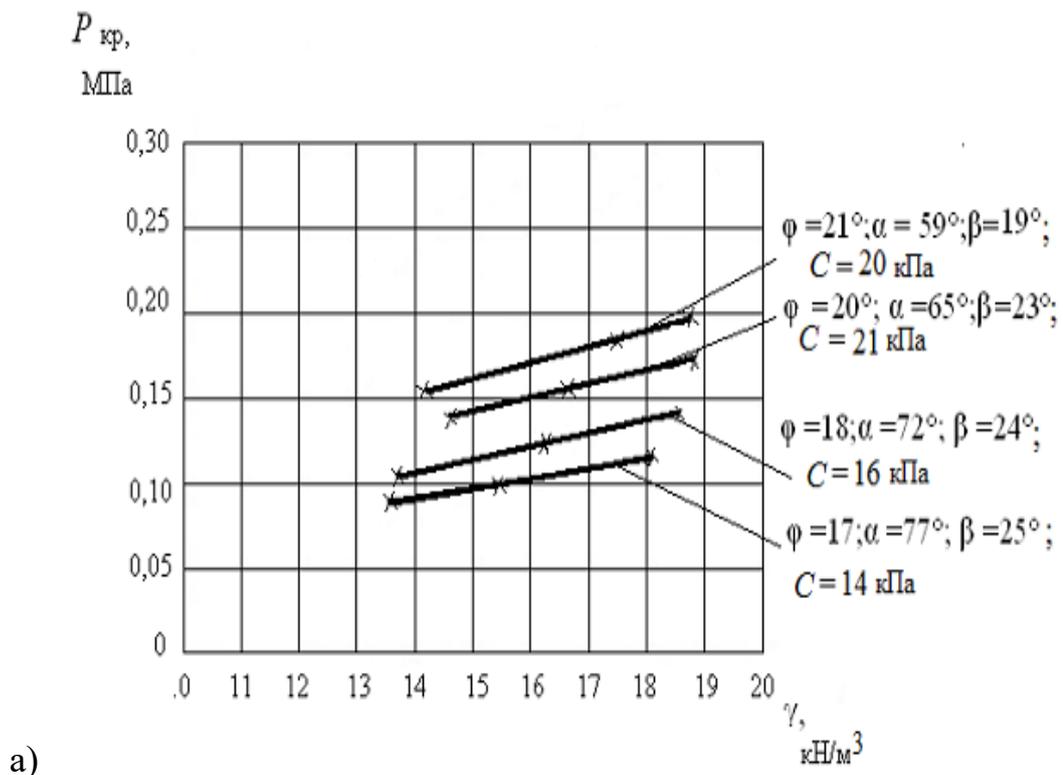
Графический вид зависимостей  $P_{кр}$  и  $z_{макс}$  от физико - механических характеристик  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $a+b=3м$  представлен на рис. 3.9 ÷ 3.10. Характеристики слабых грунтов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3.

Физико - механические характеристики грунтов \*

Наименование грунтов	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , <sup>0</sup>	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа	$z_{макс}$ , м
Суглинки	18,07	17	14	2,8	2,84	1,63
мягко-	18,59	18	16	9,4	9,54	1,80
пластич-	18,66	20	21	11,6	12,80	2,23
ные	18,76	21	20	13	13,19	2,51

\* вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам суглинков



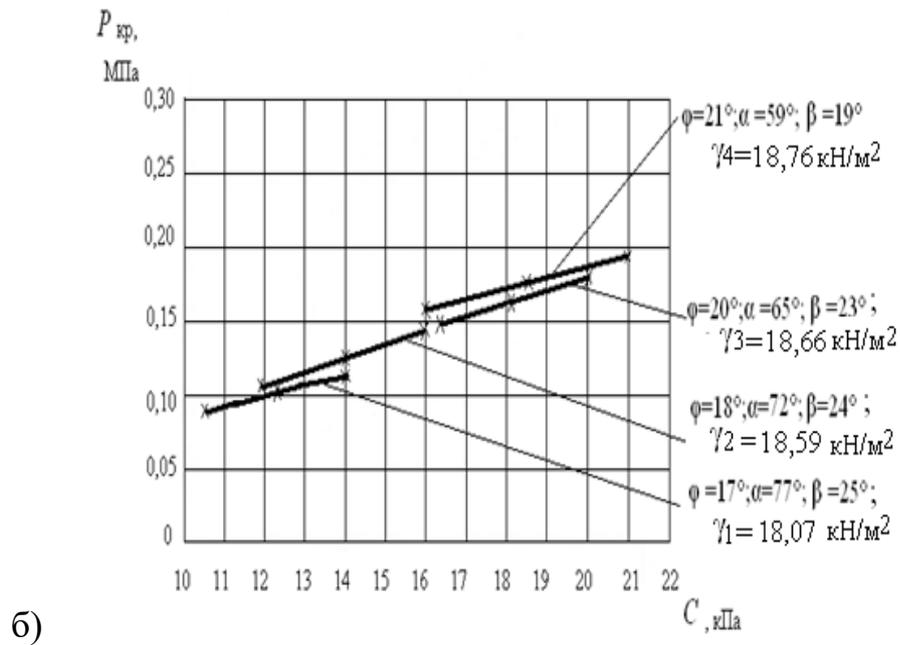
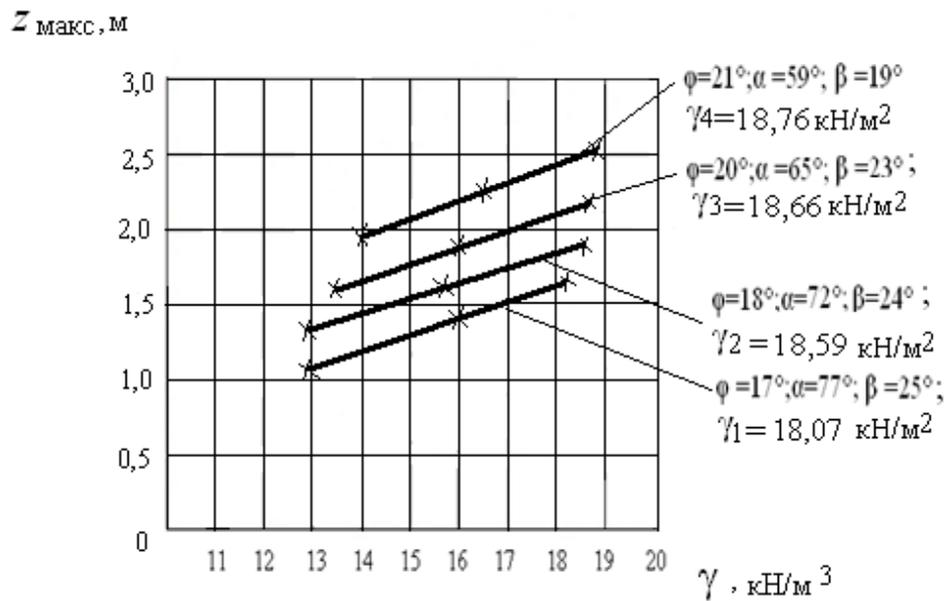
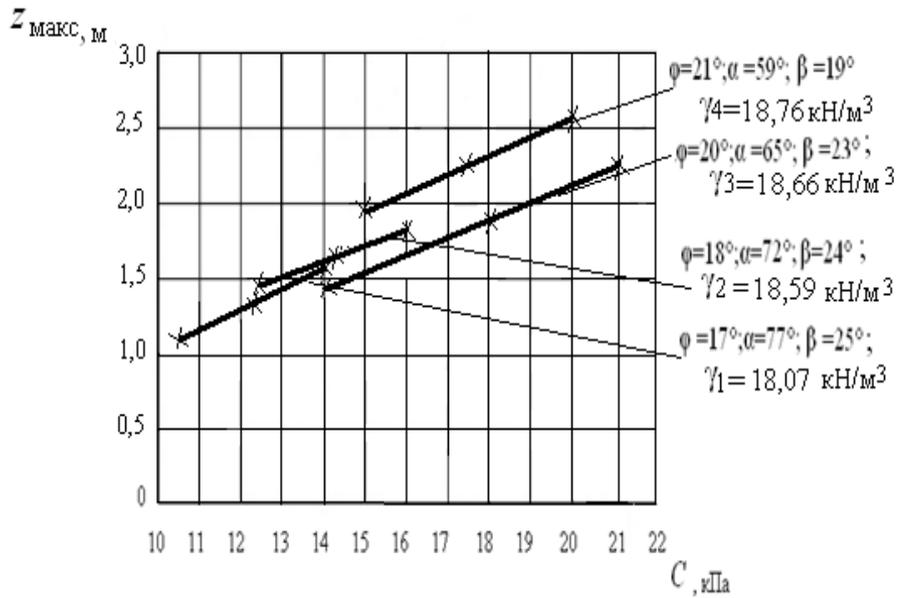


Рис. 3.9. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ; б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса



а)



б)

Рис. 3.10. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

**«Отрицательная» нагрузка в форме трапеции.** Расчётная схема представляет собой горизонтально-слоистую среду на полупространстве, нагружённую внешней силой, эпюра которой имеет вид «отрицательной» трапеции (рис. 3.11). При этом один из слоёв является водонасыщенным, а полупространство обладает свойствами, описанными для рис. 3.1а,б.

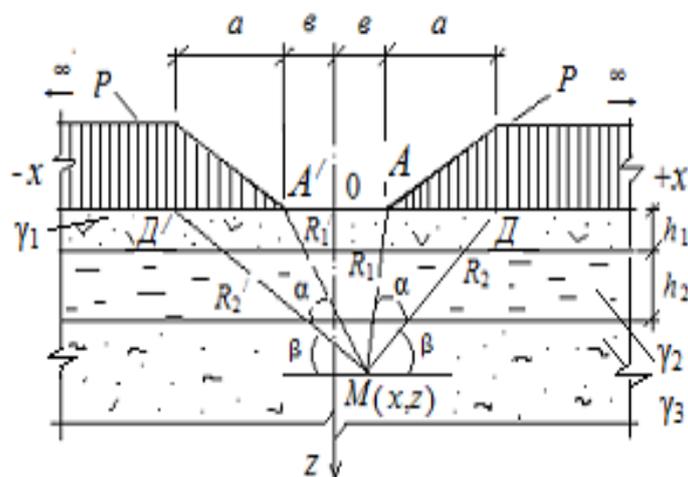


Рис. 3.11. Модель многослойной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Определим критическую нагрузку в грунтовой среде (рис. 3.11). Главные напряжения, обусловленные действием внешней нагрузкой с учётом порового давления водонасыщенного слоя и неводоупорного полупространства, имеют следующий вид (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} + \gamma z + u_w; \quad (3.96)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} + \gamma z + u_w, \quad (3.97)$$

где  $P = P(x)$  – внешняя нагрузки;  $x, z$  – координаты точки  $M$ ;  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  – углы видимости баз действия нагрузки;  $R_1, R_1'$  и  $R_2, R_2'$  – расстояния от точки  $M(x, z)$  до точек  $A, Д, A', Д'$  баз внешней нагрузки;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – объёмный вес плоско-параллельных слоёв и полупространства;  $h_1, h_2$  – мощности плоско-параллельных слоёв;  $a = АД, a = A'Д', v = ОА$  и  $v = ОА'$ .

Подставив выражения (3.96) и (3.97) в условие предельного равновесия (Цытович Н.А., 1983):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sin \varphi \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + P_e \right), \quad (3.98)$$

где  $P_e = c \operatorname{ctg} \varphi$  – давление связности;  $c$  – удельное сцепление связного грунта;  $\varphi$  – угол внутреннего трения грунта, получим следующее уравнение:

$$\frac{z}{\sin \varphi} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} - z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi z a}{P} \gamma = \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \quad (3.99)$$

Решим уравнение (3.99) относительно  $z$ :

$$z = \frac{\left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P}}. \quad (3.100)$$

Найдём углы видимости  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  и  $\beta'$ , при котором  $z = z_{\text{макс}}$ . Рассмотрим определение сначала угла  $\beta$ . Для этого продифференцируем (3.100) по переменной  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = & \frac{(x - \epsilon) \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} - \\ & - \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{0,4(x - \epsilon)\alpha}{\sin \varphi} - \frac{0,4(x - \epsilon)\alpha}{\sin \varphi} = & -(x - \epsilon) \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{0,4\alpha'}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right] + \\ & + \frac{0,4\pi a}{P \sin \varphi} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) + \frac{0,4a}{\sin \varphi} (\beta + \beta') - \frac{0,4x\alpha'}{\sin \varphi} - \frac{0,4\epsilon\alpha'}{\sin \varphi}. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Из уравнения (3.102) найдём угол видимости  $\beta$ :

$$\beta = \frac{(x - \epsilon)}{0,4a} \left[ 0,96 - \sin \varphi \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] - \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) + \frac{2\alpha' \epsilon}{a} - \beta. \quad (3.103)$$

Найдём угол видимости  $\beta'$ , продифференцировав для этого уравнение (3.100) по  $\alpha'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \alpha'} = & \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right] (-x - \epsilon)}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} + \\ & + \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.104)$$

или

$$\beta' = \frac{(x + \epsilon)}{0,4a} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] + \frac{2\epsilon \alpha}{a} + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) - \beta. \quad (3.105)$$

Найдём угол видимости  $\alpha$ , про дифференцировав уравнение (3.100) по  $\beta$  :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right] a}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left\{ \left[ a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.106)$$

или

$$\alpha = -\frac{1}{0,4} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] + \alpha'. \quad (3.107)$$

Найдём угол видимости  $\alpha'$ , про дифференцировав уравнение (3.100) по  $\beta'$  :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{a \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} - \frac{0 \left\{ \left[ a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.108)$$

или

$$\alpha' = \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4P} + \alpha. \quad (3.109)$$

При найденных значениях углов  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  и  $\beta'$  глубина  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , следовательно, формула (3.100) примет вид

$$z_{\max} = \frac{[a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P}(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P}}, \quad (3.110)$$

где  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  и  $\beta'$  определяются по формулам (3.103), (3.105), (3.107) и (3.109).

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (3.7) в формулу (Маслов Н.Н., 1968), в этом случае  $B = 2a$ :

$$z_{\max} = \frac{0,88PB}{C_z}, \quad (3.111)$$

в результате получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{1,76P^2}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha')] - P\{1,76\pi a \gamma + \\ & + \frac{C}{a} [a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')]\} - \pi C_z (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Приведём уравнение (3.112) к следующему виду (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.113)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1,76}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha')]; \\ N &= -\{1,76\pi a \gamma + \frac{C}{a} [a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')]\}; \\ L &= -\pi C_z (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3.114)$$

Решая уравнение (3.113), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]. \quad (3.115)$$

Найдём формулу начального критического усилия с учётом порового давления в водонасыщенном слое, для этого выражение (3.110) приравняем к нулю:

$$z_{\max} = \frac{[a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P}(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P}} = 0, \quad (3.116)$$

и получим следующее уравнение:

$$P[a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \pi a(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) = 0. \quad (3.117)$$

Выразим начальную критическую нагрузку из уравнения (3.23):

$$P_{кр}^{\text{нач}} = \frac{\pi a(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{[v(\alpha + \alpha') - a(\beta + \beta') - x(\alpha - \alpha')]}. \quad (3.118)$$

Определим критическую нагрузку в грунтовой среде (рис. 3.1, б) в момент времени  $t \rightarrow \infty$ , когда поровое давление равно нулю ( $u_{wx} = 0$ ). Эпюра природных напряжений будет иметь следующий вид (рис. 3.1, а). Согласно (Ухов С.Б., 2007) в формуле (3.117) учтено давление от взвешивающего действия воды  $\gamma_{sb,2} h_2$ . Напряжение в любой точке  $M(x, z)$  в полупространстве будет определяться внешней нагрузкой  $P(x)$  и напряжением от собственного веса слоёв:  $\sigma_x = \sigma_z = \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$ .

Главные напряжения, обусловленные действием нагрузки, имеют следующий вид (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (3.119)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]. \quad (3.120)$$

Подставив выражения (3.119) и (3.120) в формулу условия предельного равновесия (3.98), получим следующее уравнение:

$$\frac{z}{\sin \varphi} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} - z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi z a}{P} \gamma_3 = [a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]. \quad (3.121)$$

Решая уравнение (3.121) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{[a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} - \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}, \quad (3.122)$$

или

$$z = \frac{[a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}. \quad (3.123)$$

Найдём углы видимости  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  и  $\beta'$ , при которых  $z = z_{\max}$ .

Сначала продифференцируем уравнение (3.123) по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{(x - e) \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} -$$

$$-\frac{0,4}{\sin \varphi} \{ [a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \} \\ - \frac{0,96 - \sin \varphi \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}{P} = 0, \quad (3.124)$$

отсюда

$$\beta = \frac{(x - \varepsilon)}{0,4a} [0,96 - \sin \varphi \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{P}] - \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] + \frac{2\alpha' \varepsilon}{a} - \beta. \quad (3.125)$$

Найдём угол видимости  $\beta'$ , продифференцировав для этого уравнение (3.123) по  $\alpha'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'} = \frac{[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} ] (-x - \varepsilon)}{[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} ]^2} + \\ + \frac{0,4}{\sin \varphi} \{ [a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \} \\ + \frac{0,4}{\sin \varphi} \{ [a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \} \\ + \frac{0,96 - \sin \varphi \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}{P} = 0, \quad (3.126)$$

отсюда

$$\beta' = \frac{(x + \varepsilon)}{0,4a} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{P}] + \frac{2\varepsilon \alpha}{a} + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] - \beta. \quad (3.127)$$

Найдём угол видимости  $\alpha'$ , продифференцировав для этого уравнение (3.123) по  $\beta$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right] a}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left\{ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right\} + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.128)$$

отсюда

$$\alpha = -\frac{1}{0,4} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{P} \right] + \alpha'. \quad (3.129)$$

Найдём угол видимости  $\alpha'$ , продифференцировав уравнение (3.123) по  $\beta'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{a \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} - \frac{0 \left\{ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right\} + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.130)$$

отсюда

$$\alpha' = \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{0,4P} + \alpha. \quad (3.131)$$

При найденных значениях углов видимости  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  и  $\beta'$  глубина развития критического усилия будет равна  $z_{\max}$ , следовательно, формула (3.123) будет примет вид

$$z_{\max} = \frac{[a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P}[\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}, \quad (3.132)$$

где  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  и  $\beta'$  определяются по формулам (3.125), (3.127), (3.129), (3.131).

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (3.132) в формулу (3.111), в этом случае  $B = 2a + 2v$ , получим следующее уравнение

$$\frac{1,76P^2}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha')] - P \left\{ 1,76\pi a \gamma_3 + \frac{C}{a} [a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] \right\} - \pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2)] + c \operatorname{ctg} \varphi = 0. \quad (3.133)$$

Приведём уравнение (3.133) к следующему виду (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.134)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{1,76}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha')]; \\ N &= -\left\{ 1,76\pi a \gamma_3 + \frac{C}{a} [a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] \right\}; \\ L &= -\pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2)] + c \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.135)$$

Решая уравнение (3.134), получим формулу для вычисления  $P_{\text{кр}}$  (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]. \quad (3.136)$$

Формулы (3.132) и (3.136) позволяют вычислять  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$ . В этих формулах  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения, можно получить формулы для  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. Например при  $v = 0$ , т. е. когда точки  $A$ , и  $A'$  совпадут с  $O$ , эпюра будет иметь другой вид внешней нагрузки; придавая ширине базы полубесконечной нагрузки определённое конечное значение, можно получить эпюру для симметричной треугольной и ленточной нагрузки. На рис. 3.12 приведены зависимости  $P_{\text{кр}}$  от удельного веса, удельного сцепления  $c$  и угла внутреннего трения  $\varphi$ , на рис. 3.13 приведены зависимости глубин развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от тех же характеристик. В задаче принято  $a = 2\text{ м}$ ,  $b = 1\text{ м}$ , коэффициент Пуассона для всех вариантов грунтовой среды равен  $\nu = 0,13$ . Расчёт  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках грунтов полупространства (табл. 3.4) соответствующих пластичным супесям.

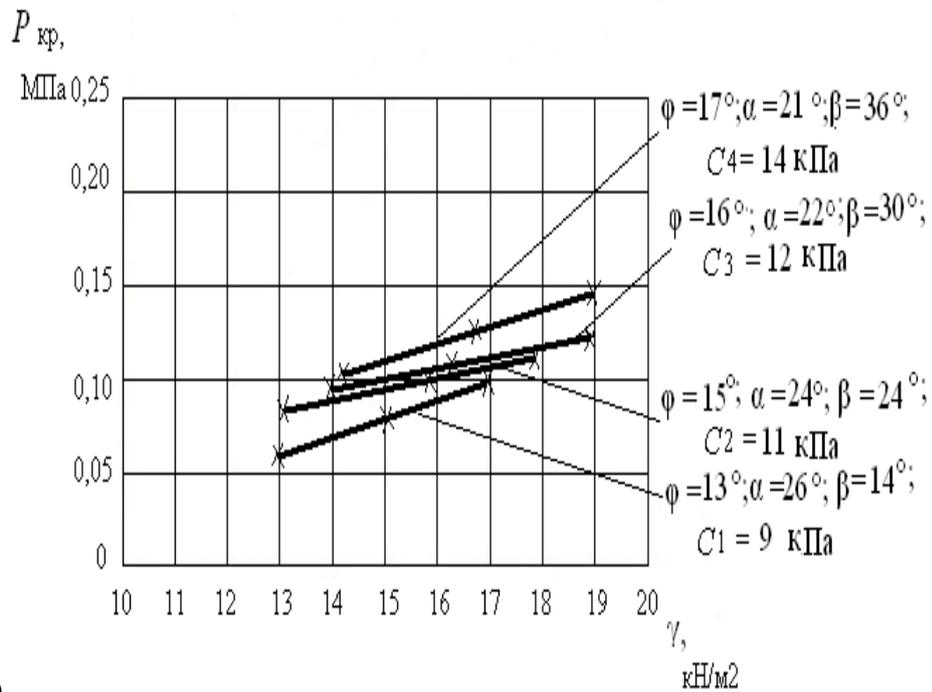
Таблица 3.4.

Физико - механические характеристики грунтов \*

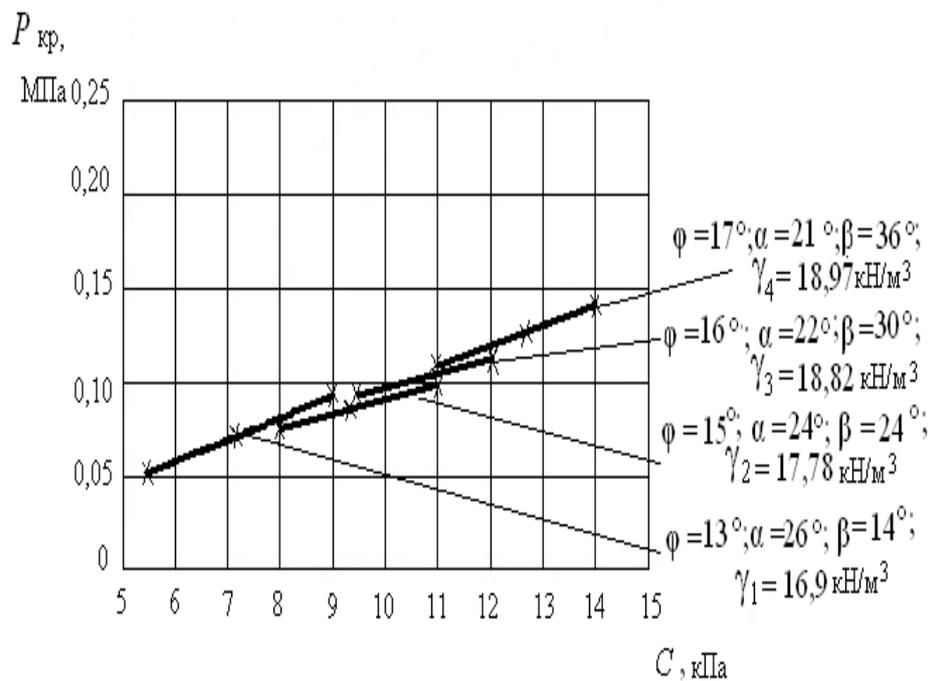
Наименование грунтов	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , <sup>0</sup>	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа
Супеси	16,90	13	9	15,8	16,07
пластичные	17,78	15	11	16,2	16,48
	18,82	16	12	16,6	17,0
	18,97	17	14	17,8	18,1

\*

вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам супесей

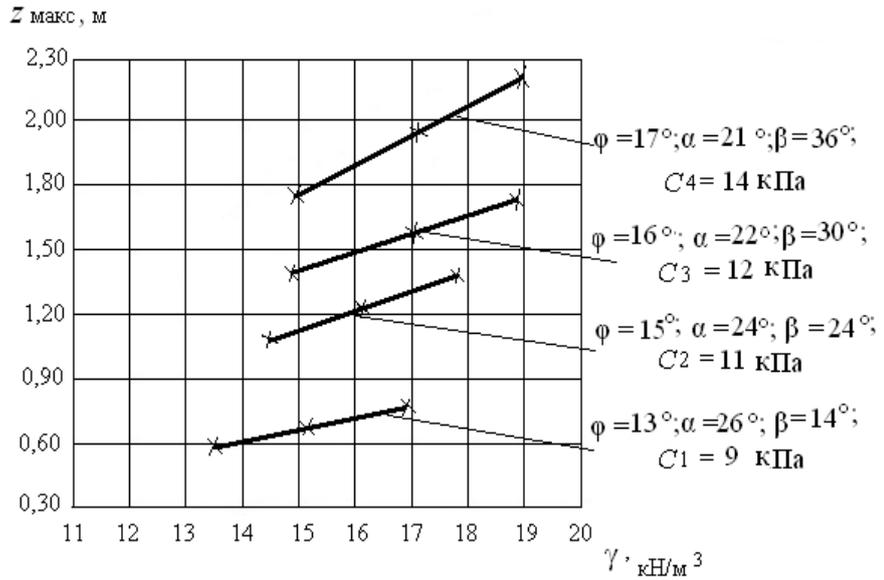


а)

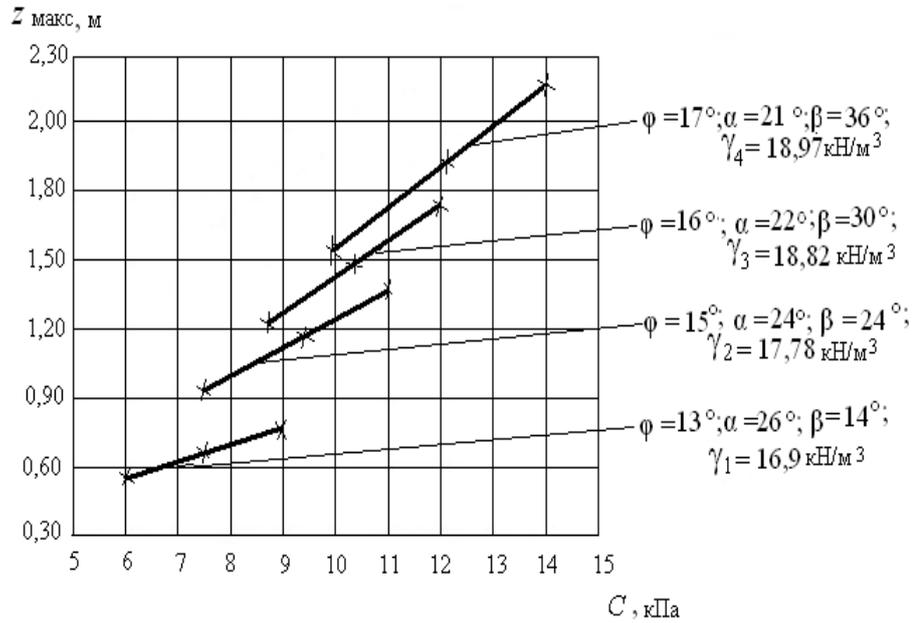


б)

Рис. 3.12. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ; б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 3.13. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

**«Отрицательная» нагрузка в форме треугольника.** Расчётная схема представляет собой горизонтально-слоистую среду на полупространстве, нагружённую внешней силой. Эпюра которой имеет вид «отрицательного» треугольника (рис. 3.14). При этом один из слоёв

является водонасыщенным, а полупространство не является водоупором (рис. 3.1, а).

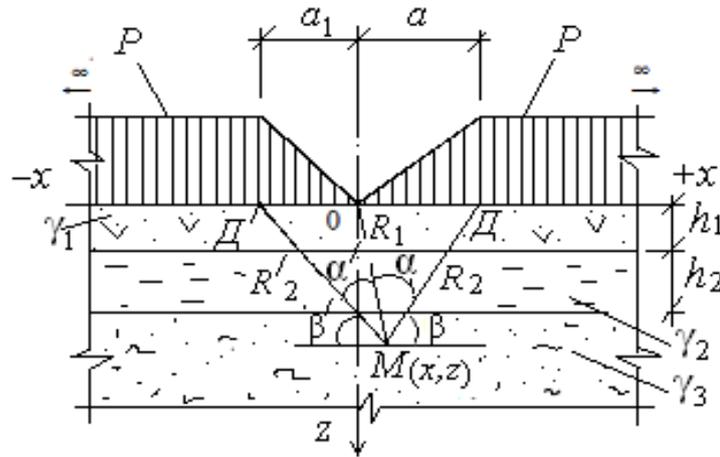


Рис. 3.14. Модель многослойной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Определим критическую нагрузку в грунтовой среде. Главные напряжения, обусловленные действием нагрузки (рис. 3.14) с учётом порового давления, представлены следующими выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} [(\beta + \beta') + (\frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha')] + (\frac{z}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1}) + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1})^2 + (\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1})^2} + \gamma z + u_w; \quad (3.137)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} [(\beta + \beta') + (\frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha')] + (\frac{z}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1}) - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1})^2 + (\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1})^2} + \gamma z + u_w, \quad (3.138)$$

где  $P = P(x)$  – внешняя нагрузки;  $x, z$  – координаты точки  $M$ ;  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  – углы видимости баз действия нагрузки;  $R_1, R_2, R_2'$  – расстояния от точки  $M(x, z)$  до точек  $O, D, O, D'$  баз внешней нагрузки;  $u_w$  – поровое давление в водонасыщенном слое;  $a = OD, a_1 = OD'$ .

Подставим выражения (3.137) и (3.138) в условие предельного равновесия (3.98), получим следующее уравнение :

$$\begin{aligned} & \frac{Pz}{\pi \sin \varphi} \sqrt{\left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right)^2} - \frac{Pz}{\pi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) - \gamma z = \\ & = \frac{P}{\pi} \left[ (\beta + \beta') + \left(\frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha'\right) \right] + u_w + c \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Решая уравнение (3.139) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{(\beta + \beta') + \left(\frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha'\right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (3.140)$$

Найдём углы видимости  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$  и  $\beta'$ , при которых  $z = z_{\max}$ , сначала продифференцировав уравнение (3.140) по  $\alpha$ ; получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \alpha} = & \frac{\frac{x}{a} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \\ & - \frac{\frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left(\frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha'\right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.141)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right] - \\ & - \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) - \beta'. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Найдём угол видимости  $\beta'$ , продифференцировав для этого уравнение (3.140) по  $\alpha'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'} = \frac{-\frac{x}{a_1} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} + \frac{\frac{0,4}{a_1 \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.143)$$

или

$$\beta' = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right] - \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) - \beta. \quad (3.144)$$

Найдём угол видимости  $\alpha$ , продифференцировав для этого уравнение (3.140) по  $\beta$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.145)$$

или

$$\alpha = -\frac{a(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4P} + \frac{a \alpha'}{a_1}. \quad (3.146)$$

Найдём угол видимости  $\alpha'$ , продифференцировав уравнение (3.140) по  $\beta$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2 - 0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) \right\}} = 0, \quad (3.147)$$

или

$$\alpha' = \frac{a_1(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi a_1 \gamma \sin \varphi}{0,4P} + \frac{a_1 \alpha}{a}. \quad (3.148)$$

При найденных значениях углов видимости  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  глубина  $z$  развития критического усилия будет равна  $z_{\max}$ ; следовательно уравнение (3.140) будет примет вид

$$z_{\max} = \frac{(\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}}, \quad (3.149)$$

где  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  определяются по формулам (3.142), (3.144), (3.146) и (3.148).

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (3.149) в формулу (3.110), в этом случае  $B = a + a'$  – база действия нагрузки.

В результате получим следующее выражение:

$$\frac{0,88P^2B}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - P \left[ \frac{0,88B}{C_z} \pi \gamma + (\beta + \beta') + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - \pi (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi) = 0. \quad (3.150)$$

Приведём квадратное уравнение (3.150) к следующему виду (Кравченко Т.И. и др.,2016):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.151)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{0,88B}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \\ N &= - \left[ \frac{0,88B}{C_z} \pi \gamma + (\beta + \beta') + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \\ L &= -\pi(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \end{aligned} \right\} (3.152)$$

Решая уравнение (3.151), получим формулу для вычисления  $P_{\text{кр}}$  (Кравченко Т.И. и др.,2016):

$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.153)$$

Найдём формулу начального критического усилия, приравняв к нулю (3.149):

$$z_{\text{макс}} = \frac{(\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} (u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}} = 0, \quad (3.154)$$

в результате получим следующее уравнение:

$$P \left[ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) \right] = -\pi(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi). \quad (3.155)$$

Из уравнения (3.155) найдём начальную критическую нагрузку:

$$P_{\text{кр}}^{\text{нач}} = \frac{\pi(u_w + c \operatorname{ctg} \varphi)}{\left( \frac{x}{a_1} \alpha' - \frac{x}{a} \alpha \right) - (\beta + \beta')}. \quad (3.156)$$

Рассмотрим определение критической нагрузки для модели рис. 3.1,б. Главные напряжения, обусловленные действием «отрицательной» треугольной нагрузки, в этом случае представлены следующими выражениями (Маслов Н.Н., 1949):

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left[ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \left( \frac{z}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right) \right] + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (3.157)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left[ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x'}{a_1} \alpha' \right) + \left( \frac{z}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right) \right] - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]. \quad (3.158)$$

Подставим выражения (3.157) и (3.158) в условие предельного равновесия (3.7), получим следующее уравнение:

$$\frac{Pz}{\pi \sin \varphi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right)^2} - \frac{Pz}{\pi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right) - \gamma_3 z = \frac{P}{\pi} \left[ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) \right] + \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi. \quad (3.159)$$

Решая уравнение (3.159) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{(\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (3.160)$$

Найдём углы видимости, при которых  $z = z_{\max}$ , сначала продифференцируем уравнение (3.160) по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{x}{a} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} - \frac{\frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} = 0. \quad (3.161)$$

Получим формулу для угла  $\beta$

$$\beta = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right] - \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] - \beta'. \quad (3.162)$$

Найдём угол видимости  $\beta'$ , про дифференцировав для этого уравнение (3.160) по  $\alpha'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'} = \frac{-\frac{x}{a_1} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} + \frac{\frac{0,4}{a_1 \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.163)$$

получим формулу для угла  $\beta'$

$$\beta' = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right] - \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] - \beta. \quad (3.164)$$

Найдём угол видимости  $\alpha$ , продифференцировав для этого уравнение (3.160) по  $\beta$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.165)$$

получим формулу для угла  $\alpha$

$$\alpha = - \frac{a(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{0,4 P} + \frac{a \alpha'}{a_1}. \quad (3.166)$$

Найдём угол видимости  $\alpha'$ , продифференцировав уравнение (3.160) по  $\beta'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} = 0, \quad (3.167)$$

получим формулу для угла  $\alpha'$

$$\alpha' = \frac{a_1(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln^2 \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi a_1 \gamma_3 \sin \varphi}{0,4P} + \frac{a_1 \alpha}{a}. \quad (3.168)$$

При найденных значениях углов видимости  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  глубина  $z$  развития критического усилия будет равна  $z_{\text{макс}}$ , следовательно уравнение (3.160) будет примет вид

$$z_{\text{макс}} = \frac{(\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}, \quad (3.169)$$

где  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  определяются по формулам (3.162), (3.164), (3.166) и (3.168).

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (3.169) в формулу (3.110), в этом случае  $B = a + a'$  – база действия нагрузки.

В результате получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{0,88P^2B}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - P \left[ \frac{0,88B}{C_z} \pi \gamma_3 + (\beta + \beta') + \right. \\ & \left. + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - \pi [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi] = 0. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Приведём квадратное уравнение (3.170) к следующему виду (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.171)$$

где

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{0,88B}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \\ N &= - \left[ \frac{0,88B}{C_z} \pi \gamma_3 + (\beta + \beta') + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \\ L &= - \pi [\gamma_1 h_1 + \gamma_{sb,2} h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + c \operatorname{ctg} \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (3.172)$$

Решая уравнение (3.171), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  (Кравченко Т.И. и др., 2016):

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.173)$$

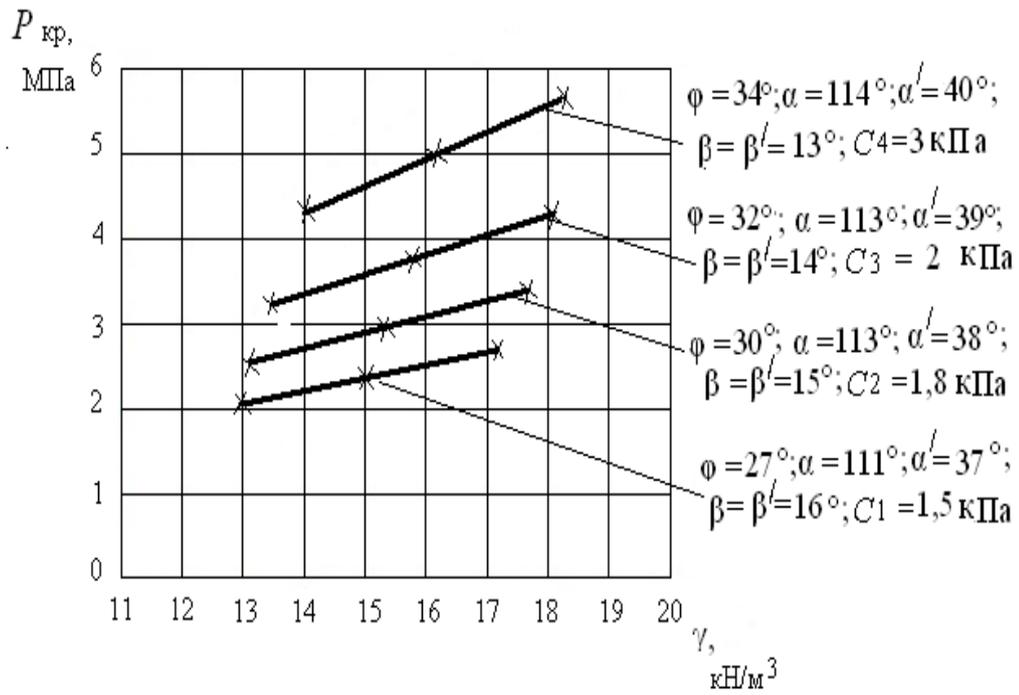
Формулы (3.169) и (3.173) зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения, можно получить формулы для  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для различных вариантов эпюр внешней нагрузки. Например, при  $a = a_1$ , эпюра будет иметь вид симметричной нагрузки; при  $h_1 = h_2 = 0$  и ширине базы полубесконечной нагрузки равной нулю получим формулу  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для полупространства с различными видами эпюр внешней нагрузки, например, как для нагрузки в форме прямоугольного треугольника и т. д. На рис. 3.15 приведены зависимости  $P_{кр}$  от удельного веса  $\gamma$ , удельного сцепления  $c$  и угла внутреннего трения  $\varphi$ , на рис. 3.16 приведены зависимости глубин развития критического усилия  $h$  от тех же характеристик. При расчёте принято  $h_1 = h_2 = 0,3$  м,  $\gamma_1 = 15,05$  кН/м<sup>3</sup>,  $\gamma_2 = 10,3$  кН/м<sup>3</sup>,  $a = 3$  м,  $a_1 = 2$  м, коэффициент Пуассона для всех вариантов грунтовой среды равен  $\nu = 0,13$ . Расчёт  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства (табл. 3.5.), соответствующих мелким водонасыщенным пескам. Результаты расчётов  $P_{кр}$  и  $z_{\max}$  приведены на рис. 3.15 и 3.16.

Таблица 3.5.

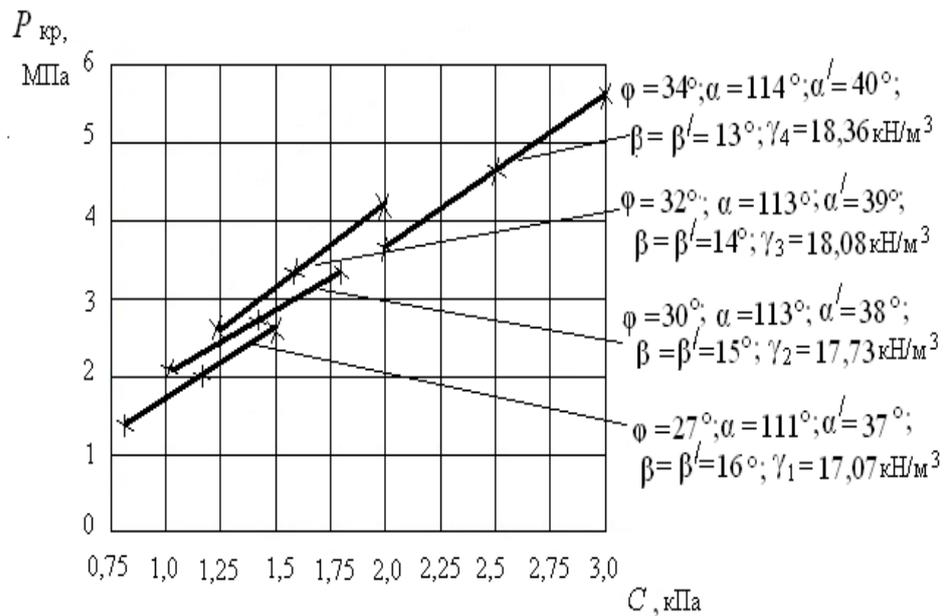
Физико-механические характеристики грунтов\*

Наименование грунтов	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , °	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа
Песок мел-кий, средней степени водонасыщенный	17,07	27	1,5	25,8	26,25
	17,73	30	1,8	26,2	26,65
	18,08	32	2	28	28,48
	18,36	34	3	29	29,30

\*вариации значений физико - механических свойств соответствуют различным видам песков.

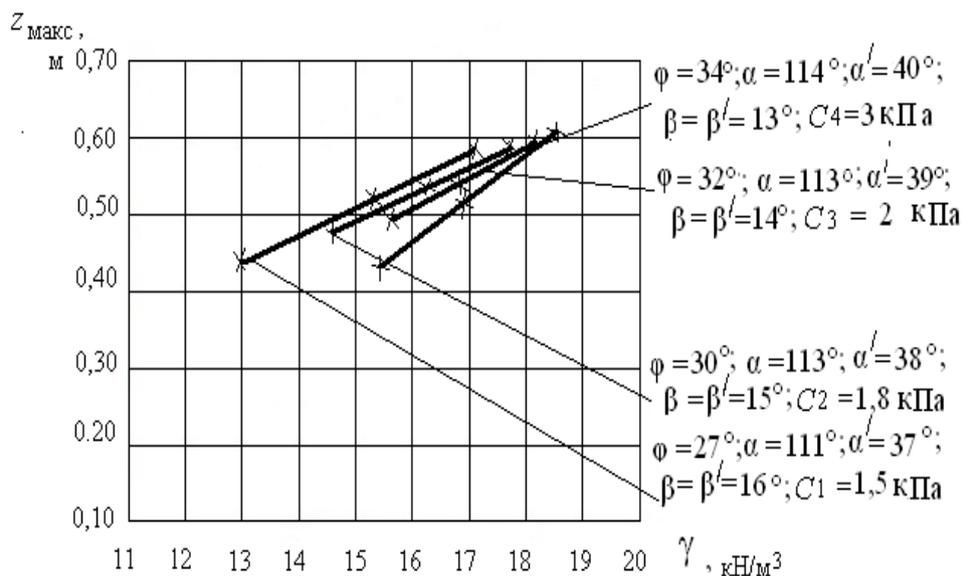


а)

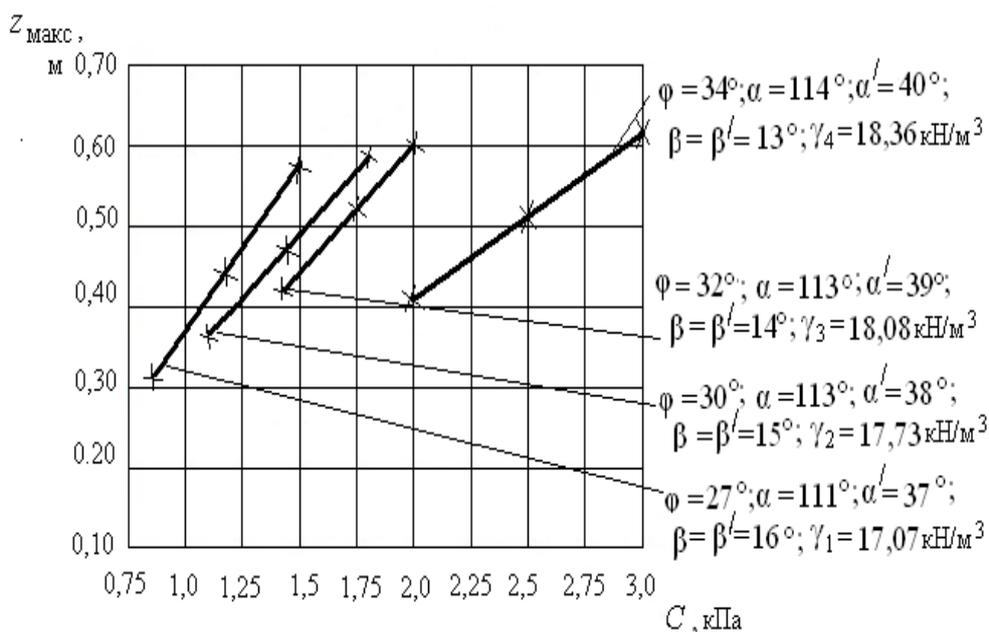


б)

Рис. 3.15. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от: а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $c$ ;  
 б) удельного сцепления грунта  $c$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 3.16. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от  $\gamma$  (а) и  $c$  (б)

Исследования проведённые на моделях с водонасыщенным слоем показали, что несущая способность многослойных и однослойных грунтовых сред имеет общие закономерности:

- для грунтовых сред с ростом физико-механических характеристик среды  $\varphi$ ,  $\gamma$  и  $c$  происходит увеличение критического усилия  $k_p$  и  $z_{\text{макс}}$ ;
- для грунтовых сред с одинаковыми физико-механическими характеристиками полупространства изменение  $z_{\text{макс}}$  в зависимости от вида приложенной нагрузки происходит единообразно.

### 3.3. Аппроксимация зависимостей критической нагрузки и максимальной глубины развития пластических деформаций линейными функциями

В результате анализа графических зависимостей  $P_{кр}$  и  $z_{макс}$  от физико-механических характеристик грунтовых сред было установлено, что в ряде случаев они могут быть аппроксимированы линейными функциями вида  $y = ax + b$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  в этих зависимостях определяются методом наименьших квадратов (Линник Ю. В., 1973).

Для внешней нагрузки в форме равнобедренного треугольника была получена следующая линейная зависимость для  $z_{макс}$  от  $c$ :

$$z_{макс} = 0,794 c + 482,12 \text{ (м)} . \quad ( 3.174)$$

Вид этой зависимости приведён на рис. 3.17.

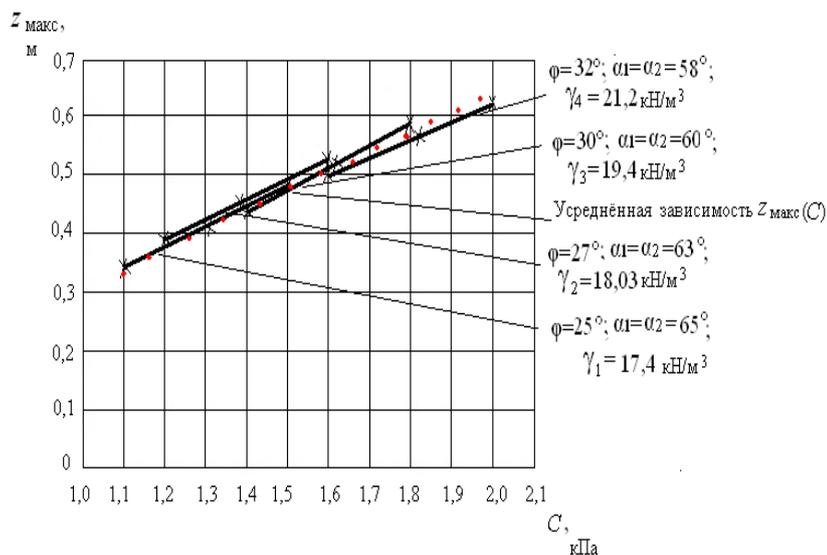


Рис. 3.17. Зависимость  $z_{макс}$  от удельного сцепления грунта  $c$

Для той же внешней нагрузки линейная зависимость  $z_{макс}$  от  $\gamma$  имеет следующий вид

$$z_{макс} = 0,07 \gamma + 474,69 \text{ (м)} . \quad (3.175)$$

Вид этой зависимости показан на рис. 3.18.

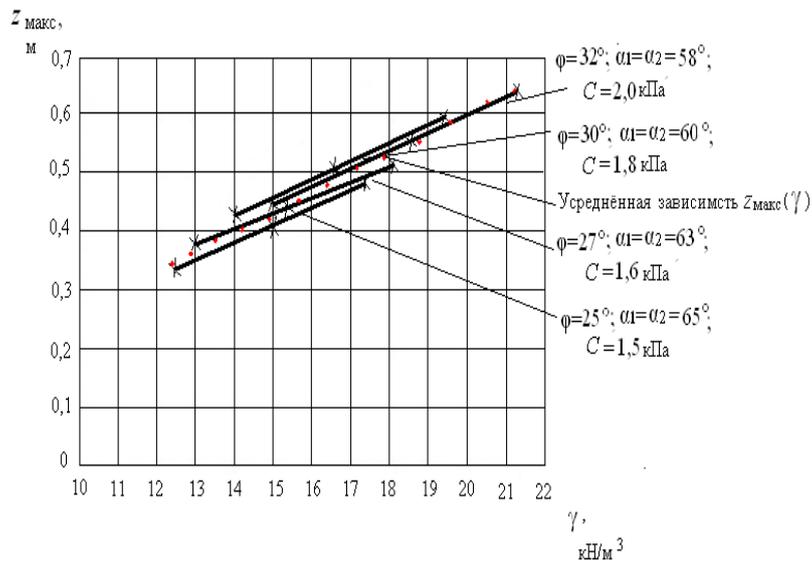


Рис. 3.18. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от удельного веса грунта  $\gamma$

Для внешней нагрузки в форме неравностороннего треугольника была получена линейная зависимость  $P_{\text{кр}}$  от  $c$ :

$$P_{\text{кр}} = 0,04c + 141,3 \text{ (кН/м}^2\text{)}. \quad (3.176)$$

Вид этой зависимости приведён на рис. 3.19.

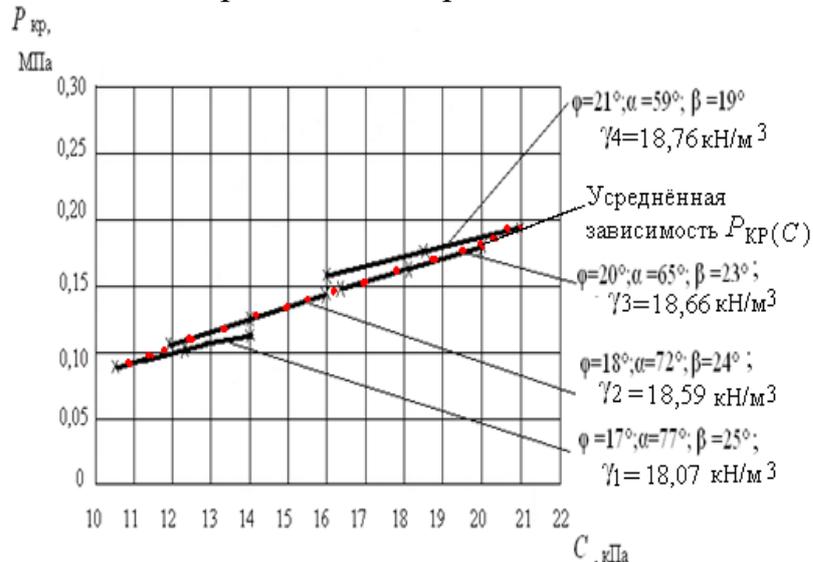


Рис. 3.19. Линейная зависимость критической нагрузки  $P_{\text{кр}}$  от удельного сцепления грунта  $c$

Для «отрицательной» внешней нагрузка в форме треугольника была получена линейная зависимость  $P_{\text{кр}}$  от  $c$ :

$$P_{\text{кр}} = 5,324c + 9588,61 \text{ (кН/м}^2\text{)}. \quad (3.177)$$

Вид этой зависимости приведён на рис. 3.20.

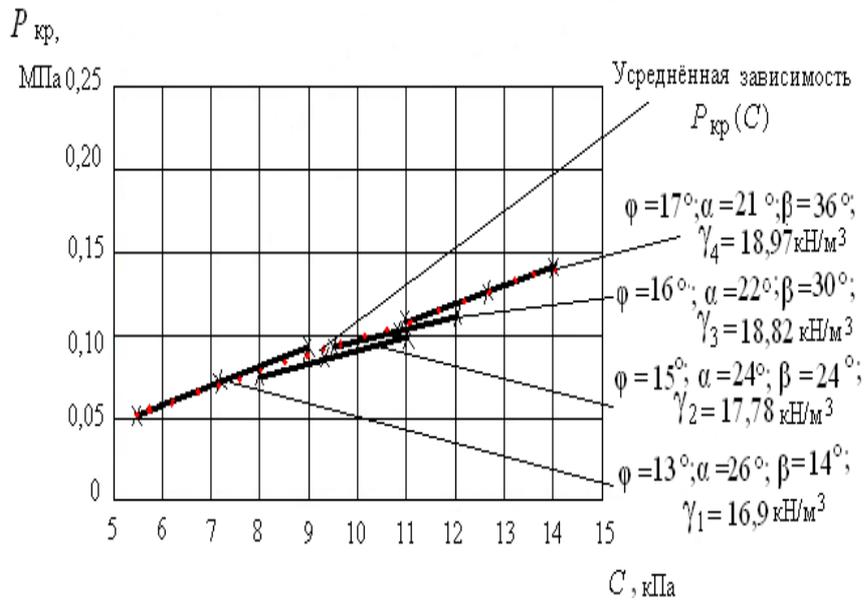


Рис. 3.20. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от удельного сцепления грунта  $c$

Для «отрицательной» внешней нагрузки в форме трапеции были получены линейные зависимости  $P_{кр}$  от  $c$  и  $z_{\max}$  от  $\gamma$ :

$$P_{кр} = 0,039 c + 3,184 \cdot 10^3 \text{ (кН/м}^2\text{)}, \quad (3.178)$$

$$z_{\max} = 0,003 \gamma + 0,497 \text{ (м)}. \quad (3.179)$$

Вид этих зависимостей приведён на рис. 3.21 и 3.22.

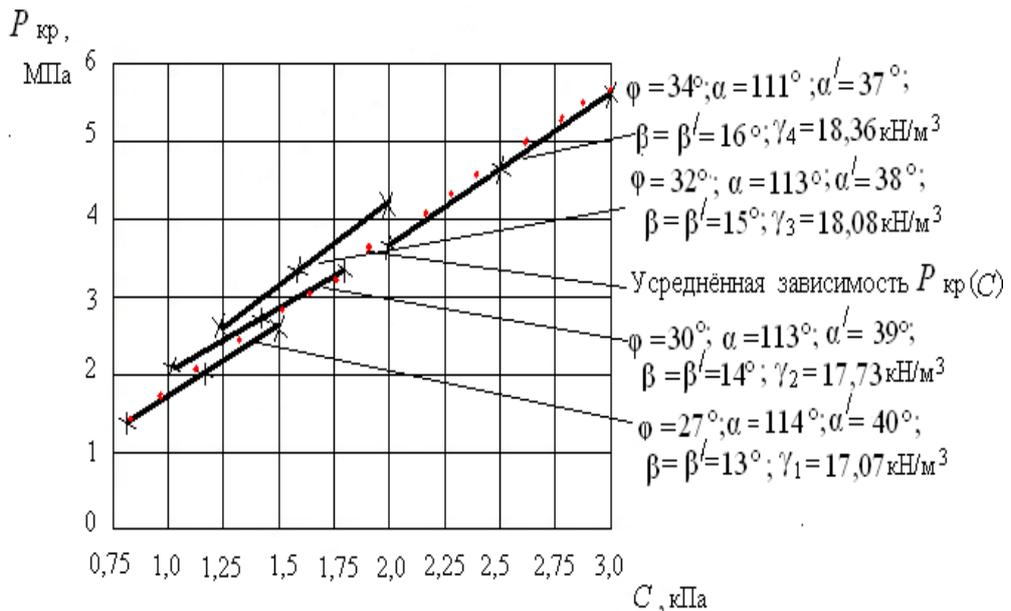


Рис. 3.21. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от удельного сцепления грунта  $c$

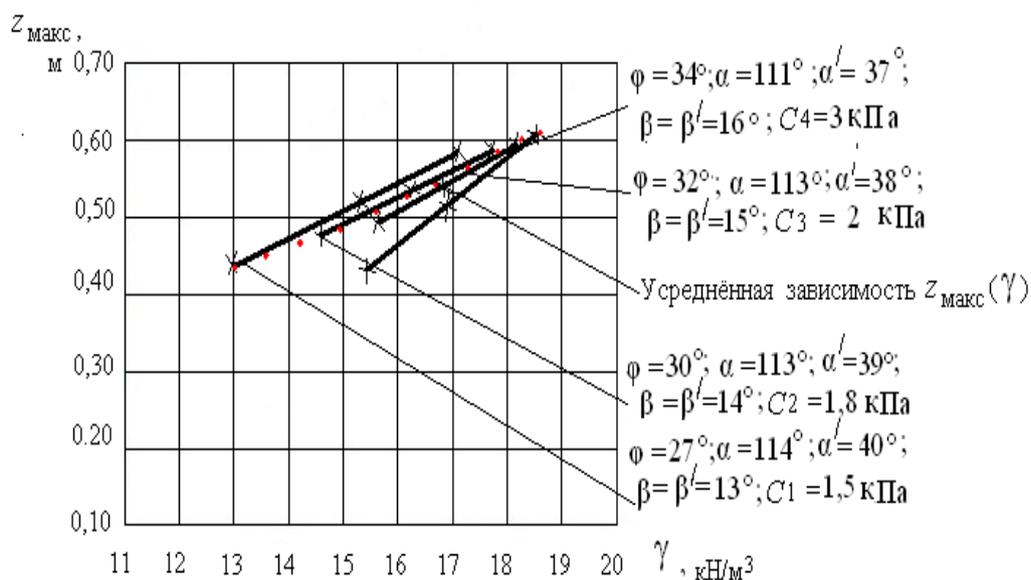


Рис. 3.22. Зависимость  $z_{\text{макс}}$  от удельного веса грунта  $\gamma$

Анализ показал, что:

- линейные зависимости для  $P_{\text{кр}}$  и  $z_{\text{макс}}$  удовлетворительно аппроксимируют соответствующие типы аналитических зависимостей с погрешностью не ниже 10 - 12%;

- для рассмотренных линейных зависимостей  $P_{\text{кр}}$  от  $c, \gamma$  и  $\varphi$  установлено, что  $P_{\text{кр}}$  в большей мере зависит от  $c$ . Зависимость  $P_{\text{кр}}$  от  $\varphi$  и  $\gamma$  не превышают 10 - 12%;

- из линейных зависимостей  $z_{\text{макс}}$  от физико-механических характеристик грунтовых сред следует, что  $z_{\text{макс}}$  увеличивается с ростом  $c$  и  $\gamma$ ;

- графические зависимости  $P_{\text{кр}}(c), P_{\text{кр}}(\gamma), z_{\text{макс}}(c)$  и  $z_{\text{макс}}(\gamma)$  можно использовать как номограммы для экспрессий оценки  $P_{\text{кр}}$  и  $z_{\text{макс}}$ .

## Глава 4. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД ФИЗИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

### 4.1. Поляризационно-оптический метод

*Основы поляризационно-оптического метода.* В настоящее время нет такой области техники и механики, в которой не приходилось бы изучать напряжённо - деформированное состояние различных объектов. Для изучения напряжений оптический метод является самым эффективным, т. к. позволяет получать не только количественные характеристики напряжений, но и визуализировать картину распределения напряжений.

Некоторые прозрачные тела, подвергнутые действию внешних сил, изменяют свои оптические свойства. Изменения оптических свойств состоит в том, что тела первоначально оптически изотропные становятся под действием нагрузки анизотропными, т.е. в них возникает двойное лучепреломление, исчезающее при снятии нагрузки. Это явление, называемое так же эффектом фотоупругости, или пьзооптическим эффектом, было открыто в 1816 г. Д. Брюстером. Законы этого явления были детально исследованы Ю. Ж. Френелем, Д.К. Максвеллом, Т. Леви и др., что привело к широкому применению оптического метода.

Поляризованный луч, проходя через нагруженную прозрачную модель, раскладывается на составляющие, распространяющиеся в плоскостях главных напряжений с различной скоростью и имеющие на выходе определенную разность хода  $\delta$ . На пути этих лучей ставится поляризатор и анализатор, поляризующие лучи во взаимно перпендикулярных плоскостях, что дает возможность измерения возникшей разности хода, которая связана с главными напряжениями зависимостью (Фрохт Н.М., 1950):

$$\delta = cd(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (4.1)$$

где  $c$  – коэффициент оптической активности, характеризующий оптические свойства материала модели;  $d$  – толщина модели;  $\sigma_1 - \sigma_2$  – разность главных напряжений.

Разность главных напряжений определяется двумя способами. При использовании метода полос напряженное состояние характеризуется определенной окраской модели в исследуемой точке. При испытании призматического стержня с площадью поперечного сечения  $A$  посредством



При определении напряжений методом компенсации разности хода лучей компенсируется посредством введения дополнительной кристаллической пластинки. По толщине пластинки находится разность хода лучей.

Для исследования напряженного состояния этим методом необходимо наличие координатно-синхронного поляриметра (КСП) с компенсатором (рис. 4.2). КСП дает более высокую точность изображения интерференционной картины, чем ППУ. При определении напряжений методом компенсации необходимо также измерение параметра  $\varphi$  изоклины тёмной линии, определяющей место точек, имеющих одинаковое направление главных напряжений.

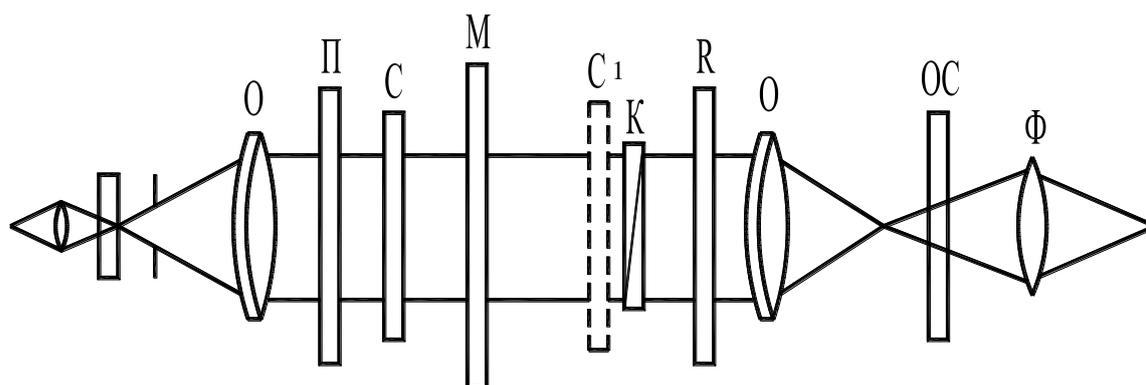


Рис. 4.2. Схема координатно-синхронного поляриметра, где М – модель; О – объектив; П – поляризационная призма (поляризатор); R – поляризующая призма (анализатор); ОС – фотопластинка; С – первая пластинка; С<sub>1</sub> – вторая пластинка; К – компенсатор; Ф – проекционный объектив (линза)

Для отыскания всех компонентов напряженного состояния измеряют разности хода лучей; параметр изоклины  $\varphi$  определяется по двум сечениям (основному и вспомогательному) с последующим численным интегрированием. Исходя из уравнения равновесия для плоской задачи,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.3)$$

МОЖНО ЗАПИСАТЬ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \partial x + \sigma_{x_0}, \\ \sigma_y &= -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \partial y + \sigma_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Для выбранных приращений  $\Delta x_i$  и  $\Delta y_i$  формулы (4.4) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x_0} - \sum_{i=1}^n (\Delta \tau_{xy}) \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} \\ \sigma_y &= \sigma_{y_0} - \sum_{i=1}^n (\Delta \tau_{xy}) \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \end{aligned} \right\}, \quad (4.5)$$

где  $n$  – количество точек наблюдения;  $\sigma_{x_0}$  и  $\sigma_{y_0}$  – определяется из условий на контуре модели;  $\tau_{xy}$  – определяется по формуле (Фрохт Н.М., 1950):

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi. \quad (4.6)$$

Оптический метод применяется и при исследовании напряжений в объемных моделях. Чаще всего применяется для этого и «замораживание» картины деформаций и последующая распиловка модели на тонкие плоские срезы. В общем случае для определения всех компонентов напряжения требуется три совершенно одинаковые модели (Фрохт Н.М., 1950).

При деформировании первоначально оптически изотропной прозрачной модели в каждом ее элементе происходит изменение компонент тензора диэлектрической проницаемости, и элемент становится оптически анизотропным. Значение коэффициента оптической активности обычно определяют на образцах прямоугольного сечения, подвергаемых осевому растяжению или сжатию. При этом неизбежно возникает внецентренность приложения нагрузки. Для определения  $C$  (или  $C_0$ ) целесообразнее использовать образцы в виде дисков, сжимаемых известной силой  $F$ . При этом внецентренность нагрузки исключается.

Оптическая разность хода определяется в центре диска, а искомым коэффициент  $C$  вычисляется по формуле (Фрохт Н.М., 1950) (рис. 4.3, а):

$$C = \frac{\pi D}{8F} \delta, \quad (4.7)$$

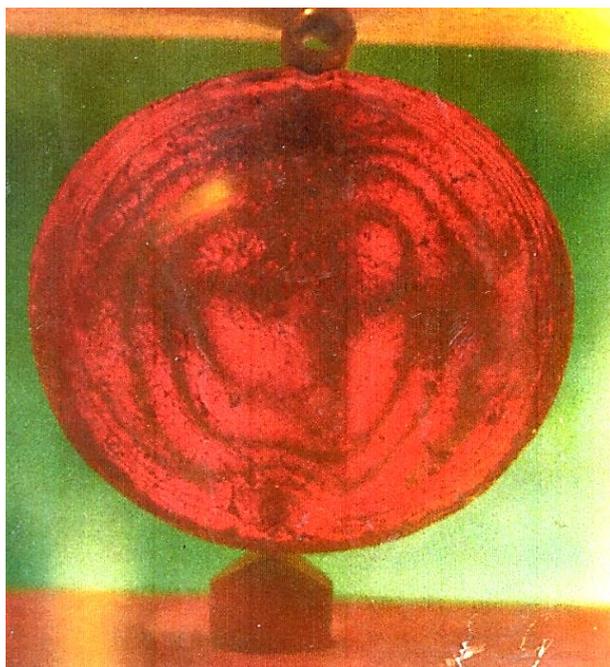
где  $D$  – диаметр диска;  $\delta$  – разность хода;  $F$  – приложенная сила.

В случае циркулярной поляризации монохроматического света в результате эффекта двойного лучепреломления при наблюдении нагруженной пластинки, помещенной в поле полярископа, на пластинке появляется система темных полос, называемых изохромами. Из этих полос каждая является геометрическим местом точек имеющих одну и ту же величину  $\tau_{\text{макс}}$  (рис. 4.3, б). В этом случае величина касательного напряжения определяется ценой полосы материала и ее порядком. Порядок полосы  $n$  измеряется разностью хода, выраженной в длинах волн. Цена полосы определяется, выражением:

$$\tau_0 = \frac{\tau_{\text{макс}} d}{n}, \quad (4.8)$$

где  $\tau_{\text{макс}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ .

Для определения цены полосы применяются различные методы. В случае применения белого цвета, наблюдаемые полосы равных касательных напряжений имеют различный цвет, зависящий от величины  $\tau_{\text{макс}}$ . Практика показывает, что для получения количественных характеристик удобнее пользоваться монохроматическим светом, а для наглядности – белым, дающим цветную картину распределения напряжений. При применении плоско-поляризованного света на общем фоне картины полос наблюдается появление дополнительных темных полос или областей называемых изоклинами, которые являются геометрическим местом точек, имеющих параллельное направление главных напряжений. По имеющимся изоклинам можно построить сетку траекторий главных напряжений.



а)



б)

Рис. 4.3. Isochromaticкая картина образца для определения коэффициента оптической активности  $C$ :  
а) образец в виде диска; б) образец прямоугольного сечения

В разработке экспериментального метода изучения напряжений важнейшим положением является то, что пластическая деформация может возникать и развиваться только в упруго деформируемой среде. Отсюда следует вывод о возможности наблюдения эффекта двойного лучепрелом-

ления при этом виде деформации. Метод фотопластичности моделирует процесс пластической деформации и решает задачи о напряженных состояниях при условии, что напряжения в модели превышают предел упругости.

У пластического тела сопротивление сдвигу не зависит от скорости деформации, но может зависеть от ее степени, причем в процессе пластической деформации происходит изменение структуры и свойств тела. Поэтому возможность метода фотопластичности шире возможности метода фотоупругости и позволяет исследовать сам механизм пластической деформации с позиций механики сплошных сред, получать данные о распределении напряжений, деформаций и скоростей деформации в макрообъемах сплошной среды. Кроме того, метод фотопластичности пригоден для исследований и в микрообъектах (микрообъемах), поскольку позволяет моделировать и изучать механизмы пластической деформации и разрушение.

К материалу, используемому в фотопластичности, предъявляется ряд требований, зависящих от конкретных условий проводимых исследований:

- механическая и оптическая однородность (среда может быть и анизотропной);
- высокая пластичность;
- соответствие реологического поведения модели реологическому поведению природы;
- наличие определенной связи между напряжениями, деформациями, деформаций и температурой;
- достаточная оптическая чувствительность;
- необходимые механические и оптические характеристики (прочность, твердость, обрабатываемость, прозрачность, отсутствие начальных оптических эффектов и т. д.).

