

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

В.Б. Буланкин

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ**

Учебное пособие

Владимир 2003

УДК 681.32

В.Б. Буланкин Параллельные вычислительные системы: Учебное пособие/ Владим. гос. ун-т. Владимир, 2003, 32 с.

Содержат систематизированный материал по применению параллельных вычислительных систем на основе цифровых интеграторов для решения задач в широкой сфере применения. Включают обобщенный теоретический материал, методику перехода к порождающим системам дифференциальных уравнений К. Шеннона, математические зависимости численного интегрирования по Стилтьесу и экстраполяции, используемые в ЦИМ, расчетную часть по выбору порядка формул численного интегрирования, экстраполяции, длины разрядной сетки переменных, приращений, шага интегрирования и выдачи решений на основе предъявляемых требований. Приведены примеры вычисления некоторых математических зависимостей методами ЦИМ и проектирования параллельных вычислительных систем, удовлетворяющих заданным техническим характеристикам.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 220100, 071900 и может быть использовано студентами смежных специальностей для знакомства с принципами организации, проектирования и использования вычислительных систем на основе цифровых интеграторов.

Табл. 4. Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 681.32

ВВЕДЕНИЕ

Повышение производительности вычислительных систем (ВС) на современном этапе развития вычислительной техники достигается тремя основными путями:

1) повышением быстродействия элементов ВС. Однако здесь существуют определенные физические пределы в первую очередь технологического характера. В последние годы тактовая частота элементов ЦВМ резко возросла и достигла у микропроцессоров 166 - 1000 МГц;

2) совершенствованием математического обеспечения и схемотехнической организации вычислительных модулей, главным образом микропроцессоров. Переход к алгоритмам выполнения операций на основе поразрядной арифметики, широкое внедрение параллелизма и принципа конвейерной обработки на всех уровнях ВС увеличил число операций реализуемых в одной команде процессора и сократил время выполнения команд в программах до одного – двух тактов;

3) переходом от однопроцессорных структур к мультипроцессорным и многомашинным вычислительным комплексам, работающим параллельно.

Исходные задачи, описываемые дискретным математическим аппаратом, эффективно и просто реализуются с помощью набора как универсальных так и специализированных вычислительных модулей ВС.

Универсальные вычислительные модули выполнены, как правило, на базе однокристалльных микропроцессоров с функционально полной системой команд арифметико-логического типа, дополненные логикой сопряжения с шинами, локальной памятью и функциональными расширителями: арифметическими сопроцессорами, независимыми процессорами ввода-вывода, фильтрации, обработки аудио-видео информации.

Специализированные вычислительные модули имеют ограниченные наборы команд ориентированные на выполнение одного или нескольких алгоритмов. Число команд в таких модулях не превышает десяти, а в некоторых составляет всего одну операцию.

Аппаратурно-специализированные вычислительные модули в отличие от универсальных значительно проще и обеспечивают построение ВС различной конфигурации: последовательные, параллельно-последовательные, параллельные.

Однородность получаемых структур ВС, определяемая однотипностью используемых элементов (процессоров) и связей между ними, упрощает их реализацию в интегральном исполнении в виде одной или нескольких ИС. Синтез интегральных схем оказывается более простым, обес-

печивается большая плотность размещения элементов и выше частота тактирования по сравнению с неоднородными структурами.

Актуальность проведения исследований в области параллельных вычислительных систем на базе специализированных вычислительных модулей определяется наряду, с лучшим удовлетворением предъявляемым тактико-техническим требованиям, интенсивным развитием и широким распространением инструментальных средств по проектированию устройств на базе заказных интегральных схем, в том числе ПЛИС (программируемых интегральных схем).

Достаточно высокая степень интеграции ПЛИС, составляющая свыше 25 млн транзисторов на кристалле и тактовая частота переключения – 100 и более мегагерц, доступность, открытость внутренней структуры выдвинули их в среде разработчиков в разряд наиболее популярных.

В указаниях рассматриваются принципы построения параллельных ВС на базе специализированных вычислительных модулей – цифровых интеграторов. Исследуются точностные и динамические характеристики ВС.

1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ ЦИФРОВЫХ ИНТЕГРИРУЮЩИХ МАШИН

В ЦИМ воспроизводится система уравнений Шеннона [1], которую можно привести к следующей симметричной форме:

$$\begin{aligned}
 dy_{pk} &= \sum_{j=1}^N A_{pkj} dz_j, \\
 dy_{qk} &= \sum_{j=1}^N A_{qkj} dz_j, \\
 dz_k &= y_{pk} dy_{qk}, \\
 dz_1 &= dx, \\
 y_{pk}(x_0) &= y_{pk0}, \\
 k &= 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь A_{pkj} и A_{qkj} ($k = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$) являются постоянными коэффициентами, принимающими значения 0 или 1 в зависимости от решаемой задачи. Прямоугольные матрицы, составленные из коэффициентов A_{pkj} и A_{qkj} , вместе с вектором начальных условий y_{pk0} ($k = 1, 2, \dots, N$) полностью задают систему уравнений Шеннона (1.1) и программу коммутации интеграторов в ЦИМ.

К системе уравнений Шеннона сводится очень широкий круг задач [1],

связанных с разработкой и функционированием цифровых моделей и систем управления, а также с другими проблемами. Сюда относятся линейные и нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы с начальными и граничными условиями; дифференциальные уравнения в частных производных, приводимые к обыкновенным дифференциальным уравнениям; трансцендентные уравнения; задачи на вычисление различного рода интегралов, производных, экстремумов и функций одной и многих переменных; операции преобразования координат; вариационные задачи; задачи теории оптимальных процессов, теории дифференциальных игр и многие др.

Система уравнений Шеннона (1.1) характерна тем, что в правой части ее используются лишь операции суммирования и умножения и отсутствуют какие-либо более сложные операции (деление, возведение в степень, функциональное преобразование и т. п.). Это обстоятельство приводит к существенному упрощению структуры ЦИМ, так как отпадает необходимость вводить в структуру ЦИМ сложные функциональные преобразователи.

Вместе с тем, при численном интегрировании уравнений Шеннона (1.1) возникает проблема вычисления интеграла Стильеса

$$\nabla z_{k(i+1)} = \int y_{pk}(x) dy_{qk}(x), \quad (1.2)$$

который образуется в результате интегрирования уравнений (1.1) на отрезке от $x = x_i$ до $x = x_{i+1}$.

Подробное исследование процесса численного интегрирования по Стильесу позволило получить соответствующие формулы численного интегрирования различного порядка точности. В общем случае интерполяционная формула численного интегрирования по Стильесу n -го порядка точности может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla z_{k(i+1)} = & y_{pki} \nabla y_{qk(i+1)} + \frac{1}{2} \nabla y_{pk(i+1)} \nabla y_{qk(i+1)} + \\ & \frac{2n-9+(-1)^n}{\sum_{\alpha=0}^4 \sum_{\beta=\alpha+1}^{n-\alpha-3} \alpha_{\alpha\beta n}} [\nabla y_{qk(i+1-\alpha)} \nabla y_{qk(i+1-\beta)} - \nabla y_{qk(i+1-\beta)} \nabla y_{qk(i+1-\alpha)}], \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $n = 3, 4, 5, \dots$, $\alpha_{\alpha\beta n}$ - постоянные коэффициенты [2].

Задавая в (1.3) различные значения n , можно получить конкретные формулы численного интегрирования по Стильесу, которые могут быть положены в основу синтеза цифровых интеграторов. Отличительной особенностью таких интеграторов является то, что они производят численное интегрирование не только по независимой переменной x , но и по любой

зависимой переменной $y_{qk}(x)$.

