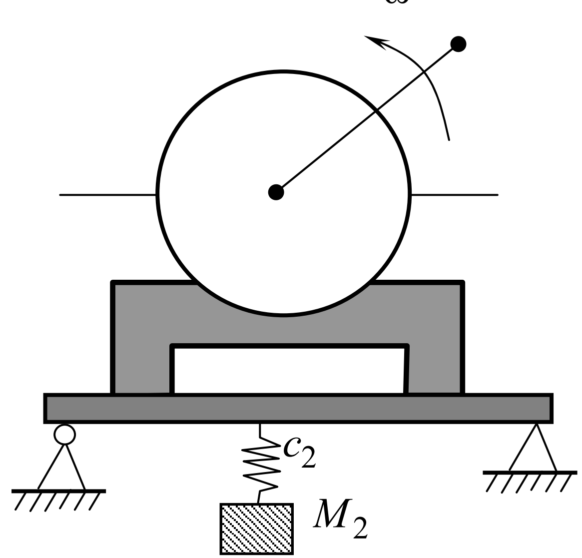
Владимирский государственный университет

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

(Раздел «Теория колебаний»)

Конспект лекций



Владимир 2003

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра приборостроения и информационно-
измерительных технологий

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ
И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

(Раздел «Теория колебаний»)

Конспект лекций

Составитель
В. И. БУРЛАКОВ

Владимир 2003

УДК 62-531.7

Рецензенты:
Кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой информатики
Владимирского педагогического университета
Ю. А. Медведев

Доктор технических наук,
заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики
Владимирского государственного университета
В. В. Козырев

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Автоматическое управление и теория колебаний (Раздел «Теория колебаний»): Конспект лекций / Владим. гос. ун-т; Сост.: В. И. Бурлаков. Владимир, 2003. 48 с.

Посвящен изучению разделов классической теории колебаний. Рассматривает теорию малых колебаний механической системы около устойчивого положения равновесия с одной и двумя степенями свободы.

Предназначен для студентов специальности 190100 – приборостроение.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 62-531.7

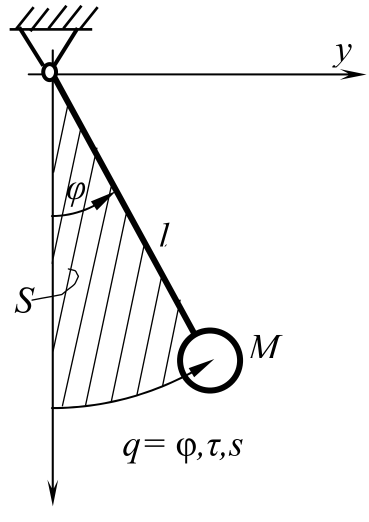
1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В вводных замечаниях даны определения и формулы, которые должны быть известны студентам из курса теоретической механики.

Возможные, или виртуальные перемещения – совокупность воображаемых бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент всеми наложенными на систему связями. Они обладают **свойствами**:

1) они воображаемые, т.е. изохронные перемещения $\delta\overline{r}$, для их осуществления не требуется времени;
2) бесконечно малые перемещения, что позволяет заменить криволинейные перемещения прямолинейными;
3) не должны нарушать наложенные на систему связи.

Число степеней свободы – число независимых между собой возможных (виртуальных) перемещений. Находится из анализа движения тела, механизма.



Независимые параметры, однозначно определяющие положение системы, и число которых равно числу степеней свободы, называются **обобщенными координатами**. Независимые параметры не связаны уравнениями связи. Общепринятое обозначение обобщенных координат – q.

В качестве обобщенных координат могут выступать любые параметры, например, для математического маятника это может быть: угол отклонения φ, криволинейная координата τ, площадь S и т.д.

Раньше радиус-вектор $\overline{r}$ записывался как функция декартовых координат x, y, z, т.е.:

$$\overline{r} = \overline{r}(x, y, z),$$

а теперь $\overline{r}$ будем записывать как функцию обобщенных координат:

$$\overline{r} = \overline{r}(q_1, q_2, ..q_S),$$

где s – число степеней свободы.

Уравнение движения в декартовых координатах:

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t).$$

Уравнение движения в обобщенных координатах:

$$q_1 = \varphi_1(t),\ q_2 = \varphi_2(t), \dots\ q_S = \varphi_S(t).$$

Обобщенные силы – коэффициенты, стоящие в выражении элементарных работ при приращении обобщенных координат.

$$\sum_1^S \delta A \ = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \dots + Q_s\delta q_s,$$

где $Q_1, Q_2, \dots Q_s$ – обобщенные силы.

Нахождение обобщенных сил

1. Имеется система, определили число степеней свободы, задали обобщающие координаты и их приращение:

$$\delta q_1 \neq 0,\ \delta q_2 = \dots = \delta q_s = 0,$$

$\delta A_1 = Q_1\delta q_1$ – уравнение элементарных работ,

$$\delta q_2 \neq 0,\ \delta q_1 = \dots = \delta q_s = 0,$$

$\delta A_2 = Q_2\delta q_2$ и т.д.

2. Даем приращение радиус-вектора:

$$\delta A_1 = \overline{F}_1 \delta\overline{r}_1,\ \ \delta\overline{r}_1 = \frac{\partial\overline{r}}{\partial q_1}\delta q_1,$$

$$Q = \sum_1^n \overline{F}_i \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j},\ \ i = \overline{1, n},\ \ j = \overline{1, S},$$

$$Q_j = \sum_1^n [X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j}],$$

где X_i, Y_i, Z_i – проекции сил на координатные оси.

Здесь X, Y, Z – координаты точек приложения сил.

3. Если известна потенциальная энергия, то $Q_j = -\dfrac{d\Pi}{dq_j}$.

Потенциальная энергия численно равна работе, которую необходимо совершить при перемещении тела из данного положения в нулевое, т.е. при нахождении обобщенной силы через потенциальную энергию необходимо определить саму потенциальную энергию.

$[Q_j] = \frac{[A]}{[q_j]}$ – единица измерений обобщенной силы.

2. УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА II РОДА

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \ j = \overline{1, S}$$ - число степеней свободы.

Число уравнений Лагранжа записывается столько, сколько степеней свободы имеет система.

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} m_i \bar{V}_i^2$$ (всегда положительная),

$$\bar{V}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt}, \ \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i}\dot{q}_i, \ \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt},$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

где $\dot{q}_i, \dot{q}_j$ – обобщенные скорости, a_{ij} – коэффициенты инерции (масса, моменты инерции).

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + ... + a_{SS}\dot{q}_S^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + ... + 2a_{S-1,S}\dot{q}_{S-1}\dot{q}_S).$$

Кинетическая энергия представляет собой знакоопределенную квадратичную функцию обобщенных скоростей. Коэффициенты у таких функций подчинены критерию Сильвестра:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1S} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{S1} & \cdots & \cdots & a_{SS} \end{vmatrix} > 0.$$

Потенциальная энергия

Выражение для потенциальной энергии записывается через обобщенные координаты и коэффициенты жесткости.

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} c_{ij} q_i q_j ,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + c_{22}q_2^2 + \ldots + c_{SS}q_S^2 + 2c_{12}q_1q_2 + \ldots + 2c_{S-1,S}q_{S-1}q_S),$$

где c – коэффициенты жесткости.

Потенциальная энергия системы – знакоопределенная квадратичная функция обобщенных координат, поэтому должна удовлетворять критерию Сильвестра:

$$c_{11} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1S} \\ c_{21} & \cdots & \cdots & c_{2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{S1} & \cdots & \cdots & c_{SS} \end{vmatrix} > 0.$$

Диссипативная функция
(функция рассеивания энергии, функция Релея)

Сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости, следовательно, диссипативная функция пропорциональна квадрату скорости.

R – сила сопряжения, направлена противоположно скорости

$$\bar{R}_i = \alpha_i \bar{V}_i ,$$

$$\bar{V}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} , \quad \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i}\dot{q}_i , \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} ,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{S} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$ – диссипативная функция,

где b_{ij} – коэффициенты сопротивления,

$$\Phi = \frac{1}{2}(b_{11} + \dot{q}_1^2 + b_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + b_{SS}\dot{q}_S^2 + 2b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + 2b_{S-1,S}\dot{q}_{S-1}\dot{q}_S),$$

$$b_{11} > 0, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1S} \\ b_{21} & \cdots & \cdots & b_{2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{S1} & \cdots & \cdots & b_{SS} \end{vmatrix} > 0.$$

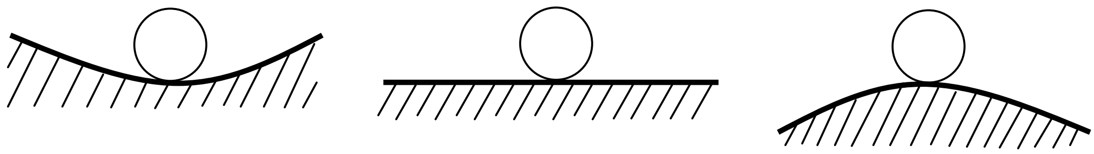
$Q_j = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}$ – обобщенная сила – производная диссипативной функции по обобщенной скорости со знаком минус.

Уравнение Лагранжа для системы, на которую действуют только потенциальные силы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = \overline{1,S}.$$

3. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОКОЛО УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Устойчивое положение равновесия. Теорема Лагранжа–Диригле



устойчивое положение равновесия безразличное положение равновесия неустойчивое положение равновесия

Положения равновесия системы будем называть **устойчивым**, если при незначительных начальных скоростях и отклонениях она стремится вернуться в это положение.

Запишем общее уравнение динамики через обобщенные силы:

$$Q_j + Q_j^{ин} = 0, \; j = \overline{1,S}.$$

Если система находится в равновесии (скорость, ускорение = 0), то

$$Q_j^{ин} = 0 \;\Rightarrow\; Q_j = 0.$$

Если на систему действует система потенциальных сил, то

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0.$$

Согласно правилу математики, если частная производная функции равна «0», то она имеет экстремальные значения max или min.

Теорема. Положение равновесия консервативной системы, в котором её потенциальная энергия достигает минимума, – устойчиво.

Это означает, что: $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j^2} > 0$.

4. СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ (*S* = 1)

В этом разделе изучим:

Свободные колебания без учета сил сопротивления.

Вынужденные колебания без учета сил сопротивления.

Свободные колебания с учетом сил сопротивления.

Вынужденные колебания с учетом сил сопротивления.

Свободные колебания без учета сил сопротивления

$T = \frac{1}{2} a \; \dot{q}^2, \; \Pi = \frac{1}{2} c q^2, \; \Phi = 0.$

Возмущающиеся силы на систему не действуют:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q},$$

$a\ddot{q} = -cq$, $a\ddot{q} + cq = 0$, или

$\ddot{q} + k^2 q = 0$, где $k^2 = \frac{c}{a}$

- дифференциальное уравнение, которое определяет свободные колебания без учета сил сопротивления.

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + k^2 = 0, \lambda = \pm ik$, где i – мнимая единица.

В случае мнимых корней: $i = \sqrt{-1}$,

$q = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$,

где c_1, c_2 –произвольные постоянные, определяются из начальных условий.

Примем начальные условия равными:

$t = 0, \; q = q_0, \dot{q} = \dot{q}_0,$

$\dot{q} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt, \; q_0 = c_1,$

$\dot{q}_0 = -c_1 k \sin(k \cdot 0) + c_2 k \cos(k \cdot 0) = c_2 k, c_1 = q_0, \; c_2 = \frac{\dot{q}_0}{k},$

$q = q_0 cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} sin kt$ – закон изменения координаты в случае свободных колебаний без учета сил сопротивления.

От постоянных c_1 и c_2 перейдем к постоянным a, ε:

$$c_1 = a \sin\varepsilon; \; c_2 = a \cos\varepsilon,$$

решение приведем к амплитуде и фазе:

$$q = a\sin(kt + \varepsilon),$$

где a – амплитуда колебаний – максимальное отклонение от положения равновесия; $kt + \varepsilon$ – фаза; ε – начальная фаза колебаний; k – круговая, циклическая частота колебаний.

$[k] = c^{-1}$, k – число полных колебаний за 2π секунд.

$\tau = 2\pi / k$, τ – период колебаний.