Грунтовые основания являются сплошной средой, в которую входят и твердые, и жидкие, и газообразные компоненты, поэтому реальные грунты отличаются сложной связью между напряжениями и деформациями.

Однако, используя ряд допущений вполне применим поляризационный метод к задачам об изучении напряженно-деформированном состоянии грунтов.

**Поляризационные приборы.** Для проведения оптических исследований используются поляризационно-проекционная установка и координатно-синхронный поляриметр (Фрохт Н.М., 1950; Файлон Л., 1940) (рис. 4.1 и 4.2).

Поляризационно-проекционная установка (ППУ) с рабочим полем диаметром 120 мм предназначена для исследования всего поля напряжений моделей и фотографирования изохроматической картины. Оптическая схема ее изображена на рис. 4.1. Этим прибором пользуются для исследований при линейной и круговой поляризациях. Фотографирование производят интерференционным светофильтром с пропусканием 30,6% монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 610 \text{ м}\mu$  и шириной полосы 12  $\text{м}\mu$ . При исследованиях на экране могут быть получены изоклины – линии, характеризующие направление главных напряжений в заданных точках образца, и изохромы – геометрические места точек с одинаковыми значениями разности главных напряжений.

Лучи, посылаемые источником света С, собираются конденсатором К в сходящийся пучок. В фокусе конденсатора находится поляризационная призма П (поляризатор), преобразующая пучок света в плоско-поляризованный. Поляризующая призма А (анализатор) находится в фокусе систем линз Р<sub>2</sub> и Ф. Чтобы призма не нагревалась, между осветителем и поляризатором устанавливают охлаждающую водяную ванну или специальный теплофильтр В. На пути лучей расположена рабочая линза Р<sub>1</sub>, которая преобразует расходящийся пучок света в параллельный, а рабочая линза Р<sub>2</sub> и проекционный объектив Ф собирают параллельный пучок света в сходящийся. Изображение модели М, помещенной между линзами Р<sub>1</sub> и Р<sub>2</sub> проектируется на экран Э.

Поляризатор и анализатор установлены в поворотных оправках с отчетными лимбами. Нулевым отсчетом по лимбам соответствует скрещенное положение поляризатора и анализатора, причем плоскость поляризации одной из призм вертикальная, а другой горизонтальная. При нулевом положении поляризатора и анализатора на экране появляются темные полосы – изоклины с параметром ноль. Для получения изоклин с другими параметрами, нужно повернуть поляризатор и анализатор на соответствующий угол. Чтобы получить изохромы без изоклин, необходимо просвечивать модель светом, поляризованным – по кругу. Для этого вводят слюдяные пластины Д и Д<sub>1</sub> в 1/4 длины волны, прикрепленные на шарнирах к оправкам поляризатора и анализатора.

Координатно-синхронный поляриметр (КСП) совместно с компенсатором Краснова СКК-2 предназначен для тех же целей, что и установка ППУ (Фрохт Н.М., 1950; Файлон Л., 1940). Оптическая схема его изображена на рис 4.2. Состоит он из двух основных частей: координатной и поляризационно-оптической. Координатная часть обеспечивает одновременное перемещение поляризатора и анализатора по двум взаимно перпендикулярным направлениям с отсчётом координат, что дает возможность при помощи оптики рассматривать любую точку образца. Поляризационно-оптическая часть служит для получения поляризованного света и промеров разности хода лучей в каждой точке образца.

В приборе также синхронно вращаются анализатор и поляризатор. Для измерения величины оптической разности хода лучей в любой точке образца пользуются слюдяным компенсатором (СКК-2), который устанавливают на анализаторной части поляризационной установки. Образец помещают в рабочее поле поляризационного прибора, дающего параллельный пучок линейно-поляризованного света так, чтобы свет падал перпендикулярно к его плоскости. Затем поворачивают синхронно плоскости поляризатора и анализатора до тех пор, пока в исследуемой точке не наступит темнота. При этом, совмещаются плоскости поляризации прибора с главными осями напряжений в исследуемой точке образца. Угол поворота плоскостей поляризации прибора относительно выбранного направления определяет ориентировку главных осей напряжений. Измеряют разность хода лучей в выбранной точке образца следующим образом. Плоскости поляризации установки поворачивают на  $45^\circ$  от положения темноты для получения наибольшего освещения. Компенсатор устанавливают в диагональное положение так, чтобы плоскости поляризации слюдяной пластинки компенсатора составляли с плоскостями прибора угол  $45^\circ$ . Это необходимо для установления параллельности осей кристалла с главными осями в исследуемой точке. После этого поворачивают слюдяную пластинку компенсатора до исчезновения интерференционной окраски в данной точке. Диапазон измерения разности хода лучей  $\delta$  обычно равен  $3,5 \lambda$ . Для определения напряжений в исследуемых образцах необходимо, в каждой точке модели получить оптическую разность хода и направление осей эллипсоида напряжений, определяемое углом  $\varphi$ .

Применение значительной нагрузки при исследованиях даёт возможность получить оптическую разность хода фотографированием изохром (метод полос) на экране прибора ППУ в круговой поляризации. Изображе-

ния изохронических картин при предварительном определении цены полосы позволяет построить графики распределения напряжений в модели, подвергнутой чистому изгибу с точностью до одной длины волны.

**Загрузочное приспособление.** Для создания сосредоточенного давления на верхнюю грань образца используют специальное загрузочное приспособление (рис. 4.4).

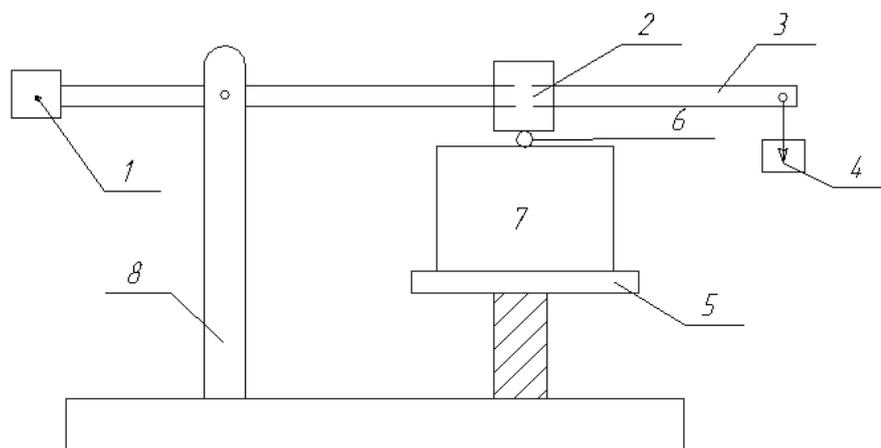


Рис. 4.4. Общий вид загрузочного приспособления:

- 1) контргруз; 2) боек; 3) рычаг; 4) груз; 5) подъемный столик;  
6) цилиндр; 7) испытуемый образец; 8) стойка

Модель устанавливают на подъемном столике (5) на такой высоте, чтобы рычаг (3) в горизонтальном положении касался бойком (2) верхней грани модели. Рычаг шарнирно связывался со стойкой (8). Для того, чтобы его вес не оказал давления на модель, он уравнивается подвижным контргрузом (1).

Давление на модель создается грузом (4) и передается посредством цилиндра (6) диаметр которого равен 0,3 см. Для получения упругой деформации в большой зоне, на цилиндр бойка наклеивают тонкую кожицу, т.к. без нее даже при малых нагрузках могла возникнуть пластическая деформация, в виде сдвига, который может проникнуть глубоко в толщу модели и исказить поле напряжений.

**Изготовление моделей.** При проведении экспериментальных исследований нами использовались модели, выполненные из желатино-глицеринового материала. Материал прозрачен, оптически чувствитель-

ный. Это дает возможность применять его для изучения напряжений, вызываемых массовыми силами. Чувствительность материала зависит от концентрации желатина, глицерина и температуры. При кратковременном нагружении модели из этого материала имеет место упругая деформация. Наблюдаемая картина изохроматических полос после снятия нагрузки сразу исчезает. В случае длительного нагружения наблюдается пластическая деформация, и модель необратимо изменяет форму. Для изготовления моделей применялись оргстеклянные формы, которые представляют собой 2 стенки, стянутые винтами через пластинки таким образом, что между стенками образована плоская щель 6 мм.

В пространство между стенками залит исследуемый материал (желатиновая масса).

Оргстеклянные формы должны удовлетворять основным требованиям, которые обычно предъявляют к формам, а именно:

- материал формы не должен входить в химическое взаимодействие с желатиновым материалом;
- поверхность формы должна быть гладкой без раковин;
- форма должна легко освобождаться от залитой ее модели;
- форма должна быть прозрачной и не иметь начальных напряжений (остаточных);
- формы стенки должны быть тщательно смазаны машинным маслом для предотвращения трения между материалом формы и испытываемой модели.

После изготовления формы и полной полимеризации (отвердения) желатина проводились эксперименты.

Для исследования напряженного состояния в специально загрузочных приспособлениях были испытаны 3 вида желатиновых моделей, имеющие размеры: 140x50x5 мм, 130x50x5 мм, 120x50x5 мм. Модели подвергались действию внешних давлений.

**Методика исследований.** Для экспериментов нами был выбран материал желатин (с глицерином), близкий по физико-механическим свойствам к слабым грунтам и имеющий следующие характеристики (Кравченко Т.И., 2007):  $\varphi = 7^\circ$ ;  $c = 0,0025$  МПа;  $\gamma = 1,045$  т/м<sup>3</sup> и  $E = 3$  МПа. Материал прозрачен, оптически чувствительный. Это дает возможность применять его для изучения напряжений, вызываемых массовыми объемными силами. Было выполнено несколько серии испытаний моде-

лей с разной концентрацией желатина и воды, прежде чем модель в двух случаях была приближена по своим физико-механическим свойствам к слабой грунтовой среде. Испытуемый материал, характеризуется следующим составом (Кравченко Т.И.,2007):

первая модель: желатин – 50 г, вода – 500г;

вторая модель: желатин – 50 г; вода – 250 г.

Определение прочностных характеристик проб моделей проводили методом прямого сдвига на сдвиговом приборе с пневматическим нагружением ИСПА - 40/35, входящего в состав АСИС (автоматизированной системы для инженерно - строительных изысканий).

Испытание в первом случае выполнены при следующих значениях нормальных и касательных напряжений (Кравченко Т.И.,2007):

$$\sigma_1 = 0,1 \text{ МПа} , \quad \tau = 0,015 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0,2 \text{ МПа} , \quad \tau = 0,03 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 0,3 \text{ МПа} , \quad \tau = 0,04 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0,4 \text{ МПа} , \quad \tau = 0,04 \text{ МПа}.$$

Графически результаты сдвиговых испытаний для первой модели представлены на рис. 4.5.

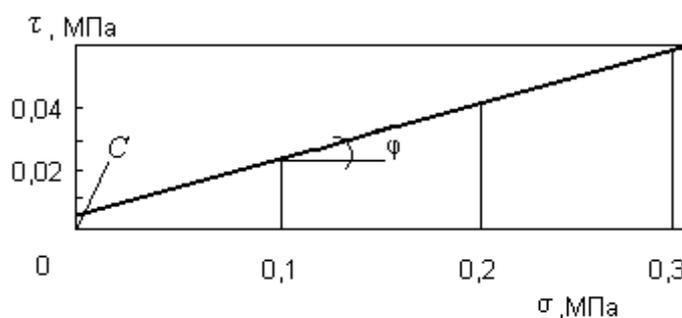


Рис. 4.5. Результаты сдвиговых испытаний образцов первой модели

Прочностные характеристики материала образцов, полученные испытанием на сдвиг для первой модели равны (Кравченко Т.И.,2007):  $c = 0,025 \text{ МПа}$ ;  $\varphi = 7^\circ$ ;  $f = \text{tg } \varphi = 0,12278$ .

Испытания для второй модели выполнялись при следующих значениях нормальных и касательных напряжений (Кравченко Т.И.,2007):

$$\sigma_1 = 0,1 \text{ МПа} , \quad \tau = 0,025 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0,2 \text{ МПа} , \quad \tau = 0,04 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 0,3 \text{ МПа} , \quad \tau = 0,06 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0,4 \text{ МПа} , \quad \tau = 0,08 \text{ МПа}.$$

Графические результаты сдвиговых испытаний во втором случае представлены на рис. 4.6.

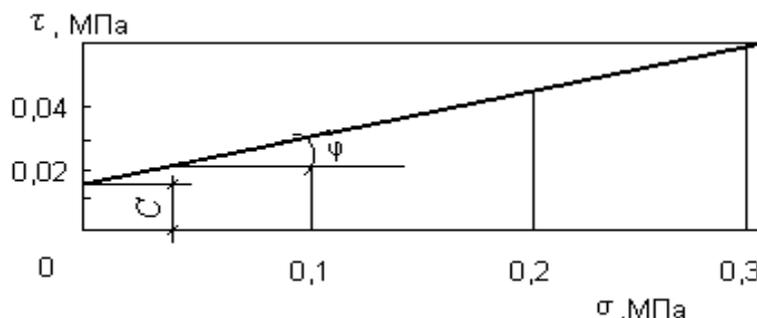


Рис. 4.6. Результаты сдвиговых испытаний образцов второй модели

Прочностные характеристики материала, полученные испытанием на сдвиг во второй случае:  $c = 0,013$  МПа;  $\varphi = 9^\circ$ ;  $f = \operatorname{tg} \varphi = 0,1584$ .

При испытаниях в образцах первой модели в соответствии с диаграммой Мора соблюдалось допредельное устойчивое напряжённое состояние, отвечающее условию

$$\tau \leq \operatorname{tg} \varphi + c \text{ или } \tau \leq \sigma f + c, \quad (4.9)$$

где постоянные  $f = \operatorname{tg} \varphi$  и  $c$  – коэффициент внутреннего трения и коэффициент сцепления. Во втором случае в моделях происходило нарушение прочности среды, что соответствовало запредельному состоянию, которое отвечает условию

$$\tau \geq \operatorname{tg} \varphi + c \text{ или } \tau \geq \sigma f + c. \quad (4.10)$$

Для моделей этих же концентраций желатина были проведены исследования по определению коэффициента вязкости методом концентрического сдвига (Кравченко Т.И., 2007). В зазор между двумя концентрическими кольцами заливался исследуемый материал (желатин). Внешнее кольцо закреплялось неподвижно, а к внутреннему кольцу прикладывался заданный крутящий момент. При вращении внутреннего кольца каждая точка образца деформировалась путём простого сдвига. Траекториями напряжений максимальных сдвигов являлись концентрические окружности, а траектории главных напряжений образовывали два семейства логарифмических спиралей в виде

$$r = A e^{\varphi}, \quad (4.11)$$

где  $A$  – постоянный коэффициент интегрирования.

При этом главные напряжения равны по величине и противоположны по знаку. Величина максимальных касательных напряжений, возникающих под действием момента  $M = RF$ , определялась по формуле

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M}{2\pi r^2 d}, \quad (4.12)$$

где  $r$  – текущий радиус,  $d$  – толщина образца.

Оптическая чувствительность материала характеризуется ценой полосы

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\tau_{\text{макс}} d}{\delta} = \frac{M}{2\pi r^2 \delta}, \quad (4.13)$$

где  $\delta$  – оптическая разность хода.

С помощью установки для концентрического сдвига был определён коэффициент вязкости по формуле

$$\eta = \frac{MR(r_2^2 - r_1^2)}{2\pi dhr_1^2 r_2^2}. \quad (4.14)$$

Коэффициенты вязкости составили:

для концентрации материала желатина первой модели  $\eta = 73991,54$  Па·с;  
для концентрации материала желатина второй модели  $\eta = 287744,89$  Па·с.

После вышеуказанных исследований было выполнено следующее испытание образцов на вдавливание жёсткого пуансона в модель прямоугольной формы. Оно было проведено так же, как и в первом случае, путём нескольких серий испытаний, прежде чем модель в двух случаях была приближена по своим физическим свойствам к слабой грунтовой среде. Концентрация испытуемого материала составила:

в первой модели: желатин – 100 г, вода – 800 г;

во второй модели: желатин – 100 г, вода – 600 г.

Модели испытывались в плоском контейнере, нагрузка прилагалась ступенями. При вдавливании жёсткого пуансона в образец наблюдалась система полос в виде кругов, проходящих через граничные точки пуансона. Была получена система изоклинических линий, которые позволили построить сетку траекторий касательных напряжений (характеристики) для моделей. Величина касательных напряжений определялась ценой полосы материала и её порядком:

$$T = C_0 n, \quad (4.15)$$

где  $C_0 = F/2bn$  – цена полосы модели;  $n$  – порядок полос;  $b$  – ширина образца.

Полученные численные значения нормальных и касательных напряжений при заданных нагрузках в первом случае испытаний составили (Кравченко Т.И.,2007):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0,16 \text{ МПа}, & \tau &= 0,041 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0,33 \text{ МПа}, & \tau &= 0,065 \text{ МПа}; \\ \sigma_1 &= 0,58 \text{ МПа}, & \tau &= 0,1 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0,86 \text{ МПа}, & \tau &= 0,14 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Прочностные характеристики моделей были следующие:

$$\varphi = 8^\circ; f = \operatorname{tg} \varphi = 0,1405.$$

Испытания во втором случае при численных значениях нормальных и касательных напряжений (Кравченко Т.И.,2007):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0,24 \text{ МПа}, & \tau &= 0,053 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0,41 \text{ МПа}, & \tau &= 0,08 \text{ МПа}; \\ \sigma_1 &= 0,92 \text{ МПа}, & \tau &= 0,16 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 1,36 \text{ МПа}, & \tau &= 0,23 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Прочностные характеристики материала модели составили:

$$\varphi = 9^\circ; f = \operatorname{tg} \varphi = 0,1584.$$

Исследование моделей такой же концентрации с помощью метода шаровой пробы на специальном приборе дало возможность определить величину сил сцепления с учётом изменения их во времени. Сцепление материала после прохождения одного часа времени от начала загрузки определялось по формуле теории пластично – вязких сред (Кравченко Т.И.,2007):

$$c = 0,18P / \pi DS, \quad (4.16)$$

где  $D$  – диаметр шара;  $S$  – величина осадки материала за определённый промежуток времени;  $P$  – нагрузка.

Полученные численные значения сцепления были равны:

$$\begin{aligned}\text{для первой модели } c &= 0,019 \text{ МПа}; \\ \text{для второй модели } c &= 0,015 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Коэффициент вязкости был определён по формуле (Фрохт Н.М., 1950)

$$\eta = \frac{\tau_{\max} a^3}{3V_0 \sqrt{(a^2 - y^2) + x^2 y^2}} \quad (4.17)$$

Коэффициенты вязкости по формуле (4.17) составили:

$$\begin{aligned}\text{для концентрации материала первой модели } \eta &= 115622,17 \text{ Па}\cdot\text{с}; \\ \text{для концентрации материала второй модели } \eta &= 279135,33 \text{ Па}\cdot\text{с}.\end{aligned}$$

Результаты испытаний моделей показали, что желатин можно использовать для изучения напряжённо-деформированного состояния определённых слабых грунтов.

Для дальнейших экспериментальных исследований были использованы модели, полные физические характеристики материала которых составили: для первой модели  $\varphi = 7^\circ$ ,  $c = 0,025$  МПа,  $\gamma = 1,045$  т/м<sup>3</sup> и  $E = 3$  МПа; для второй модели  $\varphi = 9^\circ$ ,  $c = 0,013$  МПа,  $\gamma = 1,015$  т/м<sup>3</sup> и  $E = 3,6$  МПа.

Грунты, имеющие физические характеристики близкие к характеристикам моделей, являются суглинистые илы, супеси и суглинки текучей консистенции.

Результаты тестовых исследований моделей грунтовых сред поляризации-оптическим методом показаны на рис. 4.7 - 4.12. На рис. 4.7 - 4.12 показаны эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{xz}$  при различных интенсивностях равномерно-распределённой нагрузки  $P$  и  $q$ . На рис. 4.10 - 4.12. приведены изострессы  $\tau_{\max}$  при различных интенсивностях равномерно-распределённой нагрузки  $P$  и  $q$ . Картина изостресс даёт наглядное представление зарождения и развития упруго-пластических деформаций под действием соответствующей внешней нагрузки.

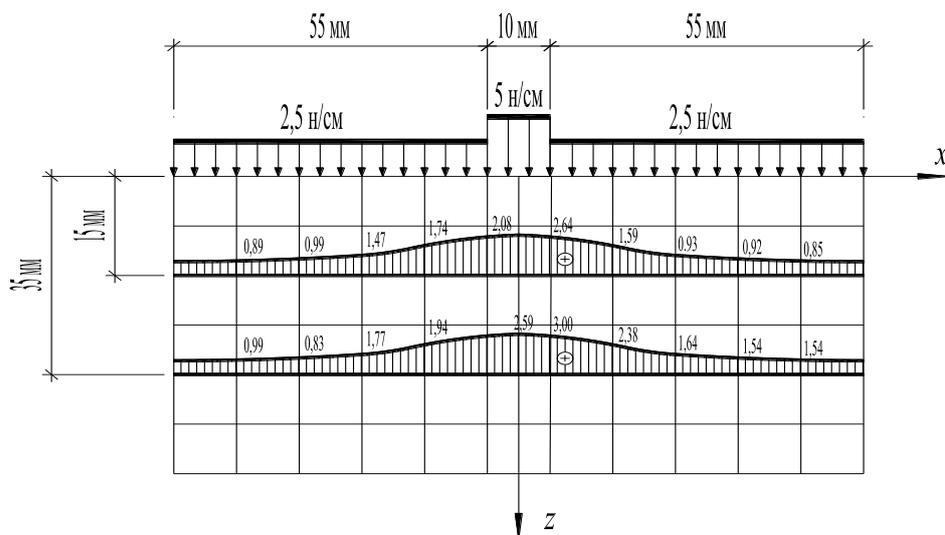


Рис. 4.7. Напряжение  $\sigma_x$  в горизонтальных сечениях модели основания фундамента

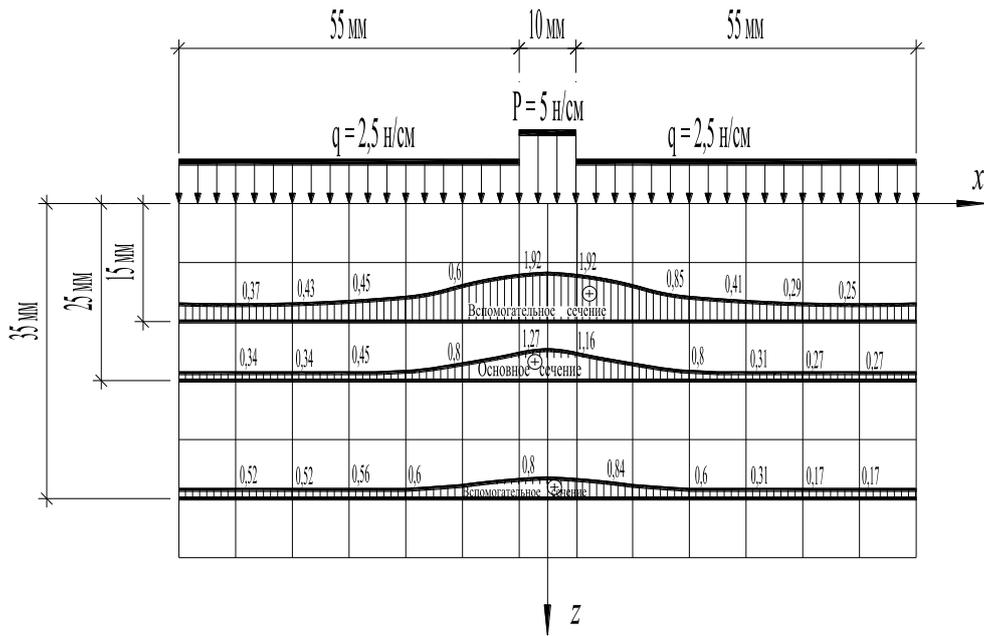


Рис. 4.8. Напряжение  $\sigma_z$  в горизонтальных сечениях модели основания фундамента

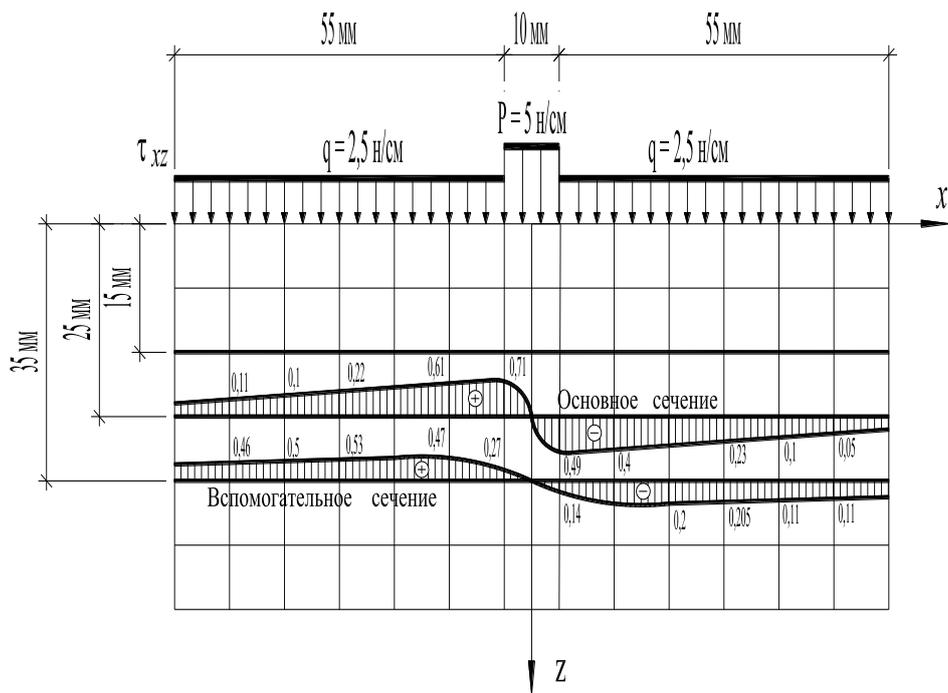


Рис. 4.9. Напряжение  $\tau_{xz}$  в горизонтальных сечениях модели основания фундамента

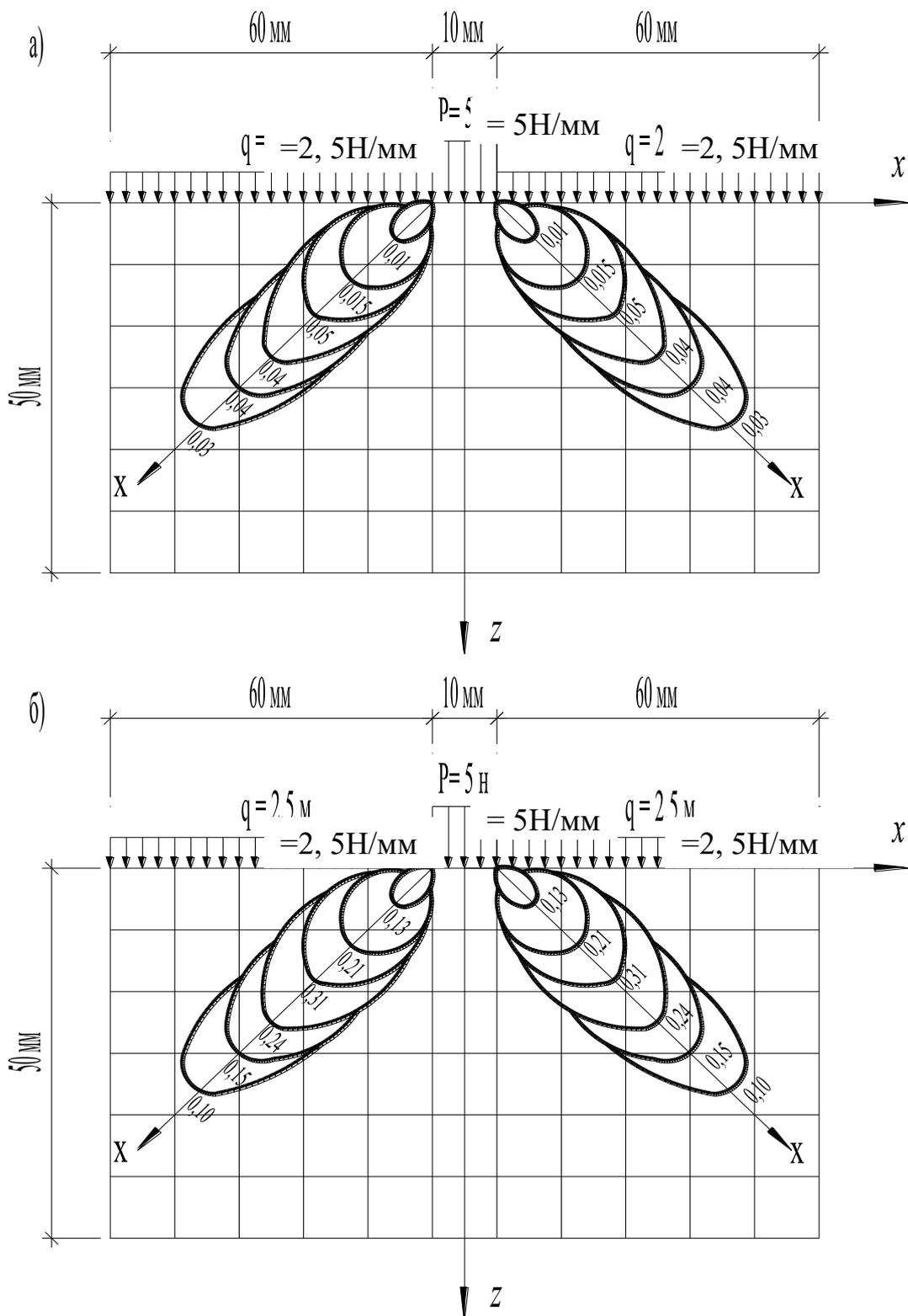


Рис. 4.10. Линии равных касательных напряжений в сечениях моделей основания фундамента:

а) для  $\tau_{\max}$ ; б) для  $\tau_{xz}$

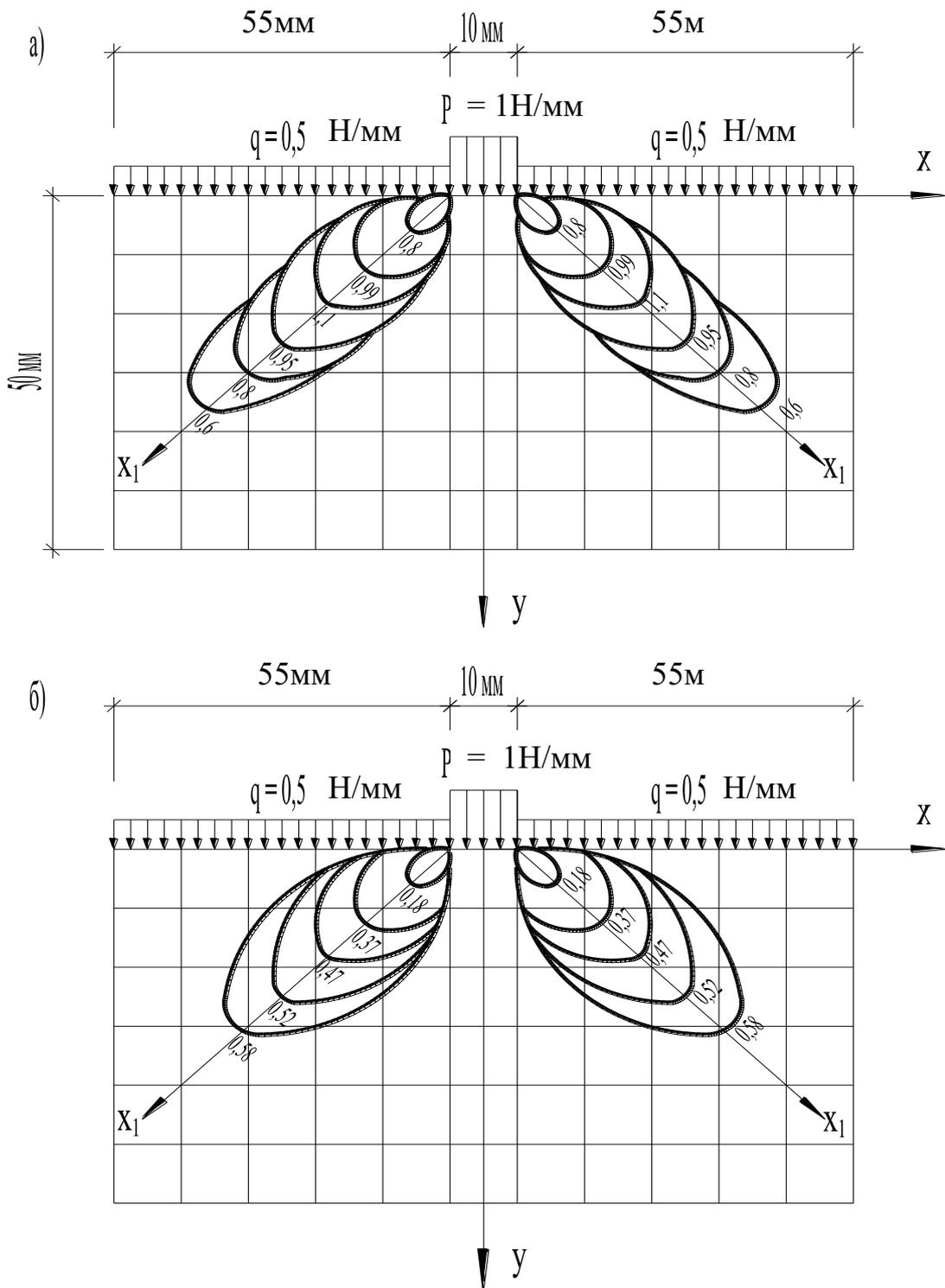


Рис. 4.11. Линии равных касательных напряжений в сечениях моделей основания фундамента:  
 а) для  $\tau_{\max}$ ; б) для  $\tau_{xz}$

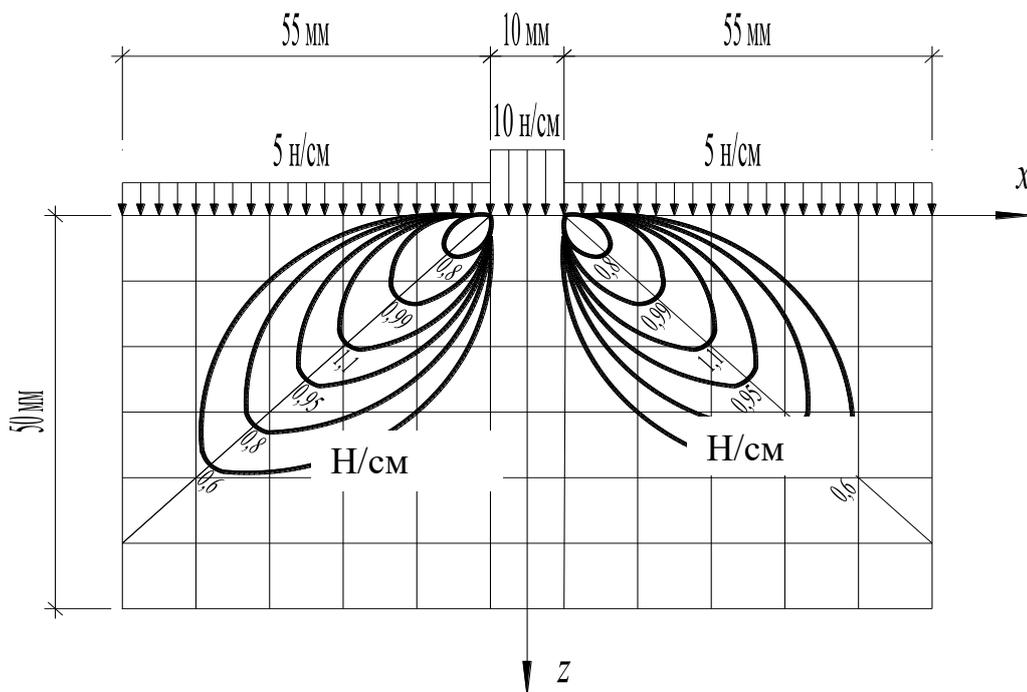


Рис. 4.12. Линии равных напряжений  $\tau_{\max}$  в различных сечениях модели основания фундамента

## 4.2. Радиоизотопный метод

**Определения плотности грунтовых сред гамма-методом.** В классических и современных теоретических исследованиях, относящихся к предельному равновесию грунтов, принято считать величины характеризующие сопротивление грунта сдвигу (угол внутреннего трения и удельного сцепления) для всего массива одинаковыми и постоянными. Вместе с тем, несущая способность, в значительной степени возрастает даже при небольшом увеличении прочностных характеристик грунта. Так, например, при возрастании угла внутреннего трения с  $35^\circ$  до  $40^\circ$  предельная нагрузка по (Соколовский В.В., 1969) увеличивается на 108%, а по (Березанцев В.Г., 1960) – на 122%.

Теоретические соображения и экспериментальные исследования показывают, что изменение пористости грунтов, а следовательно и массовая плотность их, закономерно связаны с существенным изменением угла внутреннего трения и удельного сцепления.

Действительно, в процессе деформации грунта под нагрузкой происходит изменение пористости в различных местах массива. В связных грунтах с увеличением нагрузки в них частично разрушаются внутренние связи, изменяется его плотность и параметры прочности. В несвязном грунте происходит изменение плотности и угла внутреннего трения. К моменту разрушения свойства грунтов отличаются от первоначальных. Следовательно, чтобы показатели прочности песчаных и глинистых грунтов соответствовали, необходимо знать характер распределения плотности перед началом и в момент разрушения грунтовых сред. Эту задачу можно решать радиоизотопным методом, т.е. методом гамма излучения.

Принцип метода гамма-излучений состоит в том, что интенсивность гамма-излучения при прохождении его через грунт уменьшается. Это уменьшение пропорционально общему количеству вещества на пути гамма-квантов. Обладая электромагнитной природой, гамма-излучение, проникая в вещество, взаимодействует с его электронами, ядрами и электрическим полем. Это взаимодействие носит вероятностный характер и может быть представлено в виде трех процессов: фотоэлектрическое поглощение (фотоэффект), комптоновское рассеяние (комpton-эффект) и процесс образования пары электрон-позитрон (Завельский Ф.С.,1969). При изменении плотности грунтов изучают гамма-кванты, энергия которых лежит в пределах от 0,1 до 3 МэВ, испускаемых большинством радиоизотопных источников.

Исследуемые грунты в основном состоят из элементов с легким и средними атомными весами. При пропускании через слои гамма-квантов с энергии 0,5-3 МэВ, ослабление интенсивности обусловлено комpton-эффектом. На атомах элементов с лёгкими и средними атомными весами фотоэлектрическое поглощение заметно сказывается лишь при энергии гамма-квантов меньше 0,3 МэВ, а образование пар электрон-позитрон начинается с энергии порядка свыше 3,0 МэВ (Лейпунский О.И.,1960; Штольский Э.В.,1951).

При прохождении гамма-квантов через вещество в зависимости от условий измерений различают геометрию узкого пучка (рис. 4.13) и геометрию широкого пучка (рис. 4.14). Геометрия узкого пучка представляет собой такие условия измерения, при которых в детектор попадают только гамма-кванты, проходящие через вещество без взаимодействия с ним. Для осуществления геометрии узкого пучка необходимо использовать кол-

лиметры, как для источника, так и для детектора, как это иллюстрируется схемой рис.4.13.

Рассмотрим прохождение гамма-квантов через слой грунта толщиной  $d$  в условиях геометрии узкого пучка (рис.4.13). Гамма-лучи, вышедшие из источника  $S$  в направлении детектора, попадают на поглотитель. Гамма-кванты могут либо пройти через вещество без взаимодействия с его электронами, либо испытать один из рассмотренных процессов. В первом случае они попадают в детектор 2 (путь  $a$ ). Во втором случае гамма-кванты либо поглощаются в результате фотоэффекта (путь  $\delta$ ), либо рассеиваются под некоторым углом в процессе комптон-эффекта (путь  $\epsilon$ ). Таким образом, рассеянные гамма-кванты не попадают в детектор 2. В детектор попадают лишь гамма-кванты, прошедшие через вещество без взаимодействия (путь  $a$ ).

Для геометрии узкого пучка ослабление гамма-квантов подчиняется экспоненциальному закону, который для случая измерения интенсивности излучения описывается уравнением:

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\mu_m \gamma_0 d}, \quad (4.18)$$

а для случая измерения плотности потока гамма-квантов уравнением

$$N = N_0 e^{-\mu_m \gamma_0 d} \quad \text{или} \quad \frac{N}{N_0} = e^{-\mu_m \gamma_0 d}, \quad (4.19)$$

где  $J$  – интенсивность  $\gamma$  – излучения, измеренная при помещении поглотителя толщиной  $d$  между источником и приемником излучения;

$J_0$  – интенсивность первичного гамма-излучения;  $N_0$  – плотность потока гамма-квантов, измеренная при отсутствии поглотителя;

$N$  – плотность потока гамма-квантов, измеренная при помещении поглотителя толщиной  $d$  между источником и приемником излучения;

$\mu_m$  – массовый коэффициент ослабления первичного излучения;  $\gamma_0 d$  (кг/см<sup>2</sup>) – массовая толщина поглощающего слоя или поверхностная плотность.

Как известно, интенсивность излучения гамма-квантов связана с плотностью потока гамма-квантов соотношением

$$J = NE. \quad (4.20)$$

В случае узкого пучка, когда в детектор попадает лишь гамма-кванты, не испытавшие рассеяния и, следовательно, сохранившие свою энергию  $E$ , интенсивность излучения гамма квантов равна плотности потока гамма-квантов.

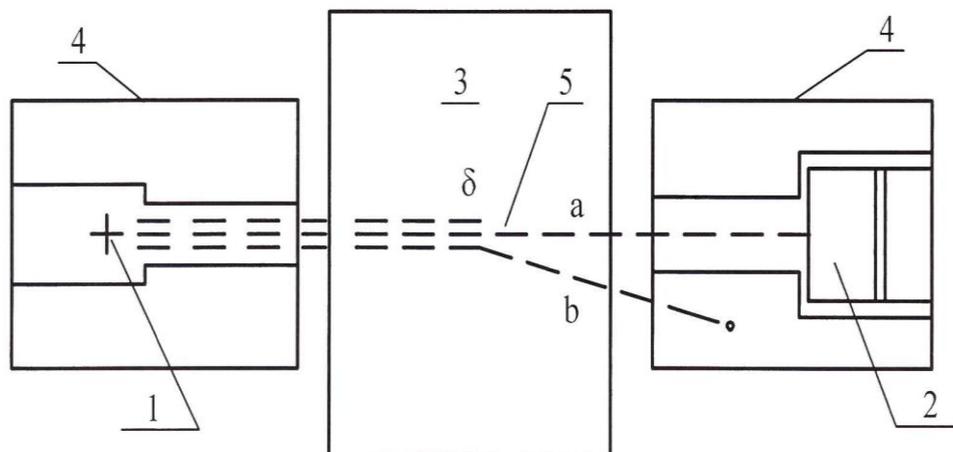


Рис. 4.13. Установка со свинцовыми коллиматорами для измерения плотности грунтов по ослаблению узкого пучка гамма-излучения  
 1-источник гамма-излучения; 2-детектор; 3- исследуемый грунт;  
 4-коллиматоры; 5-пучок гамма-излучения

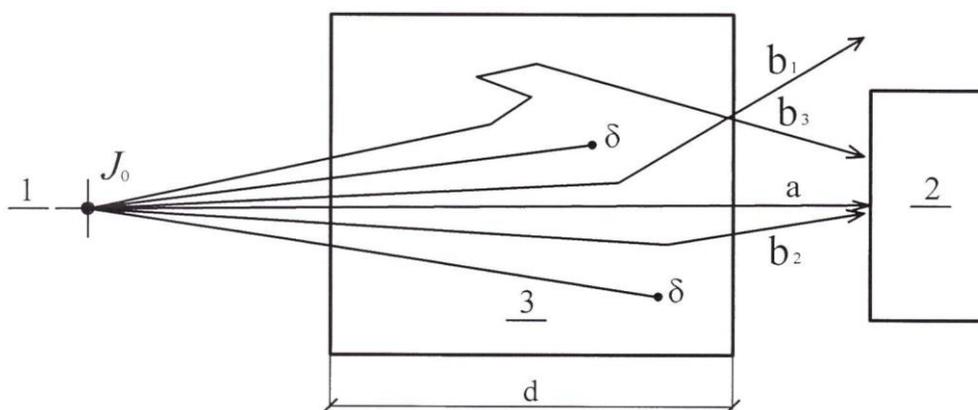


Рис. 4.14. Распространение гамма-квантов в условиях широкого пучка  
 1- источник гамма-излучения; 2- детектор; 3 - грунт.

При фиксированной толщине поглотителя  $d$  и известной величине массового коэффициента ослабления уравнения 4.18 и 4.19 позволяют определить плотность вещества по формуле:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\mu_m d} \ln \frac{N_0}{N} = \frac{2.302}{\mu_m d} \lg \frac{N_0}{N} . \quad (4.21)$$

Формула 4.21 справедлива для измерения плотности только однофазных сред. Для определения плотности среды, состоящей из нескольких компонентов, различающихся массовыми коэффициентами ослабления, закон параллельного пучка гамма-лучей запишется в виде:

$$N = N_0 e^{-\sum \mu_{mi} \gamma_{oi}} . \quad (4.22)$$

При определении плотности глинистых грунтов с различной влажностью, т.е. состоящих из твердой фазы и воды с разными массовыми коэффициентами ослабления, закон параллельного пучка гамма-квантов запишется в виде:

$$N = N_0 e^{-(\mu_m^{тв.ф} \gamma_0^{тв.ф} + \mu_m^в W_{в об})d} , \quad (4.23)$$

где  $\gamma_0^{тв.ф}$  – число граммов твердой фазы грунта в  $1 \text{ см}^3$  (объемный вес твердой фазы грунта);  $W_{в об}$  – число граммов воды в  $1 \text{ см}^3$  (объемная влажность, выраженная в  $\text{г/см}^3$ );  $\mu_m^{тв.ф}$  и  $\mu_m^в$  – массовые коэффициенты соответственно для грунта и воды.

Решая уравнение 4.23 относительные величин  $\gamma_0$ , получим формулу для вычисления плотности двухфазных сред:

$$\gamma_0 = \frac{\ln N_0 - \ln N}{\mu_m^{тв.ф} * d} - \frac{\mu_m^в - \mu_m^{тв.ф}}{\mu_m^{тв.ф}} W_{в} = \frac{2.302}{\mu_m^{тв.ф} * d} \lg \frac{N_0}{N} - \frac{\mu_m^в - \mu_m^{тв.ф}}{\mu_m^{тв.ф}} W_{в} . \quad (4.24)$$

Эта формула для определения плотности двухфазных сред используется в работах (Дубов К.А., 1988; Емельянов В.А., 1970).

В условиях геометрии узкого пучка спектр квантов, пришедших в детектор, такой же, как и спектр излучения источника. Кроме того, в условиях геометрии узкого пучка все гамма-кванты, попадающие в детектор, т.е. распространяются в одном направлении – по прямой, соединяющей источник с детектором. Необходимо отметить, что геометрия узкого пучка справедлива только для источника и детектора точечных размеров. Применяемые в исследованиях источники и детекторы имеют конечный размеры,

и поэтому в реальных условиях имеем дело в той или иной степени с геометрией широкого пучка. В общем случае схема геометрии широкого пучка представлена на рис. 4.14. В детектор могут попасть гамма – кванты, прошедшие поглотитель без рассеивания (путь  $a$ ), рассеянные на некоторый угол (путь  $b_2$ ), а также рассеяться два или более раз (путь  $b_3$ ). Часть гамма-квантов выйдя из поглотителя не попадают в детектор (путь  $b_1$ ). Некоторые кванты не попадают в детектор из-за поглощения их в веществе (путь  $\delta$ ). Задача о распространении гамма – квантов в условиях геометрии широкого пучка гораздо сложнее (Арцыбашев В.А.,1965). При ее решении возникает вопрос не только об интенсивности излучения, но и об спектральном составе и углах распространения. Эффект косых лучей обычно принято учитывать с помощью величин  $B$ , называемой фактором накопления (Арцыбашев В.А.,1965), тогда уравнение 4.18 примет вид:

$$J = J_0 B e^{-\mu_m \gamma_0 d}. \quad (4.25)$$

Возможность достижения геометрии узкого пучка определяются чисто техническими причинами: мощностью источника и чувствительностью детектора. Имея большую мощность источника гамма-излучения и чувствительные детекторы, можно работать при достаточно узких коллиматорах, но при этом возникают трудности с размерами защитных контейнеров, вес которых может составлять 1 тонну. Поэтому в реальных условиях измерения плотности грунта, идут на уменьшение мощности источника и, следовательно, для получения реального времени измерений на увеличение диаметра коллиматора. т.е. в реальных условиях, чем ближе величина  $B$  к единице, тем ближе фактическая геометрия измерений к геометрии узкого пучка.

Исследуемые глинистые грунты в основном состоят из элементов Si, Al, Fe, Mg, C, H, O и т.д. с легкими и средними атомными весами. Процент содержания этих элементов в глинистых грунтах зависит от вида грунта. Кроме того, эти грунты имеют различную влажность. При пропускании через них свои излучения изотопных источников энергией 0,5-3,0 МЭВ ослабление интенсивности обусловлено почти исключительно комптон-эффектом (Горшков Г.В.,1967; Арцыбашев В.А.,1965). Исходя из этого, плотность глинистых грунтов в условиях геометрии узкого пучка определяется по формуле 4.24.

В имеющейся литературе (Горшков Г.В.,1967; Арцыбашев В.А.,1965) обычно считается, что для сухих грунтов с различным химическим составом, также же как и для влажных грунтов можно практически использовать одни и те же усреднённые значение массового коэффициента ослабления.

**Зависимость массового коэффициента ослабления гамма-излучения грунтовых сред от их химического состава.** Для определения плотности грунтов с помощью метода гамма-излучения необходимо знание массового коэффициента ослабления. Величина массового коэффициента ослабления  $\mu_m$  зависит от состава грунтов. Расчёты массовых коэффициентов ослабления выполнены Ф. С. Завельским (Завельский Ф.С.,1969) для 75 типов почво-грунтов различного гранулометрического состава, генезиса и возраста. Он делает вывод о том, что всё многообразие грунтов по величины  $\mu_m$  в зависимости от энергии излучения можно разбить на три группы, которые приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1.

Массовые коэффициенты ослабления для различных типов почво-грунтов (Завельский Ф.С.,1969)

№ п/п	Энергия излучения, МЭВ	Глина с содержанием железа до 5%	Пески
1	0,66	0,0763±0,2%	0,0733±0,1%
2	1,00	0,0630±0,2%	0,0634±0,2%
3	1,25	0,0565±0,2%	0,0568±0,1%

Исследования Реджинато и Ван Ванела (Завельский Ф.С., 1969) показали, что для 9 типичных почво-грунтов США крайние значения массового коэффициента ослабления применительно к излучению 0,66 МЭВ составили 0,0772-0,0780 см<sup>2</sup>/г (расчёты выполнены для каждого типа почво-грунтов по 15 элементам, включая водород твердой фазы).

Исследования относились к простым объектам, т. е. состоящим только из данного вещества или смеси веществ с близкими массовыми коэффициентами ослабления (например, сухой грунт) и при незначительном проценте содержания железа в грунтах. Если же грунты состоят из смеси

веществ с различными коэффициентами ослабления (например, двухфазная система: твердая фаза грунта + вода), то уравнения, характеризующие ослабление интенсивности гамма-излучения, должны учитывать разницу коэффициентов ослабления для различных веществ и относительное содержание их в смеси.

Так, для воды массовый коэффициент ослабления при энергии гамма-излучения 0,5-1,5 МэВ на 11% больше, чем для твердой фазы почво-грунтов, и равен 0,036 для  $Cs^{137}$  и 0,063 для  $Co^{60}$  (Емельянов В.А., 1970).

При энергиях излучения 0,5-1,5 МэВ (в практике гаммаскопии обычно используют  $Cs^{137}$  и  $Co^{60}$ ) массовые коэффициенты ослабления, приведенные в таблице 4.2 для алюминия и железа меньше, чем для кислорода, кремния и кальция.

Таблица 4.2

Массовые коэффициенты ослабления гамма-излучения для ряда элементов и соединений (Арцыбашев В.А., 1965)

Энергия гамма-излучения, МэВ	$\mu_m, \text{см}^2/\text{г}$					
	O	Si	Al	Fe	C	Ca
0.5	0.0870	0.0872	0.0844	0.084	0.0870	0.0873
1.0	0.0636	0.0635	0.0614	0.0598	0.636	0.0637
1.5	0.0517	0.0518	0.0500	0.0484	0.0517	0.0521

Расчёты, выполнение В. А. Арцыбашевым (Арцыбашев В.А., 1965), показывают, что если применительно к твердой фазе грунтов пользоваться массовым коэффициентом для группы кремния (Si) и допускать погрешности измерений плотности грунтов (из-за варьирования химического состава) до  $\pm 0,5\%$ , то учёт концентрации отдельных элементов и влажности необходим лишь в тех случаях, когда они превышают величины, приведенные в таблице 4.3 при расчётах плотности можно не учитывать.

Таблица 4.3.

Максимальные концентрации элементов (Арцыбашев В.А., 1965)

Излучатель	Группы элементов, %			Излучатель	Группы элементов, %		
	Al	Fe	H <sub>2</sub> O		Al	Fe	H <sub>2</sub> O
$Cs^{137}$	15	10	5	$Co^{60}$	15	8	5

В таблице 4.4 приведены экспериментальные значения массовых коэффициентов ослабления для параллельного пучка гамма-квантов излучения при энергии 1, 25 МэВ для песков, суглинков и воды.

Таблица 4.4

Массовые коэффициенты ослабления для песков, суглинков и воды  
(Арцыбашев В.А., 1965).

№ пп	Массовый коэффициент ослабления, см <sup>2</sup> /г	Кто проводил опыты	Организация
1	0,0520	В.И. Верронский	МИСИ
2	0,0524	С.И. Носаль	НИИОСП
3	0,052±0,0005	Д.Е. Польшин, Ши Джун-Хен	НИИОСП
4	0,0522	А.И. Данилин	НИИ гидрометеорологического приборостроения
5	0,0510	К.В. Юрьев	ИФХ АН СССР
6	0,0512	Бернгар и Хасек	Англия
Среднее	0,05156		
7	Вода 0,0594	Д.Е. Польшин, Ши Чхун-Хен	НИИОСП

Значения массовых коэффициентов ослабления, приведенные в таблице 4.4, близко совпадают с их значениями для кислорода, кремния и кальция, т.е. для тех элементов, из которых в основном состоят пески и супеси. Поэтому для химических элементов с не очень большим порядковым номером массовые коэффициенты ослабления оказываются близкими. Исходя из этого, ряд исследователей принимают массовые коэффици-

енты ослабления для грунтов различного химического состава практически одинаковыми. Так, М.П. Беликов (Беликов М.П., Емельянов В.А., Нестеров В. Е., 1961) предлагает принимать при энергии излучения 1,25 МЭВ ( $\text{Co}^{60}$ ) для грунта  $\mu_{gp} = 0,057 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}$ , а для воды  $\mu_g = 0,063 \frac{\text{см}^2}{\text{г}}$ .

Сравнение теоретических и экспериментальных значений массовых коэффициентов ослабления, приведенных выше, показало, что расхождение между ними доходит до 10%, что значительно превышает точность метода. Это различие, по-видимому, объясняется только влиянием химического состава исследуемых грунтов и, в меньшей мере, погрешностью эксперимента.

Рассмотрим справедливость этого положения для глинистых и элювиальных грунтов. Вследствие различия свойств исходных материнских пород и неравномерности протекающих процессов выветривания глинистые элювиальные грунты характеризуются специфическими особенностями, резко отличающими их от всех остальных генетических видов грунта. Минералогический и химический состав элювиальных глинистых грунтов исследован недостаточно хорошо. Однако, имеющиеся данные, показывают, что большинство грунтов глинистого элювия характеризуются полиминеральным составом и значительной ролью гидрослюдистых минералов, занимающих по химическому составу и свойствам промежуточное положение, между глинистыми минералами и минералами коренных пород так и средних глинистых минералов.

Особенности генезиса элювиальных грунтов отражаются на всех свойствах этих грунтов, в том числе гранулометрическом составе, химическом составе и прочностных характеристиках. Имеющиеся данные о химическом составе элювиальных грунтов показали, что концентрация отдельных элементов или влажности не отвечает данным, приведенным в таблице 4.3. Рассмотрим ряд разновидностей глинистых элювиальных грунтов с числом пластичности от  $I_p = 0,09$  до  $I_p = 0,20$ , химический состав которых в оксидах и элементах приведен в таблицах 4.5 и 4.6.

Рассчитаем значения массовых коэффициентов ослабления для этих разновидностей грунтов. Вероятность комптоновского рассеивания гамма-квантов в  $1\text{см}^3$  вещества  $\mathcal{E}_k$ , представленного данным элементом, определяется произведением эффективного сечения рассеивания на одном электроном на количество электронов в этом объеме:

$$\mathcal{E}_k = \sigma_3 qz , \quad (4.26)$$

где  $\sigma_3$  – линейный коэффициент ослабления (соответствующий комpton-эффекту);  $q$  – количество атомов элемента в вещества в  $1 \text{ см}^3$ ;  $z$  – атомный номер элемента.

Количество атомов элемента в  $1 \text{ см}^3$  вещества равно  $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{A} \rho_{\text{эл}}$ , где  $A$  – атомный вес элемента и  $\rho_{\text{эл}}$  – плотность элемента, то на основе формулы вероятности комптоновского решения при  $\mathcal{E}_k = \mu_l$  можно написать:

$$\mu_l = \sigma_3 6,02 \cdot 10^{23} \rho_{\text{эл}} \frac{z}{A} . \quad (4.27)$$

Таким образом, влияние вариации химического состава грунтов на линейный коэффициент ослабления обуславливается эффективным (средневзвешенным) отношением  $\frac{z}{A}$ . Для водорода это отношение равно единице, а для остальных элементов, содержащихся в грунтах в значительных количествах, близко к 0,5.

Зависимость массового коэффициента ослабления от вариации концентрации элементов, за исключением водорода, определяется по формуле:

$$\mu_m = \sigma_3 6,02 \cdot 10^{23} \frac{z}{A} . \quad (4.28)$$

Используя атомные веса и массовые коэффициенты ослабления для элементов, входящих в глинистые грунты (табл. 4.5), по формулам 4.27 и 4.28 для изотопа  $\text{Co}^{60}$  с энергией излучения 1,25 МЭВ вычислены массовые коэффициенты ослабления для шести разновидностей глинистого грунта и приведены в табл. 4.6. Результаты исследований показали, что величина  $\mu_m$  лежит в пределах от  $\mu_m = 0,05487$  до  $\mu_{\text{зр}} = 0,05732$ . Расхождение между значениями  $\mu_m$ , приведёнными в табл. 4.6 от среднего значения равно от 2% до 3%, а между крайними значениями до 5%, что превышает точность метода гамма-излучения при измерении плотности грунтов.

Следовательно, при определении плотности грунтов величину  $\mu_{\text{зр}}$  можно принять постоянной и не зависящей от химического состава, если допустить точность измерений ниже 2-4%.

Следует отметить, что меньшее значение массового коэффициента ослабления соответствует суглинку с числом пластичности равным 8,8, и большее значение – его глине с числом пластичности равным 20,3. Как видно из рис. 4.15, зависимость величины  $\mu_m$  от числа пластичности для

шести разновидностей глинистых грунтов носит линейный характер. Зависимость величины  $\mu_m$  от числа пластичности грунтов, представлена на рис. 4.15, позволяет в ряде случаев не проводить кропотливых измерений массового коэффициента ослабления. В первом приближении значения  $\mu_m$  могут быть получены из графиков на рис. 4.15 в зависимости от числа пластичности исследуемых глинистых грунтов с близкими по химическому составу элементов приведена в таблице 4.7 и 4.8 (Дубов К.А.,1988).

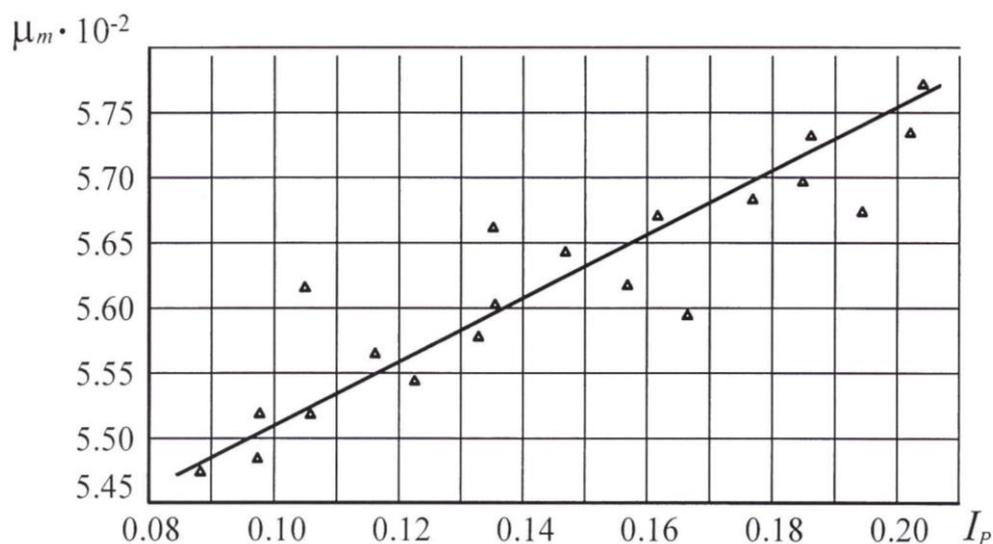


Рис. 4.15. Зависимость массового коэффициента ослабления гамма-излучения от числа пластичности глинистых грунтов.

Таким образом, из результатов исследования видно, что для получения плотности грунтов с высокой точностью с помощью метода гамма-излучений, необходимо для каждого исследуемого грунта определить свое значение  $\mu_m$ .

**Зависимость массового коэффициента ослабления гамма-излучения грунтовых сред от их влажности.** Глинистые грунты представляет собой трехфазную систему с разными массовыми коэффициентами ослабления. В дальнейшем газообразной фазой воздухом – из-за малой плотности, не влияющий на ослабление излучения, пренебрегаем (Арцыбашев В.А.,1965). Для глинистых двухфазных грунтов (твердых частиц + вода) с нарушенным строением имеет место лишь коагуляционные связи. В этом случае под влиянием нагрузки сжатие глинистого грунта будет происходить лишь при удалении воды из его пор, поскольку сжимаемостью воды можно пренебречь. Следствием этого будет уменьшение влажности и пористости в одних зонах и увеличение в других.

Таблица 4.5

Атомная масса и массовые коэффициенты ослабления элементов, входящих в глинистые грунты.

№ пп	Показатели	Si	Al	Fe	Ca	Mg	S	C	H	H <sub>2</sub> O
1	Аг, а.е.м.	28,1	26,98	55,85	40,08	24,32	32,07	12,01	16,0	-
2	$\mu_m$ , см <sup>2</sup> /г	0,0576	0,05595	0,054	0,0576	0,05695	0,0577	0,0577	0,0577	0,064

Таблица 4.6

Массовые коэффициенты ослабления глинистых грунтов в см<sup>2</sup>/г

Вид глинистого грунта	Глина	Суглинок	Суглинок	Суглинок	Суглинок	Глина	Суглинок
	$I_p = 0.18$	$I_p = 0.15$	$I_p = 0.09$	$I_p = 0.14$	$I_p = 0.20$	$I_p = 0.10$	
Способ определения							
Теоретическое определение	0,05681	0,05644	0,05487	0,05605	0,05732	0,05518	

Таблица 4.7

Содержание элементов в глинистых грунтах в %

Вид грунта	$W_L$	$W_p$	$I_p$	Si	Al	Fe	Ca	Mg	S	C	H	O <sub>2</sub>
Глина	49,4	31,6	17,8	22,8	10,7	10,56	2,28	1,55	0,108	-	1,05	60,66
Суглинок	43,4	28,6	14,8	26,95	10,53	8,90	0,74	0,72	0,792	-	1,48	51,313
Суглинок	33,7	24,9	8,8	36,3	3,20	2,94	1,48	1,655	0,365	-	0,8	51,352
Суглинок	40,8	27,2	13,6	26,8	5,40	5,70	6,30	2,04	0,365	1,00	1,19	51,273
Глина	51,5	31,2	20,3	21,2	12,2818	8,46	27,25	2,10	0,108	0,47	0,78	51,685
Суглинок	39,2	28,8	10,4	52,0	8,60	1,92	0,50	0,606	0,317	-	0,88	53,36

Таблица 4.8

Процентное содержание оксидов в глинистых грунтах

Вид грунта	$W_L$	$W_p$	$I_p$	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	S O <sub>3</sub>	C O <sub>2</sub>	CaCO <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> O
Глина	49.4	31.6	17.8	50.3	22.07	11.79	3.12	2.58	0.27	-	-	10.87
Суглинок	43.4	28.6	14.8	37.71	19.93	10.23	1.03	0.20	0.48	-	-	10.42
Суглинок	33.7	24.9	8.8	77.8	6.20	5.20	1.96	2.27	0.86	0.26	-	5.8
Суглинок	40.8	27.2	13.6	57.51	10.22	3.15	8.67	3.39	0.92	3.65	-	7.49
Глина	51.5	31.2	20.3	46.6	23.50	13.04	3.52	2.42	1.012	0.70	0.04	8.76
Суглинок	39.2	28.3	10.4	72.85	16.20	2.73	0.72	1.01	0.79	-	-	5.7

Рассмотрим сущность этого процесса. При сжатии начнется процесс перемещения частиц и окружающих их водных оболочек. Те молекулы воды, которые не находятся под влиянием сил молекулярного притяжения (свободная вода), будут отталкиваться в первую очередь, при этом со скоростью, зависящей от коэффициента фильтрации. При дальнейшем увеличении нагрузки произойдет трансформация физически связанной воды в свободную. Это обусловит дальнейшее уменьшение влажности грунта и толщины свободных оболочек вокруг его частиц. Изменение влажности грунтов может привести к изменению величины массовых коэффициентов ослабления, поскольку значения их меньше величины массового коэффициента ослабления для воды, равного  $\mu_s = 0,063$  для источника излучения  $Co^{60}$ .

Исследованиями, проведенными для кварцевых насыщенных водой песков и воды К. В. Юрьевым (Юрьев К. В., 1967) показано, что массовый коэффициент ослабления практически не зависит от влажности и не отличается от массового коэффициента ослабления гамма-квантов для воды.

Графики поглощения гамма – квантов, представленные на рис. 4.15, для глин и суглинков различной влажности и воды не совпадают друг с другом и с возрастанием поверхностной плотности расходятся. Действительно, если на пути пучка гамма-лучей все количество воды распределить в один слой, то толщина слоя при увеличении влажности будет все время возрастать, и поэтому массовый коэффициент ослабления для грунтов будет приближаться к его значению для воды.

Как показано на рис. 4.15, увеличение влажности грунтов приводит к изменению величины  $\mu_m$ . Причем эта разница составляет 1,5% при изменении влажности на 10% и 6% при изменении влажности на 40%.

Таким образом, не учитывать влияние влажности можно только в том, случае, если требует точность измерений плотности между 2-6%. Метод гамма-излучений позволяет получать большую точность измерений и поэтому при дальнейших исследованиях изменения плотности необходима методика учёта влажности грунтов. Оценим влияние влажности на величину массового коэффициента ослабления.

Массовые коэффициенты ослабления, приведенные в таблице 4.8, рассчитаны для глинистых грунтов, имеющих только кристаллизационную воду, которая прочно связана с кристаллической решеткой минералов. Рассмотрим влияние воды, находящейся в глинистых грунтах, или, иначе говоря, влажности на величину гамма – излучение. Для глинистых грунтов,

состоящих из твердой фазы и воды, величина массового коэффициента ослабления может быть определена по формуле:

$$\mu_m = \mu_m^{\text{ТВ.Ф}} \frac{\gamma_0^{\text{ТВ.Ф}}}{100} + \mu_m^{\text{В}} \frac{W_{\text{В}}}{100}, \quad (4.29)$$

где  $\mu_m^{\text{ТВ.Ф}}$  и  $\mu_m^{\text{В}}$  – массовый коэффициент ослабления соответственно для твердой фазы грунта и воды;  $\gamma_0^{\text{ТВ.Ф}}$  и  $W_{\text{В}}$  – число граммов в твердой фазы и воды в единице объема.

Массовые коэффициенты ослабления определялись теоретические по формуле 4.29 для шести разновидностей и экспериментально – для трех разновидностей глинистых грунтов и приведенные в таблице 4.9 и 4.10. В обоих случаях плотность принималась равной  $\gamma_0 = 1,8 \text{ г/см}^3$ , а влажность изменялась от нуля до 40% с интервалом 5% в каждом опыте. Экспериментально величина  $\mu_m$  определялось на радиоизотопной установке, приведенной в работе К.А. Дубова (Дубов К.А., 1988).

Анализ полученных данных позволяет сделать вывод о том, что с увеличением влажности значения массовых коэффициентов ослабления возрастают, приближаясь к значениям его для воды. Причём эти зависимости, представленные на рис. 4.16, носят линейный характер. Повышение влажности на 10% вызывает увеличение  $\mu_m$  в среднем на 1,5-2%.

Расхождение между значениями  $\mu_m$ , полученными теоретически и экспериментально равно 0, 5% лежит в пределах точности метода.

Примем массовый коэффициент ослабления для глинистых грунтов постоянным и не зависящим от влажности. Рассмотрим, какую погрешность несет это допущение при определении плотности глинистых грунтов. Если во второе слагаемое правой части уравнения 4.28 подставить значения  $\mu_m^{\text{ТВ.Ф}}$  из таблицы 4.6 и  $\mu_{\text{в}} = 0,063$  для энергии излучения  $\text{Co}^{60}$ , то формула 4.24 примет вид:

$$\gamma_0 = \frac{\ln N_0 - \ln N}{\mu_m^{\text{ТВ.Ф}} * d} - 0,12 W_{\text{об}}. \quad (4.30)$$

Следовательно, если разницу в значениях массовых коэффициентов ослабления для воды и твердой фазы грунта не учитывать, то плотность влажного грунта будет завышена на 0,12 величины объемной влажности; так, например, при объемной влажности, равной 50%, это составит 0,060 г/см<sup>3</sup>, т.е. 3,0-3,5% при плотности  $\gamma_0$  равной от 1,7 г/см<sup>3</sup> до 2 г/см<sup>3</sup>.

