Министерство образования российской федерации
Владимирский государственный университет

Шмелев В.Е., Сбитнев С.А.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Учебное пособие

Владимир 2003

УДК 537.8 (07)
Ш 72

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики
Владимирского государственного педагогического университета
К.А. Потехин

Доктор технических наук, главный конструктор
ОАО «Научно-производственное объединение “Магнетон”»
Е.В. Сидоров

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Шмелев В.Е., Сбитнев С.А.
Ш72 Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля: Учеб. пособие / Владим. гос. ун-т. Владимир, 2003. 88 с.
ISBN

Рассмотрены основные понятия теории электромагнитного поля, определены важнейшие векторы этого поля, его источники; а также используемые дифференциальные операторы; рассмотрены основные законы электромагнитного поля в интегральной и дифференциальной формах, описаны электрофизические свойства различных сред, даны соотношения для энергии поля, рассмотрены граничные условия для векторов поля, дана современная трактовка теоремы Умова-Пойнтинга. Детально рассмотрены частные виды электромагнитных полей: электростатическое, электрическое поле постоянного тока, магнитостатическое, переменное гармоническое электромагнитное поле, а также общие и отличительные свойства этих полей, классические и современные методы их расчета; различные технические приложения теории электромагнитного поля.

Предназначено для студентов электроэнергетических и электротехнических специальностей.

Ил 21. Табл 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 537.8 (07)

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Электротехническая наука развивалась несколько столетий и особенно интенсивно в 20-м столетии, которое без преувеличения можно назвать веком электричества. В настоящее время электричество как форма энергии проникло во все сферы современной жизни: промышленность, транспорт, сельское хозяйство, жилищно-коммунальную сферу, информационные системы. Быт современного человека невозможно представить без разнообразных электрических и электронных устройств, приборов и систем. Разработка и производство названной техники сопровождались развитием теоретической базы электротехники, и на этой основе создавались совершенные экономичные и надежные электротехнические элементы и системы.

В 20-м столетии широкое применение электрической энергии позволило во многом изменить условия физического и умственного труда многих миллионов людей. Созданы разнообразные электротехнические устройства, например электродвигатели различных типов, которые в материальном производстве способствовали замене тяжелого малопроизводительного ручного труда более производительным механизированным трудом. Во второй половине 20-го столетия стала интенсивно развиваться вычислительная техника, использующая уникальные свойства электрической энергии. Она позволила облегчить рутинную составляющую умственного труда, сделала возможным решение множества прикладных и фундаментальных проблем, бывших ранее неразрешимыми. Одновременно с созданием все более совершенной вычислительной техники развивается соответствующее программное обеспечение, что дает инженерам и ученым уникальные возможности для решения новых, все более сложных электротехнических проблем.

К сожалению, последнее десятилетие 20-го века в России характеризовалось негативными тенденциями в образовании и науке. В частности, заметно уменьшилось количество новых учебников и учебных пособий по техническим наукам, в том числе в области теоретической электротехники. Учебники 70 – 80-х годов не содержат новых знаний по электротехнике, не отражают возросшие возможности вычислительной техники и программного обеспечения. Это не способствует обучению студентов современным численным методам расчета электрических и магнитных цепей и особенно электромагнитных полей. Такое отставание в методическом обеспечении ведет к тому, что выпускники вузов не смогут создавать современную конкурентоспособную электротехническую продукцию, не смогут обеспечить высокий технический и экономический уровень электроэнергетики.

Названные выше причины побудили авторов к написанию данного учебного пособия по теории электромагнитного поля, котором значительное внимание уделено постановке общих краевых задач и современным методам расчета статических и стационарных электромагнитных полей. В пособии приведены более строгие определения основных векторов электромагнитного поля, даны современные варианты уравнений материальной связи между векторами поля. Дана современная трактовка теоремы Умова-Пойнтинга, учитывающая роль сторонних источников. Приведены и другие уточнения, отражающие современный уровень теории электромагнитного поля. Эти новации, по мнению авторов, будут способствовать улучшению электротехнической подготовки студентов электротехнических и электроэнергетических специальностей.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1.1. Определение электромагнитного поля и его физических величин. Математический аппарат теории электромагнитного поля

Электромагнитным полем (ЭМП) называется вид материи, оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие и определяемый во всех точках двумя парами векторных величин, которые характеризуют две его стороны – электрическое и магнитное поля.

Электрическое поле – это составляющая ЭМП, которая характеризуется воздействием на электрически заряженную частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и не зависящей от ее скорости.

Магнитное поле – это составляющая ЭМП, которая характеризуется воздействием на движущуюся частицу с силой, пропорциональной заряду частицы и ее скорости.

Изучаемые в курсе теоретических основ электротехники основные свойства и методы расчета ЭМП предполагают качественное и количественное исследование ЭМП, встречающихся в электротехнических, радиоэлектронных и биомедицинских устройствах. Для этого наиболее пригодны уравнения электродинамики в интегральной и дифференциальной формах.

Математический аппарат теории электромагнитного поля (ТЭМП) базируется на теории скалярного поля, векторном и тензорном анализе, а также дифференциальном и интегральном исчислении.

Контрольные вопросы

1. Что такое электромагнитное поле?
2. Что называют электрическим и магнитным полем?
3. На чём базируется математический аппарат теории электромагнитного поля?

§ 1.2. Физические величины, характеризующие электромагнитное поле

Вектором напряженности электрического поля в точке Q называется вектор силы, действующей на электрически заряженную неподвижную частицу, помещенную в точку Q, если эта частица имеет единичный положительный заряд.

В соответствии с этим определением электрическая сила $\boldsymbol{F}_э$, действующая на точечный заряд q, равна:

$$\boldsymbol{F}_э = q\boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{E}$ – вектор напряженности электромагнитного поля, В/м.

Магнитное поле характеризуется *вектором магнитной индукции*. Магнитная индукция $\boldsymbol{B}$ в некоторой точке наблюдения Q – это векторная величина, модуль которой равен магнитной силе, действующей на заряженную частицу, находящуюся в точке Q, имеющую единичный заряд и движущуюся с единичной скоростью, причем векторы силы, скорости, магнитной индукции, а также заряд частицы удовлетворяют условию

$$\boldsymbol{F}_м = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},$$

где $\boldsymbol{F}_м$ – вектор магнитной силы, действующей на заряженную частицу;

q – заряд частицы;

$\boldsymbol{v}$ – скорость движения частицы.

Магнитная сила, действующая на криволинейный проводник с током I может быть определена по формуле

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_м = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B},$$

На прямолинейный проводник, если он находится в однородном поле, действует следующая магнитная сила:

$$\boldsymbol{F}_м = I\,\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}.$$

где l – кривая в пространстве, занятая проводником.

Во всех последних формулах $\boldsymbol{B}$ – магнитная индукция, которая измеряется в теслах (Тл).

1 Тл – это такая магнитная индукция, при которой на прямолинейный проводник с током 1А действует магнитная сила, равная 1Н, если линии магнитной индукции направлены перпендикулярно проводнику с током и если длина проводника равна 1м.

Кроме напряженности электрического поля и магнитной индукции в теории электромагнитного поля рассматриваются следующие векторные величины:

1) электрическая индукция $\boldsymbol{D}$ (электрическое смещение), Кл/м^2;
2) напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$, А/м.

Векторы ЭМП являются функциями пространства и времени:

$$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B} = f(Q, t),$$

где Q – точка наблюдения; t – момент времени.

Если точка наблюдения Q находится в вакууме, то между соответствующими парами векторных величин имеют место следующие соотношения:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H},$$

где ε_0 – абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума (основная электрическая постоянная), $\varepsilon_0 = 8{,}85419\cdot10^{-12}$ Ф/м;
μ_0 – абсолютная магнитная проницаемость вакуума (основная магнитная постоянная); $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

Контрольные вопросы

1. Что такое напряжённость электрического поля?
2. Что называют магнитной индукцией?
3. Чему равна магнитная сила, действующая на движущуюся заряженную частицу?
4. Чему равна магнитная сила, действующая на проводник с током?
5. Какими векторными величинами характеризуется электрическое поле?
6. Какими векторными величинами характеризуется магнитное поле?

§ 1.3. Источники электромагнитного поля

Источниками ЭМП являются электрические заряды, электрические диполи, движущиеся электрические заряды, электрические токи, магнитные диполи.

Понятия электрического заряда и электрического тока даны в курсе физики. Электрические токи бывают трех типов:

1. Токи проводимости.
2. Токи смещения.
3. Токи переноса.

Ток проводимости $i_{пр}$ – скорость прохождения подвижных зарядов электропроводящего тела через некоторую поверхность:

$$i_{пр} = \frac{dq}{dt}.$$

Ток смещения $i_{см}$ – скорость изменения потока вектора электрического смещения через некоторую поверхность:

$$i_{см} = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} d\,S.$$

Ток переноса $i_{пр}$ характеризуется следующим выражением:

$$i_{пер} = \frac{dq}{dn} v\boldsymbol{n} = \int_S \rho v \, dS,$$

где v – скорость переноса тел через поверхность S; ρ – удельная объемная плотность тока переноса.

Электрическим диполем называется пара точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на расстоянии l друг от друга (рис. 1):

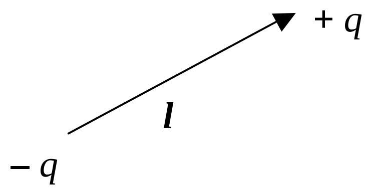

Рис. 1

Точечный электрический диполь характеризуется вектором электрического дипольного момента $\boldsymbol{P}_э$:

$$\boldsymbol{P}_э = q\boldsymbol{l}.$$

Магнитным диполем называется плоский контур с электрическим током I. Магнитный диполь характеризуется вектором магнитного дипольного момента $\boldsymbol{P}_м = I\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S}$ – вектор площади плоской поверхности, натянутой на контур с током. Вектор $\boldsymbol{S}$ направлен перпендикулярно этой плоской поверхности, причем если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{S}$, то движение по контуру в направлении, совпадающем с направлением тока, будет происходить против часовой стрелки. Это означает, что направление вектора дипольного магнитного момента связано с направлением тока по правилу правого винта.

Атомы и молекулы вещества представляют собой электрические и магнитные диполи, поэтому каждую точку вещественного типа в ЭМП можно характеризовать объемной плотностью электрического и магнитного дипольного момента:

$\boldsymbol{P}$ – электрическая поляризованность вещества:

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{d}\boldsymbol{P}_{э}/\mathrm{d}V,$$

$\boldsymbol{M}$ – намагниченность вещества:

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{d}\boldsymbol{P}_{м}/\mathrm{d}V.$$

Электрическая поляризованность вещества – это векторная величина, равная объемной плотности электрического дипольного момента в некоторой точке вещественного тела.

Намагниченность вещества – это векторная величина, равная объемной плотности магнитного дипольного момента в некоторой точке вещественного тела.

Электрическое смещение $\boldsymbol{D}$ – это векторная величина, которая для любой точки наблюдения вне зависимости от того, находится ли она в вакууме или в веществе, определяется из соотношений:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \text{ (для вещества)},$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} \text{ (для вакуума)}.$$

Напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ – векторная величина, которая для любой точки наблюдения вне зависимости от того, находится ли она в вакууме или в веществе, определяется из соотношения

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{M},$$

где напряженность магнитного поля измеряется в амперах на метр.

Кроме поляризованности и намагниченности существуют другие объемно–распределенные источники ЭМП:

– *объемная плотность электрического заряда* $\rho = \mathrm{d}q/\mathrm{d}V$; $q = \int\limits_V \rho\,\mathrm{d}V$,

где объемная плотность электрического заряда измеряется в кулонах на кубический метр;

– *вектор плотности электрического тока*, нормальная составляющая которого равна

$$\delta_n = \mathrm{d}I/\mathrm{d}S.$$

В более общем случае ток, протекающий через незамкнутую поверхность S, равен потоку вектора плотности тока через эту поверхность:

$$I = \int_S \boldsymbol{\delta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

где вектор плотности электрического тока измеряется в амперах на квадратный метр.

Контрольные вопросы

1. Каковы источники электромагнитного поля?
2. Что такое ток проводимости?
3. Что такое ток смещения?
4. Что такое ток переноса?
5. Что такое электрический диполь и электрический дипольный момент?
6. Что такое магнитный диполь и магнитный дипольный момент?
7. Что называют электрической поляризованностью и намагниченностью вещества?
8. Что называется электрическим смещением?
9. Что называется напряжённостью магнитного поля?
10. Что такое объёмная плотность электрического заряда и плотность тока?

§ 1.4. Пространственные дифференциальные операторы в теории электромагнитного поля

Градиентом скалярного поля $\Phi(Q)=\Phi(x, y, z)$ называется векторное поле, определяемое формулой:

$$\operatorname{grad}\Phi(Q)=\nabla\Phi = \lim_{\delta\to 0}\frac{\oint_{S_1}\Phi(Q_1)\,\mathrm{d}S}{\int_{V_1}\mathrm{d}V}.$$

где V_1 – область, содержащая точку Q; S_1 – замкнутая поверхность, ограничивающая область V_1; Q_1 – точка, принадлежащая поверхности S_1; δ – наибольшее расстояние от точки Q до точек на поверхности S_1 ($\max|Q\,Q_1|$).

Дивергенцией векторного поля $\boldsymbol{F}(Q) = \boldsymbol{F}(x, y, z)$ называется скалярное поле, определяемое по формуле:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla F = \lim_{\delta\to 0} \frac{\int\limits_{S_1} \boldsymbol{F}(Q_1)\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{S}}{\int\limits_{V_1} \mathrm{d}V}.$$

Ротором (вихрем) векторного поля $\boldsymbol{F}(Q)$=$\boldsymbol{F}(x, y, z)$ называется векторное поле, определяемое по формуле:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\int\limits_{\boldsymbol{S}_1} \mathrm{d}\,\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{F}(Q_1)}{\int\limits_{V_1} \mathrm{d}V}.$$

Оператор набла ∇ – это векторный дифференциальный оператор, который в декартовых координатах определяется формулой:

$$\nabla \equiv \mathbf{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Представим grad, div и rot через оператор набла:

$$\operatorname{grad} \Phi \equiv \nabla \Phi;\ \operatorname{div} \boldsymbol{F} \equiv \nabla \boldsymbol{F};\ \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \equiv \nabla\times\boldsymbol{F}.$$

Запишем эти операторы в декартовых координатах:

$$\nabla \Phi = \mathbf{1}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{1}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{1}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}; \qquad \nabla \boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z};$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \mathbf{1}_x\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial z}\right) + \mathbf{1}_y\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial z} - \frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial x}\right) + \mathbf{1}_z\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial y}\right);$$

$$(\boldsymbol{G}\nabla)\Phi = \boldsymbol{G}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \boldsymbol{G}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \boldsymbol{G}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z};$$

$$(\boldsymbol{G}\nabla)\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}_x \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \boldsymbol{G}_y \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} + \boldsymbol{G}_z \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z} = \mathbf{1}_x(\boldsymbol{G}\nabla)F_x + \mathbf{1}_y(\boldsymbol{G}\nabla)F_y + \mathbf{1}_z(\boldsymbol{G}\nabla)F_z.$$

Оператор Лапласа в декартовых координатах определяется формулой

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Дифференциальные операторы второго порядка:

div grad Φ = $\nabla^2\Phi$; grad div $\boldsymbol{F} = \nabla^2\boldsymbol{F}$ + rot rot $\boldsymbol{F}$;

rot grad Φ = 0; div rot $\boldsymbol{F} = 0$.

Интегральные теоремы

Теорема о градиенте $\qquad \int\limits_V \operatorname{grad}\Phi \mathrm{d}V = \oint\limits_{\boldsymbol{S}} \Phi \mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

Теорема о дивергенции $\qquad \int\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \oint\limits_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

Теоремы о роторе $\qquad \int\limits_{\boldsymbol{S}} \operatorname{rot}\boldsymbol{F} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint\limits_{l} \boldsymbol{F} \mathrm{d}l$;

$$\int\limits_V \operatorname{rot}\boldsymbol{F} \mathrm{d}V = \oint\limits_{\boldsymbol{S}} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{F} .$$

В теории ЭМП применяется также ещё одна из интегральных теорем:

$$\oint\limits_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{S}) = \int\limits_V (\boldsymbol{G}\nabla)\boldsymbol{F} \mathrm{d}V + \int\limits_V \boldsymbol{F} \operatorname{div}\boldsymbol{G} \mathrm{d}V .$$

Контрольные вопросы

1. Что называется градиентом скалярного поля?
2. Что называется дивергенцией векторного поля?
3. Что называется ротором векторного поля?
4. Что такое оператор набла и как через него выражаются дифференциальные операторы первого порядка?
5. Какие интегральные теоремы справедливы для скалярных и векторных полей?

§ 1.5. Основные законы теории электромагнитного поля

Уравнения ЭМП в интегральной форме

Закон полного тока:

$$\oint_l \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum i \qquad \text{или} \qquad \oint_l \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{\delta}_{\text{п}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль контура *l* равна полному электрическому току, протекающему через поверхность *S*, натянутую на контур *l*, если направление тока образует с направлением обхода контура правовинтовую систему.

Закон электромагнитной индукции:

$$e_{\text{и}} = \oint_l (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{\text{с}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

где $\boldsymbol{E}_{\text{с}}$ – напряженность стороннего электрического поля.

Эдс. электромагнитной индукции в контуре *l* равна скорости изменения магнитного потока через поверхность *S*, натянутую на контур *l*, причем направление скорости изменения магнитного потока образует с направлением $e_{\text{и}}$ левовинтовую систему.

Теорема Гаусса в интегральной форме:

$$\oint_S \boldsymbol{D}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V.$$

Поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность *S* равен сумме свободных электрических зарядов в объеме, ограниченном поверхностью *S*.

Закон непрерывности линий магнитной индукции:

$$\oint_S \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

Магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Непосредственное применение уравнений в интегральной форме позволяет производить расчет простейших электромагнитных полей. Для расчета электромагнитных полей более сложной формы применяют уравнения в дифференциальной форме. Эти уравнения называются уравнениями Максвелла.

Уравнения Максвелла для неподвижных сред

Эти уравнения непосредственно следуют из соответствующих уравнений в интегральной форме и из математических определений пространственных дифференциальных операторов.

Закон полного тока в дифференциальной форме:

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}_{\text{п}},$$

где $\boldsymbol{\delta}_{\text{п}} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}_{\text{пр}} + \boldsymbol{\delta}_{\text{см}} + \boldsymbol{\delta}_{\text{пер}}$;

$\boldsymbol{\delta}_{\text{п}}$ – плотность полного электрического тока;
$\boldsymbol{\delta}$ – плотность стороннего электрического тока;
$\boldsymbol{\delta}_{\text{пр}}$ – плотность тока проводимости;
$\boldsymbol{\delta}_{\text{см}}$ – плотность тока смещения;
$\boldsymbol{\delta}_{\text{пер}}$ – плотность тока переноса.

Это означает, что электрический ток является вихревым источником векторного поля напряженности магнитного поля.

Закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме:

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{\text{с}}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

Это означает, что переменное магнитное поле является вихревым источником для пространственного распределения вектора напряженности электрического поля.

Уравнение непрерывности линий магнитной индукции:

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{B} = 0.$$

Это означает, что поле вектора магнитной индукции не имеет истоков, т.е. в природе не существует магнитных зарядов (магнитных монополей).

Теорема Гаусса в дифференциальной форме:

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D} = \rho.$$

Это означает, что истоками векторного поля электрического смещения являются электрические заряды.

Для обеспечения единственности решения задачи анализа ЭМП необходимо дополнить уравнения Максвелла уравнениями материальной связи между векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$, а также $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$.