На входы цифровых интеграторов информация подается в виде приращений подынтегральной функции $\nabla y_{pk(i+1)}$ и переменной интегрирования $\nabla y_{qk(i+1)}$. Указанные приращения могут быть вычислены, если проинтегрировать на интервале (x_i, x_{i+1}) первые два уравнения системы Шеннона (1.1):

$$\begin{aligned}\nabla y_{pk(i+1)} &= \sum_{j=1}^N A_{pkj} \nabla z_{j(i+1)}, \\ \nabla y_{qk(i+1)} &= \sum_{j=1}^N A_{qkj} \nabla z_{j(i+1)},\end{aligned}\tag{1.4}$$

Формула численного интегрирования (1.3) является интерполяционной, т. е. требует для вычисления приращений интеграла $\nabla z_{k(i+1)}$ использования приращений $\nabla y_{pk(i+1)}$ и $\nabla y_{qk(i+1)}$, которые не могут быть определены непосредственно, так как в соответствии с выражениями (1.4) для этого необходимо иметь в распоряжении значения искомых приращений $\nabla z_{k(i+1)}$.

Чтобы устранить указанное затруднение, можно воспользоваться экстраполяционными формулами численного интегрирования по Стилтесу. Но экстраполяционные формулы, как показывает подробное исследование, оказываются значительно более сложными и менее точными. Поэтому для численного интегрирования уравнений Шеннона лучше использовать интерполяционную формулу (1.3), а приращения $\nabla y_{pk(i+1)}$ и $\nabla y_{qk(i+1)}$ получать путем экстраполяции приращений ∇y_{pki} и ∇y_{qki} на один шаг вперед. Точнее, следует экстраполировать на один шаг вперед приращения ∇z_{ki} , что достаточно просто осуществляется с помощью выражения

$$\nabla z_{k(i+1)}^* = \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{\alpha-1} \binom{n}{\alpha} \nabla z_{k(i+1-\alpha)}.\tag{1.5}$$

После экстраполяции приращений ∇z_{ki} нетрудно в соответствии с формулами (1.4) вычислить приращения $\nabla y_{pk(i+1)}$ и $\nabla y_{qk(i+1)}$:

$$\begin{aligned}\nabla y_{pk(i+1)} &= \sum_{j=1}^N A_{pkj} \nabla z_{j(i+1)}^*, \\ \nabla y_{qk(i+1)} &= \sum_{j=1}^N A_{qkj} \nabla z_{j(i+1)}^*,\end{aligned}\tag{1.6}$$

Выражение (1.5) получено с таким расчетом, чтобы погрешность интегрирования сохранилась неизменной.

Изложенное показывает, что в общем случае цифровая интегрирующая

щая машина должна состоять из цифровых интеграторов, в которых реализуется формула численного интегрирования по Стильтьесу (1.3), экстраполяторов приращений, в которых приращения экстраполируются на один шаг вперед в соответствии с выражениями (1.5) и сумматоров, осуществляющих на основе формул (1.6) образование приращений подынтегральной функции и переменной интегрирования.

Перечисленные операции и соответствующие им решающие блоки могут быть объединены в один обобщенный универсальный цифровой интегратор рис. 1.1.

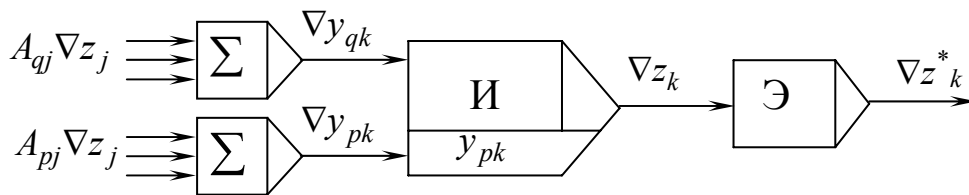


Рис. 1.1. Универсальный цифровой интегратор

Помимо перечисленных блоков в цифровые интегрирующие машины иногда вводятся для придания им большей гибкости и для расширения возможностей дополнительные решающие блоки: множительные устройства, цифровые функциональные преобразователи, следящие интеграторы, индикаторы равенства потоков приращений, блоки деления, логические блоки и др. элементарные вычислительные устройства. Однако введение в структуру ЦИМ перечисленных дополнительных решающих блоков в принципе не обязательно.

В целом любая цифровая интегрирующая машина реализует разностную схему интегрирования симметричной системы уравнений Шеннона, которая образуется в результате объединения выражений (1.3), (1.5) и (1.6).

2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ И СТРУКТУРА ЦИФРОВЫХ ИНТЕГРИРУЮЩИХ МАШИН

На основе разностной СУШ могут быть построены различные типы цифровых интегрирующих машин: экстраполяционные и интерполяционные, последовательные и параллельные.

Экстраполяционные параллельные ЦИМ конструируются непосредственно на основе уравнений разностной СУШ и в общем случае состоят из N реальных цифровых интеграторов, $2N$ сумматоров и N экстраполяторов приращений. Вычислительные блоки в подобных ЦИМ работают параллельно, в результате чего процесс интегрирования оказывается разверну-

тым в пространстве и скорость интегрирования повышается по сравнению с последовательными ЦИМ в N раз.

В структуру параллельных ЦИМ входят: электронное коммутирующее устройство (КУ), устройство управления, а также устройства ввода и вывода информации.

Последовательная экстраполяционная ЦИМ состоит в общем случае из одного интегратора, двух сумматоров и одного экстраполятора приращений, а также иногда из некоторых дополнительных решающих блоков, которые последовательно обрабатывают информацию, относящуюся к N различным интеграторам. В результате процесс интегрирования оказывается развернутым во времени.

Последовательная ЦИМ должна содержать запоминающее устройство, в котором хранятся исходные и промежуточные данные для каждого решающего блока, а также программа решения задачи. Кроме того в структуру последовательной ЦИМ входят: простые устройства ввода и вывода информации. (Отдельные структурные компоненты последовательной ЦИМ используются в лабораторных работах при моделировании параллельной ВС.)

Последовательные ЦИМ требуют меньших затрат оборудования, чем параллельные, но и скорость их работы в N раз меньше.

Наряду с экстраполяционными ЦИМ могут быть сконструированы параллельные и последовательные интерполяционные ЦИМ с параллельным и последовательным способами обработки информации в цифровых интеграторах, отличающихся точностью формул численного интегрирования, и других решающих блоков, а так же по способу образования и использования приращений или значений приращений.

3. ПЕРЕХОД ОТ ФУНКЦИЙ К ПОРОЖДАЮЩИМ УРАВНЕНИЯМ ШЕННОНА

Во [2] была обоснована принципиальная возможность представления функций с помощью уравнений Шеннона, однако обоснование принципиальной возможности еще не равносильно указанию рационального пути перехода от заданных функций к соответствующим уравнениям. Так как проблема перехода от функциональных зависимостей к эквивалентным уравнениям Шеннона имеет существенное значение при программировании задач для ЦИМ, то на этом вопросе следует остановиться подробнее.

Рассмотрим один из наиболее эффективных методов перехода от заданных функций к порождающим системам уравнений Шеннона. Допустим, что задана какая-либо негипертрансцендентная функция многих переменных

$$\omega = F\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, f[y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, \varphi(z_1, z_2, \dots, z_l), y_{k+1}, \dots, y_m], x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p), x_{j+1}, \dots, x_n\}, \quad (3.1)$$

представляющая собой суперпозицию более простых функций, которую необходимо представить в форме уравнений Шеннона.