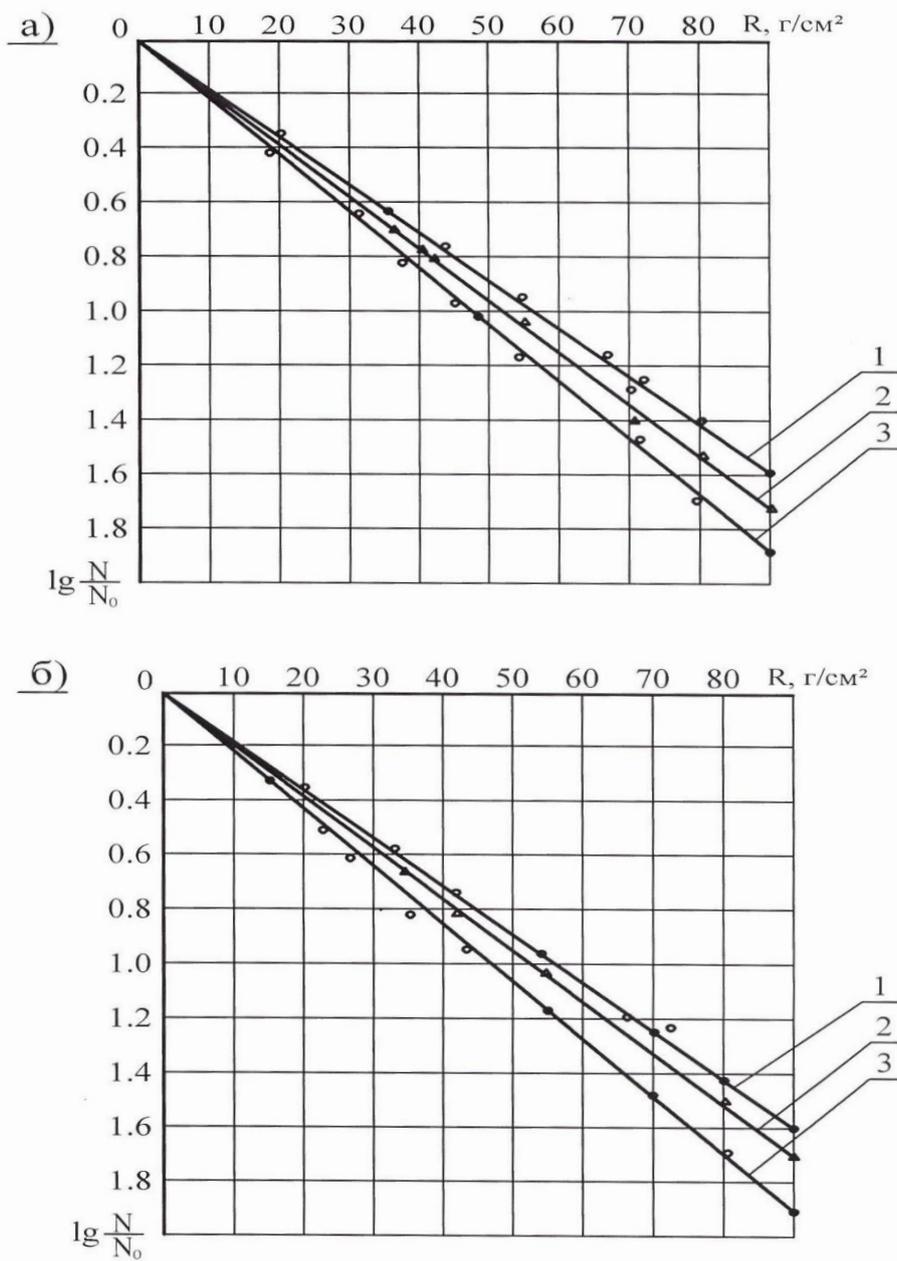


Рис. 4.16. Поглощение гамма-квантов излучения  $\text{Co}^{60}$  глинистым грунтом различной влажности и водой: а - глина  $I_p = 0,20$ ; б - суглинок  $I_p = 0,14$ ; 1 -  $W=0$ ; 2 -  $W=30\%$ ; 3 - вода

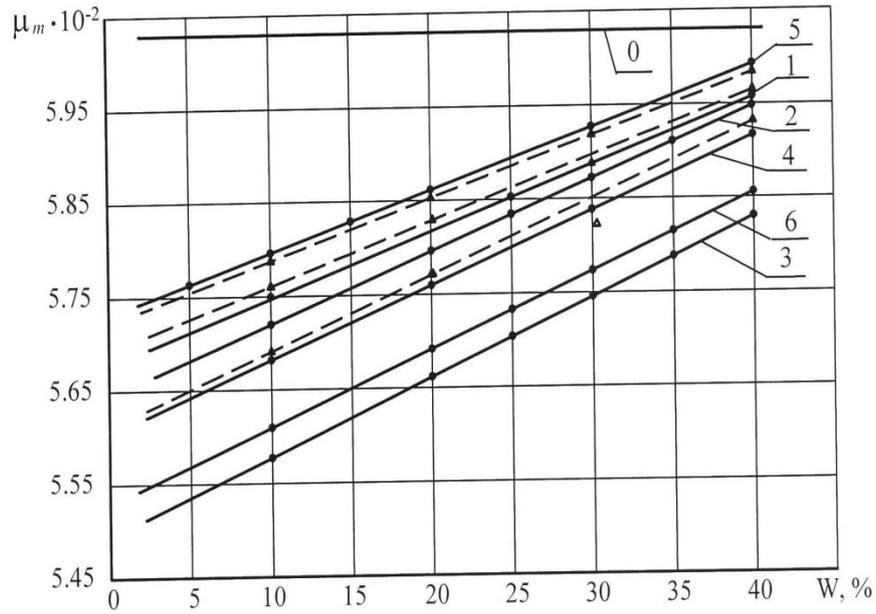


Рис. 4.17. Зависимость массового коэффициента ослабления гамма-излучения от влажности глинистых грунтов  
 о — расчет по формуле;  $\Delta$  — эксперимент;  
 0 - вода; 1 -  $I_p=0,18$ ; 2 -  $I_p=0,15$ ; 3 -  $I_p=0,9$ ; 4 -  $I_p=0,14$ ; 5 -  $I_p=0,20$ ;  
 6 -  $I_p=0,10$

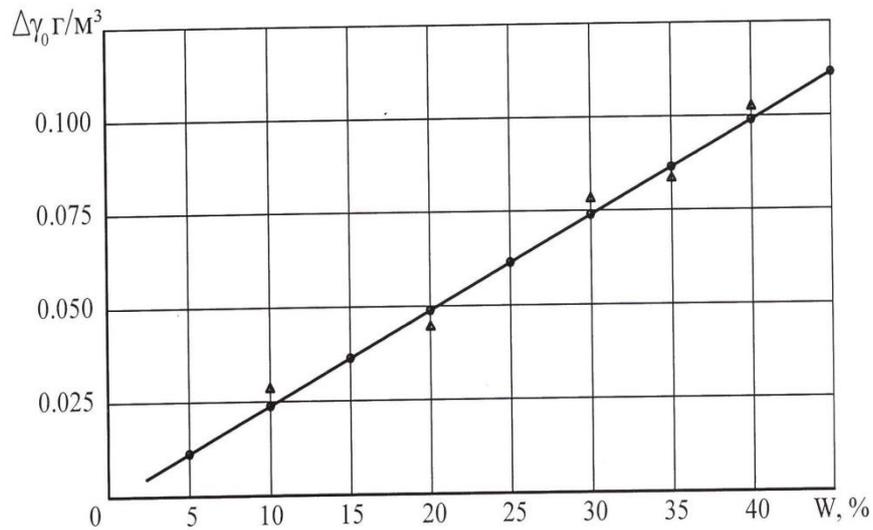


Рис. 4.18. Зависимость плотности глинистых грунтов от влажности  
 о — расчет по формуле;  $\Delta$  — эксперимент;

Таким образом, в приведенном интервале влажностей, принятом в данном исследовании, величина завышения плотности будет в 2.5-3.5 раза превышает точность метода гамма-излучений.

При исследовании нагруженного глинистого основания измерения влажности возможно только в начале и в конце эксперимента. При нагружении основания происходят изменение влажности, поэтому при исследовании грунтов возможны случаи, когда влажность грунтов не будет точно известна, т. е. будет завышена или занижена по сравнению с исходной.

Действительно, в нагруженном глинистом основании влажность грунта изменяется, а массовые коэффициенты поглощения принимаются постоянными, исходя из первоначальной влажности. Следует отметить, что при произведении наблюдений за динамикой изменения влажности с помощью метода гамма-излучение объемный вес твердой фазы не должен изменяться в течение всего периода наблюдений. В противном случае, результаты измерений влажности будут ошибочными. Поскольку объемный вес твердой фазы грунта в течение опыта изменялся, то в этом случае метод гамма-излучений не применим.

Рассмотрим погрешность, возникающую при измерении плотности методом гамма-излучений при возможном завышении влажности. Если плотность грунта принять постоянной при весовой влажности в пределах от 0 до 40%, полагая, что линейный коэффициент пропорционален плотности вещества, будет иметь:

$$\mu_{m_{i-1}} \gamma_{0_{i-1}} = \mu_{m_i} \gamma_{0_i}, \quad (4.31)$$

где  $i=1,2,3,\dots,n$  относится к различным значениям влажности. При известных величинах массового коэффициента ослабления, приведенных в таблице 4.9 и 4.10 и заданном объемном весе, фактический объемный вес при любой влажности может быть определен по формуле

$$\gamma_0 = \frac{\mu_{m_{i-1}}}{\mu_{m_i}} \gamma_{0_{i-1}}. \quad (4.32)$$

На рис. 4.17 представлены графики зависимости занижение плотности от влажности. Из графиков видно, что увеличение влажности приводит к снижению плотности грунтов и наоборот, а изменение влажности приводит к повышению плотности.

Результаты исследований сжимаемости глин в различных зонах нагруженного основания показывают, что влажность в зоне под штампом может уменьшаться до 12% по сравнению с первоначальной, что приводит

к ошибке в определении плотности на 1, 5-2, 5%. Эта величина погрешности превышает точность метода гамма-излучений.

Аналогичные результаты получены при экспериментальном определении величины плотности для 3-х разновидностей глинистого грунта (Дубов К.А. и др.,1988).

Таким образом, измеряя влажность грунтов до нагружения и после нагружения ( $\Delta W = 10 - 12\%$ ) и интерполируя эти значения на промежуточные нагрузки, ошибку в определении величины  $\mu_m$  равную 1,5-2, 5% для  $W=10-12\%$ , можно уменьшить вдвое, т. е. до значений, лежащих в пределах точности метода.

**Оценка погрешности и чувствительности метода гамма-излучения.** При измерении плотности глинистых грунтов в узком параллельном пучке моноэнергетических гамма-лучей источниками систематических ошибок являются статистические ошибки при измерениях радиоактивности, неточности определение поправки на неполную коллимацию и величины массовый коэффициент ослабления, а также погрешностей при определении толщины измеряемого слоя грунта.

При измерении величины, пропорциональной числу распадающихся атомов, например, числа испускаемых гамма-квантов, ошибка отдельного наблюдения пропорциональна корню квадратному из средней скорости счета и обратно пропорционально корню квадратному из продолжительности наблюдения. При измерении радиоактивности из наблюдаемой величины вычитают, так называемый, фон. Тогда суммарная ошибка будет равна корню квадратному из суммы квадратов ошибок отдельных наблюдений. Согласно теории ошибок, относительная ошибка скорости счета гамма-излучения равна:

$$\sigma_N = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{N}{t} + \frac{N_\phi}{t_\phi}}, \quad (4.33)$$

где  $N$  – плотность потока гамма-квантов, измеренная при помещении поглотителя толщиной  $d$  между источником и приёмником излучения;

$N_\phi$  – плотность потока гамма-квантов естественного фона;

$t$  – время измерения плотности потока гамма-квантов;

$t_\phi$  – время измерения естественного фона;

$\sigma_N$  – относительная ошибка скорости счёта гамма-излучения.

Таблица 4.9

Теоретические значения величин массовых коэффициентов ослабления грунтов в зависимости от влажности

Вид грунта	Влажность, $W_0$ Число пластичности	0	10	20	25	30	35	40
Глина	$I_p = 0,19$	0,05681	0,05753	0,05824	0,05860	0,05897	0,05933	0,05969
Суглинок	$I_p = 0,14$	0,05644	0,05719	0,05795	0,05833	0,05871	0,05909	0,05947
Суглинок	$I_p = 0,09$	0,05487	0,05578	0,05670	0,05716	0,05761	0,05807	0,05852
Суглинок	$I_p = 0,14$	0,05605	0,05685	0,05764	0,05804	0,05844	0,05884	0,05923
Глина	$I_p = 0,20$	0,05732	0,05799	0,05866	0,05899	0,05992	0,05965	0,05999
Суглинок	$I_p = 0,10$	0,05518	0,05606	0,05694	0,057739	0,05783	0,05827	0,05871

Таблица 4.10.

Экспериментальные значения величин массовых коэффициентов ослабления глинистых грунтов в зависимости от влажности

Вид грунта	Влажность, $W_0$ Число пластичности	0	10	20	25	30	35	40
Глина	$I_p = 0,18$	0,05531	0,05764	0,05322	0,05856	0,05906	0,05926	0,05974
Суглинок	$I_p = 0,14$	0,05605	0,05694	0,05772	0,05300	0,05836	0,05893	0,05936
Глинок	$I_p = 0,20$	0,05732	0,05802	0,05859	0,05857	0,05945	0,05960	0,05994

Относительная ошибка измерения гамма – излучения увеличивается с возрастанием фона. Исследования показали, что при измерениях гамма–излучений колебания фона независимо от причин, определяющих величину фона, и подчиняется таким же статическим законам. Поэтому всегда возможно применение приведенных формул для расчета ошибки отдельного измерения. При колебании величины фона, несвязанной со случайными отклонениями от среднего, например, при перемещении вблизи прибора радиоактивных препаратов, работающих установок и т. д. с выделением заряженных частиц, не могут быть применены законы теории вероятности. Величина относительной ошибки скорости счёта гамма-излучения согласно (4.37) может быть представлено формулой.

$$\frac{\sigma N}{N} = \sqrt{\frac{N+2N_{\phi}}{tN^2}} . \quad (4.34)$$

Из последнего выражения видно влияние фона на точность измерений. Ошибка отдельного измерения при данной скорости счёта всегда обратно пропорциональна корню квадратному из продолжительности времени отсчёта. Поэтому для обеспечения требуемой точности при данных условиях измерения приходится выбирать надлежащую продолжительность измерения или задаваться требуемой точностью для подсчета времени измерения гамма- излучения.

Задавая статическую ошибку, равную 0, 5%, и решая уравнение (4.38) относительно величины  $t$ , получаем время, равное 300 сек., которое необходимо для измерения скорости счета импульсов (гамма – квантов) в точке измерения нагруженного глинистого основания. Источниками систематических ошибок при измерении в узком пучке плотности грунтов является неточности определения величины массового коэффициента ослабления гамма–излучения  $\mu_m$ . Дифференцируя формулу (4.21) по переменной плотности  $\mu_m$ , и приравнявая полученный дифференциал абсолютной величиной приращения плотности, можно определить приращение плотности.

Ошибка за счёт неточности определения массового коэффициента может быть вызвана, во-первых, небольшой разницей в коэффициентах для различных элементов и, во-вторых, плохой геометрией при измерениях, в результате чего частично регистрируются рассеянное излучение, а это приводит к уменьшению коэффициент ослабления.

Применение амплитудной дискриминации, а также исследование зависимости массового коэффициента ослабления глинистых грунтов по химическому составу и влажности, значительно снижает ошибки опреде-

ления массового коэффициента ослабления. Согласно экспериментальным исследованиям, величины массовых коэффициентов ослабления, приведенные в таблицах 4.9 и 4.10, находится с ошибкой до 0,5%. Случайные ошибки определения плотности грунтов связаны с ошибками измерения толщины слоя  $d$ , интенсивности гамма-излучения  $N_0$  и  $N$ .

Рассмотрим соотношение  $k = N_0 / N$ , называемое фактором накопления. Дифференцируя уравнение (4.21) по переменным  $d$  и  $k$ , определяя относительное приращение плотности, получим следующее выражение величины относительной ошибки

$$\frac{\Delta\gamma_0}{\Delta\gamma} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{1}{\ln k} * \frac{\Delta k}{k}, \quad (4.35)$$

где при известных значениях  $N_0$  и  $N$ , соответствующих им значениях  $k = 63-97$ , ошибка в определении плотности составляет 0,5%. Относительная погрешность измерения толщины слоя глинистого грунта составляет  $\frac{\Delta d}{d} < 0.001$  (0.1%).

Таким образом, анализ возможных источников ошибок показывает, что достигнутая нами суммарная относительная погрешность определения объемного веса не превышает 1,0-1,5%.

Чувствительность гамма-метода зависит от приращение интенсивности гамма – излучения  $\Delta N_0$  на единицу приращения плотности  $\Delta\gamma_0$ . Дифференцируя формулу (4.21), выражающую закон ослабления узкого пучка гамма-излучения, находим

$$\frac{\Delta N_0}{\Delta\gamma_0} = \mu_m d N, \quad (4.36)$$

где приращения  $\Delta N_0$  и  $\Delta\gamma_0$  взяты по абсолютной величине. Как следует из выражения (4.35), чувствительность тем выше, чем больше величина массового коэффициента ослабления узкого пучка гамма-излучение, толщины просвечиваемого слоя и величины интенсивности  $N$ .

Следовательно, регулирование чувствительности метода гамма – излучение возможно соответствующим выбором типа источника, интенсивности  $N$ , а также толщины слоя исследуемого грунта.

В данном исследовании регулирование чувствительности метода гамма – излучения осуществлялось выбором типа источника и величиной его активности, так как толщина слоя исследуемого глинистого грунта определяется законами теории подобия и необходимостью значительно уменьшить силы трения, возникающие на границе грунта и стен лотка.

Рассмотрим точность и чувствительность метода гамма-излучения по сравнению с методом режущих колец. Методом режущих колец отби-

рались образцы грунта на разных участках глинистого основания, где предварительно были проведены измерения плотности с помощью метода гамма-излучения. На основании экспериментальных данных, приведенных в таблице 4.11, можно прийти к выводу, что результат измерений плотности, полученные с помощью метода гамма – излучения, обладают большей сходимостью и меньшим разбросом, чем в методе режущих колец.

Таблица 4.11

Плотность глинистых грунтов во влажном состоянии по данным измерений методом гамма-излучений и режущих кольцами

№ п/п	Метод измерения	Метод гамма-излучения			Метод режущих колец		
		плотность г/см <sup>3</sup>	Среднеквадратичная ошибка		Плотность г/см <sup>3</sup>	Среднеквадратичная ошибка	
			$\Delta\gamma_0$ , г/см <sup>3</sup>	%		$\Delta\gamma_0$ , г/см <sup>3</sup>	%
1.	Зона под штампом	1,98	0,0043	0,25	2,00	0,0374	1,92
		1,99			1,94		
		1,98			1,92		
		1,983			1,953		
		1,84			0,005		
2.		1,85			1,86		
		1,86			1,82		
		1,85			1,816		
		1,76	0,0048	0,27	1,81	0,043	2,45
3.	Зона за пределами штампа	1,77			1,75		
		1,75			1,79		
		1,76			1,783		
		1,81	0,014	0,78	1,79	0,0392	2,16
		1,80			1,88		
		1,78			1,78		
		1,798			1,796		
4.							

По мнению В. И. Ферронского (Ферронский В. И., 1968), расхождение между гамма–синтронетрическим методом и методом режущих колец полностью обусловлено неточностью последнего метода.

Изложенное не оставляет сомнений в том, что точность и чувствительность метода гамма – излучений при изменении плотности при выборе источника  $Co^{60}$  активностью 11 мкюри выше, чем метода режущих колец.

Как показали исследование измерения плотности в полевых условиях, погрешности абсолютных гамма- измерений плотности грунтов меньше погрешностей определения ее объемно-весовыми способами. Столь малые погрешности абсолютного гамма-метода и его превосходная разрешающая способность позволяет измерять плотность грунтов с такой детализацией, которую не обеспечивают объемно-весовые способы. Из анализа данных следует, что практические погрешности гамма - метода можно характеризовать величиной, не превышающей  $\pm 0,03$  г/см<sup>3</sup>.

Таким образом, метод гамма-излучения по сравнению с другими объемно-весовыми способами позволяет исследовать изменение плотности грунтов в динамике. Кроме того, этот метод дает возможность сравнивать плотности массива грунта до деформации и в процессе деформации грунтовой среды.

## Глава 5. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

### 5.1. Метод конечных элементов (МКЭ)

МКЭ является средством решения широкого круга задач, описываемых дифференциальными уравнениями. При решении задач МКЭ расчётная область: грунтовый массив типа «фундамент-основание» или «сооружение-основание» и т.п., разбивается на некоторое число подобластей, называемых конечными элементами. Элементы могут быть одномерными, плоскими или пространственными фигурами, как правило, достаточно простой формы.

Например, при решении плоских задач обычно используются прямолинейные или криволинейные треугольники и четырёхугольники. В элементах выделяются точки, называемые узловыми точками или узлами. Узлы размещаются в вершинах элементов, но могут располагаться также на сторонах и внутри элементов.

Разбивка на элементы, или, как часто говорят, конечно-элементная дискретизация, не сопровождается механическим разделением области на отдельные части, а является только математическим приёмом, т.е. среда в процессе деформаций остаётся сплошной и непрерывной.

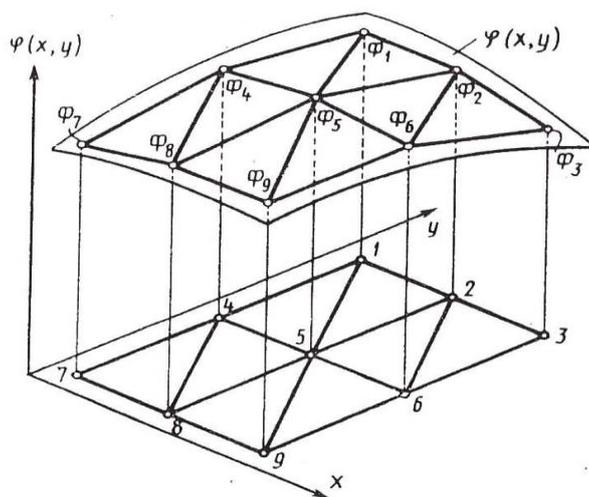


Рис. 5.1. Схема к построению конечно-элементных соотношений  
(плоская задача)

Рассмотрим основную идею МКЭ. Пусть имеется плоская расчётная область 1397, показанная на рис. 5.1, и требуется определить некоторую функцию  $\varphi(x,y)$ , непрерывно-изменяющуюся в пределах этой области. МКЭ позволяет найти приближённые значения этой функции в узлах. Искомая непрерывная функция  $\varphi(x,y)$  заменяется дискретной моделью – её значениями в узловых точках ( $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_9$ ). Закон изменения функции  $\varphi(x,y)$  в пределах элементов, можно задать в различной виде. Для этого непрерывная функция  $\varphi(x,y)$  аппроксимируется на каждом элементе полиномом некоторой степени (функцией элемента), определяемым через значения этой величины в узлах элемента. Тогда окончательной аппроксимацией непрерывной функции  $\varphi(x,y)$  будет служить совокупность кусочно-гладких поверхностей определённых на каждом элементе.

Наилучшее приближение к точному решению достигается минимизацией некоторого функционала, приводящей формулировку задачи к системе линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы позволяет определять приближённые значения искомой функции в узлах. Количество уравнений в системе, достигающее в практических задачах сотен и тысяч, зависит от числа узлов. Если искомая величина является скалярной, то количество уравнений равно числу узлов  $N$ , если векторной, то  $2N$  или  $3N$  соответственно для плоской или пространственной задачи.

В приложении к задачам механики грунтов одна из общепринятых формулировок МКЭ предполагает отыскание поля перемещений в некоторой области, вызванных силовыми воздействиями в виде матричного уравнения

$$[K] \{U\} = \{F\}, \quad (5.1)$$

где  $[K]$  – матрица жёсткости системы элементов;  
 $\{U\}$  – вектор компонент перемещений узловых точек;  
 $\{F\}$  – вектор компонент сил, приложенных в узлах.

Вектор  $\{F\}$  суммирует заданные воздействия от сосредоточенных, поверхностных и объёмных сил и таким образом может быть определён. Матрица жёсткости формируется с использованием соотношения

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \quad (5.2)$$

где  $k^{(e)}$  – матрица жёсткости элемента, и суммирование выполняется по специальным правилам для всей системы из  $E$  элементов. Матрица  $k^{(e)}$  для каждого элемента определяется его конфигурацией, задаваемой координатами узлов, и характеристиками деформационных свойств материала в пределах элемента.

Система линейных алгебраических уравнений (5.1) решается при заданных граничных условиях задачи. В результате решения определяются компоненты вектора перемещений  $\{U\}$ , после чего вычисляются относительные деформации и напряжения в каждом элементе:

$$\{\varepsilon^e\} = [B^e]\{U\}; \{\sigma^e\} = [D^e]\{\varepsilon^e\}, \quad (5.3)$$

где  $\{\varepsilon^e\}$  и  $\{\sigma^e\}$  – соответственно векторы компонент относительных деформаций и напряжений в элементе;  $[B^e]$  – матрица, определяемая через координаты узлов элемента;  $[D^e]$  – матрица деформационных характеристик материала элемента.

## 5.2. Приложение МКЭ в случае равномерно-распределённой нагрузки

В качестве примера применения МКЭ рассмотрим задачу при действии равномерно распределенной нагрузки  $P$  с дополнительной нагрузкой  $q$  вдоль оси  $Ox$ . Примем следующие исходные данные:  $P = 0,160$  МПа, ширина полосовой нагрузки  $b = 0,5$  м, угол внутреннего трения  $\varphi = 18^\circ$ , удельное сцепление  $c = 0,0324$  МПа, удельный вес грунта  $\gamma = 17,4$  кН/м<sup>3</sup>,  $P < P_{н.к} = 0,197$  МПа.

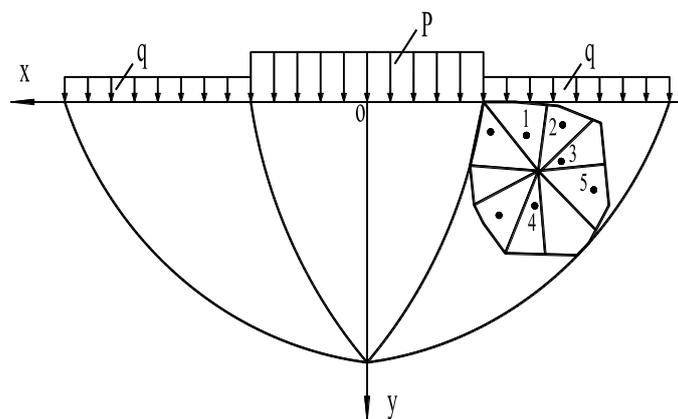


Рис. 5.2

Найдем координаты т.1. Координаты  $L_i$  ( $i = 1,2,3$ ) во всех узлах исследуемых треугольников известны. Используя формулы (Варданян Г.С., 1995), имеем:

$$L_1 = \frac{F_1}{F} = \frac{0,01}{0,02} = 0,5; \quad L_2 = \frac{0,0048}{0,02} = 0,24; \quad L_3 = \frac{0,0048}{0,02} = 0,24,$$

где  $F = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,02 \text{ м}^2; \quad F_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,01 \text{ м}^2;$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,24 \cdot 0,04 = 0,0048 \text{ м}^2;$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot 0,24 \cdot 0,04 = 0,0048 \text{ м}^2.$$

Отсюда  $x = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3 = 0,60,$

где  $L$  – координаты удовлетворяют условию:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 0,98 \approx 1,$$

$$y = 0,2 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,25 = 0,1,$$

отсюда координаты т.1:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0,6; \\ y = 0,1 \end{array} \right\} .$$

По такому же принципу находим координаты для всех других точек. Координаты точек будут следующие

$$\text{т.2 } (x = 0,8; y = 0,1), \quad \text{т.3 } (x = 0,7; y = 0,2),$$

$$\text{т.4 } (x = 0,6; y = 0,3) \quad \text{т.5 } (x = 0,8; y = 0,3).$$

Вычислим  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в каждой точке через матрицу жёсткости конечного элемента (5.2).

Рассмотрим 2 конечных элемента с точками 1 и 2 (рис. 5.3).

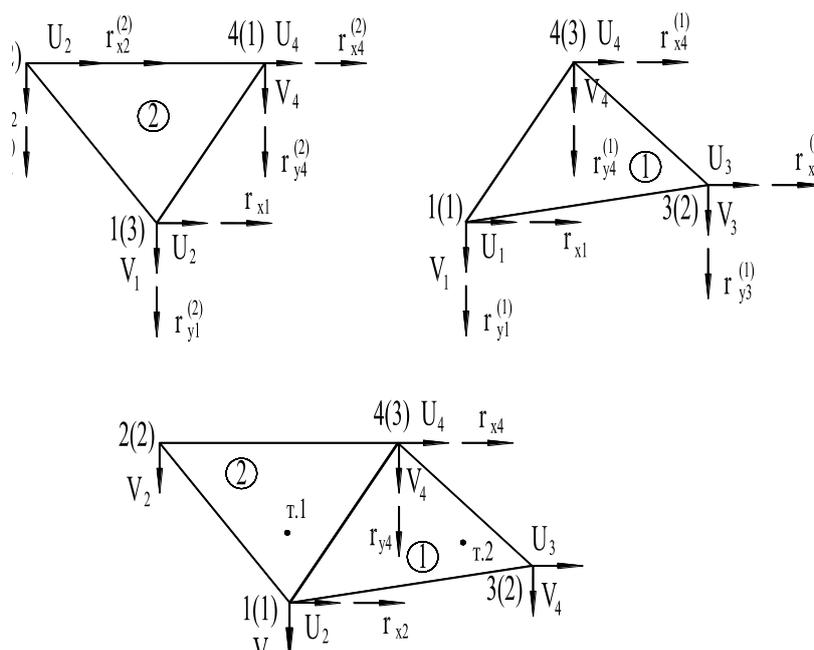


Рис. 5.3

Выпишем матрицу жесткости  $K^{(1)}$  для конечного элемента, учитывая что

$$\left. \begin{array}{l} x_{13} = -0,1; \\ x_{21} = -0,3; \\ x_{31} = 0,1; \\ x_{32} = 0,3 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} y_{12} = 0,2; \\ y_{23} = 0; \\ y_{31} = -0,2 \end{array} \right\}$$

Следовательно, матрица жесткости будет равна

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,09\alpha, & 0 & 0,03\alpha, & -0,06\alpha, & -0,09\alpha, & 0,06\alpha, \\ 0 & 0,09\alpha & -0,006\alpha, & -0,03\alpha & 0,06\alpha, & -0,09\alpha \\ 0,03\alpha, & -0,06\alpha, & \alpha(0,01\beta + 0,04) & 0,02\alpha, & \alpha(0,03\beta - 0,04) & \alpha(0,02\beta - 0,06\gamma), \\ -0,06\alpha, & -0,03\alpha, & 0,02\alpha, & \alpha(0,01 + 0,04\beta), & \alpha(-0,02\gamma + 0,06\beta), & \alpha(0,03 - 0,04)\beta \\ -0,09\alpha, & 0,06\alpha, & \alpha(0,03\beta - 0,04) & \alpha(-0,02\gamma + 0,06\beta), & \alpha(0,09\beta + 0,04) & -0,06\alpha, \\ 0,06\alpha, & -0,09\alpha & \alpha(-0,02\gamma + 0,06\beta), & \alpha(0,03 - 0,04\beta), & -0,06\alpha, & \alpha(0,09\beta + 0,04) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Усилия в узлах для конечных элементов 1 и 2 находим по формуле (Варданян Г.С., 1995):

$$\bar{r}(1) = (r_{x1}^{(1)}, r_{y1}^{(1)}, r_{x3}^{(1)}, r_{y3}^{(1)}, r_{x4}^{(1)}, r_{y3}^{(1)}) \quad (5.5)$$

и

$$\bar{r}(2) = (r_{x4}^{(2)}, r_{y4}^{(2)}, r_{x2}^{(2)}, r_{y2}^{(2)}, r_{x1}^{(2)}, r_{y1}^{(2)}) \quad (5.6)$$

Векторы перемещений найдем по формуле (Варданян Г.С., 1995):, они будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \bar{v}(1) &= (u_1, v_1, u_3, v_3, u_4, v_4)^T; \\ \bar{v}(2) &= (u_4, v_4, u_2, v_2, u_1, v_1)^T. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Прежде чем составить уравнения равновесия для узлов двух конечных элементов 1 и 2, найдем сжимающие усилия в 3-м и 4-м узлах. Найдем сжимающее усилие  $\sigma_y$  в 3-м узле по формуле (Соколовский В.В., 1969):

$$\sigma_{y3} = -0,159 \text{ МПа}.$$

$q$  найдем по формуле (Соколовский В.В., 1969):

$$q = P \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \exp(-\pi \operatorname{tg} \varphi) = 0,160 \frac{1 - \sin 18^\circ}{1 + \sin 18^\circ} \exp(-3,14 \operatorname{tg} 18^\circ), \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= \frac{m}{n} = \frac{1,9}{0,1} = 19 \rightarrow \theta_1 = 87^\circ; \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= \frac{m_1}{n_1} = \frac{0,4}{0,1} = 4 \rightarrow \theta_2 = 76^\circ. \end{aligned}$$

Найдем сжимающее напряжение  $\sigma_y$  в 4-м узле по формуле (Соколовский В.В., 1969):

$$\sigma_{y4} = -0,002 \text{ МПа},$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_1 &= 0 \rightarrow \theta_1 = 0; \\ \operatorname{tg} \theta_2 &= 0 \rightarrow \theta_2 = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $u_2=0$ ,  $u_1=0$ ,  $v_1=0$ ,  $u_3=0$ ,  $v_2=0$ ,  $u_4=0$ . Складываем выражения (5.10) и (5.11), получим

$$r_{y4}^{(1)} + r_{y4}^{(2)} = \sigma_{y4}. \quad (5.9)$$

Усилие в 3-м узле равно:

$$\sigma_{y3} = r_{y3}^{(1)} = \alpha(0,01 + 0,04\beta)v_3 + \alpha(0,03 + 0,04\beta)v_4. \quad (5.10)$$

Усилие в 4-м узле:

$$\alpha(0,03 - 0,04\beta)v_3 - \alpha(0,09 + 0,04\beta)v_4 - 0,09\alpha v_4 - 0,09\alpha v_3 = 2 \text{ кН/м}^2; \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} \alpha(0,03 - 0,04\beta)v_3 - \alpha(0,09 + 0,04\beta)v_4 - 0,09\alpha v_4 - 0,09\alpha v_3 = 2 \text{ кН/м}^2; \\ \alpha(0,01 + 0,04\beta)v_3 + \alpha(0,03 + 0,04\beta)v_4 = 159 \text{ кН/м}^2; \end{cases} \quad (5.12)$$

$$52818,2 \cdot (0,01 + 0,04 \cdot 0,65)v_3 + 52818,2 \cdot (0,03 + 0,04 \cdot 0,65)v_4 = 159; \quad (5.13)$$

$$1901,5v_3 + 2958v_4 = 159;$$

$$v_3 = \frac{159 - 2958v_4}{1901,5} = 0,084 - 1,6v_4; \quad (5.14)$$

$$52818,2 \cdot (0,09 + 0,04 \cdot 0,65)v_3 + 0,09 \cdot 52818,2v_4 - 0,09 \cdot 52818,2v_3 = 2,0;$$

$$514,7 - 9803,05v_4 - 4754v_4 - 1373v_4 - 4754v_4 - 399,3 + 7606v_4 = 2,0; \quad (5.15)$$

$$-3613v_4 = -115,4;$$

$$v_4 = 0,03 \text{ м};$$

$$v_3 = 0,084 - 1,6 \cdot 0,03 = -0,036 \text{ м}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} v_3 = 0,036 \text{ м}; \\ v_4 = 0,03 \text{ м}. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим узел 1 - й. Этот узел является общим узлом для обоих конечных элементов. По такому же принципу расчёта находим вертикальные перемещения в 1-м и во 2 - м узлах, т.е.

$$\begin{cases} v_1 = 0,004 \text{ м;} \\ v_2 = 0,038 \text{ м.} \end{cases}$$

Найдем растягивающиеся усилия в узлах т.1 и 2. Рассмотрим 1-й узел. Найдем растягивающиеся усилия в 1-м узле по формуле (Соколовский В.В., 1969) :

$$\sigma_{x1} = 115 \text{ кН/м}^2,$$

где

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1,1}{0,2} = 5,5 \rightarrow Q_1 = 80^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{0,6}{0,2} = 3 \rightarrow Q_2 = 72^\circ.$$

Внутренние усилия для 1-го узла равны:

$$\begin{aligned} r_{1x}^{(1)} &= 0,09\alpha\beta u_1 + 0,03\alpha\beta u_3 - 0,06\alpha\beta v_3 - 0,09\alpha\beta u_4 + 0,06\alpha\beta v_4; \\ r_{1x}^{(2)} &= 0,09\alpha\alpha u_4 + 0,06\alpha\nu v_4 + \alpha(0,03\beta - 0,04)u_2 + \\ &+ \alpha(-0,002\nu + 0,06\beta)v_4 + \alpha(0,09\beta + 0,04)u_1 - 0,06\alpha\gamma v_1. \end{aligned} \quad (5.16)$$

2-й узел принадлежит только конечному элементу 2. Усилия во 2-м узле равно:

$$\begin{aligned} r_{x2}^{(2)} &= 0,03\alpha\beta u_4 - 0,06\alpha\nu v_4 + \alpha(0,01\beta + 0,04)u_2 + 0,02\alpha\gamma v_2 + \\ &+ \alpha(0,03\beta - 0,04)u_1 + \alpha(-0,002\beta + 0,06\nu)v_1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Растягивающееся усилие во 2-м узле найдём по формуле (Соколовский В.В., 1969):

$$\begin{aligned} \sigma_{x2} &= 0,160 - \frac{1}{3,14} (0,160 - 0,0016)(3,14 - 0 + 0 - 0 + 0) = \\ &= 0,160 - 0,1584 = 0,0016 \text{ МПа} = 1,6 \text{ кН/м}^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Составим систему из усилий

$$\left. \begin{aligned} r_{x1}^{(1)} + r_{x2}^{(2)} &= \sigma_{x1}; \\ r_{x2} &= \sigma_{x2} \end{aligned} \right\}. \quad (5.19)$$

Учитывая, что  $v_1 = 0, v_2 = 0, u_4 = 0, u_3 = 0, v_3 = 0, u_4$  и  $v_4 = 0$ , следовательно

$$\alpha(0,01\beta + 0,04)u_2 + \alpha(0,03\beta - 0,04)u_1 = 1,6; \quad (5.20)$$

$$52818,2(0,01 \cdot 0,65 + 0,04)u_2 + 52818,2(0,03 \cdot 0,65 - 0,04)u_1 = 1,6;$$

$$2456u_2 - 1082,8u_1 = 1;$$

$$u_2 = \frac{1,6 + 1082,8u_1}{2456} = 0,0006 + 0,44u_1. \quad (5.21)$$

Подставим  $u_2$  в уравнение (5.30) найдём значения  $u_1$  и  $u_2$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0,03; \\ u_2 &= 0,0006 + 0,44 \cdot 0,03 = 0,014 \end{aligned} \right\}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0,03 \text{ м}; \\ u_2 &= 0,014 \text{ м} \end{aligned} \right\}$$

Горизонтальные перемещения в 3-м и 4-м узлах находим по такому же принципу расчёта, следовательно

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= 0,048 \text{ м}; \\ u_4 &= 0,037 \text{ м} \end{aligned} \right\}$$

Горизонтальные и вертикальные перемещения для узлов конечных элементов с т. 3, 4, 5 вычисляем по такому же принципу, следовательно:

$$\text{для треугольника с т. 3: } \left. \begin{aligned} v'_{4o\delta} &= 0,03 \text{ м}; \\ v'_{1o\delta} &= 0,014 \text{ м}; \\ v'_2 &= 0,02 \text{ м} \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} v'_{1o\delta} &= 0,03 \text{ м}; \\ v'_2 &= 0,1 \text{ м}; \\ v'_{4o\delta} &= 0,03 \text{ м} \end{aligned} \right\},$$

$$\text{для треугольника с т.4: } \left. \begin{aligned} v'_{4o\delta} &= 0,03 \text{ м}; \\ v'_{1o\delta} &= 0,014 \text{ м}; \\ v'_3 &= 0,02 \text{ м} \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} v'_{1o\delta} &= 0,03 \text{ м}; \\ v'_3 &= 0,1 \text{ м}; \\ v'_{4o\delta} &= 0,03 \text{ м} \end{aligned} \right\}.$$

Для каждого конечного элемента находим деформации перемещений по формулам (Варданян Г.С., 1995):

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{2F}(y_{23}u_1 + y_{31}u_2 + y_{12}u_3); \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{2F}(x_{32}v_1 + x_{13}v_2 + x_{21}v_3); \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{2F}(x_{32}u_1 + y_{32}v_1 + x_{13}u_2 + y_{31}v_2 + x_{21}u_3 + y_{12}v_3).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = 0,55; \\ \text{Для треугольника с т.1: } \varepsilon_y = 0,46; \\ \gamma_{xy} = 0,062 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = 0,36; \\ \text{для треугольник с т.2: } \varepsilon_y = 0,45; \\ \gamma_{xy} = 0,1 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = 0,23; \\ \text{для треугольника с т.3: } \varepsilon_y = 0,43; \\ \gamma_{xy} = 0,74 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = 0,23; \\ \text{для треугольника с т.4: } \varepsilon_y = 0,003; \\ \gamma_{xy} = 0,72 \end{array} \right\},$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = 0,013; \\ \text{для треугольника с т.5: } \varepsilon_y = 0,004; \\ \gamma_{xy} = 0,1 \end{array} \right\}.$$

Найдем напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в т. 1, 2, 3, 4, 5 по формулам (Варданян Г.С., 1995):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y), \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \end{array} \right\} \tag{5.23}$$

Найденные составляющие напряжения в упругой зоне сведем в таблицу 5.1.

Таблица 5.1.

Величина компонентов напряжения

№ точек	$\sigma_x$ , МПа	$\sigma_y$ , МПа	$\tau_{xy}$ , МПа
1	0,060	0,115	0,010
2	0,036	0,124	0,004
3	0,010	0, 115	0,020
4	0,059	0,100	0,001
5	0,150	0, 102	0,010

Результаты расчётов с использованием МКЭ приведены в Приложениях 2,3,4.

### 5.3. Метод итерации

Для решения, плоских задач методом итерации используется уравнение Лапласа (Варданян Г.С., 1995):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5.24)$$

где  $u$  – гармоническая функция в заданных точках.

Уравнение (5.24) основано на том, что значение функции  $u$  в любой точке (т.О) (рис. 5.4) области  $R$  должно удовлетворять общему уравнению (Варданян Г.С., 1995):

$$\left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bd} \right) u_0 = \frac{1}{a(a+c)} u_a + \frac{1}{b(b+d)} u_b + \frac{1}{c(c+a)} u_c + \frac{1}{d(d+b)} u_d, \quad (5.25)$$

где  $u_a, u_b, u_c, u_d$  – значения гармонической функции в четырех соседних точках  $A, B, C, D$ ;  $a, b, c, d$  – места расположения заданных точек на плоскости.

Уравнение (5.25) называется разностным уравнением для четырех точек. Общий метод решения этого уравнения заключается в нанесение на область  $R$  квадратной сетки со стороной квадрата  $h$  и в подборе таких

значений  $u$  в каждой точке пересечения линий сетки (в узловых точках), при которых они удовлетворяют уравнению (5.25). Расстояние между линиями сетки называется шагом. Точки  $A, B, C, D$  могут быть расположены как на линиях сетки, так и на линиях, наклоненных к сетке под углом  $45^\circ$ .

В первом случае вычисления ведутся по перекрестной схеме, во втором случае - по диагональной схеме. Большинство внутренних узловых точек равно удалены друг от друга. Для таких точек уравнение (5.25) принимает вид:

$$4u_o = u_a + u_b + u_c + u_d. \quad (5.26)$$

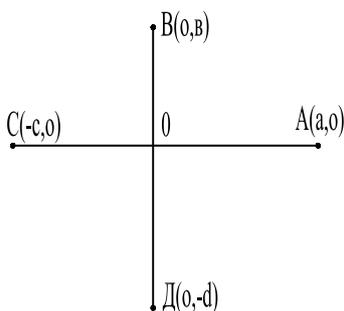


Рис. 5.4

Уравнение (5.26) называется формулой Либмана (Варданян Г.С., 1995).

Рассмотрим применение метода итерации на примере решения плоской задачи о напряженном состоянии основания при действии полосовой равномерно распределенной нагрузки  $P$  с пригрузкой  $q$  (рис. 5.5). Примем следующие исходные данные: ширина полосовой нагрузки  $b = 0,5$  м, угол внутреннего трения  $\varphi = 18^\circ$ , удельное сцепление  $c = 0,0324$  МПа, удельный вес грунта  $\gamma = 17,4$  кН/м<sup>3</sup>.

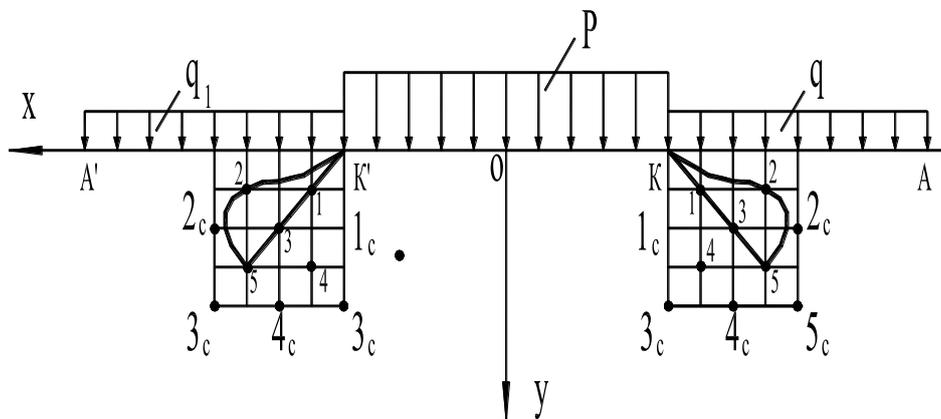


Рис. 5.5

Напряжения находим в узлах сетки с шагом 0,1 м, с общим размером поля по горизонтали (0,4 м) и по глубине (0,4 м) (рис. 5.5). Используя условия равновесия (Соколовский В.В., 1969), уравнение совместности деформации (Соколовский В.В., 1969) и соответствующие условия на контуре, решение задачи позволяет получить формулы для определения составляющих напряжений в точках 1с, 2с, 3с, 4с, и 5с при геометрических размерах  $OK=OK_1=0,5\text{ м}$ ,  $AK=A'K'=0,8\text{ м}$  по формулам (Малышев М.В., 2000).

Начальную критическую нагрузку  $P$  определим по формулам (Малышев М.В., 2000):

$$P_{\text{н.к}} = P_{\text{зар}} = \frac{(\gamma h + c \operatorname{ctg} \varphi) \pi}{\operatorname{ctg} \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} + \gamma h = \frac{3,14(0,0087 + 0,1)}{3,1 + 0,314 - 1,57} + 0,0087 = 0,197 \text{ МПа} , \quad (5.27)$$

где  $P_{\text{зар}}$  – нагрузка, при которой происходит зарождение зон пластических деформаций.

Находим напряжение и пригрузку  $q$  вдоль  $OK'$  и  $K'A'$  по формулам (Соколовский В.В., 1969):

$$\sigma = \frac{P_{\text{н.к}}}{1 + \sin \varphi} = \frac{0,197}{1 + 0,31} = 0,150 \text{ МПа} ;$$

$$q = P_{\text{н.к}} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \exp(-\pi \operatorname{ctg} \varphi) = 0,002 \text{ МПа} .$$

Значение среднего напряжения  $\sigma$  вдоль  $K'A'$  равно

$$\sigma = \frac{q}{1 + \sin \varphi} = \frac{0,002}{1,31} = 0,0015 \text{ МПа} .$$

Определим значения  $\sigma$  в точках 1с, 2с, 3с и 5с по формулам (Малышев М.В., 2000):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= P - 1/\pi(P - q)(\pi - Q_1 - 1/2 \sin 2Q_1 - Q_2 - 1/2 \sin 2Q_2) ; \\ \sigma_x &= P - 1/(P - q)(\pi - Q_1 + 1/2 \sin 2Q_1 - Q_2 + 1/2 \sin 2Q_2) ; \\ \tau_{xy} &= 1/(2\pi)(P - q)(\cos 2Q_1 - \cos 2Q_2) , \end{aligned} \right\} (5.28)$$

где  $Q_1 = \operatorname{tg} \frac{m}{n}$ ,  $Q_2 = \operatorname{tg} \frac{m}{n}$ .

Значение  $\sigma$  в точках 1с, 2с, 3с, 4с и 5с занесем в таблицу 5.2.

Таблица 5.2.

Величина компонентов напряжения

№ точек	$\sigma_x$ , МПа	$\sigma_y$ , МПа	$\tau_{xy}$ , МПа
1с	0,073	0,098	0,06
2с	0,122	0,193	0,01
3с	0,112	0,201	0,05
4с	0,054	0,143	0,03
5с	0,201	0,301	0,022

Найдем напряжения в точках 1, 2, 3, 4 и 5 для полного квадрата из уравнения Лапласа (5.26) по ключевым значениям. Для внутренних узловых точек, равноудаленных друг от друга, это уравнение имеет вид (5.26).

Составляем следующую систему уравнений, используя диагональный метод решения:

$$\left. \begin{aligned} 4\sigma_1 &= \sigma_{1c} + \sigma_p + \sigma_q + \sigma_3; \\ 4\sigma_3 &= \sigma_4 + \sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_3; \\ 4\sigma_5 &= \sigma_3 + \sigma_{5c} + \sigma_{3c} + \sigma_{2c} \end{aligned} \right\} , \quad (5.29)$$

$$\left. \begin{aligned} 4\sigma_2 &= \sigma_3 + \sigma_p + \sigma_q + \sigma_{2c}; \\ 4\sigma_3 &= \sigma_1 + \sigma_5 + \sigma_2 + \sigma_4; \\ 4\sigma_4 &= \sigma_3 + \sigma_{3c} + \sigma_{1c} + \sigma_{4c} \end{aligned} \right\} . \quad (5.30)$$

Решив эту систему, получим

$$\sigma_3 = \frac{(2\sigma_p + 2\sigma_q + 2\sigma_{1c} + 2\sigma_{4c} + 2\sigma_{2c} + \sigma_{3c} + \sigma_{4c})}{12} = 0,092 \text{ МПа}. \quad (5.31)$$

Подставляя значение 0,092 МПа в уравнения системы (5.29) и (5.30), находим значение характеристик для других точек, т.е.:

$$\sigma_1 = 0,05 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0,064 \text{ МПа}; \quad \sigma_4 = 0,109 \text{ МПа}; \quad \sigma_5 = 0,150 \text{ МПа}.$$

Разложим полученные напряжения на составляющие, используя формулы (5.28), находим по формуле  $\sigma_y = 2\sigma - \sigma_x$ .

Полученные составляющие напряжений в точках 1, 2, 3, 4, 5 занесены в таблицу 5.3.

Таблица 5.3.

Величина компонентов напряжения

№ точек	$\sigma_x$ , МПа	$\sigma_y$ , МПа	$\tau_{xy}$ , МПа
1	0,079	0,179	0,030
2	0,067	0,195	0,006
3	0,040	0,179	0,030
4	0,081	0,137	0,002
5	0,151	0,149	0,030

#### 5.4. Метод переменных параметров

Метод переменных параметров, разработанный И.А. Биргером (Варданян Г. С., 1995), так же как и метод упругих решений, является итерационным, но основан на другом представлении физических соотношений теории пластичности. В теории упругости компоненты девиаторов напряжений и деформаций связаны уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right); \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{yz}\right); \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{zx}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

По аналогии с этими соотношениями запишем физические соотношения теории пластичности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2G_c(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right); \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G_c(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{yz}\right); \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G_c(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{zx}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Здесь вместо модуля сдвига  $G$  введено значение  $G_c$ . Эта величина не является постоянной, а зависит от напряжений в данной точке тела.

Преобразуем первое равенство (5.33), выразив из него деформацию  $\varepsilon_x$  с учётом (5.32) и  $\varepsilon_0 = e/3$ ,  $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ .

Между объёмной деформацией  $e$  и средним напряжением  $\sigma_0$  существует линейная зависимость

$$e = \frac{\sigma_0}{K}. \quad (5.34)$$

Здесь  $K = \frac{E_0}{3(1-2\nu_0)}$  – модуль объёмной деформации, одинаковый в упругой и пластической зонах;  $E_0$  и  $\nu_0$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона, определяемые на начальном упругом этапе деформирования.

$$\varepsilon_x = \sigma_x \left( \frac{1}{E_c} + \frac{1-2\nu_0}{3E_0} \right) - (\sigma_x + \sigma_z) \cdot \left( \frac{1}{2E_c} - \frac{1-2\nu_0}{3E_0} \right). \quad (5.35)$$

Если ввести обозначения

$$\frac{1}{E_{II}} = \frac{1}{E_c} + \frac{1-2\nu_0}{3E_0}; \quad \nu_{II} = \frac{3E_{II}}{2E_c} - 1, \quad (5.36)$$

то выражение (5.35) можно записать в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_{II}} [\sigma_x - \nu_{II}(\sigma_y + \sigma_z)], \quad (5.37)$$

совпадающем по форме с уравнением закона Гука. По аналогии могут быть получены выражения и для остальных деформаций. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_{II}} [\sigma_x - \nu_{II}(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{3\tau_{xy}}{E_c}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_{II}} [\sigma_y - \nu_{II}(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{3\tau_{yz}}{E_c}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_{II}} [\sigma_z - \nu_{II}(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{3\tau_{zx}}{E_c} \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Равенства (5.38) отличаются от закона Гука тем, что содержат не постоянные упругости материала, а переменные параметры  $E_{II}$ ,  $\nu_{II}$ , которые в свою очередь зависят от секущего модуля, который определяется из уравнения (Варданян Г.С., 1995):

$$E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \text{ где } G_c = \frac{E_c}{3}. \quad (5.39)$$

Интенсивность напряжений определяется по формуле (Варданян Г.С., 1995):

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (5.40)$$

а  $\varepsilon_i$  – интенсивность деформации по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (5.41)$$

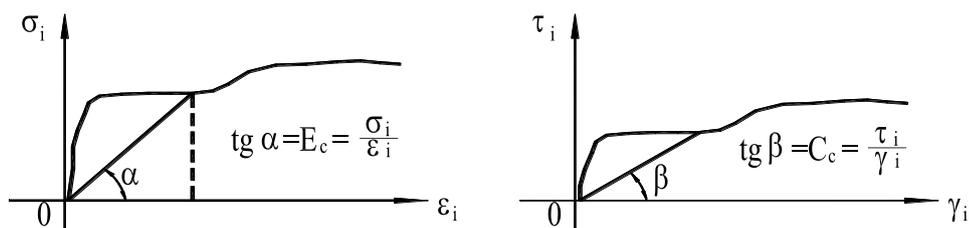


Рис. 5.6

Поскольку секущий модуль зависит от напряжений и деформаций в данной точке тела (рис. 5.6), то  $E_{II}$  и  $\nu_{II}$  являются функциями координат. Таким образом, равенство (5.38) как бы является физическими соотношениями теории упругости для неоднородного тела.  $E_{II}(x, y, z)$  и  $\nu_{II}(x, y, z)$  могут быть найдены лишь после решение задачи, т.е. по известным напряжениям и деформациям можно определить  $\sigma_i(x, y, z)$ ,  $\varepsilon_i(x, y, z)$  и затем  $E_{II}(x, y, z)$ ,  $\nu_{II}(x, y, z)$ .

Применяя для решения задачи МКЭ на первом этапе решаем упругую задачу, когда модуль упругости и коэффициент поперечной деформации считаются постоянными и равными соответственно  $E_{II}$  и  $\nu_{II}$ .

Вычислив напряжения и деформации, определяем  $\sigma_i^{(1)}$ ,  $\varepsilon_i^{(1)}$ , а следовательно  $E_c^{(1)} = \frac{\sigma_i^{(1)}}{\varepsilon_i^{(1)}}$ , в каждой точке тела. На втором этапе решаем задачу, в которой в качестве физических соотношений используем равенства (Варданян Г.С., 1995), содержащие  $E_c^{(1)}$ ,  $E_{II}^{(1)}$  и  $\nu_{II}^{(1)}$ .

Полученные таким образом решения позволяют вычислить  $E_c^{(2)}$ ,  $E_{II}^{(2)}$  и  $\nu_{II}^{(2)}$  и перейти к следующему приближению. Последовательность решений сходится к искомому решению задачи теории пластичности, путем проверки каждого решения, т. е. полученных напряжения на условия предельного равновесия (Цытович Н.А., 1983):

$$\frac{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yz}}{(\sigma_z + \sigma_y + 2cctg\varphi)^2} = \sin^2 \varphi. \quad (5.42)$$

По найденным значениям напряжения и деформаций, полученных методом конечных элементов для каждой точки среды, определяется интенсивность напряжений и деформаций по формулам  $\sigma_i(x, y, z)$  и  $\varepsilon_i(x, y, z)$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (5.43)$$

и

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (5.44)$$

И затем определяем по формулам  $E_{II}(x, y, z)$  и  $\nu_{II}(x, y, z)$  (Варданян Г.С., 1995):

$$\frac{1}{E_{II}} = \frac{1}{E_C} + \frac{1 - 2\nu_0}{3E_0}; \quad \nu_{II} = \frac{3E_{II}}{2E_C} - 1, \quad (5.45)$$

где  $E_c^{(1)} = \frac{\sigma_i^{(1)}}{\varepsilon_i^{(1)}}$  в каждой точке среды.

Найденные значения  $E_{II}$ ,  $\nu_{II}$  и найденные значения напряжений и деформаций по МКЭ подставляем в известные формулы (5.44) и (5.45). По вычисленным заново деформациям определяем напряжения в каждой точке тела по такому же методу, как и в первом приближении. Полученные значения напряжений заносим в таблицу 5.4.

Таблица 5.4.

## Величина компонентов напряжения

№ точек	$\sigma_y$ , МПа	$\sigma_z$ , МПа	$\tau_{xy}$ , МПа
1	0,078	0,180	0,030
2	0,064	0,193	0,006
3	0,040	0,176	0,030
4	0,080	0,135	0,002
5	0,149	0,147	0,030

Исследование напряжённого состояния численными методами при упругопластической реакции среды показало усложнение картин распределения напряжений, при которой происходит появление областей развития пластических деформаций на определённых глубинах полупространства, соответствующему условию:  $P_{\text{расч}} < P_{\text{кр}} < R$ , т. е. нарушение предельного состояния не наблюдается.

Ответ на вопрос о том, какой из трёх рассмотренных численных методов является более эффективным, получен при решении конкретных задач. Из результатов решения следует (табл. 5.1,5.3,5.4), что хорошей сходимостью являются решения, полученные методом теории итерации и методом переменных параметров упругости. Метод конечных элементов показал неудовлетворительный результат.

## Глава 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ

### 6.1. Теоретические основы определения несущей способности

Одной из основных задач, рассматриваемой в теории предельного равновесия, является задача о несущей способности оснований. Теория предельного равновесия была сформулирована применительно к плоской задаче.

Компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  определяются из решения следующей системы уравнения

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (6.1)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2 c \operatorname{ctg} \varphi)^2 \sin^2 \varphi = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_c)^2 \sin^2 \varphi, \quad (6.2)$$

где  $\gamma$  – удельный вес грунтовой среды;  $\varphi$  – угол между направлением  $\sigma_{\max}$  и осью  $x$ ;  $\sigma_c$  – давление связности.

Простейшее решение системы уравнений (6.1) - (6.2) было получено для случая  $\tau_{xy} = 0$ . В этом случае система уравнений линейруется относительно напряжений. Это решение принадлежит У. Ренкину (Леденев В.В. и др., 2013). В.В. Соколовским был предложен метод интегрирования и предварительных преобразований (Соколовский В.В., 1969), основанный на предложениях (Христианович С.А., 1977). Тогда компоненты напряжений будут определяться следующим образом (Березанцев В.Г., 1952):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2 \omega_1) - c \operatorname{ctg} \varphi; \\ \sigma_y &= \sigma (1 - \sin \varphi \cos 2 \omega_1) - c \operatorname{ctg} \varphi; \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \varphi \sin 2 \omega_1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Путем преобразования данной системы были получены две новые переменные  $\sigma$  и  $\omega_1$ , определяющиеся следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_x + \sigma_y) / 2 + c \operatorname{ctg} \varphi; \\ \operatorname{tg} 2 \omega_1 &= 2 \tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Введем новые переменные

$$\chi = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}; \quad \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \quad (6.5)$$

где  $\sigma_0$  – произвольная, выбранная заранее величина, имеющая размерность напряжения для того чтобы под знаком логарифма была безразмерная величина.

Используем еще одну подстановку:

$$\xi = \chi + \omega_1; \quad \eta = \chi - \omega_1. \quad (6.6)$$

В результате подстановки зависимости (6.3) и последовательных преобразований (Соколовский В.В., 1969), были получены дифференциальные уравнения гиперболического типа.

Первое семейство характеристик определяется уравнениями:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\omega_1 - \mu); \quad \frac{d\xi}{dx} = a_1. \quad (6.7)$$

Для второго семейства характеристик – уравнениями:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\omega_1 - \mu); \quad \frac{d\eta}{dx} = a_2. \quad (6.8)$$

Характеристики составляют углы с осью  $x$  либо  $(\omega_1 + \mu)$ , либо  $(\omega_1 - \mu)$ . Характеристики совпадают с линиями скольжения, так как линии скольжения составляют углы  $\pm \mu$  с направлением наибольшего главного напряжения; угол между характеристиками равен  $2\mu$ . Через каждую точку рассматриваемой области в плоскости  $x, y$  проходят две характеристики. Компоненты напряжений претерпевают на линиях разрыва конечные скачки. Линиями скольжения называются линии, вдоль которых удовлетворяется условие

$$|\tau_{xy}| = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + c, \quad (6.9)$$

где  $\tau_{xy}$  и  $\sigma_n$  – соответственно касательная и нормальная компоненты, действующие по площадке с внешней нормалью  $n$ .

Постановка задачи разделяется на прямую и обратную (Соколовский В.В., 1949). Прямая постановка задачи (рис. 6.1, а) заключается в том, что вдоль положительного направления оси  $y$  задана нагрузка и по величине, и по направлению (наклону по отношению к вертикали). На отрицательном участке оси  $x$  действует пригрузка.

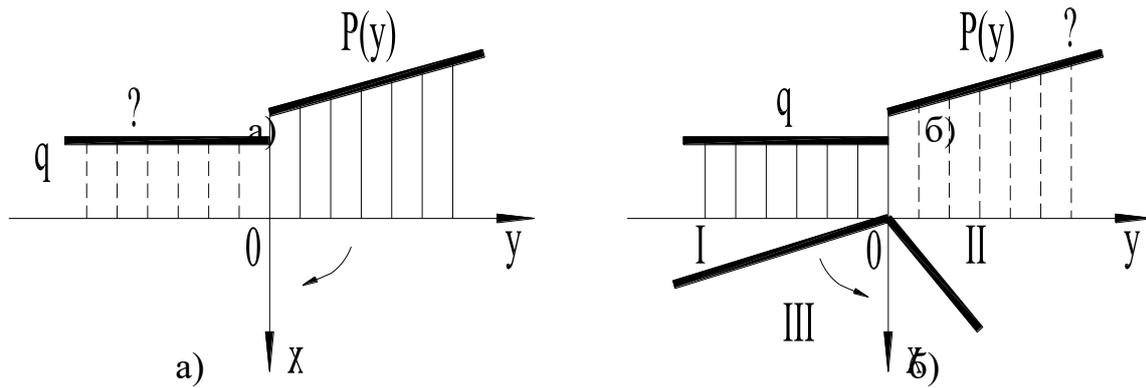


Рис. 6.1. Пояснения к решениям прямой и обратной задач:  
 а) прямая задача ; б) обратная задача;  
 стрелка – направления хода расчёта

Предварительно задается направление этой пригрузки вертикальной или наклонной и отыскивается ее величина. Постановка обратной задачи – по данным величине и направлению пригрузки и заданному направлению нагрузки найти последнюю.

По характеру напряжённого состояния вся предельно напряженная область основания делится на три зоны. I и II (рис. 6.1, б) обобщенные зоны Ренкина и III обобщенная зона Прандтля. В зонах I и II характеристики (линии скольжения) в случае весомой среды прямые или слабо искривлены. В зоне III они представляют собой логарифмические спирали или слабо отличающиеся от них кривые.

В зонах I и II напряжение рассматривается в декартовых координатах, в зоне III – радиальной зоне, ее рассмотрение удобнее проводить в полярных координатах. Дифференциальные уравнения линии скольжения, полученные в результате расчётов (Соколовский В.В., 1949) имеют вид:

$$r = \frac{d\theta}{dr} = \operatorname{tg}(\omega_2 \pm \mu c), \quad (6.10)$$

\*На рис. 6.1-6.9, 6.11-6.14 принята система координат отличная от системы координат на других рисунках в соответствии с (Соколовский В.В., 1960).

откуда было получено: 
$$r = r_0 \cdot \ell_0^{\int_0^\theta \operatorname{ctg}(\omega_1 \pm \mu c) d\theta} . \quad (6.11)$$

В осесимметричной задаче (Березанцев В.Г., 1952) принимается, так называемое, условие полной сыпучести, согласно которому два главных напряжения (промежуточное и минимальное) являются одинаковыми. При осесимметричном напряженном состоянии применяется цилиндрическая система координат  $(r, z)$ .

В пространственном случае задачи имеется шесть неизвестных напряжений, три дифференциальных уравнения равновесия и одно условие предельного равновесия. В силу осевой симметрии одно из уравнений равновесия выпадает, остается только два. Два касательных напряжения также оказываются равными нулю.

Таким образом, остаются два уравнения равновесия. Сетка характеристик принимается за криволинейную систему координат на плоскости  $x, y$ , причём  $\alpha$  и  $\beta$  принимаются за новые переменные;  $a, x, y, \xi, \eta$  являются функциями  $\alpha$  и  $\beta$  (Березанцев В.Г., 1952).

Каноническая система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = \operatorname{tg}(\omega_1 + \mu) \frac{\partial x}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \operatorname{tg}(\omega_1 - \mu) \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad (6.12)$$

а так же

$$\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = a_1 \frac{\partial x}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = a_2 \frac{\partial x}{\partial \alpha}. \quad (6.13)$$

В.В. Соколовским были получены дифференциальные уравнения в следующем виде (Соколовский В.В., 1969):

$$dy = dx \operatorname{tg}(\omega_1 \pm \mu). \quad (6.14)$$

Вдоль характеристик выполнено следующее уравнение относительно  $\sigma$ :

$$d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg} \varphi d\omega_1 = \gamma (dx \mp \operatorname{tg} \varphi dy). \quad (6.15)$$

Из уравнения (6.15) выводятся известные уравнения Кеттера, содержащие радиусы кривизны  $R_\alpha$  и  $R_\beta$  характеристик или линий скольжения первого и второго семейств.

Первое уравнение будет:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} + 2\sigma \operatorname{tg} \gamma = \gamma R_\alpha \frac{\cos(\omega_1 - \mu)}{\cos \varphi}. \quad (6.16)$$

Второе уравнение будет таким:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} - 2\sigma \operatorname{tg} \gamma = -\gamma R_{\beta} \frac{\cos(\omega_1 - \mu)}{\cos \varphi}. \quad (6.17)$$

Путем интегрирования уравнения (6.16) ,было получено:

$$\sigma = \sigma_o \ell^{2\omega_1 \operatorname{tg} \varphi} + \gamma R_{\alpha} \frac{\cos \rho_o}{\cos \varphi} \sin(\omega_1 - \mu + \rho_o); \quad (6.18)$$

$$\operatorname{tg} \rho_o = 2 \operatorname{tg} \varphi + n,$$

где  $n$  – номер логарифмической спирали (Соколовский В.В., 1960).

Аналогично путем интегрирования уравнения (6.17) была получена формула, описывающая несущую способность сыпучей среды:

$$\sigma = \sigma_o \ell^{-2\omega_1 \operatorname{tg} \varphi} - \gamma R_{\beta} \frac{\cos \rho_o}{\cos \varphi} \sin(\omega_1 + \mu - \rho_o). \quad (6.19)$$

## 6.2. Оценка предельного равновесия

Соколовский В.В. провел преобразование исходной системы (6.1 и 6.2) по другим переменным и получил квазилинейные уравнения, решаемые численным методом по предложенной им схеме. Эта система имеет две новых переменных и состоит из двух уравнений. Предлагается постановка, с помощью которой удастся точно удовлетворить уравнениям (6.1). Однако такая постановка «портит» систему (6.2), превращая ее из линейной в квазилинейную. Эта система решается численно, таким образом условия равновесия удовлетворяются приближенно, правда всегда имеется возможность повысить степень точности их интегрирования численным путем.

Возможен и другой путь решения, предложенный в (Малышев М.В.,2000), когда уравнения равновесия (6.1) удовлетворялись точно, а условие предельного напряженного состояния (6.2) – приближенно. Удовлетворить условиям равновесия можно введением функции напряжения Эри (Малышев М.В.,2000). При использовании функции Эри  $F$  и после подстановки в условие (6.2) зависимостей, тождественно удовлетворяющих системе (6.1):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \gamma x; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \xi_0 \gamma x; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (6.20)$$

Приближенность решения связана с аппроксимацией уравнений (6.20) линейным уравнением. В данном случае удовлетворяется уравнение равновесия, но «портится» условие предельного равновесия. Удачным считается решение задачи, которое допускает шаг за шагом увеличение степени приближенности, т.е. итерационный способ вычисления.

Для преобразования исходной системы уравнений (6.20) была использована в качестве подстановки, примененной в (Соколовский В.В., 1969):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma[1 + \sin \varphi \sin(2\omega_1 + \varphi)] - c \operatorname{ctg} \varphi; \\ \sigma_y &= \sigma[1 - \sin \varphi \sin(2\omega_1 + \varphi)] - c \operatorname{ctg} \varphi; \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \varphi \cos(2\omega_1 + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

где  $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + 2c \operatorname{ctg} \varphi) / 2 = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 + c \operatorname{ctg} \varphi$ ;

$\omega_1$  – угол между направлением максимального главного напряжения и осью  $y$ .