Соотношения между векторами поля и электрофизическими свойствами среды

Известно, что

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}; \quad \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \qquad (1)$$

Все диэлектрики поляризуются под действием электрического поля. Все магнетики намагничиваются под действием магнитного поля. Статические диэлектрические свойства вещества могут быть полностью описаны функциональной зависимостью вектора поляризованности $\boldsymbol{P}$ от вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$). Статические магнитные свойства вещества могут быть полностью описаны функциональной зависимостью вектора намагниченности $\boldsymbol{M}$ от вектора напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{H})$). В общем случае такие зависимости носят неоднозначный (гистерезисный) характер. Это означает, что вектор поляризованности или намагниченности в точке Q определяется не только значением вектора $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$ в этой точке, но и предысторией изменения вектора $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$ в этой точке. Экспериментально исследовать и моделировать эти зависимости чрезвычайно сложно. Поэтому на практике часто предполагают, что векторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{E}$, а также $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H}$ коллинеарны, и электрофизические свойства вещества описывают скалярными гистерезисными функциями ($|\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}|\,(|\boldsymbol{E}|)$, $|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{M}|\,(|\boldsymbol{H}|)$). Если гистерезисными характеристиками вышеназванных функций можно пренебречь, то электрофизические свойства описывают однозначными функциями $P = P(E)$, $M = M(H)$.

Во многих случаях эти функции приближенно можно считать линейными, т.е.

$$\boldsymbol{P} = \chi_э \varepsilon_0 \boldsymbol{E}; \qquad \boldsymbol{M} = \chi_м \boldsymbol{H}, \qquad (2)$$

где $\chi_э$ – диэлектрическая восприимчивость вещества; $\chi_м$ – магнитная восприимчивость вещества.

Если учесть остаточную поляризованность сегнетоэлектрика или остаточную намагниченность ферромагнетика, то

$$\boldsymbol{P} = \chi_э \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_r; \qquad \boldsymbol{M} = \chi_м \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}_r, \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{P}_r$ - вектор остаточной поляризованности вещества; $\boldsymbol{M}_r$ – вектор остаточной намагниченности вещества.

Тогда с учетом соотношения (1) можно записать следующее:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_r; \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \mu \boldsymbol{H} + \boldsymbol{B}_r, \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{B}_r$ - вектор остаточной магнитной индукции вещества, $\boldsymbol{B}_r = \mu_0 \boldsymbol{M}_r$;

ε, μ – соответственно относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества:

$$\varepsilon = \chi_э + 1, \qquad \mu = \chi_м + 1.$$

ε_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества:

$$\varepsilon_а = \varepsilon_0\varepsilon.$$

$\mu_а$ – абсолютная магнитная проницаемость вещества:

$$\mu_a = \mu_0\mu.$$

Соотношения (2), (3), (4) характеризуют диэлектрические и магнитные свойства вещества. Электропроводящие свойства вещества могут быть описаны законом Ома в дифференциальной форме

$$\boldsymbol{\delta}_{пр} = \gamma\boldsymbol{E},$$

где γ – удельная электрическая проводимость вещества, измеряется в (См/м) сантиметр на метр.

В более общем случае зависимость между плотностью тока проводимости и вектором напряженности электрического поля носит нелиненый векторно–гистерезисный характер.

Энергия электромагнитного поля

Объемная плотность энергии электрического поля $W_э$ равна

$$W_э\,(Q, t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{E}(Q,\tau)\frac{\partial \boldsymbol{D}(Q,\tau)}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\tau,$$

где $W_э$ измеряется в джоулях на кубический метр (Дж/м^3).

Объемная плотность энергии магнитного поля $W_м$ равна

$$W_м\,(Q, t) = \int_{-\infty}^{t} H(\mathrm{Q},\tau)\frac{\partial B(\mathrm{Q},\tau)}{\partial\tau}\,\mathrm{d}\tau,$$

Объемная плотность энергии электромагнитного поля $W_{эм}$ равна

$$W_{эм}\,(Q, t) = W_э\,(Q, t) + W_м\,(Q, t).$$

В случае линейных электрических и магнитных свойств вещества объемная плотность энергии ЭМП равна

$$W_{эм} = W_э + W_м = (\varepsilon_0\varepsilon E^2)/2 + (\mu_0\mu H^2)/2.$$

Это выражение справедливо для мгновенных значений удельной энергии и векторов ЭМП.

Удельная мощность тепловых потерь от токов проводимости $P_т$:

$$P_т = \boldsymbol{\delta}_{пр}\boldsymbol{E} = \gamma E^2 = (\boldsymbol{\delta}_{пр}{}^2)/\gamma.$$

Удельная мощность сторонних источников $P_{ист}$:

$$P_{ист} = (\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}_{пр} + \boldsymbol{\delta}_{см})\boldsymbol{E}_с - \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{E}.$$

Контрольные вопросы

1. Как формулируется закон полного тока в интегральной форме?
2. Как формулируется закон электромагнитной индукции в интегральной форме?
3. Как формулируется теорема Гаусса и закон непрерывности магнитного потока в интегральной форме?
4. Как формулируется закон полного тока в дифференциальной форме?
5. Как формулируется закон электромагнитной индукции в дифференциальной форме?
6. Как формулируется теорема Гаусса и закон непрерывности линий магнитной индукции в интегральной форме?
7. Какими соотношениями описывают электрофизические свойства вещества?
8. Как выражается энергия электромагнитного поля через векторные величины, его определяющие?
9. Как определяют удельную мощность тепловых потерь и удельную мощность сторонних источников?

§ 1.6. Граничные условия для векторов ЭМП. Закон сохранения заряда. Теорема Умова-Пойнтинга

Граничные условия для векторов ЭМП

Пусть некоторая поверхность S разделяет среды № 1 и № 2 (рис. 2).

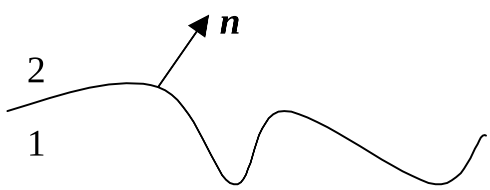

Рис. 2

Рассмотрим некоторую точку на этой поверхности. Вектор единичной нормали к поверхности S в этой точке направлен из среды 1 в среду 2. Тогда поведение векторов $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ в этой точке, в соответствии с уравнениями Максвелла описывают следующим образом:

$$(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\tau},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – поверхностная плотность тока, А/м.

$$\text{Если } \boldsymbol{\tau} = 0, \text{ то } \boldsymbol{H}_{1t} - \boldsymbol{H}_{2t} = 0.$$

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \times \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{E}_{2\text{c}} - \boldsymbol{E}_{1\text{c}}) \times \boldsymbol{n}.$$

$$\text{Если } \boldsymbol{E}_{2\text{c}t} - \boldsymbol{E}_{1\text{c}t} = 0, \text{ то } \boldsymbol{E}_{2t} - \boldsymbol{E}_{1t} = 0.$$

$$(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1)\, \boldsymbol{n} = 0, \text{ т. е. } B_{2n} - B_{1n} = 0.$$

$$(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1)\, \boldsymbol{n} = \sigma, \text{ т.е. } D_{2n} - D_{1n} = \sigma.$$

Здесь обозначено: $\boldsymbol{H}_1$ – вектор напряжённости магнитного поля на поверхности раздела сред в среде №1; $\boldsymbol{H}_2$ – то же в среде №2; $\boldsymbol{H}_{1t}$ – тангенциальная (касательная) составляющая вектора напряжённости магнитного поля на поверхности раздела сред в среде №1; $\boldsymbol{H}_{2t}$ – то же в среде №2; $\boldsymbol{E}_1$ – вектор полной напряжённости электрического поля на поверхности раздела сред в среде №1; $\boldsymbol{E}_2$ – то же в среде №2; $\boldsymbol{E}_{1\text{c}}$ – сторонняя составляющая вектора напряжённости электрического поля на поверхности раздела сред в среде №1; $\boldsymbol{E}_{2\text{c}}$ – то же в среде №2; $\boldsymbol{E}_{1t}$ – тангенциальная составляющая вектора напряжённости электрического поля на поверхности раздела сред в среде №1; $\boldsymbol{E}_{2t}$ – то же в среде №2; $\boldsymbol{E}_{1\text{c}t}$ – тангенциальная сторонняя составляющая вектора напряжённости электрического поля на поверхности раздела сред в среде №1; $\boldsymbol{E}_{2t}$ – то же в среде №2; $\boldsymbol{B}_1$ – вектор магнитной индукции на поверхности раздела сред в среде №1; $\boldsymbol{B}_2$ – то же в среде №2; B_{1n} – нормальная составляющая вектора магнитной индукции на поверхности раздела сред в среде №1; B_{2n} – то же в среде №2; $\boldsymbol{D}_1$ – вектор электрического смещения на поверхности раздела сред в среде №1; $\boldsymbol{D}_2$ – то же в среде №2; D_{1n} – нормальная составляющая вектора электрического смещения на поверхности раздела сред в среде №1; D_{2n} – то же в среде №2; σ – поверхностная плотность электрического заряда на границе раздела сред, Кл/м^2.

Закон сохранения заряда

Если отсутствуют сторонние источники тока, то

$$\text{rot}\, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}_{\text{пр}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$

$$\text{div}\, (\boldsymbol{\delta}_{\text{пр}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) = 0,$$

а в общем случае div $\boldsymbol{\delta}_{\text{п}} = 0$, т. е. вектор плотности полного тока не имеет истоков, т. е. линии полного тока всегда замкнуты:

$$\text{div}\, \boldsymbol{\delta}_{\text{пр}} = -\,\text{div}\, \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\, \boldsymbol{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Это и есть закон сохранения заряда в дифференциальной форме.

Теперь применим этот закон к объему V:

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{\delta}_{\text{пр}}\, \mathrm{d}V = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t}\, \mathrm{d}V,$$

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{\delta}_{\text{пр}}\, \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{\delta}_{\text{пр}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{S} = i_{\text{пр}},$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

Подставляя выражения 2-е и 3-е в 1-е, получим $\quad i_{\text{пр}} = -\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Это равенство выражает закон сохранения заряда в интегральной форме.

Граничные условия для плотности тока

$$(\boldsymbol{\delta}_{\text{п}2} - \boldsymbol{\delta}_{\text{п}1})\boldsymbol{n} = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad \delta_{\text{п}2n} - \delta_{\text{п}1n} = 0.$$

Нормальная составляющая полной плотности тока всегда непрерывна. Если отсутствуют сторонние источники тока, то

$$(\boldsymbol{\delta}_{\text{пр}2} - \boldsymbol{\delta}_{\text{пр}1})\boldsymbol{n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Скачок нормальной составляющей плотности тока проводимости на поверхности раздела сред равен скорости изменения поверхностной плотности электрического заряда.

Теорема Умова-Пойнтинга

Объемная плотность мощности, потребляемой материальной точкой в ЭМП p, равна:

$$p = \boldsymbol{\delta}_{\text{п}}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{\text{с}}) + \boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{\text{с}})\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \operatorname{rot}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{\text{с}}) = -\operatorname{div}((\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{\text{с}}) \times \boldsymbol{H}). \quad (5)$$

Электромагнитная мощность, потребляемая внутри объема V, равна:

$$-\int_V \operatorname{div}((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_{\text{с}})\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V = -\oint_S ((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_{\text{с}})\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Эта мощность поступает в объем V через замкнутую поверхность S из окружающего пространства, значит электромагнитная мощность $P_{\text{изл}}$, излучаемая объемом V в окружающее пространство, равна:

$$P_{\text{изл}} = \oint_S ((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_{\text{с}})\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{6}$$

В соответствии с тождеством (5)

$$P_{\text{изл}} = \oint_S ((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_{\text{с}})\times\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \left((\boldsymbol{E}_{\text{с}}-\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{\delta}_{\text{п}} - \boldsymbol{H}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V = \int_V (\boldsymbol{\delta}_{\text{п}}\mathbf{E}_{\text{с}} - \boldsymbol{\delta}\mathbf{E})\mathrm{d}V -$$

$$-\int_V \boldsymbol{\delta}_{\text{пр}}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V - \int_V \left(\boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V = P_{\text{ист}} - P_{\text{т}} - \frac{\mathrm{d}W_{\text{эм}}}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

Это и есть уравнение баланса мощностей для объема V. В общем случае в соответствии с равенством (7) электромагнитная мощность, генерируемая источниками внутри объема V, идет на тепловые потери, на накопление энергии ЭМП и на излучение в окружающее пространство через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем.

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{т}} + \frac{\mathrm{d}W_{\text{эм}}}{\mathrm{d}t} + P_{\text{изл}}.$$

Подынтегральное выражение в интеграле (6) называется вектором Пойнтинга $\mathbf{П}$, Вт/м^2:

$$\mathbf{П} = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_{\text{с}})\times\boldsymbol{H}.$$

Этот вектор равен плотности потока электромагнитной мощности в некоторой точке наблюдения. Равенство (7) – есть математическое выражение теоремы Умова-Пойнтинга.

Электромагнитная мощность, излучаемая областью V в окружающее пространство, равна потоку вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность S, ограничивающую область V.

Контрольные вопросы

1. Какими выражениями описывают граничные условия для векторов электромагнитного поля на поверхностях раздела сред?

2. Как формулируется закон сохранения заряда в дифференциальной форме?

3. Как формулируется закон сохранения заряда в интегральной форме?

4. Какими выражениями описывают граничные условия для плотности тока на поверхностях раздела сред?

5. Чему равна объемная плотность мощности, потребляемой материальной точкой в электромагнитном поле?

6. Как записывают уравнение баланса электромагнитной мощности для некоторого объёма?

7. Что такое вектор Пойнтинга?

8. Как формулируется теорема Умова–Пойнтинга?

Глава 2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 2.1. Основные уравнения электростатики

Электростатическим называют постоянное поле неподвижных электрических зарядов. Источниками электростатического поля являются свободные электрические заряды и электрические диполи. В электростатическом поле отсутствует сторонняя составляющая напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}_{\text{с}}$.

В соответствии со сказанным уравнения электростатики в интегральной форме имеют вид

$$\oint\limits_{l} \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0,$$

$$\oint\limits_{S} \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q = \int\limits_{V} \rho \mathrm{d}V.$$

Уравнения электростатики в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho. \tag{1}$$

В случае линейных изотропных диэлектрических свойств среды уравнение материальной связи между векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ имеет вид:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_a \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_r. \tag{2}$$

Граничные условия для векторов электростатического поля

На поверхности раздела сред, где ε_a или $\boldsymbol{P}_r$ изменяются скачками, справедливы следующие соотношения:

$$\boldsymbol{E}_{1t} = \boldsymbol{E}_{2t}; \ \boldsymbol{D}_{2n} - \boldsymbol{D}_{1n} = \sigma.$$

На поверхности проводящего тела

$$\boldsymbol{E}_t = 0; \ \boldsymbol{D}_n = \sigma.$$

Тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля непрерывна на любой поверхности раздела сред.

Скачок нормальной составляющей вектора электрического смещения равен поверхностной плотности электрических зарядов.

Скалярный электрический потенциал. Краевая задача анализа электростатического поля

Поле вектора $\boldsymbol{E}$ является безвихревым, поэтому его можно представить в виде градиента некоторого скалярного поля

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \tag{3}$$

где φ – скалярный электрический потенциал.

Подставив соотношение (3) в уравнение (2), а затем (2) в (1), получим

$$\operatorname{div}(\varepsilon_a \operatorname{grad}\varphi - \boldsymbol{P}_r) = -\rho$$

или

$$\operatorname{div}(\varepsilon_a \operatorname{grad}\varphi) = -\rho + \operatorname{div}\boldsymbol{P}_r\,. \tag{4}$$

Уравнение (4) является уравнением электростатики относительно скалярного электрического потенциала. Это уравнение – основа для постановки краевой задачи анализа электростатического поля.

Для обеспечения единственности решения уравнения (4) необходимо дополнить его граничными условиями для искомого потенциала или для нормальной составляющей вектора электрического смещения на поверхности, ограничивающей расчетную область, т.е. φ = поверхностное распределение – на части граничной поверхности Γ_1,
$\boldsymbol{D}_n$ = поверхностное распределение – на части граничной поверхности Γ_2,
$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ – замкнутая граничная поверхность.

Первое граничное условие называется граничным условием первого рода (иногда его называют граничным условием Дирихле). Второе граничное условие называется граничным условием второго рода (иногда его называют граничным условием Неймана).

Если задавать только граничные условия Неймана, то единственность решения будет обеспечена только с точностью до постоянной (однородной) составляющей скалярного поля φ.

В случае однородного распределения диэлектрической проницаемости среды и вектора остаточной поляризованности среды уравнение (4) может быть записано в виде

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\rho/\varepsilon_a \quad \text{или} \quad \nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_a. \tag{5}$$

Если в расчетной области свободные заряды отсутствуют, то

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0 \qquad \text{или} \qquad \nabla^2\varphi = 0. \tag{6}$$

Выражение (5) называется уравнением Пуассона, (6) – уравнением Лапласа. Для уравнений (5) и (6) граничное условие Неймана может задаваться в виде распределения нормальной производной скалярного электрического потенциала на части граничной поверхности Γ_2.

Энергия системы заряженных проводников

Энергия электростатического поля $W_{эл}$ системы заряженных проводников равна

$$W_{эл} = 0{,}5 \int\limits_{V_\infty} \boldsymbol{ED}\mathrm{d}V = -\,0{,}5 \int\limits_{V_\infty} \boldsymbol{D}\operatorname{grad}\varphi\mathrm{d}V = -\,0{,}5 \int\limits_{V_\infty} \operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{D})\mathrm{d}V +$$

$$+\,0{,}5 \int\limits_{V_\infty} \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}V = -\,0{,}5 \oint\limits_{S_\infty} \varphi\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{S} + 0{,}5 \int\limits_{V} \varphi\rho\,\mathrm{d}V,$$

$\oint\limits_{S_\infty} \varphi\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$, так как с ростом радиуса замкнутой поверхности произведение убывает быстрее, чем растет площадь поверхности (в наихудшем случае произведение $\varphi\boldsymbol{D}$ является бесконечно малой величиной третьего порядка, а площадь поверхности интегрирования – бесконечно большой величиной второго порядка).

$$W_{эл} = 0{,}5 \int\limits_{V} \varphi\rho\,\mathrm{d}V = 0{,}5 \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \int\limits_{V_i} \rho\mathrm{d}V = 0{,}5 \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\, q_i\,, \tag{7}$$

где φ_i – потенциал i-го проводника; q_i – заряд i-го проводника.

Формула (7) справедлива, если $\varphi(\infty) = 0$. В противном случае формула (7) справедлива, если $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 0$ (сумма зарядов всех тел системы равна нулю).

Понятие о методе изображений

При анализе электростатических полей обычно требуется определить распределение векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, а также распределение скалярного электрического потенциала, если известны форма и расположение проводников и диэлектриков и неоднородные граничные условия:

а) потенциалы проводников;

б) суммарный заряд каждого проводника, потенциал которого неизвестен.

Решение, удовлетворяющее уравнению (4) и вышеназванным граничным условиям, является единственным.

Из этой теоремы, которую называют теоремой единственности, вытекают два важных следствия.

Следствие 1. Электрическое поле (и соответствующее ему решение) в некотором объеме, ограниченном равнопотенциальными поверхностями, не изменится, если эти поверхности станут проводящими, т.е. превратятся в границы проводников, которым сообщены соответствующие потенциалы.

Следствие 2. Электростатическое поле по одну сторону от поверхности S (не обязательно равнопотенциальной) не изменяется, если по другую сторону этой поверхности изменить параметры среды и распределение зарядов так, чтобы сохранились граничные условия на поверхности S.

Вновь распределенные заряды называются изображениями преобразованных зарядов, а основанный на таком преобразовании метод расчета – методом изображений.

Оба следствия из теоремы о единственности позволяют значительно расширить область применения интегральных форм уравнений электростатики для расчета полей.