Найдем a и ε:

$$\dot{q} = ak\sin(kt + \varepsilon),$$

$$q_0 = a\sin\varepsilon, \qquad \dot{q} = ak\cos\varepsilon,$$

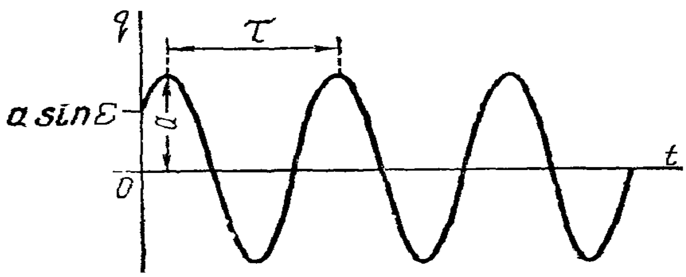
$$\frac{q_0^2}{a^2} + \frac{\dot{q}_0^2}{a^2k^2} = 1, \qquad a = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}},$$

$$\mathrm{tg}\varepsilon = \frac{q_0 k}{\dot{q}_0}, \qquad \varepsilon = \mathrm{arctg}\frac{q_0 k}{\dot{q}_0}.$$

τ не зависит от начальных условий и определяется параметрами системы.

Это свойство называется ***изохронностью***.

Колебания совершаются около положения равновесия, начало координат помещено в точке равновесия. В этом случае дифференциальное уравнение будет однородным (правая часть = 0).

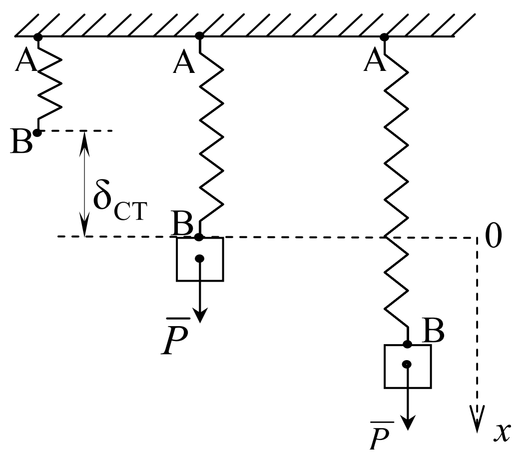


Пример:

Массой пружины пренебрегаем. δ_{CT} – деформация пружины от действия силы, равной весу груза; c – коэффициент жесткости

$$\delta_{CT} = \frac{P}{c}, \quad P = c\delta_{CT}, \quad k^2 = \frac{c}{m}\cdot\frac{q}{q} = \frac{cq}{P} = \frac{cq}{c\delta_{CT}} = \frac{q}{\delta_{CT}},$$

$$m\ddot{x} = P - c\Delta l.$$



1. Начало координат в точке статического положения равновесия

$$\Delta l = \delta_{CT} + x,$$

$$m\ddot{x} = P - c\delta_{CT} - cx = -cx,$$

$$m\ddot{x} + cx = 0.$$

2. Начало координат совпадает с точкой свободного конца пружины

$$\Delta l = x, \quad m\ddot{x} + cx = P.$$

Свободные колебания с учетом сил сопротивления

$$T = \frac{1}{2}a\ \dot{q}^2\ ,\ \Pi = \frac{1}{2}cq^2\ ,\ \Phi = \frac{1}{2}b\dot{q}^2.$$

Силы сопротивления пропорциональны первой степени скорости. Подставим в уравнение Лагранжа кинетическую и потенциальную энергии.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j},$$

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0,$$

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = 0, \tag{1}$$

где $2h = b/a,\ k^2 = c/a$, h – коэффициент затухания.

Найдем решение уравнения (1), для этого запишем характеристическое уравнение, корни обозначим через λ:

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2\lambda = 0,$$

$$\lambda = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

В зависимости от соотношения h и k возможно три случая:

– $k > h$, случай малого сопротивления.

– $k = h$, граничный случай.

– $k < h$, случай большого сопротивления.

1) $k > h$ – корни характеристического уравнения:

$\lambda_{1,2} = -h \pm i\omega$, где $i = \sqrt{-1}$, мнимая единица,

$\omega = \sqrt{k^2 - h^2}$,

$$q = e^{-ht}c_1\cos\omega t + e^{ht}c_2\sin\omega t, \tag{2}$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования, определяются из начальных условий.

Полагая: $c_1 = a\sin\varepsilon, c_2 = a\cos\varepsilon$, запишем:

$$q = ae^{-ht}sin(\omega t + \varepsilon), \tag{3}$$

где ω – частота затухающих колебаний, a – амплитуда затухающих колебаний, ε – начальная фаза затухающих колебаний.

Формула (3) позволяет построить график зависимости координаты q с течением времени t.

Начальные условия: $t = 0, q = q_0, \dot q = \dot q_0$,

$\dot q = -hae^{-ht}\sin(\omega t + \varepsilon) + a\omega^{-ht}\cos(\omega t + \varepsilon)$,

$q_0 \; = \; a\sin\varepsilon, \dot q = -ha\sin\varepsilon + a\omega\cos\varepsilon$, или

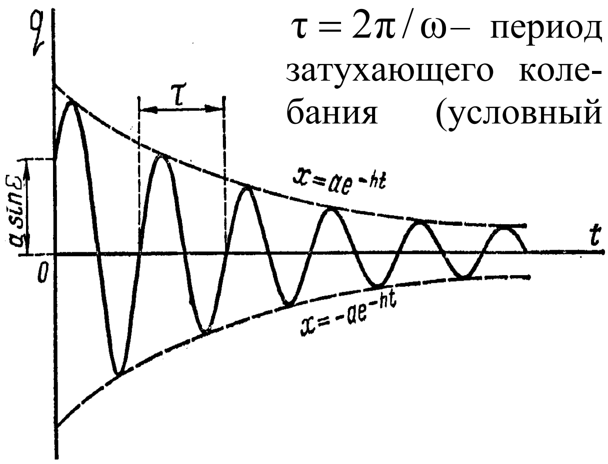
$\dot q + hq_0 = a\omega\cos\varepsilon$,

$$\frac{q_0}{a} = \sin\varepsilon, \quad a = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot q_0 + hq_0)^2}{\omega^2}},$$

$$\frac{\dot q_0 + hg}{a\omega} = \cos\varepsilon, \quad \mathrm{tg}\varepsilon = \frac{q_0\omega}{\dot q_0 + hg},$$

$\eta = \dfrac{a_{m+1}}{a_m} = e^{-h\tau}$ – декримент затухания (фактор затухания),

$$\ln\eta = \Lambda, \quad \Lambda = k\tau, \quad \frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{h\tau}.$$



$\tau = 2\pi/\omega$ – период затухающего колебания (условный

Величина, равная обратной величине декримента, показывает, через сколько τ амплитуда уменьшится в e раз.

Амплитуда с течением времени стремится к нулю. Сопротивление увеличивает период колебаний, и изменяется начальная фаза.

2) $k = h$ – граничный случай:

$$\lambda_{1,2} = -h, \; q = e^{-ht} \; (c_1 \; + c_2 t).$$

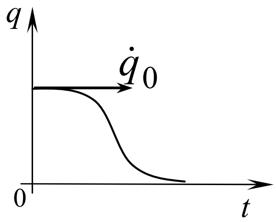
Колебательного процесса нет.

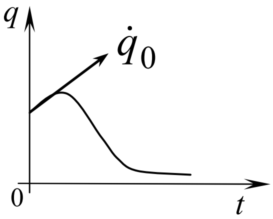
3) $k < h$ – случай большого сопротивления:

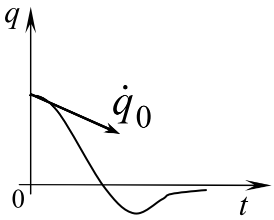
$$q = e^{-hk}(c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}),$$

$$\alpha_1 = +\sqrt{h^2 - k^2}, \alpha_2 = -\sqrt{h^2 - k^2}.$$

Колебательного процесса нет.







Во втором и третьем случаях имеет место апериодическое движение системы в положение равновесия.

Вынужденное колебание без учета сил сопротивления

Совершается под действием вынуждающей силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$Q = H_0 \sin(pt + \delta);$$

где H_0 – амплитуда; δ – начальная фаза; $pt + \delta$ – фаза возмущающей силы; p – круговая, циклическая частота вынуждающей силы;

$\tau_{\text{в}} = 2\pi / p$, если $p > k$, то возмущающая сила большой частоты;

$p < k$, то возмущающая сила малой частоты.

$$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2,\ \Pi = \frac{1}{2} cq^2,\ \Phi = 0,\ Q_{в} = H_0 \sin(pt + \delta),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_{\text{в}},$$

$$a\ddot{q} + cq = H_0 \sin(pt + \delta) \quad |: a,$$

$$\ddot{q} + k^2 q = H \sin(pt + \delta), \text{ где } k^2 = \frac{c}{a},\ H = \frac{H_0}{a}.$$

Полное решение дифференциального уравнения будет складываться из общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения:

$q = q_{00} + q_{\text{чн}}$,

$q_{00} = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$, или $q_{00} = a \sin(kt + \varepsilon)$.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в форме:

$q_{\text{чн}} = A \sin(pt + \delta)$;

$q_{\text{чн}}$ и ее вторую производную $\ddot{q}_{\text{чн}}$ подставим в исходное уравнение. Получим:

$-Ap^2 \sin(pt + \delta) + \text{k}^2 A \sin(pt + \delta) = H \sin(pt + \delta)$,

сократим обе части уравнения на $\sin(pt + \delta)$ и запишем для A:

$$A = \frac{H}{k^2 - p^2},$$

$$q_{\text{чн}} = \frac{H}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$$ – определяет вынужденные колебания

при $k > p$; $q_{\text{чн}} = \dfrac{H}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta)$ – при возмущающей силе малой частоты фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой возмущающей силы.

При $p > k$ $q_{чн} = -\dfrac{H}{p^2 - k^2}\sin(pt + \delta) = \dfrac{H}{p^2 - k^2}\sin(pt + \delta\text{-}\pi)$, т.е. фаза вынужденных колебаний отстает на 180^0 от фазы возмущающей силы.

Полное решение исходного уравнения запишется:

$$\boxed{q = c_1\cos kt + c_2\sin kt + \frac{H}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta)}$$

Определим произвольные постоянные c_1, c_2. Они находятся с учетом частного решения, для этого примем начальные условия:

$t = 0,\ q = q_0,\ \dot{q} = \dot{q}_0,$

$$\dot{q} = c_1 k\sin kt + c_2 k\cos kt + \frac{H}{k^2 - p^2}p\cos(pt + \delta).$$

Подставляем в решение начальные условия:

$$q_0 = c_1 + \frac{H}{k^2 - p^2}\sin\delta \ \Rightarrow\ c_1 = q_0 - \frac{H}{k^2 - p^2}\sin\delta;$$

$$\dot{q}_0 = c_2 k + \frac{H}{k^2 - p^2}p\cos\delta \ \Rightarrow\ \text{c}_2 = \frac{\dot{q}_0}{k} - \frac{H}{k^2 - p^2}\cdot\frac{p}{k}p\cos\delta.$$

Подставим значения c_1, c_2 в дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} q = {} & \left.q_0\cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt - \right\} \mathbf{I} \\ & \left.- \frac{H}{k^2 - p^2}\left(\sin\delta\cos kt + \frac{p}{k}\cos\delta\sin kt\right) + \right\} \mathbf{II} \\ & \left.+ \frac{H}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta)\right\} \mathbf{III} \end{aligned}$$

В записанном решении можно выделить три вида колебаний. Первое – свободные колебания, амплитуда которых зависит от начального условия и совершается на частоте свободных колебаний; второе – сопутствующие или сопровождающие колебания, амплитуда их зависит от возмущающей силы и совершается на частоте свободных колебаний; третье – вынужденные колебания, амплитуда колебаний зависит от возмущающей силы и совершается на частоте возмущающей силы. Результирующее движение представляет собой наложение этих трех колебаний.

Явление биения

Явление биения наступает, когда частота свободных колебаний близка к частоте возмущающей силы $(k \approx p)$.

