Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Муниципальный университет города Нью-Йорка, США
Колледж Статен Айланда

И. Е. ЛЮБЛИНСКАЯ С. В. ТИХОМИРОВА

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИЛОЖЕНИЯ GEOGEBRA

Методическое пособие для учителей

Владимир 2017

УДК 373.3
ББК 74.202.5
Л93

Рецензенты:

Кандидат педагогических наук, старший методист, преподаватель математики
Санкт-Петербургского национального исследовательского
Академического университета Российской академии наук, Академического лицея
“Физико-техническая школа”, Народный учитель Российской Федерации
В. И. Рыжик

Доктор философии, доцент института педагогики и администрации
Арканзасского государственного университета, США
Беф Бос

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического
образования и информационных технологий
зам. директора Педагогического института Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. П. Митин

Заместитель директора по начальной школе МБОУ “СОШ № 15” г. Владимира
Г. Е. Волгина

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Издание подготовлено при финансовой поддержке Фонда Евразия
по Российско-американской Программе партнерства университетов (ППУ)
в рамках международного проекта W16-2020 «Разработка методических материалов
для начальных классов по геометрии с использованием компьютерных технологий
и апробация материалов со студентами-практикантами»

Л93 **Люблинская, И. Е., Тихомирова, С. В.** Преподавание геометрии в начальной школе с использованием приложения GeoGebra : метод. пособие для учителей / И. Е. Люблинская, С. В. Тихомирова ; пер. с англ. Ю. М. Бочиной, В. С. Евликова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых ; Муницип. ун-т г. Нью-Йорка ; Колледж Статен Айланда. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 196 с. – ISBN 978-5-9984-0799-4.

Издание знакомит читателей с приемами использования приложения GeoGebra в преподавании геометрии в начальной школе. Оно рассчитано на учителей начальных школ и педагогов, интересующихся использованием компьютерных технологий для обогащения учебного процесса.
Табл. 3. Ил. 162. Библиогр.: 32 назв.

УДК 373.3
ББК 74.202.5

ISBN 978-5-9984-0799-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов 5
Введение 6
I. Принципы эффективного применения компьютерных технологий при преподавании и изучении математики 10
II. Что такое GeoGebra? 12
III. Элементарная геометрия с использованием приложения GeoGebra 15
1. Отрезок. Длина отрезка. Измерение и сравнение длин отрезков ... 22
1.1. Ключевые идеи и основные понятия 22
1.2. Уроки GeoGebra 26
1.2.1. Сравнение отрезков 26
1.2.2. Длина отрезка и единичный отрезок 28
1.2.3. Сложение отрезков 29
1.3. Методические рекомендации для учителя 30
2. Свойства треугольников и четырехугольников 38
2.1. Ключевые идеи и основные понятия 38
2.2. Уроки GeoGebra 44
2.2.1. Определи вид треугольников: найди общее. Часть 1 44
2.2.2. Определи вид треугольников: найди общее. Часть 2 45
2.2.3. Определи вид треугольников: найди общее. Часть 3 46
2.2.4. Рисуем четырехугольники 46
2.2.5. Отгадай, кто я? 47
2.3. Методические рекомендации для учителя 48
3. Площадь и периметр 58
3.1. Ключевые идеи и основные понятия 58
3.2. Уроки GeoGebra 63
3.2.1. Единичный квадрат и площадь 63
3.2.2. Площадь прямоугольника 65
3.2.3. Площадь фигур, составленных из прямоугольников 66
3.2.4. Площадь и периметр прямоугольника 67
3.2.5. Периметр: головоломки 69
3.3. Методические рекомендации для учителя 70
4. Угол и мера угла 82
4.1. Ключевые идеи и основные понятия 82
4.2. Уроки GeoGebra 88
4.2.1. Определение угла 88
4.2.2. Виды углов 89
4.2.3. Знакомство с транспортиром 90
4.3. Методические рекомендации для учителя 91

5. Перпендикулярные и параллельные прямые 101
5.1. Ключевые идеи и основные понятия 101
5.2. Уроки GeoGebra 108
5.2.1. Параллельные прямые 108
5.2.2. Перпендикулярные прямые 109
5.2.3. Игра-квест 110
5.2.4. Построение параллелограмма 110
5.2.5. Построение прямоугольника 111
5.3. Методические рекомендации для учителя 112
6. Классификация плоских фигур 125
6.1. Ключевые идеи и основные понятия 125
6.2. Уроки GeoGebra 130
6.2.1. Классификация треугольников 130
6.2.2. Классификация четырехугольников 132
6.2.3. Правильные многоугольники 133
6.3. Методические рекомендации для учителя 134
7. Осевая симметрия 143
7.1. Ключевые идеи и основные понятия 143
7.2. Уроки GeoGebra 149
7.2.1. Осевая симметрия 149
7.2.2. Нахождение оси симметрии 150
7.2.3. Дополнить фигуру 150
7.3. Методические рекомендации для учителя 151
8. Объём 158
8.1. Ключевые идеи и основные понятия 158
8.2. Уроки GeoGebra 162
8.2.1. Единичный куб и объём 162
8.2.2. Выведи формулу объёма прямой прямоугольной призмы 163
8.2.3. Нахождение объема 164
8.3. Методические рекомендации для учителя 166
9. Построение точек на координатной плоскости 177
9.1. Ключевые идеи и основные понятия 177
9.2. Уроки GeoGebra 181
9.2.1. Поиски клада 181
9.2.2. Угадай картинку! 182
9.3. Методические рекомендации для учителя 183
Заключение 190
Послесловие 192
Библиографический список 193

От авторов

Известно, с какими трудностями сталкиваются учителя при обучении учеников математике, а, конкретнее, геометрии. Задача и обязанность учителя – помочь ученикам преодолеть эти трудности. Материалы данного пособия опираются на использование приложения GeoGebra, которое, как мы считаем, способно помочь учителю вовлечь всех учеников в изучение геометрии.

Мы разработали это методическое пособие в рамках проекта по сотрудничеству между Владимирским государственным университетом имени А. Г. и Н. Г. Столетовых и Муниципальным университетом города Нью Йорка. Проект финансируется Российско-Американской «Программой Партнерства Университетов» (ППУ). ППУ направлена на установление и развитие партнерских отношений между российскими и американскими университетами и запуск новых совместных проектов. ППУ реализуется Фондом Евразия (США) и Национальным фондом подготовки кадров (РФ) при финансовой поддержке Государственного департамента США (http://www.usrussiaupp.org/ru).

Известным достоинством американской системы образования является применение исследовательских подходов к образованию и использование образовательных программных продуктов в студенческих исследованиях и образовании. Известным достоинством российской системы образования является научный подход к математическим понятиям, начиная с начальной школы, и фундаментальность методик обучения математике. В этой совместной работе мы объединили профессиональные компетенции и опыт преподавания геометрии в начальной школе, имеющиеся в обеих странах, и собрали их в методическом пособии, которое, как мы надеемся, поможет учителям начальных классов пробудить у учеников интерес к изучению геометрии.

Мы рассчитываем, что материалы, представленные в этом пособии, окажутся полезными учителям начальных классов как в России, так и в США.

И. Е. Люблинская, к.ф.-м.н., профессор STEM образования
Колледжа Статен Айланд Муниципального университета
Нью-Йорка, США
С. В. Тихомирова, к.ф.-м.н. доцент кафедры педагогики
и психологии дошкольного и начального образования
Педагогического института Владимирского государственного
университета имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, Россия.

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия – это раздел математики, обучая которому мы можем заложить основы словесно-логического и алгоритмического мышления, пространственного мышления и математической грамотности. Изучение и применение геометрических понятий влияет на развитие у детей: конкретного мышления на примере действий с физическими объектами (детский сад), образного мышления – при работе со схемами и рисунками (начальная школа) и абстрактного и словесно-логического мышления (средняя школа). Постоянное включение геометрических заданий при обучении математике, начиная с юных лет, приводит к развитию гибкости мышления у детей, повышает мотивацию и интерес в изучении геометрии, а также приводит к более глубокому пониманию самой геометрии. С другой стороны, пробелы при освоении и использовании определений и свойств математических объектов, а также неспособность правильно интерпретировать геометрические изображения, порождают типичные ошибки, часто встречающиеся у детей в начальной школе.

В последние годы отмечается растущий интерес к включению геометрии в математическую программу начальной школы. В данной работе внимание уделяется только нескольким разделам геометрии, общим для американской и российской программ начальной школы; тем не менее методические приемы (см. Табл. 1) и методы внедрения компьютерных технологий в изучение геометрии можно применять для изучения и обучения в гораздо более широком круге разделов геометрии.

Таблица 1. Примеры педагогических приемов

№	Название педагогического приема	Характеристика	Примеры уроков
Постановка целей (повышение интереса к учебному материалу)			
1	Удивляй	Учитель находит угол зрения, при котором даже обыденное становится удивительным	7.2.1. Определение оси симметрии - представлены половинки фигур, а вторые половины отсутствуют. Сначала ученики пытаются представить, как могли бы выглядеть фигуры целиком, а затем с помощью инструмента ОТРАЖЕНИЕ строят дополненные фигуры

Продолжение табл. 1

№	Название педагогического приема	Характеристика	Примеры уроков
2	Фантастическая добавка	Учитель дополняет реальные события фантастикой	9.2.1. Поиски клада - ученики определяют положение сундуков с сокровищами, спрятанных пиратами, находя координаты точек на координатной плоскости
Объяснение нового материала			
3	Практичность теории	Введение в теорию учитель осуществляет через практическую задачу, полезность решения которой очевидна	1.2.1. Сравнение отрезков - понятие длины вводится через задачи прямого сравнения длин лент или опосредованного сравнения ширины и длины песочницы с помощью веревки
Закрепление изученного материала			
4	Повторяем со взаимным контролем	Ученики составляют серию контрольных вопросов к изученному на уроке материалу.	6.2.2. Классификация четырехугольников - ученики рисуют четырехугольники и надписывают их. В парах они проверяют друг у друга нарисованные многоугольники и задают друг другу вопросы, если не согласны с представленным решением
5	Повторяем с расширением	Ученики составляют серию вопросов, дополняющих знания	8.2.3. Нахождение объема - ученики расширяют применение формулы объема для нахождения объема пространственных фигур, составленных из двух и более неперекрывающихся прямых прямоугольных призм
6	Свои примеры	Ученики подготавливают свои примеры к новому материалу	2.2.4. Рисуем четырехугольники - ученики рисуют свои примеры прямоугольников, квадратов и ромбов
Домашнее задание			
7	Творчество работает на будущее	Ученики выполняют творческие домашние задания по изученному материалу	9.2.2. Угадай картинку! - ученики создают свои картинки, нанося точки контура на координатную плоскость

Окончание табл. 1

№	Название педагогического приема	Характеристика	Примеры уроков
		Игры	
8	Загадки	Объект представлен в виде загадки, которая содержит ключи для отгадывания объекта.	2.2.5. Отгадай, кто я? - Ученики строят четырехугольник на основе заданных признаков, описанных в форме загадки
9	Головоломки	Ученикам дается набор условий для неизвестного объекта подобно кусочкам пазла. Они собирают эти условия вместе и решают головоломку.	3.2.5. Периметр: головоломки - ученикам дается набор условий, включающий периметры многоугольников. На основе этих условий ученики определяют размеры фигуры и строят ее
10	Игра «Третий лишний»	Среди различных объектов ученики определяют те, которые не входят в множество.	6.2.2. Классификация четырехугольников - ученики сортируют многоугольники, решая, какие фигуры принадлежат, а какие нет к определенному классу
		Итоговый контроль	
11	Опрос по цепочке	Выступление одного ученика прерывается в любом месте и передается другому. И так до завершения	5.2.3. Игра-квест - ученики по очереди ищут параллельные и перпендикулярные линии, острые и тупые углы на снимке памятника архитектуры
12	Презентация	Индивидуальные или групповые презентации с демонстрацией результатов проекта	7.2.3. Дополнить фигуру - ученики показывают классу этапы построения половины симметричной фигуры по данной другой половине и оси симметрии
13	Логическая цепочка	Учащиеся получают лист действий. Их необходимо выстроить в цепочку с причинно-следственной связью. Чтобы каждое предыдущее действие было причиной последующего.	5.2.5. Построение прямоугольника - ученики получают задание построить перпендикулярные линии для построения прямоугольника. Для достижения цели им необходимо выполнить последовательность шагов

Технологии становятся очень важной частью жизни и работы в современном обществе. Задача учителей, в частности, подготовить детей к требованиям рынка труда 21 века. Эта задача не может быть выполнена, как нам представляется, если технологии не будут включены в процесс обучения. Цель данного пособия — представить концепции и ресурсы, которые помогут вам направлять ваших учеников в обучении с применением технологий.

В каждом разделе пособия вы увидите следующие подразделы:

- *Ключевые идеи и основные понятия* – раздел, в котором рассматривается конкретные геометрические понятия, которые учащиеся должны усвоить, и трудности, с которыми учащиеся могут столкнуться при изучении данной темы.
- *Уроки GeoGebra* – готовые к использованию в классе раздаточные материалы для заданий, созданных в среде GeoGebra. Эти раздаточные материалы содержат инструкции по работе с приложением GeoGebra и вопросы для ученических исследований.
- *Методические рекомендации для учителя* – подробное описание заданий, созданных в среде GeoGebra, с возможными вариантами ответов учеников, а также описание GeoGebra файлов для этих заданий.
- *CD* - материалы на компакт-диске содержат файлы GeoGebra для каждого задания, а также раздаточные материалы для учеников в форматах Word и PDF.

I. Принципы эффективного применения технологии при преподавании и изучении математики

В наше время возможности новых технологий являются одним из самых мощных источников роста и развития как самой математики, так и преподавания математики. В науке применение компьютеров вызвало появление совершенно новых подходов. В образовании компьютеры подчеркнули важность определенных идей, открыли доступ к новым задачам и предоставили новые средства для представления и обработки математической информации, обеспечив нас выбором содержания и методик преподавания, какого мы ранее никогда не имели.

Однако не все, что можно сделать нужно делать. Обучение учеников зависит от уровня подготовки учителей, образовательных теорий и принципов, родителей, учебных программ, интересов и стремлений учащихся, ресурсов, культурных ожиданий, технологий и многого другого. Можно много говорить о каждом из этих факторов, но нельзя полностью понять влияние ни одного из них, если не рассматривать его в связи с остальными. Это особенно верно в отношении технологий, что частично объясняет, почему не существует единой повсеместно принятой точки зрения на оптимальное использование технологий в учебных классах. Более того, истинный вопрос о технологиях состоит не в том, какое аппаратное или программное обеспечение использовать, а в том, как с каждой из них работать в конкретной учебной программе вплоть до эффекта конкретных задач, поставленных перед конкретным учащимся. Всё это должно оцениваться с точки зрения эффективности в обучении. Эффективность использования технологий зависит от выбора задач, поставленных перед учеником, а не от выбора технологий, с помощью которых эти задачи можно решить. С помощью ли компьютера или карандаша с бумагой, решение одних задач очень важно, а других — просто потеря времени.

С использованием технологий меняется набор задач, которые могут быть рассмотрены, и способы, которыми они могут быть представлены. Некоторые задачи оказываются слишком сложными, чтобы их выполнить только на бумаге. На некоторых уроках требуется, чтобы учащиеся поэкспериментировали с определенными математическими объектами и увидели, как они изменяются в результате разных воздействий. Для некоторых задач требуется визуальное представление –

графики, диаграммы, геометрические фигуры, движущиеся изображения, — которое меняется в зависимости от действий учащихся.

Существует несколько принципов эффективного применения технологии [1]:

1. Следует учитывать различные роли, которые играет технология. Необходимо выбирать технологию в соответствии с целями урока, принимая во внимание конкретные нужды конкретных учащихся. Используйте компьютеры для развития навыков мышления более высокого порядка. Не применяйте компьютеры в качестве карточек для запоминания. Простое «добавление» технологии в качестве средства мотивации может быть неуместно и даже вредно для процесса обучения.

2. Задачи применения технологии должны соответствовать целям урока. Позвольте программе делать "черную работу", иллюстрируя вводимые понятия. Целью использования программы не является перебор возможностей самой программы. Использование технологии не должно рассеивать внимание.

3. Анализ процесса может стать естественным путем к пониманию сути дела (в отличие от простого запоминания). Естественный процесс мышления, требующийся при изучении математики, должен поддерживаться, а не заменяться технологией. Технология должна применяться с целью помочь учащимся размышлять о задаче, анализировать процесс, придумывать доказательство и т.п.

4. Технология должна помочь учащимся развивать навыки мышления при решении задачи (навыки мышления высокого уровня) — мышления, которое впоследствии станет независимым от технологии.

5. Учащиеся должны быть умелыми пользователями технических средств. Они должны применять их уверенно, понимая их ограничения и возможности, а также иметь ясное представление о том, как можно применять технические средства для решения сложных задач.

Технологии предоставляют огромные, удивительные новые возможности, расширяющие область того, чему и как мы можем учить. Некоторые новые учебные программы включают в себя концепцию использования технологий и предоставляют ресурсы, которые помогают учителям обрести навыки и свободу в применении этих новых учебных инструментов. Как участвовать в таких программах? Будьте всегда активны, отслеживайте все новое, предлагаемое технологиями. Сформируйте ясное представление о том, чего бы вы хотели от технологии, разбираясь в новых возможностях технологии, но не идя на поводу у этого нового. Тщательно продумывайте, что вы хотели бы дать вашим ученикам: определите цели для конкретного класса и потребности каждого отдельного ученика, — и после определения ваших целей оценивайте, приблизит ли вас к цели использование этих инструментов или уведет в сторону.

II. Что такое GeoGebra?

Появляющиеся компьютерные приложения, такие как GeoGebra, предоставляют возможность вовлечь учеников всех классов в решение задач в интерактивной, исследовательской среде при изучении геометрии и проведении измерений, попутно развивая компьютерную грамотность. GeoGebra – это бесплатное, многоплатформенное динамическое математическое программное обеспечение, предназначенное для всех уровней обучения, включающих геометрию, алгебру, работу с таблицами, построение графиков и диаграмм, статистику и высшую математику. В Европе и США эта программа получила несколько наград, присуждаемых программному обеспечению, созданному в образовательных целях.