Фундаментальное решение уравнений Пуассона и Лапласа

Фундаментальным решением этих уравнений является частное решение, соответствующее распределению скалярного электрического потенциала в бесконечной линейной однородной среде вокруг точечного электрического заряда при открытых граничных условиях $\varphi(\infty) = 0$:

$$\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon R),$$

где R – расстояние между точечным зарядом и точкой наблюдения. Если в расчетной области известно распределение объемных и поверхностных зарядов, а также вектора диэлектрической поляризованности вещества, то распределение скалярного электрического потенциала может быть определено по формуле

$$\varphi = \int\limits_{V_p} (\rho - \mathrm{div}\boldsymbol{P})/(4\pi\varepsilon_0 R)\mathrm{d}V + \int\limits_{S_p} (\sigma - \mathrm{Div}\boldsymbol{P})/(4\pi\varepsilon_0 R)\mathrm{d}S. \qquad (8)$$

Как правило, при анализе сложных электростатических полей распределение зарядов и поляризованности вещества неизвестно, поэтому прямое применение формулы (8) невозможно. В этом случае формула (8) используется в качестве основы для построения интегральных методов анализа электростатических полей.

Контрольные вопросы

1. Что такое электростатическое поле?
2. Какой вид имеют уравнения электростатики в интегральной и дифференциальной форме?
3. Какими выражениями описывают граничные условия для векторов электростатического поля на поверхностях раздела сред?
4. Какой вид имеет уравнение электростатики относительно скалярного электрического потенциала?
5. Как формулируется краевая задача анализа электростатического поля?
6. Чему равна энергия системы заряженных проводников?
7. Как формулируются следствия из теоремы о единственности решения краевой задачи электростатики относительно скалярного электрического потенциала?
8. Что является фундаментальным решением уравнений Пуассона и Лапласа для электростатического поля?
9. На каком соотношении основываются интегральные методы анализа электростатических полей?

§ 2.2. Электростатические поля простых геометрических форм

Поле электрического диполя

Пусть имеется электрический диполь (рис. 1).

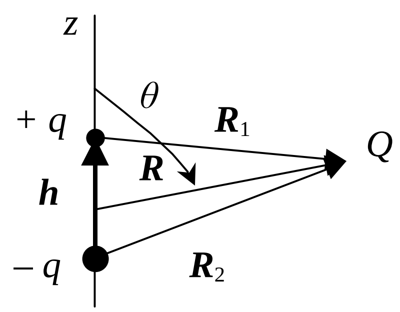

Рис. 1

Тогда распределение скалярного электрического потенциала вокруг него описывают формулой:

$$\varphi(Q) = \varphi_+ + \varphi_- = q/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1) - q/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2) = q/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon)(R_2 - R_1)/(R_1\, R_2).$$

Если источником электростатического поля является точечный диполь с электрическим дипольным моментом (см. рис. 1) $\boldsymbol{P}_э = q\boldsymbol{h}$, то

$$h \ll R_1,\ h \ll R_2,$$

$$\boldsymbol{R}_2 \to \boldsymbol{R}_1 \to \boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{h},$$

$$R_2 - R_1 = \boldsymbol{hR}/R.$$

В результате получим

$$\varphi(Q) = 1/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon)(q\boldsymbol{hR})/(R^3) = \boldsymbol{P}_э\boldsymbol{R}/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^3). \qquad (9)$$

Зная распределение скалярного электрического потенциала, можно определить распределение вектора напряженности электрического поля

$$\boldsymbol{E}(Q) = -\operatorname{grad}\varphi(Q).$$

В выражении (9) от положения точки Q зависят $\boldsymbol{R}$ и R, поэтому для определения градиента выражения (9) можно применить правила дифференцирования из векторного анализа

$$\operatorname{grad}(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1 \operatorname{grad}\varphi_2 + \varphi_2 \operatorname{grad}\varphi_1,$$

$$\operatorname{grad}(\varphi^n) = n\varphi^{n-1}\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{FG}) = (\boldsymbol{F}\nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G}\nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{G}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{F},$$

$$(\boldsymbol{R}\nabla)\,\boldsymbol{P}_э = 0;\ \operatorname{rot}\boldsymbol{P}_э = 0;\ \operatorname{rot}\boldsymbol{R} = 0;$$

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{P}_э\boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{P}_э\nabla)\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}_э.$$

Окончательно получим

$$\boldsymbol{E}(Q) = 1/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon)(3(\boldsymbol{P}_э\boldsymbol{R})\boldsymbol{R}/R^5 + \boldsymbol{P}_э/R^3)$$

или в сферической системе координат

$$E_R(Q) = 2P_э\cos(\theta)/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^3),$$

$$E_\theta(Q) = P_э\sin(\theta)/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^3).$$

Можно доказать, что уравнение линий напряженности электрического поля (силовых линий) имеет

$$R = A\sin(\theta), \qquad (10)$$

где A – параметр семейства линий.

Уравнение эквипотенциальных линий

$$R^2 = B\cos(\theta), \qquad (11)$$

где B – параметр семейства линий потенциала.

Чтобы провести через некоторую точку линию напряженности или равнопотенциальную кривую, следует подставить в выражения (10) или (11) координаты этой точки и вычислить значение параметра A или B, соответствующее искомой кривой. Затем, задаваясь различными значениями θ, находят значение R искомых точек линии.

Если построить несколько произвольных равнопотенциальных поверхностей и рассечь их различными меридианными плоскостями, то в каждой такой плоскости получится одна и та же картина линий равного потенциала. Такое поле называют плоскомеридианным. В современной литературе такие поля называют «осесимметричными».

Поле бесконечно длинной заряженной оси

Пусть имеется бесконечно длинная заряженная ось, имеющая заряд на единицу длины τ (рис. 2).

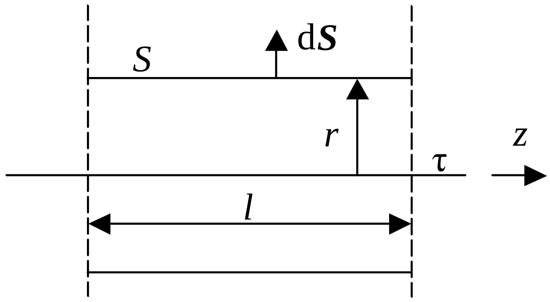

Рис. 2

Охватим эту ось цилиндрической поверхностью, ось которой совпадает с заряженной осью. На этой поверхности вектор электрического смещения имеет только нормальную составляющую $\boldsymbol{D}_n$, причем $\boldsymbol{D}_n$ = const. В соответствии с теоремой Гаусса в интегральной форме

$$\oint_S \boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S D_n \mathrm{d}S = D_n S = D_n 2\pi r l = \tau l,$$

откуда $D = D_n = D_r = \tau/(2\pi r)$,

$$E = E_r = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon r),$$

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi,$$

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

$$\varphi = -\int E\mathrm{d}r,$$

$$\varphi = -\int \tau\mathrm{d}r/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon r) = -\,\tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(r) + A.$$

Во многих практических случаях электрическое поле можно представить в виде линейной комбинации полей нескольких заряженных осей или нескольких пар разноименно заряженных осей. Поэтому целесообразно рассмотреть поле одной такой пары.

Контрольные вопросы

1. Какими соотношениями описывают поле электрического диполя?
2. Какие поля называют плоскомеридианными (осесимметричными)?
3. Какими соотношениями описывают поле бесконечно длинной заряженной оси?

§ 2.3. Электростатические поля простых двухпроводных линий

Поле двух разноименно заряженных осей

Пусть в однородном диэлектрике находятся две параллельные бесконечно длинные оси, равномерно и разноименно заряженные с линейной плотностью заряда $+\tau$ и $-\tau$ (рис. 3). Изобразим на рисунке следы этих осей в плоскости поперечного сечения.

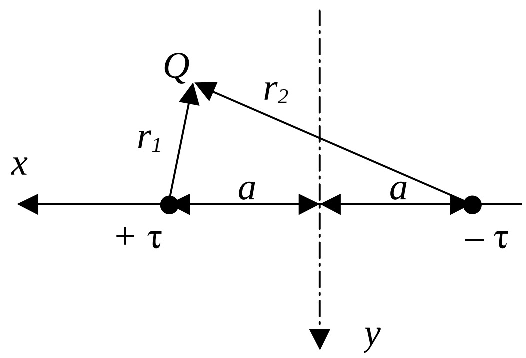

Рис. 3

Используя принцип наложения, запишем формулу расчета распределения скалярного электрического потенциала.

$$\varphi(Q) = \varphi_+ + \varphi_- = -\tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(r_1) + \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(r_2) + A = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(r_2/r_1) + A$$

Если принять $\varphi(x = 0) = 0$, т.е. на оси симметрии, скалярный электрический потенциал равен нулю, то $A = 0$. Теперь определим уравнение эквипотенциальных поверхностей. На этих поверхностях $r_2/r_1 = k = \text{const}$. Здесь k – параметр семейства эквипотенциальных линий в плоскости рисунка.

Выразим r_2 и r_1 в декартовых координатах и выведем уравнение эквипотенциали в канонической форме относительно координат x и y

$$r_2 = ((x + a)^2 + y^2)^{0,5};\ r_1 = ((x - a)^2 + y^2)^{0,5};$$

$$(x + a)^2 + y^2 = k^2 (x - a)^2 + k^2 y^2;$$

$$(x + a)^2 - k^2 (x - a)^2 + y^2(1 - k^2) = 0;$$

$$x^2(1 - k^2) + 2ax(1 + k^2) + a^2(1 - k^2) + y^2(1 - k^2) = 0;$$

$$x^2 + 2ax(1 + k^2)/(1 - k^2) + y^2 + a^2 = 0;$$

$$(x + a(1 + k^2)/(1 - k^2))^2 + y^2 = (a(1 + k^2)/(1 - k^2))^2 - a^2 = (2ak/(1 - k^2))^2.$$

Здесь получено уравнение окружности в канонической форме:

$$(x - s)^2 + y^2 = R^2, \qquad (12)$$

где $s = a(k^2+1)/(k^2- 1)$ – координата центра окружности;

$R = a|2k/(1 - k^2)|$ – радиус окружности.

Мы получили выражения для координаты центра и для радиуса эквипотенциальной линии по задаваемому параметру k, где $k = \exp(2\pi\varepsilon\varepsilon_0\varphi/\tau)$.

В соответствии с уравнением (12) линии равного потенциала представляют собой окружности, а поверхности равного потенциала – круговые цилиндры, геометрические оси которых смещены относительно электрических осей. Одна из этих поверхностей вырождается в плоскость с нулевым значением потенциала (при $k = 1$; $s \to \pm\infty$; $r \to \infty$).

Линии напряженности представляют собой дуги окружности, начинающиеся на оси с положительным зарядом и кончающиеся на оси с отрицательным зарядом.

Если семейство равнопотенциальных поверхностей рассечь параллельными плоскостями, перпендикулярными заряженным осям, то в каждой плоскости получится одна и та же картина линий. Поля, обладающие таким свойством, называются плоскопараллельными (иначе их называют двумерными полями).

Установив картину поля и использовав следствие теоремы о единственности, можно считать решенными столько новых задач, сколько имеется различных по взаимному расположению пар равнопотенциальных поверхностей, которые можно рассматривать как поверхности проводников.

Рассмотрим важнейшие частные случаи таких задач.

Поле и емкость параллельных цилиндров с несовпадающими осями

Случай 1. «Коаксиальный» кабель со смещенной жилой.

Дано: R_1 – радиус жилы; R_2 – радиус оболочки; d – смещение осей жилы и оболочки; $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – напряжение между жилой и оболочкой (рис.4).

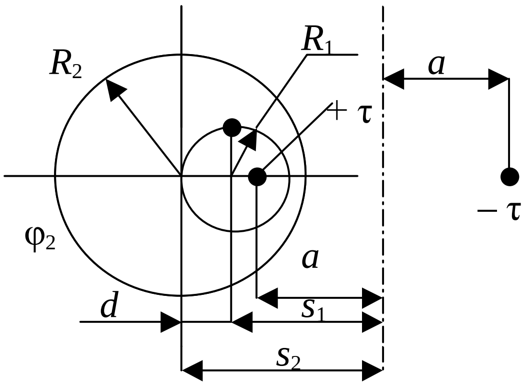

Рис. 4

Определить: емкость кабеля на единицу длины и потенциалы проводников относительно средней плоскости между электрическими осями $+\tau$ и $-\tau$.

$$k_1/k_2 = \exp(2\pi\varepsilon\varepsilon_0 U/\tau);$$
$$U = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(k_1/k_2).$$

Из пояснений к уравнению (12) следует, что

$$\begin{cases} s - a = 2a/(k^2 - 1); \\ s + a = 2ak^2/(k^2 - 1); \\ (s - a)(s + a) = R^2. \end{cases}$$

Поэтому справедливо соотношение

$$(s + a)/R = R/(s - a) = k, \text{ если } k > 1. \qquad (13)$$

Значит $C_0 = \tau/U = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon/\ln((s_2 - a)(s_1 + a)/(R_1 R_2));$

$$\varphi_1 = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(k_1) = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln((s_1 + a)/R_1);$$
$$\varphi_2 = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(k_2) = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(R_2/(s_2 - a));$$

s_2, s_1, a вычисляются из решения системы уравнений

$$\begin{cases} (s_1 - a)(s_1 + a) = R_1^2, \\ (s_2 - a)(s_2 + a) = R_2^2, \\ s_2 - s_1 = d; \end{cases}$$

т.е. $s_1 = (R_2^2 - R_2^2 - d^2)/(2d);\ s_2 = (R_2^2 - R_1^2 + d^2)/(2d);$

$$a = (s_1^{\ 2} - R_1^{\ 2})^{0,5} = (s_2^{\ 2} - R_2^{\ 2})^{0,5}.$$

Алгоритм вычислений: сначала рассчитывают s_2, s_1, a, затем C_0, потом φ_1, φ_2.

Если нужно определить параметры эквипотенциали φ_i, то вычисляют величины k_i, s_i, R_i по формулам, дополняющим уравнение (12).

Случай 2. Двухпроводная линия с проводами разного радиуса.

Дано: R_1 – радиус положительно заряженного провода; R_2 – радиус отрицательно заряженного провода; $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – напряжение между проводами; d – смещение осей цилиндрических проводов (рис. 5).

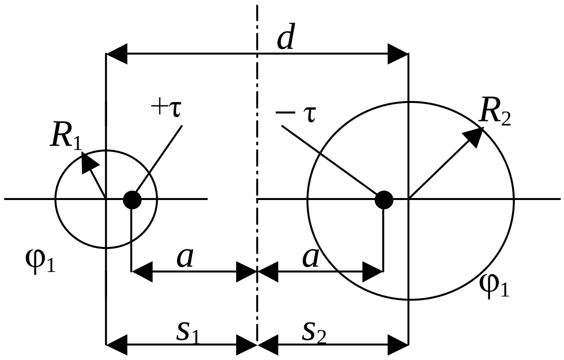

Рис. 5

Определить: емкость линии на единицу длины и потенциалы проводников относительно средней плоскости между электрическими осями + τ и – τ. Так же, как и в предыдущем случае

$$k_1/k_2 = \exp(2\pi\varepsilon\varepsilon_0 U/\tau),$$

$$U = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(k_1/k_2).$$

Для s_1, a, R_1, k_1 справедливо соотношение (13), поскольку $k > 1$. Если $k < 1$, то вместо выражения (2) имеем

$$(s + a)/R = R/(s - a) = -k.$$

В это соотношение подставим $s = -s_2$, $R = R_2$, $k = k_2$,

$$(s_2 - a)/R_2 = R_2/(s_2 + a) = k_2.$$

Значит

$$C_0 = \tau/U = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon/\ln((s_2 + a)(s_1 + a)/(R_1 R_2));$$

$$\varphi_1 = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(k_1) = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln((s_1 + a)/R_1);$$

$$\varphi_2 = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(k_2) = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(R_2/(s_2 + a));$$

s_2, s_1, a вычисляют из решения системы уравнений

$$\begin{cases} (s_1 - a)(s_1 + a) = R_1^{\ 2}, \\ (s_2 - a)(s_2 + a) = R_2^{\ 2}, \\ s_2 + s_1 = d; \end{cases}$$

т. е. $s_1 = (R_1^2 - R_2^2 + d^2)/(2d)$; $s_2 = (R_2^2 - R_1^2 + d^2)/(2d) = d - s_1$;

$$a = (s_1^2 - R_1^2)^{0,5} = (s_2^2 - R_2^2)^{0,5}.$$

Алгоритм вычислений тот же, что и в предыдущем случае.

В рассмотренных двух случаях результирующую напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$ можно определить по формуле

$$\boldsymbol{E}(Q) = -\,\mathrm{grad}\,\varphi(Q) = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)(\boldsymbol{r}_1/r_1^2 - \boldsymbol{r}_2/r_2^2).$$

Значения емкости на единицу длины C_0, полученные при решении этих задач, могут быть использованы при анализе работы линии при переменных токах и напряжениях.

Известно, что при наличии переменного магнитного поля электрическое напряжение между двумя точками зависит от формы пути, соединяющего эти точки. Однако в длинных линиях переменного тока линии магнитной индукции практически лежат в плоскостях поперечного сечения; контур, лежащий в этой плоскости, не пронизывается переменным магнитным потоком, поэтому циркуляция вектора $\boldsymbol{E}$ вдоль такого контура равна нулю, т.е. электрическое поле имеет потенциальный характер. Это и дает возможность говорить об однозначном мгновенном значении напряжения между точками двух проводников, лежащими в одной и той же плоскости поперечного сечения, и постоянстве отношения мгновенных значений $C_0 = \tau/U$, справедливом для любого поперечного сечения.

Поле и емкость системы цилиндр – плоскость

Пусть заданы радиус R цилиндра, высота h над плоскостью (например над поверхностью земли) и приложенное напряжение U (рис. 6).

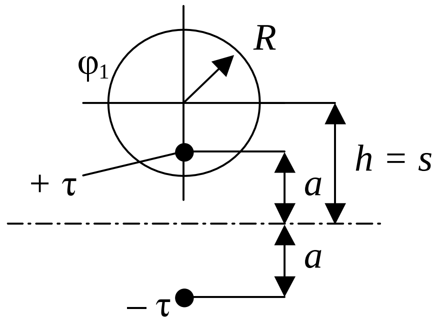

Рис. 6

Положение электрических осей можно определить из уравнений

$$\{(s - a)(s + a) = R^2,\ s = h\};$$

$$a = (s^2 - R^2)^{0,5};$$

$$\varphi_1 = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln((s + a)/R).$$

Потенциал плоскости $\varphi_2 = 0$, поэтому $U = \varphi_1$.

Линейная плотность заряда

$$\tau = 2U\pi\varepsilon_0\varepsilon\ln((s + a)/R).$$

Емкость на единицу длины

$$C_0 = \tau/U = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon/\ln((s + a)/R).$$

Если $h >> R$, т.е. тонкий провод подвешен высоко над поверхностью земли, то $(s+ a) \approx 2h$:

$$C_0 = \tau/U = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon/\ln(2h/R).$$

Поле и емкость двухпроводной линии

Дано: R – радиус цилиндров (провод); d – расстояние между геометрическими осями цилиндров; $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – напряжение между проводами (рис. 7).

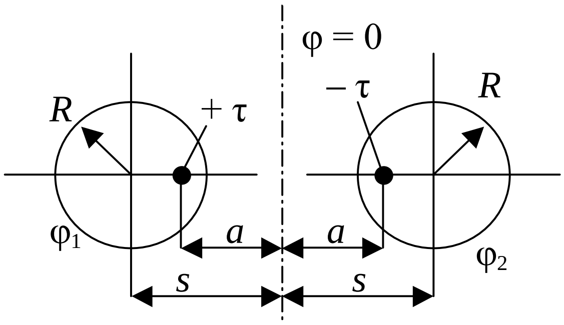

Рис. 7

Определить: потенциалы проводов, линейную плотность заряда, емкость на единицу длины.

$$a = (s^2 - \mathrm{R}^2)^{0,5},\ d = 2s;$$

$$C_0 = \tau/U = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon/\ln((s + a)^2/R^2) = \pi\varepsilon_0\varepsilon/\ln((s + a)/R);\ \tau = C_0U;$$

$$\varphi_1 = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln((s + a)/R);$$

$$\varphi_2 = \tau/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(R/(s + a)) = -\varphi_1.$$

Значит $\varphi_1 = U/2$.