Полагая, что при $t = 0, q_0 = 0, \dot{q}_0 = 0$, и учитывая $p/k \approx 1$, из решения закона изменения координаты q можно записать:

$q = -\dfrac{H}{k^2 - p^2}\sin(kt + \delta) + \dfrac{H}{k^2 - p^2}\sin(pt + \delta)$, учитывая, что

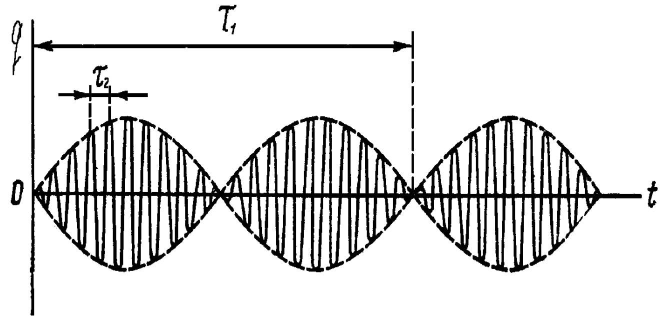
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin(\alpha - \beta)/2\cos(\alpha + \beta)/2$, тогда

$q = \dfrac{2H}{k^2 - p^2}(\sin\dfrac{p-k}{2}t \cdot \cos(pt + \delta))$ или

$q = \mathrm{A}(t)\cdot\cos(pt + \delta)$, где $\mathrm{A}(t) = \dfrac{2H}{k^2 - p^2}\sin\dfrac{p-k}{2}t$.

Явление биения заключается в колебании с амплитудой изменяющейся по гармоническому закону. Можно выделить два периода:

$\tau_1 = 4\pi/(p-k)$ и $\tau_2 = 2\pi/p$.



Резонанс

Явление резонанса наступает, когда:

$p = k$.

Дифференциальное уравнение для этого случая запишется:

$$\ddot{q} + k^2 q = H\sin(kt + \delta),$$

$$q = q_{00} + q_{\text{чн}},$$

$$q_{00} = c_1\cos kt + c_2\sin kt = \alpha\sin(kt + \varepsilon),\ \ q_{\text{чн}} = Bt\cos(kt + \delta),$$

$$\dot{q}_{\text{чн}} = B\cos(kt + \delta) - Btk\sin(kt + \delta),$$

$$\ddot{q}_{\text{чн}} = -Bk\sin(kt + \delta) - Bk\sin(kt + \delta) - Btk^2\cos(kt + \delta),$$

q_{00} и $\ddot{q}_{\text{чн}}$ подставим в исходное уравнение:

$$-2Bk\sin(kt + \delta) - Btk^2\cos(kt + \delta) + k^2Bt\cos(kt + \delta) = H\sin(kt + \delta),$$

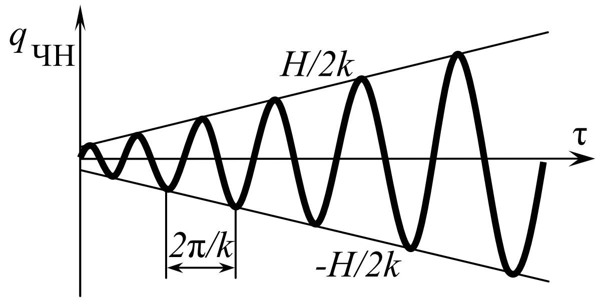
$$-2Bk = H,\ \ B = -\frac{H}{2k},$$

$$q_{\text{чн}} = -\frac{Ht}{2k}\cos(kt + \delta),$$

таким образом, $q = c_1\cos kt + c_2\sin kt - \dfrac{Ht}{2k}\cos(kt+\delta)$,

c_1, c_2 определяются из начальных условий.

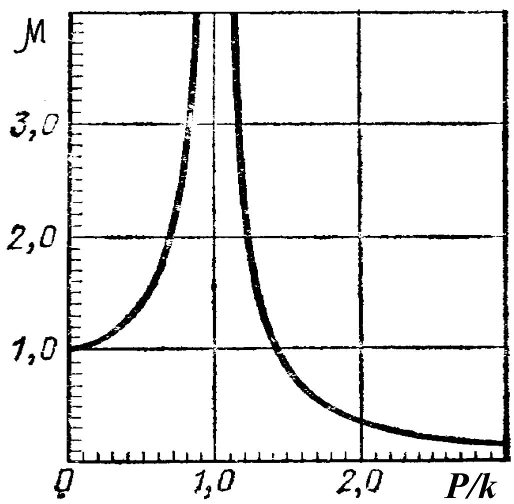
Явление резонанса – непрерывное нарастание амплитуды вынужденных колебаний, которое наступает при совпадении: частоты свободных колебаний и частоты возмущающей силы.



Вынужденные колебания совершаются с частотой свободных и отстают по фазе на 90^0 от фазы возмущающей силы.

Коэффициент динамичности

Для исследования зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты возмущающей силы вводят понятие коэффициента динамичности, который представляет собой отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению, вызываемому действием амплитудного значения возмущающей силы.



$H_0 = cq_{\text{СТ}}$, $q_{\text{СТ}} = \dfrac{H_0}{c}$,

$q = \dfrac{H_0}{c} = \dfrac{H_0/a}{c/a} = \dfrac{H_0}{k^2}$, $q_{\text{чн}} \dfrac{H}{k^2 - p^2}$,

$\mu = \dfrac{H_0/(k^2 - h^2)}{(H/k^2)}$, $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1 - p^2/k^2}}$.

Вынужденное колебание с учетом сил сопротивления

$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 \ , \ \Pi = \frac{1}{2}cq^2 \ , \ \Phi = \frac{1}{2}b\dot{q}^2 \ , \ Q_B = H\sin(pt+\delta) \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} + Q_B \ ,$$

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H_0\sin(pt+\delta) \quad |:a \ ,$$

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = H\sin(pt+\delta) \ ,$$

$$q = q_{00} + q_{\text{чн}} \ ,$$

$$q_{00} = ae^{-ht}\sin(\omega t + \delta) \ ,$$

$$q_{\text{чн}} = a_c \sin(pt + \delta - \varepsilon) \ ,$$

$$\dot{q}_{\text{чн}} = a_c p \cos(pt + \delta - \varepsilon) \ ,$$

$$\ddot{q}_{\text{чн}} = -a_c p^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) \ .$$

$H\sin(pt + \delta)$ – возмущающая сила.

$$H\sin(pt + \delta) = H\sin(pt + \delta + \varepsilon - \varepsilon) =$$

$$= H\sin(pt + \delta - \varepsilon)\cos\varepsilon + H\cos(pt + \delta - \varepsilon)\sin\varepsilon,$$

$$-a_c p^2 \sin(pt + \delta - \varepsilon) + 2hpa_c \cos(pt + \delta - \varepsilon) + k^2 a_c \sin(pt + \delta - \varepsilon) =$$

$$= H\sin(pt + \delta - \varepsilon)\cos\varepsilon + H\cos(pt + \delta - \varepsilon)\sin\varepsilon.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} -a_c p^2 + k^2 a_c = H\cos\varepsilon p & a_c - ? \\ 2hpa_c = H\sin\varepsilon p & \varepsilon \ - ? \end{cases}$$

Разделим (2) на (1): $\operatorname{tg}\varepsilon \dfrac{2hp}{k^2 - p^2}$, $\quad \varepsilon = \operatorname{arctg}\dfrac{2hp}{k^2 - p^2}$.

Возьмем в квадрат (1) и (2) и сложим квадраты

$$a_c = \frac{H}{\sqrt{\left(k^2 - h^2\right) + 4h^2 p^2}};$$

таким образом,

$$q_{\text{чн}} = \frac{H}{\sqrt{\left(k^2 - h^2\right) + 4h^2 p^2}} a_c \sin(pt + \delta - \varepsilon) .$$

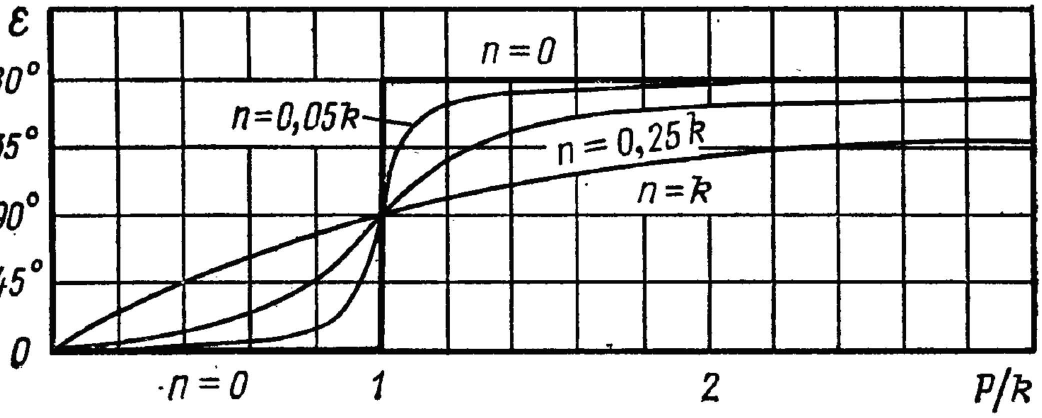
Выводы:

Силы сопротивления не вызывают затухания вынужденных колебаний.

Силы не влияют на частоту и период вынужденных колебаний.

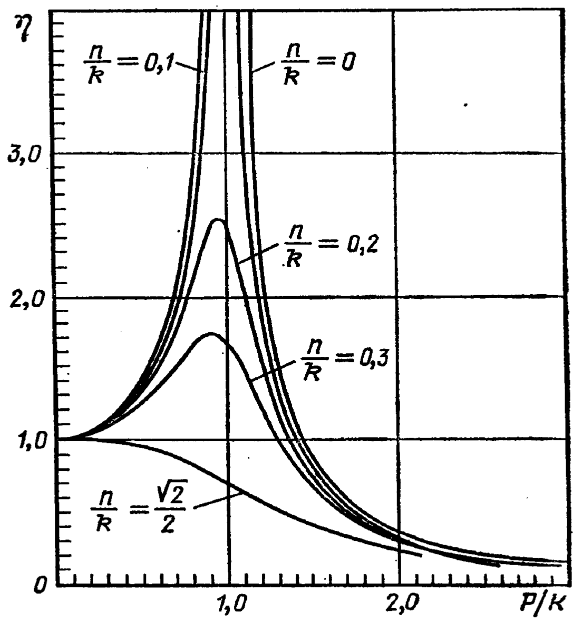
Силы сопротивления понижают амплитуду вынужденных колебаний и дают фазовый сдвиг по отношению к фазе возмущающей силы.

Фаза вынужденных колебаний: $tg\varepsilon \dfrac{2hp}{k^2-p^2}$.



Построим график: $tg\varepsilon=2\dfrac{h/k-1/k}{1-p^2/k^2}$, при $p/k=1$ $tg\varepsilon=\infty$ $\varepsilon=90^0$

Амплитуда вынужденных колебаний (с учетом сил сопротивления)



$$a_c=\frac{H}{\sqrt{\left(k^2-h^2\right)+4h^2p^2}},$$

$$\mu=\frac{a_c}{a_{\text{СТ}}},$$

где μ – коэффициент динамичности,

$a_{\text{СТ}}$ – статическое отклонение.

При $p=k,\ a_c=H/2hp$.

В случае сопротивления резонанса не наступает.

Найдем максимальное значение амплитуды в зависимости от p. Для этого возьмем производную по p от знаменателя в a_c и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d}{dp}\left[\left(k^2-p^2\right)+4h^2p^2\right]=2\left(k^2-p^2\right)\cdot(-2p)+4h^2 2p,$$

$$2\left(k^2-p^2\right)\cdot(-2p)+4h^2 2p=0.$$

Максимум a_c будет при:

$$p_1 = 0,\ \ p_2 = \sqrt{(k^2 - 2h^2)}\,,$$

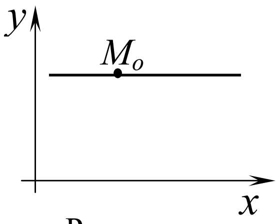
$$a_{c\ max} = \frac{H}{2h\sqrt{k^2 - 2h^2}},\ a_{c\ max} \text{ существует пока } (k^2 - 2h^2) > 0 \text{ или } h < \frac{\sqrt{2}}{2k}.$$

При увеличении n/k максимальное значение смещается влево от ординаты 1.0.