Краткие сведения о GeoGebra

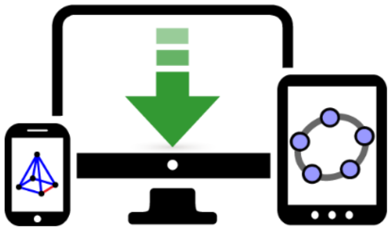
- Графики, алгебра и таблицы взаимосвязаны и в полной мере динамичны
- Простой для применения интерфейс, поддерживающий много мощных функций
- Средства разработки, предоставляющие возможность создавать интерактивные учебные материалы, такие как веб-страницы
- Работает на многих языках, доступна миллионам пользователей во всем мире
- Бесплатная программа с открытым исходным кодом

Онлайн-ресурсы

- Официальный сайт GeoGebra (http://www.geogebra.org/) – узнайте больше о приложении GeoGebra и загрузите GeoGebra с этого сайта (бесплатное программное обеспечение)
- GeoGebra на канале YouTube (http://www.youtube.com/geogebrachannel) – обучающие видео и примеры использования GeoGebra в школах

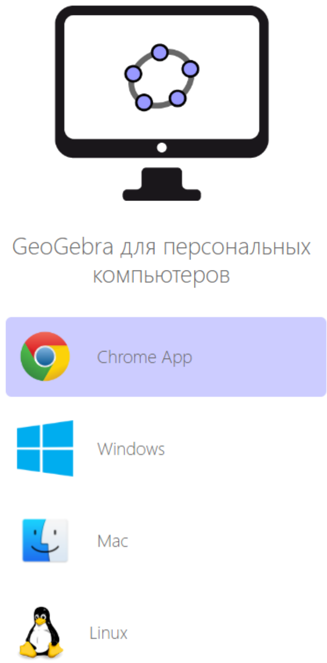
- Сайт для для обмена наработками в GeoGebra (http://tube.geogebra.org/) – пользователи GeoGebra делятся приложениями и планами уроков

Загрузка и установка GeoGebra на Вашем компьютере или планшете

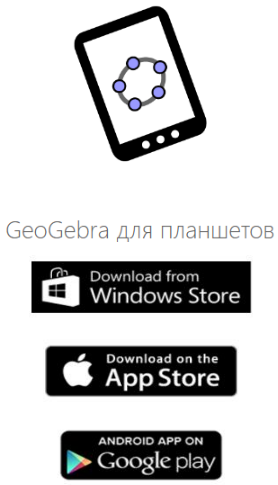


Инструкции для использования на компьютере:

1. Запустите Google Chrome и перейдите на официальный веб-сайт *GeoGebra* http://www.GeoGebra.org/. Щелкните на вкладку Загрузки (Downloads).



2. Выберите одну из опций, доступных для стационарных компьютеров:
   a. Приложение Chrome – добавляет веб-приложение, не требуя прав администратора; нужен доступ к интернету при использовании приложения
   b. Windows, Mac OS X или Linux – загружает пакет программного обеспечения, которое может применяться без доступа к интернету



Инструкция к применению для планшета:

1. Перейдите в Apple Store на устройстве на платформе iOS или в Play Маркет на устройстве на платформе Android.
2. Найдите приложение GeoGebra
3. Скачайте приложение на свое устройство
4. В качестве альтернативы выйдите на официальный веб-сайт GeoGebra, выберите опцию Скачать, а затем выберите опцию GeoGebra для планшета.

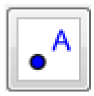
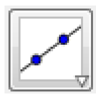
Инструкции по применению базовых геометрических инструментов в приложении GeoGebra

Некоторые инструменты *GeoGebra* имеют наглядный характер и понятны даже без серьезной теоретической подготовки по геометрии. Для этих инструментов имеются обучающие файлы для учащихся, приведенные в таблице 2 ниже. Инструкции для каждого инструмента включены в соответствующий файл GeoGebra (.ggb). Каждый такой обучающий файл мотивирует учащихся к экспериментированию с соответствующим инструментом. Задания составлены так, чтобы их выполнение занимало немного времени, примерно 10-15 минут. В классе эти задания могут выполняться отдельными учащимися или коллективно с применением интерактивной доски.

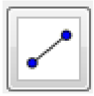
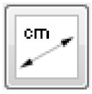
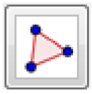
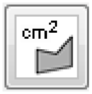
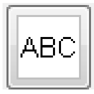
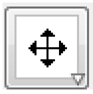
Другие инструменты, например, ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ или ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ, представляют новые понятия. Эти инструменты представлены в уроках GeoGebra, которые также вводят и разъясняют связанное понятие.

Прежде чем использовать урок GeoGebra с учениками, дайте им выполнить учебные задания для инструментов, необходимых для конкретного урока. [2]

Таблица 2. Описание файлов с инструкциями

Описание инструмента	*Название файла*	*Иконка*
ПЕРЕМЕЩАТЬ A. Перемещение объектов целиком. B. Перемещение точки отрезка или многоугольника, приводящее к изменению геометрической фигуры.	инструмент_перемещатьA.ggb инструмент_перемещатьB.ggb	
ТОЧКА Построение точки на плоскости	инструмент_точка.ggb	
ПРЯМАЯ Построение прямой на плоскости через две точки	инструмент_прямая.ggb	

Окончание табл. 2

Описание инструмента	*Название файла*	*Иконка*
ОТРЕЗОК Построение отрезка прямой на плоскости через две точки	инструмент_отрезок.ggb	
РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА Расчет и вывод на экран расстояния между двумя точками, длины отрезка прямой или периметра многоугольника	инструмент_расстояние_длина.ggb	
МНОГОУГОЛЬНИК Создание многоугольников произвольного размера и типа	инструмент_многоугольник.ggb	
ПЛОЩАДЬ Расчет и вывод на экран площади многоугольника или круга	инструмент_площадь.ggb	
ТЕКСТ Вставка рамки с текстом для инструкций или ярлыков на странице *GeoGebra*	инструмент_текст.ggb	
ПЕРЕМЕСТИТЬ ЧЕРТЕЖ Перемещение экранного окна для показа других областей страницы *GeoGebra*	инструмент_переместить_чертеж.ggb	

III. Элементарная геометрия с использованием приложения GeoGebra

До того, как вы начнете работать по этим урокам в классе, мы считаем необходимым сказать несколько слов о том, как НЕ НУЖНО по ним работать. Уроки, представленные в этом пособии, не являются ни полной учебной программой по геометрии, ни вводным набором упражнений для пакета GeoGebra.

Использование этих материалов сразу погружает пользователя в среду GeoGebra. Идея этого пособия в том, чтобы предоставить ученикам программный инструмент, который позволяет им посмотреть на понятия геометрии с другой точки зрения. Поэтому первой задачей является достижение определенной свободы в обращении с GeoGebra. Для этого в пособие включены обучающие материалы, которые можно использовать, чтобы познакомить учеников с основными инструментами этого программного продукта.

Пособие содержит 32 урока GeoGebra[1]. При разработке уроков мы следовали двум целям. Первая – уроки вовлекают учеников в геометрические исследования, включающие в себя обнаружение нового и поиски ответов на вопросы. Вторая – собранные задания показывают различные способы использования GeoGebra в процессе изучения геометрии в начальной школе. Используйте эти задания для углубления и расширения своих уроков. В ссылочной таблице представлены конкретные задания, созданные в соответствии с целями нашего пособия (см. Табл. 3).

Таблица 3. Таблица ссылок

	Тема урока	*Основные геометрические понятия*	*Инструменты GeoGebra*	*Этап урока (см. Табл. 1)*
1.2.1	Сравнение отрезков	Отрезок	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Объяснение нового материала
1.2.2	Длина отрезка и единичный отрезок	Единичный отрезок Длина	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Закрепление изученного материала
1.2.3	Сложение отрезков	Сравнение длин Сложение отрезков	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Закрепление изученного материала
2.2.1	Определи вид треугольников: найди общее. Часть 1.	Равносторонний треугольник	ПЕРЕМЕЩАТЬ РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА УГОЛ МНОГОУГОЛЬНИК УДАЛИТЬ	Закрепление изученного материала

[1] Уроки GeoGebra частично заимствованы из [2]. Материалы модифицированы, расширены с включением дополнительных тем по геометрии и сопровождаются подробными методическими указаниями для учителя.

Продолжение табл. 3

	Тема урока	*Основное геометрическое понятие*	*Инструменты GeoGebra*	*Этап урока (см. Табл. 1)*
2.2.2	Определи вид треугольников: найди общее. Часть 2	Равнобедренный треугольник	ПЕРЕМЕЩАТЬ РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА УГОЛ МНОГОУГОЛЬНИК УДАЛИТЬ	Закрепление изученного материала
2.2.3	Определи вид треугольников: найди общее. Часть 3	Прямоугольный треугольник	ПЕРЕМЕЩАТЬ РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА УГОЛ МНОГОУГОЛЬНИК УДАЛИТЬ	Закрепление изученного материала
2.2.4	Рисуем четырехугольники	Квадрат Ромб Прямоугольник	МНОГОУГОЛЬНИК ПЕРЕМЕЩАТЬ УДАЛИТЬ	Закрепление изученного материала
2.2.5	Отгадай, кто я?	Квадрат Ромб Прямоугольник	МНОГОУГОЛЬНИК ТЕКСТ ПЕРЕМЕЩАТЬ УДАЛИТЬ	Игры
3.2.1	Единичный квадрат и площадь	Единичный квадрат Площадь	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Объяснение нового материала
3.2.2	Площадь прямоугольника	Площадь прямоугольника Площадь через умножение	ПЕРЕМЕЩАТЬ СЕТКА	Закрепление изученного материала
3.2.3	Площадь фигур, составленных из прямоугольников	Сложение площадей	ОТРЕЗОК СЕТКА	Закрепление изученного материала
3.2.4	Площадь и периметр прямоугольника	Площадь Периметр	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Итоговый контроль Домашнее задание

Продолжение табл. 3

	Тема урока	*Основное геометрическое понятие*	*Инструменты GeoGebra*	*Этап урока (см. Табл. 1)*
3.2.5	Периметр: головоломки	Периметр Многоугольник	МНОГОУГОЛЬНИК РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА ПЕРЕМЕЩАТЬ СЕТКА	Игры Итоговый контроль
4.2.1	Определение угла	Угол Внутренняя область угла Вершина угла Стороны угла	ПЕРЕМЕЩАТЬ ТОЧКА ЛУЧ СЕКТОР ПО ЦЕНТРУ И ДВУМ ТОЧКАМ	Объяснение нового материала
4.2.2	Виды углов	Острый угол Прямой угол Тупой угол Развернутый угол	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Объяснение нового материала
4.2.3	Знакомство с транспортиром	Измерение угла Транспортир	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Объяснение нового материала
5.2.1	Параллельные прямые	Параллельные прямые Пересекающиеся прямые	ПЕРЕМЕЩАТЬ УМЕНЬШИТЬ	Мотивация
5.2.2	Перпендикулярные прямые	Перпендикулярные прямые Прямой угол	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Мотивация
5.2.3	Игра-квест	Параллельные прямые Перпендикулярные прямые Острый угол Тупой угол Прямой угол	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Игры Итоговый контроль

Продолжение табл. 3

	Тема урока	*Основное геометрическое понятие*	*Инструменты GeoGebra*	*Этап урока (см. Табл. 1)*
5.2.4	Построение параллелограмма	Параллельные прямые Параллелограмм Прямоугольник Квадрат	ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЕРЕМЕЩАТЬ	Итоговый контроль
5.2.5	Построение прямоугольника	Перпендикулярные прямые Прямоугольник Квадрат	ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЕРЕМЕЩАТЬ	Итоговый контроль
6.2.1	Классификация треугольников	Разносторонний треугольник Равнобедренный треугольник Прямоугольный треугольник Равносторонний треугольник	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Объяснение нового материала
6.2.2	Классификация четырехугольников	Классификация Четырехугольники Параллелограмм Прямоугольник Квадрат Ромб	ПЕРЕМЕЩАТЬ МНОГОУГОЛЬНИК ТЕКСТ	Итоговый контроль Мотивация Игры
6.2.3	Правильные многоугольники	Правильный многоугольник Квадрат Внутренний угол	МНОГОУГОЛЬНИК ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК УГОЛ РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА ПЕРЕМЕЩАТЬ	Итоговый контроль
7.2.1	Определение осевой симметрии	Отражение Симметрия Ось симметрии	ПЕРЕМЕЩАТЬ ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ	Мотивация Объяснение нового материала

Окончание табл. 3

	Тема урока	*Основное геометрическое понятие*	*Инструменты GeoGebra*	*Этап урока (см. Табл. 1)*
7.2.2	Нахождение оси симметрии	Отражение Симметрия Ось симметрии	ОТРЕЗОК ПЕРЕМЕЩАТЬ	Мотивация
7.2.3	Дополнить фигуру	Отражение Симметрия Ось симметрии	ТОЧКА ОТРЕЗОК СЕТКА ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ	Закрепление изученного материала Итоговый контроль Игры
8.2.1	Единичный куб и объем	Единичный куб Объем	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Объяснение нового материала
8.2.2	Выведи формулу объема прямой прямоугольной призмы	Объема прямоугольной призмы Объем через умножение Кубические единицы		Закрепление изученного материала
8.2.3	Нахождение объема	Объем через умножение Объем фигур, составленных из прямых прямоугольных призм	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Итоговый контроль Закрепление изученного материала
9.2.1	Поиски клада	Координатная плоскость Координаты Упорядоченные пары	ПЕРЕМЕЩАТЬ	Игры Мотивация
9.2.2	Угадай картинку!	Координатная плоскость Координаты Упорядоченные пары	ТОЧКА ОТРЕЗОК ПЕРЕМЕЩАТЬ УДАЛИТЬ	Итоговый контроль Домашнее задание

Необходимо заметить, что эти задания являются независимыми друг относительно друга. Учитель может использовать их в любом порядке в соответствии со своим учебным планом. При разработке большей части уроков не предполагалось, что они будут использоваться как независимый учебный материал. Они разрабатывались как дополнительные материалы для учителя. Наша цель – всегда вдохновлять учеников на вдумчивый анализ и исследование. Невозможно переоценить роль учителя в формировании мышления у учеников.

Использование заданий в классе: Не существует единственно верного использования этих заданий. Различия между разными классами и учителями слишком велики, чтобы обобщение было возможно. Тем не менее, мы предлагаем некоторые соображения, которые стоит принять во внимание.

- Используйте эти задания как способ разнообразить процесс преподавания. Предложите их вместо заданий из учебника некоторым ученикам (не только самым способным!). Обязательно предоставьте ученикам, выполнявшим эти альтернативные задания, возможность показать и объяснить их решение всему классу.
- Всегда подталкивайте учеников к тому, чтобы они объясняли словами свой ход мыслей и свои результаты. Добивайтесь от учеников обобщенных, нетривиальных вариантов (и решений) для конкретных задач.
- Не нужно всегда предоставлять пошаговые инструкции для исследования. Пусть ученики будут свободны в работе с GeoGebra.

Мы предлагаем этот набор заданий, чтобы показать мощь, которую новые компьютерные технологии приносят в изучение математики. Тот небольшой круг заданий, которые входят в данное руководство, не может считаться достаточным для полного овладения как теорией, так и программным инструментом. Мы уверены, что, по мере того, как вы и ваши ученики будут приобретать умение работы с GeoGebra, вы найдете много других приложений этого инструмента. Ведь, в конце концов, именно ваше профессиональное чутье и рациональный анализ собственного опыта станет лучшим проводником по внедрению этих разнообразных инструментов в работе с вашими классами.

1. Отрезок. Длина отрезка. Измерение и сравнение длин отрезков

1.1. Ключевые идеи и основные понятия

В начальной школе дети работают с такими геометрическими величинами как длина, периметр, площадь, объем, и величина угла. Геометрические величины – это свойства геометрических фигур, характеризующие их форму и размеры, которые можно сравнивать и описывать численно благодаря существованию единицы измерения. В этом разделе мы обсудим понятие длины отрезка.

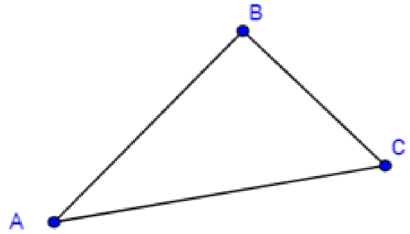
Имеет смысл сначала вводить понятие отрезка как материального объекта. *Моделью* отрезка может служить палочка, полоска бумаги, натянутая нить или лента, прямой кусок проволоки. Отрезок, как геометрическая фигура, изображен на рисунке 1.1. Принято на рисунках обозначать конечные точки отрезка. Эти точки называются *концами отрезка*, а все точки, лежащие между ними называются *внутренними точками отрезка*.

Рисунок 1.1

Одной из простейших аксиом построения в геометрии является аксиома отрезка: каждые две точки можно соединить отрезком и притом только одним. Возможность этого построения очевидна [3, с.21].

В качестве упражнения рассмотрим, сколько существует отрезков, заданных тремя точками на плоскости? Мы знаем, что две точки определяют отрезок. Сколько разных пар точек можно образовать из трех точек? Таких пар три, и значит, существует три отрезка. Заметим, что если эти три точки не лежат на одной прямой, то получится замкнутая трёхзвенная ломаная (рис. 1.2а). Если же они лежат на одной прямой, то ломаная вырождается в три отрезка на той же прямой так, что сумма двух отрезков является третьим отрезком (рис. 1.2б).

а)



Отрезки *AB*, *BC*, и *AC* образуют замкнутую ломаную *ABC*

б)

Отрезки *DE*, *EF* и *DF*, удовлетворяющие условию $DE = DF + EF$

Рисунок 1.2

Чтобы различать отрезки прямых от прямых на рисунке принято на концах отрезка ставить точки. На рисунке 1.3а нарисована прямая, на рисунке 1.3б – отрезок данной прямой с точками на концах.

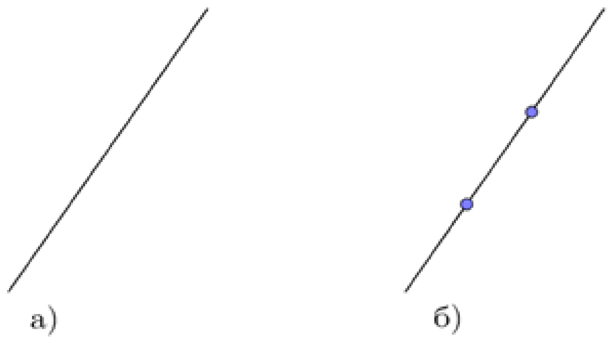
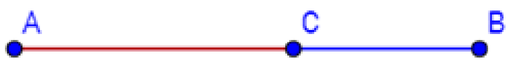


Рисунок 1.3

В реальной жизни нам часто приходится сравнивать размеры протяженных объектов. Какая лента длиннее, какая проволока короче? В геометрии сравнение позволяет судить о равенстве фигур.

Одним из методов, как написано далее, **сравнения отрезков** является совмещение. В этом случае совмещаем отрезки таким образом, чтобы при наложении один из концов отрезка совпал с концом другого отрезка. В зависимости от взаимного положения других концов обоих отрезков, можно сделать вывод: один из отрезков короче или длиннее другого (рис. 1.4а) или отрезки являются равными (рис. 1.4б).