Далее путем теоретических преобразований М.В. Малышевым были получены уравнения характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2\omega_1 \pm \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos 2\omega_1} = -\operatorname{ctg}[\omega_1 \mp (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})]. \quad (6.22)$$

В данном случае характеристики совпадают с линиями скольжения, а угол между ними составляет  $\pi/2 - \varphi$ .

Аналогичный приём может быть использован для решения задачи в полярных коэффициентах (Малышев М.В., 2000). В результате расчётов этой задачи были получены уравнения линий скольжения, которые совпадают с характеристиками (Малышев М.В., 2000):

$$\frac{dr}{d\theta} = r \operatorname{ctg}[\omega_1 \pm (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})], \quad (6.23)$$

откуда следует, что

$$r = r_{\theta e} \int_0^{\theta} \operatorname{ctg}[\omega_1 \pm (\pi/4 - \varphi/2)] d\theta. \quad (6.24)$$

Если угол  $\omega_2$  постоянен, то получаем два семейства логарифмических спиралей. Решение уравнения (6.23) можно получить с помощью метода Фурье.

### 6.3. Аналитические методы определения предельного равновесия с использованием краевых задач

Краевые задачи являются теоретическим преобразованием краевых задач для пластических сред (Соколовский В.В., 1969).

**Приближенный метод решения краевых задач.** Приближенный метод решения основных краевых задач позволяет определить искомые функции в конечном числе узловых точек сетки характеристик для дифференциальных уравнений. В данном методе рассматривается узловая точка характеристик и соседние точки 1 и 2, расположенные на горизонтальных и вертикальных характеристиках (рис. 6.2) в плоскости  $\mu, \lambda$ .

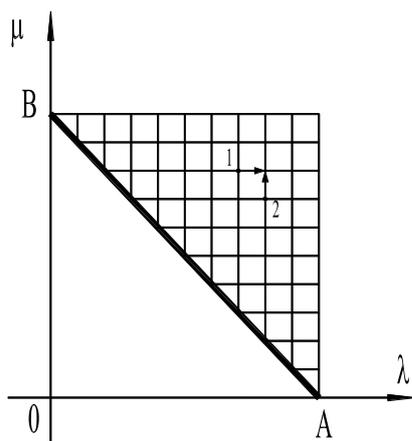


Рис. 6.2

Определены значения  $x, y, \sigma, \varphi$  в указанной узловой точке, при известных значениях  $x_1, y_1, \sigma_1, \varphi_1$  и  $x_2, y_2, \sigma_2, \varphi_2$  в соседних узловых точках 1 и 2.

Для дифференциальных уравнениях дифференциалы  $dx, dy, d\sigma$  и  $d\varphi$  подлежат замене конечными разностями  $x-x_1, y-y_1, \sigma-\sigma_1, \varphi-\varphi_1$ , а в дифференциальных уравнениях – конечными разностями  $x-x_2, y-y_2, \sigma-\sigma_2, \varphi-\varphi_2$ . Таким образом, вместо уравнений (6.21- 6.24) было получено

$$\left. \begin{aligned} y - y_1 &= (x - x_1) \operatorname{tg}(\varphi_1 - \mu); \\ \sigma - \sigma_1 - 2\sigma_1(\varphi - \varphi_1) \operatorname{tg} \rho &= y - y_1 - (x - x_1) \operatorname{tg} \rho \end{aligned} \right\} , \quad (6.25)$$

$$\left. \begin{aligned} y - y_2 &= (x - x_2) \operatorname{tg}(\varphi_2 + \varepsilon); \\ \sigma - \sigma_2 + 2\sigma_2(\varphi - \varphi_2) \operatorname{tg} \rho &= y - y_2 + (x - x_2) \operatorname{tg} \rho \end{aligned} \right\} . \quad (6.26)$$

**Первая краевая задача.** Вдоль отрезка АВ заданы значения  $x, y, \sigma, \varphi$ . Отрезок АВ разделен на несколько частей и построена на плоскости  $\mu, \lambda$ , координатная сетка характеристик. Приведенные рекуррентные формулы (6.25), (6.26) вместе с граничными данными позволяют провести вычисления во всех узловых точках координатной сетки характеристик.

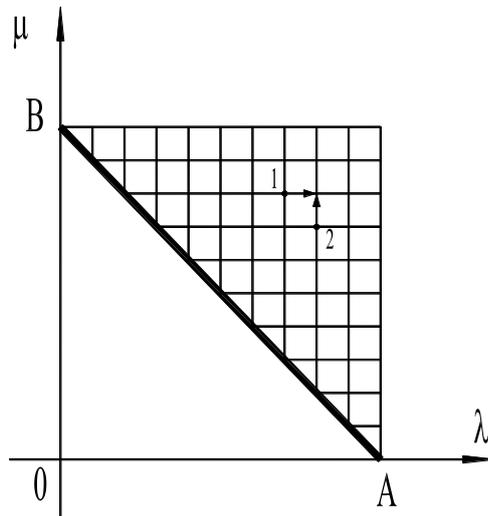


Рис. 6.3

Схема определения значений  $x, y, \sigma, \varphi$  в какой-нибудь внутренней узловой точке по значениям  $x_1, y_1, \sigma_1, \varphi_1$  и  $x_2, y_2, \sigma_2, \varphi_2$  в соседних узловых точках 1 и 2 изображена на рис. 6.3. Вследствие существования и единственности решений можно утверждать, что при достаточной густоте координатной сетки характеристик полученные значения  $x, y, \sigma, \varphi$  дают приближенное решение первой краевой задачи.

**Вторая краевая задача.** Вдоль отрезков характеристик  $OA$  и  $OB$  заданы значения  $x, y, \sigma$  и  $\varphi$ . Отрезки  $OA$  и  $OB$  разделены на несколько частей и на плоскости  $\lambda, \mu$  построена сетка характеристик. Установленные рекур-

рентные формулы (6.25) и (6.26) вместе с граничными данными позволяют осуществить вычисления во всех внутренних узловых точках координатной сетки характеристик.

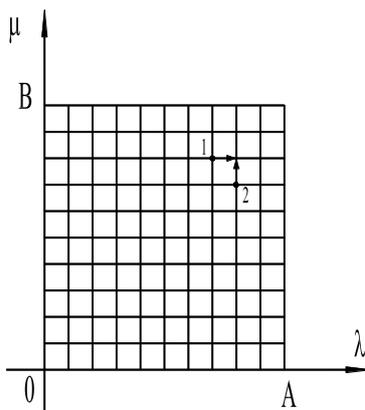


Рис. 6.4

Схема определения значений  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  в какой-нибудь внутренней узловой точке по значениям  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\varphi_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $\sigma_2$ ,  $\varphi_2$  в соседних узловых точках 1 и 2 представлены на рис. 6.4. Основываясь на существовании и единственности решений, было выявлено, что при достаточной густоте координатной сетки найденные значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  дают приближенное решение первой краевой задачи.

**Третья краевая задача.** Вдоль отрезка  $OA$  биссектрисы координатного узла известны два конечных или дифференциальных соотношения между  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$ , а вдоль отрезка  $OB$  характеристики второго семейства заданы значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$ . Отрезок  $OA$  разделен на несколько частей и на плоскости  $\mu$ ,  $\lambda$  построена координатная сетка характеристик. Установленные ранее формулы (6.25), (6.26) и граничные данные позволяют провести вычисления во всех узловых точках отрезка  $OA$ .

Схема определения значений  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  в какой-нибудь узловой точке отрезка  $OA$  по значениям  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\varphi_1$  и  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $\sigma_a$ ,  $\varphi_a$  в соседних узловых точках 1 и  $a$  показаны на рис. 6.5.

Значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  могут быть заданы также вдоль отрезка  $OA$  характеристики первого семейства, а два конечных или дифференциальных соотношения между  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  известны вдоль отрезка  $OB$  биссектрисы координатного узла. При этом формулы (6.25-6.26) и граничные данные позволяют провести вычисления во всех узловых точках отрезка  $OA$ .

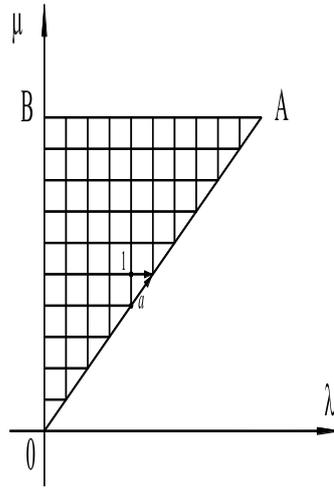


Рис. 6.5

**Четвертая краевая задача.** Вдоль отрезков  $OA$  и  $OB$  заданы по два конечных или дифференциальных соотношения между  $x, y, \sigma, \varphi$ . Отрезки  $OA$  и  $OB$  разделены на несколько частей и на плоскости  $\mu, \lambda$  построена координатная сетка характеристик. Приведенные выше формулы (6.25-6.26) и граничные данные позволяют осуществить вычисления во всех узловых точках отрезка  $OA$  и  $OB$ . Схема получения значений  $x, y, \sigma, \varphi$  в узловых точках отрезков  $OA$  или  $OB$  по значениям  $x_1, y_1, \sigma_1, \varphi_1$  и  $x_a, y_a, \sigma_a, \varphi_a$  в соседних узловых точках 1 и  $a$  или по значениям  $x_2, y_2, \sigma_2, \varphi_2$  и  $x_b, y_b, \sigma_b, \varphi_b$  в точках 2 и  $b$  показаны на рис. 6.6. Для увеличения точности вычислений в рекуррентных формулах (6.25) и (6.26) вместо  $\varphi_1$  подставлены  $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi)$  и

$$\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi).$$

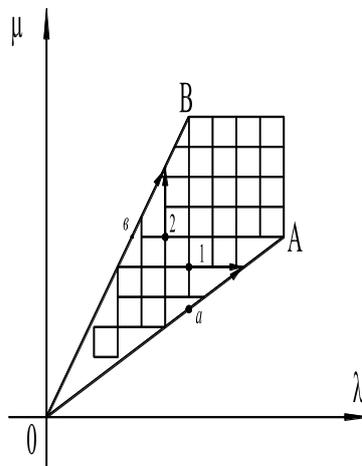


Рис. 6.6

## 6.4. Приближенный метод решения канонических уравнений

*Действие равномерной и неравномерной распределённых нагрузок.* Вдоль участка  $OA_3$  и  $OA_2$  отрицательной полуоси  $x$  равномерно распределены нормативные давления  $P$  и  $q$ , а вдоль положительной полуоси  $x$  они распределены неравномерно (рис. 6.7). Грунты основания представляют супеси просадочные, где  $\varphi = 17^\circ$ ,  $c = 0,009 \text{ кН/м}^2$ ,  $P = 30 \text{ кН/м}^2$ ,  $P_0 = 20 \text{ кН/м}^2$ .

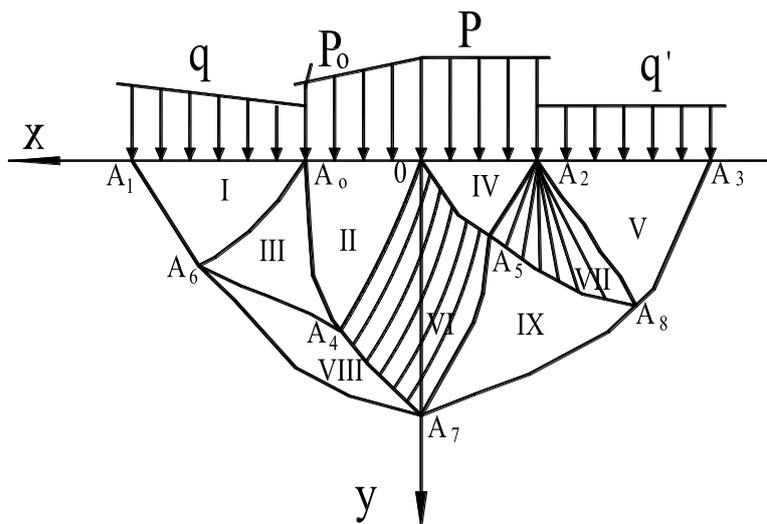
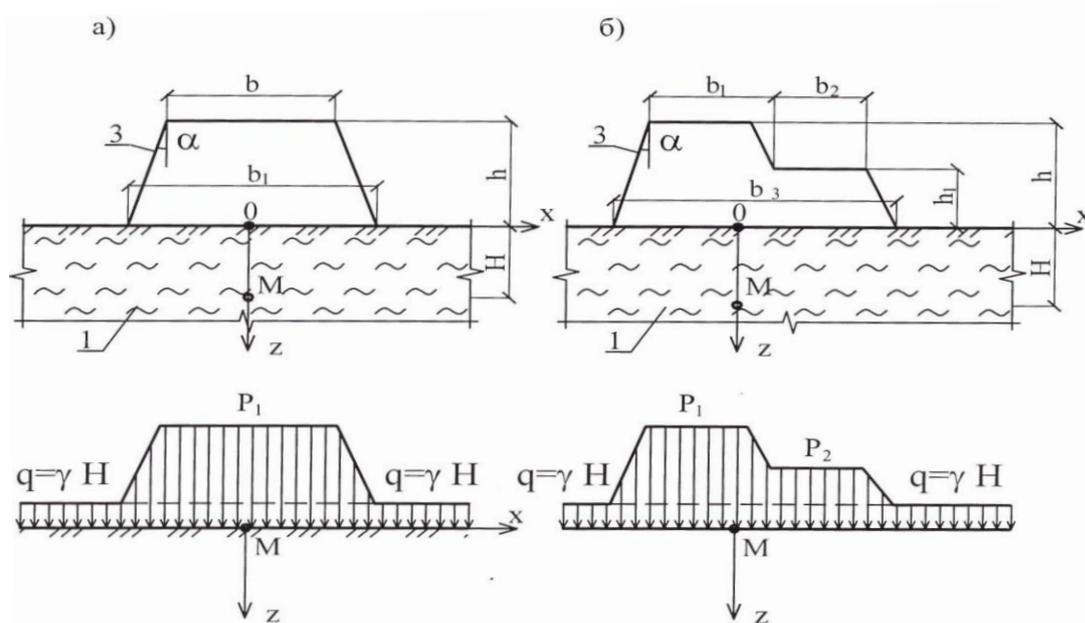


Рис. 6.7

Примеры нагружения оснований с помощью расчётной схемы, указанной на рис. 6.7. приведены на рис. 6.10.



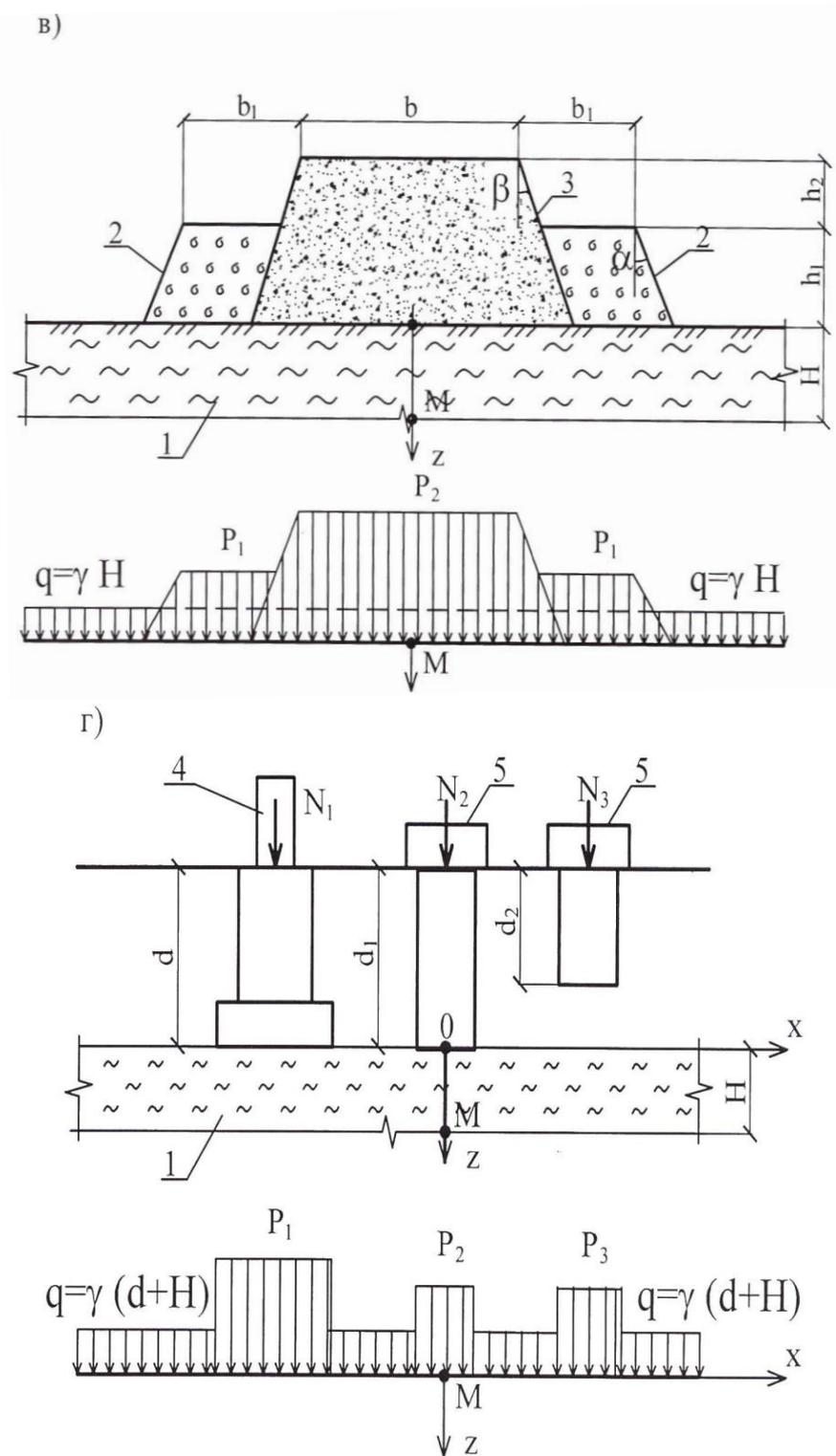


Рис. 6.10. Примеры нагружения оснований различными сооружениями: а) насыпь-конструктивная и расчётная схемы; б) насыпь переменной высоты - конструктивная и расчётная схемы; в) насыпь с боковыми пригрузками - конструктивная и расчётная схемы; г) фундаменты колонн и промышленного оборудования – конструктивная и расчётная схемы; 1- слабый грунт; 2- боковая пригрузка; 3- насыпь; 4- колонна; 5- оборудование

В этой задаче необходимо определить значения напряжений  $\sigma$  и угла  $\varphi$  во всех заданных точках и построить сетку характеристик по координатам узловых точек. Вдоль положительной полуоси  $x$  при  $\chi = -1$ , вследствие формул (Соколовский В.В., 1969), примем

$$\sigma = \frac{P(x)}{1 + \sin \rho}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}; \quad (6.27)$$

$$q = \sigma(1 + \sin \rho), \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (6.28)$$

Вдоль отрицательной полуоси  $x$  при  $\chi = +1$ , вследствие формул (Соколовский В.В., 1969), примем

$$\sigma = \frac{P}{1 - \sin \rho}, \quad \varphi = 0; \quad (6.29)$$

$$\sigma = \frac{q'}{1 - \sin \rho}, \quad \varphi = \pi. \quad (6.30)$$

Рассмотрим сначала задачу для невесомой среды (рис. 6.8). Выполним ряд построений на плоскости  $\xi, \eta$ , считая ее состоящей из 10<sup>ти</sup> листов. Такая 10-ти листовая область может быть развернута в 8-ми листовую, если перегнуть прямоугольные треугольники  $\Delta A_0(2)A_6A_1$  вокруг  $\Delta A_0(2)A_6$ , а  $\Delta A_2(2)A_3A_8$  вокруг  $\Delta A_2(2)A_8$ . В областях  $OA_2A_5$  и  $A_2A_3A_8$  в соответствующих точках  $A_2(1)$  и  $A_2(2)$  величины  $\sigma$  и  $\varphi$  постоянны и равны своим значениям в точках  $A_2(1)$  и  $A_2(2)$ . Используя формулу (6.31), получим значение в т.  $A_2(1)$   $\sigma = 42,3 \text{ кН/м}^3$ ,  $\varphi = 0$ . В области  $A_5A_2A_8$ , отвечающей отрезку характеристики  $A_2(1)$  и  $A_2(2)$ , величина  $\xi$ , постоянна, поэтому здесь имеют место интегралы уравнений предельного равновесия для вырожденного случая, т.е.

$$\sigma = \frac{P}{1 - \sin \rho} \exp[(\pi - \varphi)t g \rho] = \frac{30}{1 - 0,29} \exp[(180 - 2 \cdot 127^\circ)0,31] = 38,5 \text{ кН/м}^2, \quad (6.31)$$

где  $\varphi = \theta + \varepsilon = \frac{\pi}{2} + 37^\circ = 90^\circ + 37^\circ = 127^\circ$ .

Найдём значение  $q'$  по формуле (Соколовский В.В., 1969):

$$q' = 30 \exp(-0,973) = 30 \cdot 0,03 = 0,9 \text{ кН/м}^2. \quad (6.32)$$

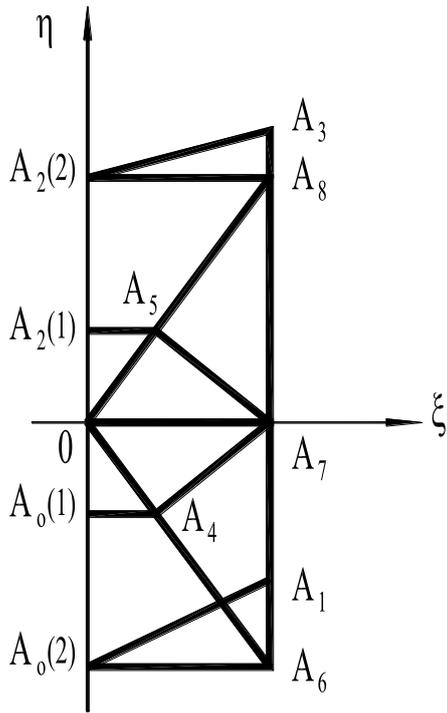


Рис. 6.8. Невесомая область

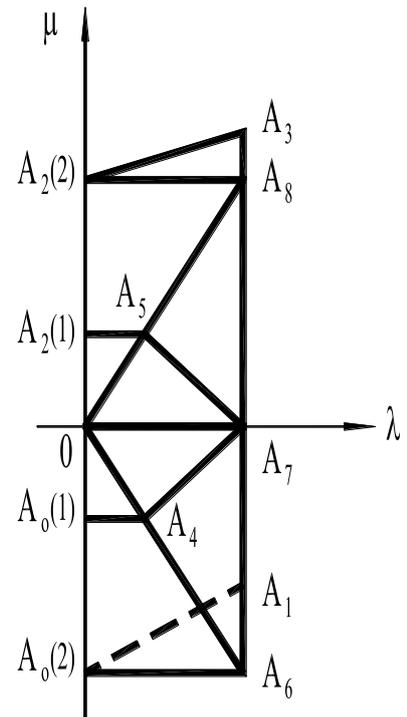


Рис. 6.9. Весомая область

Определим значение  $\sigma$  в т.  $A_2(2)$  и во всей области  $A_2A_8A_3$  по формуле (6.32):

$$\sigma = \frac{0,9}{1 - 0,29} = 1,3 \text{ кН/м}^2. \quad (6.33)$$

Найдем значение  $\sigma$  в т.  $A_0(1)$  по (6.31)

$$\sigma = \frac{20}{1 + 0,29} = 15,5 \text{ кН/м}^2. \quad (6.34)$$

Значение приведенного давления  $q = q_0$  в т.  $A_0$  может быть выражено через значение приведенного давления  $P = P_0$  в той же т.  $A_0$ . Этим значениям  $P_0$  и  $q_0$  соответствует на плоскости  $\xi, \eta$  т.  $A_0(1)$  и  $A_0(2)$ , лежащие на одной и той же характеристике  $\xi = \chi + \varphi = \text{const}$  второго семейства.

Таким образом здесь имеют место интегралы уравнений предельного равновесия (Соколовский В.В., 1969), следовательно вдоль характеристики  $A_0(1)$  и  $A_0(2)$  известно:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P_0}{1 + \sin \rho} \exp[(\pi - 2\varphi) \operatorname{tg} \rho] = \frac{20}{1 + 0,29} \exp[(180^\circ - 2 \cdot 127^\circ) 0,31] = \\ &= 15,5 \exp[(-1,29) 0,31] = 15,5 \cdot 0,91 = 14,1 \text{ кН/м}^2,\end{aligned}\quad (6.35)$$

где  $\varphi = \theta + \varepsilon = 90^\circ + 37^\circ = 127^\circ$ .

Найдем значение  $q_0$  в т.  $A_0(2)$  по формуле

$$q_0 = P \frac{1 + \sin \rho}{1 + \sin \rho} \exp(-\pi \operatorname{tg} \rho) = 20 \cdot 1 \cdot 0,03 = 0,6 \text{ кН/м}^2. \quad (6.36)$$

А  $\sigma$  в т.  $A_0(2)$  будет равно

$$\sigma = \frac{P_0}{1 + \sin \rho} = \frac{0,6}{1 + 0,29} = 0,5 \text{ кН/м}^2. \quad (6.37)$$

Комбинированная область на плоскости  $\xi, \eta$  теперь значительного упрощается. Прямоугольный  $\Delta A_2(2) A_8 A_3$  и  $\Delta O A_5 A_2(1)$  превращается в т.  $A_2(2)$  и  $A_2(1)$ , а прямоугольник  $A_5 A_2(1) A_2(2) A_8$  – в один отрезок характеристики  $A_2(1) A_2(2)$ . Перейдем к решению задачи для весомой среды (рис. 6.10), построим плоскость  $\lambda, \mu$  и пользуясь свободой выбора параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , можно вдоль положительной и отрицательной полуосей задать  $\lambda = -\mu = x$ . Данные первой краевой задачи дают возможность построить решения канонических уравнений во всех зонах на плоскости  $\lambda, \mu$  (рис. 6.9). Найдем значение  $\sigma$  в т.  $A_1$  по рекуррентным формулам (6.25) и (6.26):

$$\sigma = 0,5 + 2 \cdot 0,5(\pi - \pi) \operatorname{tg} 17^\circ + 0 - 0 - (5 - 2) \operatorname{tg} 17^\circ = 0,5 + 3 \cdot 0,31 = -0,43 \text{ кН/м}^2.$$

Значение в точках  $A_4 - A_8$  находим по такому же принципу, используя рекуррентные формулы. Вдоль отрезка характеристики  $A_5 A_8$  значения  $x$  и  $y$  найдем по следующим формулам (Соколовский В.В., 1969):

$$x = \frac{a \cos(\varphi - \varepsilon)}{2 \sin \varepsilon} \exp[(\varphi - \frac{\pi}{2}) \operatorname{tg} \rho], \quad y = x \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon). \quad (6.38)$$

Полученные результаты в заданных точках будут равны следующим значениям, которые приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1.

Результаты вычисления физических величин в заданных точках

Определяемые характеристики	Номера точек расчёта					
	i \ j	0	1	2	3	4
x, мм y, мм σ, МПа φ, °	0			0 0 42,3 90°		
x, мм y, мм σ, МПа φ, °	1		2 0 14,1 127°	0 1,84 1,17 43°	2 0 38,5 127°	
x, мм y, мм σ, МПа φ, °	2	5 0 0,43 180°	1 1,33 1,32 190°		1 1,33 40,6 92°	5 0 1,3 180°
x, мм y, мм σ, МПа	3	3,5 1,13 1,12 172°				3,5 1,13 1,8 190°

Найдем составляющие напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по формулам (Соколовский В.В., 1969):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \sigma(1 \pm \sin \rho \cos 2\varphi) - H, \quad \text{где } H = k \operatorname{ctg} \rho; \quad (6.39)$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sin \rho \sin 2\varphi.$$

Полученные значения занесены в таблицу 6.2.

Таблица 6.2.

Результаты вычисления составляющих напряжений в заданных точках

Номера точек расчёта \ Напряжение	0	A <sub>0</sub>	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	A <sub>5</sub>	A <sub>6</sub>	A <sub>7</sub>	A <sub>8</sub>
$\sigma_x$	54,5	10,7	0,28	33,5	0,89	1,29	28,8	1,0	0,13	1,77
$\sigma_y$	29,8	17,5	0,52	43,5	1,65	0,91	52,3	1,41	1,4	1,77
$\tau_{xy}$	0	0	0	0	0	0,13	0,82	0,09	0,9	0,18

По полученным данным построим сетку характеристик для составляющих напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  (см. рис. 6.11).

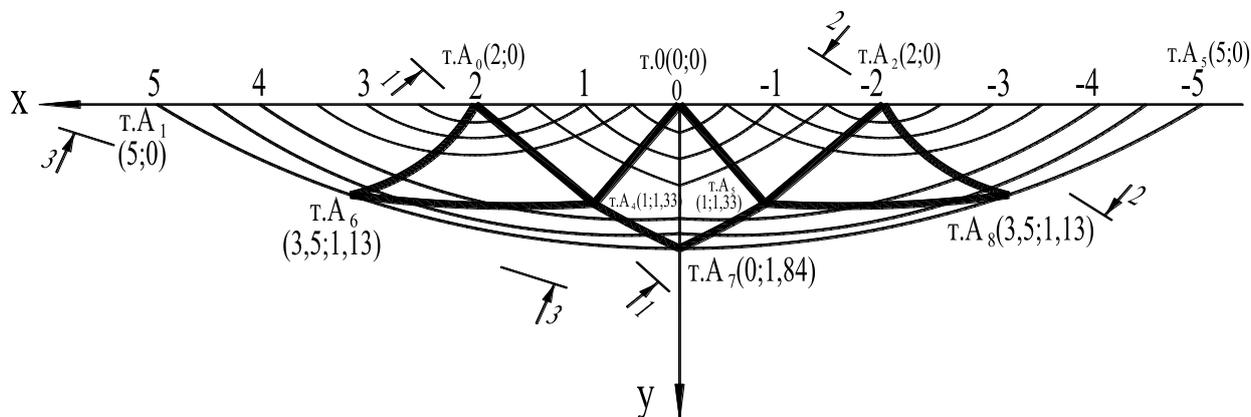


Рис. 6.11

График (рис. 6.11) построен в плоскости  $Oxu$ , а в целях исследования построим в плоскости  $Ozu$ , для сечения 1–1 ÷ 3–3 (рис. 6.12) давление  $P$  и  $q$  под подошвой фундамента неравномерно распределены.

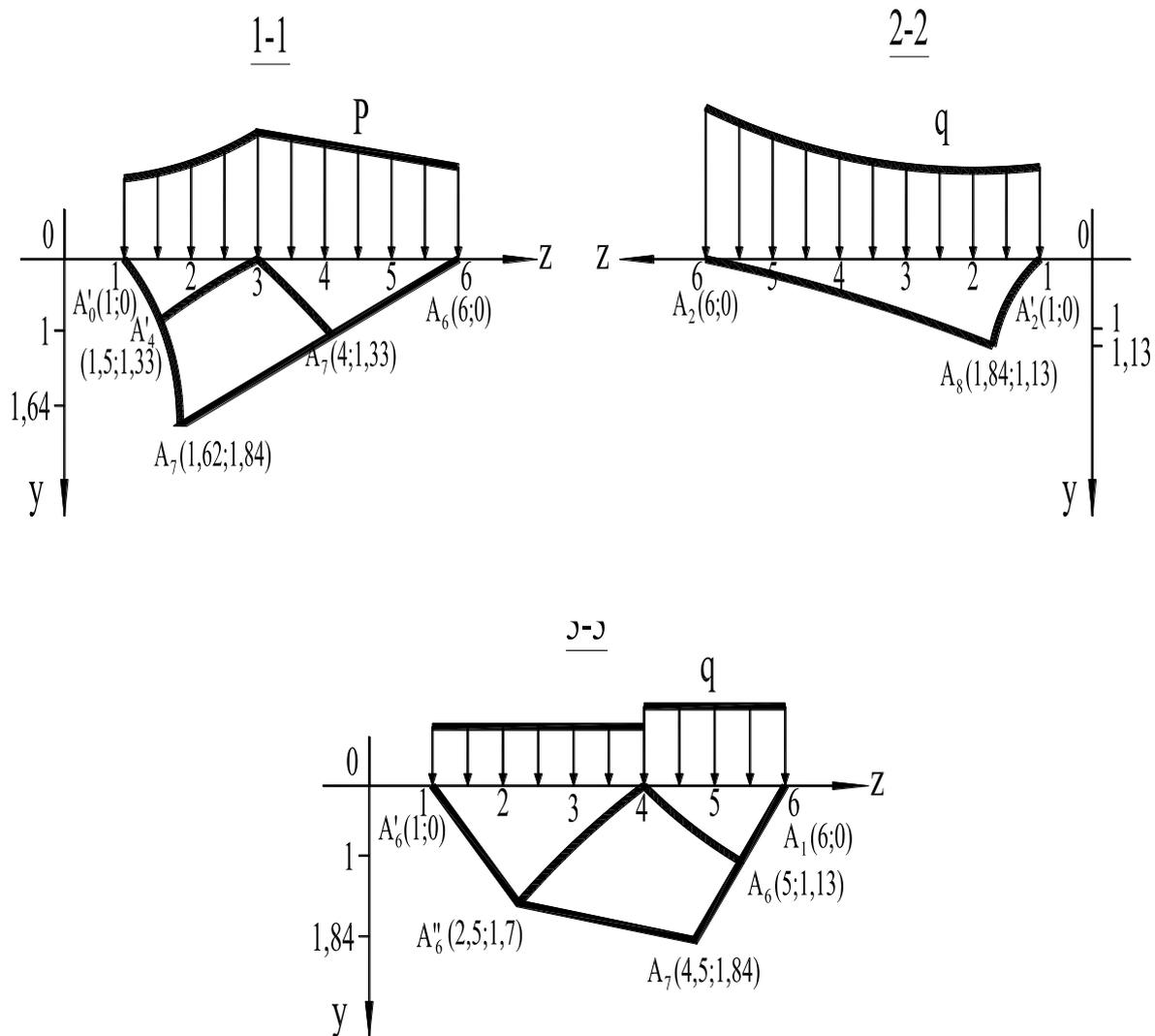


Рис. 6.12

Для сечения 1-1, координаты  $y$  точек  $A_0$ ,  $A_4$  и  $A_7$  будут те же самые, как для 1-го графика. Координаты т.  $A_0'$  по  $x$  будет равна 1, а т.  $A_6$   $x = 6$ , т.к. ширина фундамента равна  $b = 5$  м. Необходимо найти координаты  $x$  и  $y$  для т.  $A_4'$  и координату  $x$  для т.  $A_4$  по рекуррентным формулам

$$1,33 - 0 = (x - 5) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 37^\circ\right); \quad (6.40)$$

$$1,33 = (x - 5) \operatorname{tg} 53^\circ;$$

$$1,33 = (x - 5)(-1,33);$$

$$1,33 = -1,33x + 6,65; \quad x = \frac{5,32}{1,33} = 4; \quad x = z;$$

$$\text{т. } A_4 \begin{cases} x = 4\text{м;} \\ y = 1,33\text{м.} \end{cases} \quad (6.41)$$

Найдём координату  $x$  для т.  $A'_0$  тоже по рекуррентным формулам

$$\text{т. } A'_0 \begin{cases} x = 3\text{м;} \\ y = 0. \end{cases} \quad (6.42)$$

Найдём координаты т.  $A'_4$  и т.  $A'_7$  по такому же принципу, по рекуррентным формулам (6.25) и (6.26).

$$\text{т. } A'_4 \begin{cases} x = 2,0\text{м;} \\ y = 1,33 \text{ м.} \end{cases} \quad \text{т. } A'_7 \begin{cases} x = 1,62\text{м;} \\ y = 1,84 \text{ м.} \end{cases} \quad (6.43)$$

По такому же принципу расчёта найдём координаты точек для сечения 1-1÷2-2 ( см.рис. 6.13).

Построение сетки характеристик для  $\tau_{xy}$ .

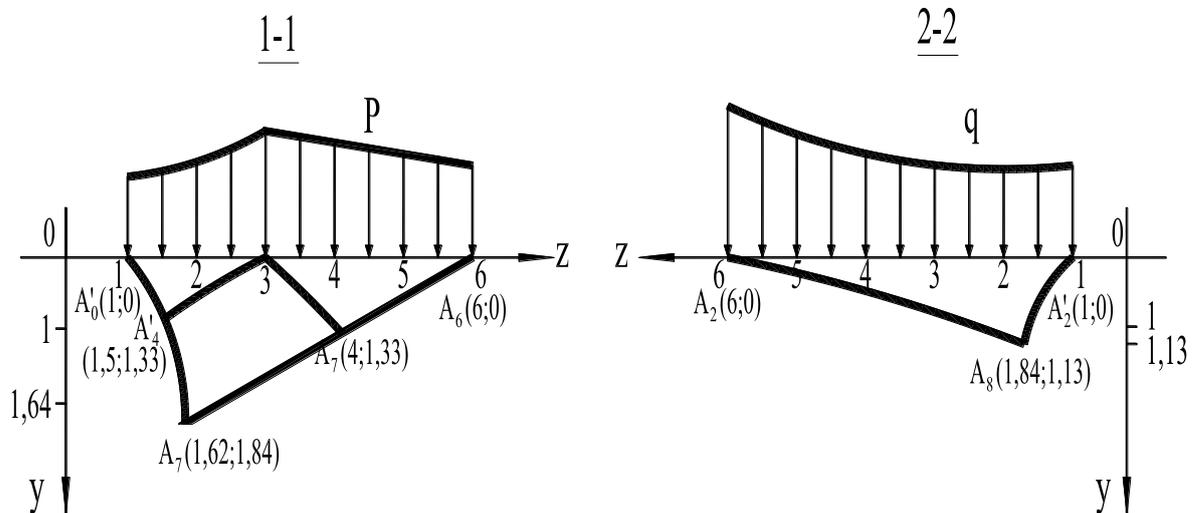


Рис. 6.13

Данные  $\tau_{xy}$ ,  $x$ ,  $y$  сведены в таблицу 6.3.

Таблица 6.3.

Результаты вычисления значений физических величин  
в заданных точках

Номера точек расчёта	i	0	1	2
Опред. характе- ристики	j			
x, мм				6
y, мм	0			0
$\tau_{xy}$ , МПа				0,09
x, мм			3	4
y, мм	1		0	1,33
$\tau_{xy}$ , МПа			0,07	0,13
x, мм		1	2	1,62
y, мм	2	0	1,33	1,84
$\tau_{xy}$ , МПа		0,03	0,10	0,34

### 6.5. Методика отображения физической плоскости $x, y$ на плоскость параметров $\xi, \eta$

В задачах о предельном равновесии используется метод отображения плоскостей (Соколовский В.В., 1969), в котором функции  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  отображают многолистную комбинированную область в однолистную на  $\xi, \eta$ , если в этой области нет линий скольжения.

Рассмотрим задачу о предельном равновесии основания, ограниченного осью  $x$ , вдоль которого действует давление  $P = P(x)$  (рис. 6.14). Таким образом, вдоль оси  $x$  при  $\chi = -1$  примем условие (6.29):

$$\sigma = \frac{P(x)}{1 + \sin \rho}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Для невесомой среды, участок оси  $x$  можно разбить на два участка  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$ , в каждом из которых соответственно  $P(x)$  и  $P'(x) < 0$ . Выполним ряд построений на плоскости  $\xi, \eta$ , которая должна быть многолистной, состоящей из трех листов. На листах 1 и 3 проведем отрезки  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$ , соответствующие одноименным участкам оси  $x$ .

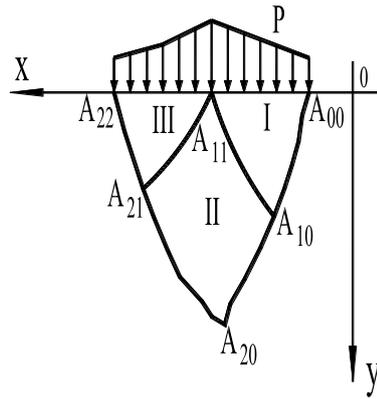


Рис. 6.14

Принимая эти отрезки за гипотенузы, построим на листах 1 и 3 прямоугольные треугольники  $A_{00}A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}A_{22}$ , а на листе 2 прямоугольник  $A_{10}A_{20}A_{21}A_{11}$ . Эти области соединены в одну трехлистную комбинарованную область, изображенную на рис. 6.15 а), путем скрепления листов вдоль отрезков характеристик  $A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}$ . Важно отметить, что такая трехлистная область может быть развёрнута в однолистную, представленную на рис. 6.15 б), если перегнуть прямоугольник  $A_{11}A_{10}A_{21}A_{20}$  вокруг  $A_{10}A_{11}$ , а затем перегнуть прямоугольный треугольник  $A_{11}A_{21}A_{22}$  вокруг  $A_{11}A_{21}$ . Отрезки  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$  на листах 1 и 2 соответствуют одноименным участкам оси  $x$ , а потому вдоль этих отрезков известны  $x = x(a)$ ,  $y = 0$ .

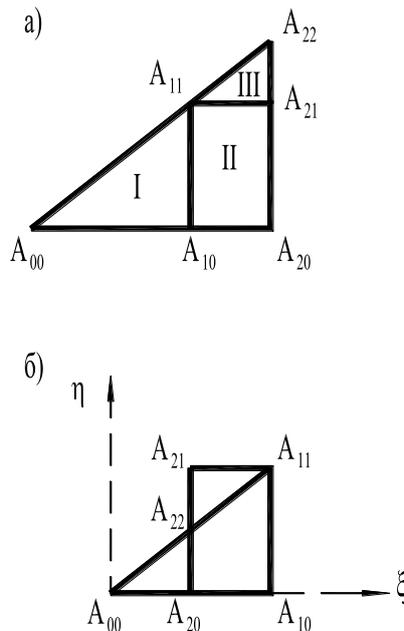


Рис. 6.15

По этим данным первой краевой задачи может быть определено решение канонических уравнений в прямоугольных треугольниках  $A_{00}A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}A_{22}$  на листах 1 и 3.

Вместе с тем будут установлены значения  $x$  и  $y$  вдоль 2 - х отрезков (рис. 6.15 б) характеристик  $A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}$  на листе 2.

Эти же данные второй краевой задачи позволяют найти решение канонических уравнений в прямоугольнике  $A_{10}A_{20}A_{21}A_{11}$ .

Обратимся теперь к решению той же задачи для весомой среды, не требуя, чтобы функция  $P(x)$  на участках  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$  была монотонной. С этой целью построим на плоскости  $\lambda, \mu$  комбинированную область, изображенную на рис. 6.16. В выборе параметров  $\lambda$  и  $\mu$  существует известная свобода, которая позволяет вдоль границы оси  $x$  задать  $\lambda = \mu = x - x_0$ .

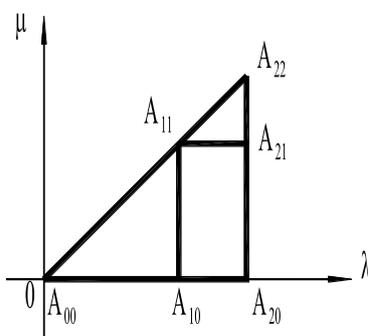


Рис. 6.16

Тогда участкам  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$  будут на плоскости  $\lambda, \mu$  (рис. 6.16), соответствовать некоторые одноименные отрезки  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$ . Вдоль  $A_{00}A_{11}A_{22}$  значения известны:

$$\chi = x + \lambda, \quad y = 0, \quad \sigma = \frac{P(x)}{1 + \sin \rho}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

По этим данным первой краевой задачи могут быть получены решения канонических уравнений в прямоугольных треугольниках  $A_{00}A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}A_{22}$ . Тем самым будут установлены значения  $x$ ,  $y$  и  $\sigma$ ,  $\varphi$  вдоль отрезков характеристик  $A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}$ . Эти данные второй краевой задачи позволяют найти решения канонических уравнений в прямоугольнике  $A_{10}A_{20}A_{21}A_{11}$ .

Следовательно, в комбинированной области будут определены непрерывные функции  $x = x(\lambda, \mu)$ ,  $y = y(\lambda, \mu)$ ,  $\sigma = \sigma(\lambda, \mu)$ , являющиеся реше-

ниями канонических уравнений в каждой из областей  $A_{00}A_{10}A_{11}$ ,  $A_{11}A_{21}A_{22}$  и  $A_{10}A_{20}A_{21}$ .

**Сжатие пластической полосы.** Рассмотрим еще задачу о сжатии пластической полосы между двумя гладкими прямоугольными пуансонами, которые создают давление  $k\sigma$  на верхней и нижней плоскостях полосы (рис. 6.17 а). В этом случае приводится 4-листная комбинированная область на плоскости  $xu$ . Выполним ряд построений на плоскости  $\xi, \eta$ . Четырехлистная комбинированная область на плоскости  $\xi, \eta$  значительно упрощается и будет расположена на 3-х листах. Прямоугольный треугольник  $B_1BC$  превращается в точку  $B$  или  $B_1$ , т.к. в 1-й зоне имеется равномерное напряженное состояние ( $\xi=\xi_0, \eta=\eta_0$ ) (рис. 6.17 б). Эта 3-х листовая область может развернута в однолистную, представленную на рис. 6.18.

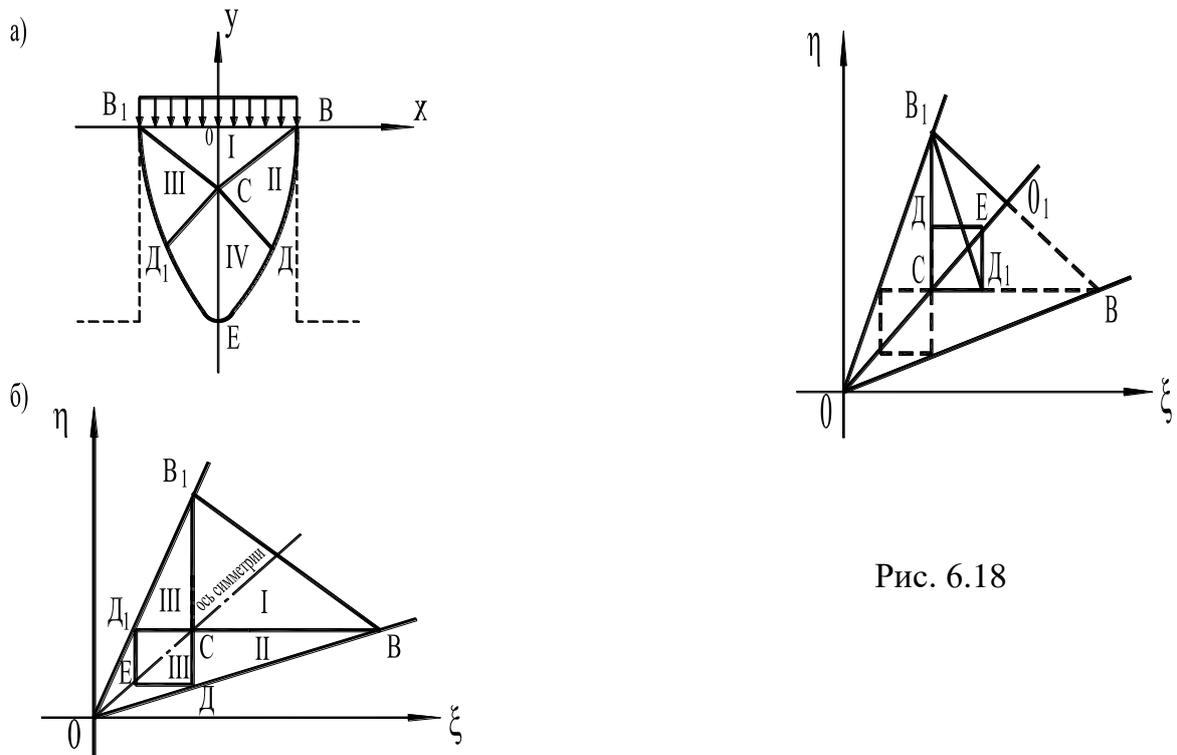


Рис. 6.18

Рис. 6.17

На листе 1 проведем отрезок  $BB_1$  прямой соответствующей участку  $ox$ . Принимая этот отрезок за гипотенузу, построим на листе 1 прямоугольный треугольник  $B_1BC$ , на листах 2 и 3 построим прямоугольный треугольник  $B_1D_1C$  и  $CD_1B$ , а на листе 4 построим прямоугольник  $D_1CDE$ .

Эти области соединены в одну четырехлистную комбинированную область, изображённую на рис. 6.18 путем скрепления листов вдоль отрезков характеристик  $V_1D$  и  $D_1B$ . Такая четырехлистная область может быть развёрнута в однолистную, если перегнуть прямоугольник  $D_1CDE$  вокруг  $D_1C$ , треугольник  $СВД$  совместить с треугольником  $D_1B_1C$  и эти совмещенные треугольники с прямоугольником  $D_1CDE$  повернуть вокруг  $B_1C$ . Отрезок  $V_1B$  на листе 1 соответствует одноименному участку оси  $x$ , а поэтому вдоль этого отрезка известны  $x$ ,  $y = 0$  и  $\sigma = \text{const}$ .

По данным четвертой краевой задачи может быть также получено решение канонических уравнений в прямоугольных треугольниках и в прямоугольнике.

Исследование напряжённо-деформированного состояния грунтовых сред с помощью численных методов позволяет заключить следующее:

1. Анализ напряжённо-деформированного состояния слабой грунтовой среды для полуплоскости при повышении нагрузки при применением различных методов расчёта (итерации, конечных элементов и переменных параметров) показал, что результаты решений, полученные этими методами близки по своим значениям.

2. Предложенная методика отображения многолистной комбинированной области  $x, y$  в однолистную область плоскости  $\xi, \eta$  упростила получение искоемых напряжений в заданных точках полупространства грунтовой среды.

## Глава 7. РАСЧЁТ УСТОЙЧИВОСТИ ОСНОВАНИЙ ЗДАНИЙ

### 7.1. Гибкие фундаменты для слабой грунтовой среды

Гибким называется фундамент, деформации которого приводят к перераспределению реактивных давлений грунта по его подошве (Далматов Б.И., 1975). Гибкие фундаменты обладают способностью изгибаться в двух взаимно-перпендикулярных направлениях в плоскости подошвы. К таким фундаментам относятся фундаменты, у которых отношение высоты к их длине составляет менее 1/3. Такими фундаментами являются:

- ленточные фундаменты под колонны гражданских и промышленных зданий;
- сплошные железобетонные плиты высотных зданий;
- фундаменты из перекрёстных плит;
- коробчатые фундаменты;
- кольцевые фундаменты дымовых труб.

При проектировании гибких фундаментов всё чаще встречаются случаи, когда фундаменты располагаются на площадках со слабыми грунтами. Эти случаи приведены ниже, а физико-механические характеристики слабых грунтов взяты из проектных разработок научно-исследовательских институтов «Промстройпроект» г. Иванова и «Гражданпроект» г. Владимира.

При решении задач, связанных с оценкой напряжённо-деформированного состояния, в основу расчётных схем положена модель грунтовой среды в виде упругого полупространства и совокупности горизонтальных слоёв, лежащих на полупространстве.

***Устойчивость грунтовой среды для внешней нагрузки в форме равностороннего треугольника.*** Исследуем устойчивость основания сборного ленточного фундамента (рис. 7.1). Исходные данные для расчёта: ширина подошвы фундамента  $b_f = 2,5$  м; глубина его заложения  $d_1 = 0,8$  м; давление под подошвой фундамента  $P_{\text{расч}} = 0,360$  МПа ( $P_{\text{расч}}$  – расчётное давление, определяется с учётом коэффициента надёжности по внешней

нагрузки по нормативным документам);  $P_{кр}$  – определяется по формуле (2.25) для модели грунтовой среды в виде однородного полупространства (рис. 7.2). Грунт в основании – глины с расчётными характеристиками:  $\varphi = 26^\circ$ ,  $c = 0,032$  МПа,  $\gamma = 0,022$  МПа/м<sup>3</sup>,  $R$  – расчётное сопротивление определено по (СП 22.13330.2011, 2000).

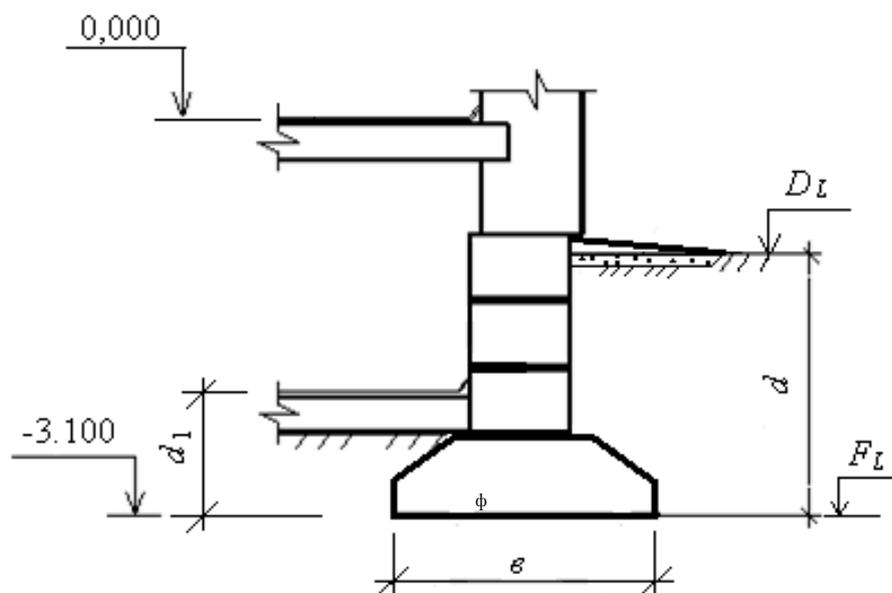


Рис. 7.1. Сечение сборного ленточного фундамента

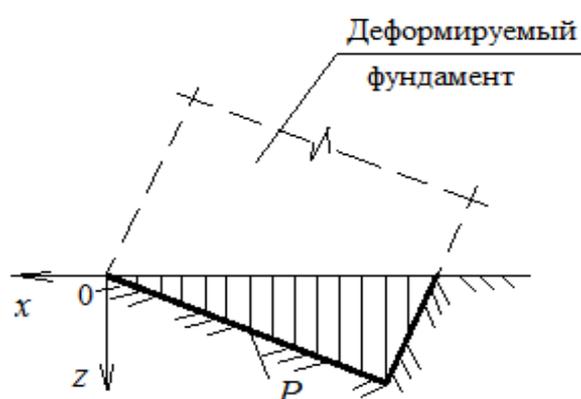


Рис. 7.2. Схема действия неравносторонней треугольной нагрузки в основании фундамента

Расчётная схема нагрузки в основании фундамента имеет форму неравностороннего треугольника (рис. 7.2). Максимальную глубину  $z_{\text{макс}}$  критической нагрузки находим по формуле (2.21). Результаты расчётов  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1.

Результаты расчётов силовых характеристик и  $z_{\text{макс}}$

Вид нагрузки	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа	$R$ , МПа
Нагрузка по закону неравностороннего треугольника	0,35	0,360	0,317	0,319

Поскольку  $P_{\text{расч}} > P_{\text{кр}} < R$ , устойчивость основания для фундаментов не обеспечена, поэтому необходимо выполнить дополнительные конструктивные мероприятия по усилению фундамента или его основания.

**Устойчивость грунтовой среды для внешней нагрузки в форме равнобедренного треугольника.** Проведено исследование устойчивости основания ленточного фундамента 10-ти этажного жилого дома по ул. Революционной в г. Иваново (рис. 7.3). Исходные данные для расчёта: ширина подошвы фундамента  $b_{\text{ф}} = 3\text{ м}$ , глубина его заложения  $d_1 = 0,82\text{ м}$ ,  $P_{\text{расч}} = 0,495\text{ МПа}$ . Грунты в основании – суглинки с участками торфяных залежей, с расчётными физическими характеристиками:  $\varphi = 23^\circ$ ,  $c = 27\text{ кПа}$ ,  $\gamma = 18,9\text{ кН/м}^3$ ,  $I_L = 0,7$ . Расчётная схема нагрузки в основании фундамента имеет форму равнобедренного треугольника (рис. 7.4). Расчёт  $P_{\text{кр}}$  и  $z_{\text{макс}}$  выполнен по формулам (2.14) и (2.10);  $P_{\text{расч}}$  и  $R$  – определены по (СП 22.13330.2011, 2000).

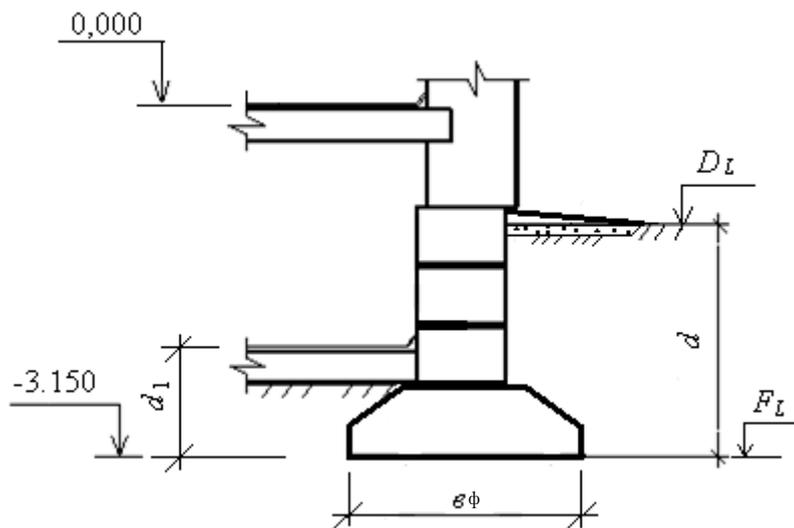


Рис. 7.3. Сечение сборного ленточного фундамента

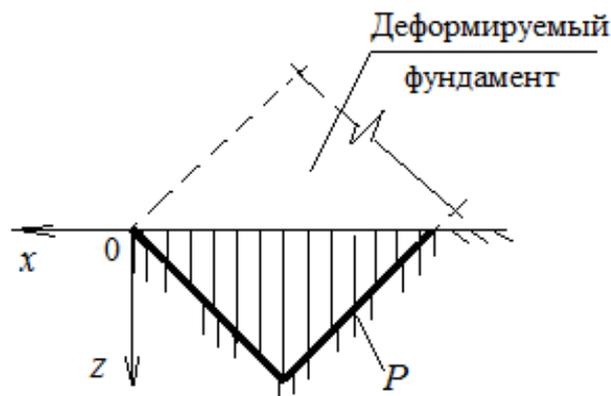


Рис. 7.4. Схема действия равносторонней треугольной нагрузки в основании фундамента

Полученные результаты расчётов приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2.

Результаты расчётов силовых характеристик и  $z_{\text{макс}}$

Вид нагрузки	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа	$R$ , МПа
Нагрузка по закону равностороннего тре- угольника	0,75	0,495	0,380	0,382

Поскольку  $P_{расч} > P_{кр} \approx R$ , то следовательно устойчивость основания фундамента не обеспечена, необходимо выполнить дополнительные конструктивные мероприятия по укреплению фундамента или основания.

**Устойчивость грунтовой среды для внешней нагрузки в форме трапеции (бутовый фундамент).** Исследуем устойчивость основания для ленточного бутового фундамента шириной подошвы от  $b_{\phi}=1\text{ м}$  до  $b_{\phi}=1,5\text{ м}$  (рис. 7.5). Давления от приложенных нагрузок под подошвой фундамента следующие:  $P_{расч} = 0,342\text{ МПа}$  ( для  $b_{\phi} = 1\text{ м}$  ) и  $P_{расч} = 0,487\text{ МПа}$  ( для  $b_{\phi} = 1,5\text{ м}$  ). Грунты в основании: увлажнённые заторфованные ( $\varphi = 3^{\circ}$ ;  $c = 0,09\text{ МПа}$ ;  $\gamma = 18\text{ кН/м}^3$ ). Схема нагрузки в основании фундамента имеет трапециевидную форму (рис. 7.6). Эпюру давлений разобьем на прямоугольный и треугольный элементы.

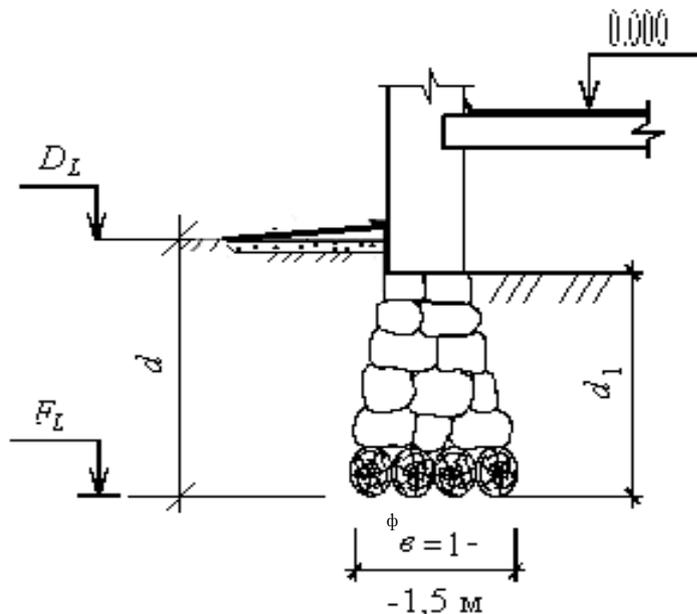


Рис. 7.5. Сечение бутового фундамента:  
 $b_{\phi} = 1 \div 1,5$ - ширина подошвы фундамента

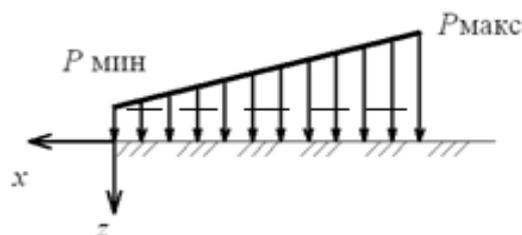


Рис. 7.6. Схема от действия трапециевидной нагрузки

Максимальную глубину  $z_{\text{макс}}$  проявления критической нагрузки найдём отдельно для прямоугольной и треугольной эпюры давлений (Кравченко Т.И. и др., 2015). Максимальную глубину  $z_{\text{макс}}$  для прямоугольной нагрузки вычислим по формуле (Цытович Н.А.,1983) для каждой ширины подошвы фундамента:

$$b_{\text{ф}}=1\text{м}; \quad z_{\text{макс}} = b \cdot \text{tg}\varphi = 1 \cdot 0,25 = 0,25\text{м};$$

$$b_{\text{ф}}=1,5\text{м}; \quad z_{\text{макс}} = 1,5 \cdot 0,25 = 0,38\text{м}.$$

Критическое усилие для прямоугольной нагрузки найдём по формуле (Цытович Н.А.,1983):

$$P_{\text{кр}} = 0,040 \text{ МПа} \quad \text{для } b_{\text{ф}}=1\text{м};$$

$$P_{\text{кр}} = 0,040 \text{ МПа} \quad \text{для } b_{\text{ф}}=1,5\text{м}.$$

Расчётное сопротивление  $R$  в основании фундамента вычислено в соответствии с (СП 22.13330.2011, 2000). Для треугольной нагрузки значения  $P_{\text{кр}}$  и  $z_{\text{макс}}$  вычислены по формулам (2.72) и (2.74).

Результаты полученных расчётов указаны в таблице 7.3.

Таблица 7.3.

Результаты расчётов силовых характеристик и  $z_{\text{макс}}$

Вид нагрузки	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа	$R$ , МПа
Трапецевидная нагрузка для: $b = 1\text{м}$ , $b = 1,5\text{м}$	0,26	0,342	0,181	0,192
	0,38	0,488	0,183	0,193

Из анализа результатов расчётов следует, что  $P_{\text{расч}} > P_{\text{кр}} < R$ , т.е. грунты в основании фундаментов являются неустойчивыми, значит при заданных параметрах фундаментов и характеристиках грунтов необходимо выполнить усиление основания.

**Устойчивость грунтовой среды для внешней нагрузки в форме трапеции (сборный ленточный фундамент).** Исследуем устойчивость основания для сборного ленточного фундамента (рис. 7.7). Исходные данные для расчёта: ширина подошвы фундамента  $b_{\text{ф}}=2,5\text{м}$ , глубина его

заложения  $d_1 = 0,8$  м,  $P_{\text{расч}} = 0,319$  МПа . Грунты в основании – глины с расчётными характеристиками:  $\varphi = 26^\circ$  ,  $c = 0,032$  МПа,  $\gamma = 22$  кН/м<sup>3</sup>,  $I_L = 0,7$ . Схема внешней нагрузки приведена на рис. 7.8.

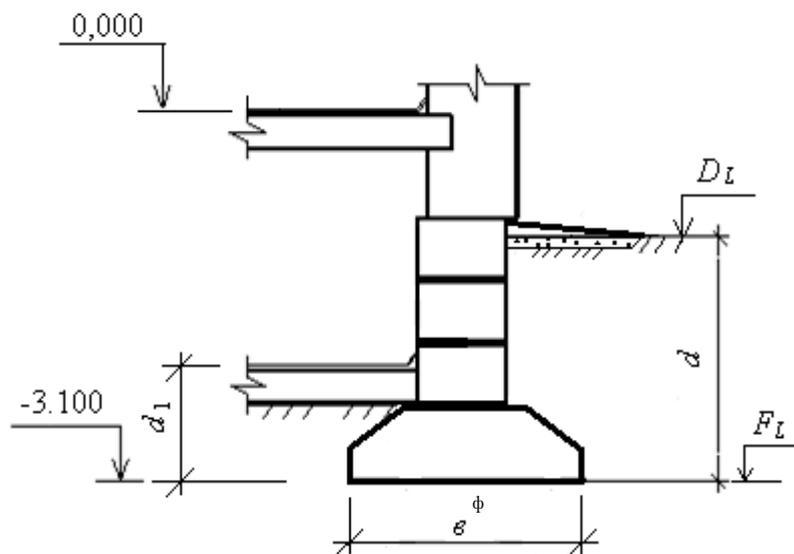


Рис. 7.7. Сечение сборного ленточного фундамента

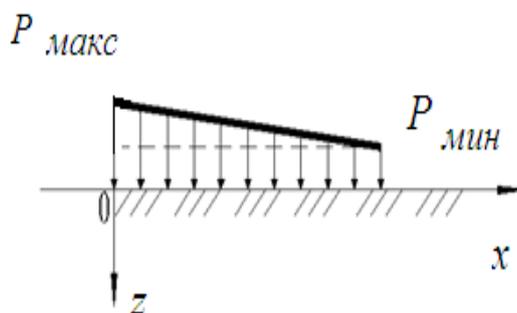


Рис. 7.8. Схема действия трапецевидной нагрузки

Расчётная схема нагрузки в основании фундамента имеет трапецевидную форму. Эпюру внешних давлений разбиваем также на прямоугольные и треугольные элементы. Максимальную глубину  $z_{\text{макс}}$  проявления критической нагрузки и  $P_{\text{кр}}$  находим так же, как и в предыдущем случае. Результаты полученных расчётов приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4.

Результаты расчётов силовых характеристик и  $z_{\text{макс}}$ 

Вид нагрузки	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа	$R$ , МПа
Трапецевидная нагрузка	0,630	0,407	0,319	0,319

Поскольку  $P_{\text{расч}} > P_{\text{кр}} = R$ , устойчивость основания фундаментов не обеспечена; поэтому необходимо выполнить дополнительные конструктивные мероприятия по укреплению фундамента или основания.

**Устойчивость грунтовой среды для ступенчатой прямоугольной нагрузки.** Такой вид внешней нагрузки возникает в том случае, когда к старому зданию пристраиваются новые здания (рис.7.9; 7.10). Исходные данные для расчёта: ширина промежутка между фундаментами зданий принимается переменной; в нашем случае  $b = 5$  см; ширина подошвы фундамента старого здания  $b_{\phi 2} = 0,4$  м, ширина подошвы фундамента нового здания  $b_{\phi 1} = 0,6$  м; приведённые глубины заложения фундаментов обоих зданий приняты одинаковыми, т.е.  $d_1 = 2,4$  м;  $P_{\text{расч.2}} = 0,250$  МПа,  $P_{\text{расч.1}} = 0,590$  МПа; грунты в основании являются глинистыми с расчётными значениями характеристик:  $\varphi = 25^\circ$ ,  $c = 0,33$  МПа,  $\gamma = 20$  кН/м<sup>3</sup>,  $E = 16$  МПа,  $I_L = 0,7$ .

Для расчёта  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  аппроксимируем ступенчатую прямоугольную нагрузку трапецевидной (рис. 7.10). Нагрузку в промежутке между фундаментами ( $b_0$ ) принимаем равной некоторой эффективной с учётом аппроксимации. В этом случае расчёт  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  для треугольной нагрузки выполняются по формулам (2.72) и (2.74) и по формулам (Цытович И.А., 1983), т.е. так, как это сделано в разделе «Устойчивость грунтовой среды для внешней нагрузки в форме трапеции».

При замене ступенчато - прямоугольной нагрузки (рис. 7.10) трапецевидной расстояние  $b_0$  между фундаментами определяется по формуле

$$b_0 = (b_1 - b_2) \frac{P_1 b_2 - P_2 b_1}{P_1 b_2 + P_2 b_1} = 0,05 \text{ м,}$$

исходя из баланса ступенчато-прямоугольной и трапециевидной нагрузки (равенство площадей эюр). По формуле  $v_0$  величина промежутка между фундаментами равно 0,05 м.