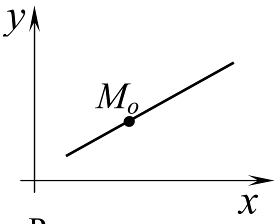
5. ПОНЯТИЕ О ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Описание движения системы $q_j = q_i(t),\ j = \overline{1,S}$ не является единственно возможным, в ряде случаев полезно представить движение на фазовой плоскости, особенно при изучении колебаний нелинейных систем.

Состояние системы полностью определяется парой значений q, $\dot{q}$ на декартовой плоскости $x = q$, $y = \dot{q}$. Такая **плоскость** называется **фазовой.**



Равномерное



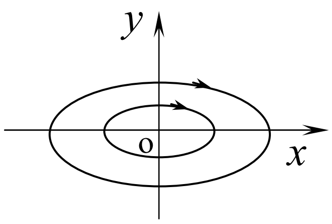
Равноускоренное

Состояние системы определяется точкой с координатами x и y, которую называют изображающей точкой.

В процессе движения q и $\dot{q}$ изменяются; изменяется положение изображающей точки. Их геометрическое место называется фазовой траекторией.

Для построения траектории необходимо положить $x = q(t)$, $y = dx/dt$, в процессе движения изменяются $x = x(t)$, $y = y(t)$, исключаем из первого время, подставляем во второе и находим $y = y(x)$, или же для одинаковых промежутков времени находим значение x и y и затем соединяем эти точки – параметрическая форма.

Фазовая траектория гармонических колебаний



$x = q = a\sin(kt + \delta),\ \ y = ak\cos(kt + \varepsilon)$.

Найдем: $y = y(x)$.

Возводим в квадрат и складываем $x^2 + y^2/k^2 = a^2$ – уравнение эллипса.

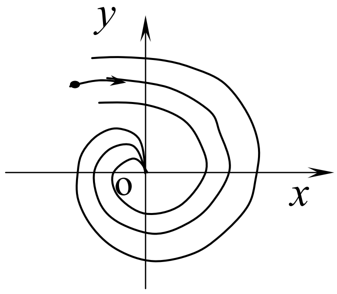
Движение по часовой стрелке. Семейство эллипсов – совокупность фазовых траекторий – фазовая диаграмма или **фазовый портрет.**

Точка $O(0;0)$ – особая точка состояния равновесия – центр (скорость и координаты).

Фазовый портрет может быть получен из дифференциального уравнения с последующим интегрированием.

Уравнение незатухающих колебаний: $\ddot{q} + k^2 q = 0$, $x = q$, $y = \dot{q}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -k^2 x. \end{cases}$$



Найдем уравнение фазовых траекторий.

Разделим уравнения: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{k^2 x}{y}$.

Разделяем переменные и интегрируем, получаем уравнение эллипса – уравнение фазовой траектории незатухающих колебаний.

$q = ae^{-ht}\sin(\omega t + \varepsilon)$ – затухающие,

$\dot{q} = ae^{-ht}[\omega\cos(\omega t + \varepsilon) - h\sin(\omega t + \varepsilon)]$.

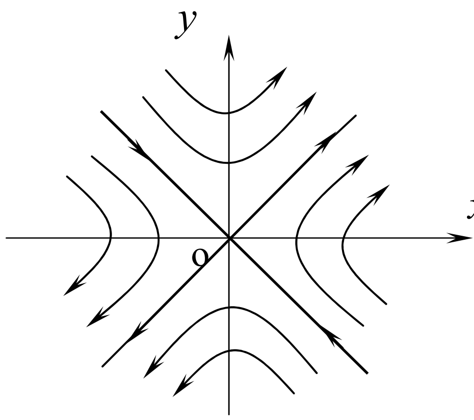
Построим в параметрической форме. Фазовая траектория будет иметь вид логарифмической спирали.

Точка $(0;0)$ – устойчивый фокус. Построим фазовый портрет для уравнения:

$\ddot{q} + k^2 q = 0$,

$\dfrac{dx}{dt} = y$, $\dfrac{dy}{dt} = -k^2 x$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{k^2 x}{y}$,

$x^2 = \dfrac{y^2}{x^2} = a^2$ – уравнение фазовой траектории.



Это движение семейство гипербол и четырех полупрямых, особая точка – седло.

Колебательного процесса нет, есть апериодическое движение.

Свободное затухающее колебание

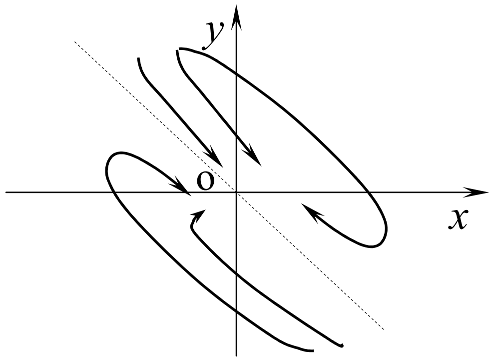
$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = 0.$$

Рассмотрим возможные варианты:

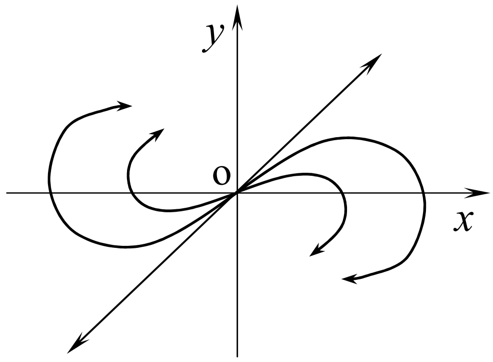
1) $k > h > 0$, т. $(0;0)$ – устойчивый фокус,
2) $h > k > 0$ (случай большого трения) – движение к положению равновесия; т. $(0;0)$ – устойчивый узел,

3) $h = 0$ (гармонические колебания, эллипс); т. $(0;0)$ – центр,

4) $h < 0$ ($|h| < k$: случай нарастающих колебаний); т. $(0;0)$ – неустойчивый фокус,



Устойчивое седло

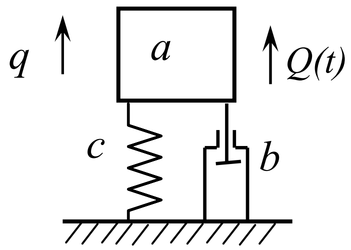


Неустойчивое седло

5) $h > 0$ ($|h| > k$: нарастающее апериодическое движение); т. $(0;0)$ – неустойчивый узел.

6. ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ

Колебательные процессы, протекающие в различных системах, описываются одинаковыми математическими уравнениями. Это обстоятельство дает возможность установить аналогии между системами различной физической природы, наиболее полно эта аналогия прослеживается между механическими и электрическими системами.



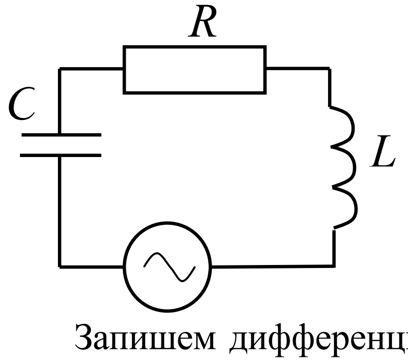
Пусть имеется некоторая масса с коэффициентом инерции a.

Дифференциальное уравнение в общем виде

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + q = Q(t), \tag{1}$$

a, b, c – коэффициент инерции, трения, жесткости; q – обобщенная координата.

Рассмотрим электрический контур с последовательным соединением элементов:



R – сопротивление.
L – индуктивность.
C – емкость.
E – внешний источник энергии.

Запишем дифференциальное уравнение для этого контура, пользуясь II законом Кирхгофа.

Согласно II закону Кирхгофа, сумма падений напряжений на отдельных участках электрической цепи равна разности потенциалов на концах зажимов, т.е. ЭДС:

$$L\frac{di}{dt},\ R_i,\ \frac{1}{C}q,\ q \text{ – заряд конденсатора,}$$

$$L\frac{di}{dt}+R_i+\frac{1}{C}q=E(t),$$

$$\text{где } i=\frac{dq}{dt}, \text{ тогда } L\frac{d^2q}{dt}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t). \qquad (2)$$

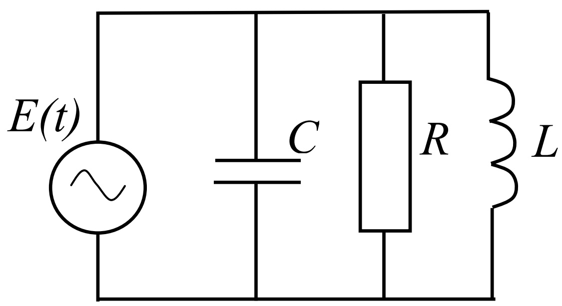
Уравнения (1) и (2) совпадают с точностью до обозначений.

Коэффициент инерции a соответствует индуктивности L.

Коэффициент трения b соответствует омическому сопротивлению R.

Коэффициент жесткости c соответствует емкости C.

Возмущающая сила $Q(t)$ соответствует ЭДС $E(t)$.



Рассмотрим электрическую цепь с параллельным соединением элементов.

Согласно I закону Кирхгофа, запишем:

$$\frac{U}{R}+\frac{1}{L}\int Udt+C\frac{dU}{dt}=i.$$

Продифференцируем уравнение:

$$C\frac{d^2U}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{dU}{dt}+\frac{1}{L}U=\frac{di}{dt}. \qquad (3)$$

Сравним (3) и (1):

(1) соответствует (3)

$$\left|\begin{array}{lcr} q & \Rightarrow & U \\ a & \Rightarrow & C \\ b & \Rightarrow & 1/R \\ c & \Rightarrow & 1/2 \\ Qt & \Rightarrow & di/dt \end{array}\right|$$

Если для механической системы:

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2,\ \Pi=\frac{1}{2}cq^2,\ \Phi=\frac{1}{2}b\dot{q}^2,$$

то по первой аналогии:

$$T=\frac{1}{2}L\dot{q}^2,\ \Pi=\frac{1}{2C}q^2,\ \Phi=\frac{1}{2}R\dot{q}^2.$$

Обобщенная сила равна $E(t)$, по второй аналогии:

$$T=\frac{1}{2}CU^2,\ \Pi=\frac{1}{2L}U^2,\ \Phi=\frac{1}{2R}U^2.$$

Обобщенная сила равна $\frac{di}{dt}$.

Для того, чтобы электродинамическими аналогами можно было пользоваться без переходных коэффициентов, достаточно выразить все величины в системе СИ. Таким образом, уравнением Лагранжа II рода можно пользоваться для исследования электрических контуров.

Математическая модель колебательного процесса

Механические колебания можно исследовать на электрических цепях. Это обстоятельство позволяет построить аналоговые моделирующие устройства.

7. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ

I. $\ddot{q}+k^2q=Q(t)$. (1)

Полное решение: $q=q_{00}+q_{\text{чн}}$;

$$q_{00}\ =\ c_1\ \cos kt+c_2\sin kt, \tag{2}$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные;

$$q_{\text{чн}}=c_1(t)\cos kt+c_2(t)\sin kt, \tag{3}$$

где c_1, c_2 – временные функции, т.е. переменные величины.

Этот метод называется **методом вариации произвольных постоянных** или **метод Лагранжа.**

Продифференцируем (3):

$$\dot{q}_{\text{чн}}=\frac{c_1(t)}{dt}\cos kt+\frac{c_2(t)}{dt}\sin kt-c_1(t)k\sin kt+c_2(t)k\cos kt. \tag{4}$$

Требуем наложения условий:

$$\frac{dc_1(t)}{dt}\cos kt+\frac{c_2(t)}{dt}\sin kt=0.. \tag{5}$$

Так как нам необходимо найти одно решение, а мы имеем две постоянные $c_1(t)$, $c_2(t)$, поэтому мы налагаем условие (5).