а)



AC составляет часть AB

AC короче AB

$AC < AB$

б)

Точка C совпала с точкой B

AC и AB являются равными

$AC = AB$

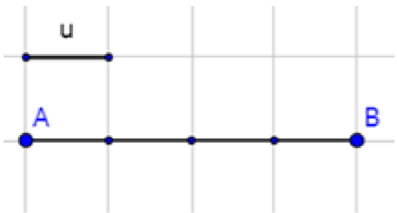
Рисунок 1.4

Метод совмещения является прямым сравнением отрезков. Когда сравнение отрезков напрямую невозможно, то можно использовать дополнительный предмет, например натянутую нитку, полоску бумаги или циркуль [4]. В этом случае длина одного отрезка фиксируется дополнительным предметом, и затем этот предмет прикладывается ко второму отрезку для прямого сравнения. На основе уже прямого сравнения дополнительного предмета и второго отрезка можно сравнивать два отрезка. Этот способ является опосредованным сравнением. Опосредованное сравнение основано на свойстве транзитивности равенства отрезков.

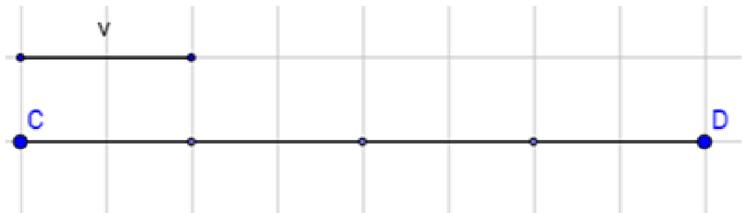
Длина отрезка является числовой характеристикой протяженности отрезка, обладающая следующими свойствами, и обратно:

- равные отрезки имеют равные длины;
- если отрезок составлен из двух отрезков, то его длина равна сумме длин двух частичных отрезков.

Измерение длины отрезка основано на сравнении его с отрезком, который принимается за единицу измерения (единичный отрезок). Тогда длина отрезка – это величина, значение которой равно количеству единичных отрезков, укладывающихся в отрезке (рис. 1.5).



Длина отрезка *AB* равна 4 единицам *u*, $AB = 4u$



Длина отрезка *CD* равна 4 единицам *v*, $CD = 4v$

Рисунок 1.5

Оба отрезка равны 4 единицам длины, но это не значит, что $AB = CD$, поскольку единичные отрезки, которые использовались для измерения длин *AB* и *CD* - разные. *Для сравнения двух отрезков, необходимо использовать одну и ту же единицу длины* (рис. 1.6).

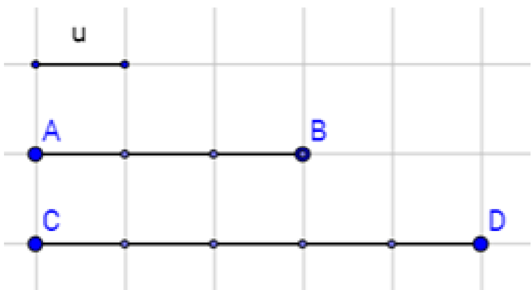


Рисунок 1.6

В этом случае $AB = 3u$ и $CD = 5u$, поэтому можно провести сравнение этих отрезков и утверждать, что отрезок AB короче, чем отрезок CD.

Отрезки можно складывать, вычитать, умножать и делить на натуральное число. Определим каждую из этих операций и напомним, как находить результат действия конкретной операции.

Даны отрезки MN и KL (рис. 1.7).

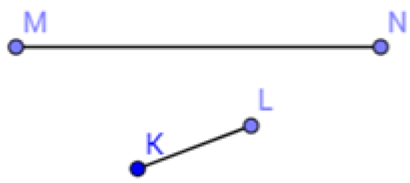


Рисунок 1.7

Построим сумму этих отрезков: $MN + KL$. Для этого приложим отрезок KL к отрезку MN так, чтобы KL лежал на продолжении MN (Рис. 1.8). Тогда отрезок ML или равный ему является суммой отрезков MN и KL.

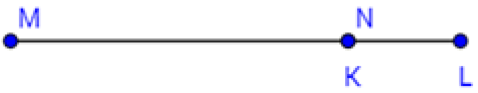


Рисунок 1.8

Отметим здесь, что порядок, в котором откладываются отрезки MN и KL на луче, не важен, важно отложить отрезки последовательно и в одну сторону: один за другим.

Разность отрезков определяется аналогичным способом. Построим разность отрезков MN и KL, $MN - KL$. Для этого на большем отрезке (в нашем случае MN) от одного из его концов отложим меньший отрезок (в нашем случае KL). Отрезок, ML является разностью MN и KL (рис. 1.9)

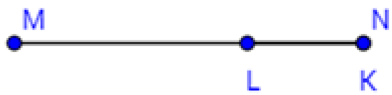


Рисунок 1.9

Легко убедиться в том, что построение разности можно осуществлять от любого конца большего отрезка.

Отрезки можно умножать на целые положительные числа. Приложим отрезок AB к самому себе два раза и получим новый отрезок $CD = AB + AB + AB = 3AB$ (рис. 1.10). Отрезок CD в 3 раза больше отрезка AB.

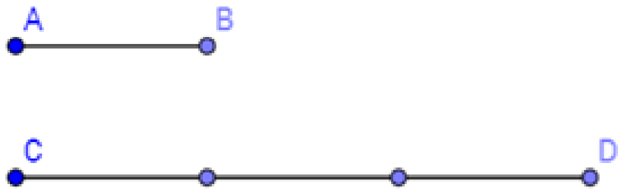


Рисунок 1.10

Произведением отрезка a и натурального числа $k > 1$ называется отрезок ka, равный сумме k (штук) отрезков, каждый из которых равен отрезку a. Аналогично определяется и деление отрезка на натуральное число, например, половина отрезка – результат его деления на 2.

1.2. Уроки GeoGebra

1.2.1. Сравнение отрезков

Файл GeoGebra: 1_2_1_сравнение_отрезков.ggb

Введение и основные понятия

Какова длина отрезка? Какой отрезок длиннее? Как мы можем ответить на вопросы, подобные этим?

Часть 1. Прямое сравнение

Один из способов – непосредственное сравнение отрезков. Для этого нужно совместить отрезки друг с другом, совместив начальные точки этих отрезков.

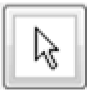
Задание

На странице GeoGebra установи флажок в контрольном окошке с названием Часть I. У тебя три ленты, *A*, *B* и *C*. Какая из них длиннее?

Оценка

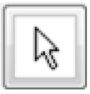
Посмотри внимательно на три отрезка и перечисли их по порядку от самого короткого к самому длинному на основе своих наблюдений: ____, _____, _____.

Измерение



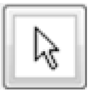
С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) перетащи отрезок *B* так, чтобы совместились левые крайние точки отрезков *A* и *B*. Как соотносятся их длины?

Отрезок *A* ____________________ отрезок *B*.



Теперь перетащи отрезок *C* так, чтобы совместились крайние точки отрезков *A* и *C*. Какой из них длиннее?

Отрезок *A* ____________________ отрезок *C*.



И наконец перетащи отрезок *C* так, чтобы совместились крайние точки отрезков *B* и *C*. Какой из них длиннее?

Отрезок *B* ____________________ отрезок *C*.

Выводы

Какая лента самая длинная? Что очень важно сделать, когда сравниваешь отрезки непосредственно?

Часть II. Опосредованное сравнение

Иногда трудно выровнять объекты, чтобы сравнить их. Например, ты хочешь узнать про длину и ширину песочницы, что из них длиннее, короче, или они равны. Для опосредованного сравнения двух объектов мы можем использовать какой-то третий объект.

Задание

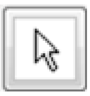
На странице GeoGebra сними флажок в контрольном окошке Часть I и установи флажок в контрольном окошке Часть II. У тебя песочница. Как сравнить ее длину и ширину?

Оценка

Посмотри внимательно – длина песочницы больше, меньше или равна ее ширине?

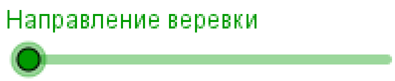
Измерение

Воспользуйся *веревкой* как инструментом для измерения.



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) перетащи *веревку* так, чтобы совместить левый конец *веревки* с нижним левым углом песочницы.

С помощью ползунка *Длина веревки* отмерь на веревке длину, равную длине песочницы.



После этого ползунком *Направление веревки* измени направление веревки так, чтобы веревка выровнялась по другой стороне песочницы.

Как соотносятся ширина песочницы и длина, отмеченная на веревке?
Ширина песочницы ____________________ длина веревки.
Как соотносятся ширина песочницы и длина песочницы?
Ширина песочницы ____________________ длина песочницы.

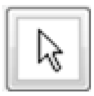
Вывод
Как мы с помощью веревки сравнили ширину и длину песочницы?

1.2.2. Длина отрезка и единичный отрезок

Файл GeoGebra: 1_2_2_длина_единичного_отрезка.ggb

Основные понятия
Отрезки можно сравнить по *длине*. Длина измеряется с помощью единичных отрезков. Длина единичного отрезка – одна единица длины. Единицей может быть сантиметр, дециметр, метр или километр, – какая единица будет более подходящей для конкретного измерения. Длиной отрезка будет то количество одинаковых единичных отрезков, которыми можно выложить отрезок без просветов и перекрытий.

Практическое задание



Потренируйся передвигать единичный отрезок с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель). На каждом единичном отрезке отмечена красная точка. Подцепляй отрезок за эту точку и перетаскивай его в новое место. На каждом единичном отрезке отмечена синяя точка. Подцепляй отрезок за эту точку, чтобы его повернуть.

Измерение
Выясни, сколько единичных отрезков потребуется, чтобы перекрыть каждый из 5 заданных отрезков. Введи полученные результаты в таблицу данных.

Таблица данных	
Отрезок	*Длина в единичных отрезках*
красный	
синий	
зеленый	
черный	
лиловый	

1.2.3. Сложение отрезков

Файл GeoGebra: 1_2_3_сложение_отрезков.ggb

Основные понятия

Мы можем складывать отрезки, и это может нам помочь в решении реальных задач! Если ты хочешь сложить отрезки, сначала необходимо выложить их в одну линию без пропусков и перекрытий. Сумма отрезков – это тоже отрезок. Как можно найти его длину?

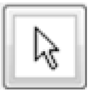
Задача

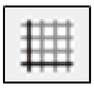
Ты едешь на велосипеде по прямой улице из дома в библиотеку. По дороге ты останавливаешься, чтобы подождать своего друга, чтобы потом ехать в библиотеку вместе.

Посмотри на красный, синий и зеленый отрезки на странице *GeoGebra*. Представь, что красный отрезок – это твой путь от дома до места встречи с другом, синий отрезок – это ваша поездка вместе до библиотеки, а зеленый отрезок – это твоя поездка от дома до библиотеки.

В этой задаче каждый единичный отрезок равен 100 метрам. Можешь вычислить, сколько ты проехал?

Измерения





Для нахождения длины каждого отрезка пути с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ подцепи за красные точки и перетащи единичные отрезки или воспользуйся инструментом СЕТКА. После этого заполни таблицу данных.

Таблица данных		
Участок пути	*Длина участка пути в единичных отрезках*	*Длина участка пути в метрах*
красный		
синий		
зеленый		

Можешь найти общее расстояние, которое ты проехал, без подсчета единичных отрезков или клеточек в сетке? Опиши свой способ:

1.3. Методические рекомендации для учителя

Сравнение отрезков (урок 1.2.1)

Учебные задачи:

- Ученики должны сравнить длины двух или более отрезков непосредственно
- Ученики должны упорядочить три отрезка по длине
- Ученики должны сравнить два отрезка с помощью третьего (опосредованно)

Материалы: Файл GeoGebra 1_2_1_сравнение_отрезков.ggb.

В файле есть два контрольных окошка, которые позволяют ученикам видеть две части задания. Каждое окошко с установленным флажком открывает соответствующую задачу. Ученики должны устанавливать в каждый момент только один из флажков, чтобы открывалась только одна часть задания. При переходе от первой части задания ко второй необходимо сбросить первый флажок и установить второй.

Когда установлен флажок “Часть I. Прямое сравнение”, ученики видят три отрезка: *A* (красный), *B* (синий) и *C* (зеленый), представляющие три ленты (см. Рис. 1.11).

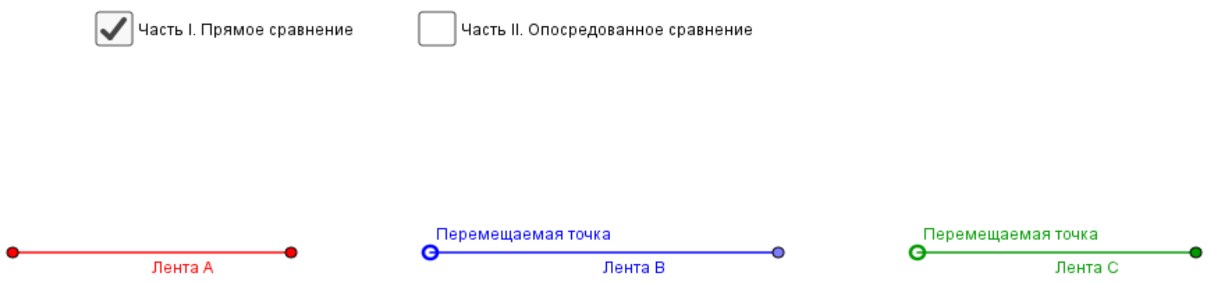


Рисунок 1.11

Отрезок A закреплен на плоскости и его нельзя переместить. Отрезки B и C имеют фиксированную длину, но могут быть перемещены с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ, если потянуть за левую крайнюю точку отрезка (названа на странице Перемещаемой точкой). Эти точки имеют привязку к сетке, поэтому можно добиться точного выравнивания отрезков.

Когда установлен флажок “Часть II. Опосредованное сравнение”, ученики увидят прямоугольник, обозначающий песочницу, отрезок, обозначающий веревку, и два ползунка (см. Рис. 1.12)

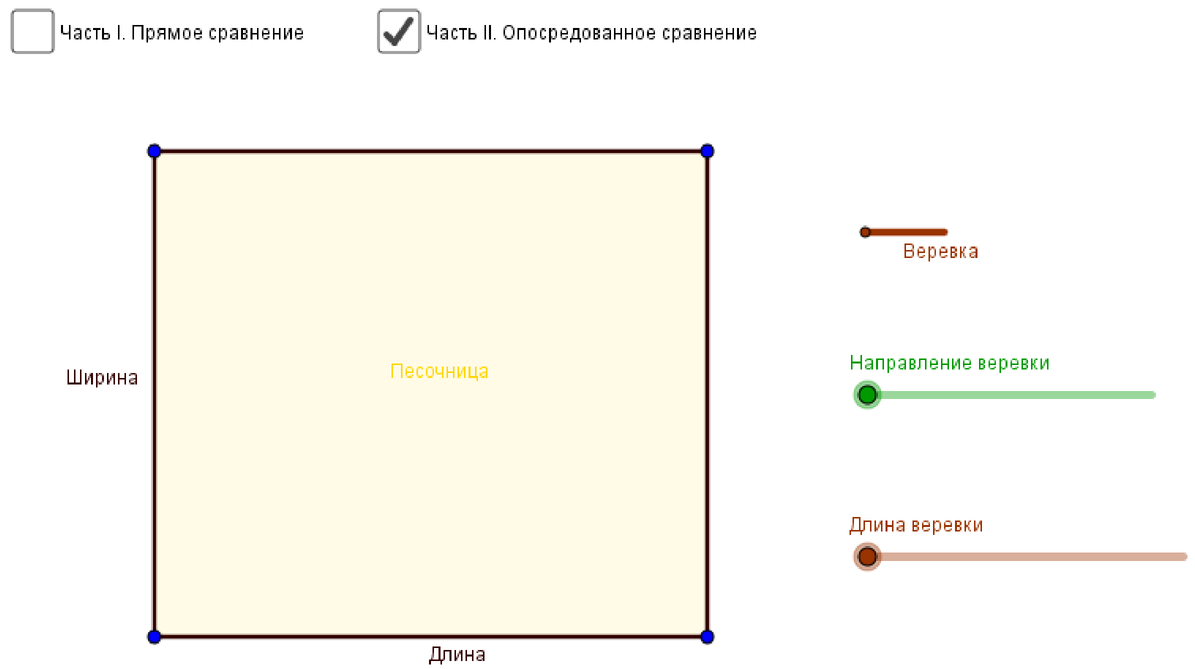


Рисунок 1.12

“Веревку” можно перетаскивать по плоскости за левый конец с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ. Ползунок “Направление веревки” позволяет поворачивать этот отрезок, изменяя его ориентацию.

Диапазон поворота от 0 до 360 градусов. Ползунок “Длина веревки” позволяет изменять длину отрезка “веревка” от 1 до 10 единиц. В этом задании ученикам доступен только инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ.

Цели задания:

В этом задании ученики сталкиваются с двумя задачами. В первой задаче они сравнивают длины трех лент, представленных отрезками *A*, *B* и *C*. Ученики перемещают отрезки *B* и *C*, чтобы непосредственно сравнить каждый из них с отрезком *A* и сравнить отрезки *B* и *C* между собой. Во второй задаче ученики сравнивают ширину и длину песочницы, представленной прямоугольником, с помощью третьего объекта, веревки, представленной отрезком. В этой задаче ученики изменяют длину веревки и ее направление, чтобы произвести опосредованное сравнение.

Часть I. Прямое сравнение

Сначала ученики рассматривают отрезки *A*, *B* и *C* и выдвигают предположения, какой из отрезков самый длинный. Предполагается, что большинство учеников выберут ленту *B* как самую длинную.
Затем учитель просит учеников перечислить отрезки от самого короткого к самому длинному. Возможные ответы: *A*, *C*, *B* или *C*, *A*, *B*, или *A* и *C*, *B*. обратите внимание, что отрезки *A* и *C* имеют одинаковую длину, но это может быть неочевидно для учеников, пока они не сравнят отрезки непосредственно.

Затем ученикам будет предложено сравнить пары отрезков напрямую, перетаскивая отрезки *B* и *C*. Основная цель этого задания – дать ученикам понять, что для сравнения длин отрезков необходимо их выровнять по одному из концов. Ученики могут перетащить сравниваемый отрезок как поверх, так и ниже того отрезка, с которым они его сравнивают (см. Рис. 1.13).

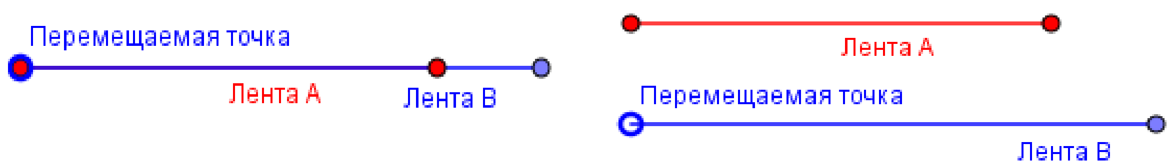


Рисунок 1.13

Затем вы просите учеников записать результат их сравнения, или словами, или знаками. Например, могут быть получены следующие ответы:

Отрезок *A* _*короче, чем*_ отрезок *B*.

Отрезок *A* _*меньше, чем*_ отрезок *B*.