Если $d>>R$, то $a \approx s$ (смещением электрических осей относительно геометрических можно пренебречь), и емкость линии на единицу длины можно определить по формуле

$$C_0 = \pi\varepsilon_0\varepsilon/\ln(d/R).$$

Поле и емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли

Дано: над плоской поверхностью земли подвешены горизонтально два цилиндрических провода с параллельными осями (рис. 8).

h_1 – высота подвеса 1-го провода; h_2 – высота подвеса 2-го провода; R – радиусы проводов; d – расстояние между нормальными проекциями осей проводов на поверхности земли.

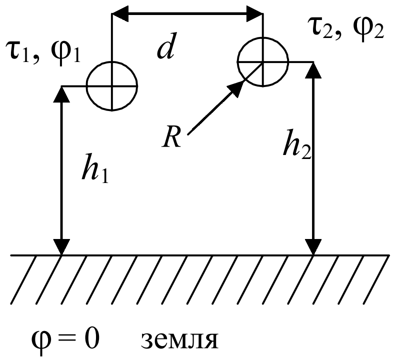

Рис. 8

По условию задачи требуется: вывести уравнения, связывающие между собой линейные плотности зарядов на проводах τ_1, τ_2 и потенциалы проводов. Определить параметры этих уравнений: потенциальные и емкостные коэффициенты, частичные емкости и рабочую емкость линии, если d, h_1 и $h_2 >> R$.

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться методом изображений. Распределение поля над поверхностью земли не изменится, если землю убрать, а под поверхностью земли расположить на глубинах h_1 и h_2 провода с линейной плотностью заряда $-\tau_1$ и $-\tau_2$.

После такого преобразования можно считать, что в системе действует электростатическое поле двух пар параллельных разноименно заряженных осей (рис. 9).

Поскольку d, h и $h >> R$, смещением электрических осей относительно геометрических осей можно пренебречь.

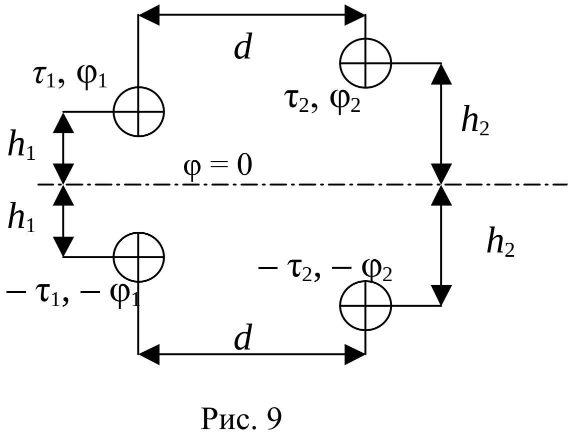

Рис. 9

Используя принцип наложения, выразим потенциалы проводов через линейные плотности зарядов

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln(\dfrac{2h_1}{R}) + \dfrac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\left(\dfrac{\sqrt{(h_1+h_2)^2+d^2}}{\sqrt{(h_2-h_1)^2+d^2}}\right) \\ \varphi_2 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\left(\dfrac{\sqrt{(h_1+h_2)^2+d^2}}{\sqrt{(h_2-h_1)^2+d^2}}\right) + \dfrac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln(\dfrac{2h_2}{R}) \end{cases}.$$

Из этих уравнений видно, что потенциалы проводов являются линейными комбинациями линейных плотностей зарядов

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 \\ \varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 \end{cases}$$

или

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Коэффициенты α_{ij} называют потенциальными коэффициентами единицы длины проводов.

α_{11}, α_{22} – это собственные потенциальные коэффициенты проводов,

α_{12}, α_{21} – это взаимные потенциальные коэффициенты.

$$\alpha_{11} = 1/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(2h_1/R);\ \alpha_{22} = 1/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln(2h_2/R);$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = 1/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon)\ln\left(\frac{\sqrt{(h_1+h_2)^2+d^2}}{\sqrt{(h_2-h_1)^2+d^2}}\right).$$

Как видно, матрица симметричная, значит для линии выполняется принцип взаимности.

Из системы уравнений (14) выразим τ_1 и τ_2.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Коэффициенты β_{ij} называют емкостными коэффициентами на единицу длины линии и измеряют в фарадах на метр. Собственные потенциальные и емкостные коэффициенты всегда положительны.

Взаимные потенциальные коэффициенты положительны, а взаимные емкостные коэффициенты всегда отрицательны.

Систему уравнений (15) можно записать иначе

$$\begin{cases} \tau_1 = (\beta_{11} + \beta_{12})\varphi_1 - \beta_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \tau_2 = -\beta_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + (\beta_{22} + \beta_{21})\varphi_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\varphi_2. \end{cases}$$

Коэффициенты C_{ij} называют частичными емкостями на единицу длины.

Если провода линии не связаны с землей и питаются от незаземленного источника эдс, то суммарный заряд линии равен нулю, т.е. $\tau_2 = -\tau_1$.

$$\begin{cases} \varphi_1 = (\alpha_{11} - \alpha_{12})\,\tau_1, \\ \varphi_2 = (\alpha_{21} - \alpha_{22})\,\tau_1. \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого и получим

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{21} - \alpha_{12})\,\tau_1.$$

Отношение линейной плотности заряда провода к напряжению называют в данном случае рабочей емкостью линии на единицу длины

$$C_{раб} = \tau/U = (\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{21} - \alpha_{12})^{-1}. \tag{16}$$

Можно изобразить эквивалентную схему системы заряженных проводников линии (рис. 10).

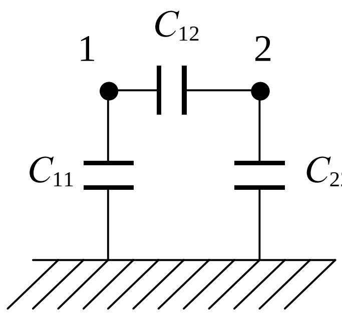

Рис. 10

Анализируя эту схему, можно получить другое выражение для рабочей емкости линии

$$C_{раб} = C_{12} + C_{11}C_{22}/(C_{11} + C_{22}). \tag{17}$$

Можно доказать, что выражения (16) и (17) тождественны.

Распределение зарядов и потенциалов в системе заряженных проводников

Пусть имеется система из n заряженных проводников: q_i ($i = 1,\dots, n$) – заряды проводников, φ_i ($i = 1,\dots, n$) – потенциалы проводников.

Потенциалы проводников можно представить в виде линейной комбинации их зарядов.

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, q_j$$

или

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$$

или

$$[\varphi^{(\text{п})}] = [\alpha]\,[q^{(\text{п})}].$$

Коэффициенты α_{ij} называют потенциальными коэффициентами системы проводников и измеряют в 1/Ф.

Из последнего матричного уравнения можно выразить заряды проводников

$$[q^{(\text{п})}] = [\alpha]^{-1}\,[\varphi^{(\text{п})}] = [\beta]\,[\varphi^{(\text{п})}]$$

или

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_n \end{bmatrix},$$

т. е. $q_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\, \varphi_j$.

Коэффициенты β_{ij} называют емкостными коэффициентами системы проводников и измеряют в фарадах.

Последнее соотношение можно записать иначе

$$q_i = C_{ii}\varphi_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} C_{ij}\,(\varphi_i - \varphi_j),$$

где C_{ij} – это частичные емкости системы проводников;

$C_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}$ – собственные частичные емкости;

$C_{ij}\ (j \neq i) = -\beta_{ij}$ – взаимные частичные емкости.

Матрицы $[\alpha]$, $[\beta]$, $[C]$ симметричные, т.е. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, $C_{ij} = C_{ji}$.Значит, для системы заряженных проводников выполняется принцип взаимности.

Электрические экраны

Принцип электростатического экранирования электрических и электронных элементов в аппаратуре основан на том, что медленно изменяющееся электрическое поле не может проникнуть внутрь объема, ограниченного проводником, поскольку любая поверхность электропроводящего тела в электростатическом поле является эквипотенциальной.

Контрольные вопросы

1. Какими соотношениями описывает поле двух разноимённо заряженных осей?
2. Какими соотношениями описывает поле «коаксиального» кабеля со смещённой жилой?
3. Какими соотношениями описывает поле двухпроводной линии с проводами разных радиусов?
4. Какими соотношениями описывают поле двухпроводной линии с проводами одинаковых радиусов?
5. Какими соотношениями описывают поле системы цилиндр – плоскость?
6. Какими соотношениями описывают поле и ёмкость двухпроводной линии с учётом влияния земли?
7. Какими соотношениями описывают распределение зарядов и потенциалов в системе заряженных проводников?
8. На чём основан принцип действия электростатических экранов?

Глава 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 3.1. Законы электрического поля в проводящей среде

Электрическое поле в проводящей среде характеризуется пространственным распределением вектора напряженности электрического поля и вектора плотности тока.

Уравнения электрического поля в дифференциальной форме имеют вид:

$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_с) = 0$ – второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме. (1)

$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}_{пр}) = 0$ – первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме. (2)

$\boldsymbol{\delta}_{пр} = \gamma\mathbf{E}$ – закон Ома в дифференциальной форме. (3)

При составлении математических моделей электрического поля в проводящей среде источником векторного поля $\boldsymbol{E}$ можно считать пространственное распределение вектора сторонней напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}_с$ (объемно-распределенные источники эдс); источником векторного поля плотности тока проводимости $\delta_{пр}$ можно считать пространственное распределение вектора сторонней плотности тока δ (объемно-распределенные источники тока).

Контрольные вопросы

1. Как записывается второй закон Кирхгофа в дифференциальной форме?
2. Как записывается первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме?
3. Какие векторные поля являются источниками постоянного электрического поля в проводящей среде?

§ 3.2. Граничные условия для векторов электрического поля постоянного тока

На поверхности раздела сред, где γ, $\boldsymbol{E}_с$ или $\boldsymbol{\delta}$ изменяются скачком, справедливы следующие соотношения:

$$\boldsymbol{E}_{1t} - \boldsymbol{E}_{2t} = \boldsymbol{E}_{1ct} - \boldsymbol{E}_{2ct},$$

т.е. скачок тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля равен скачку сторонней тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля. Если $\boldsymbol{E}_с = 0$, то тангенциальная составляющая векторного поля $\boldsymbol{E}$ непрерывна на любой поверхности раздела сред.

$$\boldsymbol{\delta}_{пр2п} - \boldsymbol{\delta}_{пр1п} = \boldsymbol{\delta}_{1п} - \boldsymbol{\delta}_{2п},$$

т.е. скачок нормальной составляющей плотности тока проводимости равен скачку нормальной составляющей сторонней плотности тока с противоположным знаком. Если $\boldsymbol{\delta} = 0$, то нормальная составляющая плотности тока проводимости непрерывна на любой поверхности раздела сред.

Контрольные вопросы

1. Каким уравнением описывают граничное условие для вектора напряжённости электрического поля на поверхностях раздела сред?
2. Каким уравнением описывают граничное условие для вектора плотности тока проводимости на поверхностях раздела сред?

§ 3.3. Аналогия между электрическим полем постоянного тока в проводнике и электростатическим полем в диэлектрике

Рассмотрим краевую задачу анализа электрического поля в проводящей среде. В соответствии с уравнением (1) можно записать

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_с = -\operatorname{grad} \varphi. \qquad (4)$$

Подставив выражение (4) в формулы (3), а затем равенство (3) в выражение (2), получим:

$$\operatorname{div} (\gamma \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{div} (\boldsymbol{\delta} + \gamma \boldsymbol{E}_с). \qquad (5)$$

Сравнив уравнение (5) с уравнением электростатики, можно установить аналогию между электрическим полем постоянных токов в проводнике и электрическим полем в диэлектрике.

Для сравнения запишем уравнения, описывающие эти поля, и сведем их в таблицу.

Электростатическое поле	Электрическое поле в проводящей среде
$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0$	$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_\mathrm{c}) = 0$
$\mathrm{div}\,\mathrm{D} = \rho$	$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\delta}_{\text{пр}} = -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\delta}$
$\boldsymbol{D} = \varepsilon_a \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_r$	$\boldsymbol{\delta}_{\text{пр}} = \gamma \boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$	$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_\mathrm{c} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$
$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{\delta}_{\text{пр}}$
$\boldsymbol{P}_r$	$\gamma \boldsymbol{E}_\mathrm{c}$
ε_a	γ
φ	φ

Из этой таблицы видно, что аналогом вектора плотности тока проводимости $\boldsymbol{\delta}_{\text{пр}}$ является вектор электрического смещения $\boldsymbol{D}$, аналогом удельной проводимости γ – абсолютная диэлектрическая проницаемость, аналогом тока I – поток вектора электрического смещения; аналогом заряда в электростатическом поле являются стоки сторонних электрических токов.

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет уравнение математической физики относительно скалярного магнитного потенциала?
2. На каких соответствиях уравнений и физических величин базируется аналогия между электростатическим полем в диэлектрике и стационарным электрическим полем в проводнике?

§ 3.4. Электрическое поле в диэлектрике вблизи проводника с током

В диэлектрике, окружающем проводник с током, электрическое поле имеет такой же потенциальный характер, как и электростатическое поле. Электрическое поле вне проводника с током описывается либо уравнением

Лапласа, либо Пуассона так же, как и электростатическое поле. Отличие заключается в том, что поверхность проводника с током не является эквипотенциальной, т.е. тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на поверхности проводника не равна нулю. Однако в подавляющем большинстве инженерных расчетов тангенциальная составляющая оказывается на много порядков меньше нормальной составляющей напряженности электрического поля, поэтому тангенциальной составляющей можно пренебречь. Таким образом, граничные условия в диэлектрике на поверхности проводников оказываются практически тождественными граничным условиям в электростатике. Из этого следует, что при анализе электрического поля в диэлектрике вблизи проводника с током можно использовать решения соответствующих электростатических задач.

Контрольные вопросы

1. Чем отличается электрическое поле в диэлектрике вблизи проводника с током от электростатического поля?
2. Почему при анализе электрического поля в диэлектрике вблизи проводника с током можно использовать решения соответствующих электростатических задач?

§ 3.5. Электрическое поле в несовершенных изолирующих средах

Диэлектриком называют вещество, основным электрическим свойством которого является способность поляризоваться в электрическом поле и в котором возможно длительное существование электростатического поля, т.е. электропроводностью можно пренебречь. Проводники обладают настолько большой электропроводностью, что при анализе электрического поля в них поляризационными эффектами можно пренебречь. Если электропроводность вещества мала, но ею нельзя пренебречь и нельзя пренебречь поляризационными эффектами, то такие вещества называют несовершенными диэлектриками, или несовершенными изолирующими средами.

В установившемся режиме электрическое поле в несовершенном диэлектрике определяется пространственным распределением удельной электрической проводимости и источников поля; диэлектрические свойства никак не влияют на распределение скалярного электрического потенциала. На распределение свободных зарядов и поляризованности вещества оказывают влияние и электропроводящие, и диэлектрические свойства вещества.

Контрольные вопросы

1. В чём заключается основная электрофизическая особенность вещества, близкого по свойствам к идеальному диэлектрику?
2. В чём заключается основная электрофизическая особенность вещества, близкого по свойствам к идеальному проводнику?
3. Что такое несовершенный диэлектрик?
4. В чём заключаются особенности электрического поля в несовершенных изолирующих средах?

§ 3.6. Электрическое моделирование физических полей

Методы моделирования физических полей, основанные на аналогии уравнений, описывающих процессы в оригинале и модели, называют аналоговыми методами моделирования. Аналоговое моделирование связано с применением различных моделирующих устройств. Наибольшее распространение получили модели, основанные на аналогии исследуемых физических полей и электрического поля в проводящей среде. Методы, основанные на такой аналогии, называют электрическим моделированием. Эти методы можно разделить на две большие группы:

1) методы сплошных сред;
2) методы электрических сеток.

К методам сплошных сред можно отнести следующие: использование проводящей бумаги – для моделирования плоскопараллельных и осесимметричных полей в кусочно-однородных средах, описываемых уравнениями Лапласа, диффузии или волновым; использование металлических, графитовых, проводящих керамических и пластмассовых пластин, а также проводящей резины и ткани – для тех же задач; использование жидких электролитов, а также влажных дисперсных масс и желеобразных коллоидных материалов – для моделирования трехмерных полей в неоднородных случаях. Для моделирования физических полей, описываемых уравнениями с ненулевой правой частью, могут быть применимы токовводы.

В качестве моделирующих электрических сеток используют *LC*, *LR*, *RC* и резистивные сетки. Правая часть в уравнениях математической физики моделируется включением источников тока в узлы сетки.

Контрольные вопросы

1. Что называют аналоговым моделированием физических полей? Что такое электрическое моделирование?
2. На применении каких материалов базируются методы сплошных сред? Как в этих методах учитывается ненулевая правая часть уравнений?
3. Какие моделирующие сетки используют при электрическом моделировании физических полей?

Глава 4. МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 4.1. Основные законы магнитостатики

Уравнения магнитостатического поля в интегральной и дифференциальной формах

Закон полного тока в интегральной форме:

$$\oint \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I. \tag{1}$$

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром интегрирования, причем положительными считаются токи, направления которых образуют правовинтовую систему с направлением обхода контура.

Закон непрерывности магнитного потока:

$$\oint_S \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0. \tag{2}$$

Магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это означает, что линии вектора магнитной индукции всегда замкнуты, т.е. не имеют начала и конца.

Из уравнения (1) и из математического определения ротора векторного поля следует закон полного тока в дифференциальной форме:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}. \tag{3}$$

Уравнение (3) записано в предположении, что при анализе магнитостатического поля все электрические токи можно считать сторонними.

Из уравнения (2) и из математического определения дивергенции векторного поля следует закон непрерывности линий магнитной индукции в дифференциальной форме:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0. \qquad (4)$$

Этот закон свидетельствует о соленоидальном характере поля вектора **B**: не существует магнитных зарядов, которые служили бы истоками или стоками векторного поля магнитной индукции.

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\,\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}\,),$$
$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{M}.$$

Истоками векторного поля **H** являются стоки векторного поля намагниченности вещества **M**, что следует из уравнения (4).

Области пространства, где $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} \neq 0$ называют магнитными полюсами. Если в некоторой области $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} > 0$, то ее называют северным магнитным полюсом. Если в некоторой области $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} < 0$, то ее называют южным магнитным полюсом.

Уравнение материальной связи между векторами **B** и **H**, дополняющее уравнения (3) и (4), в линеаризованном виде может быть записано так:

$$\boldsymbol{B} = \mu_a\boldsymbol{H} + \boldsymbol{B}_r \quad \text{или} \quad \boldsymbol{H} = \nu_a(\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_r\,), \qquad (5)$$

где $\nu_a = \mu_a^{-1}$ – удельное магнитное сопротивление вещества. В случае линейных магнитных свойств вещества объемная плотность энергии магнитного поля определяется по формуле

$$w_\text{м} = (\boldsymbol{BH})/2 = (\mu_a H^2)/2 = (\nu_a B^2)/2.$$

Граничные условия для векторов магнитного поля

На поверхности раздела сред, где μ_a или $\boldsymbol{B}_r$ изменяются скачком, имеют место следующие граничные условия для векторов **B** и **H**:

$$(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)\times\boldsymbol{n} = \tau.$$

Скачок тангенциальной составляющей вектора **H** равен поверхностной плотности тока на границе раздела сред. Если $\tau = 0$, то тангенциальная составляющая вектора **H** непрерывна.

Нормальная составляющая вектора магнитной индукции на любой поверхности раздела сред непрерывна:

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Векторные уравнения Пуассона и Лапласа

Из уравнения (4) следует, что векторное поле $\boldsymbol{B}$ можно представить в виде ротора некоторого векторного поля:

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}. \tag{6}$$

Здесь векторное поле $\boldsymbol{A}$ называют векторным магнитным потенциалом.