Такую функцию следует прежде всего расчленить на ряд элементарных функций:

$$\begin{aligned} \omega &= F(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_i &= f(y_1, y_2, \dots, y_m), \\ y_k &= \varphi(z_1, z_2, \dots, z_l), \\ x_j &= \psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p), \end{aligned} \quad (3.2)$$

каждая из которых не поддается дальнейшему расчленению и упрощению на основе принципа суперпозиции. Затем для каждой функции из системы (3.2) необходимо составить порождающую систему уравнений Шеннона. Объединяя системы уравнений, определенные для каждой из функций (3.2), получим общую систему уравнений Шеннона, задающую исходную функцию.

Остается рассмотреть метод перехода от некоторой негипертрансцендентной функции

$$z = f(y_1, y_2, \dots, y_l), \quad (3.3)$$

не поддающейся дальнейшему расчленению на более элементарные функции, к порождающей системе уравнений Шеннона. С этой целью продифференцируем функцию (3.3)

$$dz = \sum_{i=1}^l \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i \quad (3.4)$$

и введем обозначения

$$z_i = z_i(y_1, y_2, \dots, y_l) = \frac{\partial f}{\partial y_i}, (i = 1, 2, \dots, l). \quad (3.5)$$

В результате можно написать

$$dz = \sum_{i=1}^l z_i dy_i \quad (3.6)$$

Продифференцируем далее функции $z_i = z_i(y_1, y_2, \dots, y_l), (i = 1, 2, \dots, l)$

$$dz_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right) dy_j, (i = 1, 2, \dots, l). \quad (3.7)$$

Если ввести обозначения

$$z_{ij} = z_{ij}(y_1, y_2, \dots, y_l) = \frac{\partial z_i}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right) \quad (3.8)$$

$$(i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, l),$$

то равенство (3.7) можно представить в следующем виде:

$$dz_i = \sum_{j=1}^l z_{ij} dy_j \quad (i = 1, 2, \dots, l). \quad (3.9)$$

Продолжая процесс дифференцирования z_i аналогичным образом и вводя соответствующие обозначения z_{ij} (подстановки) для возникающих при этом новых функций, получим систему дифференциальных уравнений.

По условию функция $z = f(y_1, y_2, \dots, y_l)$ негипертрансцендентна и, следовательно, удовлетворяет конечной системе уравнений Шеннона. Любая функция может удовлетворять конечной системе дифференциальных уравнений только тогда, когда при последовательном дифференцировании указанной функции, начиная с некоторого шага дифференцирования, ее высшие частные производные либо обращаются в ноль, либо содержат периодически повторяющиеся функции.

Таким образом, общая схема перехода от заданной функции к порождающей системе уравнений Шеннона состоит из следующих этапов: расчленение исходной функции с учетом суперпозиции на более простые; последовательное дифференцирование каждой простой функции (при одновременном введении новых переменных) до момента получения конечной системы уравнений Шеннона; и, наконец, определение начальных значений всех зависимых переменных, входящих в систему.

В качестве примера рассмотрим переход к системе уравнений Шеннона от функции $z = e^y \sqrt{x}$.

Пользуясь принципом суперпозиции, можно, очевидно, написать

$$z = uv; u = e^y; v = \sqrt{x}.$$

Составим для каждой из трех функций z, u, v систему уравнений Шеннона, записывая для удобства исходные функции, промежуточные значения, и конечные результаты в табл. 3.1.

Систему уравнений Шеннона можно записать в обозначениях математических величин, как это показано в третьем столбце таблицы. Однако по мере усложнения решаемых задач количество участвующих в СУШ переменных возрастает и даже для задач небольшой размерности в несколько раз превосходит число цифр латинского алфавита. Поэтому на практике удобнее оказывается использовать формализованное обозначение математических величин в форме индексной переменной y_k , как показано в четвертом столбце. Это сокращает число используемых символов для обозна-

чения переменных до одного и позволяет абстрагироваться от математического содержания задачи, уделяя больше внимания ее структуре.

Таблица 3.1

Пример перехода от функции $z = e^y \sqrt{x}$ к СУШ

Функция	Обозначения	Система диф. уравнений (СУШ)	
$z = uv,$	$y_2 = z; y_3 = u;$ $y_4 = v;$	$dy_2 = dy_5 + dy_6,$ $dy_5 = u dv,$ $dy_6 = v du,$	$dy_2 = dy_5 + dy_6,$ $dy_5 = y_3 dy_4,$ $dy_6 = y_4 dy_3,$
$u = e^y,$	$y_7 = y,$	$dy_3 = e^x dy,$	$dy_3 = y_3 dy_7,$
$v = \sqrt{x}.$	$y_1 = x,$ $y_8 = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{y_4},$ $y_9 = \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = y_8^2,$ $y_{10} = 2y_8,$ $y_{11} = 2 = Const.$	$dy_4 = \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$ $dy_8 = -\frac{1}{x} d\sqrt{x},$ $dy_9 = 2y_8 dy_8,$ $dy_{10} = 2dy_8,$ $dy_{11} = 0.$	$dy_4 = y_8 dy_1,$ $dy_8 = -y_9 dy_4,$ $dy_9 = y_{10} dy_8,$ $dy_{10} = y_{11} dy_8,$ $dy_{11} = 0.$

Для решения полученной СУШ в заданной граничной области ее необходимо дополнить вектором начальных условий: $y_{pi}(0) = y_{pi0}$, где $i = 3, 4, 8, 9, 10, 11$.

Структурная схема параллельной цифровой интегрирующей системы, воспроизводящей решение СУШ, представленной в табл.3.1, показана на рис.3.1.

4. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО СТИЛТЬЕСУ

В любой цифровой интегрирующей машине, как отмечено в первом разделе, реализуется одна из форм дифференциальных уравнений Шеннона [2], например, симметричная форма записи (1.1). Основу СУШ составляет интеграл Стилтеса (1.2), для вычисления которого используются различные формулы численного интегрирования, например, интерполяционные (1.3). Решение СУШ в ЦИМ выполняется на основе итерационных процессов либо вычислением неизвестных значений приращений (переменных) методом экстраполяции (1.5).

Особенностью оптимального по объему вычислений численного интегрирования по Стилтесу является сбалансированность частных формул численного интегрирования по порядку аппроксимирующих полиномов