Отрезок *A* _<_ отрезка *B*.

Отрезок *A* _*равен*_ отрезку *C*.

Отрезок *A* _*той же длины, что*_ отрезок *C*.

Отрезок *A* = отрезку *C*.

Это задание не предполагает реального измерения длин.

В заключение вы задаете ученикам вопрос: “Что очень важно сделать, когда сравниваешь отрезки непосредственно?” Предполагается, что они заметили, что при сравнении отрезков важнее всего выровнять у отрезков конечные точки.

Часть II. Опосредованное сравнение

В этом задании ученики должны сравнивать два отрезка, которые перпендикулярны друг другу, и поэтому их нельзя сравнить совмещением. Поэтому им предлагается использовать третий объект.

Как и в первой части, ученики начинают выполнение задания с того, что посмотрев на рисунок, предполагают, что больше, длина или ширина песочницы, которая представлена в виде прямоугольника. Эти размеры очень близки между собой, поэтому предположения могут быть различными. Важно, чтобы ученики записали свои предварительные оценки до того, как приступят к измерениям.

В следующей части задания ученики перемещают *веревку* и используют ее как мерку для сравнения ширины и длины песочницы. Отрезок, представляющий веревку, можно перетащить за один из концов, чтобы совместить его с углом песочницы, а затем с помощью ползунка сделать длину веревки равной длине песочницы. После этого ученик может другим ползунком повернуть веревку, чтобы она совпала с другой стороной песочницы (см. Рис. 1.14), и ответить на вопрос о сравнении длин.

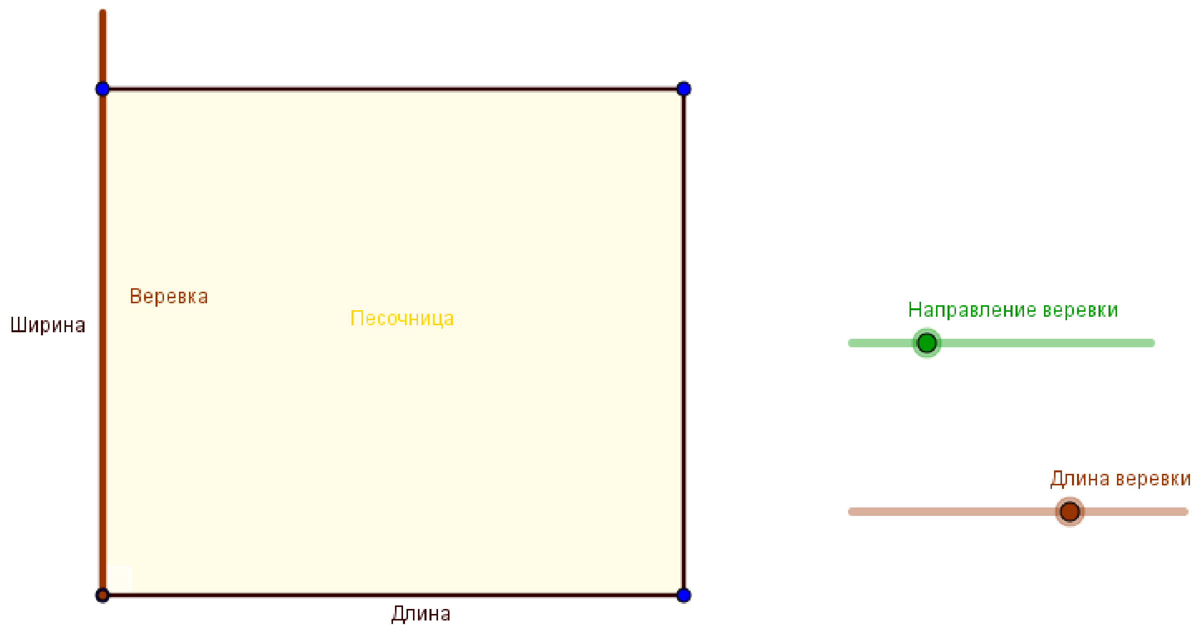


Рисунок 1.14

Вот возможные ответы ученика: Ширина песочницы *_меньше чем_* длина веревки. Ширина песочницы *_меньше чем_* длина песочницы.

В заключение ученики должны сделать выводы о том, как веревка помогла им сравнить размеры двух сторон песочницы. Очень важно, чтобы ученики поняли транзитивное свойство отрезков: если $A = B$ и $A > C$, то $B > C$. Не предполагается, что ученики запишут это символически, но предполагается, что они смогут выразить это по существу.

Длина отрезка и единичный отрезок (урок 1.2.2)

Учебные задачи:

- Ученики должны выразить длину отрезка через целое число единиц длины.
- Ученики должны понять, что длины отрезка – это число единиц длины одинакового размера, которые могут покрыть отрезок без промежутков и перекрытий.

Материалы: Файл GeoGebra 1_2_2_длина_единичного_отрезка.ggb

Файл содержит 5 отрезков различной длины, три из которых расположены горизонтально, а два вертикально. Эти отрезки зафиксированы, и их длина и ориентация не могут быть изменены.

Кроме этого в файле есть 6 единичных отрезков, которые можно перемещать для измерения длин (см. Рис. 1.15). Чтобы переместить единичный отрезок, ученики должны с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ подцепить отрезок за красную точку (левый конец) и передвинуть его. Синие точки (правый конец) они могут использовать для поворота единичных отрезков. Длина единичных отрезков зафиксирована.

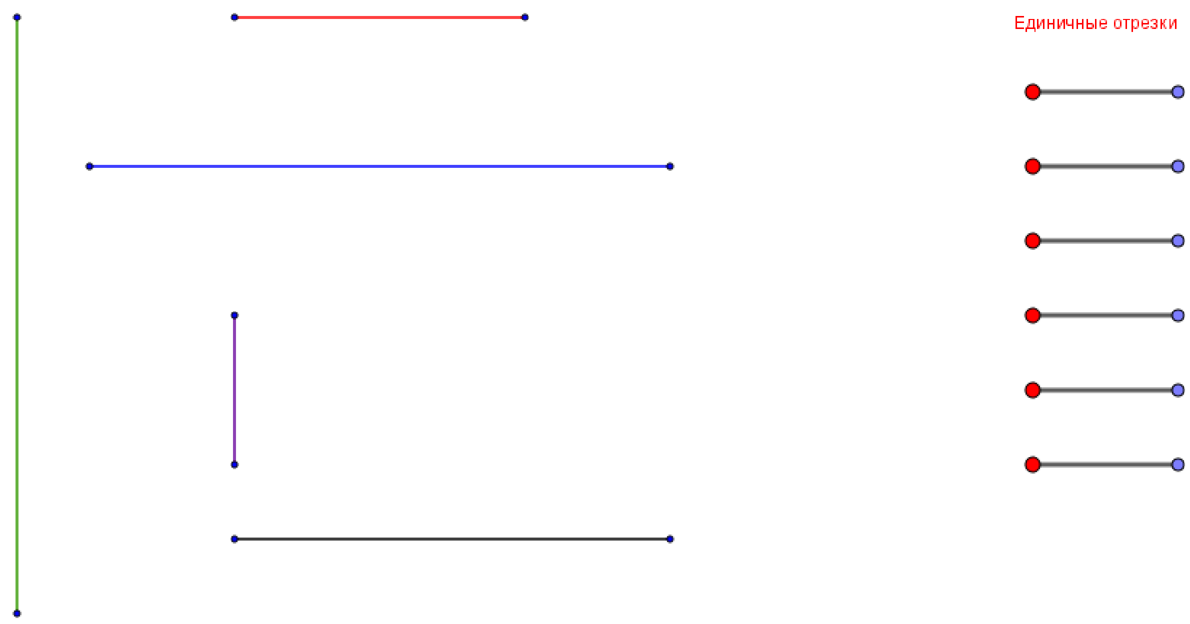


Рисунок 1.15

В этом задании ученикам доступен только инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ.

Цели задания

В этом задании ученики изучают понятие длины, используя отрезки одинакового размера для покрытия каждого из заданных отрезков без пропусков и перекрытий (см. Рис. 1.16).

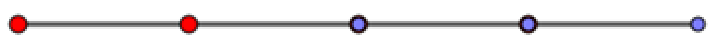


Рисунок 1.16

В задании понятие *длины* определяется как число таких единичных отрезков. Файл настроен так, что точки имеют привязку к сетке, что обеспечивает точное размещение единичных отрезков. Ученики измеряют длину каждого из данных отрезков и записывают результаты в таблицу.

Таблица данных	
Отрезок	*Длина в единичных отрезках*
красный	2
синий	4
зеленый	4
черный	3
лиловый	1

Сложение отрезков (урок 1.2.3)

Учебные задачи:

• Ученики решают текстовые задачи на длины.

• Ученики должны установить, что длина суммы отрезков равна сумме длин этих отрезков.

Материалы: Файл GeoGebra 1_2_3_сложение_отрезков.ggb

Файл предлагает визуальную интерпретацию предложенной ученикам текстовой задачи. Ученикам предлагается измерять длины отрезков с помощью единичных отрезков или сетки (см. Рис. 1.17).

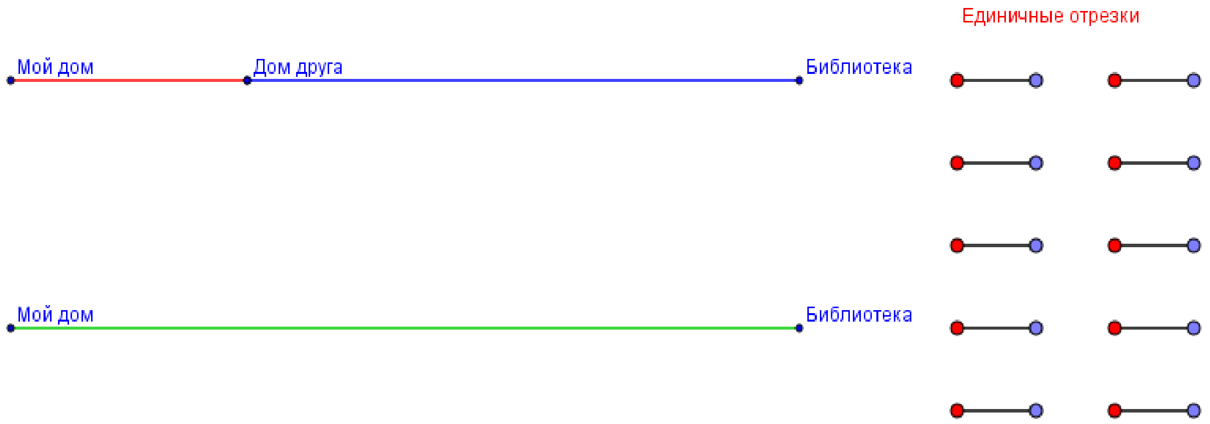


Рисунок 1.17

Цели задания

Ученикам дана следующая текстовая задача: *Ты едешь на велосипеде по прямой улице из дома в библиотеку. По дороге ты останавливаешься, чтобы подождать своего друга, чтобы потом ехать в библиотеку вместе.* Каждый отрезок пути представлен в виде отрезка.

Если ученики используют единичные отрезки, они могут перемещать их с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ, подцепив отрезок за красную точку и перетаскивая его. Кроме того, ученики могут использовать инструмент СЕТКА и для определения длины каждого отрезка посчитать количество клеток сетки (см. Рис. 1.18).

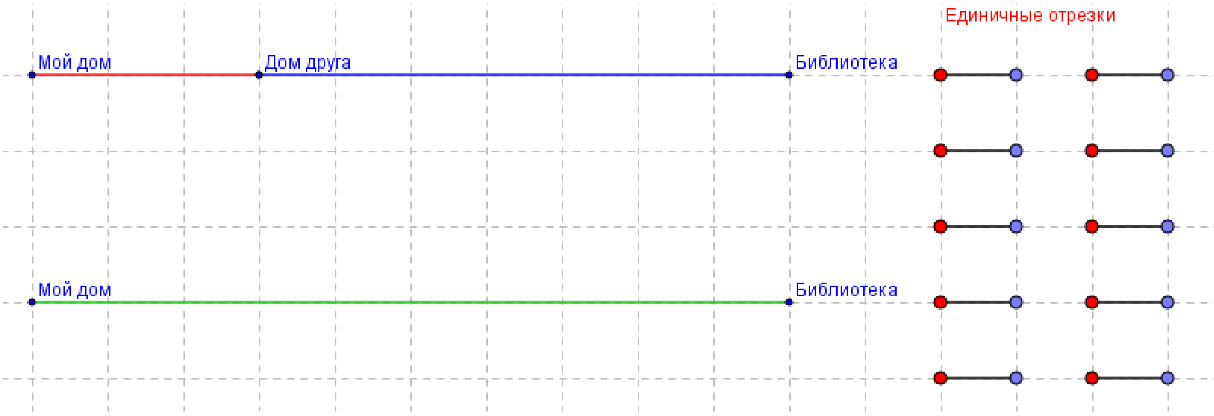


Рисунок 1.18

После того как ученики нашли длины отрезков в единичных отрезках, они должны перевести их в метры, используя факт, что один единичный отрезок равен 100 метрам. Ожидаемые результаты измерений представлены в таблице данных.

Таблица данных		
Участок пути	*Длина участка пути в единичных отрезках*	*Длина участка пути в метрах*
красный	3	300
синий	7	700
зеленый	10	1000

Предполагается, что, увидев закономерность в таблице с данными, ученики смогут сделать вывод, что длина всего пути может быть найдена сложением длин всех участков пути, т.е. 300 + 700 = 1000 метров.

2. Свойства треугольников и четырехугольников

2.1. Ключевые идеи и основные понятия

В начальной школе учащиеся знакомятся с плоскими фигурами: треугольником, прямоугольником, квадратом, ромбом и др. Здесь мы приводим основные определения, свойства и признаки треугольников и некоторых четырехугольников. Учителю важно понимать, в чем отличие между определением, свойством и признаком. Рассмотрим эти отличия на примере треугольника.

Треугольник определяется как конечная часть плоскости, ограниченная тремя попарно пересекающимися прямыми. Точки пересечения прямых называются вершинами треугольника, отрезки прямых – сторонами треугольника (рис. 2.1)

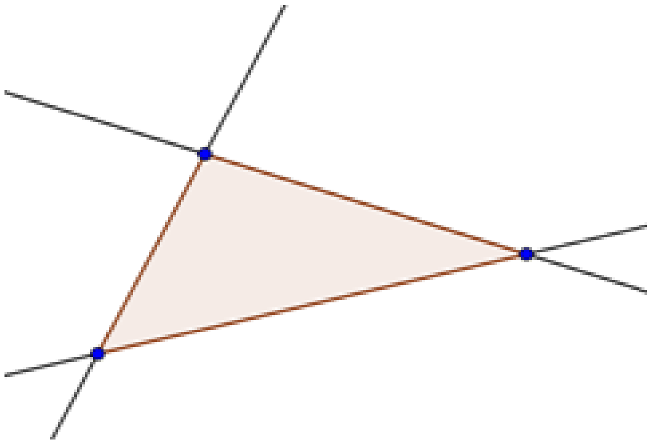


Рисунок 2.1

Определение – это первичное описание фигуры. В определении часто используются такие слова, как *определяются, называются, это*. У свойства особенность в том, что фигура уже определена, нужно указать её свойства на основе определения.

Главные свойства треугольника:

- Против равных углов – равные стороны и наоборот
- Против большего угла лежит большая сторона и наоборот
- В треугольнике сумма двух любых его сторон больше третьей стороны.
- Сумма углов треугольника равна 180 градусам.

Треугольники можно классифицировать по длинам их сторон на два класса: *разносторонние* и *равнобедренные*. *Равносторонние* треугольники являются частным случаем равнобедренных.

Разносторонним называется треугольник, у которого нет равных сторон (рис. 2.2)

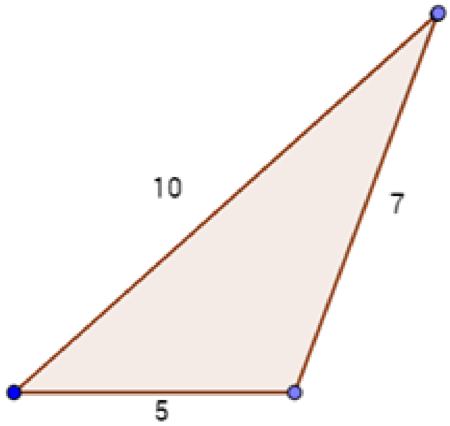


Рисунок 2.2

Равнобедренным называется треугольник, у которого хотя бы две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, третья сторона называется основанием (рис. 2.3). Таким образом мы дали определение равнобедренному треугольнику.

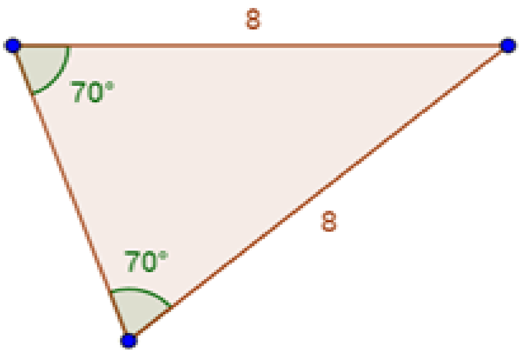


Рисунок 2.3

Свойством равнобедренного треугольника является то, что в этом треугольнике углы при основании равны. Признак отличается от свойства тем, что в свойстве фигура дана и мы говорим о ней, а в признаке мы распознаем фигуру по ее свойствам. Признаком равнобедренного треугольника является утверждение: если в треугольнике есть два равных угла, то он является равнобедренным.

Итак, в свойстве фигура уже дана, и мы определяем её характеристики, в признаке мы пытаемся опознать фигуру с помощью каких-то характеристик. В определении содержатся и свойство, и признак. Если выполняются и свойство, и признак, то это может быть основой определения. Например, наличие двух равных углов треугольника является и свойством, и признаком равнобедренного треугольника, а потому может служить его определением.

Равносторонним треугольником называется треугольник, у которого все стороны равны. Его свойством является то, что в равностороннем треугольнике все три угла равны (рис. 2.4).

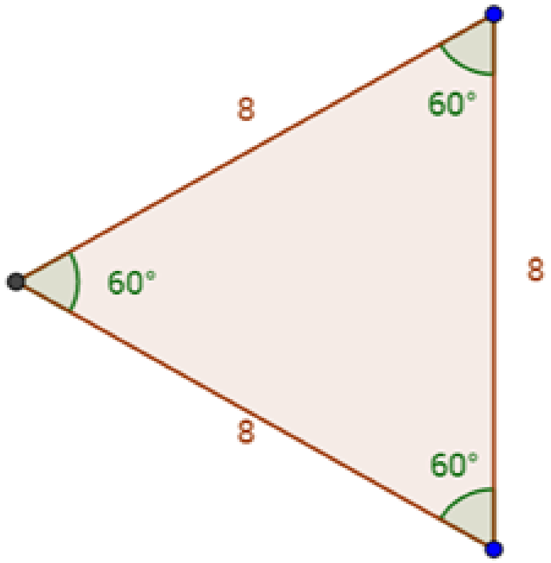


Рисунок 2.4

Признак равностороннего треугольника: если в треугольнике три угла равны, то он является равносторонним.