Подставив равенство (6) в выражение (5), а затем формулу (5) в выражение (3), получим

$$\mathrm{rot}\,(\nu_a\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,) = \boldsymbol{\delta} + \mathrm{rot}\,(\nu_a \boldsymbol{B}_r). \tag{7}$$

Выражение (7) является уравнением магнитостатического поля относительно векторного магнитного потенциала.

Для обеспечения единственности решения этого уравнения кроме граничных условий необходимо ввести условие калибровки, накладывающее ограничение на дивергенцию векторного магнитного потенциала. Наиболее простым условием является $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$. Преобразуем уравнение равенства (7) с учетом этой калибровки. Для этого левую часть (7) запишем в виде:

$$\mathrm{rot}\,(\nu_a\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,) = \mathrm{grad}\,(\nu_a\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,) - (\nabla\,\nu_a \nabla\,)\,\boldsymbol{A}$$

или $$\mathrm{rot}\,(\nu_a\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\,) - \mathrm{grad}\,(\nu_a\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,) = -\,(\nabla\,\nu_a \nabla\,)\,\boldsymbol{A}.$$

Поскольку $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$ из левой части выражения (7) можно вычесть $\mathrm{grad}\,(\nu_a\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A})$, значит равенство (7) преобразуется к виду

$$-\,(\nabla\,\nu_a \nabla\,)\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\delta} + \mathrm{rot}\,(\nu_a \boldsymbol{B}_r). \tag{8}$$

Полученное выражение (8) называется векторным уравнением Штурма-Луивиля. Оно пригодно для расчета магнитостатических полей в однородных и кусочно-однородных средах, причем на поверхностях раздела сред выполняется условие $\boldsymbol{A}_{1t} = \boldsymbol{A}_{2t}$, т.е. тангенциальная составляющая векторного магнитного потенциала непрерывна. В областях, где $\nu_a = \mathrm{const}$, ν_a можно вынести за знак дифференциальных операторов, тогда уравнение (8) примет вид:

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\,\mu_a \boldsymbol{\delta} - \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}_r. \tag{9}$$

В областях, где $\boldsymbol{\delta} = 0$ и $\boldsymbol{B}_r = 0$, распределение векторного потенциала описывается уравнением

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = 0. \tag{10}$$

Равенство (9) называет уравнением Пуассона, а выражение (10) – векторным уравнением Лапласа.

В декартовой системе координат уравнение (9), а значит, и (10) распадаются на три независимых скалярных уравнения:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_a \delta_x + \frac{\partial B_{ry}}{\partial z} - \frac{\partial B_{rz}}{\partial y},$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu_a \delta_y + \frac{\partial B_{rz}}{\partial x} - \frac{\partial B_{rx}}{\partial z},$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_a \delta_z + \frac{\partial B_{rx}}{\partial y} - \frac{\partial B_{ry}}{\partial x}.$$

Краевая задача магнитостатики для неоднородных сред

Для расчета магнитостатического поля в неоднородной среде необходима другая модификация уравнения (7) с учетом условия калибровки, Если из левой части выражения (7) вычесть grad (ν_a' div $\boldsymbol{A}$), где ν_a' – удельное магнитное сопротивление среды, занимающей наибольший объем в расчетной области, тогда получим:

$$\mathrm{rot}\,((\nu_a - \nu_a')\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) - (\nabla \nu_a' \nabla)\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\delta} + \mathrm{rot}\,(\nu_a \boldsymbol{B}_r). \qquad (11)$$

Уравнение (11) позволяет представлять магнитостатическое поле в неоднородной среде непрерывным полем векторного магнитного потенциала. Это дает возможность применять конечноразностные и конечноэлементные методы без существенных ограничений.

Для обеспечения единственности решения уравнения (11) его необходимо дополнить граничными условиями для искомого потенциала или для тангенциальной составляющей вектора напряженности магнитного поля на поверхности, ограничивающей расчетную область, т.е.

$\boldsymbol{A}$ = поверхностное распределение – на части граничной поверхности Γ_1,

$\boldsymbol{H}_t$ = поверхностное распределение – на части граничной поверхности Γ_2,

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ – замкнутая граничная поверхность.

При анализе и моделировании магнитостатических полей необходимо учитывать, что аналогия уравнений магнитостатического и электростатического поля имеет место только в простейших случаях.

Магнитное поле элемента тока

Пусть в однородной среде находится бесконечно короткий элемент тока I длиной dl. Этот элемент тока является источником распределения векторного магнитного потенциала

$$\mathrm{d}\,\boldsymbol{A} = (\mu_a I \mathrm{d}\boldsymbol{l})/(4\pi R), \qquad (12)$$

где d$\boldsymbol{l}$ – вектор длины элемента тока, направление которого совпадает с направлением тока;

$\boldsymbol{R}$ – расстояние между точкой источника и точкой наблюдения.

Распределение напряженности магнитного поля от элемента тока описывается следующим выражением:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = (I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R})/(4\pi R^3), \qquad (13)$$

где $\boldsymbol{R}$ – вектор расстояния, направленный от точки источника к точке наблюдения.

Формулы (12) и (13) выражают закон Био – Савара.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется закон полного тока в интегральной форме для магнитостатического поля?
2. Как формулируется закон непрерывности магнитного потока в интегральной форме для магнитостатического поля?
3. Как формулируется закон полного тока в дифференциальной форме для магнитостатического поля?
4. Как формулируется закон непрерывности линий магнитной индукции в интегральной форме для магнитостатического поля?
5. Как связаны истоки вектора напряжённости магнитного поля с векторным полем намагниченности вещества?
6. Что такое магнитные полюса: северный и южный?
7. Как записывают уравнение материальной связи между напряжённостью магнитного поля и магнитной индукцией?
8. Использую какую формулу рассчитывают объёмную плотность энергии магнитостатического поля?
9. Каким уравнением описывается граничное условие для вектора напряжённости магнитного поля на поверхностях раздела сред?
10. Каким уравнением описывают граничное условие для вектора магнитной индукции на поверхностях раздела сред?
11. Что такое векторный магнитный потенциал?

12. Какой вид имеет уравнение магнитостатики относительно векторного магнитного потенциала?
13. Что необходимо для обеспечения единственности решения векторного уравнения магнитостатики?
14. Какой вид имеет векторное уравнение Штурма–Луивиля? Какова область его применения?
15. На каких векторных уравнениях базируется краевая задача анализа магнитостатического поля в однородной среде?
16. На каком векторном уравнении базируется краевая задача анализа магнитостатического поля в неоднородной среде? Какими граничными условиями оно дополняется?
17. Какими соотношениями определяют распределение векторного магнитного потенциала и напряжённости магнитного поля вокруг элемента тока?

§ 4.2. Интегральные параметры магнитостатического поля

Выражение магнитного потока через векторный потенциал:

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{l}. \qquad (14)$$

Магнитный поток, проходящий через некоторую незамкнутую поверхность, равен циркуляции векторного магнитного потенциала вдоль контура, ограничивающего эту поверхность.

Криволинейный интеграл (14) берется с неизменным знаком, если положительное направление обхода контура образует правовинтовую систему с положительным направлением магнитного потока.

Теперь выразим энергию магнитного поля через распределение векторного магнитного потенциала:

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{HB} - \boldsymbol{\delta A};$$

$$\boldsymbol{HB} = \mathrm{div}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{\delta A};$$

$$W_{\text{м}} = 0{,}5\int_{V_\infty} \boldsymbol{HB}\mathrm{d}V = 0{,}5\int_{V_\infty} \boldsymbol{\delta A}\mathrm{d}V + 0{,}5\int_{V_\infty} \mathrm{div}\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V =$$

$$= 0{,}5\int_{V_\delta} \boldsymbol{\delta A}\mathrm{d}V + 0{,}5\int_{S_\infty} (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Последний интеграл в этом выражении равен нулю, так как на больших расстояниях от проводов с токами произведение $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}$ убывает быстрее, чем растет по площади поверхность интегрирования. Поэтому

$$W_{м} = 0{,}5 \int\limits_{V_\delta} \boldsymbol{\delta A}\,\mathrm{d}V, \tag{15}$$

где V_δ – объем, занятый проводниками с током.

Потокосцепление. Собственная и взаимная индуктивности

Согласно закону электромагнитной индукции в контуре, охватывающем переменный магнитный поток, индуцируется эдс:

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Если контур состоит из w витков одного направления намотки и все они сцеплены с одним и тем же потоком, то эдс отдельных витков суммируются арифметически и результирующая эдс равна

$$e = -w\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(w\Phi) = -\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Произведение $\psi = w\Phi$ называют магнитным потокосцеплением.

Пусть контур выполнен из тонкого провода, а магнитное поле возбуждено собственным током I этого контура. Тогда потокосцепление в этом контуре пропорционально току, если окружающая среда обладает линейными магнитными свойствами $\psi = LI$. Коэффициент пропорциональности L называют собственной индуктивностью контура или цепи.

Можно доказать, что энергия магнитного поля этого контура равна

$$W_{М} = 0{,}5\psi I = 0{,}5LI^2.$$

В случае двух индуктивно связанных контуров с токами I_1 и I_2 можно получить выражение для энергии магнитного поля в виде:

$$W_{\text{м}} = 0{,}5\sum \psi I = 0{,}5(I_1\psi_1 + I_2\psi_2 \pm I_1\,\psi_{21} + I_2\psi_2), \qquad (16)$$

где ψ_1 и ψ_2 – потокосцепления контуров, вызванные собственными токами I_1 и I_2;

ψ_{21} и ψ_{12} – потокосцепления взаимной индукции, обусловленные токами I_2 и I_1 соответственно и пропорциональные им в случае линейных магнитных свойств среды:

$$\psi_{21} = M_{21}I_2;$$

$$\psi_{12} = M_{12}I_1;$$

$$M_{12} = M_{21} = M,$$

где M – взаимная индуктивность контуров или цепей. Знаки «+» или «–» в выражении (16) зависят от способа включения контуров – согласного или встречного.

Если контуры окружает однородная среда, то

$$M = \mu\mu_0/(4\pi)\oint\limits_{l_2}\oint\limits_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{R}.$$

Контрольные вопросы

1. Как выражают магнитный поток через векторный потенциал?
2. Как выражают энергию магнитостатического поля через векторный потенциал?
3. Что такое магнитное потокосцепление и как с ним связана эдс электромагнитной индукции?
4. Что такое индуктивность контура и как она связана с энергией магнитного поля?
5. Что такое взаимная индуктивность двух контуров?
6. По какой формуле вычисляют взаимную индуктивность двух контуров, находящихся в бесконечной однородной среде?

§ 4.3. Частные случаи плоскопараллельных магнитных полей постоянных токов

Распределение векторного потенциала в случае одиночного провода круглого сечения

Пусть по проводу радиусом a проходит ток I (рис. 1). Во всех окружающих точках и внутри провода абсолютная магнитная проницаемость равна μ_a; $\boldsymbol{M}_r = 0$.

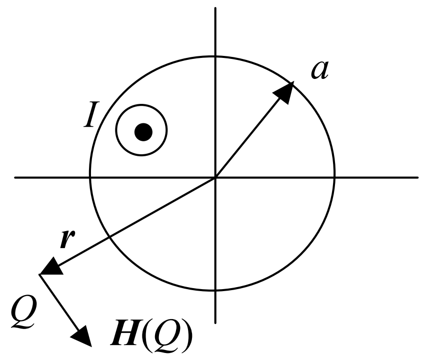

Рис. 1

Пусть точка наблюдения Q лежит вне провода на расстоянии $r \geq a$. Тогда по закону полного тока

$$\boldsymbol{H}(Q) = \mathbf{1}_\alpha H_\alpha = \mathbf{1}_\alpha H_e = \mathbf{1}_\alpha I/(2\pi r);$$

$$B_e = B_\alpha = \mu_a I/(2\pi r);$$

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A};$$

$$B_\alpha = \operatorname{rot}_\alpha \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

значит для внешнего магнитного поля ($r \geq a$) можно записать

$$A_e = A_\alpha = \int -B_e \, dr = -\int \mu_a I/(2\pi r) dr = -\mu_a I/(2\pi) \ln(r) + C_e.$$

Плотность тока внутри провода равна

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{1}_z \delta_z = \mathbf{1}_z I/(\pi a^2).$$

Через поверхность, натянутую на окружность радиусом $r \leq a$ с центром на оси провода, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси провода, протекает ток

$$I(r) = \delta \pi r^2 = I r^2/a^2,$$

значит напряженность магнитного поля внутри провода равна

$$H_i = I(r)/(2\pi r) = Ir/(2\pi a^2),$$

а магнитная индукция –

$$B_i = \mu_a Ir/(2\pi a^2).$$

Векторный потенциал внутри провода

$$A_i = -\int B_i \mathrm{d}r = -\mu_a Ir^2/(4\pi a^2) + C_i.$$

Значение одной из постоянных интегрирования C_i или C_e можно выбрать произвольно, другую же нужно подобрать так, чтобы была обеспечена непрерывность распределения векторного потенциала: $A_i = A_e$, при $r = a$.

Окончательно получаем

$$A_e(r) = -\mu_a I/(2\pi)\ln(r),$$

$$A_i = \mu_a I/(4\pi) - \mu_a I/(2\pi)\ln(a) - \mu_a Ir^2/(2\pi a^2).$$

Вне провода распределение векторного потенциала не зависит от радиуса провода.

Магнитное поле и индуктивность двухпроводной линии

В случае двух параллельных цилиндров одинаковых диаметров $2a$ с токами $I_1 = I, I_2 = -I$ (рис. 2) результирующий векторный потенциал внешнего магнитного поля равен

$$A_e(Q) = A_{e1} + A_{e2} = -\mu_a I_1/(2\pi)\ln(r_1) - \mu_a I_2/(2\pi)\ln(r_2),$$

$$A_e(Q) = \mu_a I/(2\pi)\ln(r_2/r_1).$$

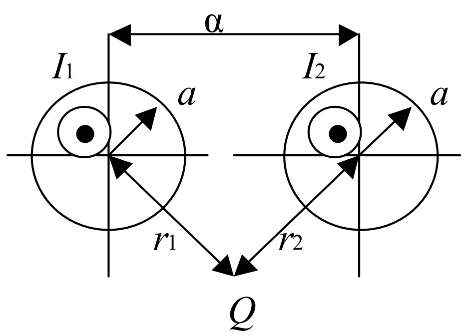

Рис. 2

Принимая $A_e = \text{const}$, можно получить уравнение магнитных линий внешнего поля, т. е. $r_2/r_1 = K_e$.

Для точек, расположенных внутри сечения первого провода, результирующий векторный потенциал равен

$$A_i = A_{i1} + A_{e2} = \mu_a I/(4\pi) - \mu_a I/(2\pi)\ln(a) - \mu_a I\, r_1^2/(4\pi a^2) + \mu_a I/(2\pi)\ln(r_2).$$

Принимая A_i = const, можно получить уравнение магнитных линий внутреннего поля:

$$r_2 = K_i \exp(r_1^2/2a^2).$$

Для точек, расположенных внутри сечения второго провода, результирующий векторный потенциал равен:

$$A_i = A_{i2} + A_{e1} = -\mu_a I/(4\pi) + \mu_a I/(2\pi)\ln(a) + \mu_a I r_2^2/(4\pi a^2) - \mu_a I/(2\pi)\ln(r_1).$$

Энергию магнитного поля двухпроводной линии можно определить по формуле (15)

$$W_{\text{м}} = 0{,}5\int_V \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V,$$

где V – объем, занимаемый двумя проводниками линии на участке длиной l; векторы $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{A}$ коллинеарны и направлены вдоль оси z, поэтому

$$\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{A} = \delta A.$$

Распределение векторного потенциала внутри второго провода противоположно распределению векторного потенциала внутри первого провода, поэтому интегрировать можно только по объему первого проводника и полученный интеграл удвоить:

$$W_{\text{м}} = \int_{V_1} \delta A\,\mathrm{d}V = l\int_{S_1} \delta A\,\mathrm{d}S = l\int_{S_1} \delta A r\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}r,$$

где α и r – полярные (цилиндрические) координаты точки наблюдения относительно центра первого провода. Проведя математические выкладки, можно доказать следующие соотношения:

– энергия магнитного поля на единицу длины линии:

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{м}}}{\mathrm{d}z} = \mu_a I^2/(2\pi)(\ln(d/a) + 0{,}25);$$

– индуктивность на единицу длины линии:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}z} = \mu_a/(\pi)(\ln(d/a) + 0{,}25).$$

Магнитное поле и индуктивность коаксиального кабеля

Коаксиальный кабель – это трубчатый проводник, у которого два разделенных изоляцией проводящих цилиндра с совпадающими осями являются прямым и обратным проводами. В более сложных случаях прямой и обратный провода могут быть многослойными.

Магнитное поле коаксиального кабеля обладает осевой симметрией, и если ось z цилиндрических координат (r, α, z) совместить с осью кабеля, то вектор $\boldsymbol{H} = \mathbf{1}_\alpha H_\alpha$, $H_\alpha = H(r)$. Напряженность магнитного поля $H(r)$ в различных областях поперечного сечения кабеля определим, применяя закон полного тока для каждой из областей (рис. 3).

$$\oint_l \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l H_\alpha \mathrm{d}l = I,$$

следовательно

$$H_k = \frac{I_k}{2\pi r},$$

где H_k – напряженность магнитного поля в k-области;

I – полный ток, протекающий через незамкнутую поверхность, ограниченную контуром интегрирования l.

Эта поверхность принадлежит поперечному сечению кабеля, в котором область 3 – это слой изоляции, который разделяет прямой двухслойный провод (области 1, 2) и обратный двухслойный провод (области 4, 5).

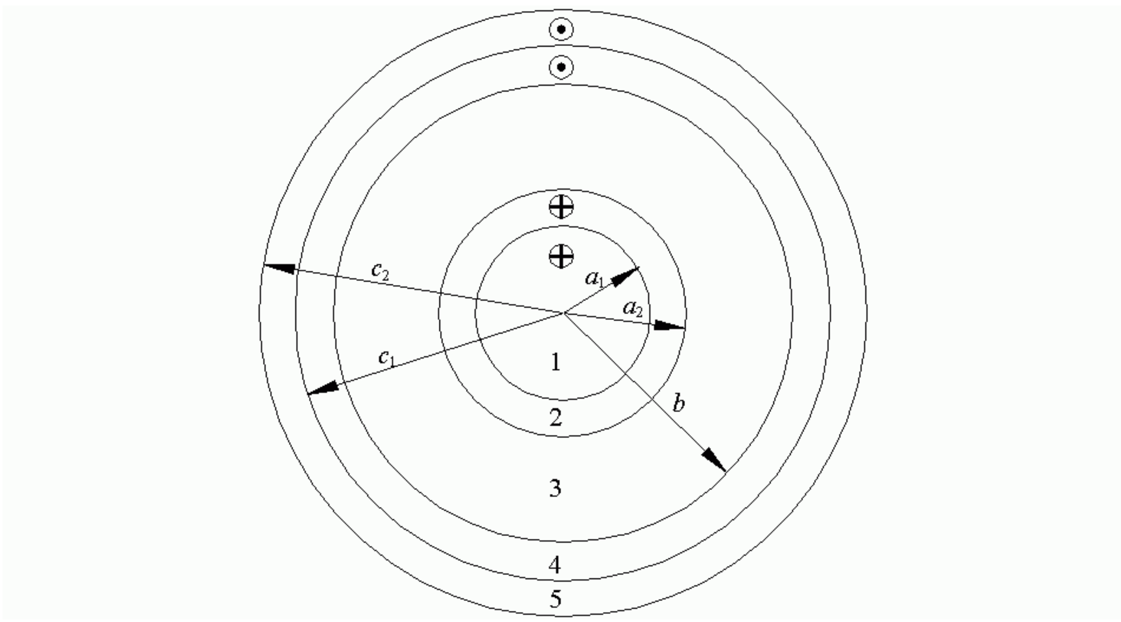

Рис. 3

Величина I_k определяется по вектору плотности тока $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{1}_z\delta_z$.