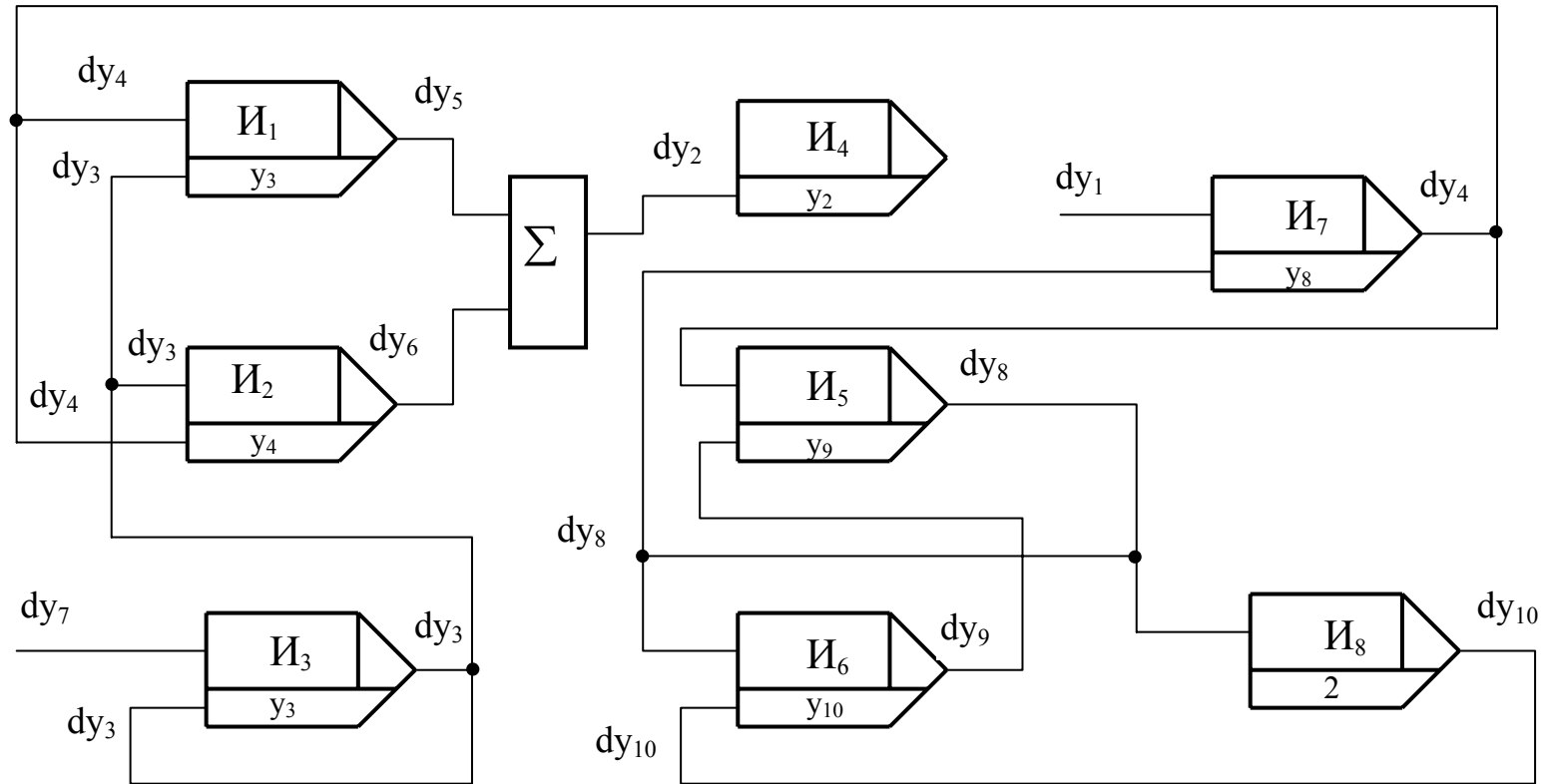


Рис. 3.1. Структурная схема параллельной цифровой интегрирующей системы, воспроизводящей решение СУИ функции $z = e^y \cdot \sqrt{x}$

Таблица 4.1

Интерполяционные формулы численного интегрирования по Стилтьесу на основе первых разностей

Порядок погрешн. n	Название формулы интегрирования	Формулы интегрирования	Формулы оценки погрешностей метода на одном шаге интегрирования
2	Формула прямоугольников	$\nabla z_{(i+1)} = y_{pi} \nabla y_{q(i+1)}$	$\nabla \mu_{i+1} = (\nabla x)^2 \left[-\frac{1}{2} y'_{p(\xi)} y'_{q(\xi)} \right]$
3	Формула трапеций	$\nabla z_{(i+1)} = y_{pi} \nabla y_{q(i+1)} + \frac{1}{2} \nabla y_{p(i+1)} \nabla y_{q(i+1)}$	$\nabla \mu_{i+1} = (\nabla x)^3 \frac{1}{12} [y''_{p(\xi)} y'_{q(\xi)} - y'_{p(\xi)} y''_{q(\xi)}]$
4	Формула квадратичных парабол	$\nabla z_{(i+1)} = y_{pi} \nabla y_{q(i+1)} + \frac{1}{2} \nabla y_{p(i+1)} \nabla y_{q(i+1)} + \frac{1}{12} [\nabla y_{pi} \nabla y_{q(i+1)} - \nabla y_{p(i+1)} \nabla y_{qi}]$	$\nabla \mu_{i+1} = (\nabla x)^4 \frac{1}{24} [y^{(3)}_{p(\xi)} y'_{q(\xi)} - y'_{p(\xi)} y^{(3)}_{q(\xi)}]$

функций y_p и y_q интеграла Стильеса (1.2), определяющих величину методической погрешности при заданном шаге интегрирования $\nabla x = h$. В табл.4.1 приведены интерполяционные формулы численного интегрирования по Стильесу на основе первых разностей и значения методических погрешностей на одном шаге интегрирования.

Порядок используемых в вычислениях формул экстраполяции должен быть таким, чтобы замена приращений (переменных) в СУШ их экстраполированными значениями не привела бы к ухудшению методической погрешности. Это достигается, когда порядок формулы экстраполяции v на единицу выше порядка формулы численного интегрирования [2]. В табл.4.2 приведены формулы экстраполяции разностей для соответствующих порядков погрешностей n (порядок погрешности n - есть показатель степени шага интегрирования Δx в формуле оценки величины методической ошибки на одном шаге, см. табл.4.1)

Таблица 4.2

Формулы экстраполяции разностей

Порядок погрешности n	Формулы экстраполяции разностей
2	$\nabla y_{i+1}^* = 2\nabla y_i - \nabla y_{i-1}$
3	$\nabla y_{i+1}^* = 3\nabla y_i - 3\nabla y_{i-1} + \nabla y_{i-2}$
4	$\nabla y_{i+1}^* = 4\nabla y_i - 6\nabla y_{i-1} + 4\nabla y_{i-2} - \nabla y_{i-3}$

5. РАЗНОСТНО-КВАНТОВАННЫЕ СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ШЕННОНА В ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

В цифровых интегрирующих системах (ЦИС) СУШ моделируется разностными схемами, предусматривающими квантование, как независимой переменной x так и всех зависимых переменных $y_k(x), y_{pk}(x), y_{qk}(x)$, ($k = 2, 3, \dots, N$) и их приращений. Фактически это значит, что во всех вычислениях, которые производятся с помощью ЦИС, приходится сталкиваться с тем обстоятельством, что переменные, участвующие в вычислениях, ограничены по модулю, представлены конечным числом разрядов и могут, следовательно, изменяться лишь постоянными скачками, равными квантам $\Delta x, \Delta y_k, \Delta y_{pk}, \Delta y_{qk}$. Квантование переменных и приращений существенно влияет на точность работы, быстродействие ЦИС и на затраты необходимого для построения цифровых интеграторов оборудования.

Для квантования переменных и приращений в ЦИС могут быть использованы различные методы [2]. В любом случае это приводит к возникновению погрешностей квантования первого и второго рода. Погрешность

квантования первого рода β_1 образуется в результате ограничения числа разрядов n и ρ представления значений переменных и приращений СУШ соответственно. Погрешность квантования второго рода β_2 образуется вследствие того, что при вычислении используются не точные, а уже квантованные величины.

Рассмотрим влияние квантования на разработку алгоритмов моделирующих решение СУШ в ЦИС с позиций сложности цифровых интеграторов и времени вычисления.