Треугольники также можно классифицировать по величине их углов. Все треугольники по виду углов разбивают на три класса: *остроугольные*, у которых все углы острые (менее 90˚); *тупоугольные*, у которых есть тупой угол (более 90˚); и *прямоугольные*, у которых есть прямой угол (90˚) (рис. 2.5).

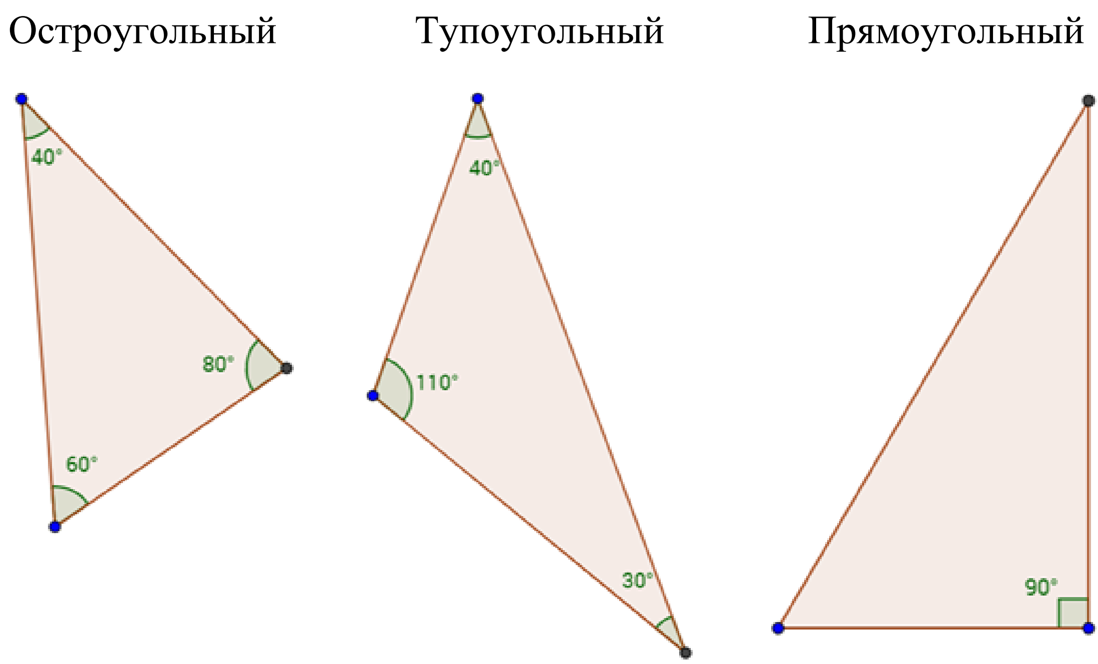


Рисунок 2.5

В прямоугольном треугольнике две стороны, образующие прямой угол, называются катетами, а сторона, противолежащая прямому углу, называется гипотенузой.

Четырехугольником называется конечная часть плоскости, ограниченная четырьмя отрезками, которые последовательно соединяют четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Эти точки называются вершинами четырехугольника, а отрезки – сторонами четырехугольника (рис. 2.6)

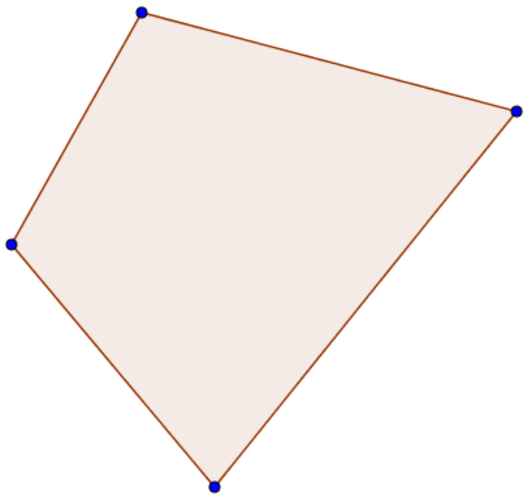


Рисунок 2.6

В начальной школе изучают следующие виды четырехугольников: *параллелограмм*, *прямоугольник*, *ромб* и *квадрат*. Ниже мы приводим определения, и примеры свойств и признаков этих фигур.

Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого каждые две противоположные стороны параллельны, то есть лежат на параллельных прямых (рис. 2.7).

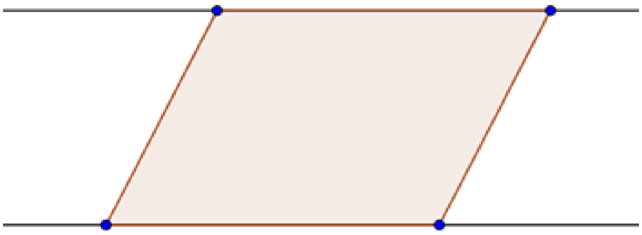


Рисунок 2.7

Главные свойства параллелограмма:

- Противоположные стороны параллелограмма равны.
- Противоположные углы параллелограмма равны.
- Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- Точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелограмма.

Признаки параллелограмма:

- Если противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
- Если в четырёхугольнике есть пара равных и параллельных сторон, то этот четырёхугольник – параллелограмм.
- Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Прямоугольник – это четырёхугольник, у которого все углы прямые (рис. 2.8).

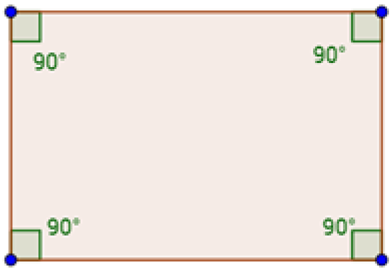


Рисунок 2.8

Свойства прямоугольника:

- Стороны прямоугольника являются его высотами.
- Диагонали прямоугольника равны.
- Прямоугольник обладает двумя осями симметрии, каждая из которых проходит через середины двух его противоположных сторон.

Признаки прямоугольника:

- Параллелограмм является прямоугольником, если два соседних угла параллелограмма равны.
- Параллелограмм является прямоугольником, если его диагонали равны.
- Параллелограмм является прямоугольником, если один из его углов прямой.

Ромб – это четырехугольник, у которого все стороны равны (рис. 2.9).

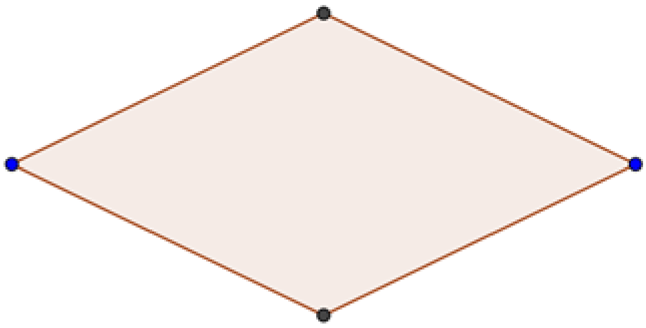


Рисунок 2.9

Свойство ромба:

- Ромб является параллелограммом, поэтому его противоположные стороны попарно параллельны.
- Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
- Точка пересечения диагоналей является центром симметрии ромба.
- Ромб обладает двумя осями симметрии, каждая из которых проходит через противоположные вершины

Признак ромба: параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда две его смежные стороны равны (отсюда и следует, что все стороны равны). Обратим внимание на оборот «тогда и только тогда». Он означает, что условие является необходимым и достаточным.

Квадрат можно определить несколькими способами. Квадрат – это четырёхугольник, у которого все углы равны и все стороны равны (рис. 2.10). Или, квадрат – это прямоугольник, у которого две соседние стороны равны. Или квадрат – это ромб, у которого два соседних угла равны.

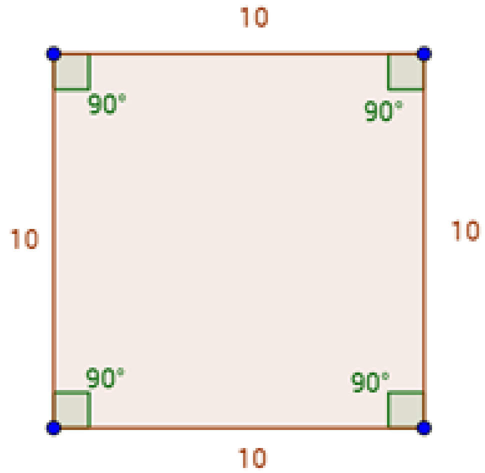


Рисунок 2.10

Интересно, что квадрат является частным случаем как ромба, так и прямоугольника. Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба. Признак квадрата можно сформулировать, например, так: если все стороны четырехугольника равны и все углы прямые, то этот четырехугольник – квадрат.

2.2. Уроки GeoGebra

2.2.1. Определи вид треугольников: найди общее. Часть 1

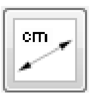
Файл GeoGebra: 2_2_1_вид_треугольников.ggb

Наблюдение и выдвижение гипотезы

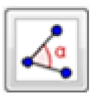
Рассмотрим четыре треугольника на странице GeoGebra. Эти четыре фигуры имеют общее свойство. Предположи, какое это может быть свойство?

Проверка гипотезы

Проверь свое предположение, применив какой-нибудь из этих инструментов, добавляющий размеры к любому из имеющихся треугольников:



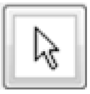
инструмент РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА



инструмент УГОЛ

Нарисуй пример

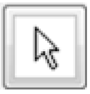
В отведенном для этого прямоугольном поле нарисуй с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК такой треугольник, который тоже принадлежал бы к этой группе, то есть имел бы то же самое свойство.



При необходимости с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) передвинь вершины треугольника или весь треугольник целиком.

Используя измерительный инструмент, докажи, что твой треугольник относится к этой группе.

Проверка



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) установи флажок в контрольном окошке для проверки своей гипотезы.

2.2.2. Определи вид треугольников: найди общее. Часть 2

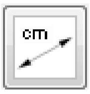
Файл GeoGebra: 2_2_2_вид_треугольников.ggb

Наблюдение и выдвижение гипотезы

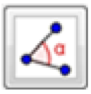
Рассмотрим четыре треугольника на странице GeoGebra. Эти четыре фигуры имеют общее свойство. Предположи, какое это может быть свойство?

Проверка гипотезы

Проверь свое предположение, применив какой-нибудь из этих инструментов, добавляющий размеры к любому из имеющихся треугольников:



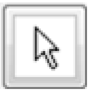
инструмент РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА



инструмент УГОЛ

Нарисуй пример

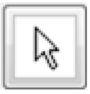
В отведенном для этого прямоугольном поле нарисуй с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК такой треугольник, который тоже принадлежал бы к этой группе, то есть имел бы то же самое свойство.



При необходимости с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) передвинь вершины треугольника или весь треугольник целиком.

Используя измерительный инструмент, докажи, что твой треугольник относится к этой группе.

Проверка



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) установи флажок в контрольном окошке для проверки своей гипотезы.

2.2.3. Определи вид треугольников: найди общее. Часть 3

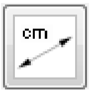
Файл GeoGebra: 2_2_3_вид_треугольников.ggb

Наблюдение и выдвижение гипотезы

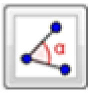
Рассмотрим четыре треугольника на странице GeoGebra. Эти четыре фигуры имеют общее свойство. Предположи, какое это может быть общее свойство?

Проверка гипотезы

Проверь свое предположение, применив какой-нибудь из этих инструментов, добавляющий размеры к любому из имеющихся треугольников:



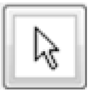
инструмент РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА



инструмент УГОЛ

Нарисуй пример

В отведенном для этого прямоугольном поле нарисуй с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК такой треугольник, который тоже принадлежал бы к этой группе, то есть имел бы то же самое свойство.



При необходимости с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) передвинь вершины треугольника или весь треугольник целиком.

Используя измерительный инструмент, докажи, что твой треугольник относится к этой группе.

Проверка

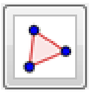
С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) установи флажок в контрольном окошке для проверки своей гипотезы.

2.2.4. Рисуем четырехугольники

Файл GeoGebra: 2_2_4_рисуем_четырехугольники.ggb

Рисуем квадраты

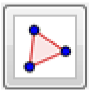
Подумай, какие свойства имеет ***квадрат***?



Теперь с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК нарисуй два различных квадрата в поле с надписью КВАДРАТЫ.

Рисуем прямоугольники

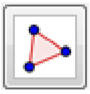
Подумай, какие свойства имеет ***прямоугольник***?



Теперь с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК нарисуй два различных прямоугольника в поле с надписью ПРЯМОУГОЛЬНИКИ.

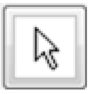
Рисуем ромбы

Подумай, какие свойства имеет ***ромб***?



Теперь с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК нарисуй два различных ромба в поле с надписью РОМБЫ.

Проверь свои рисунки



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) установи флажки в контрольных окошках, чтобы увидеть примеры квадратов, прямоугольников и ромбов.

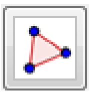
Были ли твои представления об этих фигурах правильными?

2.2.5. Отгадай, кто я?

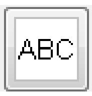
Файл GeoGebra: 2_2_5_загадки_о_четырехугольниках.ggb

Загадка 1

Я четырехугольник… Все мои углы равны. Все мои стороны равны.



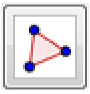
Нарисуй меня с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК.

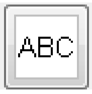


Назови меня с помощью инструмента ТЕКСТ.

Загадка 2

Я четырехугольник…
Все мои углы равны.
Если ты пойдешь вокруг меня, длины моих сторон сложатся в цепочку: ABAB.
Длина А отличается от длины В.

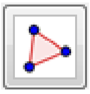

Нарисуй меня с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК.

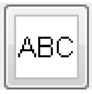


Назови меня с помощью инструмента ТЕКСТ.

Загадка 3

Я четырехугольник…
Я не квадрат, но я в чем-то похож на моего двоюродного брата квадрата – все мои стороны равны.
Мои углы не все равны.
Если ты пойдешь вокруг меня, величины моих углов сложатся в цепочку: ABAB.


Нарисуй меня с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК.



Назови меня с помощью инструмента ТЕКСТ.

2.3. Методические рекомендации для учителя

Определи вид треугольников: найди общее. Части I–III. (уроки 2.2.1-2.2.3)

Учебные задачи:

- Ученики должны найти общее свойство для заданных треугольников.
- Ученики должны нарисовать треугольник с заданными свойствами.

Материалы: Файлы GeoGebra: 2_2_1_вид_треугольников.ggb, 2_2_2_вид_треугольников.ggb, 2_2_3_вид_треугольников.ggb.

Файлы для каждого из этих трех заданий построены сходным образом. В каждом из файлов ученики видят четыре треугольника, имеющих общее свойство. В части I представлены равносторонние треугольники (Рис. 2.11),

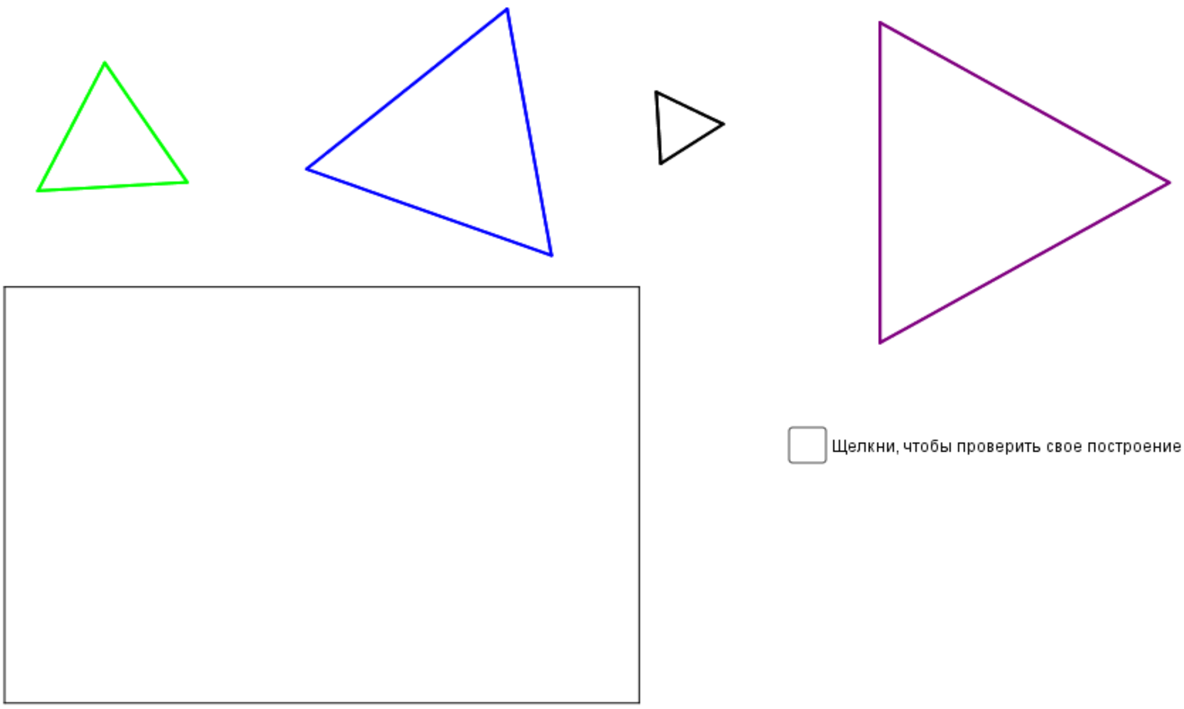


Рисунок 2.11

в части II – равнобедренные треугольники (Рис. 2.12),

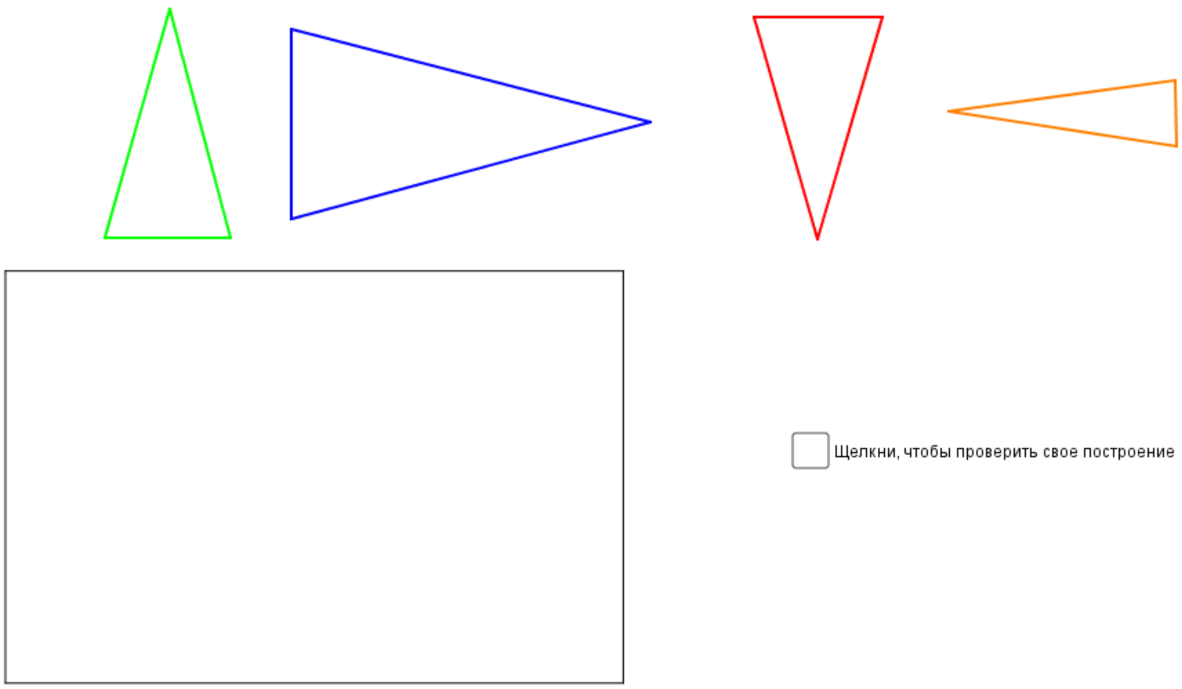


Рисунок 2.12

а в части III – прямоугольные треугольники (Рис. 2.13).