Для расчета плотности тока предварительно определяют токи в каждом двухслойном проводнике по заданному току I в кабеле:

$$\begin{cases} \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{g_1}{g_2} = \dfrac{\gamma_1 S_1}{\gamma_2 S_2} \\ I_1 + I_2 = I \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \dfrac{I_4}{I_5} = \dfrac{g_4}{g_5} = \dfrac{\gamma_4 S_4}{\gamma_5 S_5} \\ I_4 + I_5 = I \end{cases} \tag{18}$$

После расчета токов I_1, I_2, а также токов I_4, I_5 рассчитывают плотности токов δ_k в этих областях по формуле $\delta_k = I_k/S_k$; затем рассчитывают напряженности магнитного поля H_k в соответствующих областях:

$$H_1 = \frac{\delta_1 r}{2}, \qquad r \in (0,\ a);$$

$$H_2 = \frac{I_1 + \delta_2 \pi (r^2 - a_1^2)}{2\pi r}, \qquad r \in (a_1,\ a_2);$$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}, \qquad r \in (a_2,\ b);$$

$$H_4 = \frac{I - \delta_4 \pi (r^2 - b^2)}{2\pi r}, \qquad r \in (b,\ c_1);$$

$$H_5 = \frac{I_5 - \delta_5 \pi (r^2 - c_1^2)}{2\pi r}, \qquad r \in (c_1,\ c_2).$$

Вне кабеля магнитного поля нет ($H = 0$). Энергия магнитного поля, запасенная на участке кабеля единичной длины, определяется как сумма энергий отдельных областей:

$$W_{\text{м}} = \sum_{k=1}^{k=n} W_k,$$

где $$W_k = \int \frac{\mu_0 \mu H_k^2}{2} \mathrm{d}V. \tag{19}$$

Для коаксиального кабеля можно принять для всех областей $\mu = 1$, а элемент объема единичной длины для любой области $dV = 2\pi r dr$. Тогда энергия магнитного поля в изоляционном слое (область 3) равна

$$W_3 = 0{,}5 \int_{a_2}^{b} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 r^2} 2\pi r\,dr = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\frac{b}{a_2}.$$

Эта энергия определяет внешнюю индуктивность L_e кабеля единичной длины

$$W_3 = W_e = 0{,}5 L_e I^2,$$

т.е.

$$L_e = \frac{2W_e}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\frac{b}{a_2}. \qquad (20)$$

В соответствии с формулами (19), (20) можно определить энергии магнитного поля и соответствующие внутренние индуктивности L_i для других областей коаксиального кабеля.

Магнитное поле цилиндрической катушки

Напряженность магнитного поля на оси однослойной цилиндрической катушки вычисляют на основании закона Био - Савара

$$d\boldsymbol{H} = (I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R})/(4\pi R^3).$$

Выделим в катушке круговой виток с током I и найдем напряженность поля в точке на оси этого витка и катушки (рис. 4).

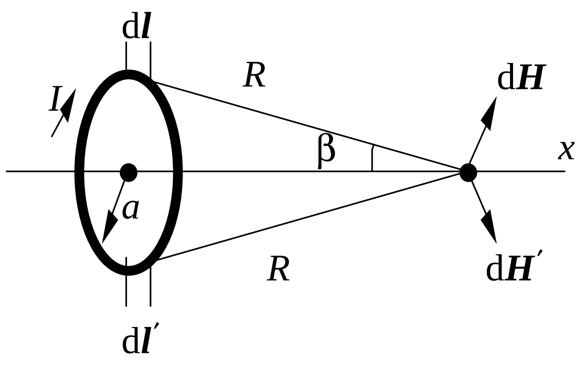

Рис. 4

Для любой точки на оси витка векторы $d\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{R}$ перпендикулярны, поэтому

$$d\boldsymbol{H} = (I dl)/(4\pi R^2).$$

Аналогичной формулой определяется вектор d$\boldsymbol{H}'$, обусловленный током I в элементе dl'. Нормальные к оси x составляющие этих векторов взаимно компенсируются, а составляющие по оси x, равные $\sin\beta \mathrm{d}H$, складываются. Напряженность H, обусловленная током I в круговом витке, равна:

$$H = \int_0^{2\pi a} \frac{\sin\beta I \,\mathrm{d}l}{4\pi R^2} = \frac{I\sin\beta}{4\pi R^2} 2\pi a = \frac{Ia}{2R^2}\sin\beta.$$

Так как $a/R = \sin\beta$, то

$$H = \frac{I}{2a}\sin^3\beta. \qquad (21)$$

Определим напряженность магнитного поля в точке на оси однослойной цилиндрической катушки длиной l, имеющей W витков радиусом a (рис. 5).

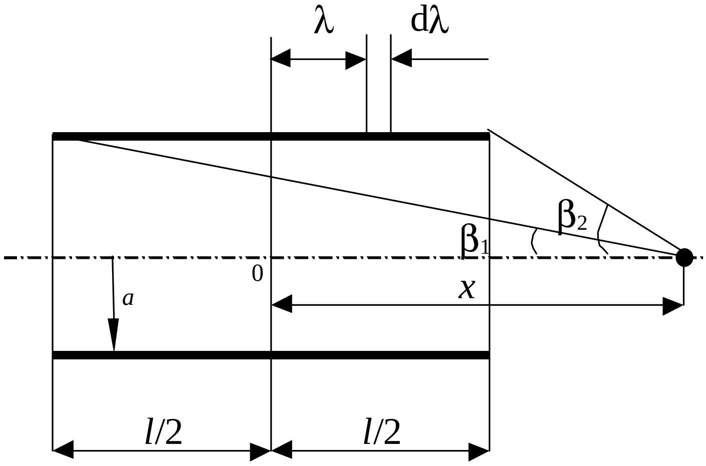

Рис. 5

Элемент длины dλ этой катушки является круговым контуром с током

$$\mathrm{d}I = \frac{IW}{l}\mathrm{d}\lambda.$$

В соответствии с формулой (21) определим напряженность магнитного поля, созданную этим круговым контуром с током:

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}I}{2a}\sin^3\beta = \frac{IW}{2la}\sin^3\beta\,\mathrm{d}\lambda.$$

Напряженность H, созданная током во всей катушке, равна:

$$H = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{IW \sin^3\beta}{2la} \mathrm{d}\lambda .$$

Так как $(x - \lambda)/a = \mathrm{ctg}\,\beta$, $\mathrm{d}\lambda/a = \mathrm{d}\beta/\sin^2\beta$, поэтому

$$H = \frac{IW}{2l} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\beta\, \mathrm{d}\beta = \frac{IW}{2l} (\cos\beta_1 - \cos\beta_2) , \qquad (22)$$

где $\cos\beta_1 = \dfrac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{a^2 + (x + \frac{l}{2})^2}}$, $\cos\beta_2 = \dfrac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{a^2 + (x - \frac{l}{2})^2}}$.

Формулу (22) для расчета напряженности магнитного поля на оси однослойной катушки можно применить и для многослойных катушек, суммируя напряженности H_k в фиксированной точке на оси от каждого слоя с переменным радиусом a_k.

Контрольные вопросы

1. По каким формулам может быть рассчитано распределение векторного потенциала вокруг одиночного прямолинейного провода круглого сечения?
2. По каким формулам может быть рассчитано распределение векторного потенциала двухпроводной линии?
3. По каким формулам могут быть рассчитаны энергия магнитного поля и индуктивность двухпроводной линии?
4. На каких соотношениях базируется расчёт магнитного поля коаксиального кабеля?
5. Какие соотношения определяют распределение токов в многослойной жиле и оболочке коаксиального кабеля?
6. По каким формулам рассчитывают распределение напряжённости магнитного поля в слоях коаксиального кабеля?
7. По какой формуле рассчитывают внешнюю индуктивность кабеля на единицу длины?
8. Какой формулой описывают распределение напряжённости магнитного поля на оси круглого контура с током?
9. Какой формулой описывают распределение напряжённости магнитного поля на оси бесконечно тонкой однослойной катушки с током?

§ 4.4. Скалярный магнитный потенциал

Скалярная краевая задача анализа магнитостатического поля

Запишем систему уравнений магнитостатики:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\delta}, \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \\ \boldsymbol{B} = \mu_a \boldsymbol{H} + \boldsymbol{B}_r. \\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{\delta} = 0; \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}_\text{ф};$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{M}_\text{ф};$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{M}_\text{ф} - \mathrm{grad}\,\varphi_H,$$

где $\boldsymbol{M}_\text{ф}$ – фиктивная намагниченность среды;

φ_H – скалярный магнитный потенциал.

$$\mathrm{div}(\mu_a \boldsymbol{M}_\text{ф} - \mu_a\,\mathrm{grad}\,\varphi_H + \boldsymbol{B}_r) = 0,$$

$$\mathrm{div}(\mu_a\,\mathrm{grad}\,\varphi_H) = \mathrm{div}(\mu_a \boldsymbol{M}_\text{ф} + \boldsymbol{B}_r). \qquad (23)$$

Выражение (23) является уравнением магнитостатики относительно скалярного магнитного потенциала. Оно может служить основой для постановки скалярной краевой задачи магнитостатики. Уравнение (23) дополняется следующими граничными условиями:

φ_H =поверхностное распределение – на части граничной поверхности Γ_1;

$\boldsymbol{B}_n$ =поверхностное распределение – на части граничной поверхности Γ_2;

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ – замкнутая граничная поверхность.

Это уравнение особенно удобно применять, когда источниками магнитного поля в расчетной области являются ненулевые граничные условия и остаточная магнитная индукция постоянных магнитов. В этом случае $\boldsymbol{M}_\text{ф} = 0$. Если внутри расчетной области источники поля отсутствуют, то уравнение (23) приобретает вид

$$\mathrm{div}\,(\mu_a\,\mathrm{grad}\,\varphi_H) = 0. \qquad (24)$$

Если внутри расчетной области однородная по магнитным свойствам среда, то уравнение (24) сводится к уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi_H = 0.$$

Равенство (2) можно применять для анализа магнитостатических полей, вызванных электрическими токами, в областях, где эти токи отсутствуют, поскольку там $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0$ и $\boldsymbol{H} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi_H$. В этом случае при анализе может сказываться неоднозначность скалярного магнитного потенциала, связанная с ненулевым значением циркуляции вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура, охватывающего электрический ток. Магнитное напряжение между двумя точками зависит от пути интегрирования напряженности магнитного поля

$$U_{MAB} = \int_A^B \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \varphi_{HA} - \varphi_{HB} + nI,$$

где n – целое любое число.

Фиктивная намагниченность среды в уравнении (23) вводится для преодоления проблемы неоднозначности скалярного магнитного потенциала. В частных случаях на каждый замкнутый контур, образуемый каждым током, натягивается тонкая непроницаемая перегородка, на которой поверхностно распределен магнитный диполь и на которой скалярный магнитный потенциал изменяется скачком. Если по контуру протекает ток I, то скачок потенциала на соответствующей перегородке равен

$$\oint \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I.$$

Магнитное экранирование

Магнитные экраны представляют собой полые изделия из ферромагнитного материала, предназначенные для защиты некоторой области пространства от воздействия внешнего магнитного поля. Материал экрана выполняет роль магнитного шунта, уменьшающего магнитное напряжение между точками внутри полости. В результате шунтирующего действия магнитного материала напряженность магнитного поля внутри полости уменьшается по сравнению с напряженностью вне полости.

Отношение $|\boldsymbol{H}_0|/|\boldsymbol{H}_1|$ называют коэффициентом эффективности экранирования. Здесь $\boldsymbol{H}_0$ – напряженность вне экрана; $\boldsymbol{H}_1$ – напряженность внутри полости экрана. Расчет коэффициента эффективности экранирования для реальной конструкции экрана производится путем анализа магнитостатического поля с помощью дифференциальных или интегральных уравнений.

Пространственные интегральные уравнения в магнитостатике

Распределение напряженности магнитного поля в вакууме, вызванное совместным действием электрических токов и объемно распределенных магнитных диполей, определяется следующим интегральным соотношением:

$$\boldsymbol{H} = \int\limits_{V_\delta} (\boldsymbol{\delta}\times\boldsymbol{R})/(4\pi R^3)\mathrm{d}V + 1/(4\pi)\int\limits_{V_M} (3(\boldsymbol{MR})\boldsymbol{R}/R^5 - \boldsymbol{M}/\boldsymbol{R}^3)\mathrm{d}V = \text{И}_1(\boldsymbol{\delta}) + \text{И}_2(\boldsymbol{M}).$$

Магнитные свойства вещества можно описывать характеристиками $\boldsymbol{M} = f(\boldsymbol{H})$, поэтому пространственное интегральное уравнение магнитостатики имеет вид

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{f}(\text{И}_1(\boldsymbol{\delta}) + \text{И}_2(\boldsymbol{M})). \qquad (25)$$

Уравнение (25) решается относительно вектора намагниченности, поэтому расчетной областью при его решении является объем V_M, занятый ферромагнитными материалами. Вычислительные методы, основанные на решении уравнения (25), называют методами пространственных интегральных уравнений (ПрИУ). Во многих случаях эти методы оказываются более экономичными, чем дифференциальные методы, основанные на уравнении (23) или на векторном уравнении магнитостатики (11).

Контрольные вопросы

1. На каких соотношениях основано введение в расчёты скалярного магнитного потенциала?
2. Какой вид имеет уравнение магнитостатики относительно скалярного магнитного потенциала? Какими граничными условиями оно дополняется при формулировании краевой задачи?
3. С чем связана проблема неоднозначности скалярного магнитного потенциала?
4. На каком принципе основано действие магнитных экранов?
5. Что называют коэффициентом эффективности экранирования магнитного поля?
6. Какой вид имеют пространственные интегральные уравнения магнитостатики?

§ 4.5. Мощность, передаваемая по двухпроводной линии постоянного тока

Пусть имеется двухпроводная линия с проводами произвольного сечения. По линии протекает постоянный ток I. Потенциалы проводов φ_1 и φ_2 (рис. 6).

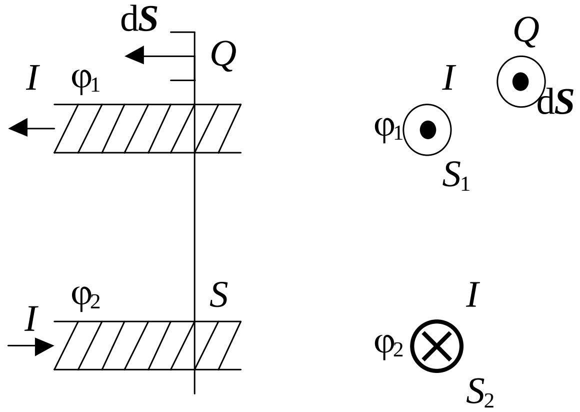

Рис. 6

Плотность потока электромагнитной мощности **П** в точке Q:

$$\mathbf{\Pi}(Q) = \boldsymbol{E}(Q)\times\boldsymbol{H}(Q) \text{ (в данной системе } \boldsymbol{E}_\text{с} = 0).$$

Мощность P, передаваемая по двухпроводной линии, равна потоку вектора Пойнтинга через плоскость поперечного сечения S:

$$P = \int_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S ((\nabla\varphi)\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{H})\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \varphi\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{S} =$$

$$= -\oint_{l_\infty} \varphi\boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_S \varphi\boldsymbol{\delta}_\text{пр}\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

При бесконечном удалении точки наблюдения от проводов φ – бесконечно малая величина 1-го порядка, $\boldsymbol{H}$ – бесконечно малая величина 2-го порядка, длина контура интегрирования – бесконечно большая величина 1-го порядка. Следовательно, первый криволинейный интеграл – бесконечно малая величина 2-го порядка, т.е. он равен нулю, значит

$$P = \int_S \varphi\boldsymbol{\delta}_\text{пр}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varphi_1\int_{S_1} \boldsymbol{\delta}_\text{пр}\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \varphi_2\int_{S_2} \boldsymbol{\delta}_\text{пр}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varphi_1 I - \varphi_2 I = (\varphi_1 - \varphi_2)I = UI. \quad (26)$$

Контрольные вопросы

1. Чему равна мощность, передаваемая по двухпроводной линии постоянного тока?
2. Как следует соотношение для передаваемой мощности (26) из теоремы Умова–Пойнтинга?

Глава 5. ПЕРЕМЕННОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 5.1. Основные уравнения электромагнитного поля в комплексной форме. Уравнения Максвелла в комплексной форме

Электромагнитное поле, в котором токи, заряды, потенциалы и составляющие векторов меняются по гармоническому закону с одной и той же заданной частотой, называется *гармоническим электромагнитным полем*. Для анализа таких полей целесообразно использовать метод комплексных амплитуд, который применяют в теории цепей синусоидального тока. Пусть в декартовой системе координат задан некоторый вектор $\boldsymbol{N}(Q,t)$, составляющие которого меняются по гармоническому закону с одинаковой частотой:

$$\boldsymbol{N}(Q,t) = \mathbf{1}_x N_{xm}(Q)\sin(\omega t+\alpha) + \mathbf{1}_y N_{ym}(Q)\sin(\omega t+\beta) + \mathbf{1}_z N_{zm}(Q)\sin(\omega t+\gamma). \quad (1)$$

Амплитуды и начальные фазы составляющих могут быть функциями пространственных координат, но не зависят от времени. При совпадении фаз всех трех составляющих вектор будет меняться по закону синуса, не меняя направления в пространстве. В этом случае говорят, что вектор $\boldsymbol{N}(Q,t)$ линейно поляризован. В общем случае, когда $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, вектор будет вращаться в пространстве, описывая при этом эллипс. В этом случае говорят, что вектор $\boldsymbol{N}(Q,t)$ эллиптически поляризован.