Интегралы Стилтеса вычисляются в цифровых интеграторах на основе частных формул численного интегрирования (1.3), см. табл. 4.1, с ограниченной длиной разрядной сетки переменных n и приращений ρ . Величина ρ меньше n и зависит от шага интегрирования и скорости изменения переменных. Поэтому при разработке алгоритмов ЦИС, с целью сокращения времени на обработку (и тем самым повышения быстродействия и уменьшения сложности цифровых интеграторов), необходимо предусмотреть участие в выполняемых операциях только значащих разрядов значений переменных и приращений, исключив заведомо нулевые разряды. Аналитически это достигается путем деления приращений ∇y_k на величину

кванта Δy . Относительная величина приращения $\frac{\nabla y_k}{\Delta y}$ есть целое ρ -раз-

рядное число со знаком, не содержащее незначащих, заведомо нулевых старших разрядов, дополняющих разрядную сетку приращения до n . Поскольку ρ меньше n , то это во-первых снижает аппаратные затраты цифровых интеграторов (что для параллельной системы большой размерности весьма существенно) и во-вторых сокращает на $(n - \rho)$ циклов время выполнения макрооперации интегрирования.

Из выражения квантования первого рода (5.1) [2]

$$\beta_{1i} = -s_{y0} - \sum_{j=1}^i s_{\nabla y_j}, \quad (5.1)$$

где $s_{\nabla y_j}$ -остатки, не превышающие по модулю кванта Δy ,

но в пределе могут достигать и значения кванта $|s_{\nabla y_j}| \leq \Delta y$

следует, что при непосредственном квантовании приращений погрешность квантования первого рода имеет тенденцию к накоплению и при неблагоприятных условиях на большом интервале интегрирования может стать весьма значительной, даже превысить значение переменной.

Существенно снизить погрешность квантования первого рода можно, доведя ее до величины не превышающей половины кванта на всем интервале интегрирования, если квантовать приращения с учетом остатков, по-

лученных в предыдущих шагах вычислений.

С учетом сказанного разностно-квантованная схема в относительной форме записи, моделирующая решение СУШ (1.1) в ЦИС для частной формулы численного интегрирования трапеций имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\frac{\nabla \bar{y}_{pk(i=1)}}{\Delta y} &= \sum_{j=1}^N A_{pkj} \frac{\nabla \bar{z}^{**}_{j(i+1)}}{\Delta y}, \\ \frac{\nabla \bar{y}_{qk(i=1)}}{\Delta y} &= \sum_{j=1}^N A_{qkj} \frac{\nabla \bar{z}^{**}_{j(i+1)}}{\Delta y}, \\ \bar{y}_{pki} &= \bar{y}_{pk(i-1)} + 2^{-n} \frac{\nabla \bar{y}_{pki}}{\Delta y},\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$\frac{\nabla \bar{z}_{k(i+1)}}{\Delta y} = \left(\bar{y}_{pki} + 2^{-(n+1)} \frac{\nabla \bar{y}^{**}_{pk(i+1)}}{\Delta y} \right) \frac{\nabla \bar{y}^{**}_{qk(i+1)}}{\Delta y},$$

$$\frac{\nabla \bar{z}_{k(i+1)}}{\Delta y} = P_0^{\rho} \left[\frac{\nabla \bar{z}_{k(i+1)}}{\Delta y} + \frac{Oz_{ki}}{\Delta y} + \frac{1}{2} \right]_2,$$

$$\frac{Oz_{k(i+1)}}{\Delta y} + \frac{1}{2} = P^{-n} \left[\frac{\nabla \bar{z}_{k(i+1)}}{\Delta y} + \frac{Oz_{ki}}{\Delta y} + \frac{1}{2} \right]_2,$$

$$\bar{y}_{pk}(\bar{x}_0) = \bar{y}_{pk0}; k = 2, 3, \dots, N; \bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \nabla \bar{x},$$

где $\frac{\nabla \bar{z}_{k(i+1)}}{\Delta y}$, $\frac{\nabla \bar{y}^{**}_{pk(i+1)}}{\Delta y}$, $\frac{\nabla \bar{y}^{**}_{qk(i+1)}}{\Delta y}$ - целые значения квантованных приращений интегралов, подынтегральных функций и переменных интегрирования на $(i+1)$ шаге соответственно;

$P_d^r[a]$ - функция расчленения, при помощи которой из числа a выделяется число c по r разряды включительно;

$\frac{Oz_{ki}}{\Delta y}$ - остаток, полученный при квантовании приращения интеграла на i шаге;

$\Delta y = 2^{-n}$ - квант значения подынтегральной функции \bar{y}_{ki} ;

$$\frac{\nabla \bar{z}^{**}_{j(i+1)}}{\Delta y} = \begin{cases} \frac{\nabla \bar{z}_{j(i+1)}}{\Delta y}, & \text{если } j < k, \\ \frac{\nabla \bar{z}^{*-}_{j(i+1)}}{\Delta y}, & \text{если } j \geq k. \end{cases}$$

Звездочкой обозначены проэкстраполированные значения приращений, число которых во многом определяется правильным ранжированием дифференциальных уравнений в СУШ.

6. РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЦИС

Заключается в выборе оптимальных соотношений порядков формул численного интегрирования m , экстраполяции приращений ν , самих формул, разрядности значений переменных n , приращений ρ , шага интегрирования $\Delta x \equiv h$, способа округления, обеспечивающих требуемую погрешность δ на всем интервале интегрирования заданных математических зависимостей и шаге выдачи решений H .

Общая погрешность решения задач в ЦИС на большом интервале интегрирования зависит от ошибки метода μ , квантования первого и второго рода (β_1, β_2) , инструментальной погрешности σ , трансформируемой γ (определяемой, как способом представления исходных математических зависимостей так и в последствии коммутацией цифровых интеграторов в соответствии с решаемой задачей)

$$\varepsilon = \varphi(\mu, \beta_1, \beta_2, \sigma, \gamma). \quad (6.1)$$

В этой связи аналитически выбрать не завышенные параметры ЦИС не представляется возможным.

Оценка общих погрешностей, возникающих при решении в ЦИС различных конкретных задач, в большинстве случаев производится путем интегрирования системы дифференциальных уравнений погрешностей [2] или моделированием на ЦВМ широкого применения. Однако в обоих случаях прежде необходим ориентировочный начальный выбор параметров ЦИС, которые в дальнейшем были бы уточнены.

Порядок формулы численного интегрирования m определим из условия, согласно которому предельная методическая погрешность μ при вычислении интегралов СУШ (1.1)

$$I = z_k = \int_0^{x_t} y_{pk}(x) dy_{qk}(x) = \int_0^{x_t} F(x) dx \quad (6.2)$$

не должна превышать половины предельной абсолютной ошибки вычислений ε , то есть $\sup_{\xi} |\mu_{\xi}| \leq 0,5\varepsilon; (\xi = 2, 3, \dots, k)$. Здесь $F(x)$ - некоторая эквива-

лентная функция. В общем случае $F(x) = y_p(x)y'_q(x)$. Но, учитывая, что методическая ошибка формул численного интегрирования в основном определяется скоростью изменения подынтегральной функции y_{pk} на каждом шаге интегрирования $\nabla y_{qk(i+1)}$, в качестве $F(x)$ удобно использовать хо-

рошо интегрируемую периодическую функцию, например, $\sin x_k$, имеющую предельно допустимую скорость изменения такую же, как и функция $y_{pk}(x)$ СУШ. Используя общую формулу методической погрешности на одном шаге интегрирования при вычислении интеграла Римана [2] получим

$$\begin{aligned} \sup_{\xi} |\mu_{\xi}| &= \sup_{\xi} \left| \sum_{\nu=2}^{\xi} \nabla \mu_{\nu} \right| = \\ &= \sup_{\xi} \left| (\nabla x \cdot 2\pi \cdot f)^{m+1} \cdot \sum_{\nu=2}^{\xi} b_{1(m+1)} (\sin x_t) \Big|_{x_t=x_{\nu}}^{(m+1)} \right|, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $b_{1(m+1)}$ - известные коэффициенты. Заменяя алгебраическую сумму приращений $\sum_{\nu=2}^{\xi} \nabla \mu_{\nu}$ интегралом, находим

$$\sup_t \left| (\nabla x \cdot 2\pi \cdot f)^{m+1} \cdot b_{1(m+1)} \cdot \int_0^x (\sin x_t)^{(m+1)} dx_t \right| \leq 0,5\varepsilon. \quad (6.4)$$