Продифференцируем (4) с учетом (5):

$$\ddot{q}_{\text{чн}} = -\frac{dc_1(t)}{dt}k\sin kt + \frac{dc_2(t)}{dt}k\cos kt - c_1(t)k^2\cos kt - c_2(t)k^2\sin kt. \quad (6)$$

Уравнения (6) и (3) подставляем в (1) с учетом (5):

$$-\frac{dc_1(t)}{dt}k\sin kt + \frac{dc_2(t)}{dt}k\cos kt = Q(t). \quad (7)$$

Решая совместно (7) и (5) как алгебраические уравнения, находим:

$$\frac{dc_1(t)}{dt} = -\frac{1}{k}Q(t)\sin kt,\ \ \frac{dc_2(t)}{dt} = \frac{1}{k}Q(t)\cos kt. \quad (8)$$

Интегрируя (8), выразим c_1, c_2:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{k}\int_o^t Q(\xi)\sin k\xi d\xi \\ c_2 &= \frac{1}{k}\int_o^t Q(\xi)\cos k\xi d\xi \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Подставим (9) в (3), получаем:

$$\begin{aligned} q_{\text{чн}} &= -\frac{1}{k}\cos kt\int_o^t Q(\xi)\sin k\xi d\xi + \frac{1}{k}\sin kt\int_o^t Q(\xi)\cos k\xi d\xi = \\ &= -\frac{1}{k}\int_o^t Q(\xi)\cos kt\sin k\xi d\xi + \frac{1}{k}\int_o^t Q(\xi)\sin kt\cos k\xi d\xi = \\ &= \frac{1}{k}\int_o^t Q(\xi)\left(\sin kt\cos k\xi - \cos kt\sin k\xi\right)d\xi. \end{aligned}$$

$$\boxed{q_{\text{чн}} = \frac{1}{k}\int_O^t Q(\xi)\sin k(t-\xi)d\xi}$$

Учтем силы сопротивления.

II. $\ddot{q} + 2h\dot{q} + k^2 q = Q(t)$ – исходное уравнение. (1)

Введем новую переменную: $q = ze^{-ht}$, тогда

$$\dot{q} = -hze^{-ht} + \dot{z}e^{-ht},$$

$$\ddot{q} = h^2 ze^{-ht} - 2h\dot{z}e^{-ht} + \ddot{z}e^{-ht}$$ подставим в (1), найдем

$$\ddot{z}e^{-ht} + (k^2 + h^2)ze^{-ht} = Q(t).$$

Разделим каждое слагаемое на e^{-ht}, получим:

$$\ddot{z} + (k^2 + h^2)z = Q(t)/e^{-ht}. \quad (2)$$

Уравнение (2) аналогично уравнению (1) в I.

Рассмотрим случай малого сопротивления, когда $k > h$, $k_1^2 = k^2 - h^2$

$$\ddot{z} + k_1^2 z = Q(t) / e^{-ht}, \tag{3}$$

– этот случай сводится к случаю I.

$$z_{\text{чн}} = \frac{1}{k_1}\int_0^t e^{-h\xi} Q(\xi)\sin k_1(t-\xi)d\xi.$$

Переходя к q, запишем:

$$q_{\text{чн}} = \frac{1}{k_1} e^{-ht}\int_0^t e^{-h\xi} Q(\xi)\sin k_1(t-\xi)d\xi$$

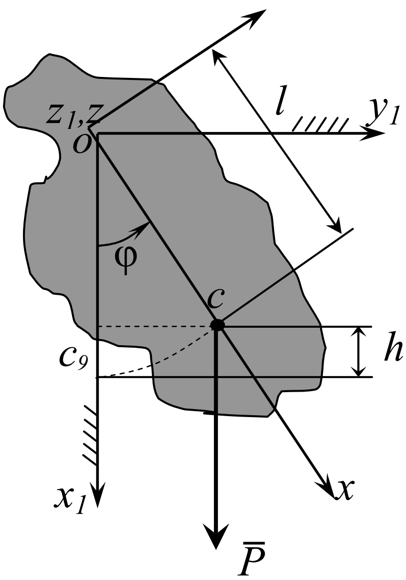
$$\text{или } q_{\text{чн}} = \frac{1}{k_1}\int_O^t Q(\xi)e^{-h(t-\xi)}\sin k_1(t-\xi)d\xi,$$

$$q = e^{-ht}(c_1\cos kt + c_2\sin kt) + \frac{1}{k_1}\int_O^t Q(\xi)e^{-h(t-\xi)}\sin k_1(t-\xi)d\xi,$$

c_1, c_2 пишутся с учетом частного решения.

8. СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Перемещения при колебаниях настолько значительны, что в разложении потенциальной энергии необходимо учитывать не только слагаемые: обобщенные координаты в квадрате, но и последующие слагаемые. Тогда Q (обобщенная сила) является **нелинейной**, и основное уравнение тоже будет нелинейным.



Рассмотрим это на примере физического маятника.

$$q = \varphi,\ \mathrm{T} = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2$$

$$\Pi = Ph = mgl(l - \cos\varphi)$$

$$I_z = I_{z_c} + ml^2$$

$$\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2 + \ldots$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi$$

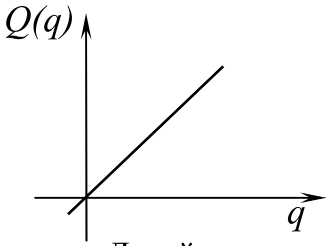
$$I_z = \ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$$

Колебания маятника описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Наиболее часто встречающиеся характеристики восстанавливающих сил

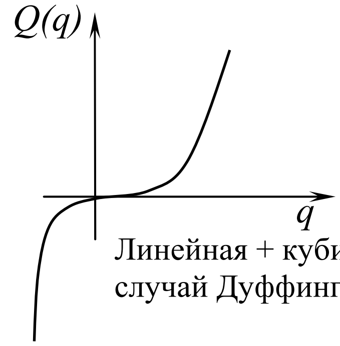
Когда $Q(q)$ – нечетная функция $f(-x) = -f(x)$, колебания будут симметричные и периодические, но не гармонические.

1.



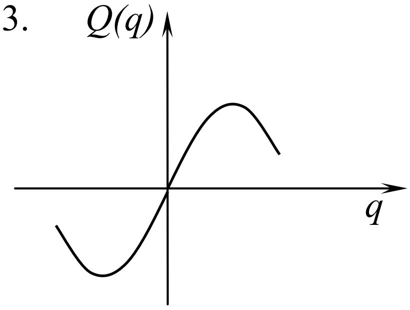
Линейная сила

2.



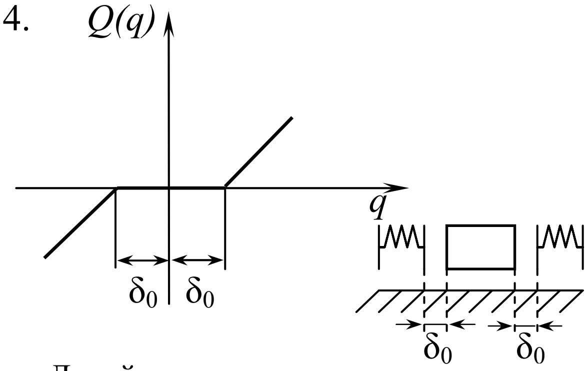
Линейная + кубическая, случай Дуффинга

3.



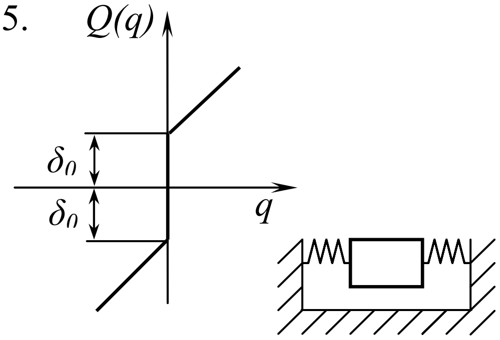
Гармоническая зависимость по закону синуса (маятник)

4.



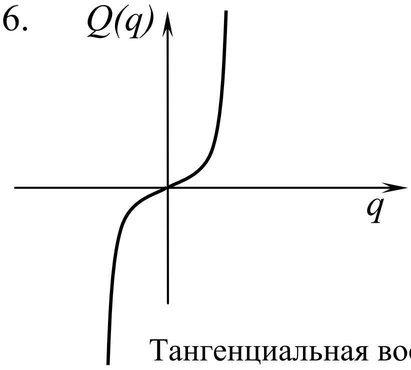
Линейная восстанавливающая сила с зазором δ_0

5.



Линейная восстанавливающая сила с натягом

6.



Тангенциальная восстанавливающая сила

В линейных системах частота не зависит от амплитуды колебания, а в нелинейных системах частота зависит от амплитуды колебания. Задача исследования нелинейных систем заключается в установлении зависимости амплитуды от частоты колебаний. Зависимость можно установить аналитически. Дифференциальное уравнение в случае нелинейной восстанавливающей силы запишем следующим образом:

$$\ddot{q} + F(q) = 0.$$

Представим $\ddot{q}$ следующим образом:

$\ddot{q} = \dfrac{d\dot{q}}{dt} = \dfrac{d\dot{q}}{dt}\dfrac{dq}{dq} = \dot{q}\dfrac{d\dot{q}}{dq}$. Тогда запишем: $\dot{q}\dfrac{d\dot{q}}{dq} + F(q) = 0 \;\; | \cdot dq$

$\dot{q}d\dot{q} = -F(q)dq$. Возьмем интегралы от левой и правой частей:

$\dfrac{\dot{q}^2}{2} = \int\limits_{q_0}^{q} F(q)dq$, или $\dot{q} = \sqrt{2\int\limits_{q_0}^{q} F(q)dq}$. Учитывая, что $\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$,

найдем $t = \displaystyle\int\limits_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{2\int\limits_{q_0}^{q} F(q)dq}}$.

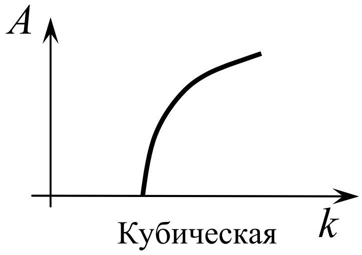
Вследствие симметрии колебаний период колебаний τ вчетверо больше времени, за которое происходит движение от $q_0 = 0$ до $q_{\max} = A$, где A – амплитуда колебаний.

Таким образом: $\tau = \displaystyle\int\limits_{0}^{A} \frac{dq}{\sqrt{2\int\limits_{0}^{A} F(q)dq}}$; $k = 2\pi/\tau$ – частота колебаний.

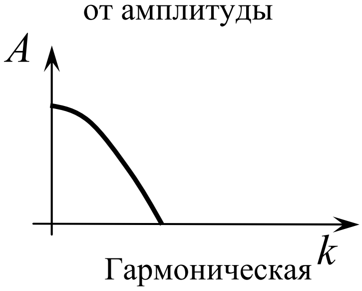
Представим графики зависимости амплитуды от частоты для различных восстанавливающих сил.

1. 

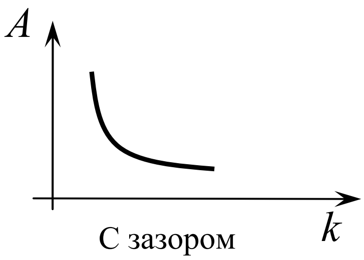
Частота не зависит от амплитуды

2. 

Кубическая зависимость

3. 

Гармоническая функция

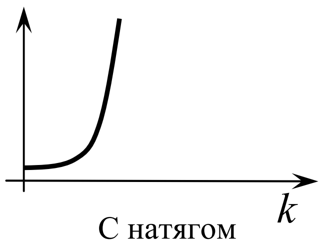
4. 

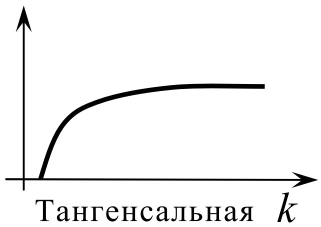
С зазором

Уравнение маятника: $I_z\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$.

Если $\varphi \to 0$, то $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$, где $k^2 = \dfrac{mgl}{I_z}$,

$\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_z}{mgl}}$ – период колебаний.

5.


6.


При больших углах линеаризация недопустима, тогда
$\cos\varphi = 1 - \sin^2\varphi/2$.
Существует понятие: **полный элептический интеграл.**

$$k = \int_2^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}}$$

Если подкоренное выражение разложить в степенной ряд и ограничиться двумя членами, то получаем:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}}\left(1 + \frac{1}{\varphi}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \ldots\right).$$

Если заменить $\sin^2\varphi/2 \approx \varphi/2$, то получим: $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_z}{mgl}}\left(1 + \dfrac{\varphi^2}{16}\right)$.

Сделаем численную оценку $\underbrace{\left(1 + \dfrac{\varphi^2}{16}\right)}_{A}$: $\varphi_0 = 10^0$ $(A) = 1{,}0019$,
$\varphi_0 = 40^0$ $(A) = 1{,}0304$,
$\varphi_0 = 90^0$ $(A) = 1{,}1539$.