Комплексной амплитудой вектора $\boldsymbol{N}(Q,t)$ будем называть выражение

$$\dot{N}_m = \mathbf{1}_x N_{xm}\,\mathrm{e}^{j\alpha} + \mathbf{1}_y N_{ym}\,\mathrm{e}^{j\beta} + \mathbf{1}_z N_{zm}\,\mathrm{e}^{j\gamma} = \mathbf{1}_x \dot{N}_{xm} + \mathbf{1}_y \dot{N}_{ym} + \mathbf{1}_z \dot{N}_{zm}.$$

С учетом введенного обозначения выражение (1) можно записать в виде

$$\boldsymbol{N}(Q,t) = 1/(2j)(\dot{\boldsymbol{N}}_m\,\mathrm{e}^{j\omega t} - \overset{*}{\dot{\boldsymbol{N}}}_m \mathrm{e}^{-j\omega t}). \quad (2)$$

Комплексным действующим значением вектора $\boldsymbol{N}$ будем называть выражение

$$\dot{\boldsymbol{N}} = \frac{\dot{\boldsymbol{N}}_m}{\sqrt{2}}.$$

С учетом этого обозначения выражение (2) для мгновенного значения вектора можно записать в виде

$$\boldsymbol{N}(Q,t) = \frac{1}{j\sqrt{2}}(\dot{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{e}^{j\omega t} - \overset{*}{\boldsymbol{N}}\mathrm{e}^{-j\omega t}).$$

Векторы $\dot{\boldsymbol{N}}_m(Q)$ и $\dot{\boldsymbol{N}}(Q)$ являются комплексными представлениями гармонически изменяющегося вектора $\boldsymbol{N}(Q,t)$. Используя свойства комплексных представлений, можно из уравнений Максвелла в пространственно-временной форме получить уравнение Максвелла в комплексной (пространственно-частотной) форме. Запишем эти уравнения для действующих значений векторов электромагнитного поля

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,\dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\delta}_{\text{п}},\quad \text{где } \dot{\delta}_{\text{п}} = \dot{\delta} + \dot{\delta}_{\text{пр}} + \dot{\delta}_{\text{см}},\quad \dot{\delta}_{\text{см}} = j\omega\,\dot{\boldsymbol{D}},\\ &\mathrm{rot}(\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{с}}) = -j\omega\,\dot{\boldsymbol{B}},\quad \mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{B}} = 0,\quad \mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\rho}.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Система уравнений (3) дополняется уравнениями материальной связи, которые в линеаризованном виде записываются следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \mu_a\dot{\boldsymbol{H}},\ \dot{\boldsymbol{D}} = \varepsilon_a\dot{\boldsymbol{E}},\ \dot{\delta}_{\text{пр}} = \gamma\,\dot{\boldsymbol{E}}.\qquad(4)$$

Теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме

Объемная плотность комплексной мощности, потребляемой материальной точкой в гармоническом ЭМП, равна

$$\tilde{s} = (\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{с}})\overset{*}{\delta}_{\text{п}} + j\omega\,\dot{\boldsymbol{B}}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{H}} = (\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{с}})\mathrm{rot}\,\overset{*}{\boldsymbol{H}} - \overset{*}{\boldsymbol{H}}\,\mathrm{rot}(\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{с}}) =$$
$$= -\,\mathrm{div}((\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{с}})\times\overset{*}{\boldsymbol{H}}).$$

Комплексная мощность, потребляемая внутри объема V, равна

$$-\int\limits_V \mathrm{div}((\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{с}})\times\overset{*}{\boldsymbol{H}})\mathrm{d}V = -\int\limits_S ((\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{с}})\times\overset{*}{\boldsymbol{H}})\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

Используя соотношения (3) и (4), можно доказать, что

$$-\oint_S ((\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{с}})\times\overset{*}{\boldsymbol{H}})\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \gamma E^2 \mathrm{d}V - \int_V (\dot{\boldsymbol{E}}_{\text{с}}\overset{*}{\delta}_{\text{п}} - \dot{\boldsymbol{E}}\overset{*}{\delta})\,\mathrm{d}V +$$

$$\int_V (\dot{\boldsymbol{E}}\,(j\omega\dot{\boldsymbol{D}}) + \overset{*}{\boldsymbol{H}}\,j\omega\dot{\boldsymbol{B}})\mathrm{d}V =$$

$$= \int_V p_{\text{т}}\mathrm{d}V - \int_V \tilde{s}_{\text{ист}}\,\mathrm{d}V + j\omega\int_V (\mu_a H_m^2/2 + \varepsilon_a E_m^2/2)\mathrm{d}V = P_{\text{т}} - \tilde{S}_{\text{ист}} + 2j\omega(W_{\text{м ср}} - W_{\text{э ср}})$$

$$= (P_{\text{т}} - P_{\text{ист}}) + j(Q_{\text{эм}} - Q_{\text{ист}}). \qquad (5)$$

Выражение (5) – это уравнение баланса активных и реактивных мощностей для объема V. Его иначе называют теоремой Умова-Пойнтинга в комплексной форме. Левая часть уравнения (5), содержащая поверхностный интеграл, равна комплексной электромагнитной мощности, поглощаемой объемом V из окружающего пространства.

Иначе уравнение (5) можно записать так:

$$\tilde{S}_{\text{ист}} = P_{\text{ист}} + jQ_{\text{ист}} = P_{\text{т}} + jQ_{\text{эм}} + \tilde{S}_{\text{изл}},$$

где $\tilde{S}_{\text{изл}}$ – комплексная мощность, излучаемая объемом V в окружающее пространство.

Комплексная форма теоремы Умова-Пойнтинга имеет важное практическое значение. Ее используют при расчете электромагнитных излучателей и направляющих систем в радиоэлектронной аппаратуре. Пользуясь уравнением (5), можно определить внутреннее активное и реактивное сопротивление проводника, если в результате анализа ЭМП известно поверхностное распределение комплексных действующих значений напряженностей электрического и магнитного поля:

$$-\oint_S (\dot{\boldsymbol{E}}\times\overset{*}{\boldsymbol{H}})\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (r + jx)I^2.$$

Теорема о единственности

Пусть в некотором объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S, известно распределение параметров электрофизических свойств среды и распределение сторонних источников ЭМП. Пусть в этом объеме установился синусоидальный режим ЭМП, в создании которого могли участвовать источники поля, расположенные вне объема V. Пусть, кроме того, известны комплексные значения тангенциальных составляющих вектора $\dot{\boldsymbol{E}}$ или $\dot{\boldsymbol{H}}$ на граничной поверхности S. Тогда объемное распределение векторов $\dot{\boldsymbol{E}}$ и $\dot{\boldsymbol{H}}$, удовлетворяющее уравнениям Максвелла и граничным условиям, является единственным решением задачи анализа ЭМП.

Доказательство

Допустим, что существуют два различных решения $(\dot{\boldsymbol{E}}', \dot{\boldsymbol{H}}')$ и $(\dot{\boldsymbol{E}}'', \dot{\boldsymbol{H}}'')$, удовлетворяющих уравнениям Максвелла и граничным условиям. Ввиду линейности уравнений поля разность этих решений $\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\boldsymbol{E}}' - \dot{\boldsymbol{E}}''$ и $\dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\boldsymbol{H}}' - \dot{\boldsymbol{H}}''$ также удовлетворяет уравнениям Максвелла при следующих дополнительных условиях:

а) $\dot{\boldsymbol{E}}_с = 0$ и $\dot{\delta} = 0$;

б) во всех точках поверхности S или $\dot{E}_t = 0$, или $\dot{H}_t = 0$, так как по предположению $\dot{\boldsymbol{E}}'_t = \dot{\boldsymbol{E}}''_t$. К разностному полю $(\dot{\boldsymbol{E}}, \dot{\boldsymbol{H}})$ применим теорему Умова-Пойнтинга

$$-\oint\limits_S (\dot{\boldsymbol{E}} \times \overset{*}{\dot{\boldsymbol{H}}})\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_V \gamma|\dot{\boldsymbol{E}}|^2\mathrm{d}V + j\omega\int\limits_V (\mu_a|\dot{\boldsymbol{H}}|^2 - \varepsilon_a|\dot{\boldsymbol{E}}|^2)\mathrm{d}V. \qquad (6)$$

Поверхностный интеграл в левой части равен нулю в соответствии с условием «б», значит соотношение (6) может выполняться только при $\dot{\boldsymbol{E}} = 0$ и $\dot{\boldsymbol{H}} = 0$ во всех точках объема V, из этого следует, что оба решения $(\dot{\boldsymbol{E}}', \dot{\boldsymbol{H}}')$ и $(\dot{\boldsymbol{E}}'', \dot{\boldsymbol{H}}'')$ тождественны.

Контрольные вопросы

1. Что называют гармоническим электромагнитным полем?
2. Что называют линейно и эллиптически поляризованным вектором?
3. Что называют комплексным амплитудным и комплексным действующим значением гармонически изменяющегося вектора?
4. Как связано мгновенное значение вектора с комплексным амплитудным и комплексным действующим?
5. Какой вид имеют уравнения Максвелла в комплексной форме?
6. Как записывают уравнения материальной связи в комплексной форме?
7. Чему равна объемная плотность комплексной мощности, потребляемой материальной точкой в гармоническом ЭМП?

8. Чему равна комплексная мощность, поглощаемая некоторым объёмом из окружающего пространства?
9. Как записывают уравнение баланса комплексных электромагнитных мощностей для некоторого объёма?
10. Как, пользуясь теоремой Умова–Пойнтинга, можно определить внутреннее активное и реактивное сопротивление проводника?
11. Как формулируется теорема о единственности гармонического электромагнитного поля?
12. Как доказывается теорема о единственности гармонического электромагнитного поля с помощью теоремы Умова–Пойнтинга?

§ 5.2. Уравнения математической физики относительно потенциалов гармонического электромагнитного поля

Комплексные параметры электрофизических свойств среды

Изменение электрической поляризованности или намагниченности вещества по гармоническому (в общем случае по периодическому) закону обычно сопровождается тепловыми потерями энергии. В этом случае составляющие вектора электрического смещения отстают по фазе от соответствующих составляющих вектора напряженности электрического поля. При периодическом перемагничивании ферромагнетиков составляющие вектора магнитной индукции отстают по фазе от соответствующих составляющих вектора напряженности магнитного поля. Указанные сдвиги фаз между парами векторов $\dot{\boldsymbol{E}}$ и $\dot{\boldsymbol{D}}$, $\dot{\boldsymbol{H}}$ и $\dot{\boldsymbol{B}}$ можно учесть путем введения комплексных параметров электрофизических свойств среды в уравнения материальной связи

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{\mu}_a \dot{\boldsymbol{H}}, \quad \dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\varepsilon}_a \dot{\boldsymbol{E}},$$

где $\dot{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a = \mu_a \exp(-j\Delta_м)$;

$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - j\varepsilon''_a = \varepsilon_a \exp(-j\Delta_e)$.

Аргументы комплексной магнитной и диэлектрической проницаемости $\Delta_м$ и Δ_e называют углами магнитных и диэлектрических потерь. В справочной литературе для различных электротехнических материалов даются значения тангенсов угла этих потерь:

$\mathrm{tg}(\Delta_м) = \mu''_a / \mu'_a$,

$\mathrm{tg}(\Delta_e) = \varepsilon''_a / \varepsilon'_a$.

При постановке и решении задач анализа гармонических ЭМП возможно объединение токов проводимости $\dot{\delta}_{\text{пр}}$ и токов смещения $\dot{\delta}_{\text{см}}$

$$\dot{\delta}_{\text{пр}} + \dot{\delta}_{\text{см}} = \dot{\delta}_{\text{и}},$$

где $\dot{\delta}_{\text{и}}$ – индуцированная плотность тока.

С учетом введенного обозначения закон полного тока можно записать в виде

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\delta}_{\text{п}} = \dot{\delta} + \dot{\delta}_{\text{и}};$$

$$\dot{\delta}_{\text{и}} = j\omega\,\dot{\varepsilon}_a\,\dot{\boldsymbol{E}} + \gamma\,\dot{\boldsymbol{E}} = (\gamma + j\omega\,\dot{\varepsilon}_a)\,\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\gamma}\dot{\boldsymbol{E}},$$

где $\dot{\gamma}$ – комплексная удельная проводимость вещества на данной частоте ω.

Во многих случаях вместо индуцированной плотности тока в расчеты вводят эффективный вектор электрического смещения $\dot{\boldsymbol{D}}_{\text{эф}}$:

$$\dot{\boldsymbol{D}}_{\text{эф}} = \dot{\delta}_{\text{и}}/(j\omega) = (\dot{\varepsilon}_a + \gamma/(j\omega))\,\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\varepsilon}_{a\,\text{эф}}\,\dot{\boldsymbol{E}}.$$

Последнее соотношение для краткости записывают как $\dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\varepsilon}_a\,\dot{\boldsymbol{E}}$, т.е. немного изменяют систему обозначений векторов гармонического ЭМП. В дальнейшем уравнения математической физики для гармонического ЭМП будем записывать с учетом последнего обозначения.

Системы электродинамических потенциалов и уравнения математической физики для гармонического электромагнитного поля

Для вектора магнитной индукции всегда выполняется условие $\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{B}} = 0$, поэтому

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{A}},$$

где $\dot{\boldsymbol{A}}$ – комплексный векторный магнитный потенциал.

$$\operatorname{rot}(\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{c}}) = -j\omega\,\dot{\boldsymbol{B}} = -j\omega\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{A}} = -\operatorname{rot}(j\omega\,\dot{\boldsymbol{A}}),$$

поэтому

$$\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}_{\text{c}} = -j\omega\,\dot{\boldsymbol{A}} - \operatorname{grad}\dot{\varphi},$$

где $\dot{\varphi}$ – комплексный скалярный электрический потенциал;

$\dot{\boldsymbol{A}}$ и $\dot{\varphi}$ – система электродинамических потенциалов.

Во многих случаях корректное задание поля вектора $\dot{\boldsymbol{E}}_с$ в качестве объемно распределенного источника ЭМП вызывает значительные затруднения при постановке задачи анализа поля. В этих случаях вместо $\dot{\boldsymbol{E}}_с$ задают векторное поле

$-\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}}_с = \dot{\boldsymbol{\delta}}_м$, которое называют полем сторонней плотности магнитного тока. С учетом этого обозначения закон электромагнитной индукции можно записать в виде

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{E}} = -\dot{\boldsymbol{\delta}}_М - j\omega\dot{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{B}} = -\frac{1}{j\omega}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{\delta}}_М$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{E}} = -j\omega\dot{\boldsymbol{A}} - \operatorname{grad}\varphi \Leftarrow \dot{\boldsymbol{B}} = -\frac{1}{j\omega}\dot{\boldsymbol{\delta}}_М + \operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{A}}.$$

Теперь можно получить систему уравнений математической физики относительно потенциалов. За основу можно взять закон полного тока

$$\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\delta} + j\omega\dot{\boldsymbol{D}}; \qquad \dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\nu}_а\dot{\boldsymbol{B}} = \dot{\nu}_а\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{A}} - \dot{\nu}_а\dot{\delta}_М/(j\omega);$$

$$\dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\varepsilon}_a\dot{\boldsymbol{E}} = -j\omega\dot{\varepsilon}_a\dot{\boldsymbol{A}} - \dot{\varepsilon}_a\operatorname{grad}\varphi.$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\dot{\nu}_а\operatorname{rot}\dot{A}) - \omega^2\dot{\varepsilon}_а\dot{A} + \mathrm{j}\omega\dot{\varepsilon}_а\operatorname{grad}\varphi = \dot{\boldsymbol{\delta}} + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\operatorname{rot}(\dot{\nu}_а\dot{\boldsymbol{\delta}}_М), \\ \operatorname{div}(\dot{\varepsilon}_а\operatorname{grad}\varphi + \mathrm{j}\omega\dot{\varepsilon}_а\dot{A}) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{\delta}}. \end{cases} \tag{7}$$

Система (7) – комплексная форма системы уравнений математической физики относительно векторного магнитного и скалярного электрического потенциалов. Нетрудно заметить, что уравнения в системе (7) линейно зависимые (второе можно получить из первого взятием дивергенции от обеих частей и делением их на $j\omega$). Поэтому для обеспечения единственности решения системы уравнений (7), кроме граничных условий, нужно вводить условие калибровки электродинамических потенциалов.

Рассмотрим систему (7) для случая однородной по электрофизическим свойствам среды внутри расчетной области. Тогда скалярные поля параметров $\dot{\varepsilon}_a$ и $\dot{\nu}_a$ можно вынести за знак дифференциальных операторов и умножить обе части первого уравнения на $\dot{\mu}_a$:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\dot{A}) - \omega^2\dot{\mu}_a\dot{\varepsilon}_a\,\dot{A} + j\omega\dot{\varepsilon}_a\dot{\mu}_a\,\mathrm{grad}\,\dot{\varphi} = \dot{\mu}_a\,\dot{\boldsymbol{\delta}} + \dfrac{1}{j\omega}\mathrm{rot}\,\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{м}}, \\ \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\dot{\varphi}) + j\omega\,\mathrm{div}\,\dot{A} = \dfrac{1}{j\omega\dot{\varepsilon}_a}\mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{\delta}}. \end{cases} \quad (7)$$

Если к системе (8) применить условие калибровки Лоренца

$$\mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{A}} = -j\omega\dot{\varepsilon}_a\dot{\mu}_a\,\dot{\varphi},$$

то из системы (8) можно получить два независимых уравнения:

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{A}} + \frac{\omega^2}{\dot{v}_{\text{ф}}^2}\,\dot{\boldsymbol{A}} = -\dot{\mu}_a\dot{\boldsymbol{\delta}} - \frac{1}{j\omega}\mathrm{rot}\,\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{м}}, \quad (9)$$

$$\nabla^2\dot{\varphi} - \frac{\omega^2}{\dot{v}_{\text{ф}}^2}\,\dot{\varphi} = \frac{1}{j\omega\dot{\varepsilon}_a}\mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{\delta}}, \quad (10)$$

где $\dot{v}_{\text{ф}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_a\dot{\mu}_a}}$ – фазовая скорость электромагнитной волны.

Уравнение (9) называют векторным уравнением Даламбера, уравнение (10) – скалярным уравнением Даламбера. Если источники ЭМП отсутствуют в расчетной области, то правая часть этих уравнений равна нулю:

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{A}} + \frac{\omega^2}{\dot{v}_{\text{ф}}^2}\,\dot{\boldsymbol{A}} = 0, \quad (11)$$

$$\nabla^2\dot{\varphi} - \frac{\omega^2}{\dot{v}_{\text{ф}}^2}\,\dot{\varphi} = 0, \quad (12)$$

где $\dfrac{\omega}{\dot{v}_{\text{ф}}} = \dot{K}$ – пространственная частота ЭМП.

Уравнения (11) и (12) называют векторным и скалярным волновыми уравнениями. Их широко применяют на практике для расчета разнообразных электротехнических и радиотехнических устройств, входящих в состав различного радиоэлектронного оборудования и приборов.

Излучатель Герца

Условно можно считать, что этот излучатель представляет собой малый отрезок провода, по которому течет гармонически изменяющийся ток. При расчетах такой излучатель можно считать материальной точкой с гармонически изменяющимся электрическим дипольным моментом. Аналитические выражения для распределения электродинамических потенциалов вокруг этого излучателя являются фундаментальными решениями уравнений (5) и (6)

$$\dot{\boldsymbol{A}} = -\frac{\dot{\mu}_\text{a}}{4\pi R} j\omega \dot{\boldsymbol{P}} \exp(-j\dot{K}R) = \frac{\dot{\mu}_\text{a}}{4\pi R} \dot{I}\boldsymbol{l} \exp(-j\dot{K}R),$$

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \frac{\dot{I}\boldsymbol{l}}{j\omega},$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{4\pi\dot{\varepsilon}_\text{a}} \frac{\boldsymbol{R}}{R} \frac{\partial}{\partial R}(\mathrm{R}^{-1} \dot{\boldsymbol{P}} \exp(-j\dot{K}R)) = \frac{1}{4\pi\dot{\varepsilon}_\text{a}} (\frac{\dot{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{R}}{R^3} + j\dot{K}\frac{\dot{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{R}}{R^2}) \exp(-j\dot{K}R).$$

Элементарный магнитный излучатель

Условно можно считать, что этот излучатель представляет собой контур с гармонически изменяющимся током. При расчетах такой излучатель можно считать материальной точкой с гармонически изменяющимся магнитным дипольным моментом $\dot{\boldsymbol{M}} = \dot{I}\boldsymbol{S}$. Аналитическое выражение для распределения векторного магнитного потенциала вокруг этого излучателя является фундаментальным решением уравнения (11):

$$\dot{\boldsymbol{A}} = -\frac{\dot{\mu}_\text{a}}{4\pi} (\frac{\dot{\boldsymbol{M}} \times \boldsymbol{R}}{R^3} + j\dot{K}\frac{\dot{\boldsymbol{M}} \times \boldsymbol{R}}{R^2}) \exp(-j\dot{K}R).$$

Контрольные вопросы

1. Какие явления в гармоническом электромагнитном поле описывают комплексные параметры электрофизических свойств среды?
2. Что такое угол магнитных и диэлектрических потерь? Что называют тангенсом этих углов?
3. Что такое индуцированная плотность тока и комплексная удельная проводимость вещества?
4. Что такое эффективное электрическое смещение и комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества?

5. Что такое векторный магнитный и скалярный электрический потенциал гармонического электромагнитного поля?
6. Что такое сторонняя плотность магнитного тока?
7. Как выражают комплексные векторы электромагнитного поля через электродинамические потенциалы?
8. Как записывают комплексную форму системы уравнений математической физики относительно векторного магнитного и скалярного электрического потенциалов для неоднородной среды без условий калибровки?
9. Как записывают комплексную форму системы уравнений математической физики относительно векторного магнитного и скалярного электрического потенциалов для однородной среды без условий калибровки?
10. Как записывют комплексную форму системы уравнений математической физики относительно векторного магнитного и скалярного электрического потенциалов для однородной среды с условием калибровки Лоренца?
11. Как записывают векторное и скалярное уравнения Даламбера?
12. Как записывают векторное и скалярное волновые уравнения?
13. По каким формулам рассчитывают распределение векторного магнитного и скалярного электрического потенциала вокруг элементарного электрического излучателя?
14. По какой формуле рассчитывают распределение векторного магнитного потенциала вокруг элементарного магнитного излучателя?