Если $x_t \geq 2\pi$, то ε можно представить в виде

$$\varepsilon = \delta \cdot \sup_t \left| \int_0^x \sin x_t dx_t \right| = 2\delta, \quad (6.5)$$

тогда получаем

$$(\nabla x \cdot 2\pi \cdot f)^{m+1} \cdot b_{1(m+1)} \leq \delta. \quad (6.6)$$

В этом неравенстве величины ∇x - шаг интегрирования и δ - относительная приведенная погрешность известны (или задаются исходя из требований решения задачи) f - максимальная циклическая частота эквивалентной функции синус, определяемая скоростью изменения переменных СУШ, которую требуется найти. Предположим, что каждая переменная СУШ меняется по закону синуса

$$y = |y|_{\max} \cdot \sin 2\pi \cdot f_{\vartheta} \cdot x, \quad \text{тогда} \quad y' = 2\pi \cdot f_{\vartheta} |y|_{\max} \cos 2\pi \cdot f_{\vartheta} \cdot x.$$

Приравнявая в последнем выражении $y' = |y'|_{\max}$ определим максимальное значение частоты f_{ϑ} для каждой функции. Поскольку в принятых условиях этому будет соответствовать $\cos 2\pi \cdot f_{\vartheta} \cdot x = 1$, то

$$f_{\vartheta \max} = \frac{|y'|_{\max}}{2\pi \cdot |y|_{\max}}. \quad (6.7)$$

Значения $f_{\vartheta \max}$ рассчитываются для каждой функции системы уравнений Шеннона. Так как оценочный расчет m выполняется по предельно допус-

тимым максимальным значениям, то в качестве f выбирается значение

$$f = \sup |f_{\varepsilon \max}|. \quad (6.8)$$

Порядок формулы экстраполяции системы () выбирается из условия, при котором замена переменных или приращений их экстраполированными значениями не привела бы к существенному увеличению приращения методической ошибки. Оно выполняется, если

$$\left| \nabla \mu_{pq(i+1)}^* \right| \leq \left| \nabla \mu_{pq(i+1)} \right|. \quad (6.9)$$

Неравенство (6.9) соблюдается, когда порядок малости величины h^{v+1} , входящей в качестве коэффициента в выражение для $\nabla \mu_{pq(i+1)}^*$, выше или равен порядку малости коэффициента h^{m+1} формулы методической погрешности $\nabla \mu_{pq(i+1)}$ [2]:

$$v + 1 \geq m + 2, \quad (6.10)$$

откуда $v = 2$. Формулы экстраполяции, представленные в табл.4.2, приведены с учетом неравенства (6.10).

Оценка погрешностей квантования для различных формул численного интегрирования показывает, что условие

$$\sup_{\xi} |\beta_{1\xi}| \leq 0,5\delta (\xi = 2, 3, \dots, k) \quad (6.11)$$

при принятых алгоритмах численного интегрирования и экстраполяции выполняется, если

$$n \geq \text{ent} \left[\log_2 \delta^{-1} \right] + 1. \quad (6.12)$$

Число разрядов ρ приращений $\frac{\nabla \bar{z}_{k(i+1)}}{\Delta y}$, $\frac{\nabla \bar{y}^{**}_{pk(i+1)}}{\Delta y}$, $\frac{\nabla \bar{y}^{**}_{qk(i+1)}}{\Delta y}$ зависит от шага интегрирования ∇x , предельных скоростей и значений изменения переменных СУШ, согласно которым

$$\left| \frac{\nabla y_i}{\Delta y} \right|_{\max} = \left| \frac{dy_i}{dx} \right|_{\max} \cdot \frac{\nabla x}{\Delta y} \ll \left| \frac{y_i}{\Delta y} \right|_{\max}. \quad (6.13)$$

Зная предельную величину относительного приращения $\left| \frac{\nabla y_i}{\Delta y} \right|_{\max}$,

значение ρ можно определить по формуле

$$\rho \geq \text{ent} \left[\log_2 \left| \frac{dy_i}{dx} \right|_{\max} \cdot \frac{\nabla x}{\Delta y} \right] + 1. \quad (6.14)$$

Найденные значения параметров ЦИС позволяют также приближенно оценить время выполнения основных операций интегрирования и экстраполяции: $t_{\text{инт.}} \approx 0,9 \cdot t_{\text{умн.}}, t_{\varepsilon} \approx 3 \cdot t_{\text{сл.}}$.

7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

В заданиях предлагается самостоятельно синтезировать, рассчитать параметры и провести исследования параллельной цифровой интегрирующей системы (ЦИС), реализующей одну из приведенных в табл.7.1 функций.

Таблица 7.1

Варианты исходных данных для самостоятельного выполнения

Номер варианта	Реализуемая функция	Параметры			
	$y = A \cdot \sin 2\pi ft$	A	f (Гц)	δ	
1		10	35	10^{-6}	
2		50	48	10^{-5}	
3		100	60	10^{-4}	
4		68	33	10^{-7}	
5		220	50	10^{-5}	
6		150	28	10^{-6}	
7		75	40	10^{-5}	
8		130	53	10^{-4}	
9	99	38	10^{-6}		
	$y = \frac{A \cdot \sin \omega_1 t}{\cos \omega_2 t}$	A	f_1 (Гц)	f_2 (Гц)	δ
10		100	25	55	10^{-3}
11		120	30	50	10^{-4}
12		140	35	45	10^{-5}
13		160	40	40	10^{-6}
14		180	45	35	10^{-7}
15		200	50	30	10^{-5}
16		220	55	25	10^{-6}
	$y = \sqrt[3]{\cos \omega t}$	f (Гц)		δ	
17		30		10^{-6}	
18		35		10^{-7}	
19		40		10^{-5}	
20	50		10^{-6}		
21	$y = \operatorname{tg} x - z$	$\delta = 10^{-6}$			
	$y = \frac{1}{\sqrt{ax^2 - b}}$	a	b	δ	
22		5	20	10^{-4}	
23		10	30	10^{-5}	
24		15	40	10^{-6}	
25		20	50	10^{-7}	
26		25	60	10^{-5}	
27		30	70	10^{-6}	
28		35	80	10^{-5}	
29		40	90	10^{-6}	
30		45	100	10^{-5}	

7.1. Задание № 1

Цель: Знакомство с методами решения задач в цифровых интегрирующих системах, методами перехода от исходных математических зависимостей к системам дифференциальных уравнений Шеннона, с особенностями структуры цифровых интеграторов, использующих различные формулы численного интегрирования, методиками расчета параметров ЦИС.

Порядок выполнения

Для заданной функции см. табл.7.1 провести ее исследование, составить СУШ в симметричной форме записи и структурную схему параллельной ЦИС, моделирующей ее решение в соответствии с изложенной методикой.

Выполнить оценочные расчеты параметров ЦИС: шага интегрирования, разрядностей переменных и приращений для формул численного интегрирования прямоугольников ($m = 0$) и трапеций ($m = 1$), удовлетворяющих требованиям вычисления функции.

Произвести сравнительные оценки характеристик параллельных ЦИС для симметричной и несимметричной форм записи СУШ.