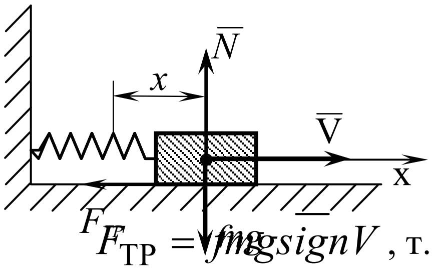
Таким образом, в большинстве случаев линеаризация себя оправдывает.

9. СВОБОДНОЕ КОЛЕБАНИЕ В СИСТЕМЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

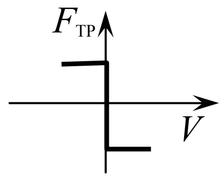
(кулоновым трением)

Рассмотрим систему с $S = 1$. Часто при расчете приходится сталкиваться с сухим трением.

Влияние сухого трения: известно $F_{\text{ТР}} = fN = fmg$,
где f – коэффициент трения скольжения.



Рассмотрим колебательную систему: коэффициент сухого трения изменяется по закону $sign$ или sgn и называется **функцией *Кронихера***.



$F_{\text{ТР}} = fmg\,signV$, т.е. $signV = \begin{cases} +1, \text{ если } V < 0 \\ -1, \text{ если } V > 0 \end{cases}$

Знак $F_{\text{ТР}}$ зависит от знака V.

Дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{x} + cx = fmg\,signV. \qquad (1)$$

В зависимости от знака V уравнению (1) соответствуют два уравнения:

$$\ddot{x} + k^2 x = fg \qquad (\dot{x} < 0), \qquad (1.1)$$

$$\ddot{x} + k^2 x = -fg \qquad (\dot{x} > 0), \qquad (1.2)$$

при $t = 0;\ x_0 = a_0 > 0;\ x_0 = 0$.

Необходимо, чтобы сила упругости пружины $ca_0 > fmg$, или $x_0 > fg / k^2$.

Если дифференциальные уравнения (1.1) и (1.2) неоднородные, то

$x = x_{00} + x_{\text{чн}}$,

$x = a\sin(kt + \varepsilon) + \dfrac{fg}{k^2}$ для уравнения (1.1),

a, ε определяются из начальных условий:

$\text{tg}\varepsilon = \dfrac{x_0 k}{\dot{x}_0}$, т.к. $\dot{x}_0 = 0$, то $\text{tg}\varepsilon = \infty$; $\varepsilon = \pi / 2$; $a = (a_0 - \dfrac{fg}{k^2})$, тогда

$x = (a_0 - \dfrac{fg}{k^2})\cos(kt) + \dfrac{fg}{k^2}$ – **закон изменения координаты**, пока $\dot{x}_0 < 0$.

Продифференцируем:

$\dot{x}_0 = (a_0 - \dfrac{fg}{k^2})k\sin(kt)$, $t_1 = \pi / k$.

Это соответствует крайнему положению. Если поставить t в выражение амплитуды, то получим $x_1 = (a_0 - \dfrac{2fg}{k^2})$, когда $x_1 > \dfrac{fg}{k^2}$, тело начинает движение в противоположную сторону $x_2 = x_1 - \dfrac{2fg}{k^2}$.

Если обобщить, то можно записать $a_n = a_0 - \dfrac{2fg}{k^2} n$. (2)

Через каждый полупериод π / k амплитуда уменьшается на величину $2fg / k^2$, колебания проходят поочередно относительно осей $+\dfrac{fg}{k^2}$ и $-\dfrac{fg}{k^2}$.

Таким образом, при сухом трении амплитуда колебаний уменьшается по арифметической прогрессии, разность которой $2fg / k^2$, период затухающих колебаний равен периоду незатухающих и равен $\tau = 2\pi / k$.

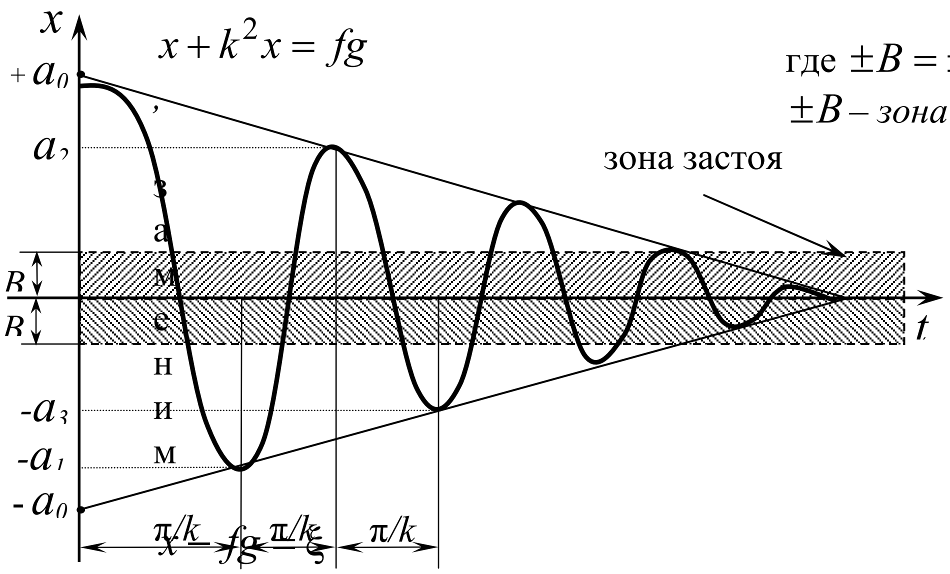
Движение будет происходить до тех пор, пока сила $F_{\text{ТР}}$ не станет больше $F_{\text{УПР}}$.

$$ca_n < mgf. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) позволяют определить число полуколебаний

$$n > \frac{1}{2}\left(a_0 \frac{k^2}{fg} - 1\right).$$

Представим графически закон изменения координаты:



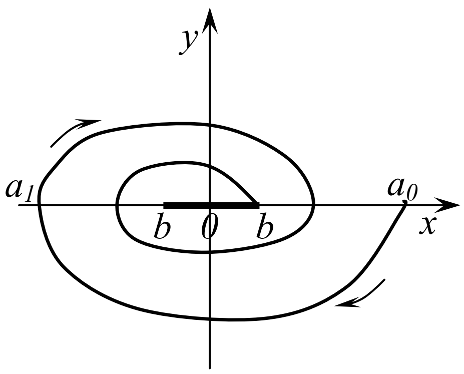
где $\pm B = \pm fg / k^2$,
$\pm B$ – *зона застоя*

$x + k^2 x = fg$, заменим $x - fg = \xi$.

$$\xi + x + k^2\xi = 0.$$

Построим фазовый портрет:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = fg\,sign\dot{x} - k^2 x, \end{cases}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{fgsign\dot{x} - k^2 x}{y},$$

$$\frac{y^2}{c_1{}^2} + \frac{(k^2 x - fgsign\dot{x})^2}{c_2{}^2} = 1,$$

c_1, c_2 определяются в конце каждого полупериода, т.е. получается непрерывная фазовая траектория.

Получаем семейство полуэллипсов, в центре точка $(b;0)$ и $(-b;0)$, где $\pm b$ – зона застоя.

10. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Сводные колебания системы с двумя степенями свободы без учета сил сопротивления

$$S = 2,$$

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1{}^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2{}^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1{}^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2{}^2),$$

$\Phi = 0$ – диссипативная сила.

Уравнение Лагранжа: $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} \end{cases}.$

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0 \\ a_{22}\ddot{q}_2 + a_{21}\ddot{q}_1 + c_{22}q_2 + c_{21}q_1 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Имеем $a_{12} = a_{21}$; $c_{12} = c_{21}$ – коэффициенты инертности и жесткости.

Критерий Сильвестра:

$$a_{11} > 0; a_{22} > 0; a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0,$$

$$c_{11} > 0; c_{22} > 0; c_{11}c_{22} - c_{12}{}^2 > 0.$$

(1) - система двух однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Необходимо найти частное решение, полагая, что колебания гармонические:

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \beta),$$
$$q_2 = A_2 \sin(kt + \beta). \qquad (2)$$

Обозначим $\dfrac{q_2}{q_1} = \dfrac{A_2}{A_1} = \mu$, тогда

$$q_2 = \mu A_1 sin(kt + \beta). \qquad (3)$$

Подставим (2) с учетом (3) в систему (1), и, сокращая на $sin(kt + \beta)$, получим:

$$\begin{cases} (c_{11} - a_{11}k^2) + \mu(c_{12} - a_{12}k^2) = 0 \\ (c_{12} - a_{12}k^2) + \mu(c_{22} - a_{22}k^2) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Исключим из (4) μ, получим:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2) = 0 \qquad (5)$$

– уравнение частот.

В (5) оба корня должны быть действительными и положительными, иначе (2) неверно.

Колебания, соответствующие частотам k_1 и k_2, называются **главными.** Меньшая частота k_1 – **основная частота,** а колебания с этой частотой – **основное колебание.**

Пусть мы решили (5) и нашли k_1 и k_2, то соотношение между ними остается прежним $k_1 < k_2$.

Значения k_1 и k_2 подставим в (4) и найдем μ_1 и μ_2.

$$\mu_1 = -\frac{c_{12} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2},$$

$$\mu_2 = -\frac{c_{12} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}.$$

μ_1 и μ_2 определяют соотношение амплитуд колебаний и называются **коэффициентом распределения.**

Обозначим индексом 1 значение координат и амплитуд, соответствующих первому главному колебанию, а индексом 2 – второму главному колебанию:

$$\begin{cases} \dfrac{q_2^{(1)}}{q_1^{(1)}} = \dfrac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \mu_1 \\ q_1^{(1)} = A_1^{(1)}\sin(k_1 t + \beta_1) \\ q_2^{(1)} = \mu_1 A_1^{(1)}\sin(k_1 t + \beta_1) \end{cases}, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q_2^{(2)}}{q_1^{(2)}} = \dfrac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \mu_2 \\ q_1^{(2)} = A_1^{(2)}\sin(k_2 t + \beta_2) \\ q_2^{(2)} = \mu_2 A_1^{(2)}\sin(k_2 t + \beta_2) \end{cases}. \tag{7}$$

Общее решение запишется:

$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}$,

$q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)}$.

Подставим в эти уравнения (6) и (7), получим:

$$q_1 = A_1^{(1)}\sin(k_1 t + \beta_1) + \mu_1 A_1^{(1)}\sin(k_1 t + \beta_1),$$

$$q_2 = A_1^{(2)}\sin(k_1 t + \beta_2) + \mu_2 A_1^{(2)}\sin(k_2 t + \beta_2).$$

Найдем частные решения и выразим через коэффициенты распределения и частоты: $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_2^{(1)}, A_2^{(2)}; \beta_{1,} \beta_2$ определяются из начальных условий.

Начальные условия при $t = 0$:

$$q_1 = q_{10}, \dot{q}_1 = \dot{q}_{10},$$

$$q_2 = q_{20}, \dot{q}_2 = \dot{q}_{20}.$$

Пример: Два связанных маятника, маятники одинаковые m, l, a, c.

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2),$$

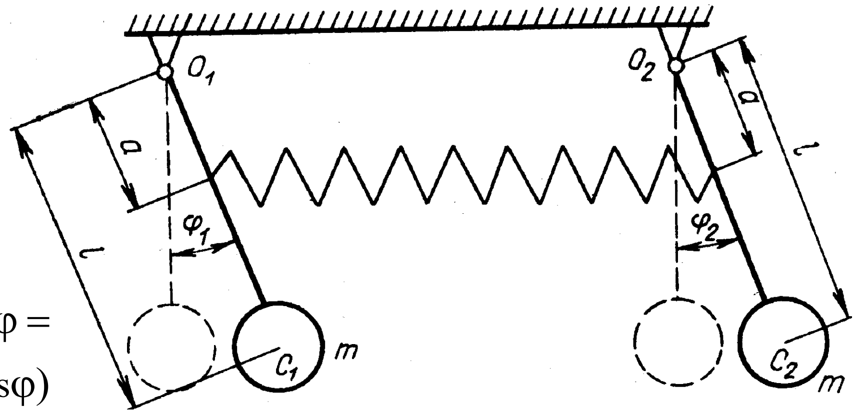
$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2; \Pi_1 = mgl(1 - \cos\varphi_1) + mgl(1 - \cos\varphi_2),$$

$$\cos\varphi = 1 - \varphi^2 / 2 + \varphi^4 / 4 + \ldots$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} mgl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2); \;\; \Pi_2 = \frac{1}{2} c\Delta l^2,$$

где $\Delta l = \Delta l_2 - \Delta l_1;\ \Delta l_1 = a\varphi_1,\ \Delta l_2 = a\varphi_2$.