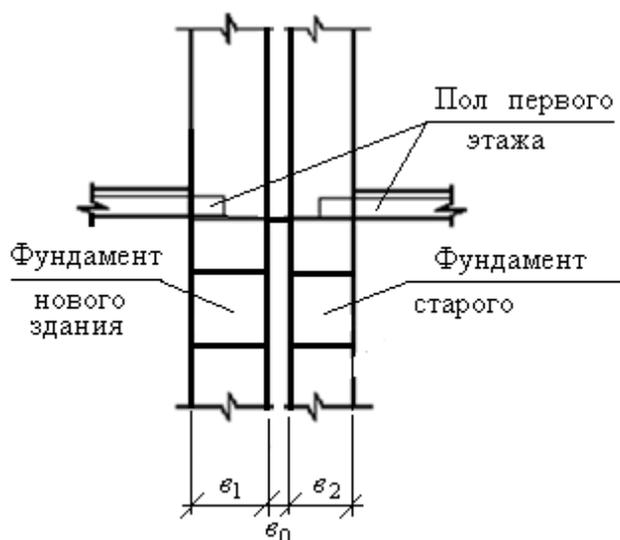


Рис. 7.9. Сечение ленточных сборных фундаментов

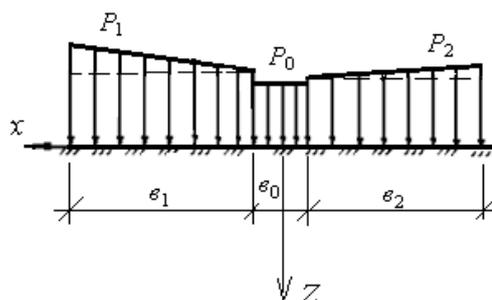


Рис. 7.10. Схема ступенчатой прямоугольной нагрузки

Полученные результаты расчётов  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  приведены в таблице 7.5.

Таблица 7.5.

Результаты расчётов силовых характеристик и  $z_{\text{макс}}$

Вид нагрузки	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч.1}}$ , МПа	$P_{\text{расч.2}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа	$R$ , МПа
Трапециевидная нагрузка: в основании фундаментов нового здания при $v = 0,6\text{м}$ ;	0,65	0,59		2,230	2,21
в основании фундаментов старого здания при $v = 0,4\text{м}$	0,35		0,25	2,215	2,01

Для оценки корректности выполненного расчёта при аппроксимации ступенчато-прямоугольной нагрузки трапециевидной, был проведён расчёт с учетом промежутка между фундаментами ( $e_0$ ) методом угловых точек с использованием (СП 22.13330.2011, 2000). В результате было установлено, что  $P_{расч.i} < P_{кр} < R$  для нового и старого фундаментов. Из сопоставления обоих результатов расчёта следует, что устойчивость основания соблюдается, поэтому усиливать фундамент не требуется.

**Устойчивость грунтовой среды для нагрузки в форме трапеции (10-ти этажный жилой дом).** Проведено исследование устойчивости основания сборного ленточного фундамента 10 - ти этажного жилого дома по ул. Лежневской в г. Иваново (рис. 7.11). Исходные данные для расчёта: ширина подошвы фундамента  $b_{\phi} = 3\text{м}$ , глубина его заложения  $d_1 = 0,72\text{ м}$ , давление от приложенных нагрузок под подошвой фундамента  $P_{расч} = 0,351\text{ МПа}$ . Грунты в основании – суглинки с участками торфяных залежей, с расчётными физическими характеристиками:  $\varphi = 26^\circ$ ,  $c = 0,032\text{ МПа}$ ,  $\gamma = 20\text{ кН/м}^3$ ,  $I_L = 0,7$ . Расчётная схема нагрузки в основании фундамента имеет трапециевидную форму (рис.7.12). Расчёт  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{кр}$  выполнен по методике, изложенной в разделе «Устойчивость грунтовой среды для внешней нагрузки в форме трапеции».

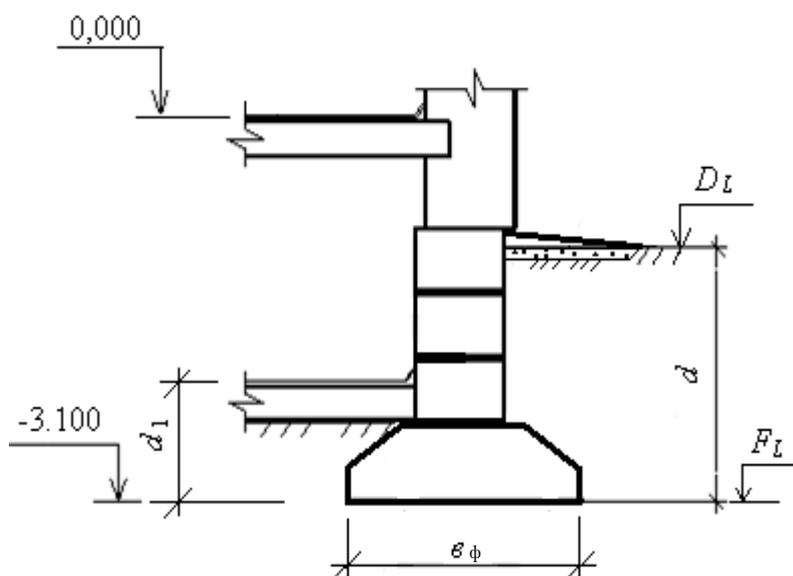


Рис. 7.11. Сечение ленточного фундамента

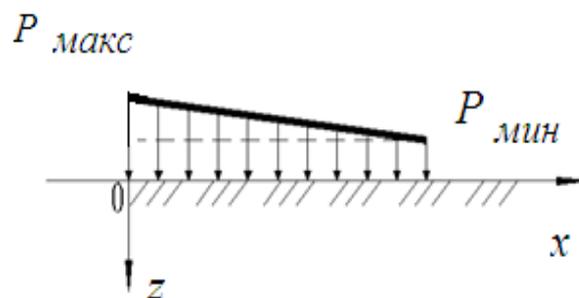


Рис. 7.12. Схема от действия трапециевидной нагрузки

Полученные результаты расчётов приведены в табл. 7.6.

Таблица 7. 6.

Результаты расчётов силовых характеристик и  $z_{\text{макс}}$

Вид нагрузки	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа	$R$ , МПа
Трапециевидная нагрузка	0,63	0,351	0,391	0,392

Из результатов расчётов следует, что  $P_{\text{расч}} < P_{\text{кр}} \approx R$ . Поэтому устойчивость основания фундамента обеспечена, и нет необходимости в проведении конструктивных мероприятий по его усилению.

## 7.2. Проектирование оснований и фундаментов высотных зданий на слабых грунтовых средах

Основаниями зданий и сооружений на территории Владимирской области являются как дочетвертичные отложения, так и образования четвертичного возраста. Самыми древними являются верхнеюрские глины твердой и полутвердой консистенции, которые вскрываются на глубинах 4-7 м. Модуль их деформации по полевым испытаниям составляет 14-16 МПа.

Нижнемеловые отложения представлены песками мелкими и пылеватыми, плотными и средней плотности, глинами полутвердой и тугопластичной консистенции и частым переслаиванием глины и песка. Алевроит (частое переслаивание глины и песка) в силу своего строения обычно име-

ет туго - и мягкопластичную консистенцию, а при замачивании переходит в текучепластичное состояние. Нижнемеловые отложения встречаются на площадках строительства на глубинах от 2-3 м до 6-8 м и имеют модуль деформации 16-24 МПа.

Среди отложений четвертичного периода встречаются нижние - и среднечетвертичные ледниковые, среднечетвертичные водно-ледниковые, верхнечетвертичные делювиальные и аллювиальные, современные аллювиальные и техногенные образования.

Образования четвертичного возраста распространены практически на значительных территориях, залегая на глубинах от 1,5 до 6 м и более. Они представлены песками, суглинками и глинами. Прочностные свойства зависят от их состояния и изменяются в широких пределах, модуль деформации в интервале нагрузок 0,1- 0,3МПа по данным полевых испытаний составляют от 2 до 30 МПа.

Техногенные и насыпанные грунты встречаются и имеют мощность от 0,5 до 7-8 м. Они представлены песками и суглинками со строительным и бытовым мусором, а в ряде случаев, шлаками и золами, мощность которых может превышать 10-12 м.

При этом по ряду объективных причин опыт строительства высотных зданий малоприменим сегодня. Использование коробчатых фундаментов с развитой площадью опирания при строительстве здания МГУ и других высоток имело свои преимущества, снижая среднее давление по подошве фундамента до 0,3- 0,45 МПа. Однако, такое решение требует устройства значительных по площади и глубине котлованов, что весьма проблематично в условиях плотной сложившейся застройки. В стесненных условиях среднее расчётное давление под 30-этажным жилым домом достигает порядка 0,5-0,7 МПа. В строительстве никогда не сталкивались с такими величинами давлений при опирании фундаментов зданий на нескальные грунты.

Действующая в строительстве система нормативных документов предполагает индивидуальный подход к проектированию высотных зданий с разработкой технических условий на каждое из них. В практическом руководстве по составлению технических условий (Общие положения.... 2002.) и во временных нормах по проектированию, а также в справочных рекомендациях не содержатся конкретные указания по методам расчета оснований и фундаментов (ОФ) высотных зданий. В этих условиях разрабатываемые специалистами по высотному строению (ОАО ЦННИЭП жи-

лица и др.) технические условия по геотехническим вопросам отсылают к существующим нормативным документам. Однако заложенные в этих нормах концепции и методики расчётов ОФ были разработаны и апробированы строительной практикой СССР и России для зданий до 17-22 этажей с фундаментами, передающими на естественное грунтовое или укрепленное основание нагрузки не выше 0,2-0,3 МПа и устраиваемые в котлованах глубиной до 10-15 м.

При соблюдении правил определения расчётных параметров (нагрузок, активной зоны основания, характеристик деформируемости и сопротивления грунтов и др.) установленных на основе практического опыта, существующие методики дают приемлемую основу для расчётного обоснования ОФ зданий и сооружений обычной этажности. Однако использование этих же методик расчёта для проектирования ОФ более высоких зданий, т.е. за пределами области применимости нормативных документов, может привести к неудовлетворительным результатам, вплоть до аварийных ситуаций.

Проблемы, возникающие при проектировании и строительстве ОФ высотных зданий, обусловлены тем, что рост этажности здания и его размеров в плане приводит к существенным качественным изменениям процесса формирования напряженно-деформированного состояния (НДС) основания, конструкций фундаментов и здания, а также совместной работы всей системы в целом.

Действительно, характерными для высотных зданий являются: высота свыше 75 м, большие размеры в плане, устройство глубоких котлованов (20-30м) и еще более заглубленных ограждающих конструкций, значительность и существенный эксцентриситет (в т.ч. из-за влияния ветра), передаваемые на грунты основания нагрузки (давление  $q = 0,5$  МПа и более). В результате в процессы формирования НДС зоны влияния высотного здания (системы «активная зона грунтового основания – ограждающая конструкция и фундамент – подземная часть и верхнее строение высотного здания») вовлекаются огромные массивы грунта как под подошвой фундаментов, так и в стороны от ограждающих конструкций.

При этом на формирование НДС активной зоны существенное влияние оказывают состав, строение и генезис грунтового массива, его исходное НДС, технология разработки котлована, технология устройства основания и фундаментов, поэтапность возведения и жёсткость подземной и надземной частей здания.

Для высотного строительства при больших глубинах разработки котлованов становится важным учёт влияния на формирование НДС грунтового массива, эффектов его разгрузки при выемке и удалении грунтов из котлована и процессы длительного природного физико-химического упрочнения грунтов.

Существенность влияния этих факторов связана с тем, что модули упругих деформаций грунтов  $E_e$  могут существенно отличаться от модуля упругопластических деформаций  $E_{ep}$  соответствующего напряжением, при которых грунт испытывает в основном пластические деформации (Тер-Мартirosян З. Г., 2006). Отсюда следует резкое увеличение сжимаемости грунтов при переходе от упругого деформирования к упругопластическому. Так как упругие и, особенно, упругопластические деформации грунтов могут быть существенно нелинейными, то величины  $E_e$  и  $E_{ep}$  должны устанавливаться для диапазона напряжений, соответствующего передаваемым на основание фундаментами нагрузкам.

Однако, при обычных инженерно-геологических изысканиях, в регламентируемых стандартами испытаниях рекомендуемый диапазон напряжений может оказаться не соответствующим уровням нагрузок, передаваемых на основание фундаментами высотных зданий.

В имеющихся отечественных нормативных документах по высотному строительству предельные величины допускаемых деформаций основания отсутствуют. Составители технических условий, как правило, отсылают к нормативным предельным деформациям оснований обычных зданий (СП 22.13330.2011, 2000). Однако, установленные величины предельных абсолютных  $S_{и}$  и неравномерных осадок  $(\Delta S/L)_и$  оснований и кренов фундаментов  $I_{и}$  применительно к высотным зданиям представляются завышенными.

Так для многоэтажных зданий монолитной конструкции с плитным фундаментом, согласно (СП 22.13330.2011, 2000)  $S_{и} = 22,5-27,0$  см;  $(\Delta S/L)_и = 0,0024-0,003$ ;  $I_{и} = 0,005$  или не ограничивается. При таких значительных величинах деформации ОФ весьма вероятны различные нарушения нормальной эксплуатации зданий, что обусловлено повышением чувствительности оборудования здания с ростом его высоты.

Выбор типа фундаментов высотных зданий свыше 70 м ограничен небольшим числом вариантов: плитным, свайным и комбинированным

плитно-свайным (в зависимости от превалирования нагрузок, воспринимаемых плитой и сваями).

Сваи могут применяться различного типа, но с отработанной технологией и гарантированными показателями расчётных характеристик материала ствола сваи и несущей способности по грунту. В свайном фундаменте предпочтительнее устройство свай-стоек или глубоких опор, опирающихся на однородные скальные или полускальные породы достаточной мощности. В плитно-свайном и свайно-плитном фундаментах следует использовать висячие сваи (сваи-трения) с прочностью ствола, гарантировано превышающей несущую способность сваи по грунту. Основание плиты может быть естественным или укрепленным различными методами.

Выбор конкретного типа ОФ определяется грунтовыми условиями, архитектурно-конструктивным решением проектируемого комплекса и типом связи с ограждением котлована. Даже при благоприятных деформационных и прочностных характеристиках естественного основания сваи могут оказаться необходимыми в местах резкой концентрации нагрузок (под ядром жёсткости, пилонами и др.), под высотной частью, выполняемой без разрезки с более низким стилобатом, при использовании ограждающей «стены в грунте» в качестве несущей стены подземной части высотного здания и др. При малейшей возможности следует рассмотреть наиболее экономичный вариант – фундаментной плиты на естественном основании.

Такой расчёт полезен не только, когда удастся ограничиться плитным фундаментом. Он позволяет определить уровень нагрузок, удовлетворительно воспринимаемых плитой. Величина остальной части нагрузки (дефицит предельного сопротивления плиты) позволяет обоснованно выбрать тип усиления основания.

Для расчёта фундаментных плит применяются простейшие модели грунтового основания. Простейшие модели (упругая и идеально упруго-пластическая среда с условием текучести Кулона-Мора) адаптированы в нормативных методиках лишь для оснований обычных зданий и исключают их применение для расчета осадок тяжело нагруженных сооружений, в т.ч. высотных зданий. Более совершенные модели упругопластических сред с упрочением при сжатии, например, модели Ю.К.Зарецкого (геотехническая программа «Земля»), Гениева Г.А. (*FEM models*) или др. содержат недостаточно исследованные параметры, неопределяемые стандартами инженерно-геологическими изысканиями. В этих условиях

наиболее приемлемым сегодня является путь совершенствования апробированных инженерных методик расчета, в частности, метода послойного суммирования для учёта важного для основания высотных зданий нелинейного деформирования грунтов.

Предназначенный для расчётов осадок грунтовых оснований и определения переменных коэффициентов жёсткости для расчетов фундаментных плит усовершенствованный метод послойного суммирования учитывает вертикальное сжатие со структурной прочностью грунта. Для учета боковых деформаций в зависимости от месторасположения расчетной точки основания используется переменный коэффициент влияния бокового сжатия  $\beta$  (в нормах принимается  $\beta = 0,8 = \text{const}$ ), определяемый по формуле (Безволев С.Г., 2002).

Модель грунта (Федоровский В.Г., 2000) положена в основу программы КРОСС для расчёта осадок оснований и переменных коэффициентов жесткости, допускаемых для расчётов фундаментных плит обычных зданий. Однако, программа КРОСС допускает, когда в некоторых точках основания наблюдаются неравномерные осадки. Одной из возможных причин этого является методика разбивки площади рассчитываемого фундамента на зоны влияния геологических скважин, а также то, что метод не учитывает существенную при больших нагрузках роль нелинейных сдвиговых деформаций грунта и образование зон предельного равновесия в основании.

Устранение этого недостатка изложено в методике, предложенной Безволевым С.Г. (Безволев С.Г., 2002). Методика учёта нелинейной упругопластической работы грунтов была предложена для слабых грунтов, для которых влияние нелинейности весьма существенно даже при обычных нагрузках (строительство обычных зданий).

Метод основан на использовании в расчётах не только вертикальных нагрузок, как в нормативных методах расчёта осадок, но и особым способом определяемых суммарных нормальных напряжений в основании. Это дает возможность уточнить учёт неоднородности основания по глубине (слоистости) и применить более совершенную модель нелинейного деформирования грунта.

Разработанные методики расчётов фундаментных плит позволяют определить НДС как в грунтовом массиве, так и в фундаментных конструкциях и могут быть реализованы в программах для персональных компьютеров.

## Глава 8. РАСЧЁТ УСТОЙЧИВОСТИ ОСНОВАНИЙ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

К основаниям инженерных сооружений предъявляются следующие требования (СП 34.13330.2012, 2003):

- они должны быть устойчивым, т.е. из под них должно быть исключено боковое выдавливание грунта;
- технология устройства основания должна быть такой, чтобы значительная часть его осадки (деформации) произошла до создания на нём инженерных сооружений;
- за завершение интенсивной части осадки допускается принимать момент достижения 90% консолидации основания или интенсивности осадки не более 2 см/год при капитальных дорожных одеждах и 80% консолидации или интенсивности осадки не более 5 см/год при одеждах облегченного типа;
- упругие колебания основания при движении транспортных средств не должны превышать значения, допускаемого для данного типа покрытия.

При расчёте устойчивости основания (СП34.13330.2012, 2003) определяется коэффициент безопасности:

$$K_{\text{без.}} = P_{\text{без.}} / P_{\text{расч.}}, \quad (8.1)$$

где  $P_{\text{без.}}$  – безопасная нагрузка на основание;  $P_{\text{расч.}}$  – расчётная нагрузка на основание.

Безопасная нагрузка равна (СП34.13330.2012, 2003):

$$P_{\text{без.}} = \left[ \frac{c + \gamma z \operatorname{tg} \varphi}{\beta} \right] \min + q, \quad (8.2)$$

где  $c$  и  $\varphi$  – расчётные значения сцепления и угла внутреннего трения грунта на расчётном горизонте  $z$ ;  $\gamma$  – удельный вес грунта;  $\beta$  – коэффициент, зависящая от геометрических параметров основания, расчётного угла внутреннего трения грунта и глубины расположения расчётного горизонта  $z$ ;  $q$  – расчётная нагрузка на основание от боковых пригрузочных призм при их наличии.

Проверку устойчивости основания выполняют с помощью метода круглоцилиндрических поверхностей скольжения (КЦПС) (СП34.13330.2012, 2003).

## 8.1. Расчёт устойчивости откосов и насыпей автодороги

**Откосы автомобильной дороги.** Сечение насыпи автодороги имеет форму равнобедренной трапеции, состоящей из двух откосов в форме прямоугольных треугольников и средней части в форме прямоугольника. Поэтому усилие на основание автодороги складывается из усилий, обусловленных откосами и средней частью насыпи. Усилия от средней прямоугольной части насыпи определяется по (Цытович Н.А., 1983), а от откосов по формуле (2.74). Расчёты показали, что усилие от средней части насыпи в области её статического влияния на основание автодороги является практически постоянным. Поэтому наибольшее значение имеет оценка нагрузки от откосов. Схема действия нагрузки, обусловленной откосами, приведена на рис. 8.1.

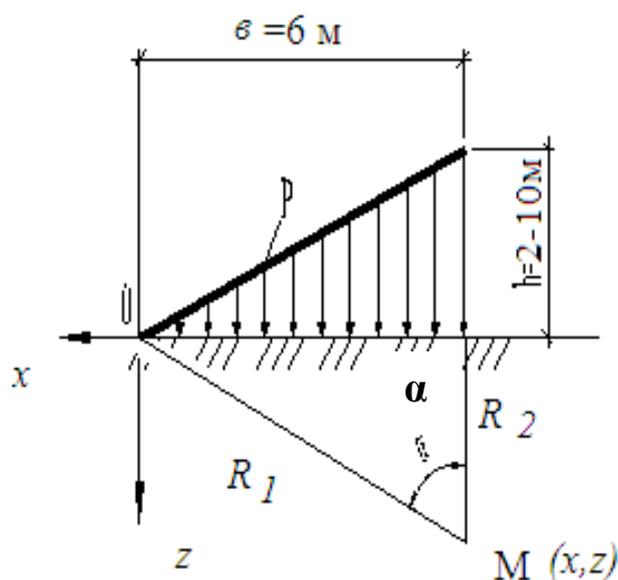


Рис. 8.1. Схема действия треугольной нагрузки

Рассмотрим устойчивость основания автодороги под откосами для различной их высоты и фиксированных значений  $\phi$ ,  $c$  и  $\gamma$  типичных для средней полосы России. Критическую нагрузку и  $z_{\text{макс}}$  рассчитываем по формулам, положив, что  $\phi = 4^\circ$ ,  $c = 9 \text{ МПа}$ ,  $\gamma = 17,9 \text{ кН/м}^3$ .

$$P_{кр} = \frac{\pi(\gamma \cdot z_{\max} \sin \varphi + C \cdot \cos \varphi)}{\frac{z_{\max}}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \varphi + 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha}, \quad (8.3)$$

$$z_{\max} = 0,66 \text{ в } \text{ctg } \alpha,$$

где  $\alpha$  см. рис. 8.1.

Результаты расчёта  $P_{кр}$  и  $z_{\max}$  с учётом влияния усилия от средней части насыпи автодороги приведены в таблицу 8.1.

Таблица 8.1.

Результаты расчёта  $P_{кр}$  и  $z_{\max}$

Высота откоса $h$ , м	$\alpha, ^\circ$	$z_{\max}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{кр}$ , МПа
2	126*	1,32*	0,05	0,06*
3			0,062	
6			0,09	
10			0,133	

\*Примечание: значения  $\alpha$ ,  $z_{\max}$ ,  $P_{кр}$  относятся ко всем значениям  $h$  и  $P_{\text{расч}}$ .

При высоте откосов  $h = 2 - 3$  м устойчивость основания представляется достаточной, и специальных мер по повышению устойчивости откосов не требуется. При высоте откосов более 3 м требуются меры по повышению устойчивости основания.

**Насыпь автодороги на искусственном основании.** Из результатов определения устойчивости насыпи автодороги, полученного в предыдущем разделе, следует, что при высоте откоса  $h > 3$  метров требуется укрепление основания автодорог. В качестве одной из мер укрепления основания можно использовать грунтоцементные сваи (рис.8.2).

Гетерогенное основание в этом случае (рис.8.2) состоит из уплотнённого грунта в межсвайном пространстве и грунтоцементных свай. Несущую способность такого основания рассмотрим, как сумму несущих способностей уплотнённого грунта по методике, изложенной в (Дубов К.А., 2013) и грунто-цементных свай.

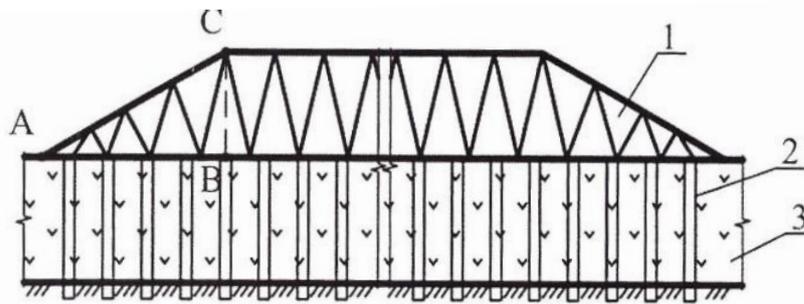


Рис. 8.2. Поперечный разрез насыпи на свайном основании.  
1-насыпь; 2 - грунтоцементные сваи; 3 - уплотнённый грунт

Определим как и в предыдущем разделе действие только откоса (рис. 8.3) на основание в межсвайном пространстве при следующих условиях:  $h = 3,6,8,10$  м;  $\varphi = 10-32^\circ$ ;  $c = 9$  кН/м<sup>3</sup>;  $\gamma = 17,9$  кН/м<sup>2</sup>.

Затем определим несущую способность грунтоцементной сваи при условиях:  $A = 0,79$  м<sup>2</sup> – площадь опирания сваи на грунт;  $u = 3,14$  м – периметр поперечного сечения сваи;  $f_i = 5$  кН / м<sup>2</sup> – расчётное сопротивление  $i$ -го слоя грунта основания по боковой поверхности сваи;  $h_i = 5,6$  м – толщина  $i$ -го слоя грунта, соприкасающегося с боковой поверхностью сваи;  $\gamma_c$  – коэффициент условий работы сваи в грунте;  $\gamma_{cR}$  – коэффициент условий работы грунта под нижним концом сваи, принятый равным 1;  $\gamma_{cf}$  – коэффициенты условий работы грунта по боковой поверхности сваи, принятый равным 0,8;  $R = 2800$  кПа (расчётное сопротивление под нижним концом сваи).

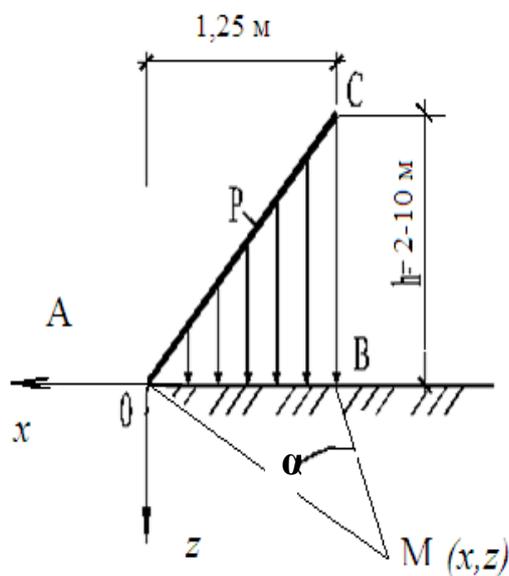


Рис. 8.3. Схема действия треугольной нагрузки

Проверка устойчивости основания при различных диаметрах свай и шаге между ними показала, что необходимому условию прочности отвечает свайное основание, у которого диаметр свай равен 1 м, а расстояние между ними 3, 5 м (рис.8.3).

Используя рекуррентные формулы краевых задач (Соколовский В.В., 1969), найдем максимальную глубину залегания зон предельного напряженного состояния

$$z_{\text{макс}} = 0,27 \text{ м.}$$

Несущую способность свай с учётом сил сопротивления в уровне острия и трения по боковой поверхности сваи вычислим по формуле (СП24.13330.2011,1995):

$$F_d = 1(1,1 \cdot 0,79 \cdot 2800 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5,6) = 2389,24 \text{ кН} = 2,39 \text{ МПа.}$$

Несущая способность сваи в межсвайном пространстве будет равна (СП24.13330.2011,1995)

$$N_0 = \frac{F_d}{\gamma_k} = 1706,6 \text{ кН} ,$$

где  $\gamma_k = 1,4$  – коэффициент надёжности для случая, когда  $F_d$  определена расчётом.

Тогда давление на подошве сваи с учётом сил трения составит

$$P = \frac{N}{\gamma_k} = 2160,25 \text{ кН/м}^2 = 2,16 \text{ МПа} ,$$

где  $N = N_0 + N_{в.с.} + N_{в.гр.}$ ,  $N_{в.с.}$  – вес свай,  $N_{в.гр.}$  – вес грунта.

На основании формулы (2.74) найдем критическое давление от треугольной нагрузки (откоса):

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi(\gamma \cdot z_{\text{макс}} \sin \varphi + c \cdot \cos \varphi)}{\frac{z_{\text{макс}}}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \varphi + 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha} .$$

Полное усилие от треугольной нагрузки с учётом давления на конце сваи на поверхности естественного основания будет равно

$$P_{\text{кр.общ}} = P_{\text{кр}} + P = 2,214 \text{ МПа} .$$

Полученные расчетные данные приведены в таблице 8. 2.

Таблица 8.2.

Расчётные данные  $P_{кр.общ}$  и  $Z_{макс}$  в зависимости от высоты откоса

Высота насыпи $h$ , м	$\alpha, ^\circ$	$Z_{макс}$ , м	$P_{расч}$ , МПа	$P_{кр.общ}$ МПа
6	126*	0,27*	0,084	2,214*
8			0,112	
10			0,140	

\*Примечание: значения  $\alpha$ ,  $Z_{макс}$ ,  $P_{кр.общ}$  относятся ко всем значениям  $h$  и  $P_{расч}$ .

Механизм работы насыпи сводится к следующему: в результате деформаций, возникающих в насыпном слое под влиянием осадки слабого грунта возникает арочный эффект, приводящий к перераспределению напряжений от веса насыпного грунта между сваями и слабым грунтом. Слабый грунт в межсвайном пространстве оказывается под воздействием нагрузки от веса призмы под аркой.

Вывод: прочность основания для насыпи высотой  $h > 3 - 6$  м по всем критериям обеспечена.

**Автодорога Иваново – Кострома.** Формулы предельного состояния были использованы при расчёте устойчивости основания откоса насыпи автомобильной автодороги Иваново – Кострома, проектированием которой занимался ОГУП «Ивановодорпроект».

Трасса автодороги проходит по местности, характеризующейся в инженерно-геологическом отношении слабыми грунтами (рис.8.4, 8.5).

Критерием устойчивости послужило неравенство  $P_{расч} < P_{кр}$ . Расчёт критического давления от действия треугольных нагрузок откоса и межсвайного пространства насыпи, выполнен также, как и в предыдущем разделе.

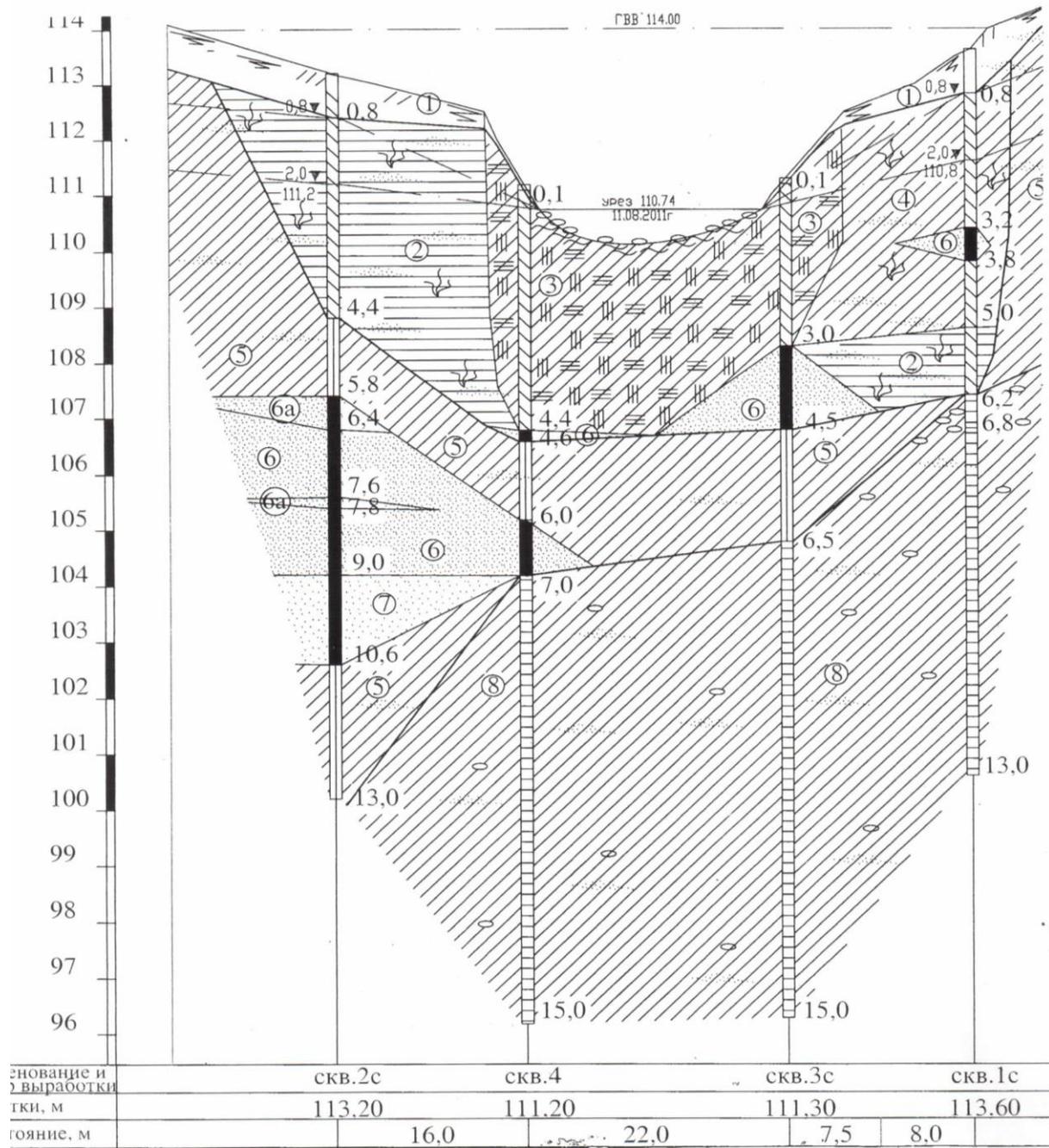
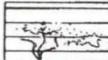
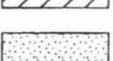
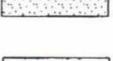
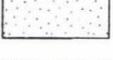
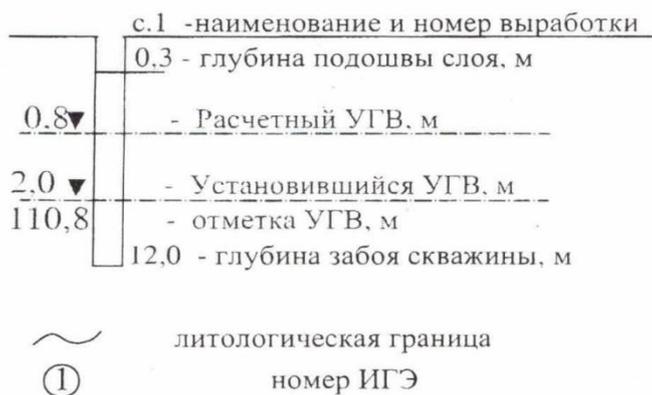


Рис. 8.4. Инженерно-геологический разрез для насыпи автотрассы Иваново – Кострома

### Условные обозначения

	ИГЭ-1 Почвенно-растительный слой
	ИГЭ-2 Глина коричневатая-серая, мягкопластичная, с примесью органических веществ
	ИГЭ-3 Суглинок серый мягкопластичный, слабозаторфованный, с прослоями песка
	ИГЭ-4 Суглинок серый, мягкопластичный, с прослоями песка, с примесью органических веществ
	ИГЭ-5 Суглинок коричневатая-серый, тугопластичный, с прослоями песка
	ИГЭ-6,6a Песок мелкий коричневатая-серый, средней плотности (ИГЭ-6), плотный (ИГЭ-6a), насыщенный водой
	ИГЭ-7 Песок гравелистый, коричневатая-серый, средней плотности, насыщенный водой
	ИГЭ-8 Суглинок коричневый, полутвердый, с прослоями песка, с включением гравия



консистенция	степень влажн.
полутвердый	_____
пластичная	_____
тугопластичный	_____

Рис. 8.5. Условные обозначения к инженерно – геологическому разрезу автодороги

Исходные данные для расчёта: ширина откоса дороги составляет  $b_{от} = 4$  м, высота насыпи  $h = 3$  м, расчётная нагрузка на основание насыпи равна  $P_{расч} = 0,153$  МПа. Грунты в основании характеризуются следующими физическими характеристиками:  $\varphi = 18^\circ, c = 14 \text{ кН/м}^2, \gamma = 11,5 \text{ кН/м}^3$ .

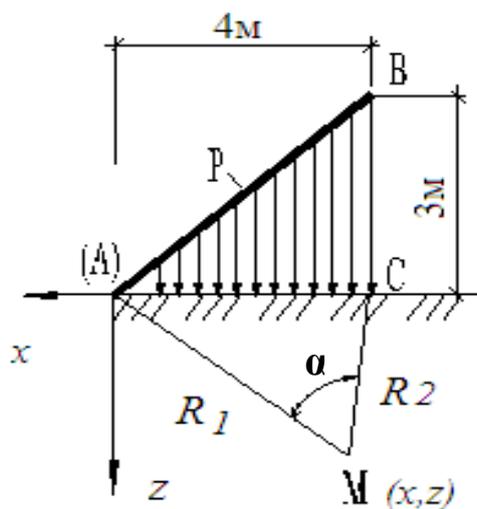


Рис. 8.6. Схема действия треугольной нагрузки

Результаты расчётов представлены в таблице 8.3.

Таблица 8.3.

Результаты расчёта  $P_{кр}$  и  $z_{макс}$  для откоса насыпи

Высота откоса $h$ , м	$\alpha, ^\circ$	$z_{макс}$ , м	$P_{расч}$ , МПа	$P_{кр}$ , МПа
3	81	2,12	0,153	0,273

Поскольку  $P_{кр} > P_{расч}$ , то следовательно, при высоте откоса  $h = 3\text{ м}$  соблюдается условие устойчивости при заданной нагрузке.

**Окружная автодорога в г. Санкт-Петербурге.** Настоящие технические решения разработаны на основе инженерно-геологических данных и общих параметров окружной автодороги. Одной из основных особенностей дорожного объекта является то, что автомобильная дорога первой технической категории, проходит на значительном протяжении по слабым грунтам, полное удаление которых ни технически, ни экономически невозможно (рис. 8.7). Конкретное решение задач исследования выбрано на основе технико-экономического сравнения вариантов с учетом:

- требуемой высоты насыпи и качества имеющего для ее отсыпки грунта;

- вида и особенностей свойств слабых грунтов, залегающих на участке, и особенностей строения слабой толщи (мощность, наличие переслаивания, уклон кровли подстилающих пород и т.д.).

В соответствии с имеющимися данными характеристика толщи слабого грунта приведена в таблице 8.4.

Таблица 8.4.

Характеристика грунтового основания

№ слоя	Наименование грунта	Мощность слоя, м	Расстояние от поверхности земли до подошвы слоя, м
1	Почвенно - растительный горизонт	0,3	0,3
2	Ил суглинистый, текучий с участками торфяных залежей	9	9,3

Мощность грунтовой слабой толщи, складывающейся из слоя № 2 (с учётом удаления верхнего почвенно - растительного слоя 0,3 м), может оцениваться в 9 м. Поперечный профиль насыпи автодороги, представлен на (рис. 8.7).

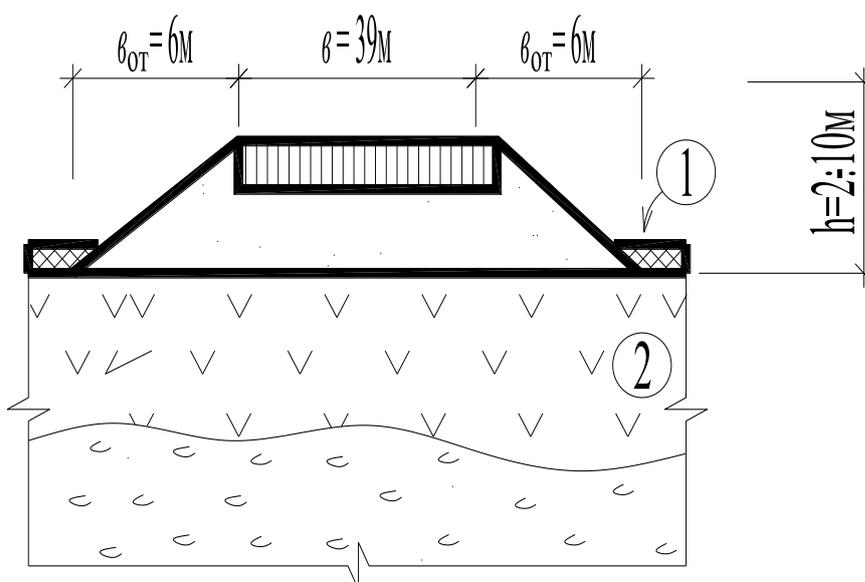


Рис. 8.7. Схема насыпи автодороги.

Выполнение геотехнических расчётов проведено для нескольких случаев, то есть для насыпей, высотой 2, 3,6 и 10 м. При этом в соответствии с рис. 8.7 ширина верхней части насыпи составляет  $b = 39$  м, ширина откосов насыпи  $b_{от} = 6$  м с углом наклона  $\alpha = 20 \div 45^\circ$ .

Покрытие автодороги состоит из асфальтобетона  $\gamma = 0,024$  МПа/м толщиной 1,5м, подстилающего слоя – песка с  $\gamma = 0,02$  МПа /м. Толщина подстилающего слоя меняется в зависимости от высоты насыпи. Расчётное давление на основание от откоса высотой  $h=2 \div 10$  м дороги равно (СП 20.13330.2011,2003)

$$P_{расч} = \kappa_1 P + \kappa_2 P_{тр} + \kappa_3 P_c, \quad (8.4)$$

где  $P = \gamma h$  – нагрузка от откоса, принимаемая в зависимости от высоты насыпи;  $P_{сн} = 0,001$  МПа /м снеговая нагрузка;  $P_{тр} = 0,02$  МПа /м – транспортная нагрузка на автотрассу;  $\kappa_i = 1,2; 1,4$  – коэффициенты надёжности в зависимости от нагрузки.

Учитывая генезис ила и достаточно часто встречающиеся в природном залегании значения физико-механических характеристик суглинистого ила, можно предположить, что индекс пластичности ила не будет превышать  $1,5 \div 2,5$ . При этом допущении значение геотехнических характеристик ила можно назначить, опираясь на (СП24.13330.2011,2000). В соответствии с изложенным, в качестве расчетных приняты значения геотехнических характеристик, представленных в табл. 8.5.

Таблица 8.5.

Физико-механические характеристики основания насыпи

№ слоя	Наименование грунта	$c$ , МПа	$\phi$ , град	$\gamma$ , МПа /м	$E$ , МПа
2	Ил суглинистый, текучий с участками торфяных залежей	0,009	$3^\circ$	0,018	1

Численные результаты  $P_{кр}$  и  $z_{мак}$  приведены в таблице 8. 6.

Таблица 8.6.

Результаты расчёта характеристик для откоса насыпи

Высота откоса $h$ , м	$\alpha, ^\circ$	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
3	79	2,0	0,139	0,280

Вывод: при высоте откоса  $h = 3\text{ м}$  соблюдается условие:  $P_{\text{расч}} < P_{\text{кр}}$ , которое указывает на устойчивость основания при заданной нагрузке.

## 8.2. Расчёт устойчивости оснований некоторых инженерных сооружений

**Взлётно-посадочная полоса (ВПП).** Одной из основных особенностей ВПП является то, что взлётное поле расположено на значительной площади на слабых грунтах. Для обеспечения безопасности и регулярности полётов воздушных судов в соответствии с (Глушков Г.И.,1972 ) и (СП 121.13330.2012,2000) идеальной является ВПП с горизонтальной поверхностью. Взлётная полоса имеет большую длину, и её строительство может быть связано с устройством выемки и перемещением больших объёмов земляных масс. Для обеспечения приемлемой безопасности выполнения взлётно-посадочных операций продольные уклоны ВПП по возможности должны быть минимальными, а их изменений следует избегать. В соответствии с (Глушков Г.И.,1972 ) и (СП 121.13330.2012,2000) максимально допускаемые продольные уклоны ВПП обычно составляют 1,25-1,5%.

В соответствии с имеющимися данными характеристика толщи слабого грунта под взлётное поле указана в таблице 8.7.

Таблица 8.7.

## Послойные характеристики грунтовой среды

№ слоя	Наименование грунта	Мощность слоя, м	Расстояние от поверхности земли до подошвы слоя, м
1	Насыпной грунт	3	3
2	Водоносный слой	0,3	0,3
3	Суглинок мягкопластичный	9	12,3

\*Почвенно-растительный слой толщиной 0,2 - 0,3 м срезается и в дальнейших расчётах не учитывается.

Физико - механические характеристики грунтовой среды приведены в таблице 8.8.

Таблица 8.8.

## Физико-механические характеристики грунтовой среды

Грунт	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\phi$ , <sup>0</sup>	$c$ , кПа	$E$ , МПа
Суглинок мягкопластичный	17,05	13	14	8,7

Поперечный профиль взлётно-посадочной полосы представлен на рис. 8.8.

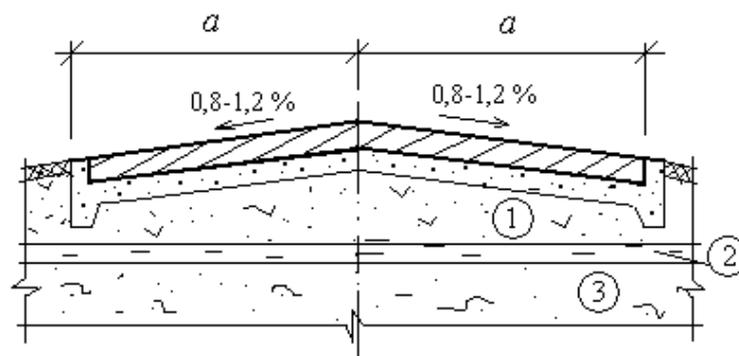


Рис. 8.8. Двухскатный поперечный профиль взлётно-посадочной полосы

\*Наименование грунтов для слоёв 1, 2 и 3 указаны в таблице 8. 7.

Выполнение расчётов проведено для нескольких случаев, то есть для насыпей ВПП высотой 2, 3, 4 и 5 м. При этом в соответствии с (Глушков Г.И., 1972) и (СП 121.13330.2012, 2000) на рис. 8.8 ширина взлётно-посадочной полосы составляет  $a + a = 75$  м, уклоны покрытия двухскатного поперечного профиля полосы составляют 0,8 -1,2%.

Покрытие ВПП состоит: из слоя асфальтобетона  $\gamma = 24$  кН/м<sup>3</sup> толщиной 0,1м, из слоя щебня  $\gamma = 13,6$  кН/м<sup>3</sup>, фракционированного, обработанного вязким битумом толщиной 0,15 м и подстилающего слоя щебня  $\gamma = 13,9$  кН/м<sup>3</sup> толщиной 0,25м. Толщина подстилающего слоя меняется в зависимости от высоты насыпи. Расчётная нагрузка на основание взлётной полосы высотой  $h = 2-5$ м указана в табл.8.9.

Расчёт устойчивости взлётной полосы выполнен на основании формул (3.56, 3.60). Результаты расчётов устойчивости взлётной полосы в зависимости от высот  $h = 3-5$ м указаны в таблице 8.9.

Таблица 8.9.

Результаты  $z_{\text{макс}}$  и расчётных силовых характеристик

Высота насыпных конструкций взлётно-посадочных полос $h$ , м	$\alpha$	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
2	154 <sup>0*</sup>	8,7*	0,184	1,66*
3			0,203	
4			0,221	
5			0,240	

\*Примечание: значения  $\alpha$ ,  $z_{\text{макс}}$ ,  $P_{\text{кр}}$  относятся ко всем значениям  $h$  и  $P_{\text{расч}}$ .

При высоте насыпных конструкций взлётно-посадочных полос  $h = 2-5$  м устойчивость основания является достаточной и специальных мер по его усилению не требуется.

**Стальной резервуар.** В зависимости от чувствительности к деформациям основания все сооружения условно разделяются на три основных типа: абсолютно гибкие, абсолютно жёсткие и конечной жёсткости. Сооружения, относящиеся к абсолютно гибким, беспрепятственно следуют за перемещениями поверхности грунтового основания во всех точках контакта так, что дополнительных усилий при развитии неравномерных осадок в их конструкциях практически не возникает. Даже значительная неравномерная осадка для них не является опасной. К типу таких сооружений относятся днища вертикальных металлических резервуаров, которые без ущерба для прочности могут получать большой прогиб (рис.8.9) при заполнении их жидкостью.

В основу расчёта устойчивости стального резервуара на слабой грунтовой среде положены следующие данные: рис. 8.9, табл. 8.10 и 8.11. Внешняя нагрузка на грунтовую среду под резервуаром, принята в форме равнобедренного треугольника в соответствии с (Методические указания ...)\*. При расчёте  $P_{кр}$  не приняты во внимания усилия, которые оказывает резервуар на свои крепления (рис.8.11).

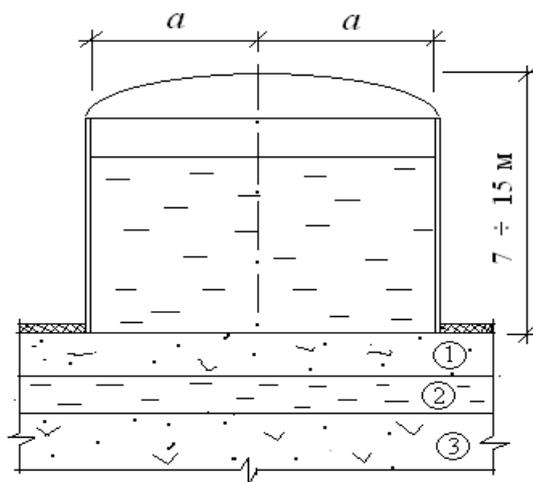


Рис. 8.9. Схема стального цилиндрического резервуара

Грунты, залегающие под резервуаром указаны в таблице 8.10.

---

\* Методические указания на выполнение расчётно-проектировочных работ.- Хабаровск: Из-во ДВГУПС,2003-15 с.

Таблица 8.10.

## Послойные характеристики грунтовой толщи

№ слоя	Наименование грунта	Мощность грунта, м	Расстояние от уровня земли до подошвы грунта, м
1	Насыпной грунт	1,0	1,0
2	Суглинок серый, мягкопластичный с прослойками песка, с примесью органических веществ	0,8	1,8
3	Мягкопластичные суглинки с участками торфяных залежей	8,0	9,8

В качестве расчётных физико-механических характеристик слабого грунтового основания приняты значения, указанные таблице 8.11.

Таблица 8.11.

## Физико-механические характеристики грунтового полупространства

№ слоя	Грунт	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , <sup>0</sup>	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$C_z$ , МПа
1	Насыпной грунт	17,20	-	-	-	-
2	Суглинок серый, мягкопластичный с прослойками песка, с примесью органических веществ	16,22	16,0	10,0	13,85	10,60
3	Мягкопластичные суглинки с участками торфяных залежей	16,05	14,0	12,0	13,2	13,43

Расчётное давление на основание резервуара, наполненного жидкостью равно:

$$P_{\text{расч}} = 1,2P + 1,4 P_{\text{сн}} = 0,22 \text{ МПа} ,$$

где  $P = 180 \text{ кН/м}^2$  – нормативная нагрузка от конструкций резервуара с учётом жидкости,  $P_{\text{сн}} = 1,8 \text{ кН/м}^2$  – нормативная снеговая нагрузка (СП 20.13330.2011). Критическое усилие рассчитано по формуле (Кравченко Т.И. и др., 2016). Расчётная схема приведена на рис. 8.10.

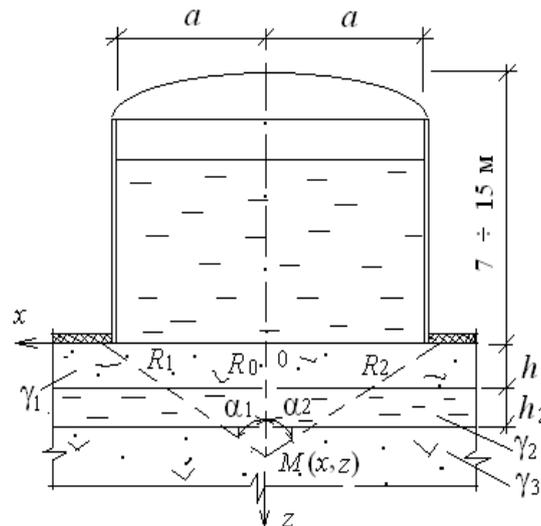


Рис. 8.10. Расчётная схема прогиба днища стального резервуара

Критическая нагрузка определена по формуле:

$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\} = 2,92 \text{ МПа} ,$$

где

$$M = \frac{1,76}{\sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2) \right] = 12,13;$$

$$N = - \left\{ C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76 \pi a \gamma_3 \right\} = -34615,61;$$

$$L = -\pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] = 228039227. \quad (8.5)$$

Результаты расчётов указаны в таблице 8.12.

Таблица 8.12.

Результаты вычисления  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$ 

Высота резервуара $h$ , м	$\alpha, ^\circ$	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
7	144	3,3	0,22	2,92
9			0,28	
11			0,34	
15			0,47	

Критерием устойчивости служит неравенство  $P_{\text{расч}} < P_{\text{кр}}$ . При высоте резервуара с жидкостью  $h = 7-15$  м устойчивость основания является достаточной и специальных мер по повышению устойчивости не требуется.

### 8.3. Расчёт устойчивости оснований искусственных земляных сооружений

**Отвалы.** Отвалы различных продуктов отходов промышленных предприятий (без рассмотрения вещественного состава отходов) в общем случае гипсометрически представляют собой в разрезе неравнобедренный треугольник. Основание отвала рассматривается в виде слоистой толщи (рис. 8.11).

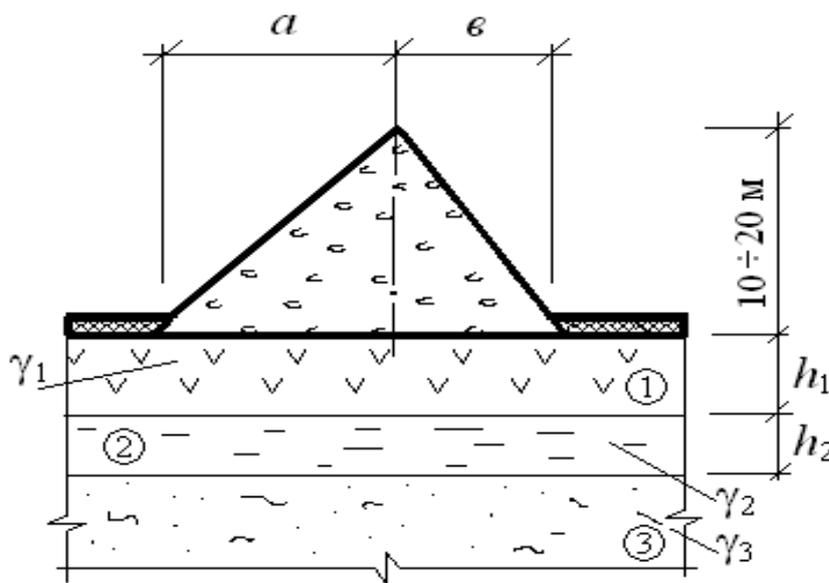


Рис. 8.11. Схема отвала

Рассмотрим задачу о расчёте устойчивости основания отвала, физико-механические свойства основания которого приведены в табл. 8.13, а расчётная схема на рис. 8.11.

Таблица 8.13.

Физико-механические характеристики грунтовой среды

Грунт	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$ , <sup>0</sup>	$c$ , кПа	$E$ , МПа
Насыпной грунт	18,50	-	-	-
Суглинок серый, мягкопластичный с примесью органических веществ	17,40	16,11	10,10	2,6
Текуче-пластичный суглинок	18,06	17	14	2,7

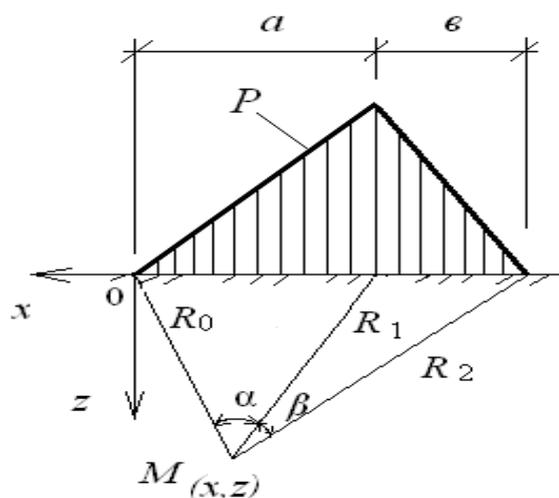


Рис. 8.12. Расчётная схема

Критическое усилие  $P_{кр}$  для различной высоты торфяного отвала вычислено по формуле:

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\},$$

где

$$M = \frac{0,88}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi)(v \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2}) + 0,4(v\alpha - a\beta)];$$

$$N = -\{0,88\pi av \gamma_3 + \frac{C_z av}{(a+v)} [vx\alpha + a(a+v-x)\beta]\};$$

$$L = \frac{\pi av C_z}{(a+v)} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi].$$

Результаты расчётов  $P_{кр}$  представлены в таблице 8.14.

Таблица 8.14.

Результаты расчётов  $P_{кр}$

Складирование сырьём высотой $h$ , м	$\alpha / \beta$	$P_{расч}$ , МПа	$P_{кр}$ МПа
10	54°/49°	0,022	0,0008
12		0,026	
16		0,035	
20		0,044	

При высоте отвалов  $h = 10-20$  м устойчивость насыпи не обеспечена, т. к.  $P_{кр} < P_{расч}$ , поэтому требуются специальные меры по повышению устойчивости основания.

**Отвалы торфа.** В общем случае отвалы торфа могут иметь вид неравнобедренного треугольника. Но в данном случае рассмотрен отвал торфа в форме равнобедренного треугольника, лежащего на основании в форме однородного полупространства (рис.8.13).

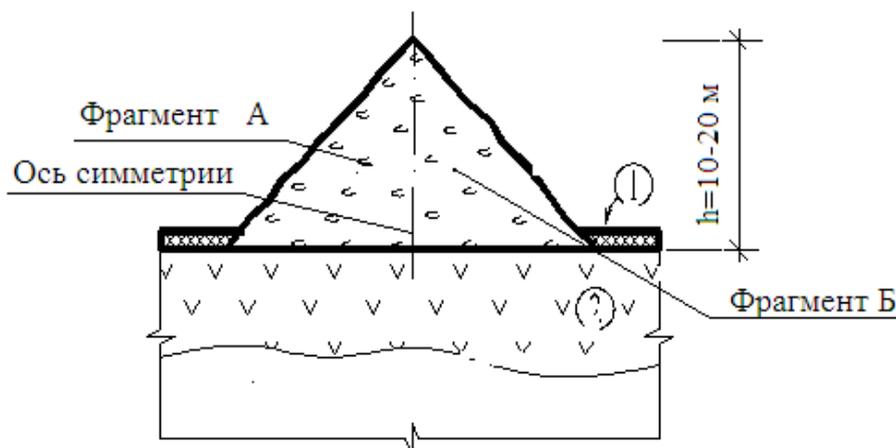


Рис. 8.13. Схема отвала торфа

Расчётная схема нагрузки представляется в виде совокупности двух одинаковых прямоугольных треугольников (рис. 8.13 и 8.14).

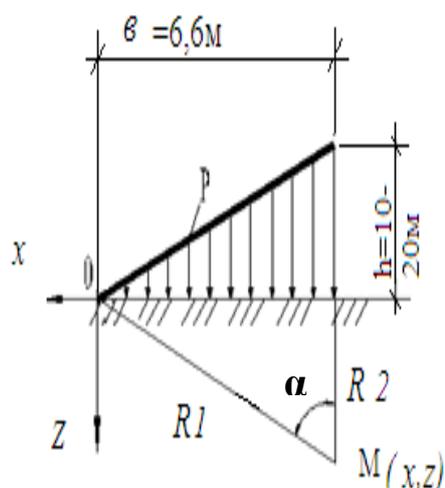


Рис. 8.14. Расчётная схема

Послойная характеристика основания отвала и физико-механические свойства пород основания представлены в таблице 8.15.

Таблица 8.15.

Послойная характеристика грунта

№ слоя	Наименование грунта	Мощность слоя, м	Расстояние от поверхности земли до подошвы слоя, м
1	Растительный покров	0,2	0,2
2	Увлажнённые заторфованные грунты	6	6,2

Таблица 8.16

Физико-механические свойства грунта

№ слоя	Наименование грунта	c, МПа	$\varphi, ^\circ$	$\gamma$ , МПа/м	E, МПа
2	Увлажнённые заторфованные грунты	0,012	$4^\circ$	0,012	1,2

Расчётное давление на основание торфяного отвала высотой  $h = 10 - 20$  м определяется по формул (СП20.13330.2011,2003) :

$$P^{\text{расч}} = 1,2 \cdot P + 1,4 P_{\text{сн}} ,$$

где  $P = \gamma h$  – нормативная нагрузка от отвала, вычисленная в зависимости от высоты отвала;  $\gamma = 0,012$  МПа/м – удельный вес торфа ;  $P_{\text{сн}} = 0,001$  МПа – нормативная снеговая нагрузка;  $P^{\text{расч}}$  вычислена при переменном угле внутреннего трения подстилающего слоя, т.е.  $\varphi = 10^0 - 30^0$ .

Критическое усилие  $P_{\text{кр и}}$  для различной высоты торфяного отвала вычислены по формуле:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi(\gamma \cdot z_{\text{макс}} \sin \rho + c \cdot \cos \rho)}{\frac{z_{\text{макс}}}{e} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \rho) - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \rho + 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha} ,$$

где

$$z_{\text{макс}} = 0,25 e = 1,65 \text{ м.}$$

Результаты расчёта  $P_{\text{кр}}$  приведены в таблице 8.17.

Таблица 8.17.

Результаты расчёта  $P_{\text{кр}}$

Высота складирования $h$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
10	0,073	0,090
12	0,088	
16	0,117	
20	0,145	

По результатам вычислений было установлено:

1. При высоте отвала  $h = 10-12$  м устойчивость основания является достаточной и специальных мер по её повышению не требуется.
2. При высоте отвала больше 12 м требуется специальные меры по повышению устойчивости основания отвала.

**Торфяные отвалы на основаниях, укрепленных песчаными сваями.** Для повышения устойчивости основания торфяного отвала высотой более 12 метров может быть предусмотрено применение песчаных свай, заложенных в этом основании (рис. 8.15). Для изучения этого во-

проса нами были выполнены расчёты критической нагрузки на свайное основание при различном диаметре свай и различном расстоянии между осями этих свай при условии, что сваи выполнены из песка.

Песчаные сваи устраивают путем забивки в грунт металлической инвентарной трубы с закрытым концом с последующим заполнением её тщательно уплотненным песчаным грунтом и последующим извлечением трубы (Далматов Б.И.,1975). Вокруг ствола сваи образуется уплотнённая зона грунта за счет его смещения в межсвайное пространство. За счет забивки металлической трубы в уплотненной зоне возникают большие напряжения (до 0,8 МПа). После устройства основания с песчаными сваями внешняя нагрузка, передаваемая отвалом, воспринимается песчаными сваями и уплотненным межсвайным грунтом. После устройства песчаных свай над ними делают песчаную подушку толщиной 60 см. Для заполнения свай используется песок средней крупности или крупный с содержанием пылеватых и глинистых частиц в объёме не более 10% .

Применение песчаных свай позволяет удешевить строительство оснований по сравнению с использованием бетонных свай при сохранении величины допускаемых нагрузок на основании.

$R_{расч}$  вычислена при переменном угле внутреннего трения основания  $\varphi = 10^{\circ} - 30^{\circ}$ .

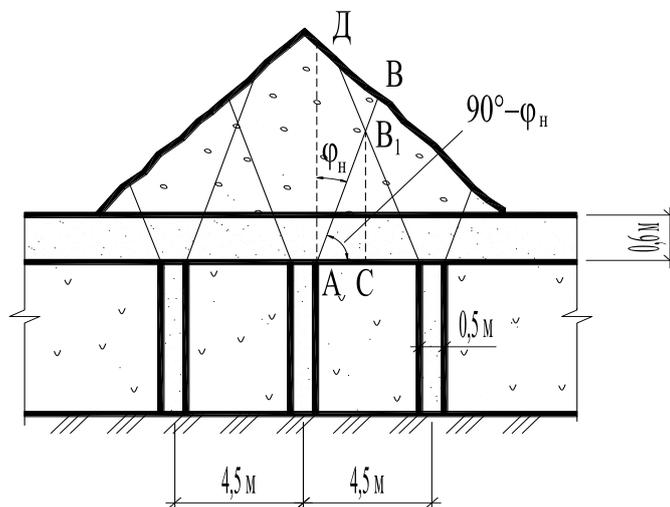


Рис. 8.15. Поперечный разрез отвала и свайного основания

Проверка устойчивости основания при различных диаметрах свай и межсвайных расстояниях показала, что необходимому условию прочности отвечает свайное основание у которого диаметр свай равен

0,5 м с расстоянием между сваями 4,5 м. Ниже приведён расчёт критической нагрузки для этого свайного основания (рис. 8.16) с такой характеристикой свай.

Для треугольной нагрузки из ранее полученных расчётов угол видимости  $\alpha = 125^\circ$ .

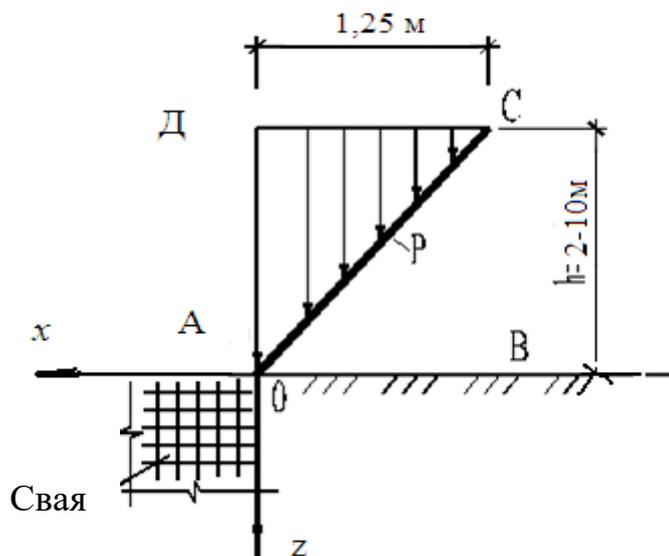


Рис. 8.16. Схема действия нагрузки

Критическая нагрузка равна

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi(\gamma \cdot z_{\text{макс}} \sin \rho + C \cdot \cos \rho)}{\frac{z_{\text{макс}}}{\nu} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \rho) - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \rho + 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha},$$

где  $z_{\text{макс}} = 0,25 \nu = 0,31 \text{ м}$ .

Расчётную несущую способность основания с учётом сил трения, по боковой поверхности свай вычислим по формуле на (СП24.13330.2011,2000):

$$F_d = \gamma_c (\gamma_{cR} \cdot A \cdot R + u \sum \gamma_{cf} f_i \cdot h_i) = 2168,04 \text{ кН},$$

где  $A = 0,196 \text{ м}^2$ ;  $u = 1,57 \text{ м}$ ; численные значения остальных параметров в (СП24.13330.2011,2000).

Предельная несущая способность свай в межсвайном промежутке будет равна (СП24.13330.2011,2000)

$$N = F_d / \gamma_k = 1548,6 \text{ кН},$$

где  $\gamma_k = 1,4$  – коэффициент надёжности.

Тогда давление в нижней части сваи с учётом сил трения составит

$$P = 7,901 \text{ МПа.}$$

Полная критическая нагрузка с учётом сил трения по боковой поверхности сваи будет равна

$$P_{\text{кр. общ}} = P_{\text{кр}} + P = 8,012 \text{ МПа.}$$

Результаты расчётов нагрузки представлены в таблице 8.18.

Таблица 8.18.

Результаты расчёта  $P_{\text{кр}}$  грунтовой среды в межсвайном пространстве

Высота насыпи $h$ , м	$\alpha, ^\circ$	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
7,75	125	0,109	8,012
10,08		0,141	
11,38		0,159	
14,22		0,199	

Из результатов расчётов (табл.8.18) следует, что прочность основания отвала высотой  $h = 10 - 20$  м обеспечена.

Выполненные исследования отвала высотой  $h = 10 - 20$  м с помощью полученных формул и с использованием известных методов расчёта отвечает критериям устойчивости.

По результатам анализа критических нагрузок для оснований отвалов было определено техническое решение о наиболее целесообразном варианте конструкции основания в слабом грунте. Критерием устойчивости оснований отвалов является проверка грунтовой среды на условие:

$$P_{\text{расч}} < P_{\text{кр}}.$$

Для других случаев, где условие устойчивости не соблюдается, т.е.  $P_{\text{расч}} > P_{\text{кр}}$  должно предусматриваться использование слабого грунта в качестве основания с применением мероприятий, обеспечивающих устойчивость основания.

Приведенные примеры показывают эффективность разработанной методики для расчёта оснований различных сооружений в слабых грунтах.

## ПОСЛЕСЛОВИЕ

В результате проведённых исследований решены поставленные задачи, сформулированы направления по которым могут быть развиты научно-инженерные исследования с учётом современных тенденций в строительной практике, например: здания повышенной этажности, мостовые сооружения и другие сверхмощные конструкции, и получены следующие выводы.

1. Известные расчётные методы, используемые в современной нормативной литературе, не всегда обеспечивают возможность найти экономичные и эффективные решения при проектировании фундаментов и насыпей на слабых грунтах.

2. Разработанные методики расчётов несущей способности слабых оснований с помощью физических и численного метода позволяют исследовать напряжённо - деформированное состояние в любых точках грунтов под действием внешней нагрузки, в которых происходит начало развития и завершение пластических областей, напряжённое состояние в этих случаях не может нарушить предельного равновесия массива грунта.

3. Лабораторные опыты показали, что для моделирования напряжённо - деформированного состояния толщи слабого грунта можно использовать материал с высокой оптической чувствительностью – желатин, близкий к грунтам по физическим свойствам. Это позволило обосновать методику проведения экспериментов и правильный выбор материала (желатина).

4. Проверка полученных решений задач, с применением поляризационно - оптического метода, обладающего наглядностью и метода конечных элементов (МКЭ) дала надёжный результат.

5. Установлена экспериментально и теоретически обоснована на приведенных моделях аналогия картин распределения изохром, изоклин в упругой и пластической зоне, но напряжённое состояние которых имеет существенное различие.

6. Экспериментальные графики изменения напряженного состояния упругопластической среды подобны графикам, выполненными численным методом при действии внешней нагрузки.

7. Проблемы, возникающие при проектировании и строительстве оснований и фундаментов высотных зданий, обусловленные этажностью здания и его размерами приводят к существенным изменениям процесса формирования напряженно - деформированного состояния основания.

Инженерно-геологические изыскания, а также стандарты испытаний в диапазоне напряжений не соответствует уровню нагрузок, передаваемых на основание фундаментами высотных зданий.