Представление результатов

Результаты предлагается представить в форме отчета, в котором отразить:

1) Результаты исследования решаемых математических зависимостей: области определения, характер четности, периодичность, точки разрыва и пределы в них, точки пересечения графика функций с осями координат, экстремумы и интервалы возрастания/убывания, точки перегиба и интервалы выпуклости/вогнутости, асимптоты поведения функции на концах области определения, график функции.

2) Систему дифференциальных уравнений Шеннона с начальными условиями.

3) Структурную схему параллельной интегрирующей системы воспроизведения заданной математической зависимости.

4) Расчет параметров ЦИС.

Контрольные вопросы

- 1) Какие функции можно воспроизводить в ЦИС?
- 2) Чем отличается симметричная форма записи СУШ от несимметричной?

- 3) Как форма записи СУШ влияет на структуру параллельной ЦИС?
- 4) В чем отличие интеграла Стилтеса от интеграла Римана?
- 5) Можно ли интеграл Стилтеса привести к интегралу Римана? Если можно, то как?
- 6) Какой интеграл используется при интегрировании СУШ? Как это влияет на число реализуемых в ЦИС операций?
- 7) Какой набор операций реализуется в ЦИС?

7.2. Задание № 2

Цель: Знакомство с математическими основами реализации ЦИС и структурно-математическими методами моделирования параллельных ЦИС.

Порядок выполнения

- 1) Выполнить ранжирование СУШ, с целью минимизации числа величин подлежащих экстраполяции.
- 2) Составить алгоритмы и структурные схемы функциональных блоков ЦИС: цифровых интеграторов, реализующих формулы численного интегрирования $m = 0$ и $m = 1$, экстраполяторов приращений, реализующих формулы экстраполяции приращений $v = m + 1$.
- 3) Составить алгоритм работы параллельных ЦИС (разностно-квантованную СУШ в относительной форме записи) для моделируемой математической зависимости.
- 4) Составить структурную схему моделирования параллельной ЦИС на ПЭВМ.
- 5) Написать и отладить программу моделирования параллельной ЦИС на ПЭВМ.
- 6) Моделируя процесс решения, получить графики изменения заданной функции арифметико-логическими методами (эталонное решение) и на модели параллельной ЦИС.
- 7) Определить шаг интегрирования h для $m = 0$ и $m = 1$, обеспечивающий заданную погрешность вычисления δ на интервале решения.

Оформление результатов

Результаты задания предлагается оформить в виде отчета, где последовательно отразить все пункты выполненной работы.

Контрольные вопросы

- 1) Что такое экстраполяция переменных и приращений?
- 2) В каких случаях формулы экстраполяции используются в моделях параллельных ЦИС?
- 3) Нужны ли экстраполяторы в параллельных ЦИС?
- 4) В чем физическое отличие разностных СУЩ, разностно-квантованных и разностно-квантованных в относительной форме записи?
- 5) Будут ли аппаратные отличия параллельной ЦИС и системы построенной путем замены функциональных блоков модели параллельной ЦИС аппаратными модулями?

7.3. Задание № 3

Цель: Исследование характеристик ЦИС. Исследование влияния порядка формулы численного интегрирования m на погрешность δ при постоянном шаге интегрирования h .

Порядок выполнения

Используя модель параллельной ЦИС, полученной в лабораторной работе № 2, провести исследования зависимости погрешности решения на некотором интервале СУЩ, указанной в задании функции, от порядка используемых формул численного интегрирования. Исследования проводятся путем расчета и построения на ЭВМ графиков погрешности δ на некотором интервале от порядка формул численного интегрирования $m = 0$ и $m = 1$ для $h_i = \text{Const}$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Определить величину влияния методической погрешности на общую погрешность решения. Сделать выводы по каждому проведенному исследованию, а также по области устойчивой работы параллельной ЦИС относительно m и h при заданной погрешности δ и степени влияния m на δ в исследуемом диапазоне h .

Содержание отчета

В отчете должны быть приведены все полученные по результатам проведенных исследований графики погрешностей и обоснованные выводы.

Контрольные вопросы

- 1) Во сколько раз уменьшается погрешность метода при переходе от формулы численного интегрирования прямоугольников к формуле трапе-

ций на шаге интегрирования, на интервале решения?

2) При каком соотношении шага интегрирования h_0 и h_1 формулы численного интегрирования $m = 0$ и $m = 1$ будут эквивалентны по точности?

3) Возрастет или уменьшится время вычисления заданной математической зависимости на шаге решения, на интервале при $\delta = \text{Const}$?

4) Во сколько раз изменится быстродействие и аппаратные затраты при решении вашей задачи в ЦИС с одноразрядными по $\frac{\nabla y_{qk(i+1)}}{\Delta y}$ или многоразрядными приращениями?

7.4. Задание № 4

Цель: Исследование характеристик ЦИС. Исследование влияния шага интегрирования h на погрешность δ для формул численного интегрирования $m = 0$ и $m = 1$. Оценка влияния величины трансформированной погрешности и погрешности квантования на результат решения.

Порядок выполнения

Используя модель параллельной ЦИС, полученной в лабораторной работе №2, провести исследования зависимости погрешности решения СУШ на выбранном интервале вычисления функции, от шага интегрирования для частных формул численного интегрирования: $m = 0$ и $m = 1$. Исследования проводятся путем расчета и построения на ЭВМ графиков погрешности δ решения СУШ на интервале от шага интегрирования h для $m = 0$ и $m = 1$. Определить границы и степень влияния шага интегрирования на методическую погрешность вычисления, как составляющей общей погрешности решения. Сделать выводы по каждому проведенному исследованию.

Содержание отчета

В отчете должны быть приведены все полученные по результатам проведенных исследований графики погрешностей и обоснованные выводы.

Контрольные вопросы

1) Во сколько раз должна измениться величина методической погрешности формулы численного интегрирования при увеличении (уменьшении) шага интегрирования в четыре раза для формул прямоугольников,

трапеций, парабол (квадратичных, кубических)?

2) В каком случае уменьшение шага интегрирования уменьшает погрешность вычисления в ЦИС?

3) Какие составляющие общей погрешности вычисления зависят от шага интегрирования?

4) Что эффективнее по затратам оборудования в вашем варианте для уменьшения времени решения на интервале с заданной погрешностью: использовать более простую формулу численного интегрирования при малом шаге интегрирования или формулу высокого порядка при большем шаге интегрирования?

8. ПРОГРАММА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИС

Ниже приведен листинг программы имитирующей работу ЦИС для математической зависимости $y = \frac{1}{\sqrt{ax^2 - b}}$. Программа обеспечивает вывод