Схема:



$$h = l - l\cos\varphi =$$
$$= l(1 - \cos\varphi)$$

Таким образом: $\Pi_2 = \dfrac{1}{2} ca^2(\varphi_1 + \varphi_2)^2$,

$$a_{11} = a_{22} ml^2;\ a_{12} = 0,$$

$$c_{11} = c_{22} = mgl + ca^2;\ c_{12} = -ca^2.$$

Уравнение Лагранжа II рода:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot\varphi_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot\varphi_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_{11}\ddot\varphi_1 + c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 = 0 \\ a_{22}\ddot\varphi_2 + c_{22}\varphi_2 + c_{21}\varphi_1 = 0 \end{cases}.$$

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2) = 0,$$

$k_1^2 = \dfrac{g}{l},\ k_1^2 = \dfrac{g}{l} + \dfrac{2ca^2}{ml^2}$, где k_1 и k_2 – действительные положительные числа.

Определим коэффициенты распределения:

$$\mu_1 = -\frac{c_{12} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{mgl - ca^2 - ml^2\frac{g}{l}}{-ca^2} = +1,$$

$$\mu_2 = -\frac{c_{12} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{mgl - ca^2 - ml^2(\frac{q}{l} + \frac{2ca^2}{ml^2})}{-ca^2} = -1.$$

Таким образом: $\varphi_1{}^{(1)} = \varphi_2{}^{(1)}$; $\varphi_1{}^{(2)} = -\varphi_2{}^{(2)}$;

$$c_э = c_1 + c_2,\ c_э = \frac{c_1c_2}{c_1 + c_2}.$$

Общее решение по координате φ_1, φ_2:

$$\varphi_1 = \varphi_1{}^{(1)} + \varphi_1{}^{(2)} = c_1\sin(k_1t + \beta_1) + c_2\sin(k_2t + \beta_2),$$

$$\varphi_2 = \varphi_2{}^{(1)} + \varphi_2{}^{(2)} = \mu_1c_1\sin(k_1t + \beta_1) + \mu_2A_1^{(2)}\sin(k_2t + \beta_2).$$

Подставим начальные условия при $t = 0 : \varphi_{10} = q_{20} = 0; \dot{\varphi}_{10} = \Omega; \dot{q}_{20} = 0$.

$$\dot{\varphi}_1 = c_1k_1\cos(k_1t + \beta_1) + c_2k_2\cos(k_2t + \beta_2),$$

$$\dot{\varphi}_2 = \mu_1c_1k_1\cos(k_1t + \beta_1) + \mu_2c_2k_2\cos(k_2t + \beta_2).$$

Решаем, подставляя:
$$\begin{cases} \begin{cases} 0 = c_1\sin\beta_1 + c_2\sin\beta_2 & (1) \\ 0 = c_1\sin\beta_1 - c_2\sin\beta_2 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} \Omega = c_1k_1\cos\beta_1 + c_2k_2\cos\beta_2 & (3) \\ 0 = c_1k_1\cos\beta_1 - c_2k_2\cos\beta_2 & (4) \end{cases} \end{cases}$$

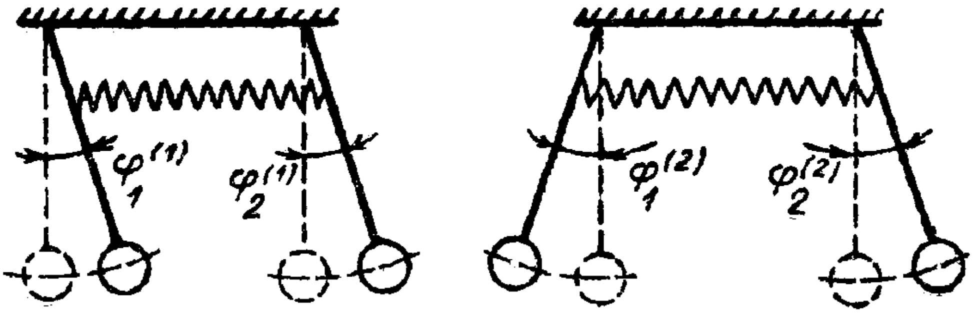
Вычтем из (2) $\mp$ (1). Вычтем из (4) $\mp$ (3):

$$\begin{cases} 2c_1\sin\beta_1 = 0 & (5) & \text{возведем в}^2 \\ 2c_2\sin\beta_2 = 0 & (6) & (6)^2 \\ \Omega = 2c_1k_1\cos\beta_1 & (7) & (7)^2 \\ \Omega = 2c_2k_2\cos\beta_2 & (8) & (8)^2 + (5)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \Omega / 2k_1 \\ c_2 = \Omega / 2k_2 \\ \beta_1 = \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Тогда: $\varphi_1 = \dfrac{\Omega}{2k_1}\sin k_1 t + \dfrac{\Omega}{2k_2}\sin k_2 t$.

$$\varphi_1 = \frac{\Omega}{2k_1}\sin k_1 t - \frac{\Omega}{2k_2}\sin k_2 t.$$



Главная (нормальная) координата

Главными (нормальными) координатами называются такие обобщенные координаты, при которых кинетическая и потенциальная энергии содержат лишь квадраты обобщенных скоростей и координат.

Для системы с двумя степенями свободы

$$T = \frac{1}{2}(a_1\dot{\eta}_1^2 + a_2\dot{\eta}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_1\eta_1^2 + c_2\eta_2^2),$$

где η_1, η_2 – главные коэффициенты,

c_1, c_2 – коэффициенты жесткости, a_1, a_2 – коэффициенты инерции.

Найдем связь между q_1 и q_2, выбранными произвольно, и η_1, η_2. Для этого запишем уравнение Лагранжа с главными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \eta_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \eta_1} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \eta_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial \eta_2} \end{cases}.$$

Подставим T и Π:

$$\begin{cases} a_1\ddot{\eta}_1 + c_1\eta_1 = 0 \\ a_2\ddot{\eta}_2 + c_2\eta_2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{matrix} \ddot{\eta}_1 + k_1^2\eta_1 = 0 \qquad (k_1^2 = c_1/a_1) \\ \ddot{\eta}_2 + k_2^2\eta_2 = 0 \qquad (k_2^2 = c_2/a_2) \end{matrix},$$

$$\eta_1 = c_1^{(1)}\sin\left(k_1 t + \beta_1\right),$$
$$\eta_2 = c_1^{(2)}\sin\left(k_2 t + \beta_2\right), \qquad (1)$$

$\beta_1, \beta_2, c_1^{(1)}, c_2^{(1)}$ – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Начальные условия при $t=0$: $\eta_1=\eta_{10}$, $\eta_2=\eta_{20}$, $\dot\eta_1=\dot\eta_{10}$, $\dot\eta_2=\dot\eta_{20}$.

$$q_1 = c_1^{(1)}\sin(k_1 t + \beta_1) + c_1^{(2)}\sin(k_2 t + \beta_2),$$
$$q_2 = c_2^{(1)}\sin(k_1 t + \beta_1) + c_2^{(2)}\sin(k_2 t + \beta_2), \qquad (2)$$
$$c_2^{(1)} = \mu_1 c_1^{(1)},\ c_2^{(2)} = \mu_2 c_1^{(2)}.$$

Сравним решения уравнений (2) и (1).

Видим, что $q_1 = \eta_1 + \eta_2$,

$q_2 = \mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2$, где μ_1, μ_2 – координаты распределения.

Эти уравнения устанавливают связь между главными координатами и обобщенными координатами, выбранными произвольно.

Решая эти уравнения, найдем:

$$\eta_1 = \frac{q_2 - \mu_2 q_1}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \eta_2 = \frac{\mu_1 q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Выбирать главные координаты η_1 и η_2 сразу невозможно. Сначала выбираются координаты q_1 и q_2, а потом переходим к η_1 и η_2.

Найдем связь между коэффициентами инерции и жесткости в выражениях T и Π, записанных в главных координатах и произвольно выбранных. Для этого в выражениях T и Π вместо $q_1, q_2, \dot q_1, \dot q_2$ подставим $\eta_1, \eta_2, \dot\eta_1, \dot\eta_2$:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot q_1^2 + 2a_{12}\dot q_1\dot q_2 + a_{22}\dot q_2^2),$$
$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1 q_2 + c_{22}q_2^2).$$

Подставим их значения:

$$T = \frac{1}{2}[(a_{11} + 2a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_1^2)\dot\eta_1^2 + 2(a_{11} + a_{12}(\mu_1 + \mu_2) +$$
$$+ a_{22}\mu_1\mu_2)\dot\eta_1\dot\eta_2 + (a_{11} + 2a_{12}\mu_2 + a_{22}\mu_2^2)\dot\eta_2^2].$$

$$\Pi = \frac{1}{2}[(c_{11} + 2c_{12}\mu_1 + c_{22}\mu_1^2)\dot{\eta}_1^2 + 2(c_{11} + c_{12}(\mu_1 + \mu_2) + + c_{22}\mu_1\mu_2)\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2 + (c_{11} + 2c_{12}\mu_2 + 2c_{22}\mu_2^2)\dot{\eta}_2^2], \tag{4}$$

$$a_{11} + a_{12}(\mu_1 + \mu_2) + a_{22}\mu_1\mu_2 = 0,$$

$$c_{11} + c_{12}(\mu_1 + \mu_2) + c_{22}\mu_1\mu_2 = 0. \tag{5}$$

Решая уравнения (5), найдем:

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{a_{22}c_{11} - a_{11}c_{22}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{11}}, \quad \mu_1\mu_2 = \frac{a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{11}}. \tag{6}$$

Из уравнения (6) видно, что μ_1 и μ_2 являются корнями квадратного уравнения (по теореме Виета):

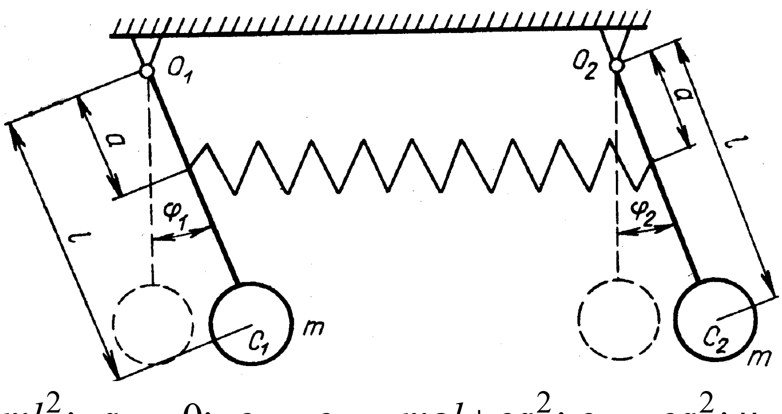
$$\mu^2 - \frac{a_{22}c_{11} - a_{11}c_{22}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{11}}\mu + \frac{a_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}}{a_{12}c_{22} - a_{22}c_{11}} = 0. \tag{7}$$

Значения μ_1 и μ_2, найденные из решения уравнения (7), совпадают с μ_1 и μ_2, найденными ранее, что подтверждает правильность найденных соотношений между q_1, q_2 и η_1, η_2.