8. При переходе от упругого деформирования к упругопластическому резко увеличивается сжимаемость грунтов, деформации грунтов могут быть существенно нелинейными. Модули упругих и упругопластических деформаций должны устанавливаться для диапазона напряжений, соответствующего передаваемым на основание фундаментами нагрузкам.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абелев М.Ю. Слабые водонасыщенные глинистые грунты как основания сооружения [Текст]: учеб. пособие / М.Ю. Абелев. - М: Изд. МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1973.-218с.
2. Абелев М.Ю. Строительство промышленных и гражданских сооружений на слабых водонасыщенных грунтах [Текст]: учеб. пособие/ М.Ю. Абелев.- М.: Стройиздат, 1983.-248 с.
3. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость [Текст]: учеб.- мет. пособие / Х. К. Абен. -Таллин: Валгус, 1975. -218с.
4. Александров А.Я. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела [Текст]: учеб. пособие / А.Я. Александров, М.Х. Аметренков.- М.: Наука, 1973.-576 с.
5. Амарян Л. Г. Разумные экстремальные задачи [Текст] : учеб. пособие / Л. Г. Амарян. - СПб.: Издательство Гиппократ, 1995.-230с.
6. Амарян Л. Г.Свойства слабых грунтов и методы их изучения [Текст]: учеб. для вузов / Л. Г. Амарян. - СПб.: Издательство Недр, 1990.-220с.
7. Арцыбашев В.А. Гамма–метод измерения плотности [Текст] : учеб. пособие / В.А. Арцыбашев.-М.: Атомиздат,1965.-143 с.
8. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] : учеб. пособие / Н.И. Безухов. -М.: Высшая школа, 1968.-512с.
9. Березанцев В.Г. Расчёт оснований сооружений [Текст]: учеб. пособие / В.Г. Березанцев. - Л.: Стройиздат, 1970.-207с.
10. Березанцев, В.Г. Расчёт прочности оснований и сооружений [Текст]: учеб.- метод. пособие / В.Г. Березанцев.- Л.: Госстройиздат, 1960. – 138 с.
11. Березанцев В. Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды [Текст]: учеб.-метод. пособие / В. Г. Березанцев. - М.: Гостехиздат, 1952.- 120с.

12. Ван Цзи -Де. Прикладная теория упругости [Текст]: учеб. пособие / Ван Цзи -Де. - М.: Физматгиз, 1959.-400с.
13. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст]: учеб. пособие / Г.С. Варданян, В.И. Андреев. - М.: АСВ, 1995.-502с.
14. Вольтмир А.С. Устойчивость деформируемых систем [Текст]: учеб. пособие / А.С. Вольтмир. - М.: Физматгиз, 1967.-307с.
15. Воронцов В.К. Фотопластичность [Текст]: учеб. пособие / В.К. Воронцов, П.И. Полухин. - М.: Металлургия, 1969.-400с.
16. Герсеванов Н.И. Свайные основания и расчёт фундаментов сооружений [Текст] / Н.И Герсеванов // Собр. соч.: т. 1.- М.: Стройвоенмориздат, 1948.- 270 с.
17. Глушков Г.И. Изыскания и проектирование аэродромов [Текст]: учебное пособие / Г.И. Глушков, Б.С. Раев – Богословский.- М.: «Транспорт», 1972.-280 с.
18. Голушкевич С.С. Плоская задача теории предельного равновесия сыпучей среды [Текст]:учеб. пособие / С.С.Голушкевич.- М.: Гостехиздат, 1948.- 258 с.
19. Голушкевич С.С.Статика предельных состояний грунтовых масс [Текст]:учеб. пособие / С.С.Голушкевич.- М.:Гостехиздат,1957.- 408 с.
20. Горбунов-Посадов М.И. Устойчивость фундаментов на песчаном основании [Текст]: учеб. пособие / М.И. Горбунов-Посадов. - М.: Госстройиздат, 1962.- 230с.
21. Далматов Б.И. Проектирование свайных фундаментов в условиях слабых грунтов [Текст]: учеб. пособие для вузов / Б.И. Далматов, Ф.К. Лапшин, Ю.В. Россихин. - М.: Высшая школа, 1975.- 295 с.
22. Дубов К.А. Методика и некоторые результаты исследования плоского поля плотности грунтов с помощью гамма – излучения  $Co^{60}$  [Текст] / К.А. Дубов, Голиков, П.П. Зольников // Сборник трудов молодых учёных Уральского Промстройниипроекта. - Свердловск, 1988.- С.42-47.

23. Дубов К.А. Основания и фундаменты. [Текст] / К.А. Дубов // Методические указания к практическим занятиям.- Владимир, 2013.- 92с.
24. Дубов К.А. Некоторые закономерности образования и развития пластических деформаций в глинистом грунте [Текст] / К.А. Дубов // Сборник материалов третьей научно-технической конференции УПИ.- Свердловск, 1980.- С.33-37.
25. Дубов К.А. Форма уплотнённого ядра, образующегося в глинистом основании под жёстким фундаментом при критической нагрузке [Текст] / К.А. Дубов // Основания, фундаменты и подземные сооружения: сб. науч. тр. НИИОСП .- Екатеринбург, 1972.- № 63.-С.45-49.
26. Дубов К.А. Исследование предельных состояний слабых глинистых грунтов оснований по условию прочности [Текст] / К.А. Дубов // Проектирование обустройства нефтяных месторождений Западной Сибири: труды Гипротюменнефтегаза.-Тюмень, 1972.- Вып.34.- С.33-37.
27. Емельянов В.А. Полевая радиометрия влажности и плотности почвогрунтов [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.А. Емельянов.- М.: Атомиздат, 1970.- С.123с.
28. Завельский Ф.С. Определение плотности и влажности грунта методом поглощения гамма-излучения в условиях геометрии узкого и широкого пучка [Текст] / Ф.С. Завельский // Разведка и охрана недр : учеб. пособие , №9, 1969.- С.55-64.
29. Кагановская С.Е. Исследование устойчивости глинистого основания с помощью экранов [Текст] / С.Е. Кагановская // Основание, фундаменты и механика грунтов: межвуз. сб. науч. тр. № 3.-Екатеринбург: Изд-во Уральского гос. горного ун-та ,1973.- Вып. 3.- С.58-64.
30. Качанов Л.М. Основы теории пластичности [Текст]: учеб. пособие для вузов / Л.М. Качанов. - М.: Наука, 1969.-420с.
31. Кац А.М. Теория упругости [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.М. Кац.- М. - Л.: Гостехиздат, 1956.- 251с.

32. Кравченко Т.И. Исследование устойчивости оснований фундаментов на слабых грунтах [Текст] / Т.И. Кравченко, О. Г. Вострикова // Известия Ивановского отделения ПАНИ при ИГТА. Секция технических наук.- Иваново, 2003.- С.100 -106.
33. Кравченко Т. И. Исследование прочностных характеристик желатина в качестве упругопластической среды с определением коэффициента вязкости [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // / Изв. вузов. Строительство. Вып.1. – 2007. С.108 -112.
34. Кравченко Т.И. Оценка предельного критического усилия на упругопластическую грунтовую среду от действия треугольной нагрузки [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Изв. вузов. Горный журнал.- 2012.- №5.- С.68-72.
35. Кравченко Т.И. Оценка предельного критического усилия на упругопластическую грунтовую среду от действия треугольной нагрузки [Текст] / Т.И. Кравченко, В.В. Филатов // Изв. вузов. Горный журнал.- 2015.- №5.- С.68-72 .
36. Кравченко Т.И. Оценка критической нагрузки, обусловленной отрицательной формой техногенного рельефа [Текст] / Т.И. Кравченко, В.В. Филатов // Вест. Курганского гос. ун-та. Сер. Естественные науки.- 2015.- № 35. - С.67-70.
37. Кравченко Т. И. Современный взгляд на проблемы технических наук [Текст] / Т.И. Кравченко, В.В. Филатов // Сб. науч. тр. по итогам II международной научно - практической конференции (10.09.15 г.). - Уфа, 2015.- № 2. - С. 108 -113.
38. Кравченко Т.И., Филатов В.В. Оценка критической нагрузки, обусловленной отрицательной формой техногенного рельефа [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Изв. Саратовского гос. ун-та. Серия: Наука о земле.- 2015 г.- № 4. - С.67-70.

39. Кравченко Т.И. Аппроксимация аналитических зависимостей критических усилий и максимальных глубин их проявления линейными функциями [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Вест. Тувинского гос. ун-та.- 2015.- №3.- С.27-31 .
40. Кравченко Т.И. Критические усилия в слабых водонасыщенных грунтовых средах под действием внешних нагрузок [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Вест. Воронежского гос. ун-та.- 2015.- №4.- С.139-145.
41. Кравченко Т.И. Прогноз устойчивости слабых грунтовых сред физическими и численным методами [Текст]: монография / Т. И. Кравченко, В. В. Филатов. - Изд-во Владимирского гос. ун-та. -2015. -86 с.
42. Кравченко Т.И. Прогноз устойчивости однослойных и многослойных грунтовых сред в линейной постановке задач [Текст]: монография / Т. И. Кравченко, В. В. Филатов. - Изд-во Владимирского гос. ун-та. - 2015.-142 с.
43. Кравченко Т. И. Расчёт однослойных и многослойных грунтовых сред от действия внешних нагрузок в линейной постановке задач [Текст]: учеб. пособие / Т. И. Кравченко, В. В. Филатов. - Изд-во Владимирского гос. ун-та. - 2015. - 146 с.
44. Кравченко Т.И. Дефекты зданий и сооружений. Усиление строительных конструкций [Текст] /Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Сборник научных статей XIX научно-методической конференции ВИТУ(19.03. 2015 г.)/ ВИ (ИТ) ВА МТО (ВИТУ).- СПб, 2015 г.- С.162-167.
45. Криворотов А.П. Экспериментальные исследования несущей способности песчаного основания [Текст] / А.П. Криворотов // Основания, фундаменты и механика грунтов: межвуз. сб. науч.тр.- Екатеринбург:Изд-воУральского гос.горного ун-та ,1962.- № 5.- С.34-41.

46. Лейпунский О.И. Распределение гамма-квантов в веществе [Текст]: учеб. метод.- пособие / О.И. Лейпунский .- М., Физматгиз, 1960.-115 с.
47. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статической теории обработки наблюдений [Текст]: учеб. для вузов / Ю.В. Линник. -2-е изд. - М.: Физматгиз, 1962.-349 с.
48. Малинин А.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Малинин.- М.: 1975.-415с.
49. Малышев М.В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений [Текст]: учеб. пособие / М.В. Малышев.- 1-е изд. - М.: Машстройиздат, 1980.- 227с.
50. Малышев М. В. О совместной работе жёстких фундаментов и нелинейно-деформируемого основания [Текст] / М.В. Малышев, Ю.К. Зарецкий, В.Н. Широков, В.А Черемных // Сб. науч. тр. к VIII Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению.- М.: Стройиздат, 1973.- 224 с.
51. Малышев М.В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений [Текст] : учеб. пособие / М.В. Малышев.- 2 - е изд. - М.: Машстройиздат,1994.- 312с.
52. Малышев М.В. Механика грунтов. Основания и фундаменты [Текст]: учеб. пособие / М.В. Малышев.- М.: Ассоциация строительных вузов, 2000. - 319с.
53. Маслов Н.Н. Основы механики грунтов и инженерной геологии [Текст]: учеб.-метод. пособие / Н.Н. Маслов. - М.: Высшая школа,1968.- 629с.
54. Маслов Н.Н. Прикладная механика грунтов [Текст]: учеб. пособие / Н.Н. Маслов. - М.: Машстройиздат, 1949.-328с.
55. Мурзенко Ю.Н. Некоторые особенности и область применения решения смешанной упругопластической задачи в расчётах оснований [Текст] / Ю.Н. Мурзенко // Экспериментально - теоретические исследования нелинейных задач в области оснований и фундаментов: сб. НПИ. - Новочеркасск, 1979.- С. 106 -139.

56. Мурзенко Ю.Н. Расчёт оснований зданий и сооружений в упругопластической стадии работы с применением ЭВМ [Текст]: учеб.- метод. пособие / Ю.Н. Мурзенко. - Л: Стройиздат, 1989.- 234 с.
57. Мурзенко Ю.Н. Упругопластическое состояние основания при полосовой нагрузке [Текст] / Ю.Н. Мурзенко // Труды НПИ, т.2. - Новочеркасск, 1971.- С. 315-456.
58. Нетребко В.П. Исследование метода линейной фотовязкоупругости [Текст] / В.П. Нетребко, Г.З. Шарафутдинов // Отчет о НИР (42<sup>й</sup>). - М.: Издательство МГУ, 1974.- 191с.
59. Нетребко В.П. Исследование метода линейной фотовязкоупругости [Текст] / В.П. Нетребко, Г.З. Шарафутдинов // Отчет о НИР (ч. 1). - М: Издательство МГУ, 1972.- 227с.
60. Петраков А.А. Механика грунтов [Текст]: /учеб. пособие Дон НАСА / А.А. Петраков, В. В. Яркин, Р. А.Таран, Т. В. Казачек. - Украина, Макеевка: Из-во Дон НАСА, 2004.- 79 с.
61. Пигулевский М.Х. Физикоо-механические свойства рыхлых дорожных материалов [Текст]: учеб.- метод. пособие / М.Х. Пигулевский.- М.: Транспечать, 1929.-210 с.
62. Ржаницын А.Р. Расчёт сооружений с учётом пластических свойств материала [Текст]: учеб. для вузов / А.Р. Ржаницын.- М.: Стройиздат, 1954. - 288с.
63. Роза С.А. Механика грунтов [Текст]: учеб. для вузов / С.А. Роза.- М.: Высшая школа, 1962. – 229с.
64. Скибин Г.М. Экспериментальное обоснование расчётной модели упругопластического основания ленточных фундаментов [Текст] / Г.М. Скибин // Изв. вузов. Строительство.- Новосибирск : Из-во Сибстрин, 2005.- С.28 -33с.
65. СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений [Текст]: Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83\* -1995.-Введ.1985-01-01.- М.: Госстройиздат, 2000.- 40 с.

66. СП24.13330.2011.Свайные фундаменты [Текст]: Актуализированная редакция СНиП2.02.03-85 -1995.- Введ.1987- 01- 01.- М.: Стройиздат,1995. -63 с.
67. СП 121.13330.2012. Аэродромы [Текст]: Актуализированная редакция СНиП 32.03.96-1996.- Введ.1997-01-01.- М.: Минстрой России, 2000. - 59 с.
68. СП 20.13330.2011. Нагрузки воздействия [Текст]: Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\* -1996. - Введ.1987-01-01. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 2003.- 36 с.
69. СП 34.13330.2012. Автомобильные дороги [Текст]: Актуализированная редакция СНиП 2.05.02.-85. - Введ.1987-01-01. М.: Стройиздат, 2003. - 70 с.
70. Справочник инженера-строителя под.ред. Г.А.Федотова /«Проектирование автомобильных дорог». - М.: Транспорт, 1992.- 423с.
71. Соколовский В.В. Теория пластичности [Текст]: учеб. для вузов / В.В. Соколовский.- 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Гостехиздат, 1969.- 608с.
72. Соколовский В.В. О плоской задаче теории пластичности [Текст] / В.В. Соколовский // Прикладная математика и механика.-Т.1.-1949.- Вып. 4.- 280с.
73. Соколовский В.В. Теория пластичности [Текст]: учеб. для вузов / В.В. Соколовский.- 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Гостехиздат, 1950.- 203с.
74. Строганов А.С. Несущая способность глинистого водонасыщенного основания [Текст] / А.С. Строганов // Основания, фундаменты и механика грунтов: учеб. пособие. - М., 1977. - № 5.-110 с.
75. Строганов А.С. Прочность оснований сооружений [Текст] / А.С. Строганов // Основания, фундаменты и механика грунтов: учеб. для вузов. - 1983.- № 23. - 127с.
76. Тер-Мартиросян З.Г. Механика грунтов [Текст]: монография / З.Г. Тер-Мартиросян . - М.: Изд-во АСВ, 2009. - 552 с.

77. Терцаги К. Теория механики грунтов [Текст]: учеб. пособие / К. Терцаги. - М.: Госстройиздат, 1961.- 507с.
78. Тимошенко С.П. Теория упругости [Текст]: учеб. пособие / С.П. Тимошенко, Дж Гудьер. - М., 1975.- 386 с.
79. Ухов С.Б. Механика грунтов, основания и фундаменты [Текст]: учеб. пособие / С.Б. Ухов. - М.: Высшая школа, 2007.- 566 с.
80. Учайкин В.В. Механика. [Текст] / Л. Файлон. М. // Основы механики сплошных сред: учеб. пособие. - М.: Институт компьютерных исследований, 2002. - 281 с.
81. Файлон Л. Оптический метод исследования напряжений [Текст]: учеб. пособие / Л. Файлон. М.-Л.: Гостоптехиздат, 1940. - 402 с.
82. Феронский В.И. Радиоизотопные методы исследований в инженерной геологии [Текст]: учеб.- метод. пособие / В.И. Феронский, А.И. Данилин, В.Т. Дубинчук. - М.: Атомиздат, 1968.-210 с.
83. Фёдоров И.В. Некоторые задачи упругопластического распределения напряжений в грунтах, связанные с расчётом оснований [Текст] / И.В. Фёдоров // Сб. института механики АН СССР: в 2 т. - М.,1958.- С.151- 160.
84. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости [Текст]: учеб. пособие / М.М. Филоненко-Бородич.- М.: Физматгиз, 1959. - 364 с.
85. Флорин В.А. Основы механики грунтов [Текст]: учеб.- метод. пособие в 2-х т./ В.А. Флорин. - М., 1959, 1961.-284 и 293 с.
86. Фрохт Н.М. Фотоупругость [Текст]: учеб. пособие в 2-х т./ Н.М. Фрохт. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950. - 450 и 488 с.
87. Хаар М.Е. Основы теоретической механики грунтов [Текст]: учеб.- метод. пособие / М.Е. Хаар. - М., 1971.- 341 с.
88. Хилл Р. Математическая теория пластичности [Текст]: учеб.-метод. пособие / Р. Хилл.- М.: Гостехиздат, 1956. - 407 с.

89. Цытович Н.А. Механика грунтов [Текст]: учеб.пособие / Н.А. Цытович. - 4 изд. - М.: Высшая школа, 1983. -281 с.
90. Шарафутдинов Г.З. Фотовязкоупругость [Текст]: учеб. пособие / Г.З. Шарафутдинов.- М.: Издательство МГУ, 1987. - 198 с.
91. Эдельштейн Е.И. Координатно-синхронный поляриметр КСП-10 [Текст]: материалы к Всесоюзной конф. по методу фотоупругости / Е.И. Эдельштейн. -Таллин: АНЭ ССР, 1970.- С. 115 - 119.
92. Reginato, Van Bavel. Soil water seacuresent with genna attennation. Soil soi. Soc. of Amer. Proc., 28 p., 1964.

## **ПРИЛОЖЕНИЯ**

Результаты экспериментальных исследований деформаций на физических моделях при центральной и внецентренной нагрузках. \*

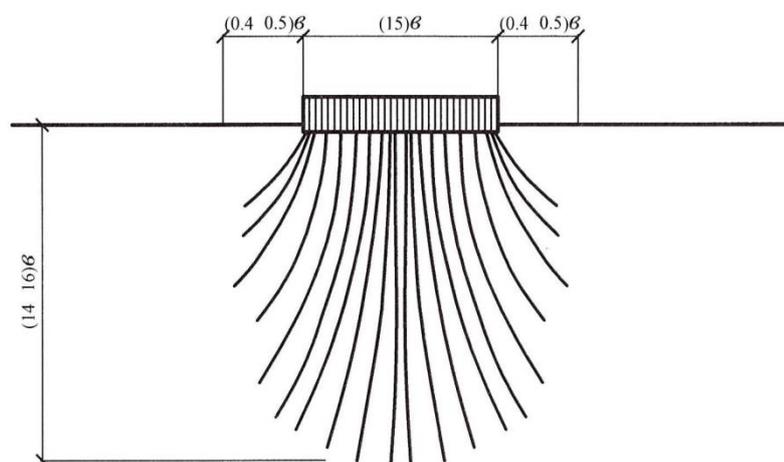


Рис. 1.1. Траектории перемещения частиц глинистого грунта тугопластичной консистенции в фазе уплотнения, полученные на парафинированном экране с помощью песчинок, вкрапленных в глину ( $P=0.3P_{пр}$ ; глина -  $J_p=0.18$ ;  $J_L=0.30$ ;  $\gamma_0=18.9$  кН/м<sup>3</sup>).

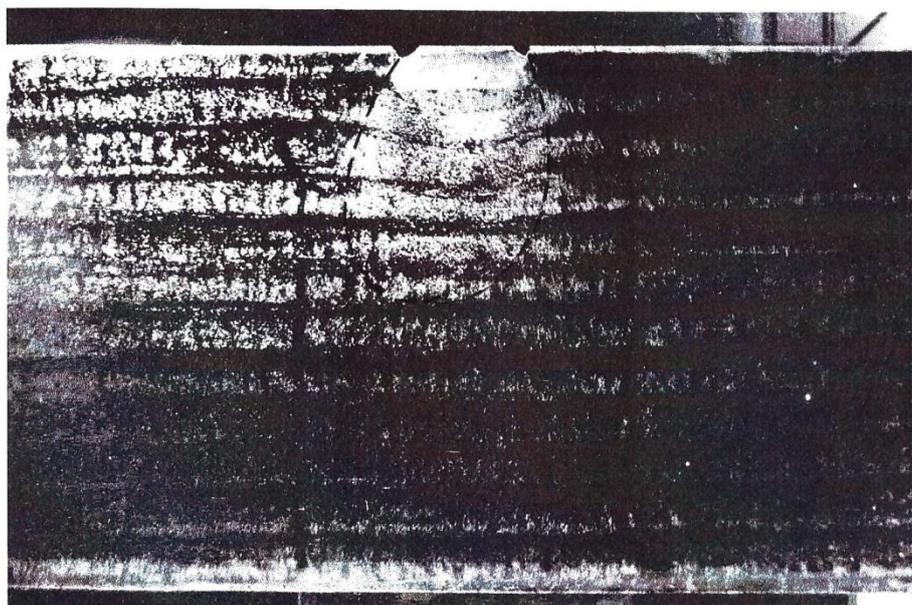


Рис. 1.2. Траектории перемещения частиц глинистого грунта тугопластичной консистенции в фазе сдвигов, полученные на парафинированном экране ( $P=0.5P_{пр}$ ;  $J_p=0,18$ ;  $J_L=0.30$ ;  $\gamma_0=18.9$  кН/м<sup>3</sup>).

\* Размеры на рис. 1.1; 1.6 приложения 1 даны в сантиметрах, а на рис. 1.3; 1.5; 1.8 приложения 1 даны в миллиметрах.

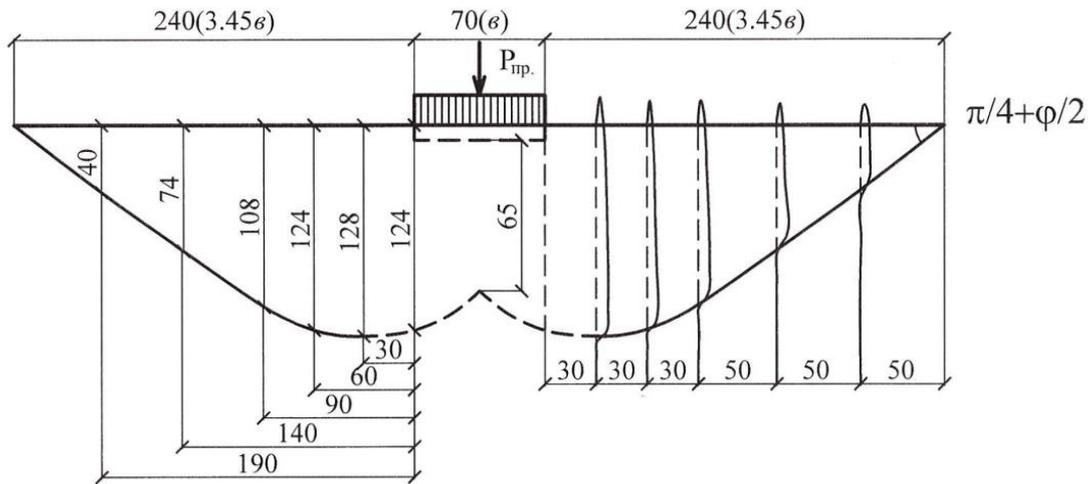


Рис. 1.3. Поверхности скольжения при симметричном разрушении глинистого основания полутвердой консистенции, установленные при помощи свинцовых полосок (глина с  $J_p=0.20$ ;  $J_L=0.12$ ;  $\gamma_0=18.9$  кН/м<sup>3</sup>;  $c=3.0$  кПа;  $\varphi=17^\circ$ ).

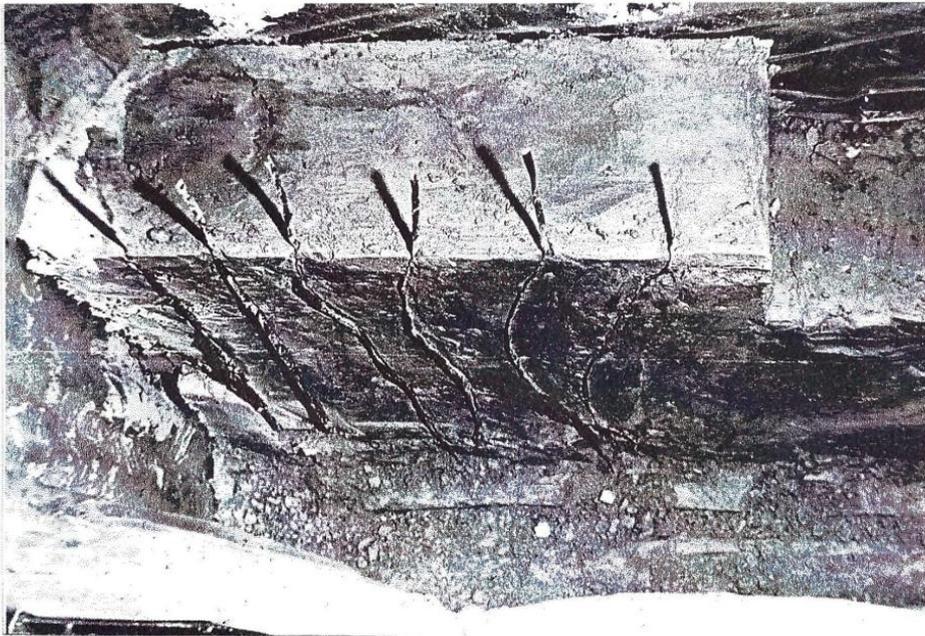


Рис. 1.4. Поверхности скольжения при симметричном разрушении глинистого основания полутвердой консистенции ( $J_p=0.20$ ;  $J_L=0.12$ ;  $\gamma_0=18.9$  кН/м<sup>3</sup>;  $c=3.0$  кПа;  $\varphi=17^\circ$ ).

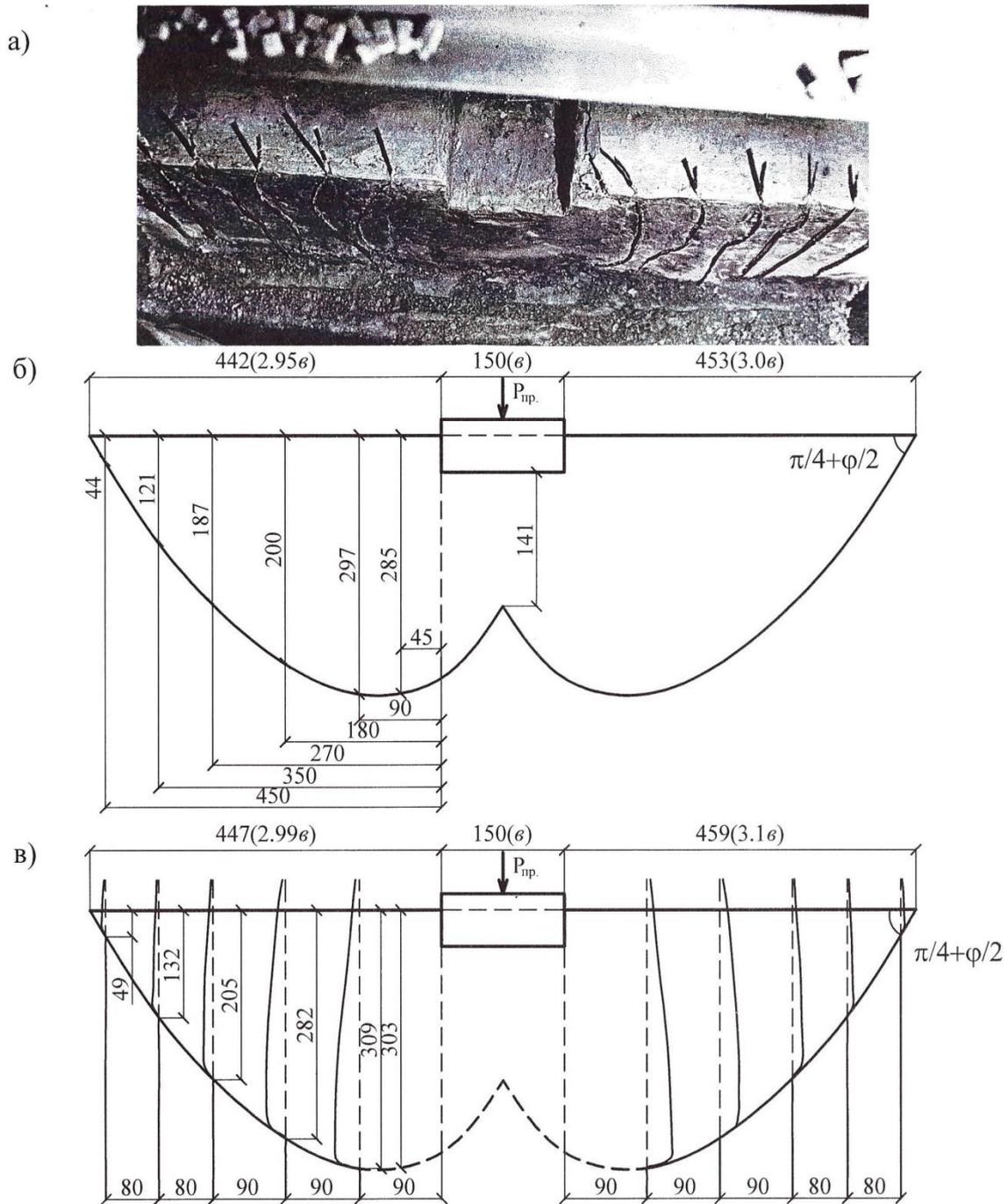


Рис. 1.5. Поверхности скольжения при симметричном разрушении глинистого основания тугопластичной консистенции (глина с  $J_p=0.18$ ;  $J_L=0.30$ ;  $\gamma_0=18.9$  кН/м<sup>3</sup>;  $c=2.5$  кПа;  $\varphi=19^\circ$ ).

а - фото; б - схема поверхности скольжения, соответствующая парафинированному экрану; в - схема поверхности скольжения по продольной оси лотка, установленная при помощи свинцовых полосок.

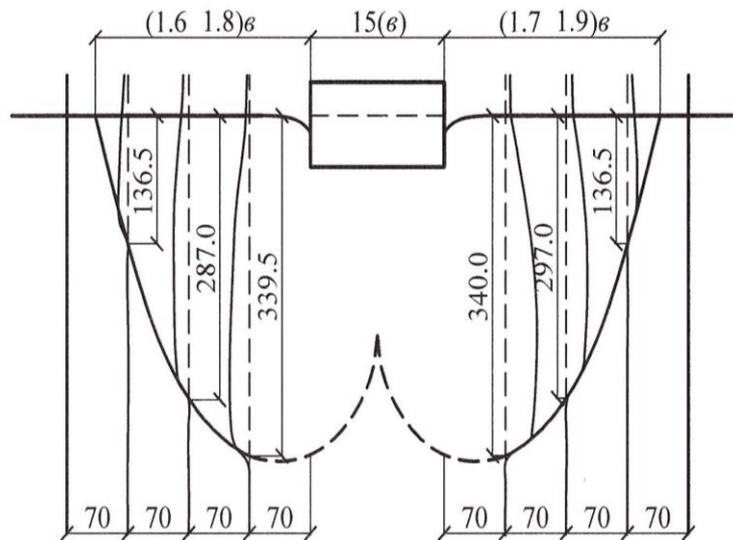


Рис. 1.6. Поверхности скольжения при симметричном разрушении глинистого основания мягкопластичной консистенции, остановленные при помощи свинцовых полосок (глина с  $J_p=0.18$ ;  $J_L=0.55$ ;  $\gamma_0=18.0$  кН/м<sup>3</sup>;  $c=1.30$  кПа;  $\varphi=12^\circ$ ).

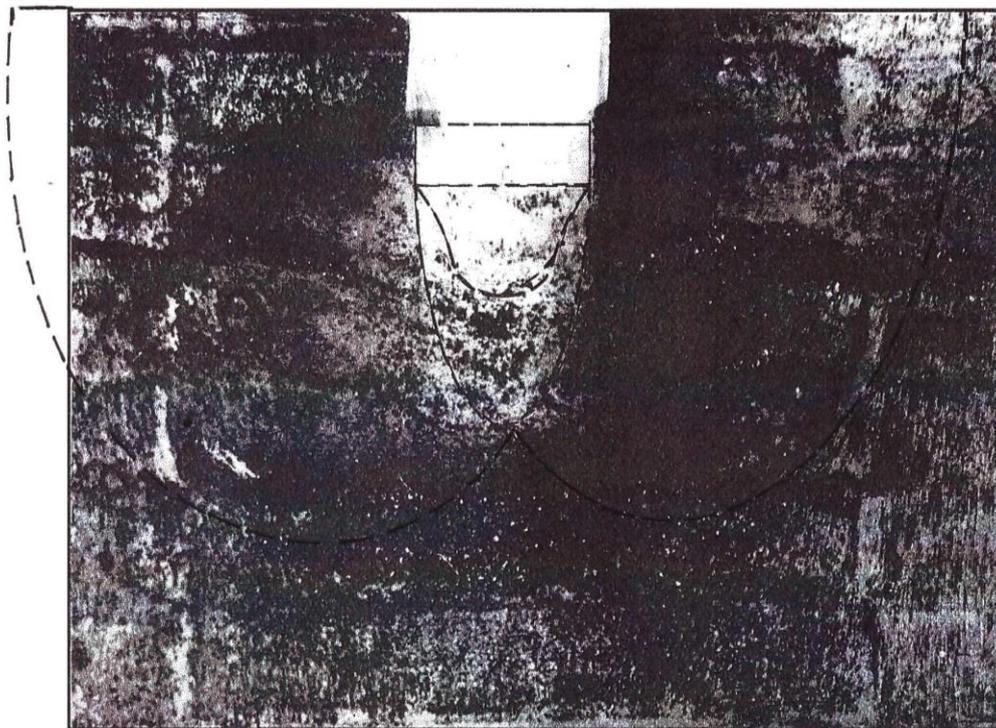


Рис. 1.7. Поверхности скольжения при симметричном разрушении глинистого основания тугопластичной консистенции при заглублении штампа на  $h/b=1.0$ ;  $J_p=0.20$ ;  $J_L=0.30$ ;  $\gamma_0=18.6$  кН/м<sup>3</sup>;  $c=2.30$  кПа;  $\varphi=16^\circ$ .

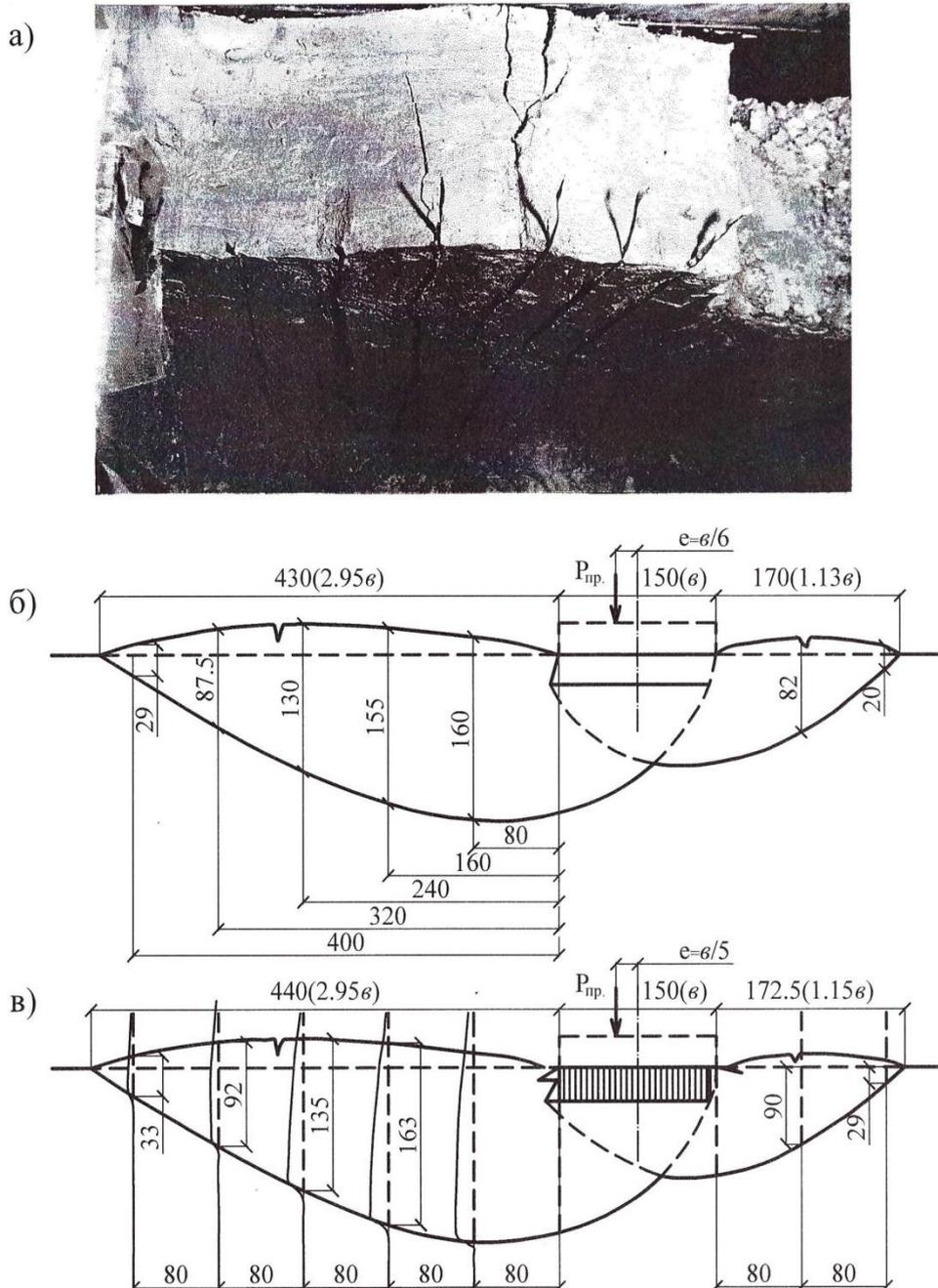
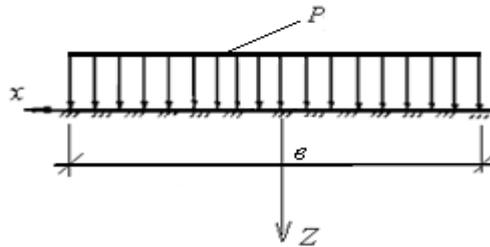


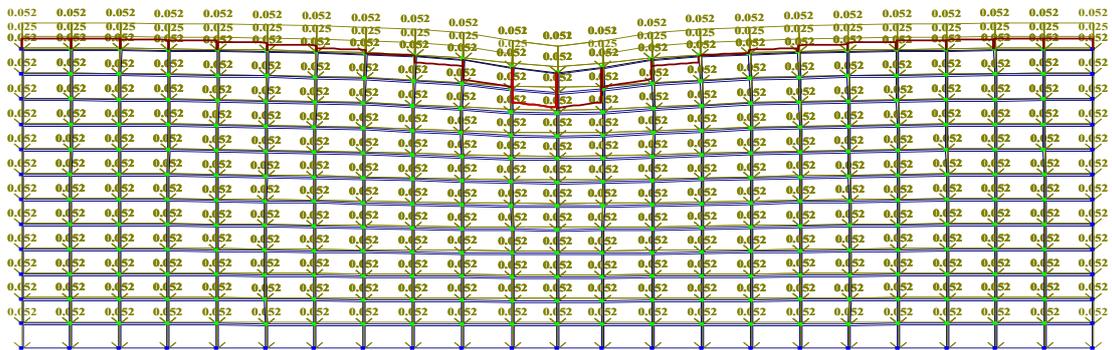
Рис. 1.8. Поверхности скольжения при несимметричном разрушении глинистого основания тугопластичной консистенции, полученные при внецентренном приложении нагрузки ( $e = \frac{b}{6}$ ).

а - фото; б - схема поверхности скольжения, соответствующая парафинированному экрану; в - схема поверхности скольжения по продольной оси лотка, установленная при помощи свинцовых полосок (глина с  $J_p = 0.20$ ;  $J_L = 0.30$ ;  $\gamma_0 = 18.0$  кН/м<sup>3</sup>;  $c = 1.50$  кПа;  $\phi = 14^\circ$ ).

Результаты исследований напряжений на моделях из желатина под действием равномерно-распределённой нагрузки

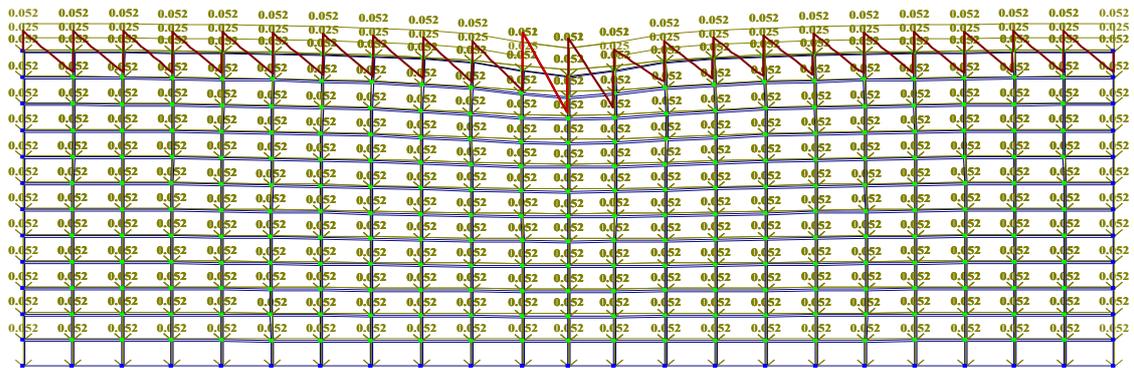


Загружение 1  
Элементы M  
Единицы измерения - т

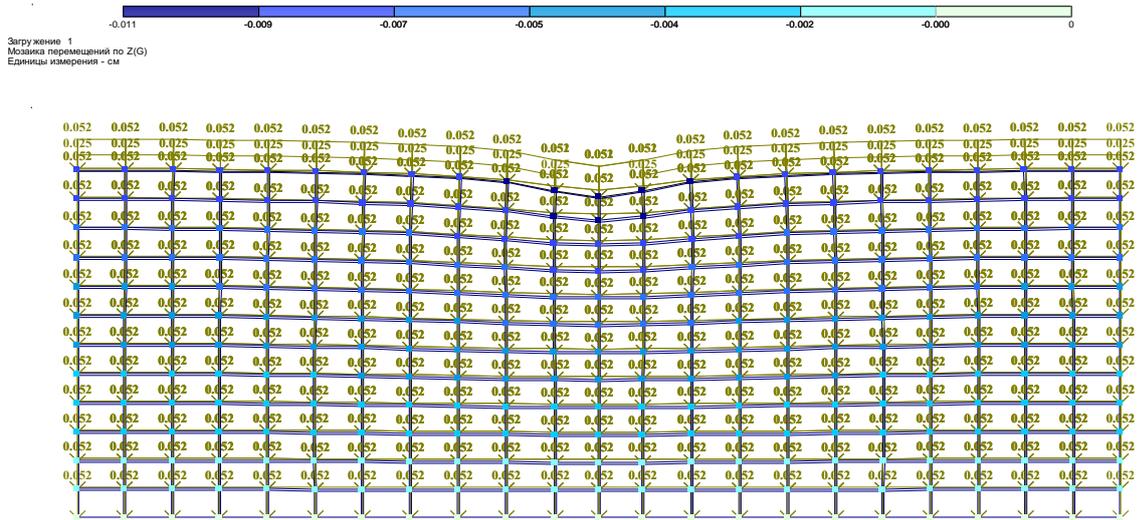


а)

Загружение 1  
Элементы Qz  
Единицы измерения - т

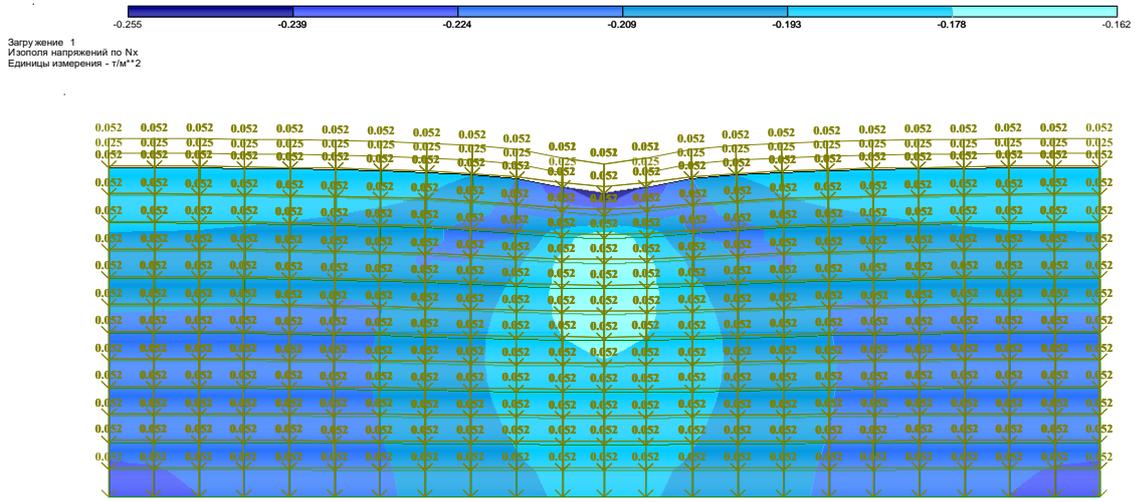


б)

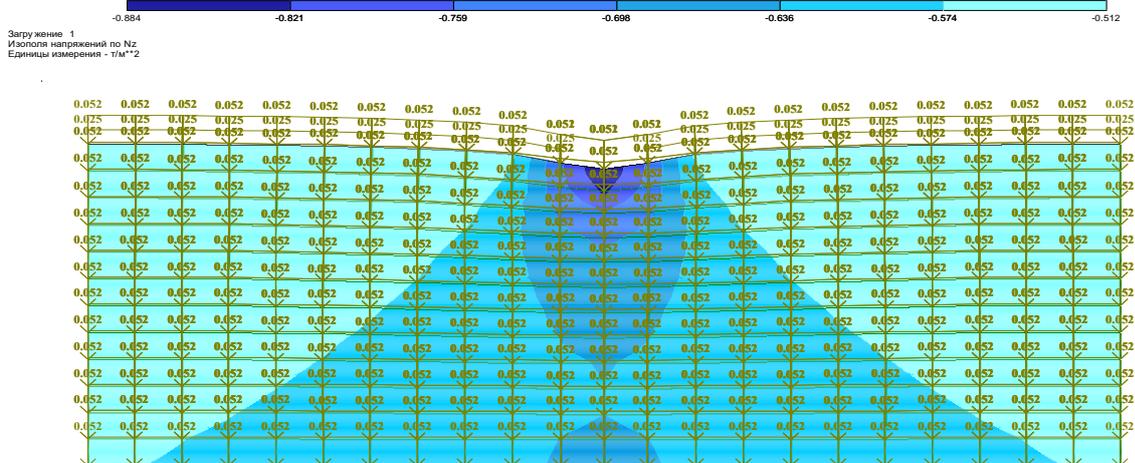


В)

Рис. 2.1. Схемы нагружения модели при  $P = 8,84\text{кН/м}^2$

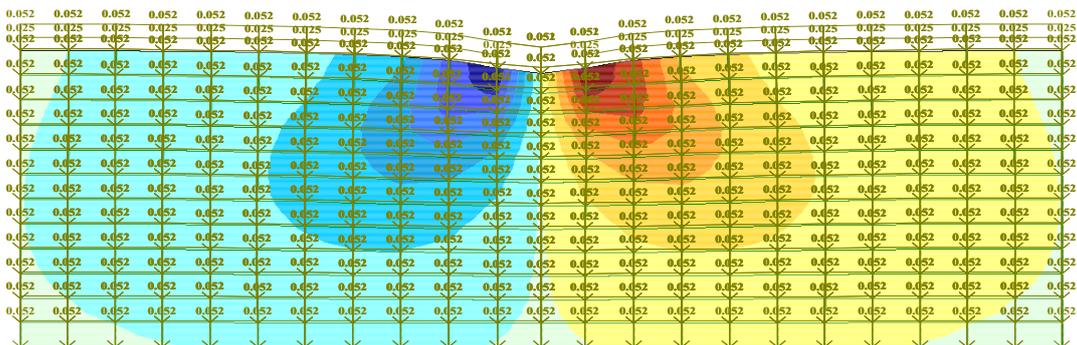


а)



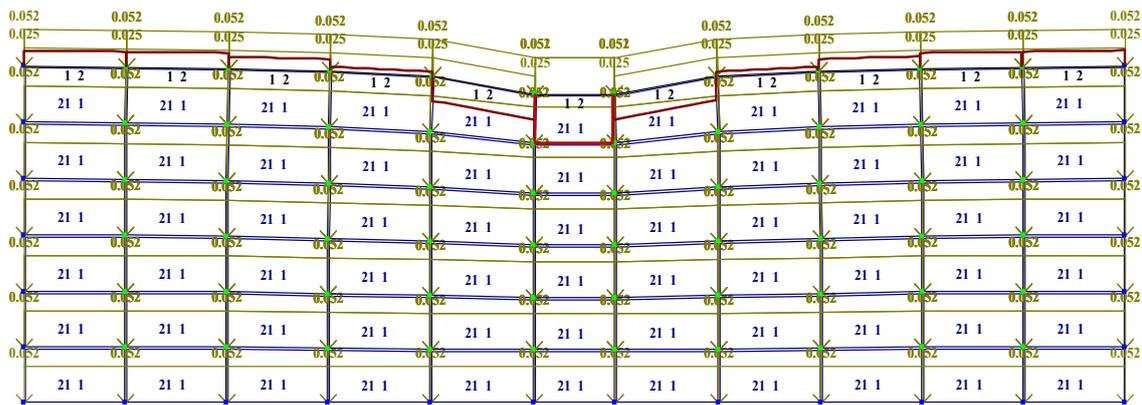
б)

Загружение 1  
Изополю напряжений по  $T_{xz}$   
Единицы измерения -  $\text{т/м}^2$

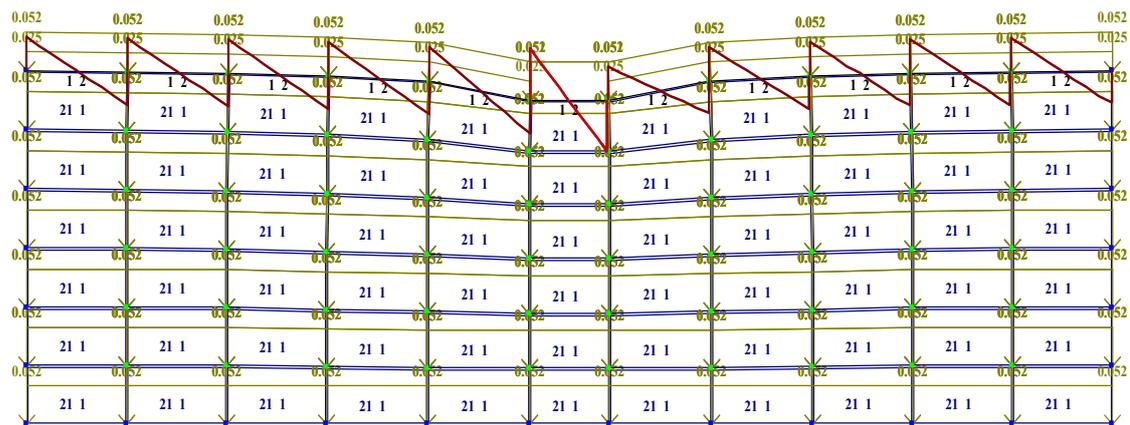


в)

Рис. 2.2. Изополю напряжений в вертикальном сечении модели: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

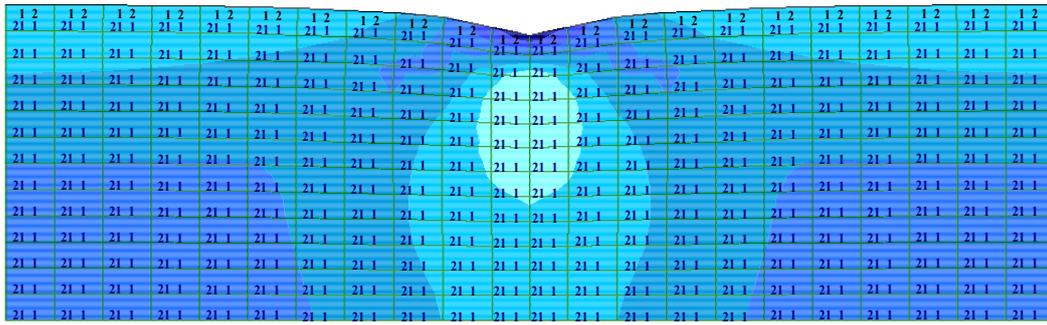


а)

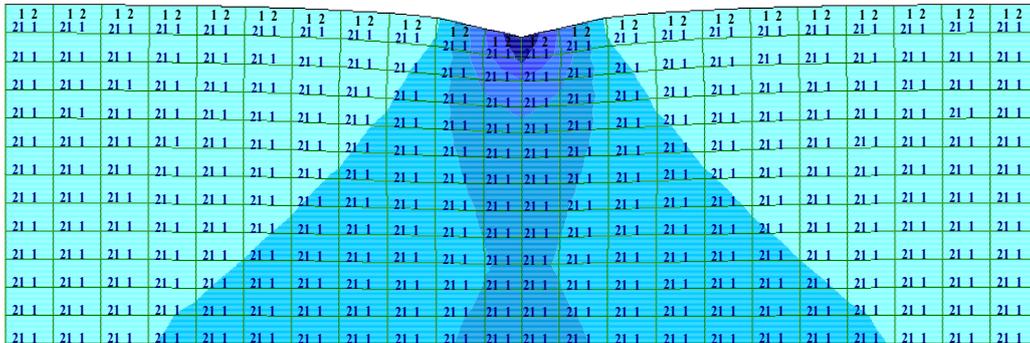


б)

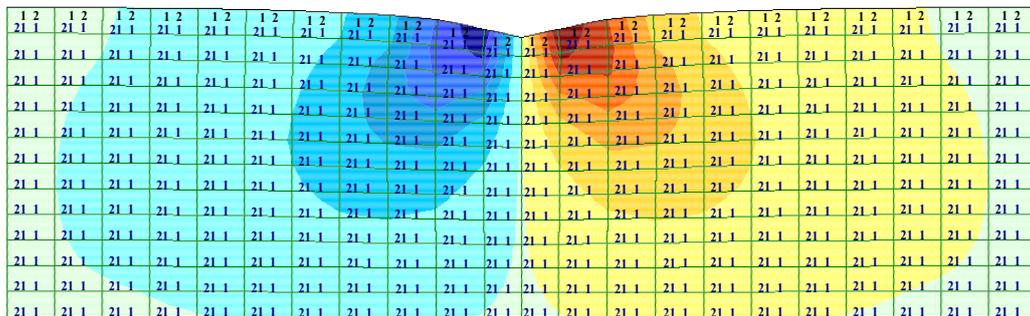
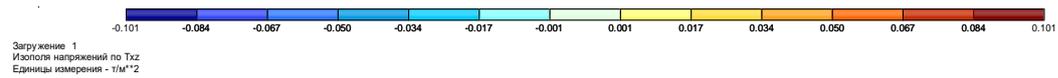
Рис. 2.3. Схемы нагружения модели при  $P = 8,79 \text{ кН/м}^2$



а)



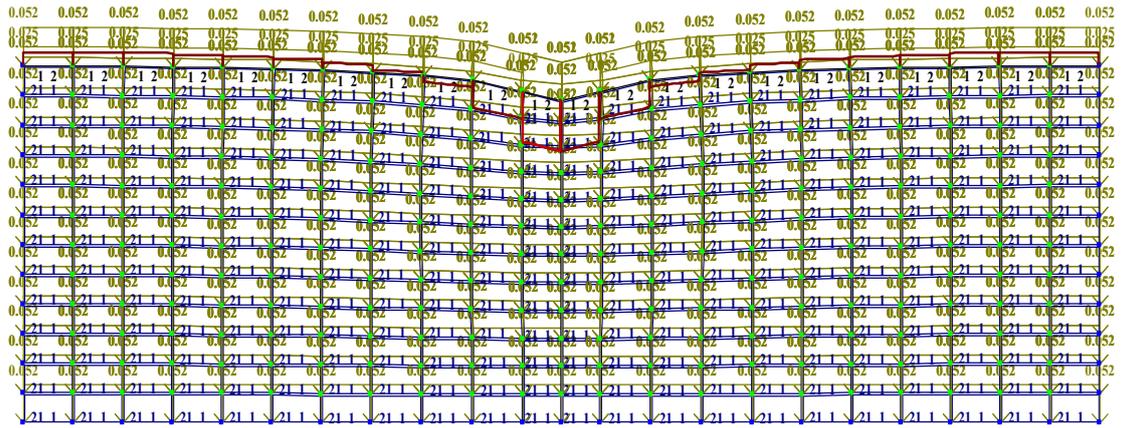
б)



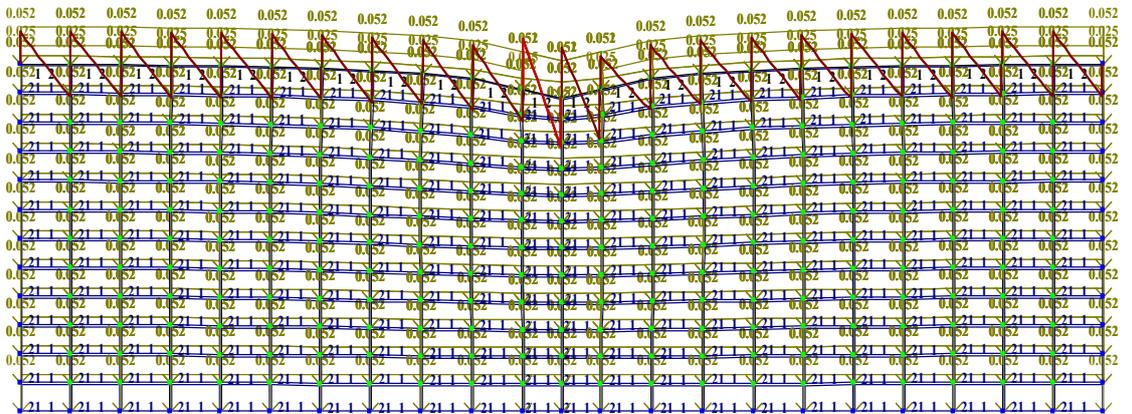
в)

Рис. 2.4. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели:

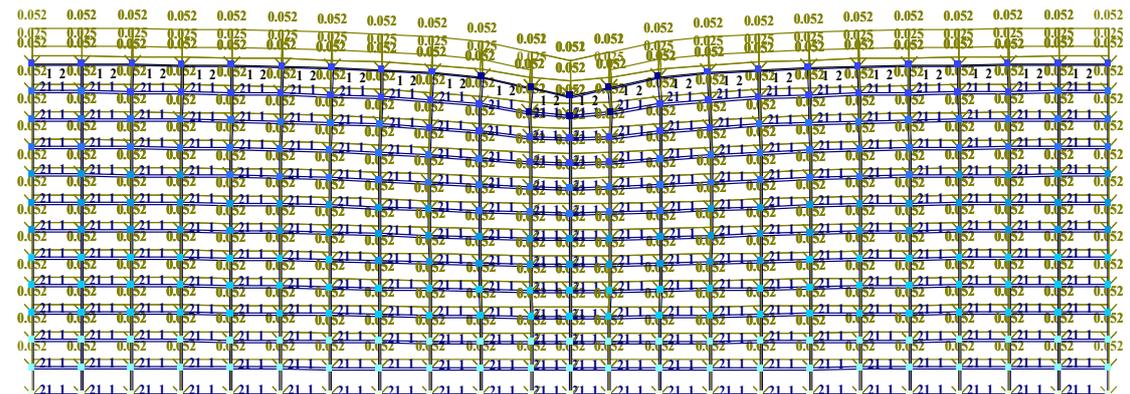
а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



a)



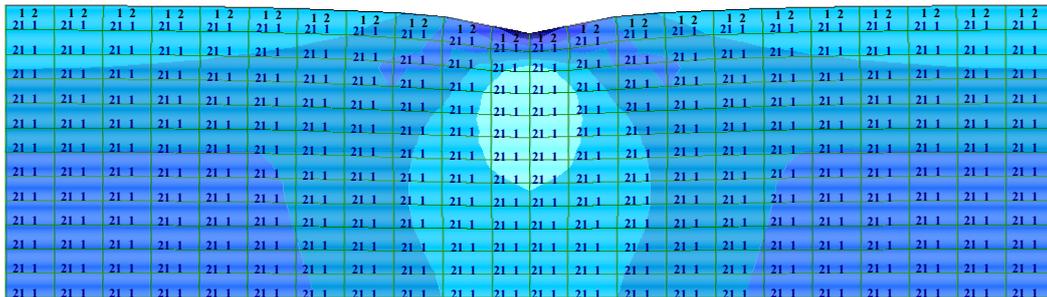
б)



в)

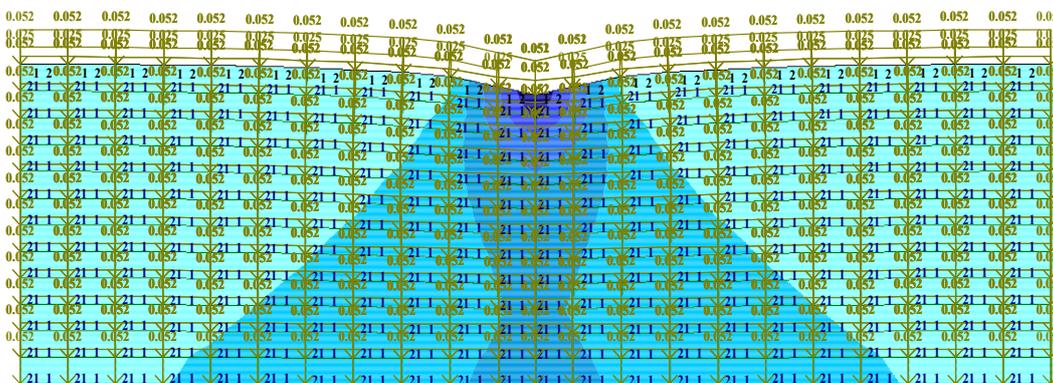
Рис. 2.5. Схемы нагружения модели при  $P = 6,92 \text{ кН/м}^2$

Загружение 1  
Изополя напряжений по  $\sigma_x$   
Единицы измерения - т/м<sup>2</sup>



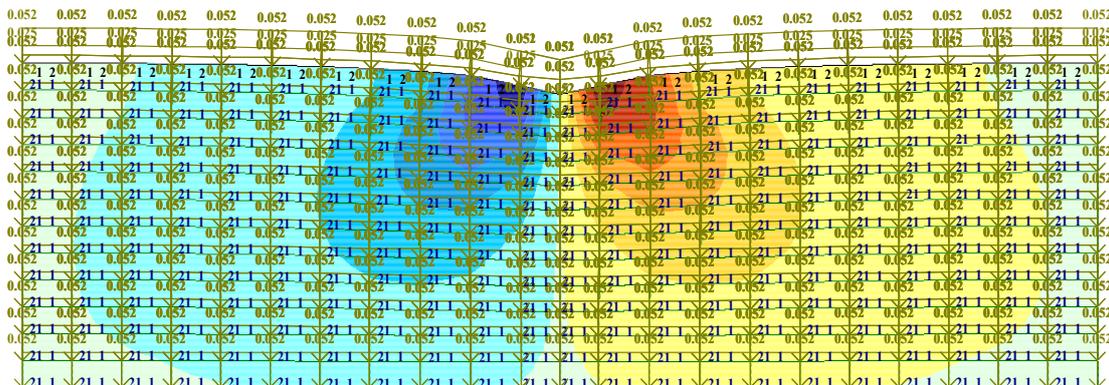
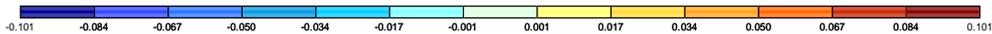
а)

Загружение 1  
Изополя напряжений по  $\sigma_z$   
Единицы измерения - т/м<sup>2</sup>



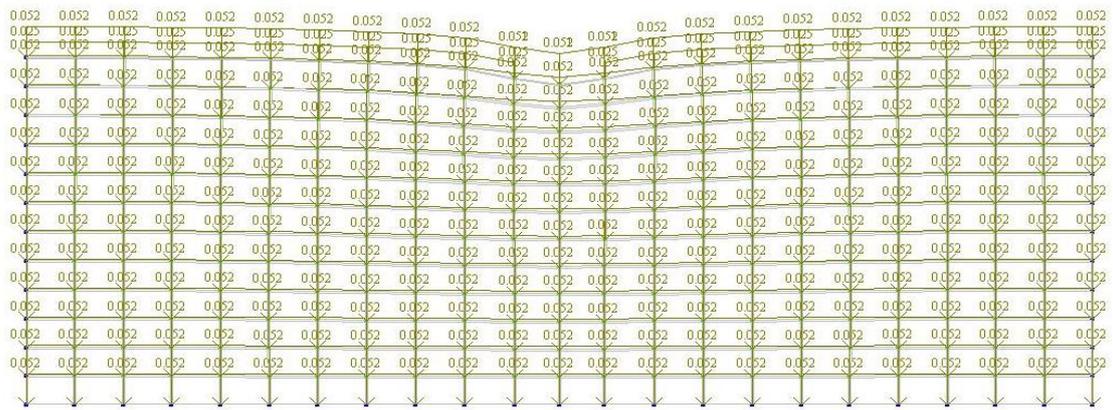
б)

Загружение 1  
Изополя напряжений по  $\tau_{xz}$   
Единицы измерения - т/м<sup>2</sup>

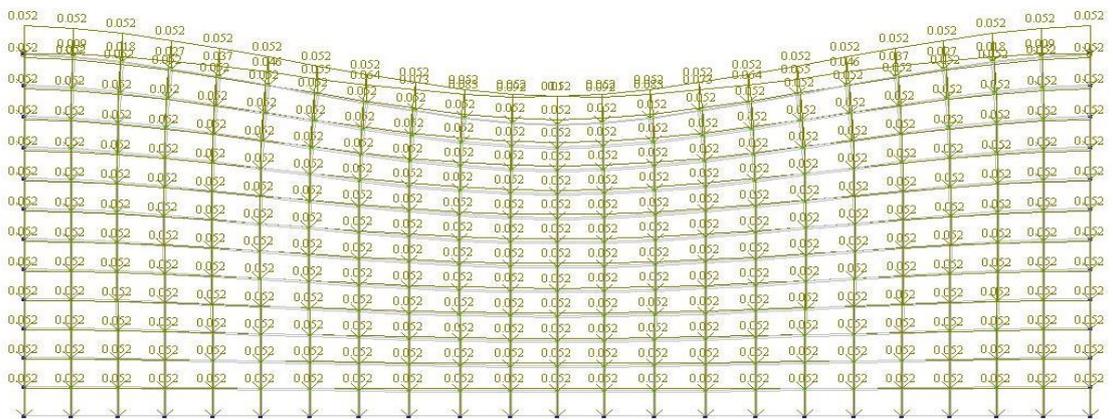


в)

Рис. 2.6. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

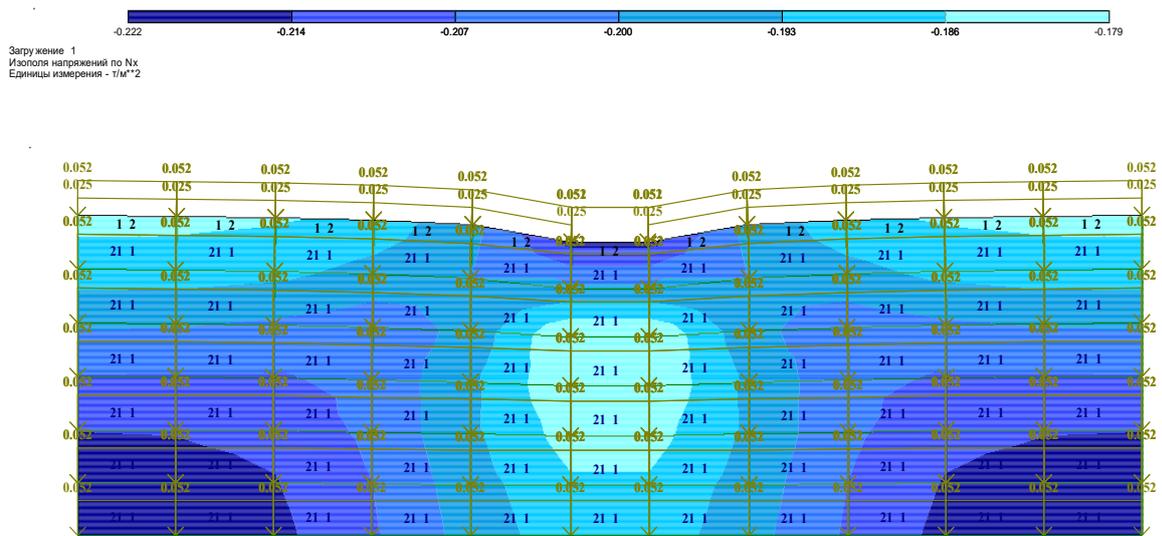


a)