на экран пяти графиков функций: график эталонного вычисления математической зависимости на ПЭВМ арифметико-логическими методами, график вычисления математической зависимости на модели ЦИС с использованием метода численного интегрирования - прямоугольников, график вычисления математической зависимости на модели ЦИС с использованием метода численного интегрирования - трапеций и два графика ошибок для каждого из методов.

```
#include <graphics.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>

float f (float x);
int init ();

int x0 = 59; // x0, y0 - координаты
int y0 = 450; // начало координат в пикселах
float xn = 1; // начальное значение x
float xm = 20; // максимальное значение x
float hx = xm / (637 - x0); // изменение x при шаге в один пиксел
float hy = f (xn) / (y0 - 2); // среднее изменение y при шаге в
    один пиксел
```

```

int main() {
    if (init () == 1) exit (1);

    // Блок переменных для образца
    float sx1 = x0 + xn/hx; // вычисляем пиксел, соответст-
    вующий xn
    float sy1 = y0 - f (xn)/hy;
    float sx2 = sx1 + 1; // вычисляем пиксел, соответствующий
    xn + hx
    float sy2 = y0 - f (xn + hx)/hy;

    // Блок переменных для прямоугольников
    float ry = f (xn);
    float ry1 = y0 - ry/hy;
    float ry11 = 60*xn;
    float ry4 = -ry*ry;
    float ry9 = ry4/2;
    float ry8 = 1/(2*sqrt (30*xn - 25));
    float ry5 = -2*ry;
    float rdy11 = 60*hx;
    float rdy7 = rdy11*hx;
    float rdy3 = ry8*rdy7;
    float rdy = ry4*rdy3;
    float rdy4 = ry5*rdy;

    // Блок переменных для трапеций
    float ty = f (xn);
    float ty1 = y0 - ty/hy;
    float ty11 = 60*xn;
    float ty4 = -ty*ty;
    float ty9 = ty4/2;
    float ty8 = 1/(2*sqrt (30*xn - 25));
    float ty5 = -2*ty;
    float tdy11 = 60*hx;
    float tdy7 = tdy11*hx;
    float tdy3 = ty8*tdy7;
    float tdy = ty4*tdy3;
    float tdy4 = ty5*tdy;

    // Блок переменных для ошибки по прямоугольникам
    float erry1 = y0 - fabs (ry1 - sy1);

```

```

// Блок переменных для ошибки по трапециям
float erty1 = y0 - fabs (ty1 - sy1);

for (int i = 2; sx2 <= 638; i++) {
  // Блок построения образца
  setcolor (LIGHTBLUE);
  line (sx1, sy1, sx2, sy2); //чертим первый отрезок, соответствующий//точкам (xn; f (xn)), (xn + hx; f (xn + hx))

  // Блок построения по прямоугольникам
  setcolor (MAGENTA);
  ry11 += rdy11;
  rdy7 = ry11*hx;
  float rdy9 = rdy4/2;
  ry9 += rdy9;
  float rdy8 = ry9*rdy3;
  ry8 += rdy8;
  float rdy5 = -2*rdy;
  ry5 += rdy5;
  rdy4 = ry5*rdy;
  ry4 += rdy4;
  rdy3 = ry8*rdy7;
  float rdy = ry4*rdy3;
  ry += rdy;
  int ry2 = y0 - ry/hy; // Собственно построение
  line (sx1, ry1, sx2, ry2);

  // Блок построения ошибки прямоугольников
  setcolor (LIGHTCYAN);
  float erry2 = y0 - fabs (ry2 - sy2);
  line (sx1, erry1, sx2, erry2);
  ry1 = ry2;
  erry1 = erry2;

  // Блок построения по трапециям
  setcolor (GREEN);
  ty11 += tdy11;
  tdy7 = (ty11 + tdy11/2)*hx;
  float tdy9 = tdy4/2;
  ty9 += tdy9;
  float tdy8 = (ty9 + tdy9/2)*tdy3;
  ty8 += tdy8;

```

```

float tdy5 = -2*tdy;
ty5 += tdy5;
tdy4 = (ty5 + tdy5/2)*tdy;
ty4 += tdy4;
tdy3 = (ty8 + tdy8/2)*tdy7;
tdy = (ty4 + tdy4/2)*tdy3;
ty += tdy;
int ty2 = y0 - ty/hy; // Собственно построение
line (sx1, ty1, sx2, ty2);

// Блок построения ошибки по трапециям
setcolor (YELLOW);
float erty2 = y0 - fabs (ty2 - sy2);
line (sx1, erty1, sx2, erty2);
ty1 = ty2;
erty1 = erty2;

sx1 += 1; // сдвигаем "экранные иксы"
sx2 += 1;
sy1 = sy2; // сдвигаем "экранный y" образца
sy2 = y0 - f (xn + i*hx)/hy; // вычисляем следующий y
образца, соответствующий значению f от (текущего x плюс hx)
}

getch ();
return (0);
}

float f (float x) {
return 1/sqrt(30*x*x-25);
}

int init () {
/* request auto detection */
int gdriver = DETECT, gmode, errorcode;

/* initialize graphics mode */
initgraph (&gdriver, &gmode, "f:\\bc\\bgi");

/* read result of initialization */
errorcode = graphresult ();

```

```

if (errorcode != grOk) { /* an error occurred */
    printf ("Graphics error: %s\n", grapher-
rormsg(errorcode));
    printf ("Press any key to halt:");
    getch ();
    return (1);          /* return with error code
*/
}

```

```

setcolor (LIGHTGRAY);
// чертим оси координат
line (x0, y0, x0, 0);
line (x0, y0, x0, 450);
line (x0, y0, 59, y0);
line (x0, y0, 639, y0);

```

```

setcolor (WHITE);
// рисуем стрелочки
line (630, y0 - 2, 639, y0); // на оси Ox
line (630, y0 + 2, 639, y0);
line (x0 - 2, 9, x0, 0); // на оси Oy
line (x0 + 2, 9, x0, 0);
// проставляем координатные отрезки на оси Ox
outtextxy (x0 - 10, y0 + 5, "0");
outtextxy (632, y0 + 5, "x");
char *buf;

```

```

for (int i = 1; i <= 9; i++) {
    line (x0 + (639 - x0)*i/10, y0, x0 + (639 -
x0)*i/10, y0 + 4);
    outtextxy (x0 + (639 - x0)*i/10, y0 + 5, gcvt
(xm*i/10, 2, buf));
}
// проставляем координатные отрезки на оси Oy
outtextxy (x0 - 10, 0, "y");
for (i = 1; i <= 9; i++) {
    line (x0, y0 - y0*i/10, x0 - 4, y0 - y0*i/10);
    outtextxy (x0 - 59, y0 - y0*i/10, gcvt (f
(xm)*i/10, 2, buf));
}

```

```

setcolor (LIGHTRED);
// чертим асимптоту
line (x0 + sqrt (5.0/6)/hx, 0, x0 + sqrt (5.0/6)/hx,
450);

// рисуем пояснения
setcolor (MAGENTA);
line (514, 3, 543, 3);
outtextxy (545, 0, " - rect");
setcolor (GREEN);
line (514, 13, 543, 13);
outtextxy (545, 10, " - trap");
setcolor (LIGHTBLUE);
line (514, 23, 543, 23);
outtextxy (545, 20, " - smpl");
setcolor (LIGHTCYAN);
line (514, 33, 543, 33);
outtextxy (545, 30, " - err rect");
setcolor (YELLOW);
line (514, 43, 543, 43);
outtextxy (545, 40, " - err trap");

return (0);
}

```

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностранной лит., 1963.
2. Каляев А. В. Теория интегрирующих машин и структур. М.: Сов. радио, 1970.
3. Пьявченко О. Н. Интерполяционные цифровые интегрирующие машины параллельного типа с многоразрядными приращениями // Кибернетика. 1965. № 2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ ЦИФ- РОВЫХ ИНТЕГРИРУЮЩИХ МАШИН.....	4
2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ И СТРУКТУРА ЦИФРОВЫХ ИНТЕГРИРУЮ- ЩИХ МАШИН.....	7
3 ПЕРЕХОД ОТ ФУНКЦИЙ К ПОРОЖДАЮЩИМ УРАВНЕНИЯМ ШЕННОНА.....	8
4. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО СТИЛТЬЕСУ..	11
5. РАЗНОСТНО-КВАНТОВАННЫЕ СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ШЕННОНА В ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ ЗАПИ- СИ.....	14
6. РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЦИС.....	17
7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ.....	20
7.1. Задание № 1.....	21
7.2. Задание № 2.....	22
7.3. Задание № 3.....	23
7.4. Задание № 4.....	24
8. ПРОГРАММА МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИС.....	25
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	30