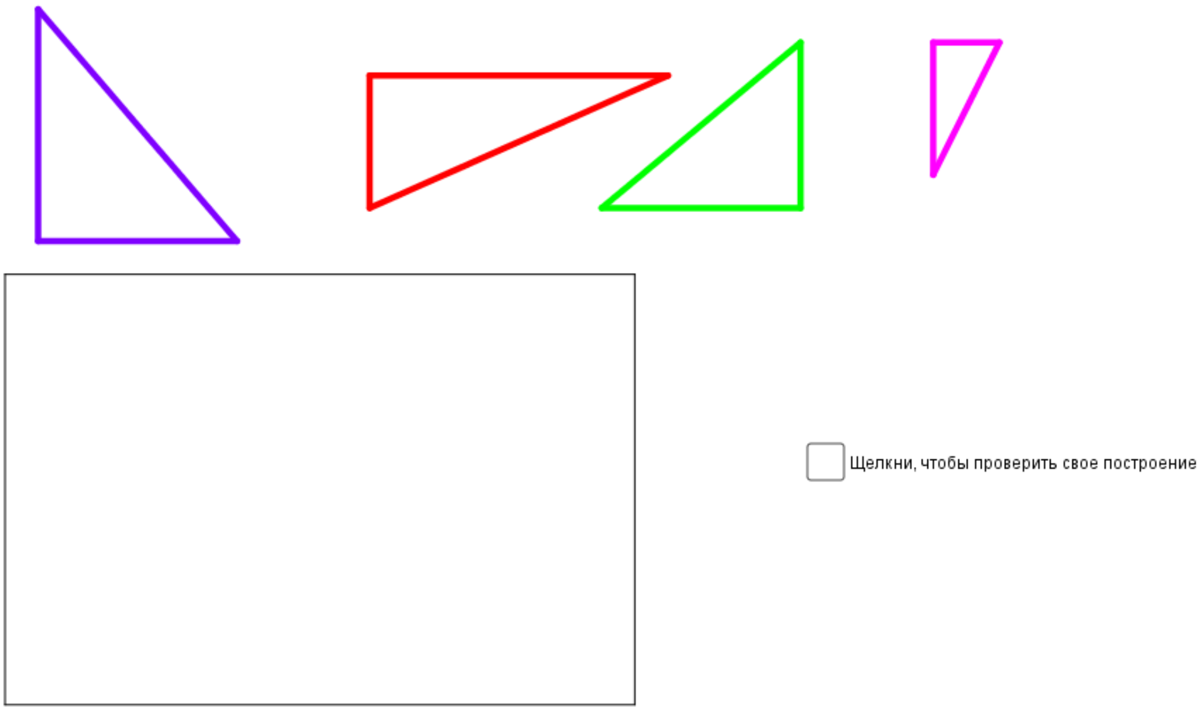


Рисунок 2.13

Данные треугольники закреплены на странице и не могут быть изменены. При этом ученики могут с помощью инструментов РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА и УГОЛ измерить длины сторон и внутренние углы этих треугольников. На каждой из страниц также есть прямоугольная рамка, в которой ученикам предлагается самостоятельно нарисовать с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК треугольник с теми же свойствами. В каждом файле также имеется контрольное окошко; когда в нем устанавливается флажок, то на странице отображаются общее свойство и название треугольников из данной группы (Рис. 2.14).

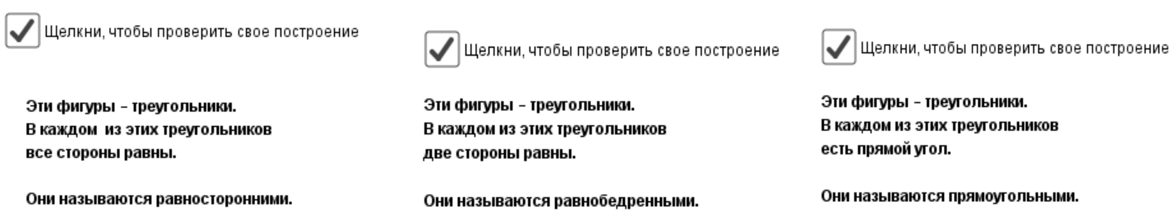


Рисунок 2.14

Кроме перечисленных инструментов ученикам также доступны инструменты ПЕРЕМЕЩАТЬ и УДАЛИТЬ.

Цели задания

Эти задания созданы с целью познакомить учащихся с разными видами треугольников. В этих заданиях не ставится задача о классификации треугольников. Перед началом выполнения каждого задания ученикам предлагается рассмотреть данные четыре треугольника и определить их общее свойство. Предполагается, что ученики запишут свои предположения перед тем, как действовать дальше. Эта часть задания может выполняться всем классом, в группах или индивидуально.

После этого учащиеся проверяют свои гипотезы измерениями. Они могут выбрать измерение сторон или углов. Если инструментом РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА щелкнуть на любой из сторон треугольника, над этой стороной отобразится ее длина в единичных отрезках (см. Рис. 2.15).

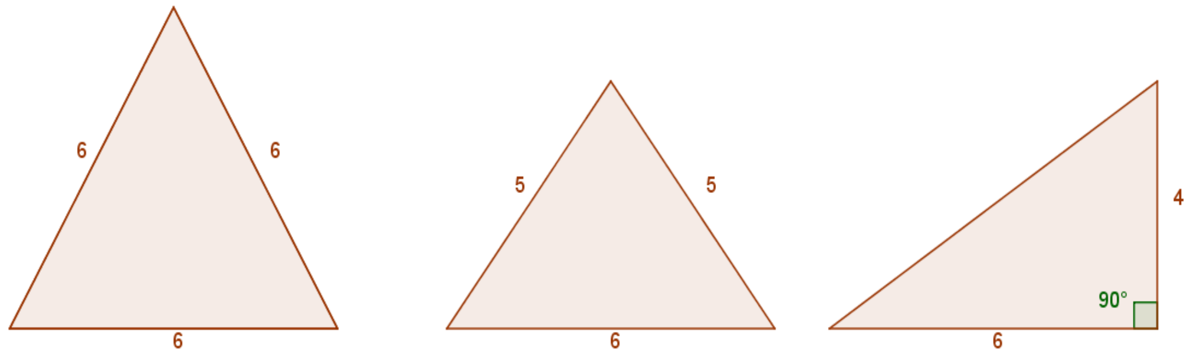


Рисунок 2.15

Вместо этого (или вместе с этим) они могут выбрать инструмент УГОЛ для измерения внутренних углов треугольников. Напомните ученикам, что для измерения угла они должны щелкнуть на сторонах, образующих угол, выбирая стороны в направлении *против часовой стрелки* (Рис. 2.16а). В противном случае будут отображаться величины наружных углов (Рис. 2.16б).

а) Правильное измерение углов   б) Неправильное измерение углов

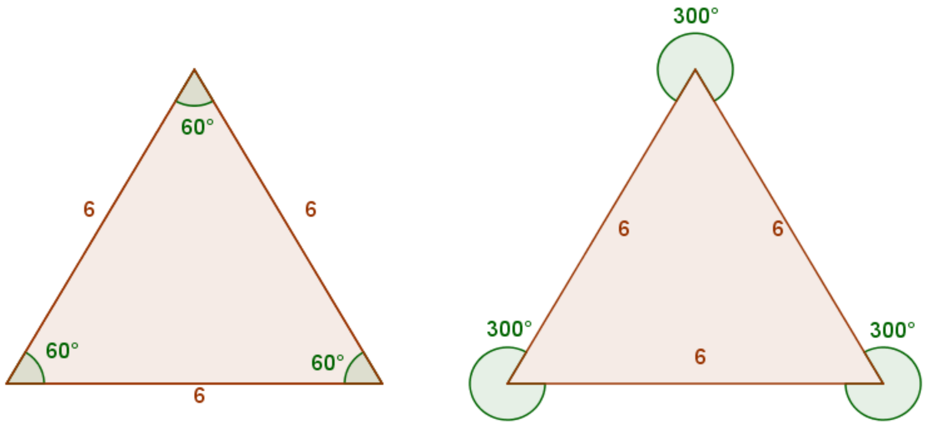


Рисунок 2.16

Затем ученикам предлагается нарисовать треугольник с тем же свойством в отведенной для этого области. Они должны с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК сначала нарисовать фигуру, а затем с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ подвигать вершины треугольника, настраивая их так, чтобы он стал того же вида, что и заданные треугольники. Чтобы добиться нужного результата, ученики могут с помощью инструментов измерения отобразить на рисунке или стороны созданного треугольника, или величины внутренних углов. Они также могут использовать опцию СЕТКА. Возможный результат ученической работы приведен на Рис. 2.17.

Часть I. Равносторонний треугольник   Часть II. Равнобедренный треугольник   Часть III. Прямоугольный треугольник

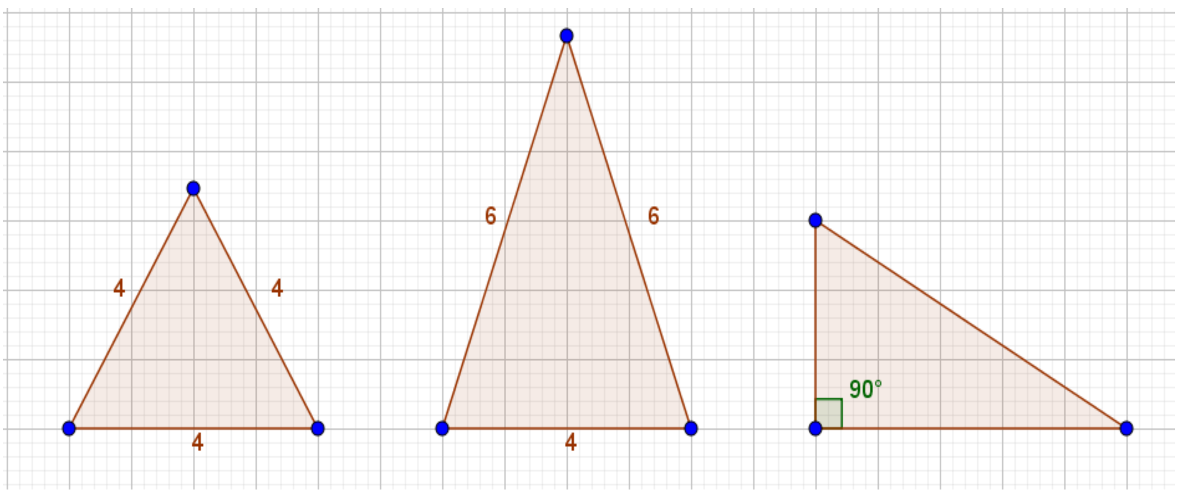


Рисунок 2.17

В заключение ученики могут установить флажок в контрольном окошке, чтобы проверить, правильно ли они определили общее свойство и название этого вида треугольников.

Рисуем четырехугольники (урок 2.2.4)

Учебные задачи:

- Ученики должны определить четырехугольники разных видов
- Ученики должны нарисовать квадраты, прямоугольники и ромбы

Материалы: Файлы GeoGebra 2_2_4_рисуем_четырехугольники.ggb

В этом файле ученикам предоставляются области для приведения примеров квадратов, прямоугольников и ромбов (Рис. 2.18).

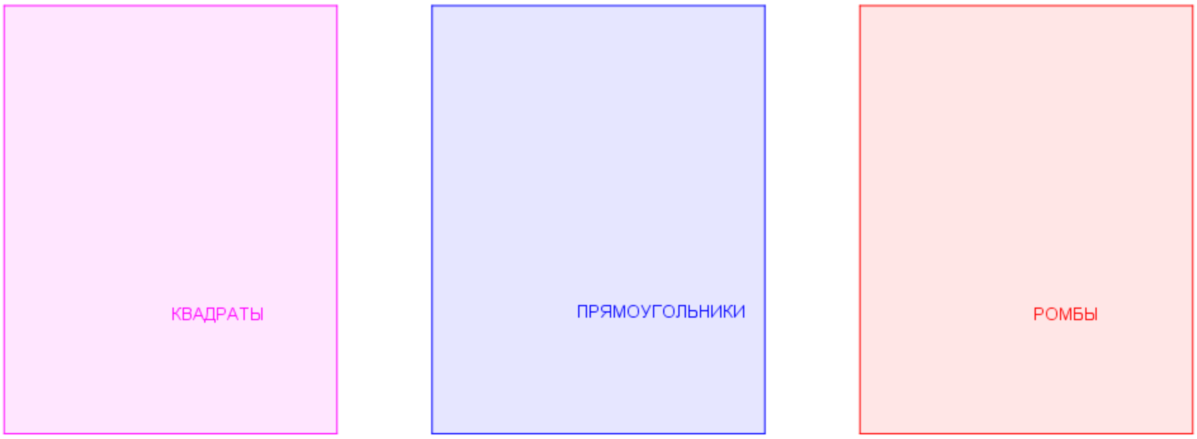


Рисунок 2.18

При установке флажков в контрольных окошках на странице отображаются примеры этих фигур (Рис. 2.19).

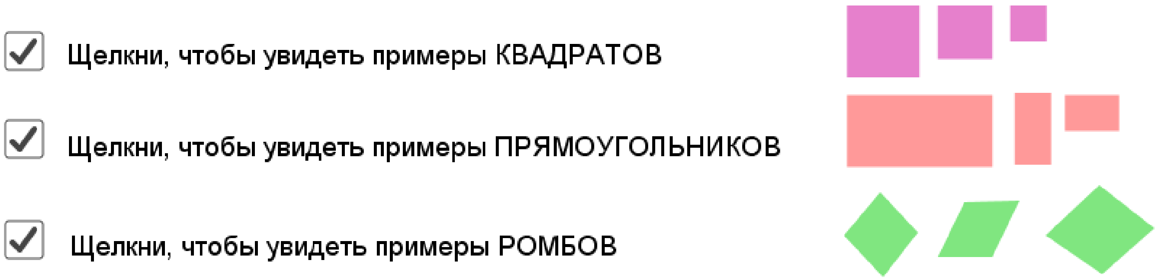


Рисунок 2.19

В этом задании ученикам доступны инструменты ПЕРЕМЕЩАТЬ, МНОГОУГОЛЬНИК и УДАЛИТЬ.

Цели задания

Сначала учеников просят определить признаки квадрата и затем нарисовать два различных квадрата в отведенной области. Это потребует от учеников, чтобы они вспомнили, что квадраты имеют четыре равных стороны и четыре прямых угла. Чтобы квадраты отличались, необходимо, чтобы они имели разную длину стороны.

Ученики должны с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК нарисовать четырехугольник и с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ подстроить вершины так, чтобы четырехугольник стал похож на квадрат. Возможный результат построения приведен на Рис. 2.20а.

Аналогичным образом ученики должны нарисовать два различных прямоугольника и два различных ромба. Необходимо, чтобы ученики понимали, что у квадратов, ромбов и прямоугольников имеются некоторые общие признаки. Все эти фигуры являются четырехугольниками, т.е. имеют четыре стороны. Ромбы имеют четыре равные стороны, поэтому квадраты являются также ромбами. Прямоугольники имеют четыре прямых угла, поэтому квадраты являются также прямоугольниками. Может оказаться, что ученики нарисуют квадраты во всех трех областях. Поэтому обратите внимание учеников на то, что фигуры должны отличаться. Следует добиться полного понимания учениками признаков различных фигур. Возможные ученические решения для прямоугольников и ромбов представлены на Рис. 2.20б и Рис. 2.20в, соответственно.

а) Квадраты б) Прямоугольники в) Ромбы

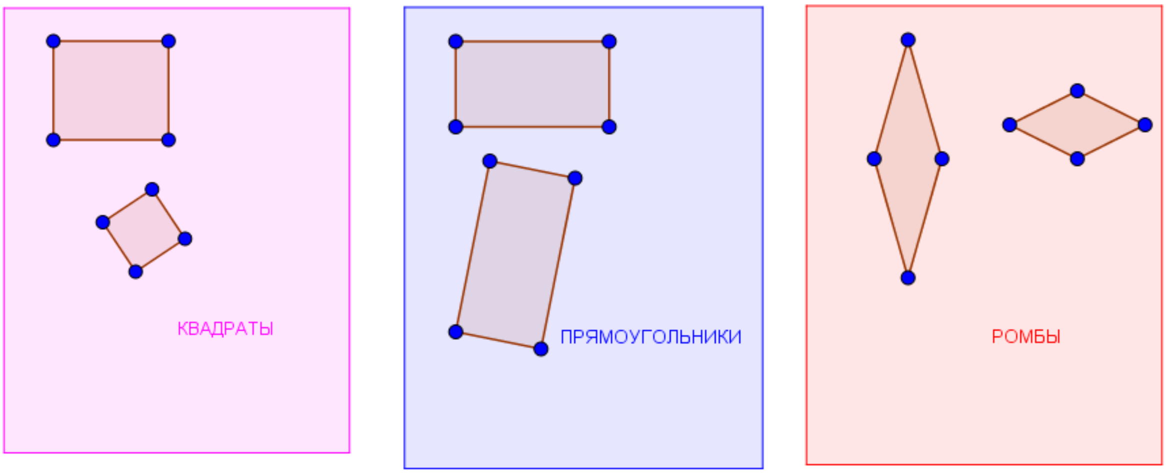


Рисунок 2.20

После того как ученики завершат свои рисунки, они могут установить флажки в контрольных окошках, чтобы увидеть примеры этих фигур и проверить свои результаты.