Соотношения между коэффициентами инерции и жесткости в выражениях T и Π, записанных в q_1, q_2, и T, Π, записанных в выражениях η_1, η_2, найдем из уравнения (4):

$$a_1 = a_{11} + 2a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_1^2,$$
$$a_2 = a_{11} + 2a_{12}\mu_2 + a_{22}\mu_2^2,$$
$$c_1 = c_{11} + 2c_{12}\mu_1 + c_{22}\mu_1^2,$$
$$c_2 = c_{11} + 2c_{12}\mu_2 + c_{22}\mu_2^2.$$

Пример:



$$q_1 = \varphi_1,$$
$$q_2 = \varphi_2.$$

$a_{11} = a_{22} = ml^2$; $a_{12} = 0$; $c_{11} = c_{22} = mgl + ca^2$; $c_{12} = ca^2$; $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = -1$;

$$\varphi_1 = \eta_1 + \eta_2;\ \varphi_2 = \eta_1 - \eta_2;\ \eta_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2};\ \eta_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2};$$

$$a_1 = 2ml^2;\ c_1 = 2mgl;$$

$$a_2 = 2ml^2;\ c_2 = 2mgl + 4ca^2.$$

11. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ С УЧЕТОМ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ. КРИТЕРИЙ ГУРВИЦА

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1{}^2 + a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2{}^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1{}^2 + c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2{}^2),$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{q}_1{}^2 + b_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + b_{22}\dot{q}_2{}^2),$$

$a_{11} > 0;\ a_{22} > 0;\ a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 > 0;\ c_{11}c_{22} - c_{12}{}^2 > 0$ – критерий Сильвестра,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_1} \\ \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_2} \end{cases},$$

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0,$$

$$a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0,$$

$$q_1 = A_1e^{\lambda t};\ q_2 = A_2e^{\lambda t}, \tag{1}$$

где A_1, A_2 – постоянные числа, которые предстоит найти.

Подставив дифференциальное решение в систему (1) и сократив на λt, получим:

$$(a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11})A_1 + (a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12})A_2 = 0,$$

$$(a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21})A_1 + (a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22})A_2 = 0,$$

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11}}{a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + \mathrm{c}_{12}} = -\frac{a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21}}{a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + \mathrm{c}_{22}}. \tag{2}$$

Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений (2) имела решения, отличные от нуля, ее определитель должен быть равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

– это характеристический определитель

Раскроем определитель (3):

$$(a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11})(a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22}) - (a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12})^2 = 0,$$

т.к. $a_{12} = a_{21}; b_{12} = b_{21}; c_{12} = c_{21}$. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** – уравнением четвертого порядка:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

где $a_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2$,

$a_1 = a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12}$,

$a_2 = a_{22}c_{11} + a_{11}c_{22} + 2a_{12}c_{12}, + b_{22}b_{11} - b_{12}{}^2$,

$a_3 = b_{22}c_{11} + b_{11}c_{22} + 2b_{12}c_{12}$,

$c_4 = c_{11}c_{22} - c_{12}{}^2$.

Движение системы будет устойчивым, если $e^{\lambda t}$ не возрастет со временем, т.е. λ должно иметь отрицательные вещественные части.

Условие отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения можно выразить с помощью критерия (теоремы) Гурвица:

Для того, чтобы все корни характеристического уравнения при $a_0 > 0$ имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы положительными были определители:

$$\Delta_1 > a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n+1} & a_n \end{vmatrix}$$

или $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, i – счетный индекс.

Для алгебраического уравнения четвертого порядка:

$$a_0 > 0,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4,$$

$$a_1^2 > 0,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_4[a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2] > 0.$$

Из 4-го условия следует, что a_4 должно быть > 0.

Из 3-го условия следует, что a_3 должно быть > 0.

Из 2-го условия следует, что a_1a_2 должно быть $> a_0a_3$, следовательно, a_2 должно быть > 0.

Таким образом, критерий Гурвица для уравнений 4-го порядка накладывает два условия:

1) все коэффициенты уравнения должны быть положительные;

2) $a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 > 0$.

Докажем, что условия Гурвица выполняются и корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = -h_1 \pm i\omega \quad \lambda_{3,4} = -h_2 \pm i\omega,$$

где $\lambda_{1,2,3,4}$ – сопряженные комплексной величины.

Тогда, пользуясь формулой Эйлера, запишем решение:

$$q_1 = e^{-h_1t}(A_1^{(1)}\cos\omega_1 t + A_1^{(2)}\sin\omega_1 t) + e^{-h_2t}(A_1^{(3)}\cos\omega_2 t + A_1^{(4)}\sin\omega_2 t),$$

$$q_2 = e^{-h_1t}(A_2^{(1)}\cos\omega_1 t + A_2^{(2)}\sin\omega_1 t) + e^{-h_2t}(A_2^{(3)}\cos\omega_2 t + A_2^{(4)}\sin\omega_2 t),$$

где $A_i^{(j)}$ – произвольная постоянная, которая определяется из начальных условий.

12. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ БЕЗ УЧЕТА СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2),$$

$$\Phi = 0.$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_2,$$

где Q_1, Q_2 – обобщенные возмущающие силы, изменяющиеся по гармоническому закону:

$$Q_1 = H_1\sin(pt + \delta),\ Q_2 = H_2\sin(pt + \delta).$$

T, П и Q_1, Q_2 подставим в уравнение Лагранжа:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = H_1 \sin(pt + \delta),$$

$$a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = H_2 \sin(pt + \delta).$$

Решение будет складываться из суммы решений однородной и неоднородной частей:

$$q_1'' = a_1 \sin(pt + \delta),$$

$$q_2'' = a_2 \sin(pt + \delta).$$

Подставим в исходную систему:

$$(c_{11} - a_{11}p^2)a_1 + (c_{12} - a_{12}p^2)a_2 = H_1,$$

$$(c_{21} - a_{21}p^2)a_1 + (c_{22} - a_{22}p^2)a_2 = H_2.$$

Решая эту систему, найдем значения a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{H_1(c_{22} - a_{22}p^2) - H_2(c_{12} - a_{12}p^2)}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{12} - a_{12}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2},$$

$$a_2 = \frac{H_2(c_{11} - a_{11}p^2) - H_1(c_{12} - a_{12}p^2)}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{12} - a_{12}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2}.$$

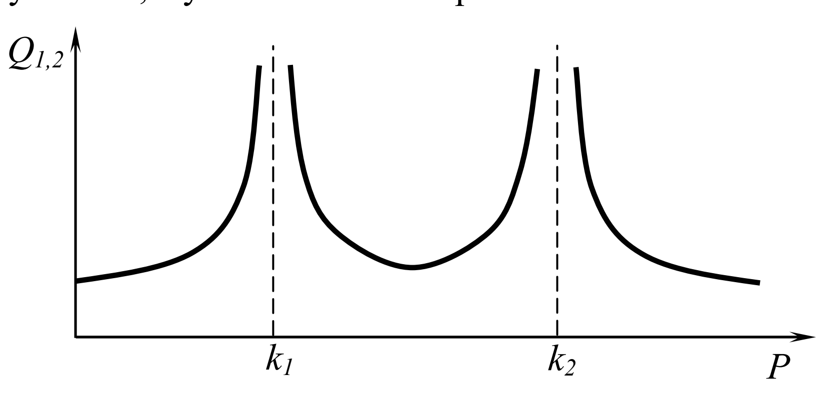
Эти значения подставляем в частное решение q_1'' и q_2'' и запишем полное решение:

$$q_1 = c_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + c_2 \sin(k_2 t + \beta_2) + a_1 \sin(pt + \delta),$$

$$q_2 = \mu_1 c_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + \mu_2 c_2 \sin(k_2 t + \beta_2) + a_1 \sin(pt + \delta).$$

Частоты $k_{1,2}$ и коэффициенты влияния определили ранее, $c_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ находятся из начальных условий, с учетом частного решения.

В знаменателе для $a_{1,2}$ стоит полином второй степени относительно p^2, корнями которого являются k_1^2 и k_2^2, т.е. $p = k_1$, $p = k_2$ амплитуды будут бесконечными, что соответствует резонансу.



Случай, когда одна возмущающая сила равна нулю (динамический гаситель колебаний)

Считаем $Q_1 = H_1 \sin(pt + \delta)$, $Q_2 = 0$, сразу получаем выражения для амплитуд:

$$a_1 = \frac{H_1(c_{22} - a_{22}p^2)}{\Delta},$$

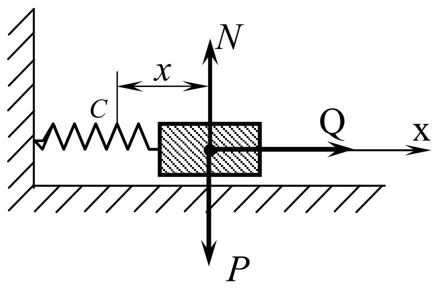
$$a_2 = \frac{-H_1(c_{12} - a_{12}p^2)}{\Delta}.$$

где $\Delta = (c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - (c_{12} - a_{12}p^2)^2$ при $c_{22} - a_{22}p^2 = 0$, имеем $a_1 = 0$; $a_2 = \dfrac{H_1}{c_{22} - a_{22}p^2}$.

Полученный результат – основа динамических гасителей колебаний.

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, состоящую из массы и пружины:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2,$$



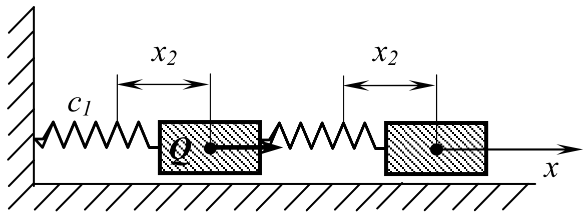
$$\Pi = \frac{1}{2}cx_1^2,$$

$$Q = H_1 sinpt.$$

Ранее было получено:

$$x_{\text{вын}} = \frac{H_1}{m_1(k_1^2 - p^2)}\sin pt.$$

Присоединим к массе m_1 другую массу m_2 с помощью пружины жесткости c_2.



Для этого случая имеем:

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2).$$

$$\Pi = \frac{1}{2}((c_1 + c_2)x_1^2 + 2c_2x_1x_2 + c_2x_2^2),$$

$$Q_1 = H_1 \sin pt,$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 + c_2x_2 = H_1 \sin pt \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2x_2 - c_1x_1 = 0. \end{cases}$$

Пользуясь формулами из предыдущего раздела, найдем, что при $p^2 = \dfrac{c_2}{m_2}$ будет $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{H_1}{c_2}\sin pt$. Таким образом, амплитуда колебаний первого тела равна нулю.

Для объяснения физики явления подставим x_2 в первое уравнение системы, получим:

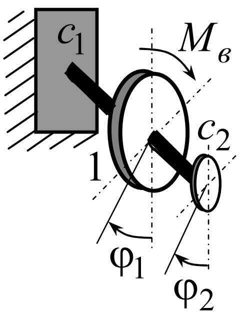
$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 + c_2\frac{H_1}{c_2}\sin pt = H_1\sin pt,$$

$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 = 0$ – тело совершает свободные колебания, $k^2 = \dfrac{c_1 + c_2}{m_1}$.

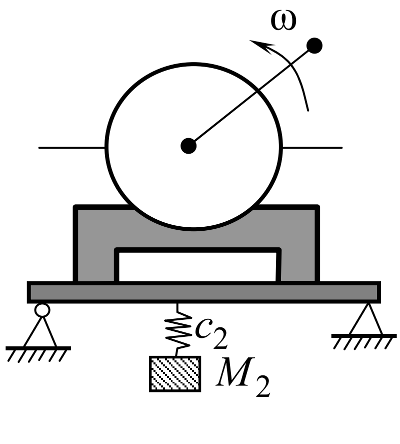
Реакция второго тела в любой момент уравновешивает приложенную к первому возмущающую силу.

И первое тело совершает свободные колебания. Амплитуда была бы небольшой: $x_2 = \dfrac{H_1}{c_2}$ выбирают x_2, так же массу и жесткость.

Примеры динамических гасителей колебаний



Для гашения крутильных колебаний диска 1 присоединяется диск 2 с моментом инерции I_2 на валу жесткости c_2.



Ротор электродвигателя не уравновешен. Чтобы погасить колебания основания, нужно подвесить груз m_2 на пружине жесткостью c_2.

13. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: В 2 т. Т.2. – М.: Наука, 1971. – 461 с.
2. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 239 с.
3. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – М.: Высш. шк., 1966. – 255 с.
4. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. Механические колебания. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.
5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 445 с.

Оглавление

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ
(Раздел «Теория колебаний»)

Конспект лекций

Составитель
БУРЛАКОВ Владимир Иванович

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор Л.М. Самсонов

Редактор Е. В. Невская
Корректор В.В. Гурова
Компьютерная верстка Д.Н. Ях

ЛР №020275. Подписано в печать 17.11.03.
Формат 60x84/16. Бумага для множительной техники. Гарнитура Таймс.
Печать на ризографе. Усл. печ. 2,79 л. Уч.-изд. л. 2,95. Тираж 50 экз.
Заказ .
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600026. Владимир, ул. Горького, 87.