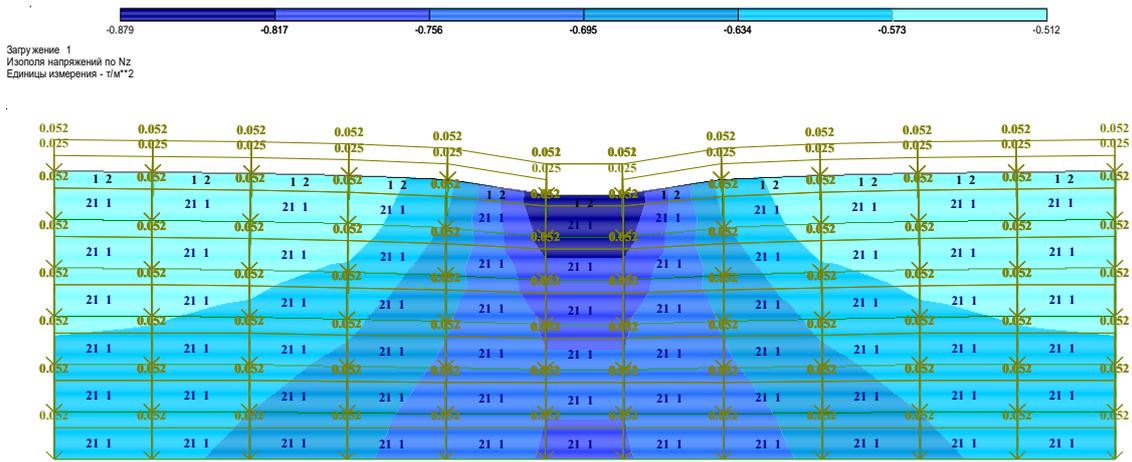


б)

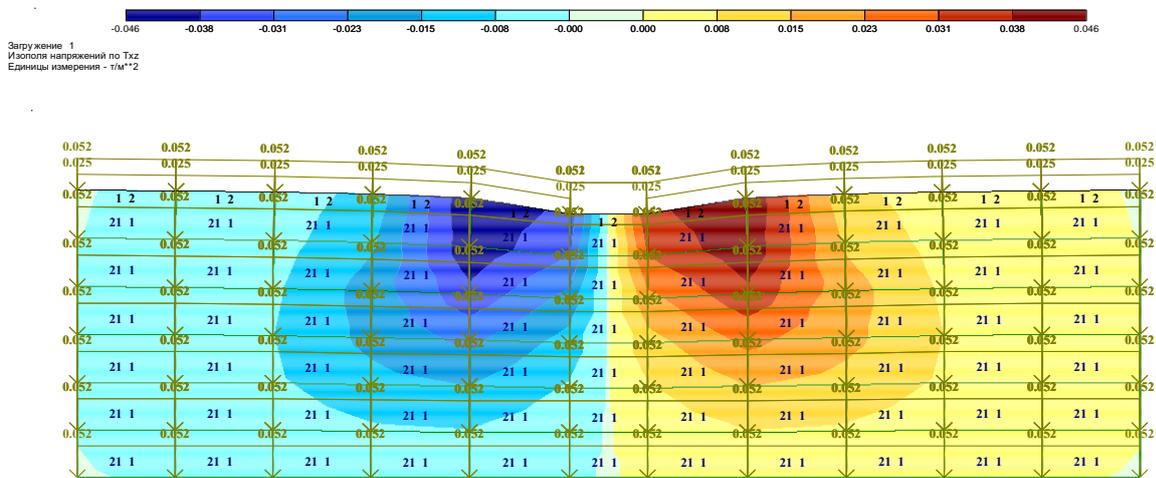
Рис. 2.7. Схемы нагружения модели при  $P = 8,79 \text{ кН/м}^2$



a)

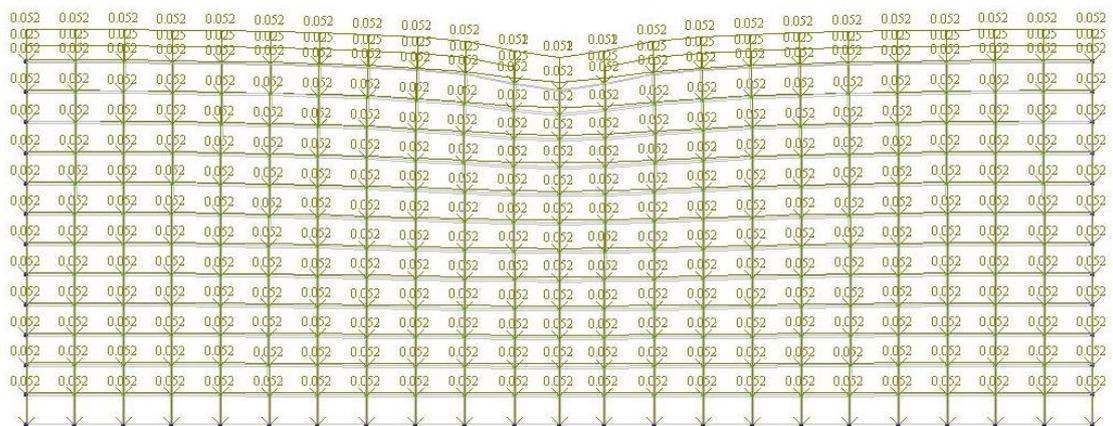


б)

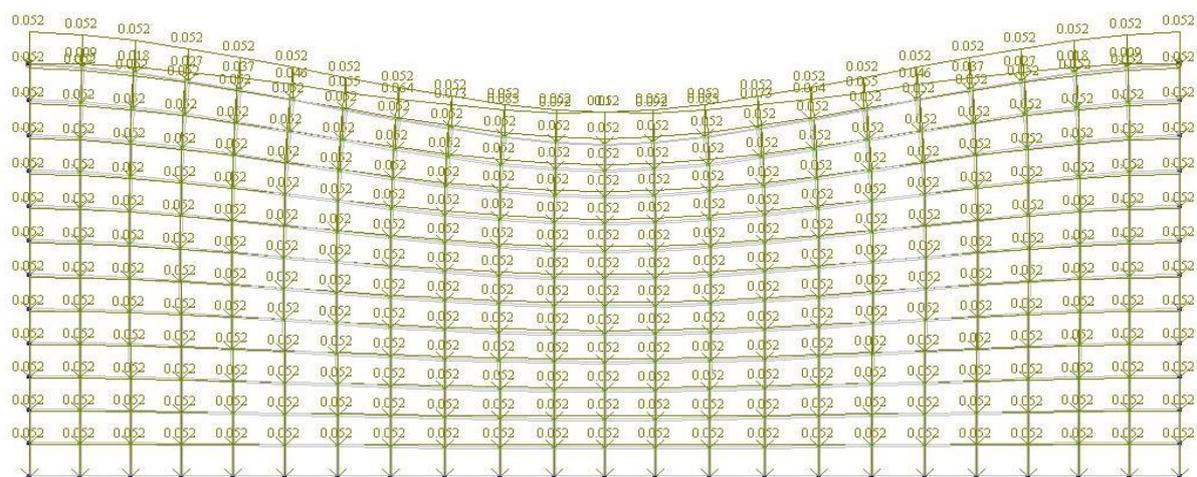


в)

Рис. 2.8. Изополя напряжений в вертикальных сечениях модели:  
а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

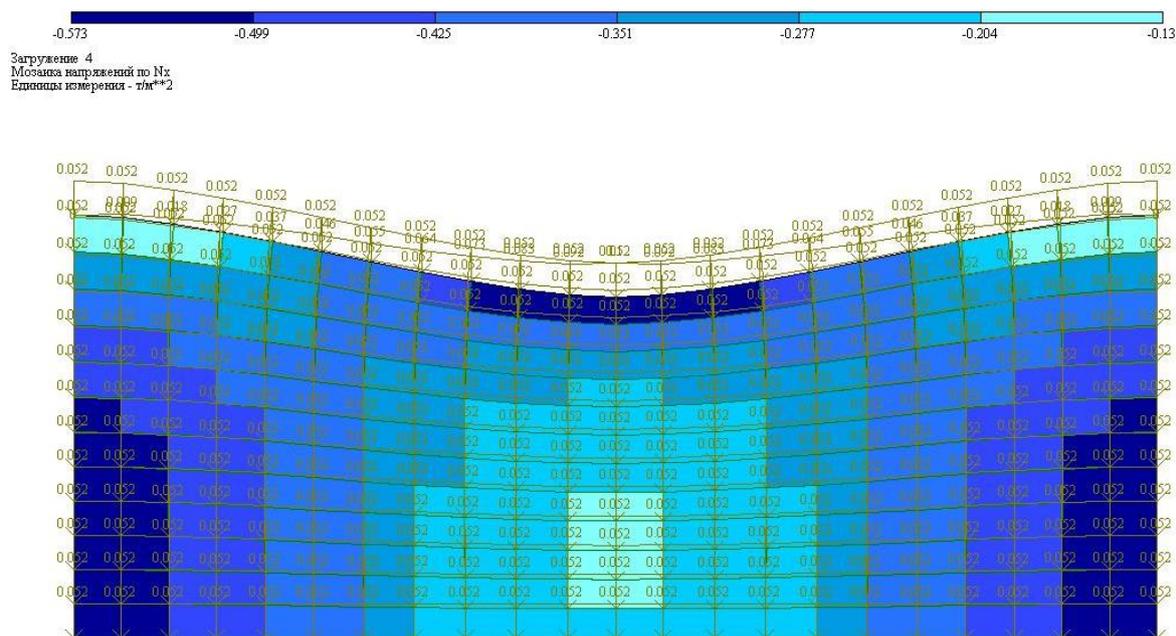


а)

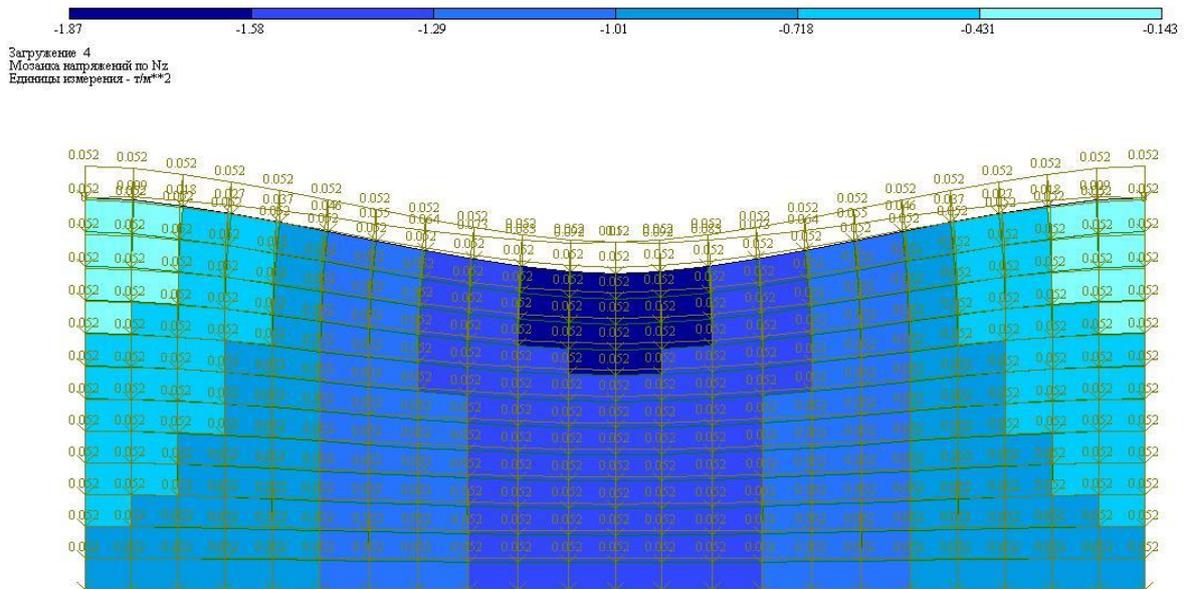


б)

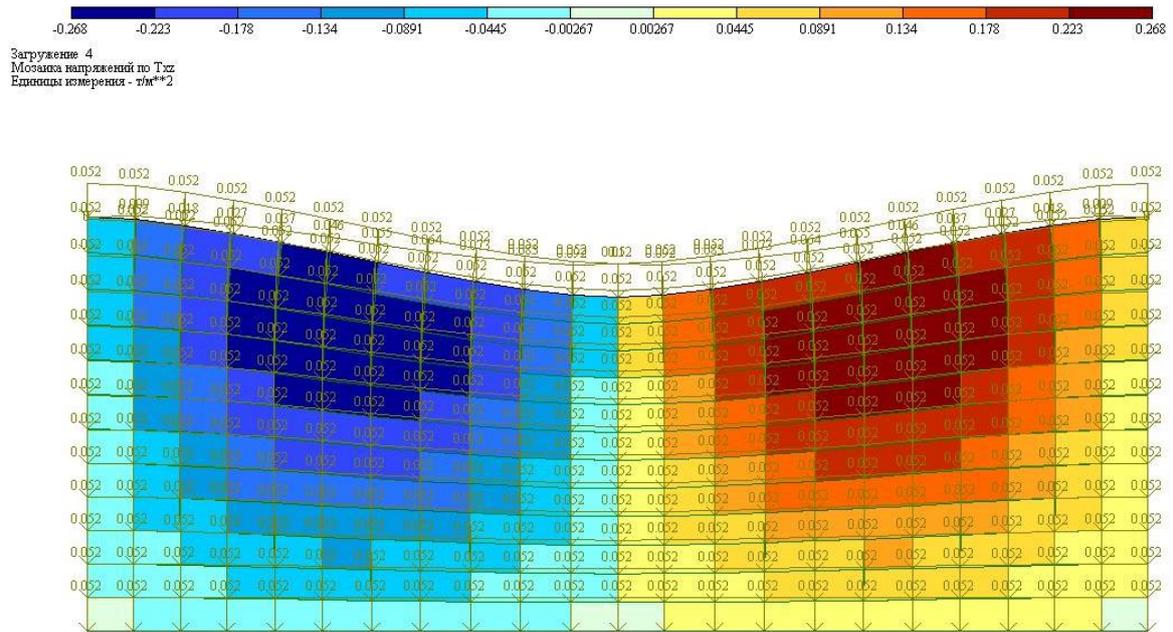
Рис.2.9. Схемы нагружения модели при  $P = 18,7 \text{ кН/м}^2$



а)



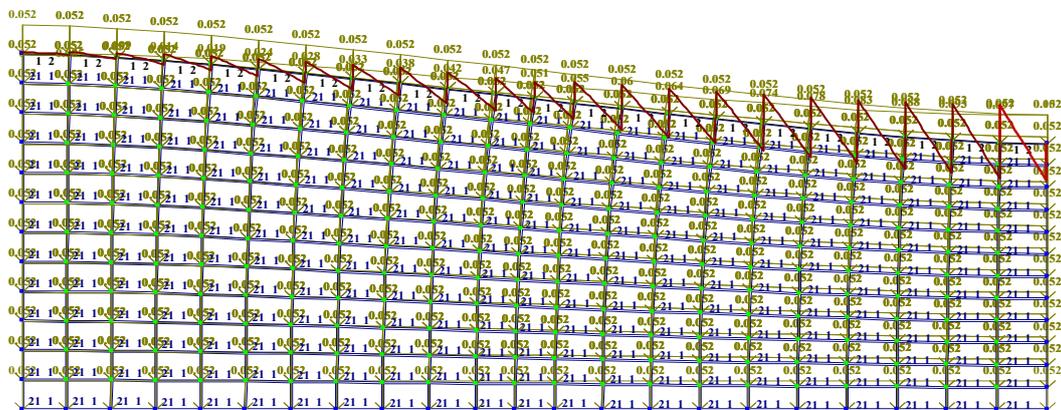
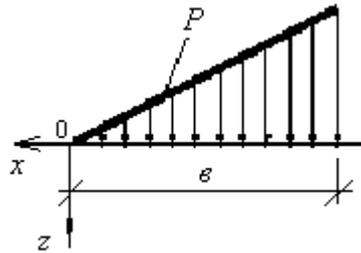
б)



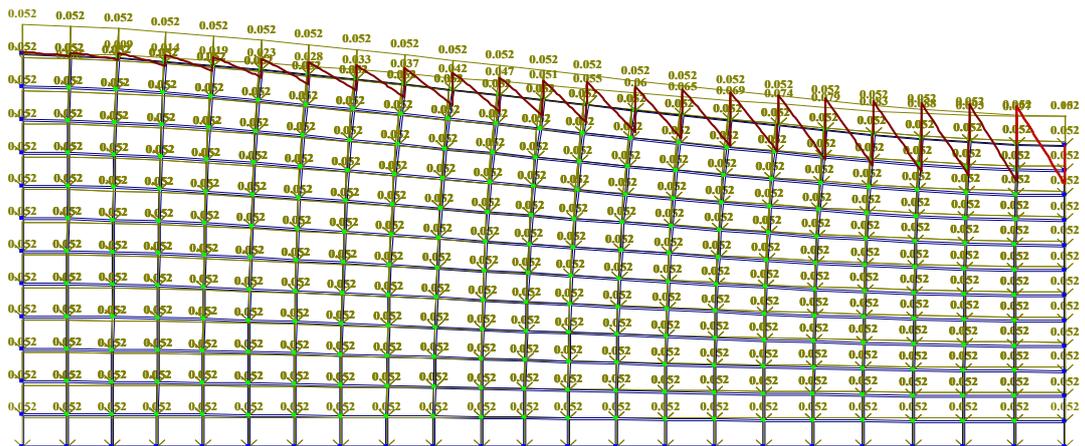
в)

Рис. 2.10. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

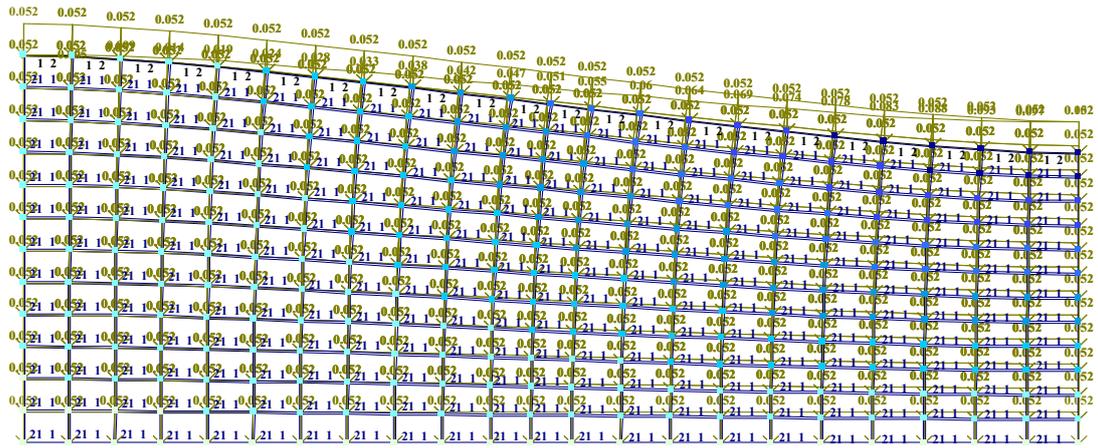
Результаты исследований напряжений на моделях из желатина от действия треугольной нагрузки



а)

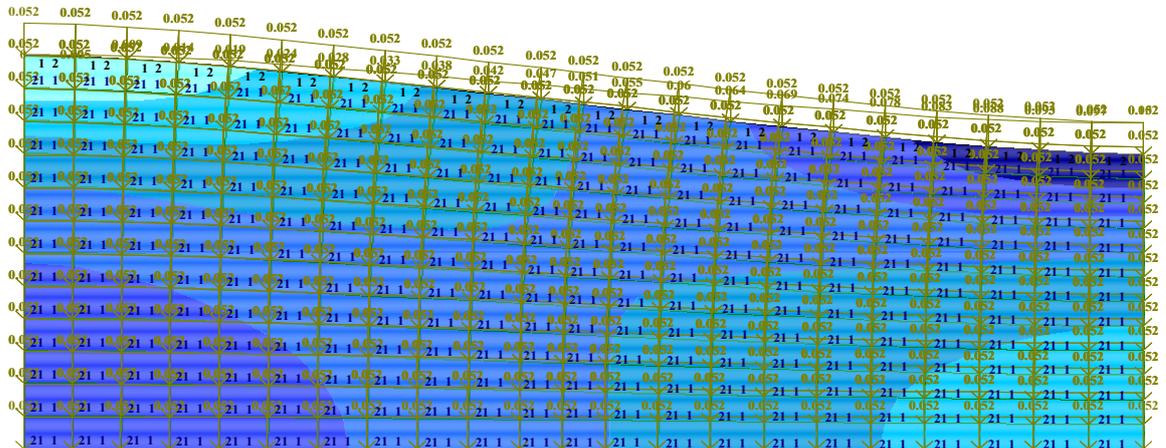


б)

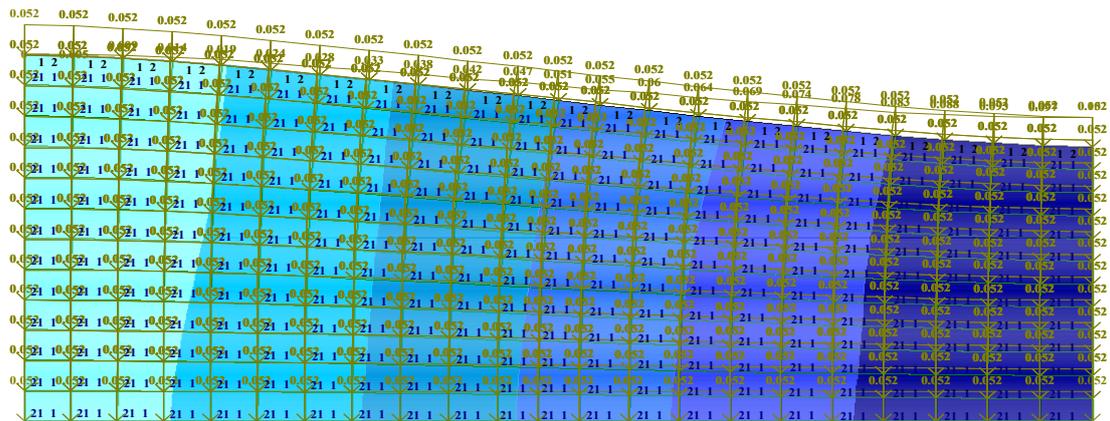


в)

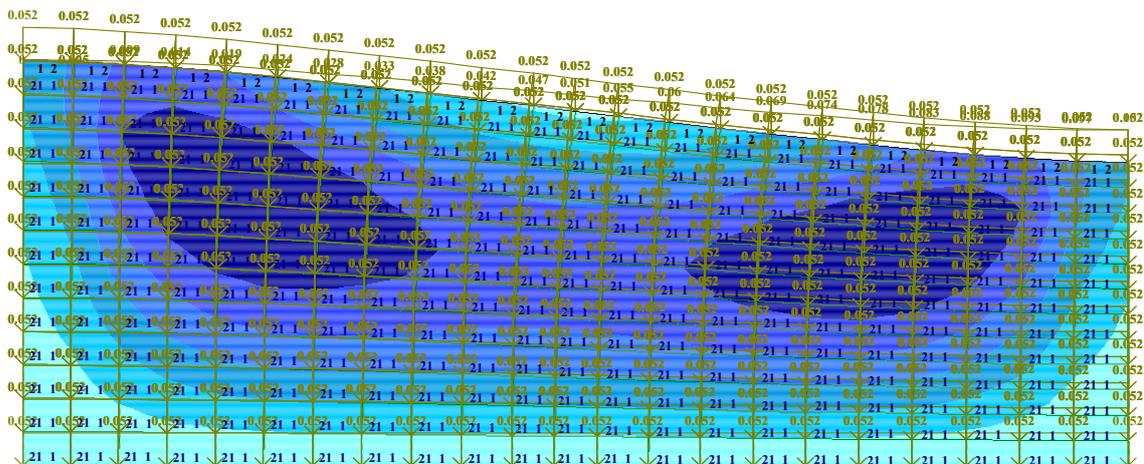
Рис. 3.1. Схемы нагружения модели от нагрузки в форме прямоугольного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



а)

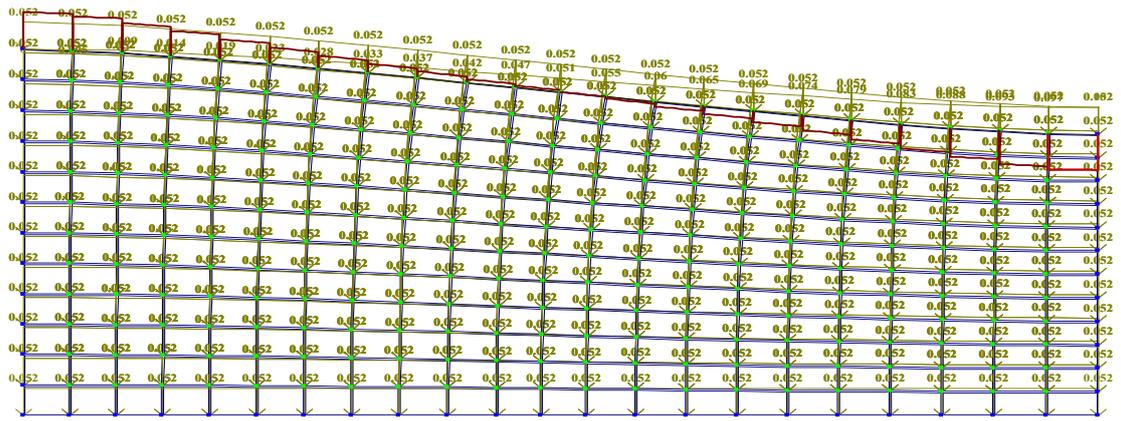


б)

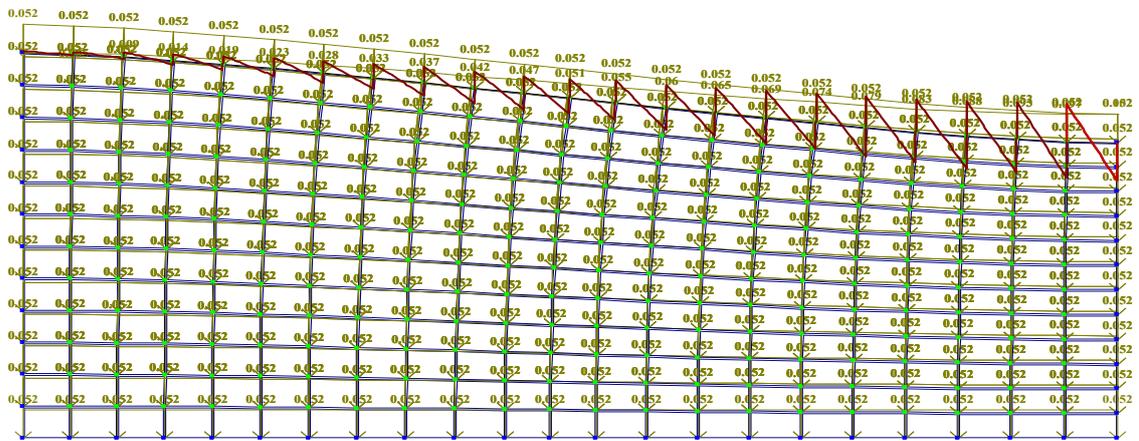


в)

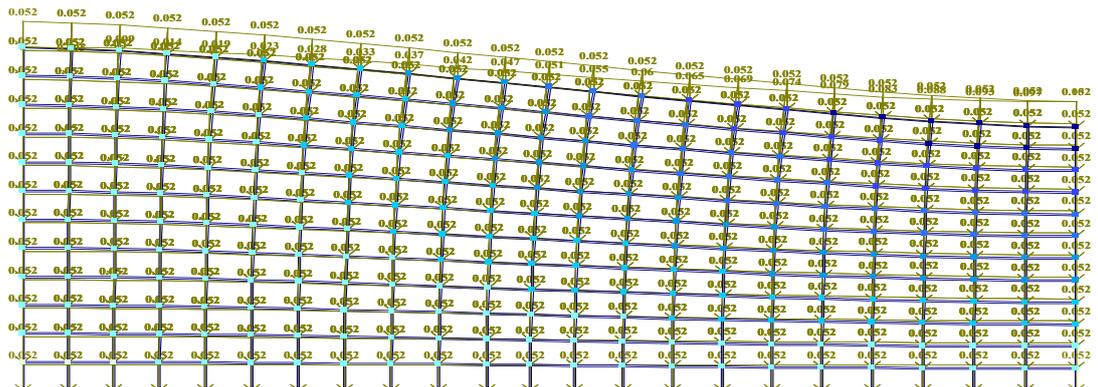
Рис. 3.2. Изополю напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме прямоугольного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



а)



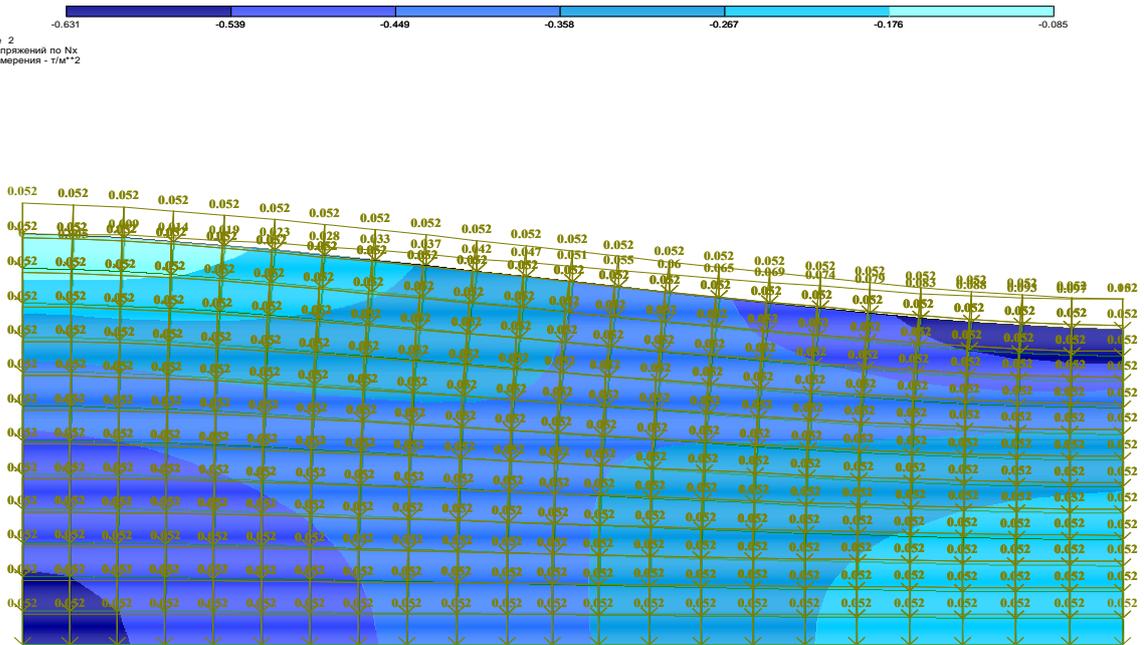
б)



в)

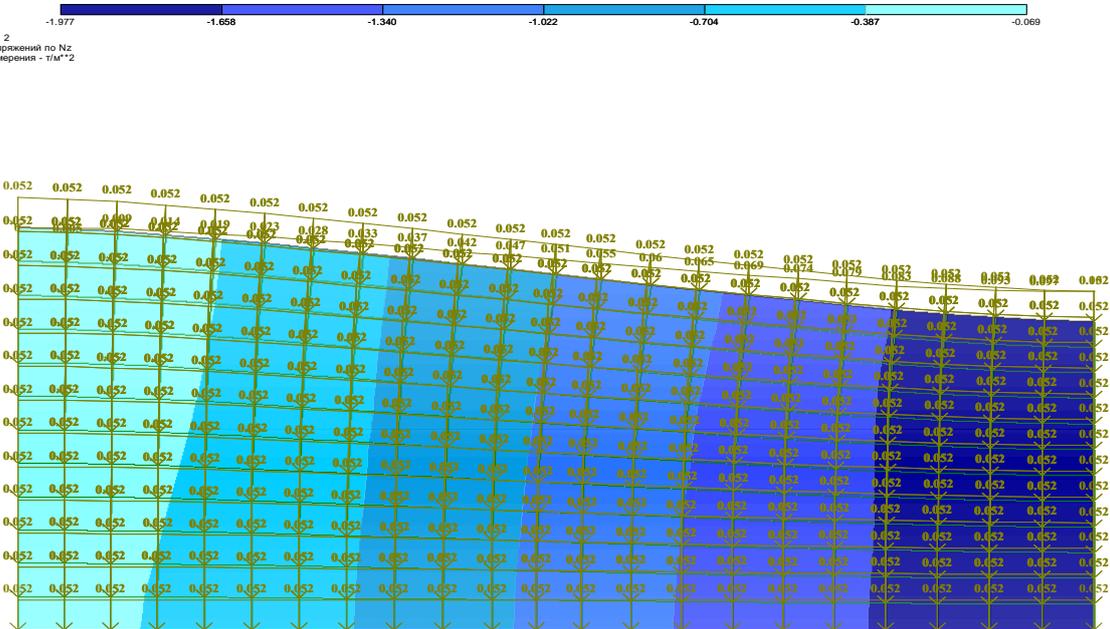
Рис. 3.3. Схемы нагружения модели от нагрузки в форме прямоугольного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

Загружение 2  
 Изополюс напряжений по Nx  
 Единица измерения - т/м<sup>2</sup>



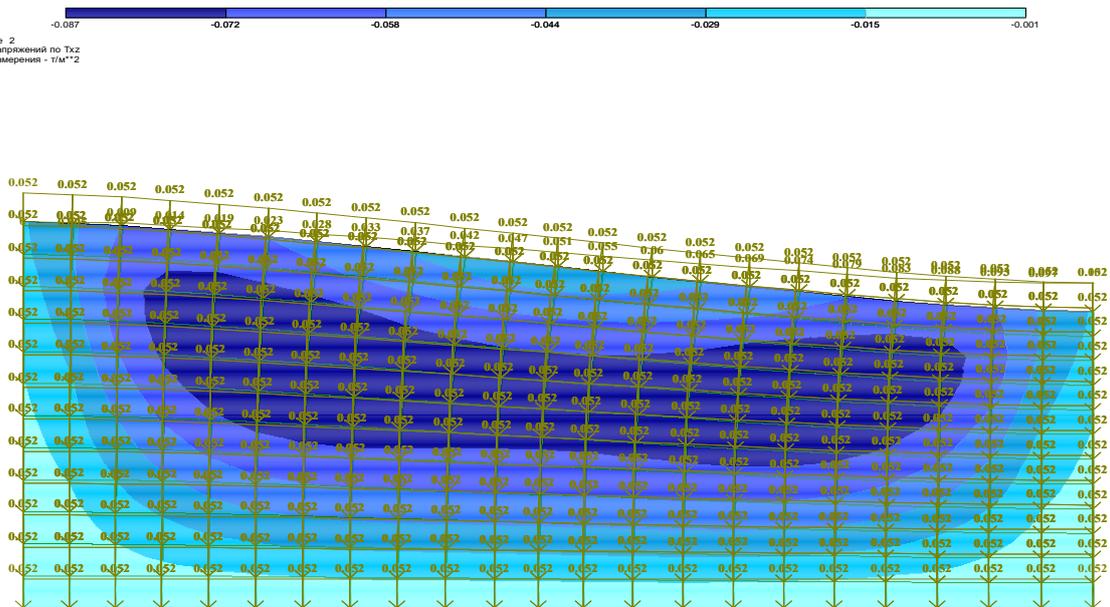
a)

Загружение 2  
 Изополюс напряжений по Nz  
 Единица измерения - т/м<sup>2</sup>



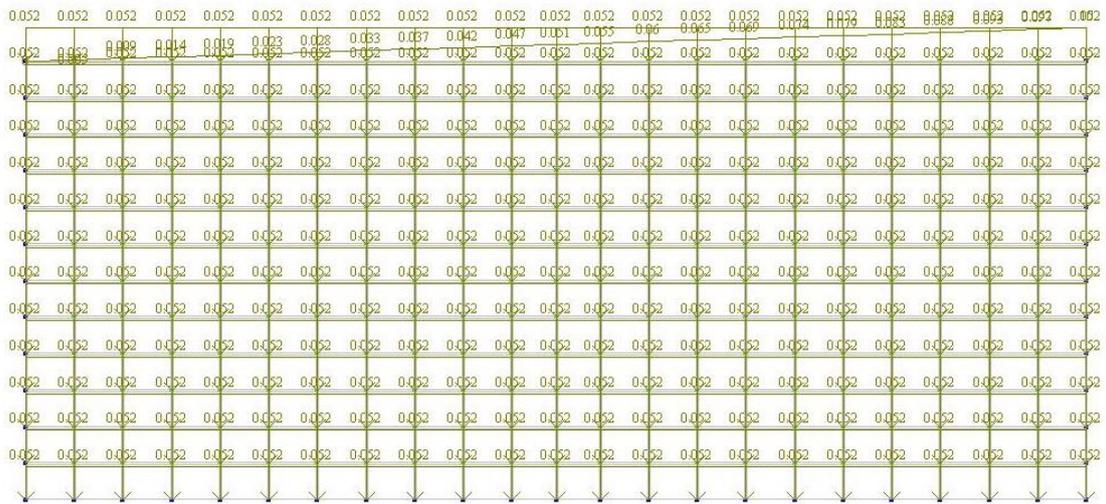
б)

Заружение 2  
 Изополя напряжений по  $T_{xz}$   
 Единица измерения -  $\text{ТПа}^2$



в)

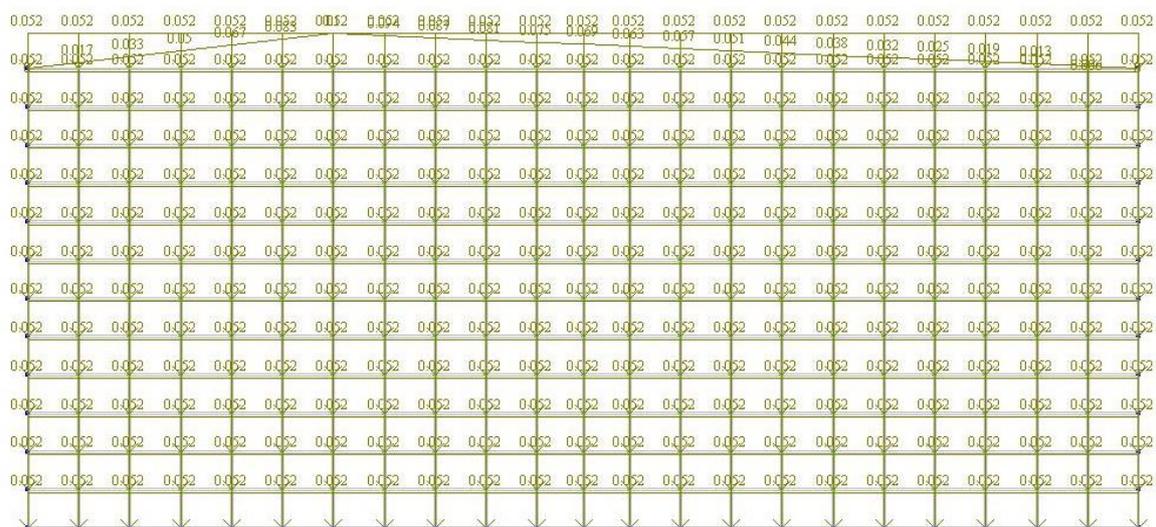
Рис. 3.4. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме прямоугольного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



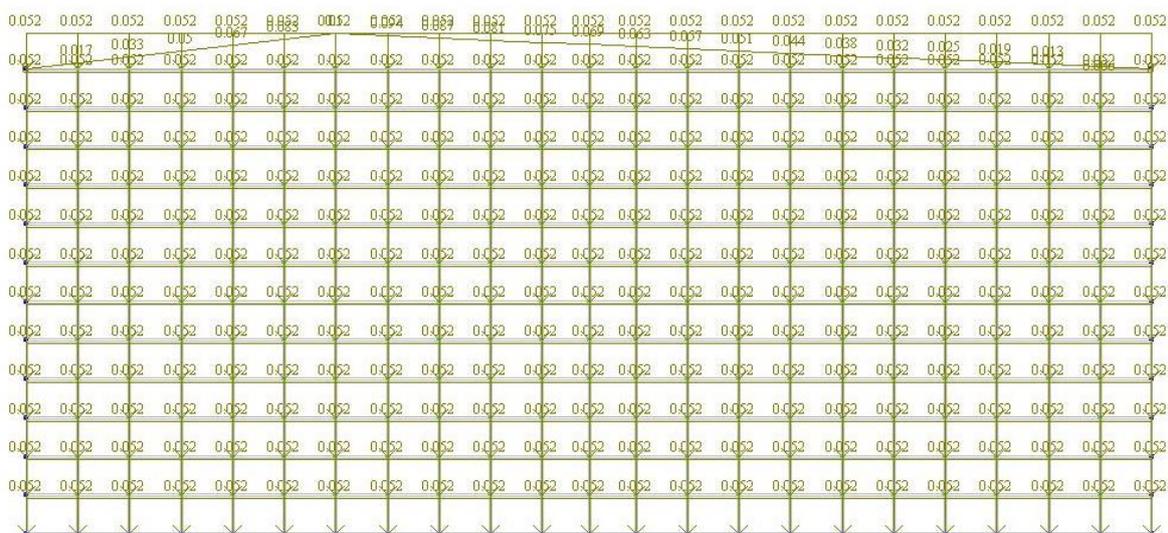
а)







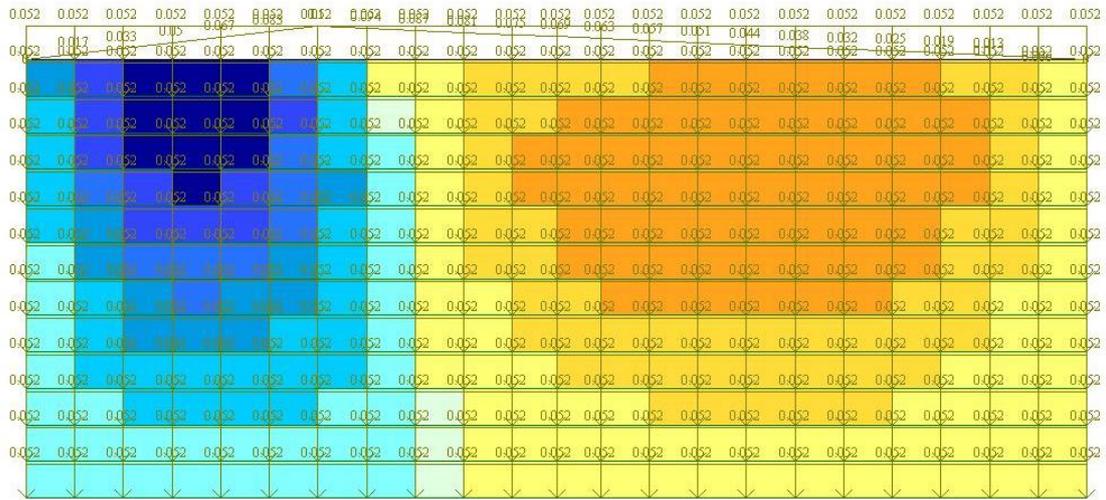
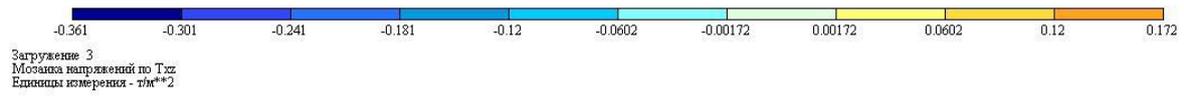
a)



б)

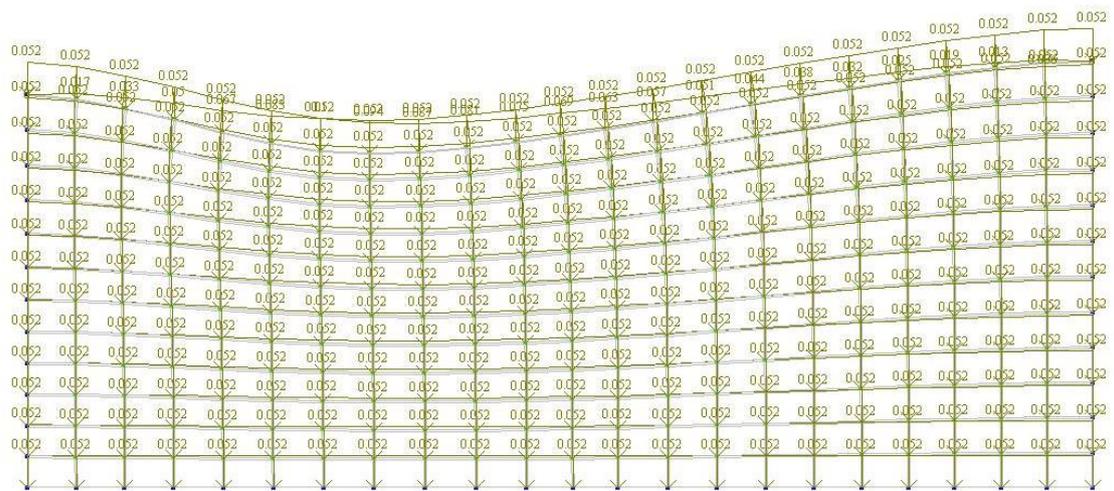
Рис. 3.7. Схемы нагружения модели от нагрузки в форме неравностороннего треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$



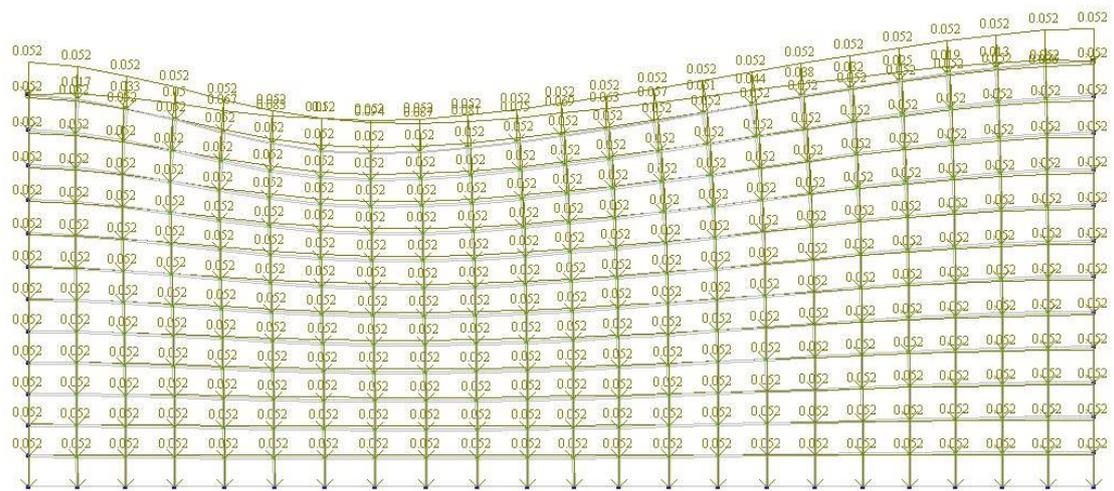


в)

Рис. 3.8. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме неравностороннего треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

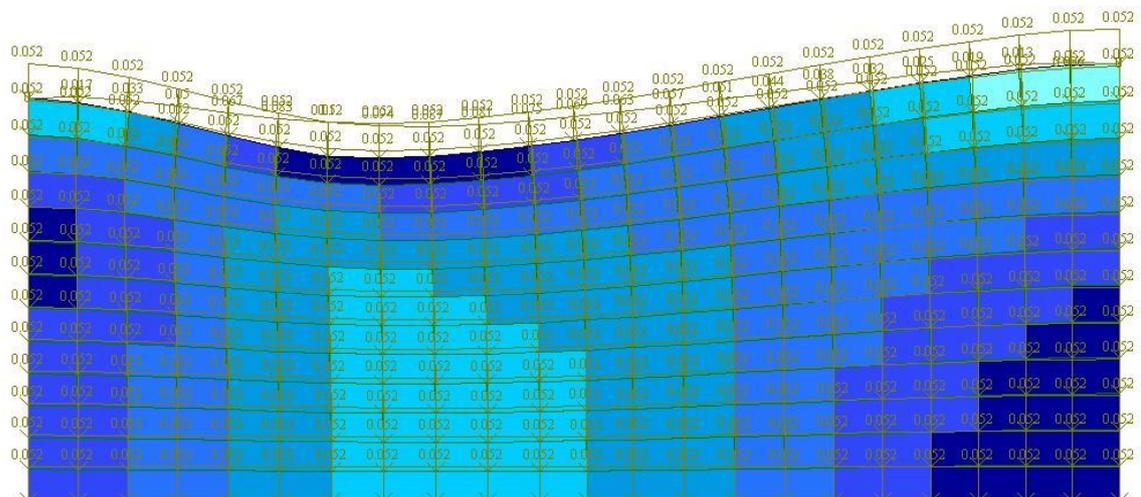
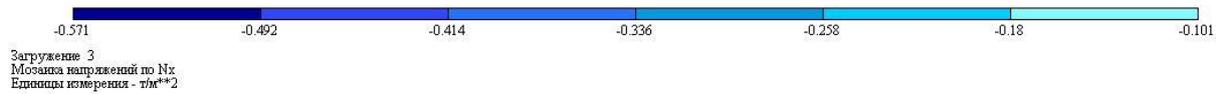


а)

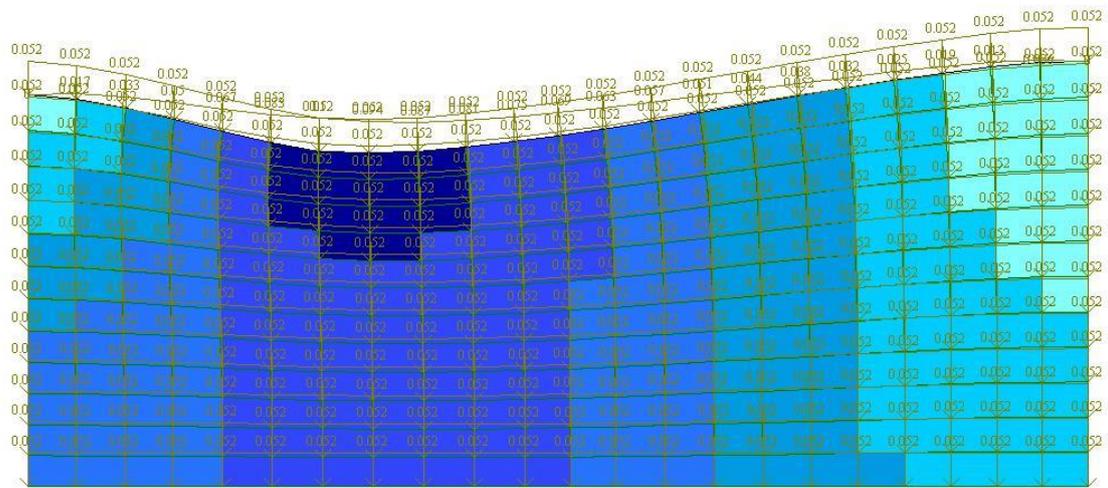


б)

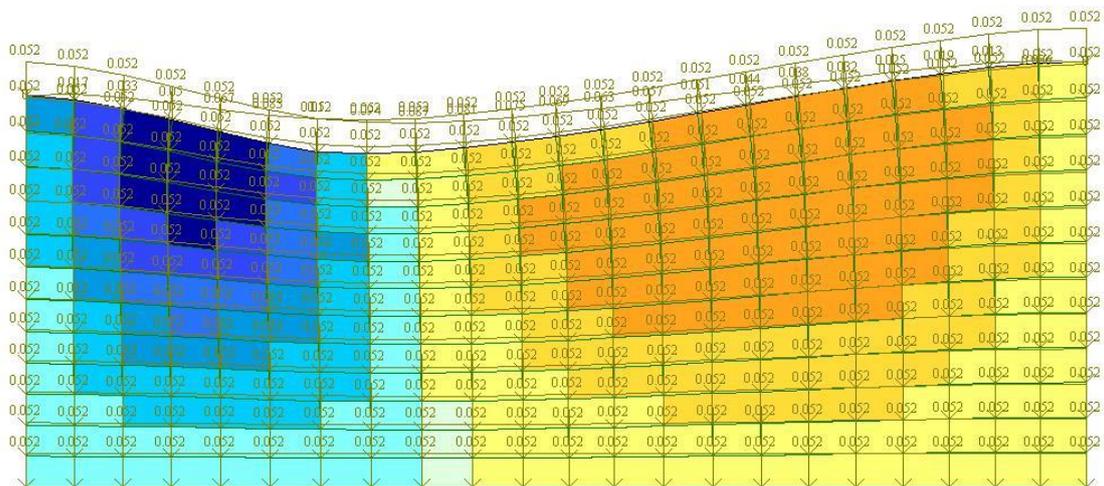
Рис. 3.9. Схемы нагружения модели на стадии развития пластических деформаций



а)

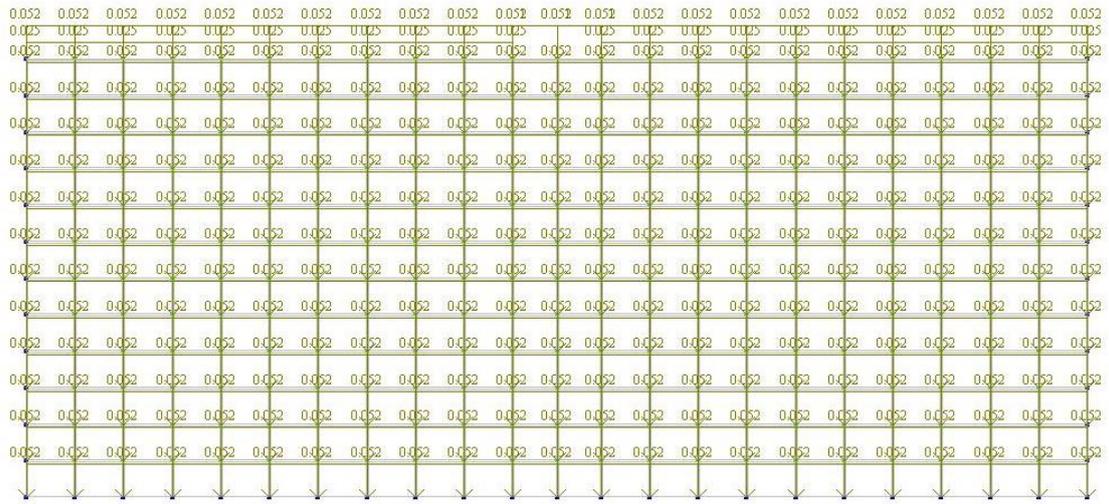


б)

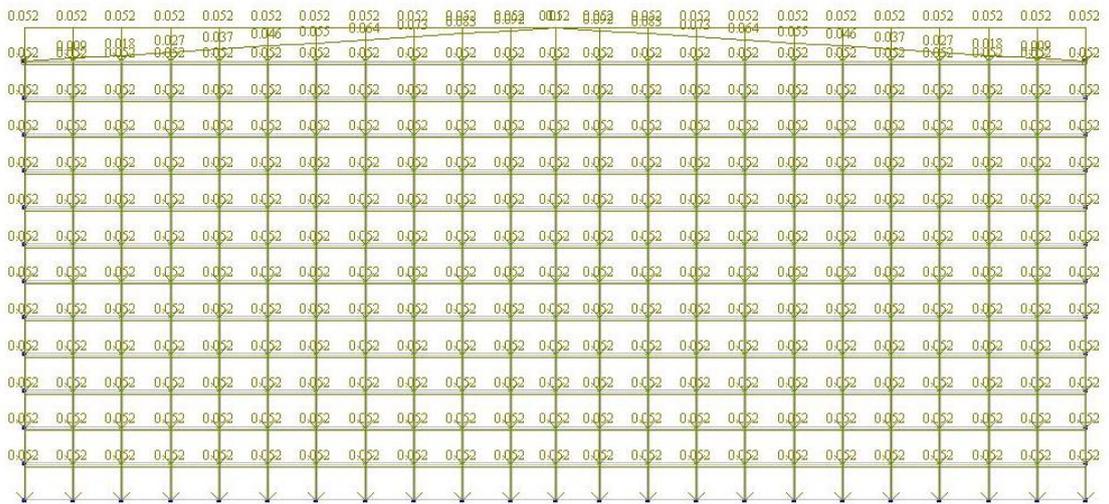


в)

Рис. 3.10. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме неравностороннего треугольника на стадии пластической деформации: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



а)



б)

Рис. 3.11. Схемы нагружения модели от нагрузки в форме равнобедренного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



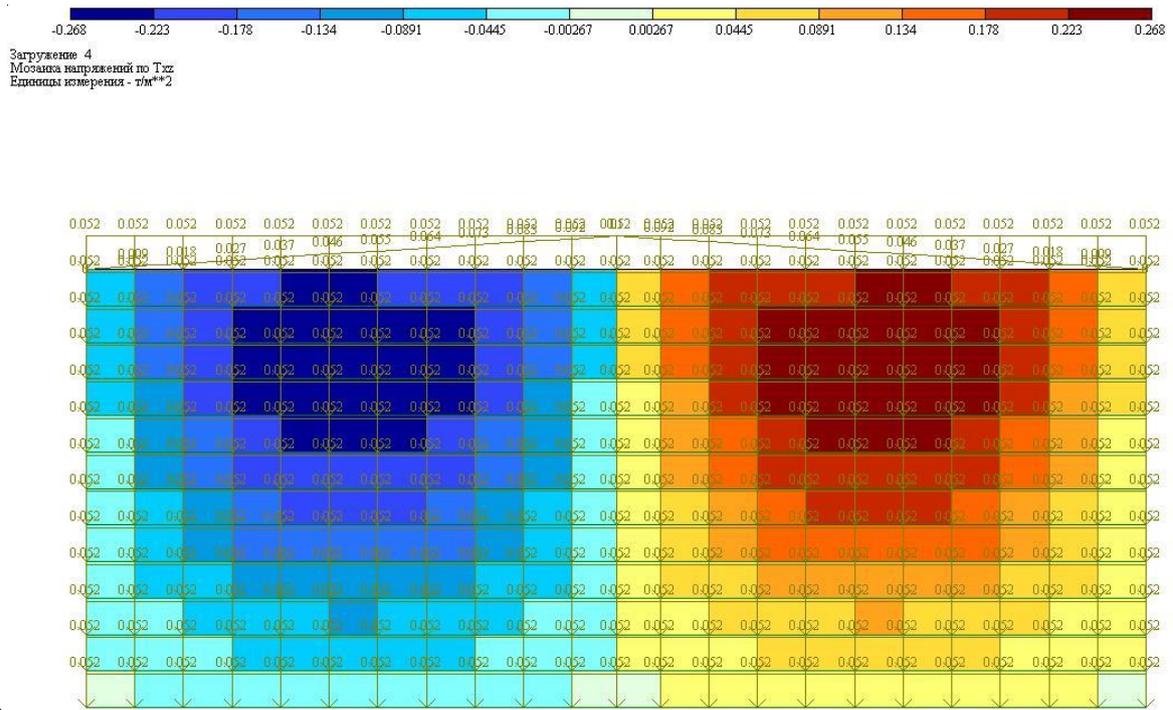
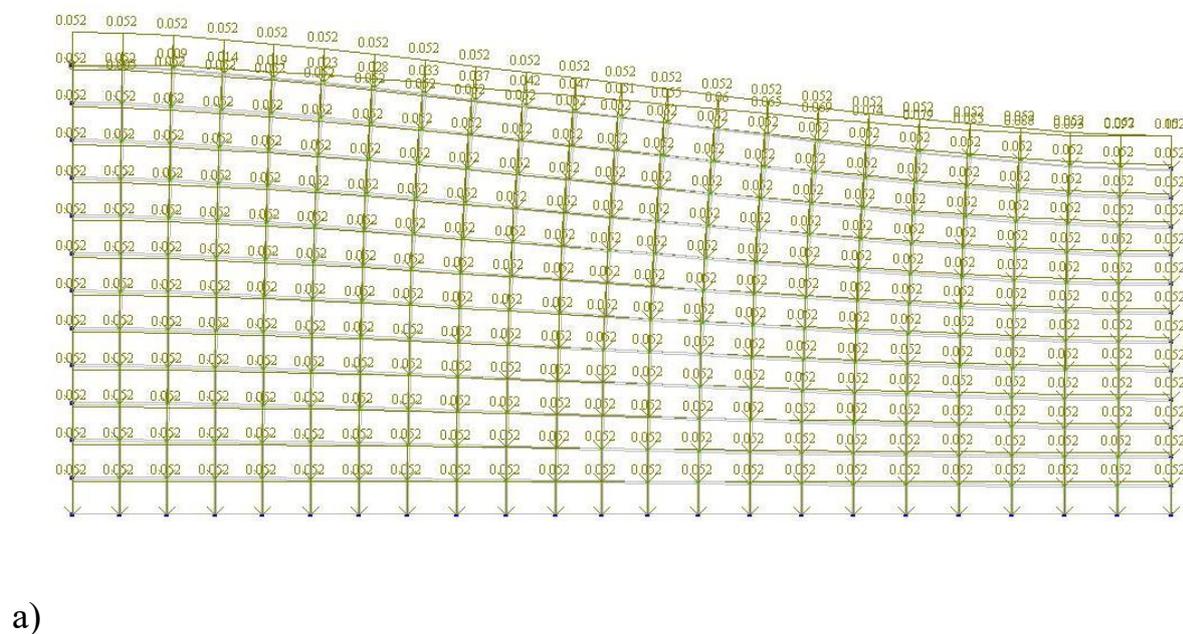
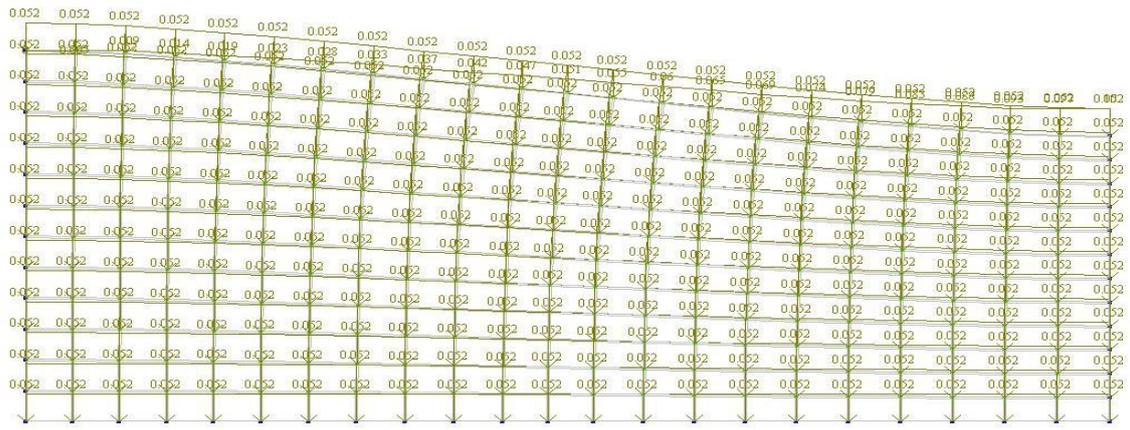


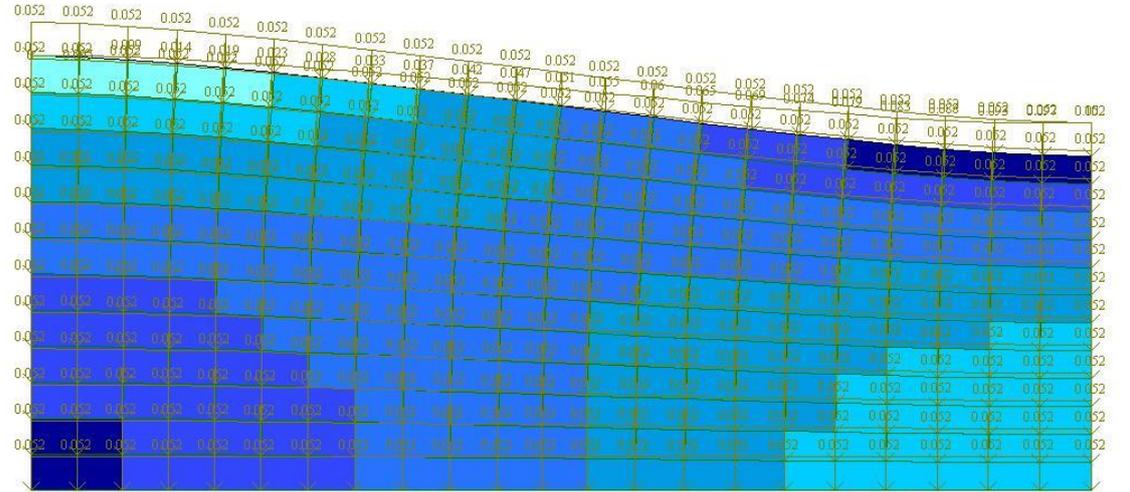
Рис. 3.12. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме равнобедренного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



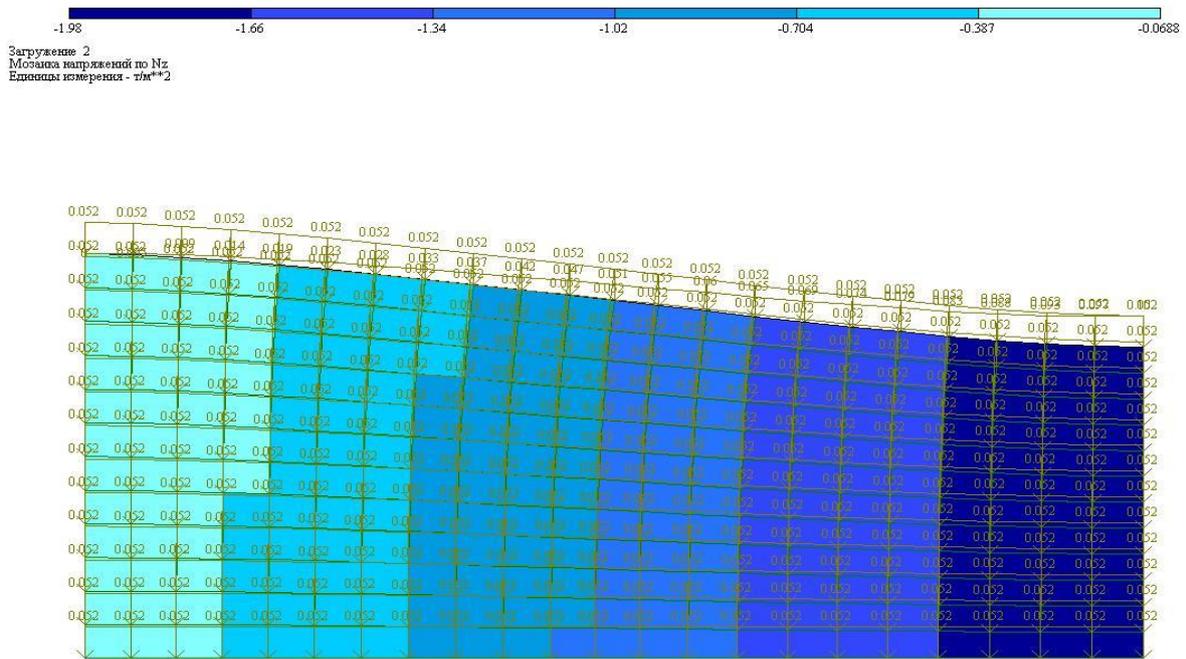


б)

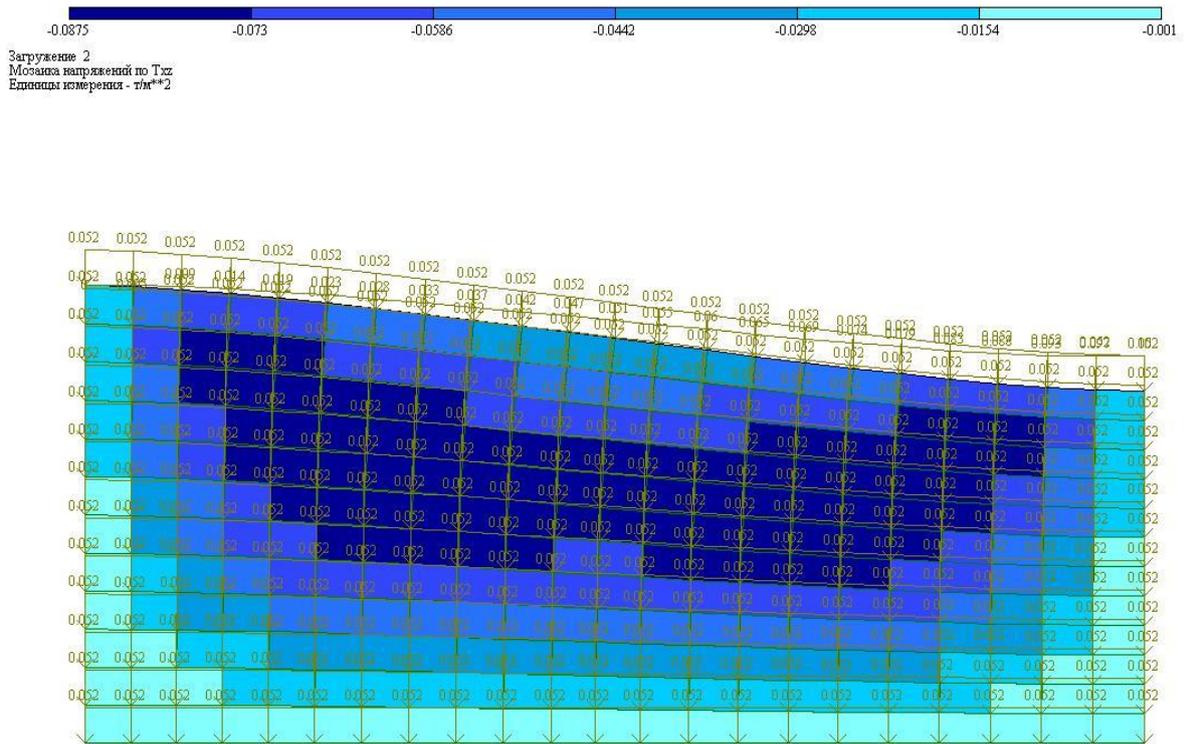
Рис. 3.13. Схемы нагружения модели от нагрузки в форме прямоугольного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$



а)