Это задание можно использовать как введение в тему о признаках и классификации фигур.

Отгадай, кто я? (урок 2.2.5)

Учебные задачи:

- Ученики должны нарисовать четырехугольник по указанным признакам.
- Ученики должны назвать правильно четырехугольники

Материалы: Файл GeoGebra 2_2_5_загадки_о_четырехугольниках.ggb

Страница разбита на области, в которых ученики могут нарисовать четырехугольники (Рис. 2.21).

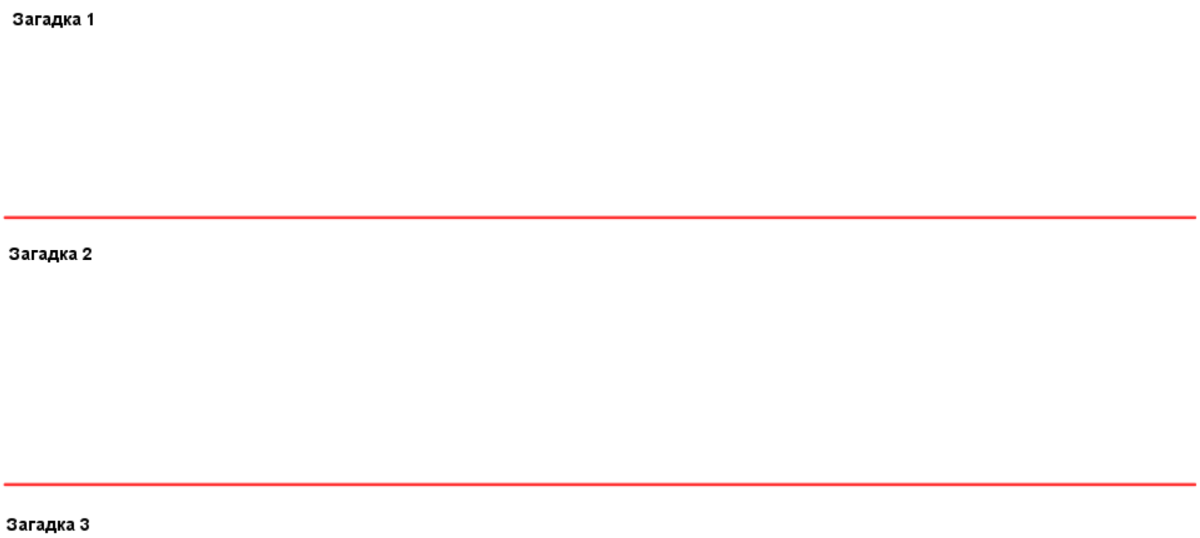


Рисунок 2.21

Ученики имеют доступ к инструментам ПЕРЕМЕЩАТЬ, МНОГОУГОЛЬНИК, ТЕКСТ и УДАЛИТЬ.

Цели задания

В этом задании ученикам предлагается три загадки, в которых описаны признаки различных четырехугольников. На основе данных подсказок они должны определить вид четырехугольника. Затем они должны нарисовать такой четырехугольник в отведенной для этого области и подписать его.

Загадка 1

Я четырехугольник… Все мои углы равны. Все мои стороны равны.

Предполагается, что ученики понимают, что эта фигура имеет четыре стороны. Так как все углы равны, это прямоугольник. Так как все стороны равны, это может быть только квадрат. Затем ученики рисуют квадрат в отведенной для этого области с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК и надписывают его с помощью инструмента ТЕКСТ (см. Рис. 2.22).

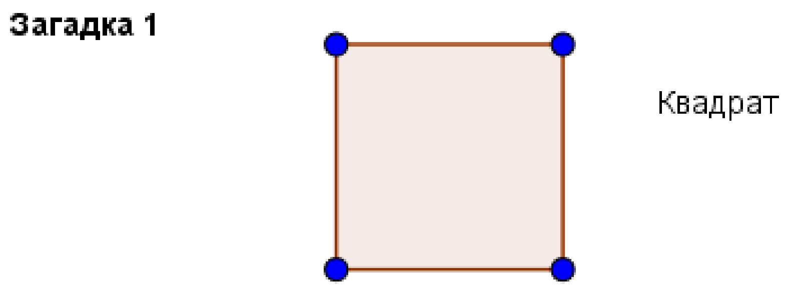


Рисунок 2.22

Загадка 2

Я четырехугольник… Все мои углы равны. Если ты пойдешь вокруг меня, длины моих сторон сложатся в цепочку: ABAB. Длина A отличается от длины B.

По той же логике, что и в загадке 1, фигура является прямоугольником. Но так как смежные стороны имеют разную длину, то это не квадрат (см. Рис. 2.23).

Рисунок 2.23

Загадка 3

Я четырехугольник… Я не квадрат, но я в чем-то похож на моего двоюродного брата квадрата – все мои стороны равны. Мои углы не все равны. Если ты пойдешь вокруг меня, величины моих углов сложатся в цепочку: ABAB.

Ученики должны понимать, что два вида четырехугольников имеют свойства углов, описанных в загадке, – параллелограммы и ромбы. Но из них только у ромба все стороны равны, как у квадрата (см. Рис. 2.24).

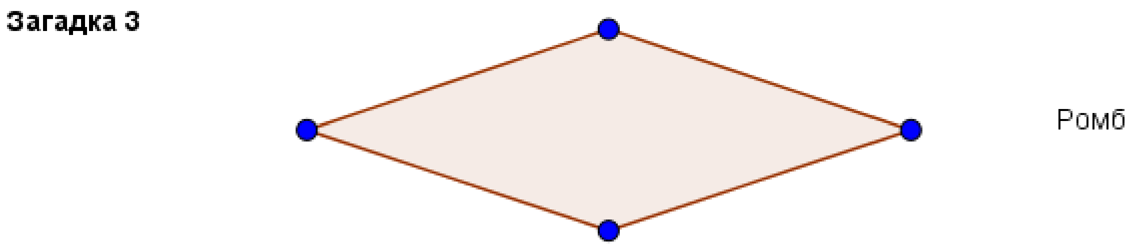


Рисунок 2.24

Это задание можно использовать для промежуточного или итогового контроля в форме игры. Ученики могут работать в маленьких группах или индивидуально.

3. Площадь и периметр

3.1. Ключевые идеи и основные понятия

На плоскости каждый предмет занимает определенное место. Например, салфетка лежит на столе, лист бумаги лежит на парте, плакат висит на стене. **Площадь фигуры** – это величина, которая указывает, сколько места занимает плоская фигура. Обозначается площадь чаще всего латинской буквой S. На рисунке 3.1 изображены квадрат, треугольник и круг.

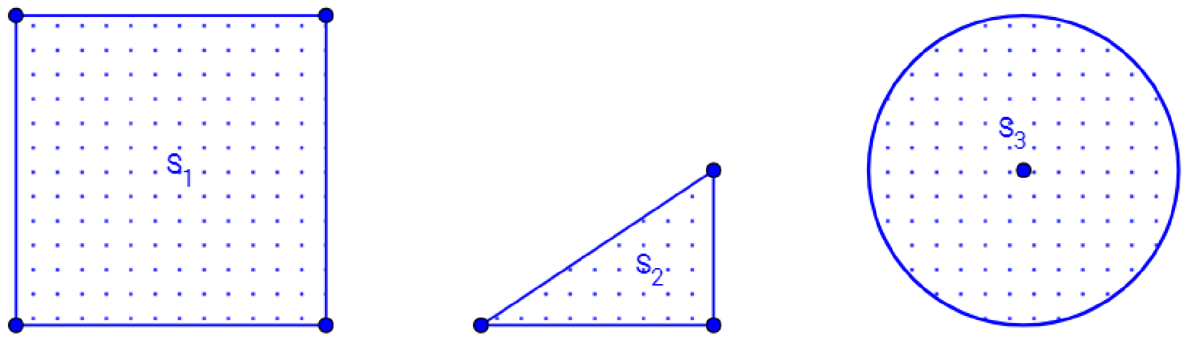


Рисунок 3.1

Сравним площадь квадрата и треугольника на этом рисунке. На глаз видно, что треугольник занимает меньше места, чем квадрат. Сравнение «на глаз» – это один из способов сравнения площадей. А теперь сравним площадь квадрата и круга на этом же рисунке. Видно ли «на глаз» какая фигура занимает больше места? Другой способ сравнения фигур – совмещением. Давайте вырежем круг из бумаги и наложим его на квадрат. При этом мы видим, что круг составляет часть квадрата, поэтому площадь этого квадрата больше, чем площадь этого круга (Рис. 3.2).

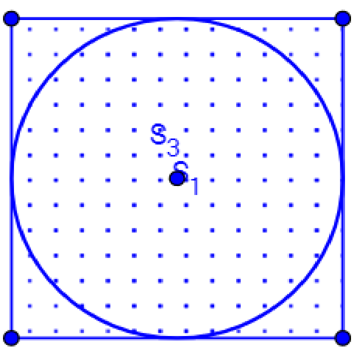


Рисунок 3.2

Совмещением можно сравнить площади прямоугольников, показанных на рисунке 3.3. Если при совмещении фигуры совпадают, то их площади равны. В этом случае фигуры называются равными (конгруэнтными).

Рисунок 3.3

Мы рассмотрели два способа сравнения площадей – на глаз и совмещением. Давайте сравним площади прямоугольников на рисунке 3.4. Какой способ можно использовать для сравнения в этом случае?

Рисунок 3.4

Возникла проблема: как сравнить площади фигур, если совмещение одной фигуры с другой не помогает? Эта ситуация приводит к необходимости научиться измерять площадь. Что значит измерить площадь фигуры? При любом измерении надо сначала выбрать эталон –

единицу измерения. В начальной школе единицу измерения иногда называют меркой. Процесс измерения площади связан со сравнением эталона – фигуры, выбранной в качестве единицы измерения, – с измеряемой фигурой. Чаще всего в качестве эталона выбирается квадрат, со стороной, равной единице измерения длины (см. рис. 3.5). Примем площадь этого квадрата за единицу измерения площади *e* и назовем **квадратной единицей** (сокращенно пишут: кв.ед. или ед.кв.).

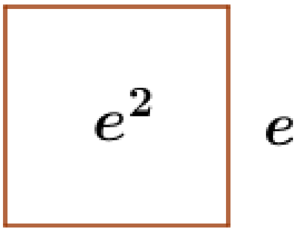


Рисунок 3.5

Разобьём прямоугольники на рисунке 3.4 на квадраты и сосчитаем количество квадратов в каждой фигуре. Так как это число одно и то же, то площади этих прямоугольников равны (рис. 3.6). Фигуры с равными площадями называются равновеликими.

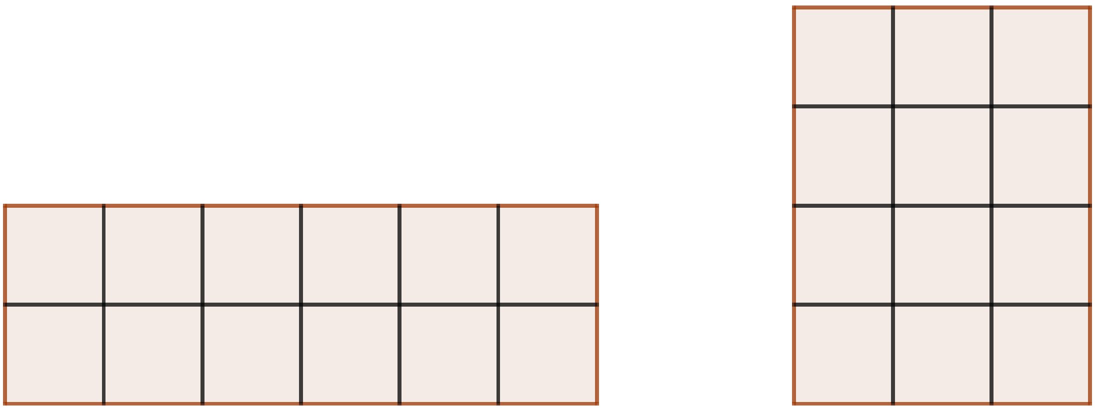


Рисунок 3.6

Таким образом мы нашли еще один способ, которым можно сравнивать площади фигур – путем разбиения фигур на одинаковые единичные квадраты. Площадь фигуры вычисляется в результате подсчета числа единичных квадратов, которыми можно заполнить данную фигуру, не выходя за ее пределы.

Площадь прямоугольника в квадратных единицах можно вычислить и чисто алгебраическим способом. Заметим, что количество квадратов, заполняющих прямоугольник можно найти умножением основания и высоты, измеренных в одной и той же единице длины. Для нахождения площади квадрата достаточно измерить одну его сторону.

Необходимо подчеркнуть важность выбора одной и той же единицы измерения для сравнения площадей разных фигур. Рассмотрим ситуацию, изображенную на рисунке 3.7.

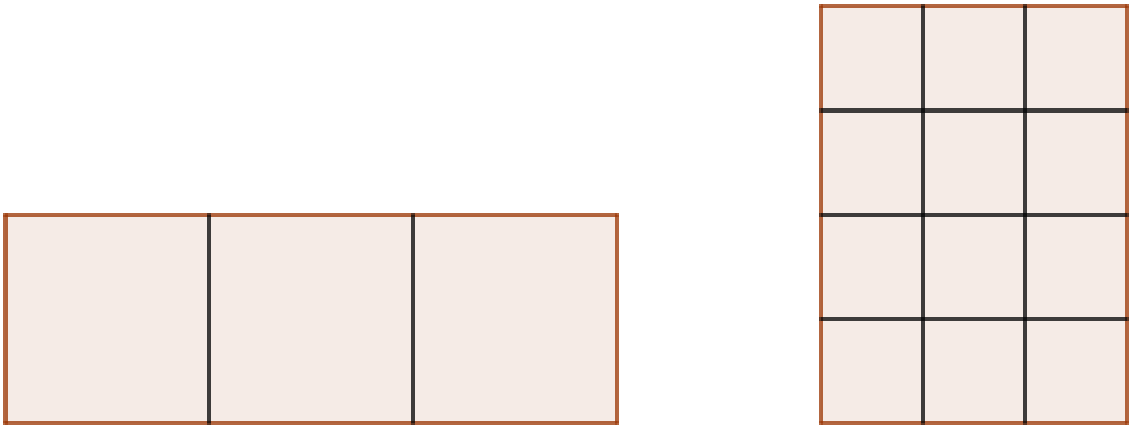


Рисунок 3.7

Площадь левого прямоугольника равна 3 квадратным единицам. Площадь правого прямоугольника равна 12 квадратным единицам. Если не указана единица измерения, то по результатам измерений учащиеся могут сделать вывод, что правый прямоугольник по площади больше левого. Чтобы таких ситуаций не случалось, вводятся стандартные единицы измерения: например, *квадратный сантиметр, квадратный метр, квадратный дюйм, квадратный фут.*

В начальной школе детей также знакомят и с равносоставленными фигурами. Геометрические фигуры, сложенные из одинакового числа соответственно равных частей (или, наоборот, разрезанные на одинаковое число соответственно равных частей), называют **равносоставленными**. Например, на рисунке 3.8а фигуры равносоставлены из четырех одинаковых квадратов. Части фигур не обязаны быть квадратами и одинаковыми. На рисунке 3.8б равносоставленный фигуры сложены из разных прямоугольников. Равносоставленные фигуры имеют одинаковые площади.

а) б)

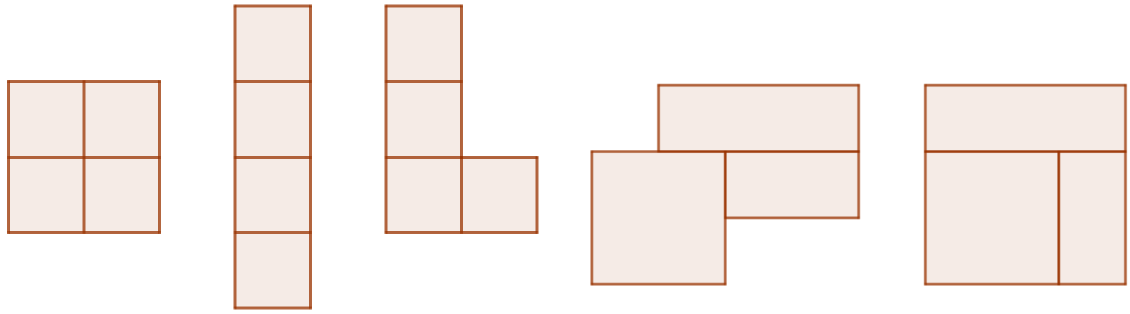


Рисунок 3.8

О размере плоской фигуры также можно судить по тому, какова длина ее границы. Эта величина имеет свое собственное название, **периметр**, и измеряется в единицах длины. Вычисление периметра имеет существенное практическое значение. Сколько метров забора нужно купить для того, чтобы оградить огород? Сколько метров плинтуса понадобится для кухни? Какой длины нужна тесьма, чтобы обшить скатерть? Какое расстояние пробегает спортсмен по беговой дорожке легкоатлетического стадиона? Какова длина границы государства?

Периметр многоугольника – это сумма длин всех его сторон. Определение периметра произвольной фигуры дано выше: периметром является длина границы фигуры. Периметр многоугольника можно найти двумя способами:

1. Измерить длину каждой стороны. Найти сумму полученных длин.
2. Начертить луч и от его начала последовательно отложить отрезки, равные сторонам многоугольника, один за другим в одну сторону. Измерить длину полученного отрезка.

Таким способом найдем, например, периметр треугольника *ABC* (см. рис. 3.9).

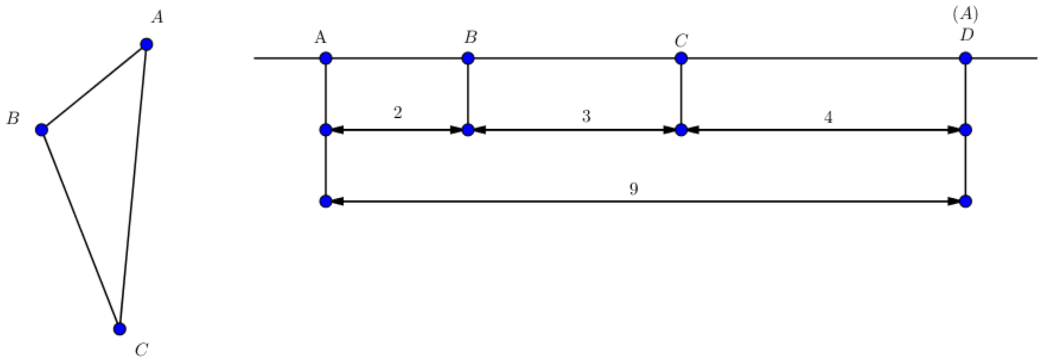


Рисунок 3.9

Исследования показывают, что многие учащиеся считают, что фигуры с равным периметром должны иметь равные площади и наоборот [5, с. 470]. Некоторые учащиеся не могут представить, что можно построить прямоугольники с равными площадями, (равновеликие), но разными периметрами. И наоборот, если периметры прямоугольников равны, то их площади не обязательно являются равными. В качестве примера на рис. 3.10 построены фигуры одинакового периметра, но разной площади. На рис. 3.11 построены фигуры с равной площадью, но с разным периметром. Такие примеры помогут учащимся преодолеть эти сложности.