§ 5.3. Частные приложения теории гармонического электромагнитного поля

Понятие о поверхностном эффекте и эффекте близости

Пусть электромагнитная волна проникает вглубь проводника через его граничную поверхность из окружающего диэлектрика. Тогда по мере проникновения волны в проводник часть ее энергии постепенно рассеивается в виде тепла. Вследствие этого амплитуды всех векторов ЭМП уменьшаются при проникновении вглубь проводника. Этот эффект убывания амплитуд векторов поля от поверхности проводника вглубь по направлению движения волны называют поверхностным эффектом, или скин-эффектом.

При поверхностном эффекте распределение индуцированной плотности тока носит преимущественно поверхностный характер в проводнике. Близость других проводящих тел также влияет на распределение плотности тока в проводнике. Это явление называют эффектом близости.

Плоская волна в однородном проводнике

Рассмотрим электропроводящее полупространство $z \geq 0$, на которое из диэлектрического полупространства $z<0$ набегает плоская гармоническая электромагнитная волна (рис. 1).

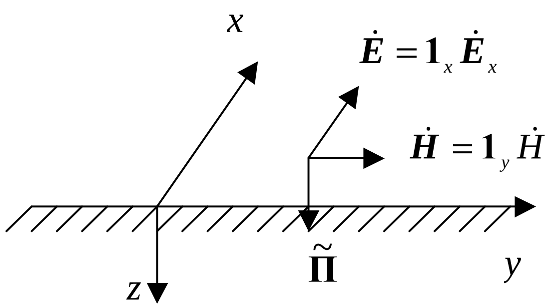

Рис. 3

Уравнения ЭМП внутри проводника без учета токов смещения имеют вид:

$$\mathrm{rot}\,\dot{\boldsymbol{H}} = \gamma\,\dot{\boldsymbol{E}}\,; \qquad \mathrm{rot}\,\dot{\boldsymbol{E}} = -j\omega\,\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\,\dot{\boldsymbol{H}}\,, \tag{13}$$

$$\gamma = \mathrm{const};\ \dot{\mu}_{\mathrm{a}} = \mathrm{const}.$$

Из уравнений (13) следует, что $\qquad \mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{E}} = 0; \quad \mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{H}} = 0.$ (14)

Из уравнения (13) можно получить независимые уравнения математической физики относительно $\dot{\boldsymbol{H}}$ и $\dot{\boldsymbol{E}}$

$$\mathrm{rot\,rot}\,\dot{\boldsymbol{H}} = -j\omega\gamma\,\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\,\dot{\boldsymbol{H}}\,; \qquad \mathrm{rot\,rot}\,\dot{\boldsymbol{E}} = -j\omega\gamma\,\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\,\dot{\boldsymbol{E}}\,.$$

Учитывая соотношения (14), получаем:

$$\nabla^2\dot{\boldsymbol{H}} - j\omega\gamma\,\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\,\dot{\boldsymbol{H}} = 0; \qquad \nabla^2\dot{\boldsymbol{E}} - j\omega\gamma\,\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\,\dot{\boldsymbol{E}} = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} - j\omega\gamma\dot{\mu}_a \dot{H}_y = 0; \qquad \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} - j\omega\gamma\dot{\mu}_a \dot{E}_x = 0. \qquad (15)$$

Если обозначить $p = (j\omega\gamma\dot{\mu}_a)^{0,5} = (0{,}5\omega\gamma\dot{\mu}_a)^{0,5} + j(0{,}5\omega\gamma\dot{\mu}_a)^{0,5} = b+jb$, то решение уравнений (15) можно записать в виде

$$\dot{H}_y = \dot{C}_H e^{-pz} + \dot{C}_{1H} e^{pz}; \qquad \dot{E}_x = \dot{C}_E e^{-pz} + \dot{C}_{1E} e^{pz};$$

$$\dot{H}_y = \dot{H}(0) e^{-pz}; \qquad \dot{E}_x = \dot{E}(0) e^{-pz};$$

$$\dot{H}_y = \dot{H}(0) e^{-bz} e^{-jbz}; \qquad \dot{E}_x = \dot{E}(0) e^{-bz} e^{-jbz}.$$

Можно доказать, что

$$\frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{p}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\dot{\mu}_a}{\gamma}} e^{j45^\circ} = Z_В.$$

Волновое сопротивление проводящей среды имеет индуктивный характер. Величину $\frac{1}{b} = \sqrt{\frac{2}{\omega\dot{\mu}_a\gamma}}$ называют глубиной проникновения ЭМП вглубь проводника. На этой глубине векторы $\dot{\boldsymbol{E}}$ и $\dot{\boldsymbol{H}}$ затухают по амплитуде или по действующему значению в e раз.

Поверхностный эффект в проводящей пластине

Пусть внешний источник ЭМП создает в пластине магнитный поток на единицу длины $\frac{d\dot{\Phi}}{dx}$ (рис. 2), тогда вектор $\dot{\boldsymbol{H}}$ во всех точках x будет иметь одну составляющую $\dot{H}_y$.

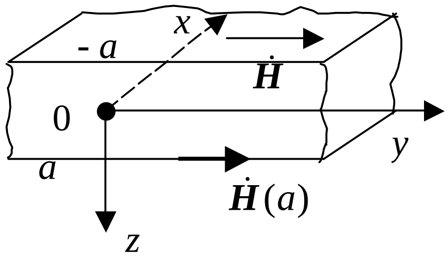

Рис. 2

Будем считать, что $\dot{H}_y(a) = \dot{H}_y(-a)$, тогда в соответствии с первым уравнением (15)

$$\dot{H}_y = \dot{H}_y(a)\frac{\mathrm{ch}(pz)}{\mathrm{ch}(pa)}; \qquad \dot{B}_y = \dot{B}_y(a)\frac{\mathrm{ch}(pz)}{\mathrm{ch}(pa)};$$

$$\dot{B}_y(a) = \dot{\mu}_\text{а}\,\dot{H}_y(a); \qquad \dot{B}_{y\,\text{ср}} = \frac{\dot{B}_y(a)}{2a\,\mathrm{ch}(pa)}\int_{-a}^{a}\mathrm{ch}(pz)\,\mathrm{d}z = \dot{\mu}_\text{а}\dot{H}_y(a)\frac{\mathrm{th}(pa)}{pa}.$$

Во многих технических приложениях величину

$$\frac{\dot{B}_{\text{у ср}}}{\dot{H}_y(a)} = \dot{\mu}_a\frac{\mathrm{th}(pa)}{pa} = \dot{\mu}_{\text{а эф}}$$

называют эффективной абсолютной магнитной проницаемостью пластины или пакета пластин.

$\mathrm{tg}(\Delta_{\text{мэф}}) = \left|\dfrac{\mathrm{Im}(\dot{\mu}_{\text{аэф}})}{\mathrm{Re}(\dot{\mu}_{\text{аэф}})}\right|$ – это тангенс угла магнитных потерь энергии в магнитопроводе, изготовленном в виде пакета пластин.

Применяя теорему Умова-Пойнтинга, можно доказать, что средняя объемная плотность мощности потерь энергии $p_\text{В}$ на вихревые токи при перемагничивании такого пакета равна

$$p_\text{В} = \frac{\mathrm{d}P_\text{В}}{\mathrm{d}V}$$

или

$$p_\text{В} = \frac{\omega a b\,|\dot{B}_\text{ср}|^2}{\mu_\text{а}}\frac{\mathrm{sh}(bd) - \sin(bd)}{\mathrm{ch}(bd) - \cos(bd)}.$$

В более общем виде

$$\frac{\mathrm{d}\dot{S}}{\mathrm{d}y} = j\omega h\left|\frac{\mathrm{d}\dot{\Phi}}{\mathrm{d}x}\right|^2\frac{\overset{*}{p}}{2\overset{*}{\mu}_\text{а}\,\mathrm{th}(\overset{*}{p}a)}.$$

Это комплексная мощность, потребляемая единицей длины листа (в направлении оси y) шириной h (в направлении оси x), толщиной $2a$.

Поверхностный эффект в круглом проводе

Пусть по прямолинейному проводу круглого сечения радиуса a протекает комплексный ток $\dot{I}$ (рис. 3).

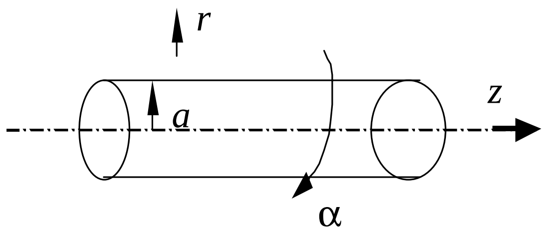

Рис. 4

$$\dot{H}_{\alpha}(a) = \dot{H}(a) = \dot{I}/(2\pi a); \qquad (16)$$

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \mathbf{1}_z \dot{E}; \qquad \mathrm{rot}\,\dot{\boldsymbol{H}} = \gamma\,\dot{\boldsymbol{E}}; \qquad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\dot{H}) = \gamma\dot{E};$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{H}}{\mathrm{d}r} + \frac{\dot{H}}{r} = \gamma\dot{E}; \qquad (17)$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\boldsymbol{E}} = -\,j\omega\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\dot{\boldsymbol{H}};$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{E}}{\mathrm{d}r} = j\omega\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\dot{H}. \qquad (18)$$

Если из выражения (18) выразить $\dot{H}$ и подставить в уравнение (17), то получим

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{E}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\dot{E}}{\mathrm{d}r} - j\omega\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\gamma\dot{E} = 0. \qquad (19)$$

Введем обозначение

$$q = (-\,j\omega\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\gamma)^{0,5} = (\omega\dot{\mu}_{\mathrm{a}}\gamma)\mathrm{e}^{-j45^\circ} = K\mathrm{e}^{-j45^\circ}.$$

Тогда уравнение (19) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{E}}{\mathrm{d}(qr)^2} + \frac{1}{qr}\frac{\mathrm{d}\dot{E}}{\mathrm{d}(qr)} + \dot{E} = 0. \qquad (20)$$

Если обе части уравнения (17) продифференцировать по r и подставить туда выражение (18), то в соответствии с введенным обозначением получим:

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}}{\mathrm{d}(qr)^2} + \frac{1}{qr}\frac{\mathrm{d}\dot{H}}{\mathrm{d}(qr)} + \left(1 - \frac{1}{q^2r^2}\right)\dot{H} = 0. \qquad (21)$$

Уравнения (20), (21) являются частными случаями уравнения Бесселя

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(1-\frac{n^2}{x^2})y=0,$$

частные решения, которого $y = J_n(x)$ называют функциями Бесселя n-го порядка. Для вычисления эти функции могут быть записаны в виде

$$\dot{E}=\frac{q\dot{I}}{2\pi a\gamma}\frac{J_0(qr)}{J_1(qa)};\qquad \dot{H}=\frac{\dot{I}}{2\pi a}\frac{J_1(qr)}{J_1(qa)};$$

$$\dot{\delta}_{\text{пр}}=\gamma\dot{E}=\frac{q\dot{I}}{2\pi a}\frac{J_0(qr)}{J_1(qa)}.$$

При $r\in[0;a]$ $|J_0(qr)|$ является возрастающей функцией. Это означает, что действующие значения напряженности электрического поля и плотности тока убывают от поверхности провода к его оси. В этом и сказывается поверхностный эффект в круглом проводе. Поверхностный эффект приводит к тому, что с ростом частоты тока возрастает активное сопротивление провода на единицу длины и уменьшается внутренняя индуктивность провода на единицу длины.

Комплексное сопротивление провода на единицу длины равно

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}=\frac{\dot{E}}{\dot{I}}=\frac{q}{2\pi a\gamma}\frac{J_0(qr)}{J_1(qa)}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое поверхностный эффект и эффект близости?
2. Какими уравнениями описывают поверхностный эффект в однородном проводнике (в проводящем полупространстве)?
3. По каким формулам рассчитывают распределение комплексной напряжённости электрического и магнитного поля в проводящем полупространстве?

4. Что такое глубина проникновения электромагнитного поля, а также волновое сопротивление и как они связаны с электрофизическими свойствами проводника?
5. По каким формулам рассчитывается распределение напряжённости магнитного поля и магнитной индукции при поверхностном эффекте в проводящей пластине?
6. Что такое комплексная абсолютная эффективная магнитная проницаемость пластины и пакета пластин, а также эффективный тангенс угла магнитных потерь?
7. По какой формуле рассчитывают среднюю объёмную плотность мощности тепловых потерь в пластине, а также комплексную мощность, потребляемую единицей длины пластины?
8. Какими уравнениями описывают поверхностный эффект в круглом проводе?
9. По каким формулам рассчитывают распределение комплексной напряжённости электрического и магнитного поля, а также плотности тока в круглом проводе?
10. По какой формуле можно рассчитать комплексное сопротивление круглого провода на единицу длины?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе учебного пособия строго определены основные (силовые) векторы электромагнитного поля: вектор напряженности электрического поля и вектор магнитной индукции. Это необходимая основа для изучения данной дисциплины и постижения современной теории силовых взаимодействий в электромагнитных полях, имеющей важнейшее прикладное значение. В пособии даны строгие математические определения источников электромагнитного поля: электрических токов трех типов (проводимости, смещения и переноса), а также электрических и магнитных диполей. С общих математических позиций определены наиболее распространенные дифференциальные операторы в теории электромагнитного поля (градиент, дивергенция, ротор). Рассмотрены также дифференциальные операторы второго порядка и необходимые интегральные теоремы, используемые в учебном курсе. В пособии описаны основные законы теории электромагнитного поля в интегральной и дифференциальной формах: закон полного тока, закон электромагнитной индукции, теорема Гаусса, закон непрерывности линий магнитной индукции. Эти закономерности являются физической основой работы важнейших и многочисленных электротехнических и электроэнергетических устройств и систем. В пособии изложены современные соотношения между векторами поля и электрофизическими свойствами различных сред. Математически строго определены понятия объемной плотности энергий электрического и магнитного полей, удельной мощности тепловых потерь и удельной мощности сторонних источников. Последнее определение сформулировано впервые в отечественной учебной литературе. Рассмотрены граничные условия для векторов ЭМП с учетом сторонних источников; рассмотрен закон сохранения заряда. В пособии дана современная точная математическая формулировка теоремы Умова-Пойнтинга, учитывающая различные виды сторонних источников.

Во второй главе данного пособия рассмотрены основные уравнения электростатического поля, связи между векторами этого поля и граничные условия. Сформулирована краевая задача анализа электростатического поля относительно скалярного потенциала для неоднородного и однородного распределения диэлектрической проницаемости в расчетной области. Рассмотрена энергия системы заряженных проводников; дано понятие о методе изображений. Уделено внимание фундаментальному решению уравнений Пуассона и Лапласа. Анализируется поле электрического диполя на основе правил дифференцирования в векторном анализе. Даны классические задачи расчета поля бесконечно длинной заряженной оси и поля двух разноименно заряженных осей; рассмотрены поля и емкости различных вариантов поля двух осей. Анализируется распределение потенциалов и зарядов в системе заряженных проводников.

В третьей главе идет речь об электрическом поле постоянного тока. Сформулированы законы этого поля в дифференциальной форме, в которых точно учтена роль сторонних источников в уравнениях Кирхгофа. Роль этих источников учтена также в граничных условиях электрического поля постоянного тока. Рассмотрена краевая задача анализа этого поля, и на основе сравнения соответствующих уравнений данного и электростатического полей точно определены их общие и отличительные признаки. Анализируется электрическое поле в диэлектрике вблизи проводника с током и в поле в несовершенных изолирующих средах. Рассмотрены варианты моделирования различных физических полей на основе аналогии уравнений, описывающих эти поля, с уравнениями электрического поля в проводящей среде.

В четвертой главе приведены основные законы магнитостатического поля в интегральной и дифференциальной формах, дан современный вариант уравнения материальной связи между векторами магнитного поля. Рассмотрены граничные условия для векторов этого поля. Сформулирована краевая задача магнитостатики относительно векторного магнитного потенциала на основе закона полного тока и уравнения связи между векторами магнитного поля. С учетом условия калибровки получено векторное уравнение Штурма-Луивиля, пригодное для расчета магнитостатических полей в однородных и кусочно-однородных средах. Показано, что частными случаями этого уравнения являются уравнения Пуассона и Лапласа. Рассмотрена более общая краевая задача магнитостатики для неоднородных сред: представлено соответствующее уравнение математической физики для векторного потенциала поля, которое позволяет применять для его решения современные конечноразностные и конечноэлементные методы. Рассмотрено магнитное поле элемента тока.

В данной главе определены также интегральные параметры магнитостатического поля: магнитный поток, потокосцепление, собственная и взаимная индуктивности. Анализируются частные случаи магнитных полей постоянных токов: поле одиночного провода круглого сечения, поле и индуктивность двухпроводной линии коаксиального кабеля, поле цилиндрической катушки. Для анализа магнитных полей применен скалярный магнитный потенциал, сформулирована соответствующая краевая задача и определены граничные условия этой задачи. Для решения проблемы неоднозначности скалярного магнитного потенциала в расчетное уравнение введена фиктивная намагниченность среды. Кратко рассмотрен вопрос магнитного экранирования. В пособии показана возможность применения в магнитостатике пространственных интегральных уравнений, в которых учитывается совместное действие электрических токов и объемно-распределенных магнитных диполей. Показана перспективность применения этих уравнений для решения задач магнитостатики. На основе теоремы Умова-Пойнтинга рассмотрен важный вопрос о мощности, передаваемой по двухпроводной линии постоянного тока.

В пятой главе анализируется переменное гармоническое электромагнитное поле. Рассмотрены уравнения Максвелла и теорема Умова-Пойнтинга в комплексной форме. Дана теорема единственности. Уделено внимание комплексным параметрам электрофизических свойств среды, и они использованы для построения современной системы уравнений математической физики для векторного магнитного и скалярного электрического потенциалов гармонического поля. Эта система уравнений применена для частного случая анализа поля в однородной среде. При калибровке Лоренца из этой системы уравнений получены векторное и скалярное уравнения Даламбера, а также волновые уравнения. Рассмотрен излучатель Герца и приведены аналитические выражения для векторного и скалярного комплексных потенциалов этого излучателя. Кратко описан элементарный магнитный излучатель.

В пособии анализируются частные приложения теоремы гармонического электромагнитного поля. Дано понятие о поверхностном эффекте и эффекте близости. Рассмотрены закономерности проникновения плоской волны в однородный проводник, и на основе полученных решений дан анализ поверхностного эффекта в проводящей пластине. Приведены аналитические соотношения, описывающие поверхностный эффект в круглом проводе. Названные поверхностные эффекты непременно учитывают при проектировании и эксплуатации разнообразных электротехнических, электроэнергетических и радиоэлектронных устройств и систем, работающих на переменном токе.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейман Л.Р., Демирчян К.С.* Теоретические основы электротехники: В 2 т. – Л.: Энергоиздат, 1981. Т. 2 – 416 с.

2. Теоретические основы электротехники : В 2 т. / Под ред. П. А. Ионкина. – М.: Высш. шк., 1976. Т. 2 – 383 с.

3. *Демирчян К.С., Чечурин В. Л.* Машинные расчеты электромагнитных полей. – М.: Высш. шк., 1986. – 240 с.

4. *Курбатов П.А., Аринчин С.А.* Численный расчет электромагнитных полей. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 168 с.

5. *Говорков В.А.* Электрические и магнитные поля. – М.: Энергия, 1968. – 468 с.

Учебное издание

ШМЕЛЕВ Вячеслав Евгеньевич
СБИТНЕВ Станислав Александрович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Учебное пособие

Редактор Р.С. Кузина
Корректор
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 10.03.03.
Формат 60х84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.