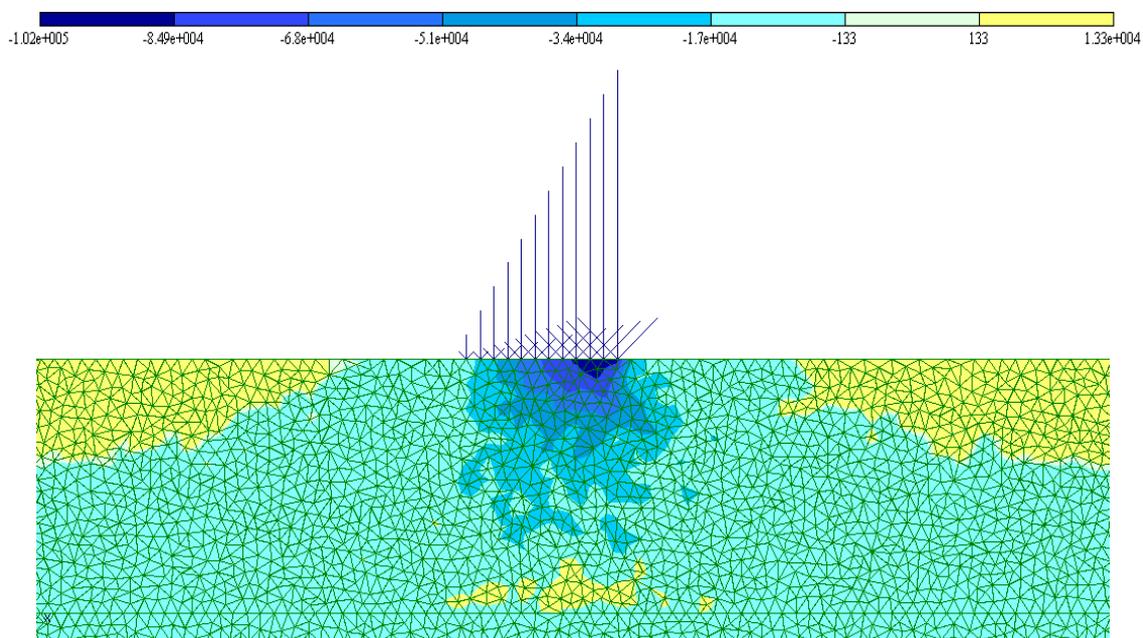
б)



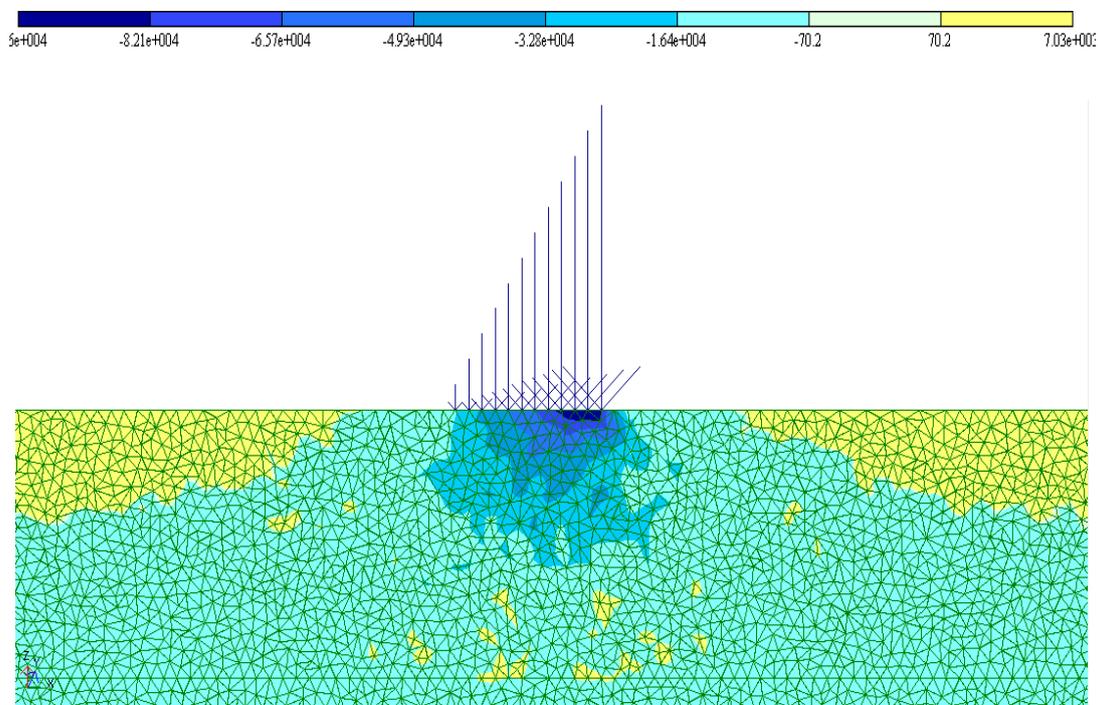
в)

Рис.3.14. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме прямоугольного треугольника на стадии пластических деформаций: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

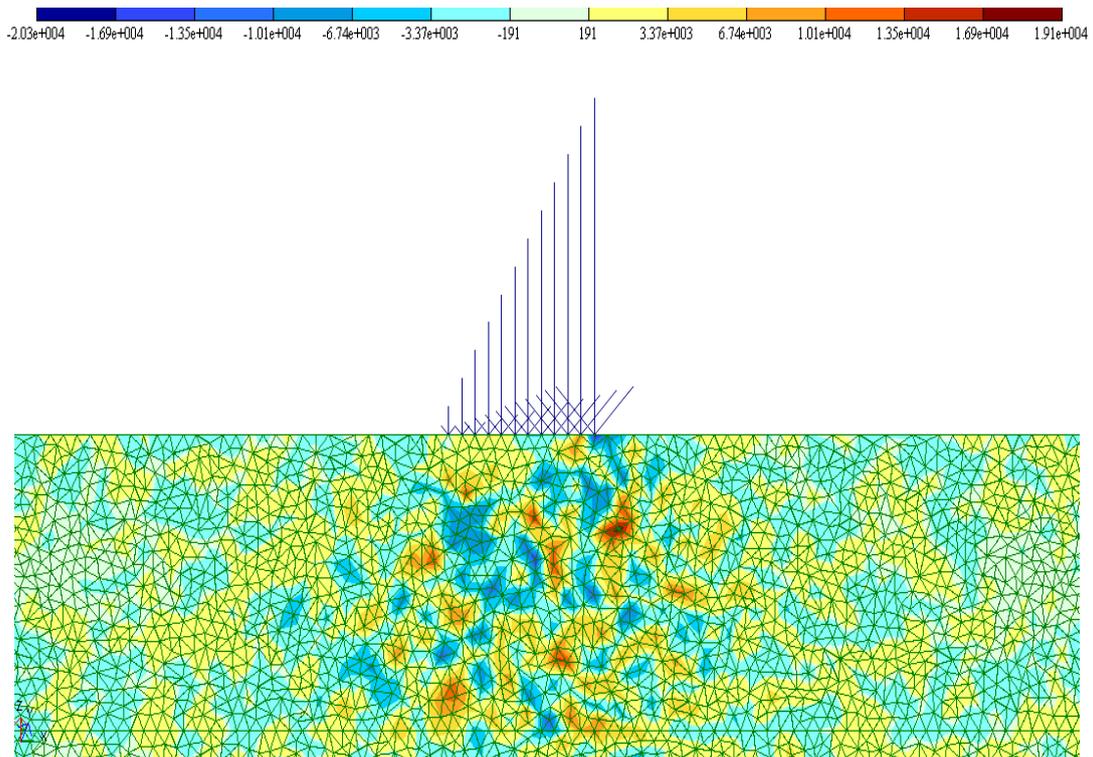
Результаты расчётов моделей грунтовой среды  
методом конечных элементов



a)

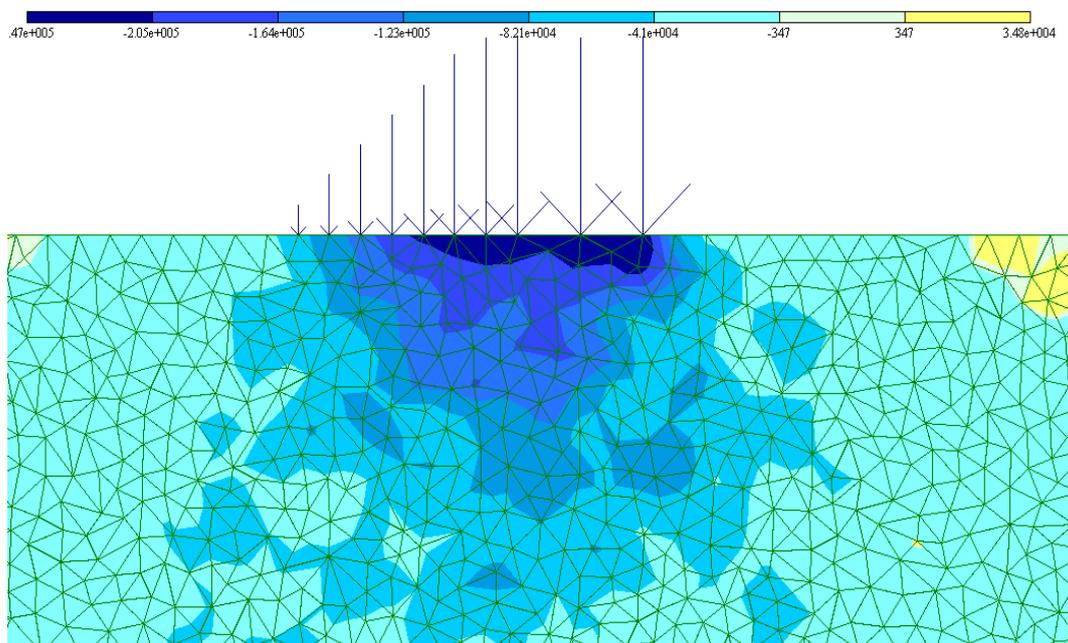


б)

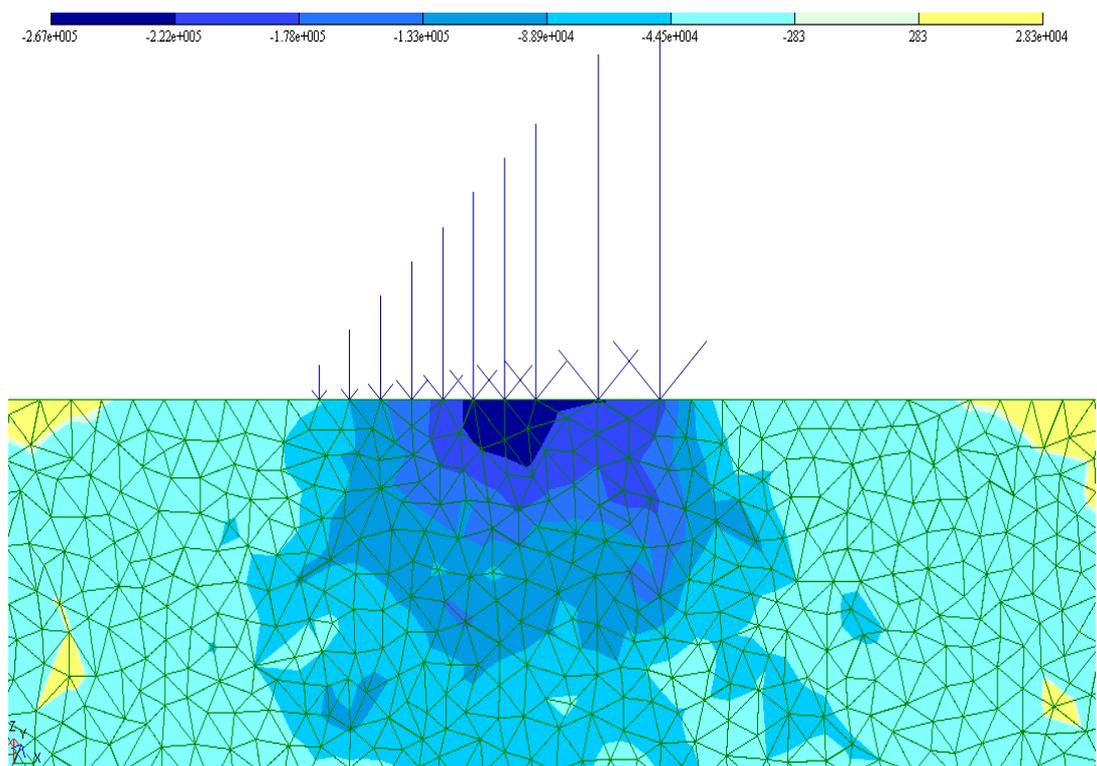


в)

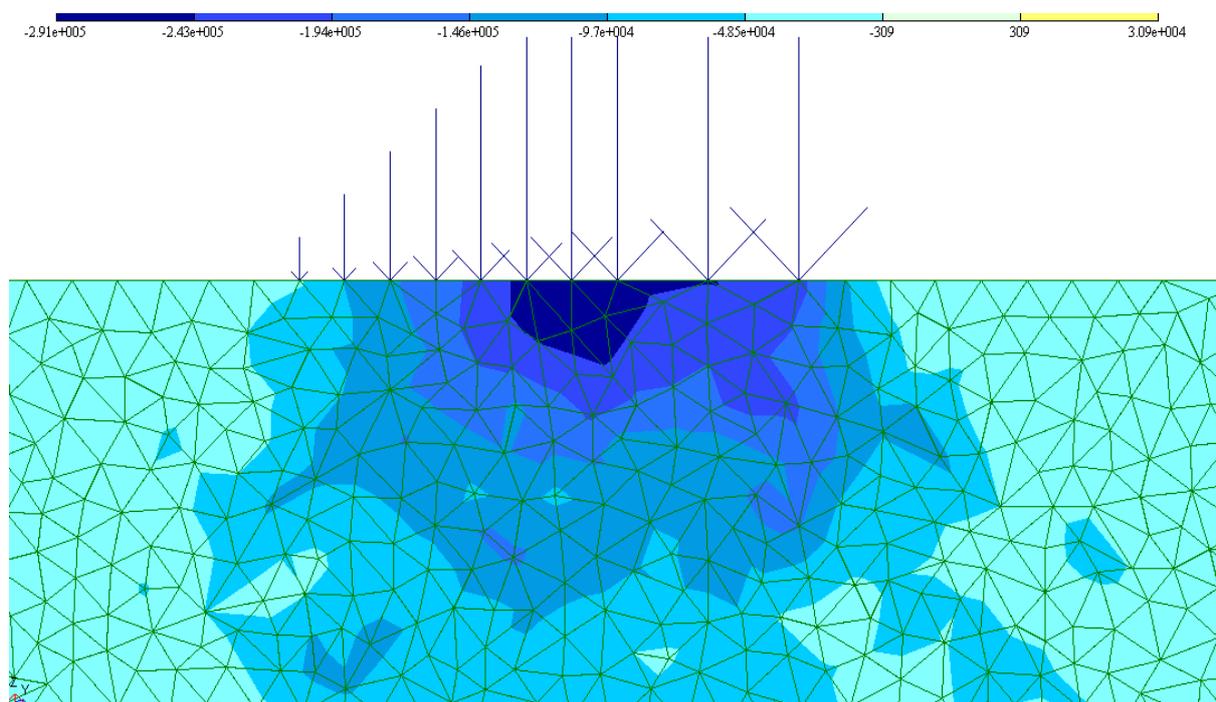
Рис. 4.1. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме прямоугольного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



а)

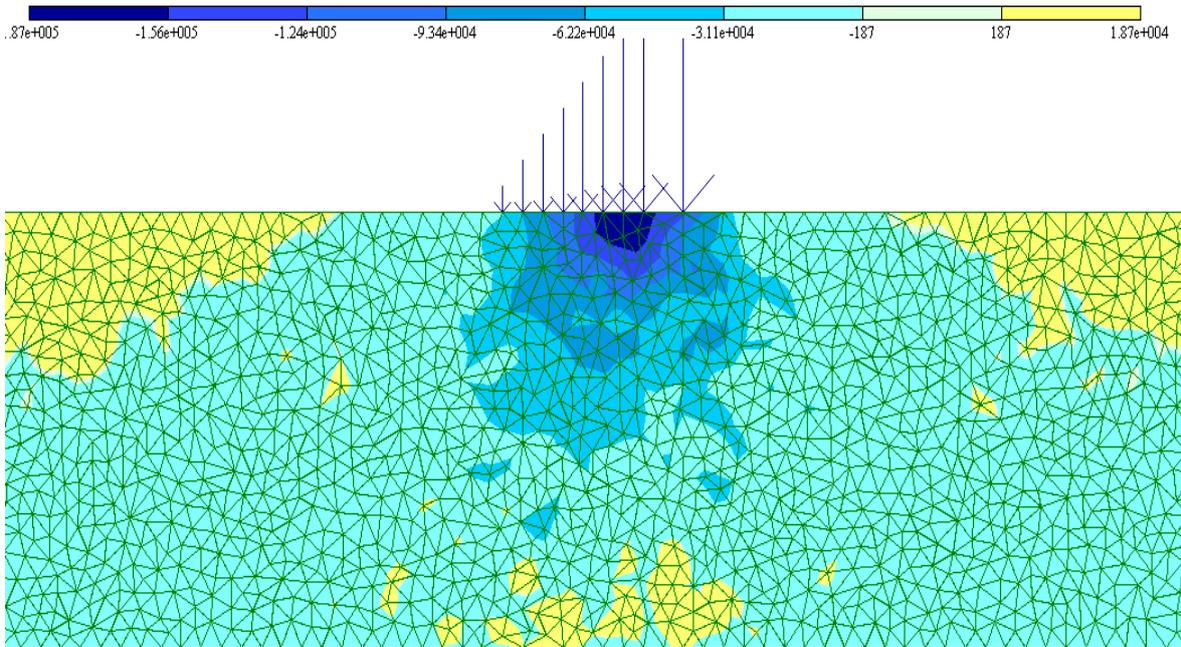


б)

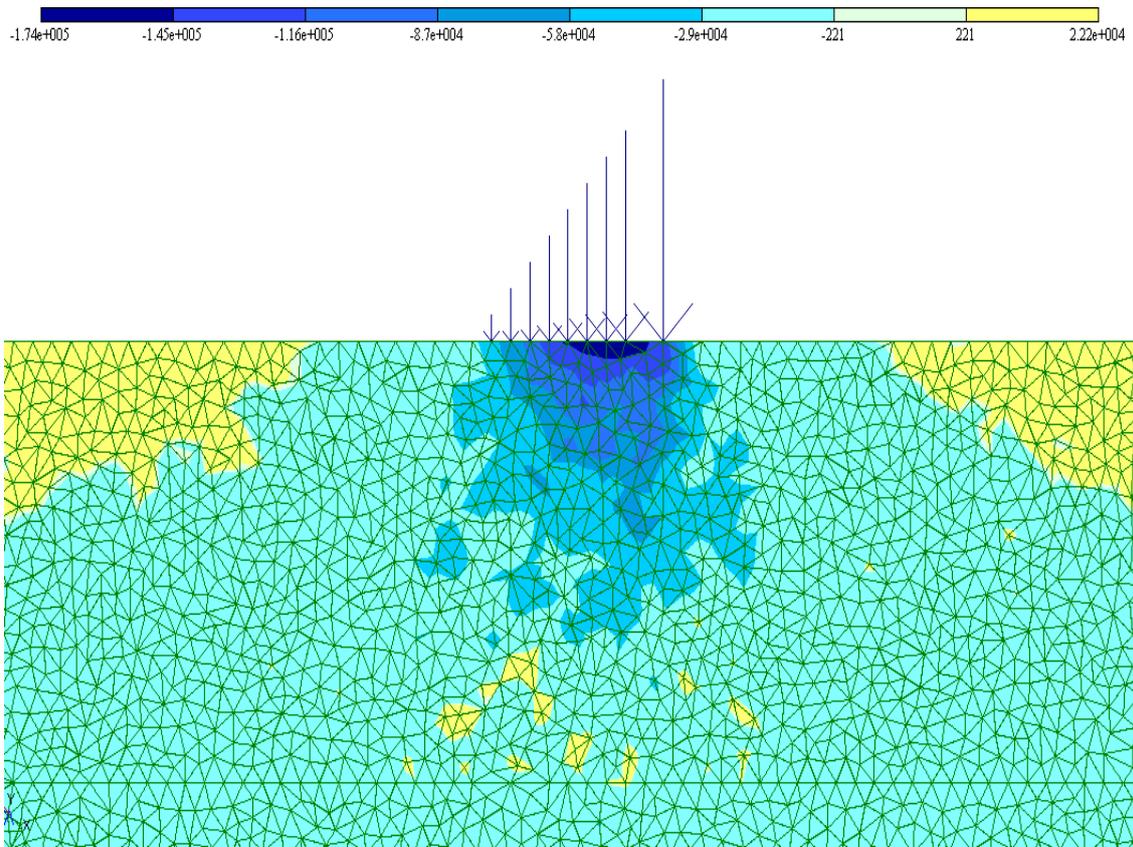


в)

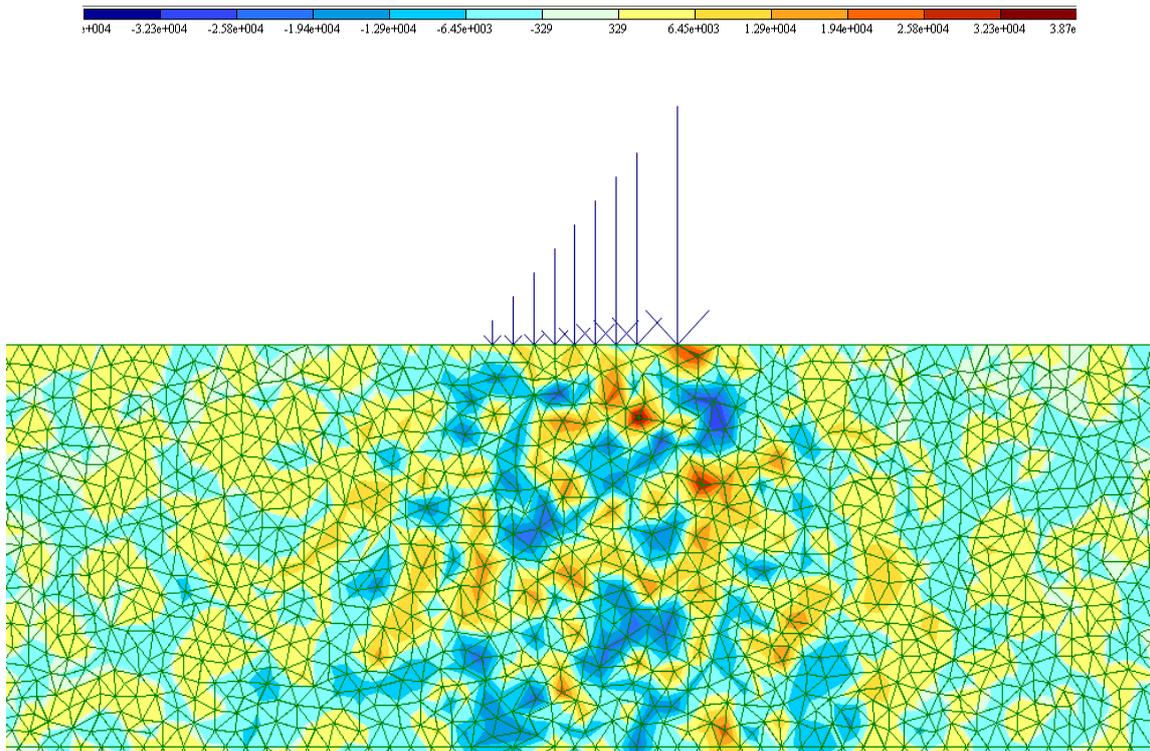
Рис. 4.2. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме прямоугольного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



a)

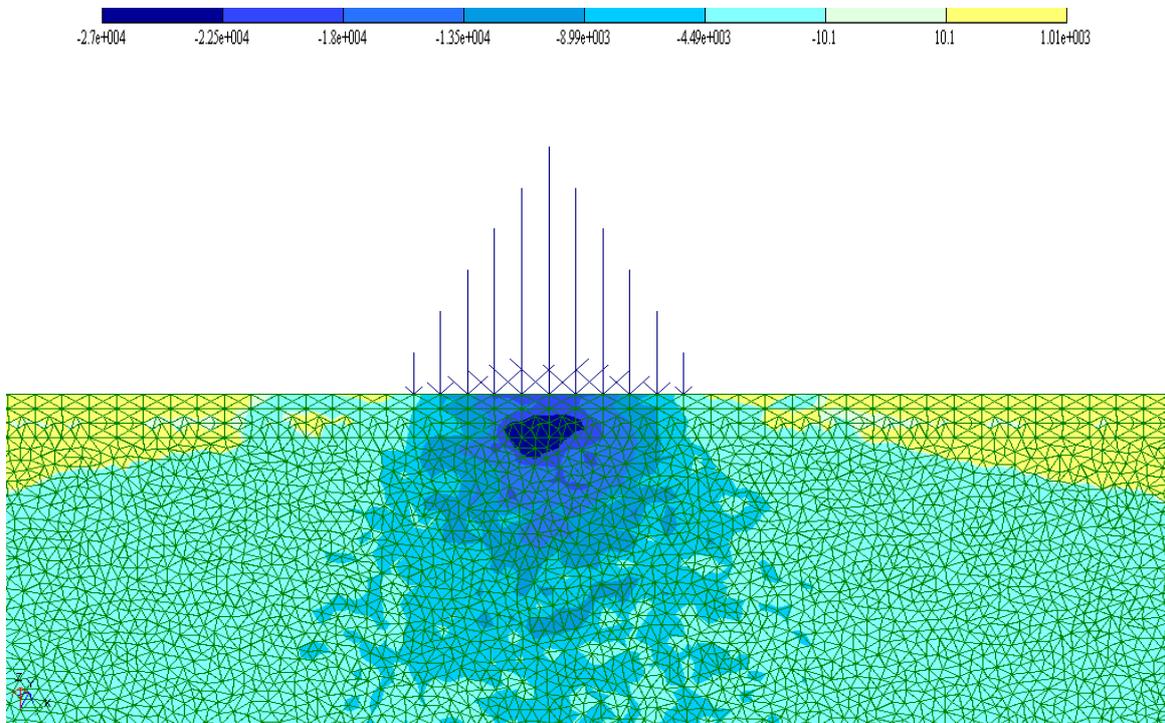


b)

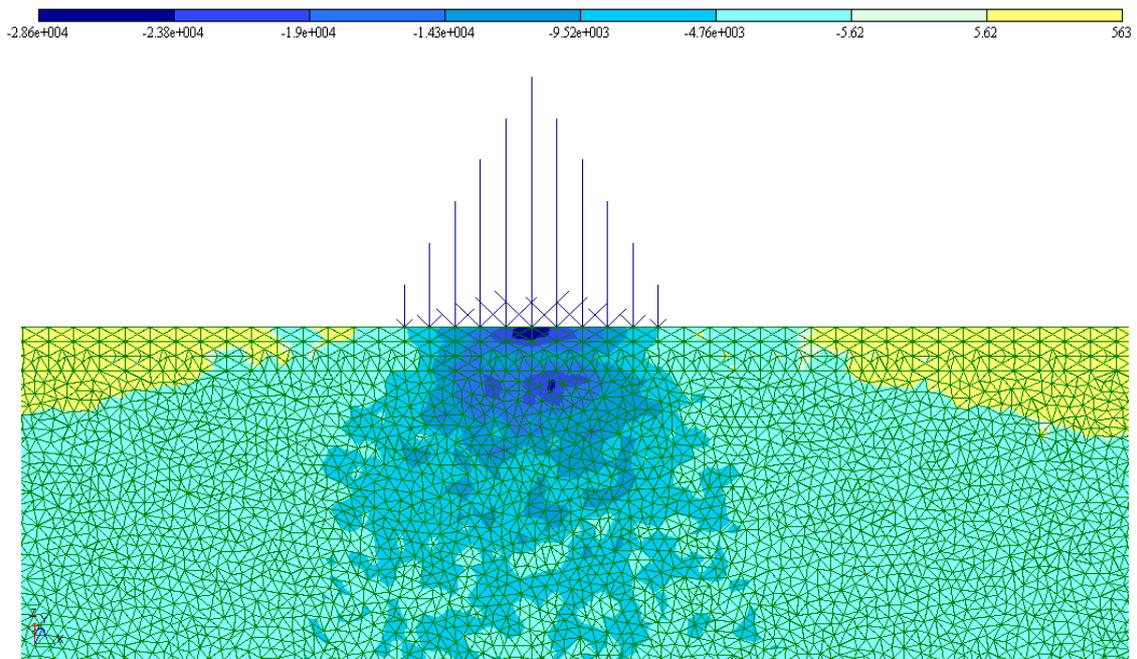


в)

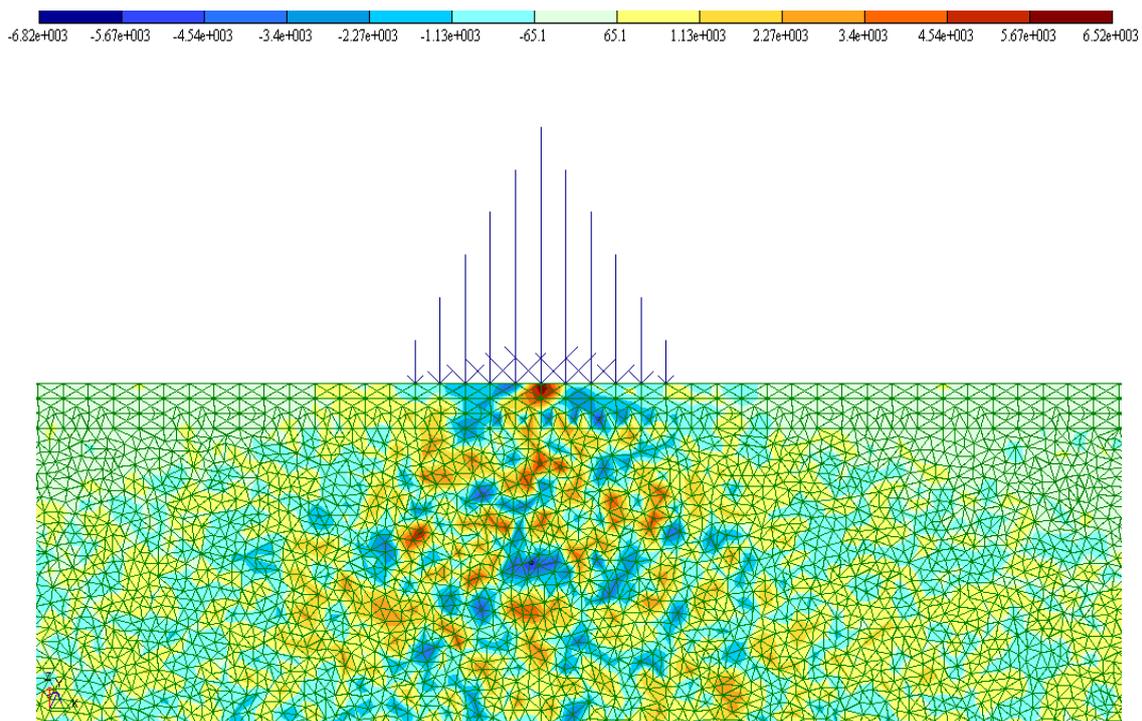
Рис. 4.3. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме прямоугольного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



а)

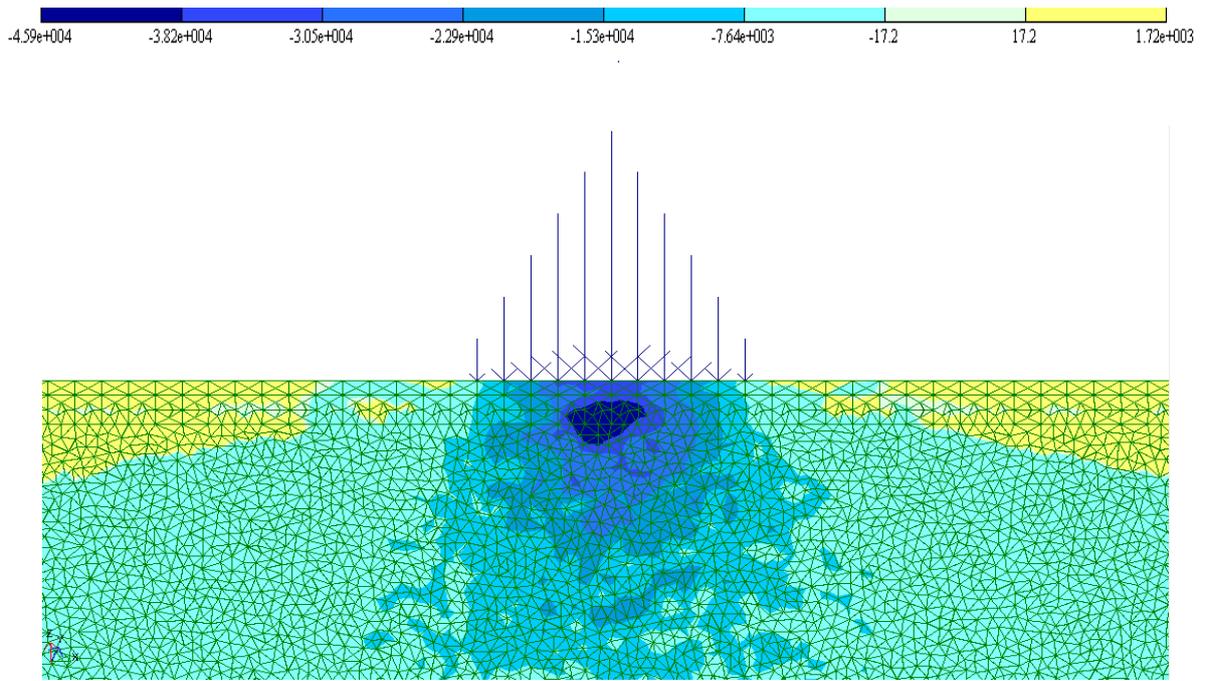


б)

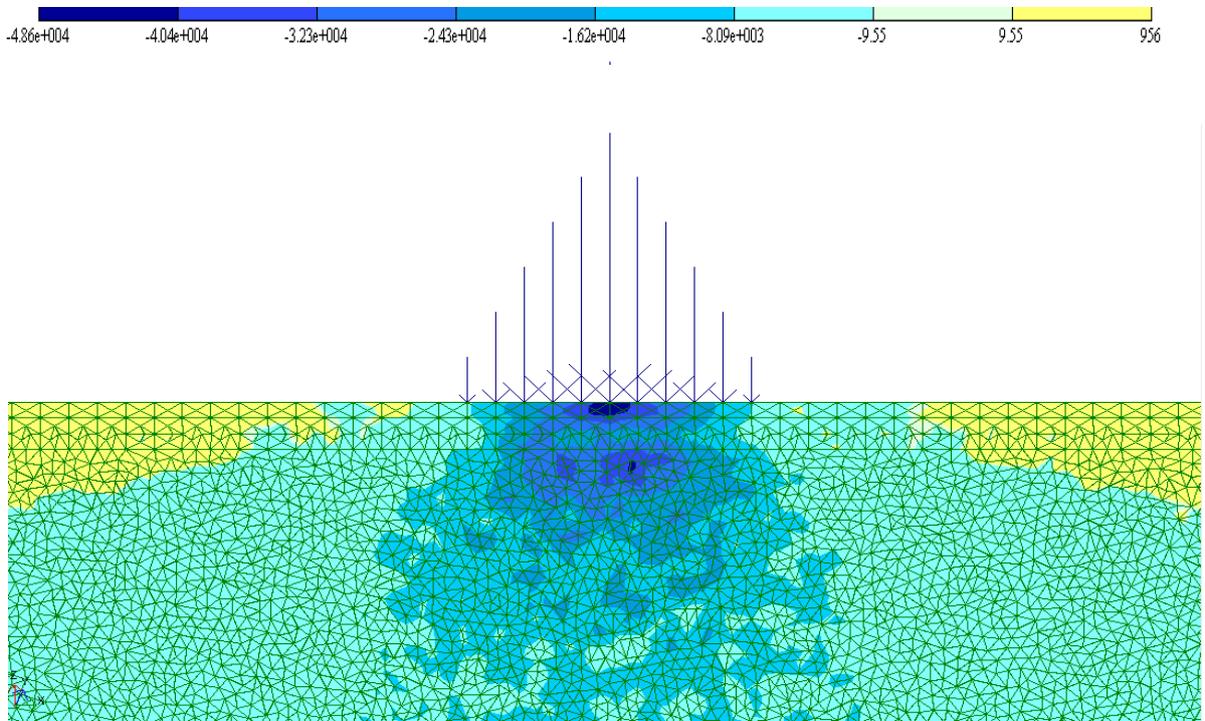


в)

Рис.4.4. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме равнобедренного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

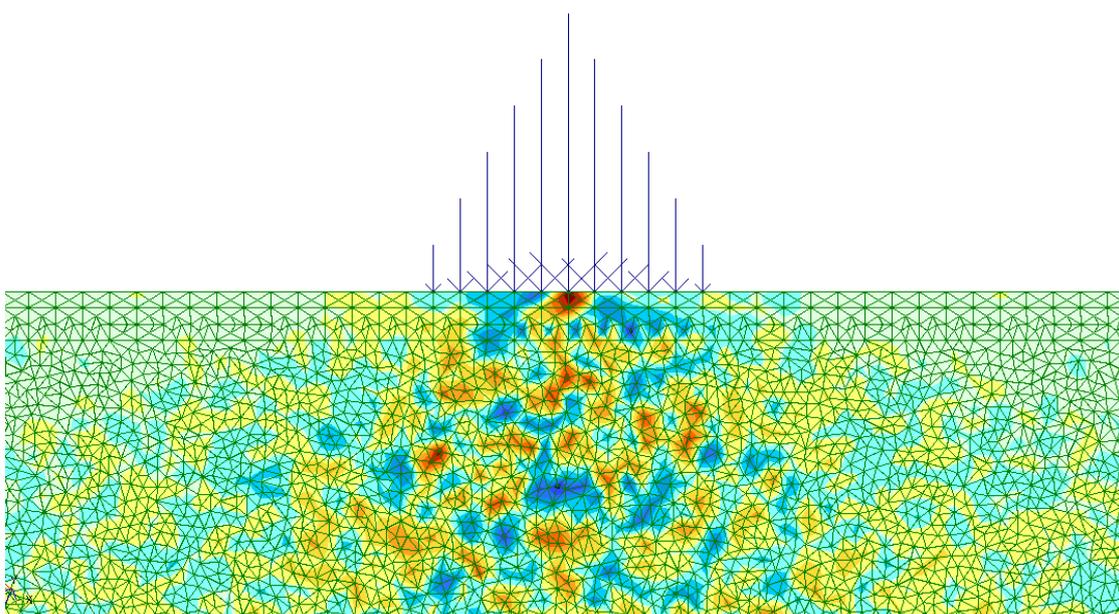


a)



b)

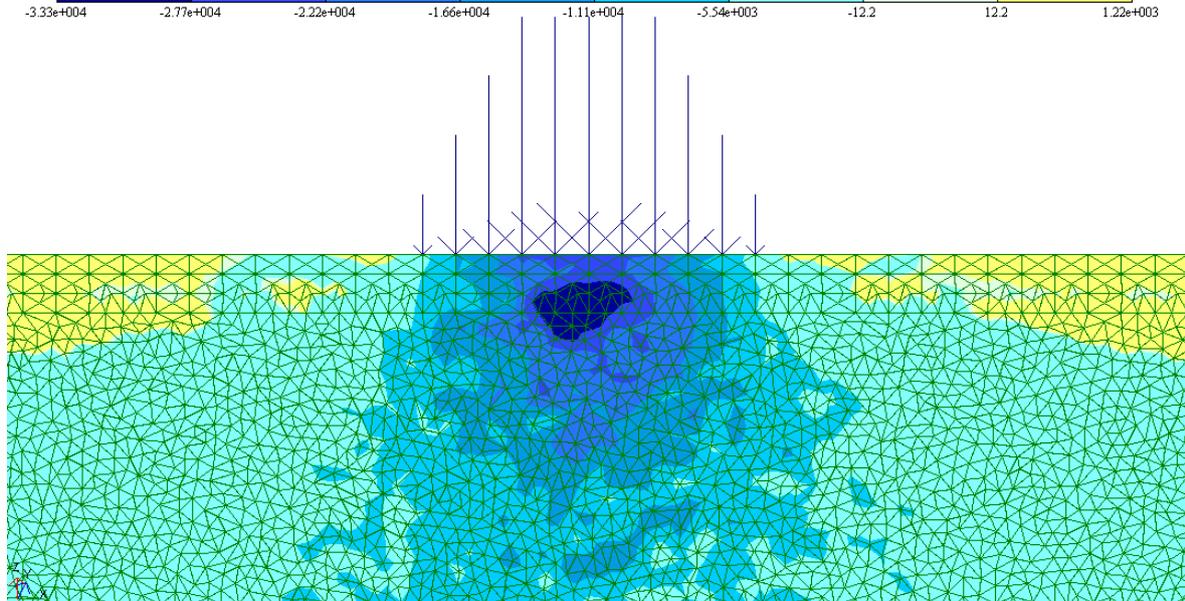
-1.16e+004 -9.64e+003 -7.71e+003 -5.78e+003 -3.86e+003 -1.93e+003 -111 111 1.93e+003 3.86e+003 5.78e+003 7.71e+003 9.64e+003 1.11e+004



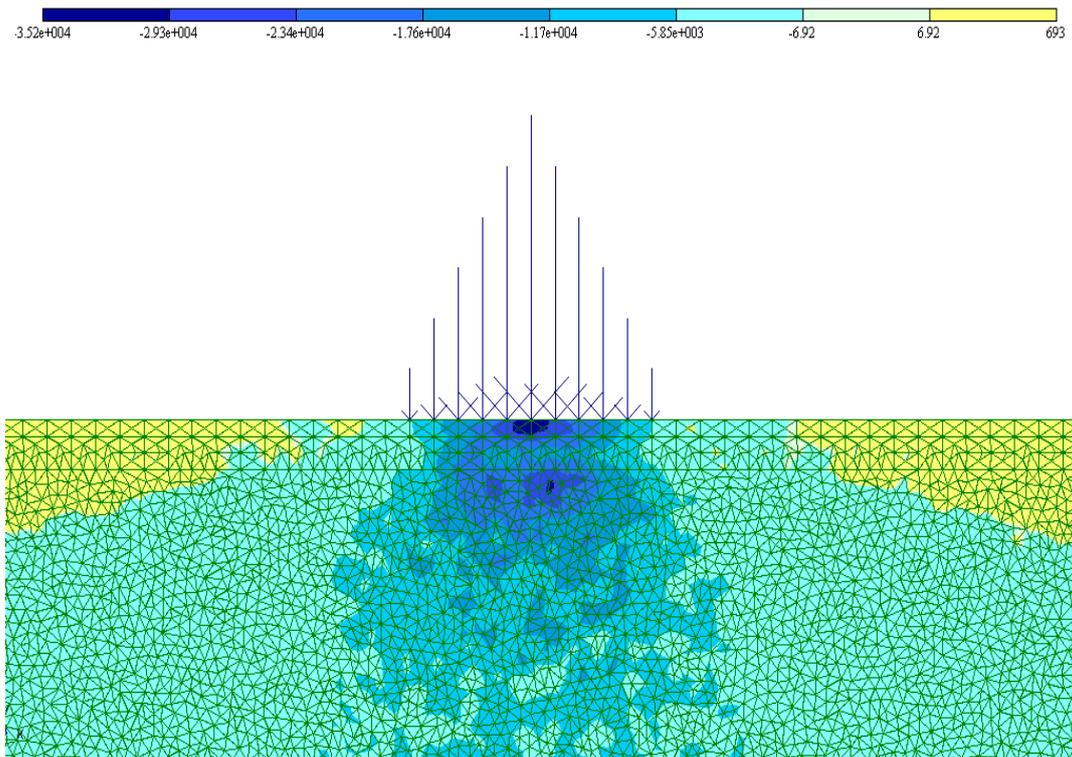
в)

Рис.4.5. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме равнобедренного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

-3.33e+004 -2.77e+004 -2.22e+004 -1.66e+004 -1.11e+004 -5.54e+003 -12.2 12.2 1.22e+003



а)



б)

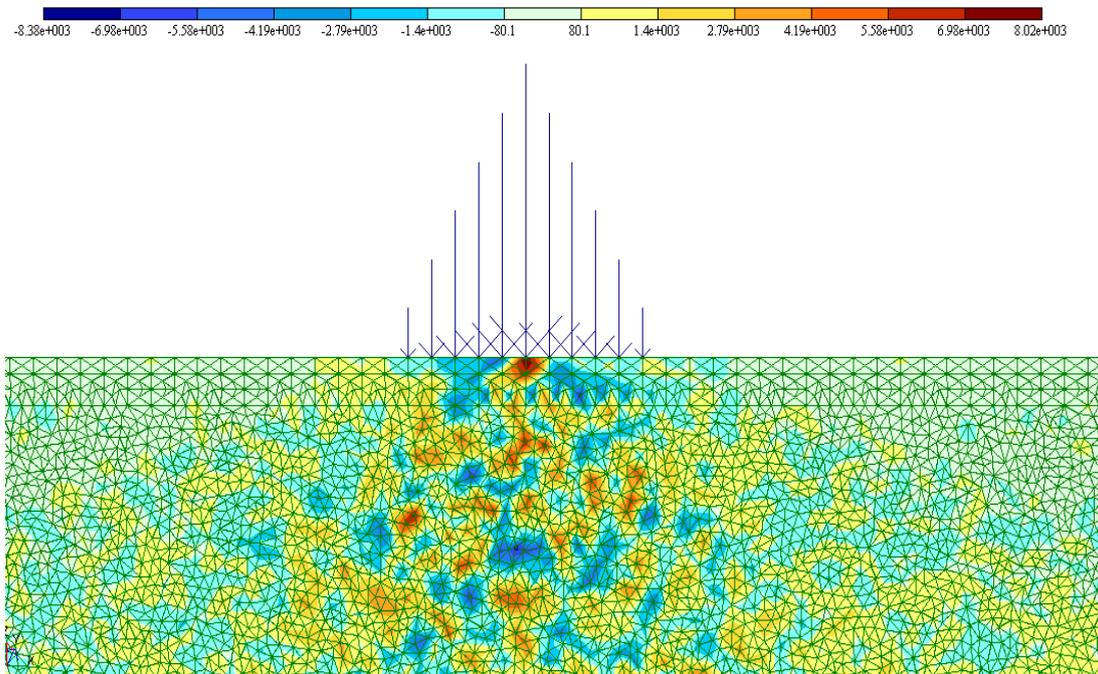
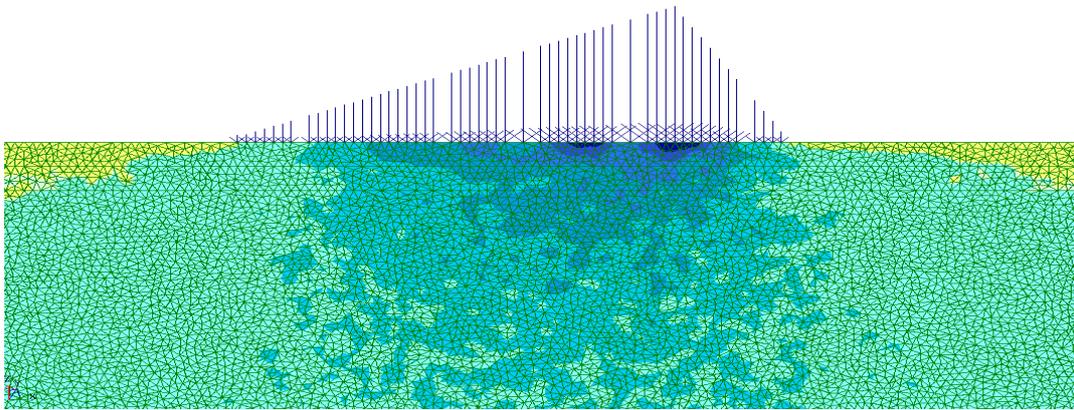
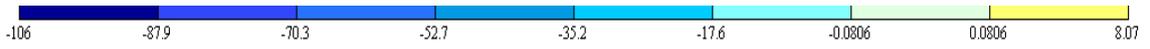
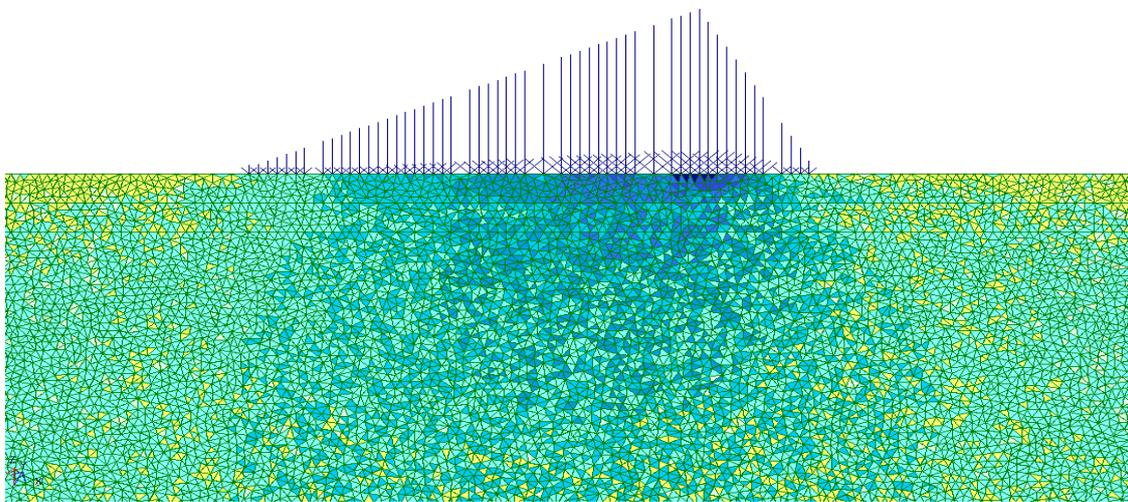


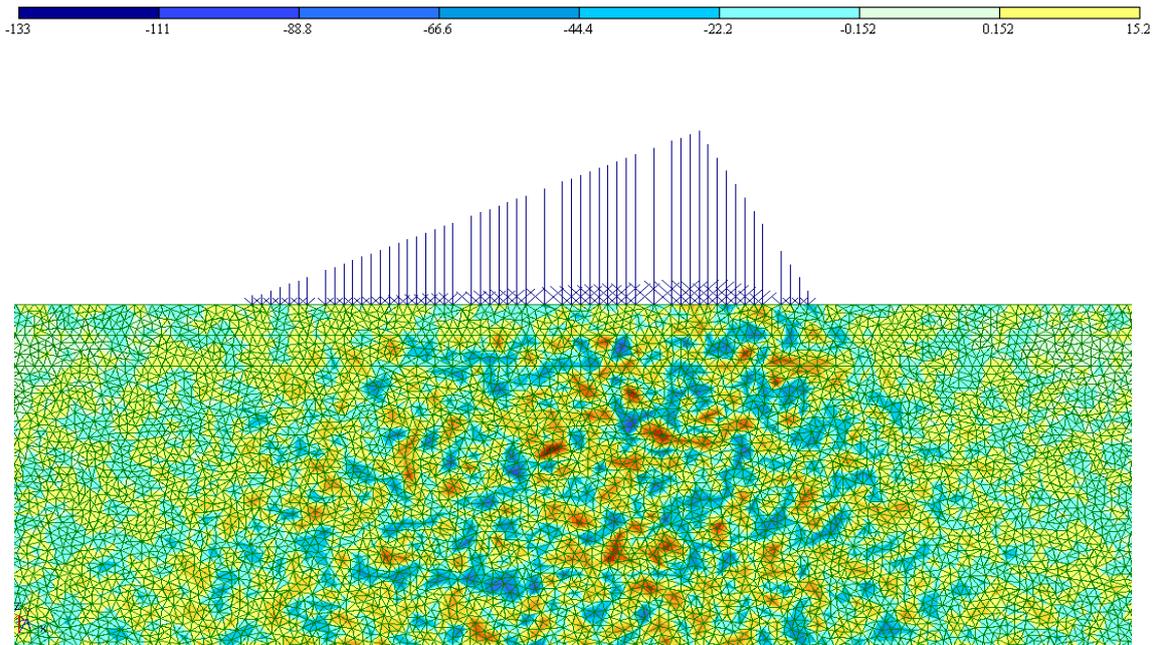
Рис. 4.6. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме равнобедренного треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



a)

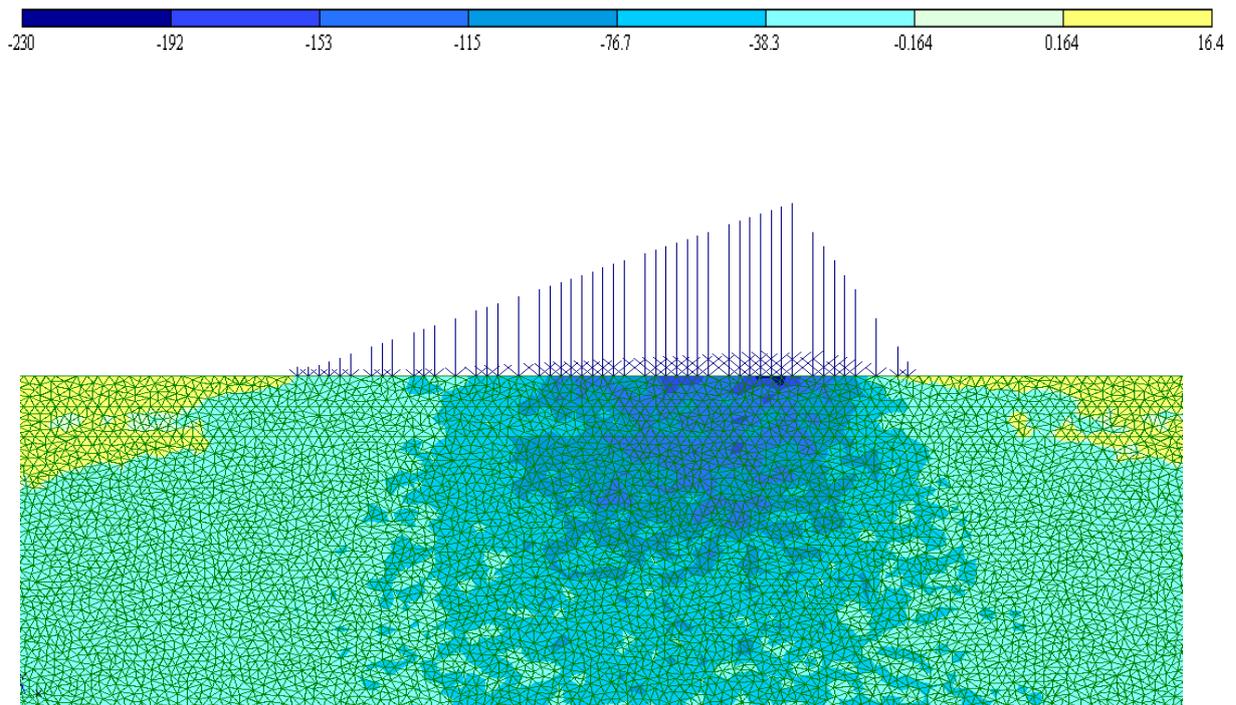


b)

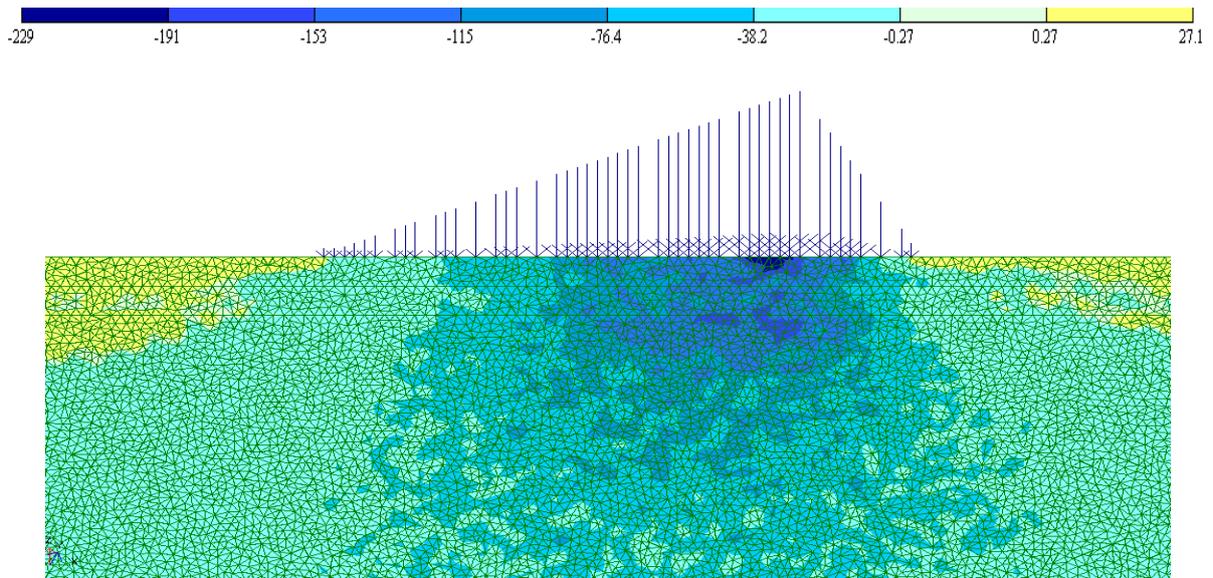


в)

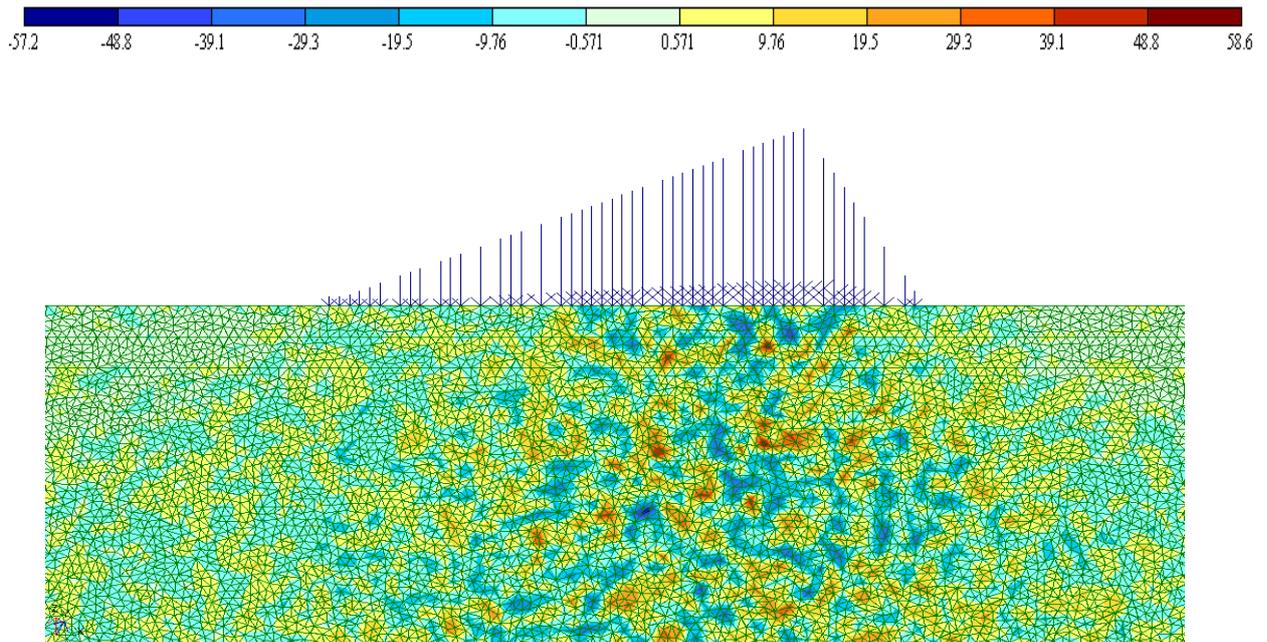
Рис. 4.7. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме неравностороннего треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



а)

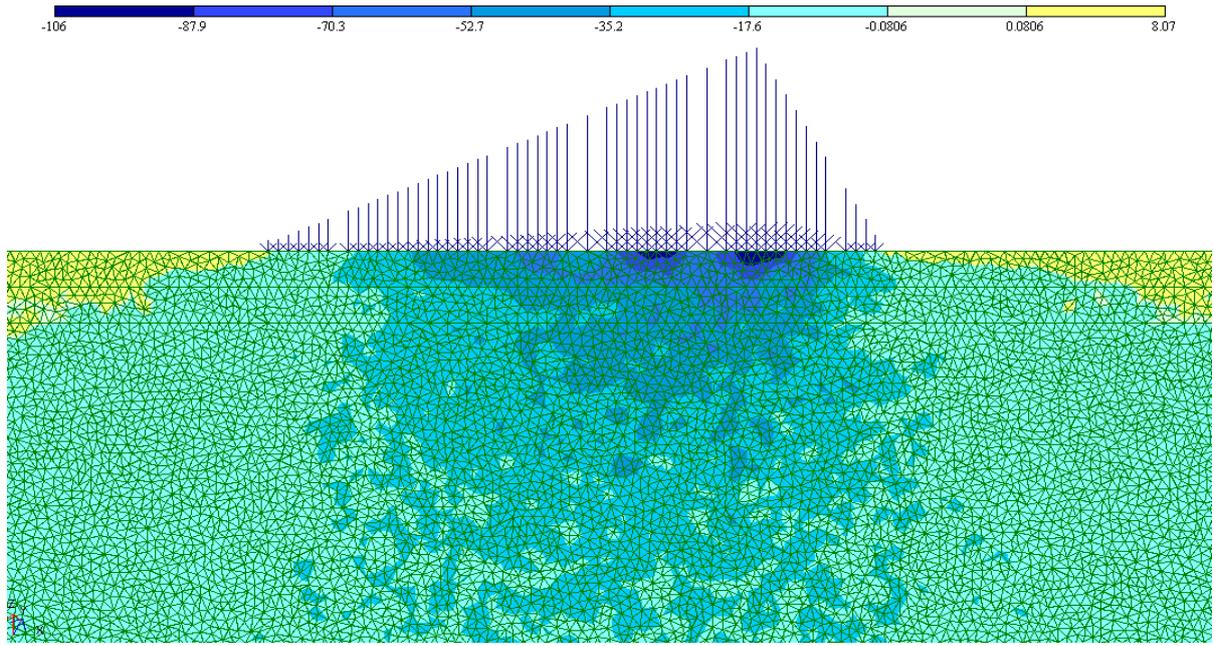


б)

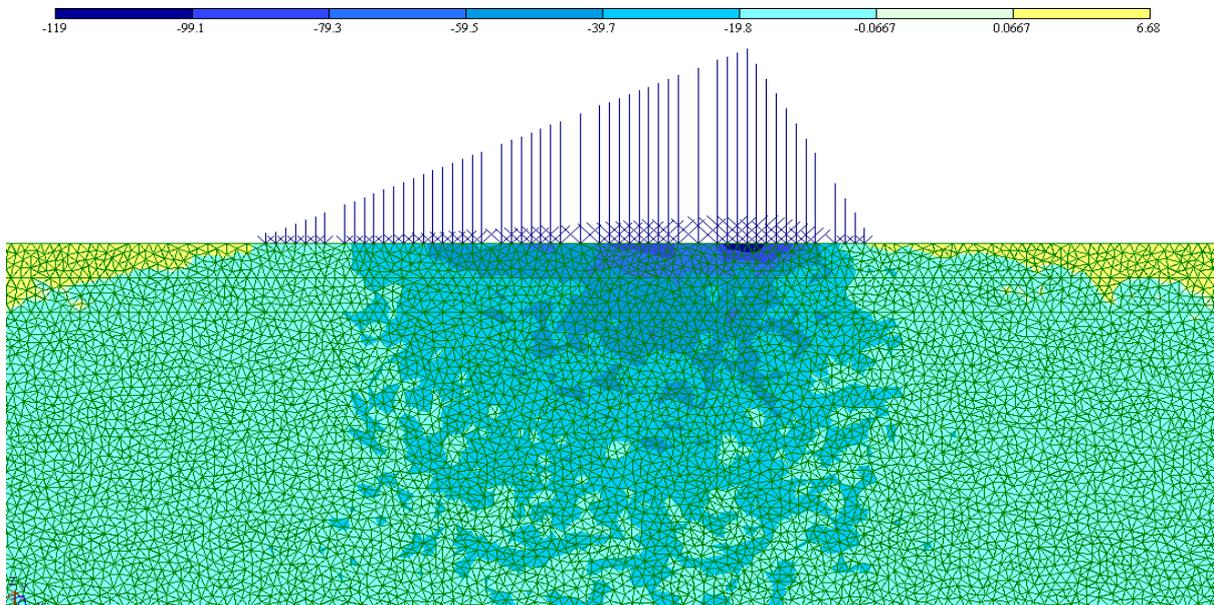


в)

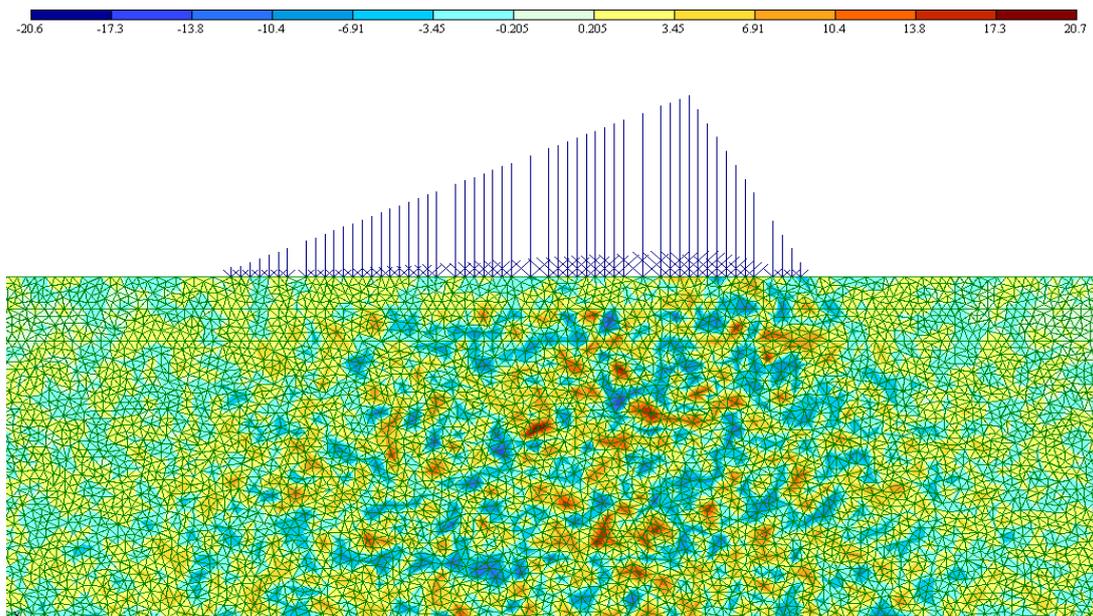
Рис. 4.8. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме неравностороннего треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



a)



b)



в)

Рис. 4.9. Изополя напряжений в вертикальном сечении модели от нагрузки в форме неравностороннего треугольника: а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	3
<b>INTRODUCTION</b> .....	5
<b>Глава 1. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕД ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ВНЕШНЕЙ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ</b> .....	7
1.1. Проблема изучения критических нагрузок в грунтовой среде (двухмерная задача).....	7
1.2. Влияние подземных вод на физические свойства грунтовых сред.....	15
1.3. Фазы напряжённого состояния в грунтовой среде.....	17
1.4. Развитие деформаций в грунтовых средах различной консистенции под действием возрастающей нагрузки.....	20
1.5. Расчёт критической нагрузки в грунтовой среде .....	32
<b>Глава 2. РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД</b> .....	38
2.1. Нагрузка, описываемая эпюрами в форме треугольников и трапеций .....	38
2.2. Расчёт критической нагрузки с помощью рекуррентных формул .....	67
2.3. Расчёт критической нагрузки грунтовой среды от действия внешнего усилия в форме прямоугольного треугольника с помощью безразмерных коэффициентов .....	79
2.4. Расчёт критической нагрузки грунтовой среды под фундаментами больших размеров.....	86

<b>Глава 3. РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ МОДЕЛИ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТОЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ВОДОНАСЫЩЕННОГО СЛОЯ.....</b>	<b>91</b>
3.1. Напряжённое состояние модели горизонтально-слоистой грунтовой среды с водонасыщенным слоем.....	91
3.2. Оценка критической нагрузки для различных видов внешних усилий .....	94
3.3. Аппроксимация зависимостей критической нагрузки и максимальной глубины развития пластических деформаций линейными функциями .....	149
 <b>Глава 4. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД ФИЗИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ.....</b>	<b>153</b>
4.1. Поляризационно-оптический метод .....	153
4.2. Радиоизотопный метод.....	172
 <b>Глава 5. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ .....</b>	<b>197</b>
5.1. Метод конечных элементов (МКЭ).....	197
5.2. Приложение МКЭ в случае равномерно-распределённой нагрузки .....	199
5.3. Метод итерации.....	207
5.4. Метод переменных параметров.....	211
 <b>Глава 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ .....</b>	<b>216</b>
6.1. Теоретические основы определения несущей способности .....	216
6.2. Оценка предельного равновесия .....	220
6.3. Аналитические методы определения предельного равновесия с использованием краевых задач .....	222
6.4. Приближенный метод решения канонических уравнений.....	226
6.5. Методика отображения физической плоскости $x, y$ на плоскость параметров $\xi, \eta$ .....	235

<b>Глава 7. РАСЧЁТ УСТОЙЧИВОСТИ ОСНОВАНИЙ ЗДАНИЙ.....</b>	<b>240</b>
7.1. Гибкие фундаменты для слабой грунтовой среды .....	240
7.2. Проектирование оснований и фундаментов высотных зданий на слабых грунтовых средах.....	250
<b>Глава 8. РАСЧЁТ УСТОЙЧИВОСТИ ОСНОВАНИЙ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ .....</b>	<b>256</b>
8.1. Расчёт устойчивости откосов и насыпей автодороги.....	257
8.2. Расчёт устойчивости оснований некоторых инженерных сооружений.....	267
8.3. Расчёт устойчивости оснований искусственных земляных сооружений .....	273
<b>ПОСЛЕСЛОВИЕ .....</b>	<b>281</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>283</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>293</b>

*Научное издание*

КРАВЧЕНКО Татьяна Ивановна  
ФИЛАТОВ Владимир Викторович  
ДУБОВ Константин Алистархович

ПРОБЛЕМЫ ОЦЕНКИ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ  
СЛАБОЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ ПОД ИНЖЕНЕРНЫМИ СООРУЖЕНИЯМИ

Монография

*Издается в авторской редакции*

Подписано в печать 15.11.17.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 20,00. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.