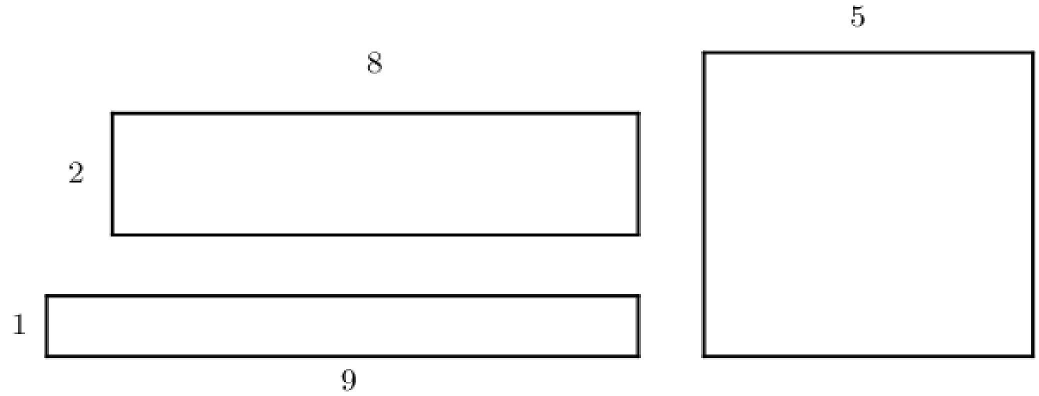


Рисунок 3.10

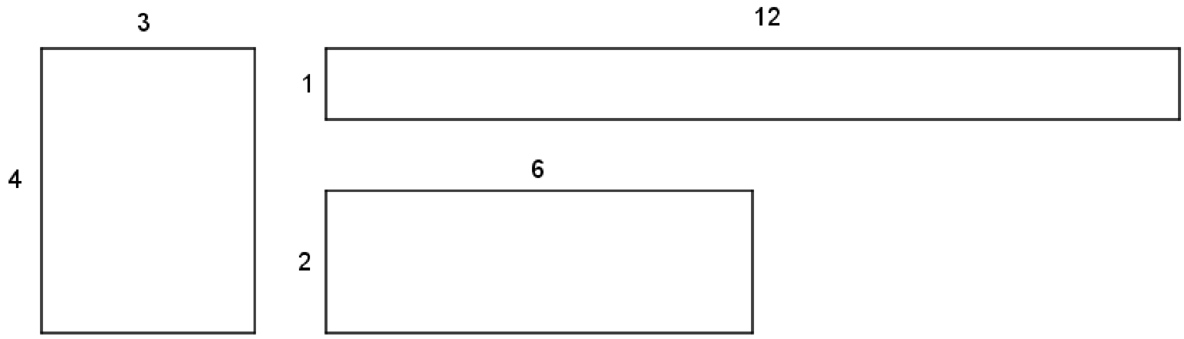


Рисунок 3.11

3.2. Уроки GeoGebra

3.2.1. Единичный квадрат и площадь

Файл GeoGebra: 3_2_1_единичный_квадрат_площадь.ggb

Введение и основные понятия

Какого размера фигура? Какая фигура самая большая? Как ответить на вопросы подобные этим?

Один из способов – выяснить, сколько *единичных квадратов* понадобится, чтобы полностью покрыть фигуру. Единичный квадрат – это квадрат, стороны которого имеют длину равную 1 единице длины.

Число единичных квадратов, необходимое для того, чтобы полностью покрыть фигуру без зазоров и перекрытий, не выходя за ее пределы, называется *площадью* данной фигуры.

В реальных задачах единичный квадрат может иметь длину стороны равную одному сантиметру, одному дециметру, одному метру или даже одному километру – это зависит от того, что вы измеряете.

Задача

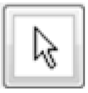
Нам требуется узнать, какая из фигур самая большая, занимает больше всего места.

Оценка площади

Оцени количество единичных квадратов, которое по твоему мнению понадобится, чтобы покрыть каждую из фигур, не выходя за её пределы. Введи эти оценочные значения в столбец ОЦЕНКА В ЕДИНИЧНЫХ КВАДРАТАХ в таблице.

Таблица данных		
Фигура	*Оценка в единичных квадратах*	*Площадь в единичных квадратах*
Фигура *A*		
Фигура *B*		
Фигура *C*		
Фигура *D*		
Фигура *E*		

Определение площади



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) перетащи единичные квадраты на фигуры. Посмотри, сколько их понадобится для закрывания каждой фигуры и запиши эти числа в столбец ПЛОЩАДЬ В ЕДИНИЧНЫХ КВАДРАТАХ в таблице.

Вывод

Какая из фигур имеет наибольшую площадь?

3.2.2. Площадь прямоугольника

Файл GeoGebra: 3_2_2_площадь_прямоугольника.ggb

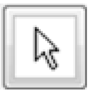
Введение и основные понятия

Площадь прямоугольника можно определить, выяснив, сколько единичных квадратов понадобится, чтобы покрыть ими этот прямоугольник без зазоров и перекрытий, не выходя за ее пределы.

Но что, если мы не хотим считать клеточки или двигать единичные квадраты по прямоугольнику? Существует ли другой способ?

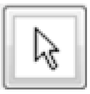
Решая эту задачу, мы будем использовать единичный квадрат для измерения и площади, и длины, зная что длина любой стороны квадрата равна 1 единице.

Построение различных прямоугольников



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) потяни за стороны каждого квадрата, превратив их в шесть прямоугольников с *разными* основаниями и высотами.

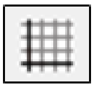
Определение площади с помощью единичного квадрата



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) перетащи Единичный квадрат на каждый из твоих прямоугольников и с его помощью определи основание, высоту и площадь каждого прямоугольника. Запиши полученные данные в таблицу.

Таблица данных				
Фигура	*Основание в единицах длины*	*Высота в единицах длины*	*Площадь в единичных квадратах*	*Проверка*
Прямоугольник *a*				
Прямоугольник *b*				
Прямоугольник *c*				
Прямоугольник *d*				
Прямоугольник *e*				
Прямоугольник *f*				

Проверка проделанной работы



Включи сетку и с помощью нее проверь свои результаты. Если площадь была посчитана верно, поставь “+” в столбце ПРОВЕРКА в таблице. Если ты ошибся, напиши правильное значение площади в столбце ПРОВЕРКА.

Поиск закономерности

Посмотри, не заметишь ли ты какой-то закономерности в этих значениях в таблице. Может, ты увидишь способ вычисления площади прямоугольника без передвигания единичного квадрата и без подсчета клеточек на сетке? Опиши свой метод определения площади этих прямоугольников.

3.2.3. Площадь фигур, составленных из прямоугольников

Файл GeoGebra: 3_2_3_площадь_составленных_фигур.ggb

Введение и основные понятия

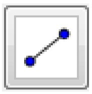
Как ты уже знаешь, площадь прямоугольника определяется числом единичных квадратов, покрывающих прямоугольник без зазоров и перекрытий, не выходя за его пределы.

Кроме того, ты узнал, что площадь прямоугольника можно вычислить с помощью длин двух соседних сторон. Применим это знание к решению следующей задачи.

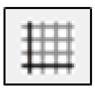
Задача
Необходимо вычислить площадь в единичных квадратах фигуры, показанной на странице *GeoGebra*. Перетаскивание единичного квадрата на эту фигуру для измерения ее площади – скучная, монотонная работа. Это большая, сложная фигура, и поэтому будет легко сделать ошибку.

Оценка площади
Не используя единичный квадрат оцени площадь большой фигуры, которая находится на странице GeoGebra. Запиши свое значение: _________________ единичных квадратов.

Определение площади
Можешь ты придумать способ найти правильное значение площади этой большой сложной фигуры, который упростит выполнение этой задачи и уменьшит возможность сделать ошибку? Используй свои знания о площади прямоугольника.



С помощью инструмента ОТРЕЗОК добавь к заданной фигуре отрезки, которые смогут разделить эту фигуру на меньшие, более простые для работы фигуры. *Подсказка*: представь себе, что эта фигура составлена из соединенных между собой прямоугольников.



С помощью единичного квадрата, или СЕТКИ, или умножения найди и запиши площади всех прямоугольников, на которые ты разбил фигуру. Затем сложи эти значения; это и будет площадь изначальной сложной фигуры.

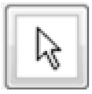
3.2.4. Площадь и периметр прямоугольника

Файл GeoGebra: 3_2_4_площадь_периметр_прямоугольника.ggb

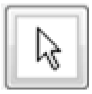
Введение и основные понятия
Если дан набор различных прямоугольников, есть два способа определить, какой из прямоугольников "самый большой" или "самый маленький".

- Один способ – измерить их площади и сравнить.
- А другой способ – измерить их периметры и выбирать на основе этих значений.

Сбор данных и проведение наблюдений



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) потяни зеленую сторону прямоугольника вверх и вниз, чтобы изменить его высоту.



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) потяни красную сторону прямоугольника вправо и влево, чтобы изменить длину его основания.

Понаблюдай, как меняются при этом значения площади и периметра. Поэкспериментируй на разных прямоугольниках.

Задачи

Можешь ты построить два прямоугольника, площади которых равны, а периметры различны? Запиши для них значения высоты и основания:

Площадь левого прямоугольника =	Площадь правого прямоугольника =
Высота левого прямоугольника =	Высота правого прямоугольника =
Основание левого прямоугольника =	Основание правого прямоугольника =

Можешь ты построить два прямоугольника, периметры которых равны, а площади отличаются? Запиши для них значения высоты и основания:

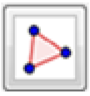
Площадь левого прямоугольника =	Площадь правого прямоугольника =
Высота левого прямоугольника =	Высота правого прямоугольника =
Основание левого прямоугольника =	Основание правого прямоугольника =

3.2.5. Периметр: головоломки

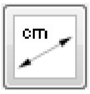
Файл GeoGebra: 3_2_5_периметр_головоломки.ggb

Введение и основные понятия

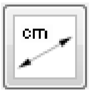
Прочитай условия для каждого из прямоугольников, а затем построй по этим условиям прямоугольник.



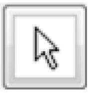
Для построения прямоугольников используй инструмент МНОГОУГОЛЬНИК.



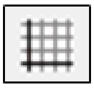
Выбери инструмент РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА и щелкни где-нибудь внутри прямоугольника, чтобы получить значение его периметра.



Выбери инструмент РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА и щелкни на стороне прямоугольника, чтобы получить значение ее длины.



Выбери инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) и потяни за какую-либо вершину многоугольника, чтобы изменить его размеры и форму. Таким образом, ты можешь постараться получить прямоугольник, который соответствует описанию.



С помощью инструмента СЕТКА ты можешь измерить и сравнить площади и размеры сторон

Построение в поле A

Условие 1: периметр равен 20 единицам

Условие 2: основание в четыре раза больше высоты

Построение в поле B

Условие 1: периметр равен 26 единицам

Условие 2: основание равно 10 единицам

Построение в поле C

Условие 2: периметр равен 20 единицам

Условие 3: три стороны имеют равные длины

Построение в поле D

Условие 1: периметр равен 22 единицам

Условие 2: высота больше основания на 3 единицы

3.3. Методические рекомендации для учителя

Единичный квадрат и площадь (урок 3.2.1)

Учебные задачи:

- Ученики должны понимать, что площадь является одной из характеристик плоских фигур.
- Ученики должны уметь измерять площади плоских фигур подсчетом единичных квадратов.

Материалы: Файл GeoGebra 3_2_1_единичный_квадрат_площадь.ggb

В этом файле изображены пять фигур, отмеченных буквами *A* – *E*. Эти фигуры составлены из прямоугольников. Для измерения площадей предлагаются цветные единичные квадраты (Рис. 3.12).

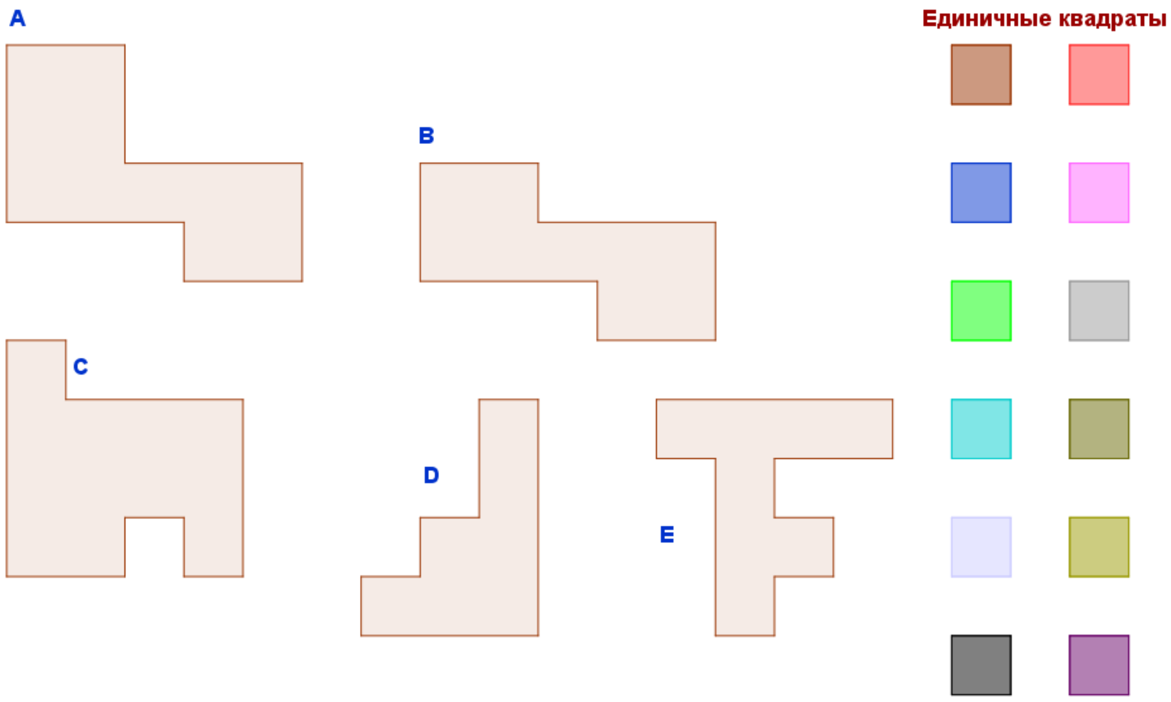


Рисунок 3.12

Страница настроена так, что квадраты имеют привязку к сетке, что обеспечивает точное размещение единичных квадратов. Ученикам доступен инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ, которым они могут передвигать единичные квадраты для определения площади каждой из фигур.

Цели задания

Цель данного задания – представить ученикам понятие площади. Единичный квадрат определяется как квадрат, сторона которого имеет длину, равную 1 (единице). Площадь определяется как число единичных квадратов, которое требуется, чтобы полностью покрыть ими фигуру без зазоров и перекрытий, не выходя за пределы фигуры.

Сначала ученики оценивают площадь каждой фигуры. Затем им предлагается покрыть каждую из фигур единичными квадратами для вычисления площади (см. Рис. 3.13).

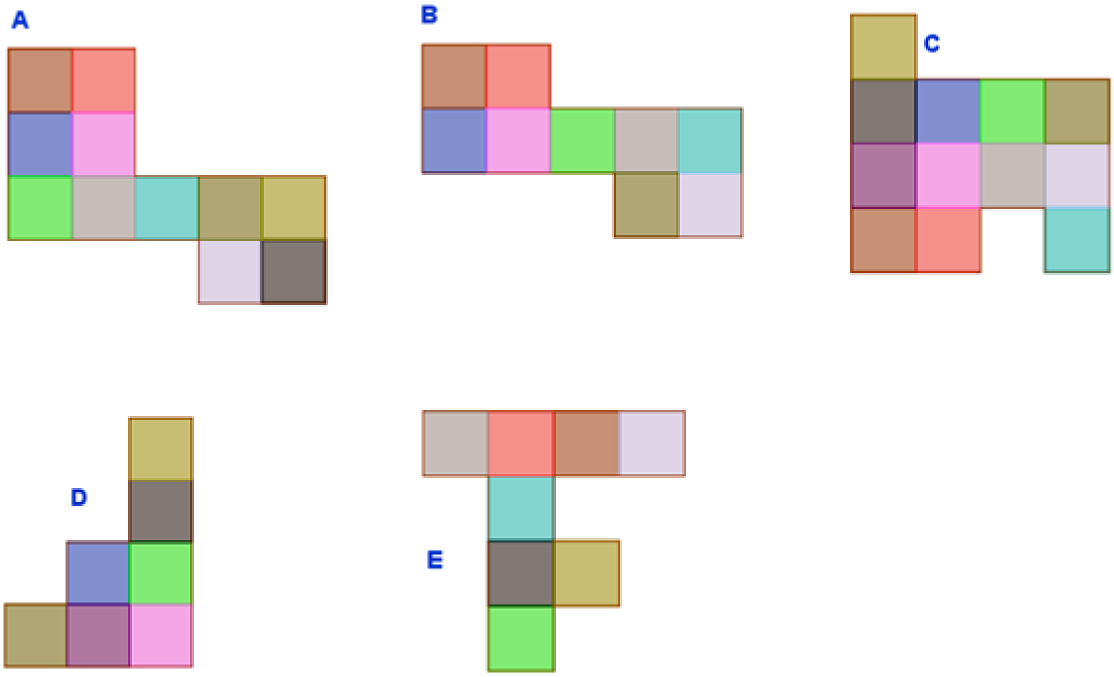


Рисунок 3.13

Примеры результатов приведены в следующей таблице.

Таблица данных		
Фигура	*Оценка в единичных квадратах*	*Площадь в единичных квадратах*
Фигура *A*	10	11
Фигура *B*	9	9
Фигура *C*	11	12
Фигура *D*	7	7
Фигура *E*	8	8

На основе измерений они определяют, какая из фигур имеет наибольшую площадь.

Площадь прямоугольника (урок 3.2.2)

Учебные задачи:

- Ученики должны связать вычисление площади с операцией умножения.
- Ученики должны вывести формулу площади прямоугольника.

Материалы: Файл GeoGebra 3_2_2_площадь_прямоугольника.ggb

На странице GeoGebra ученикам представлены 6 квадратов, которыми они могут манипулировать, подцепляя и перемещая их стороны. Если потянуть за правую сторону (красный отрезок) вправо, увеличится основание соответствующей фигуры. Если потянуть за нижнюю сторону (зеленый отрезок) вниз, увеличится высота соответствующей фигуры. Также имеется единичный квадрат, для измерения площади каждой фигуры (Рис. 3.14).

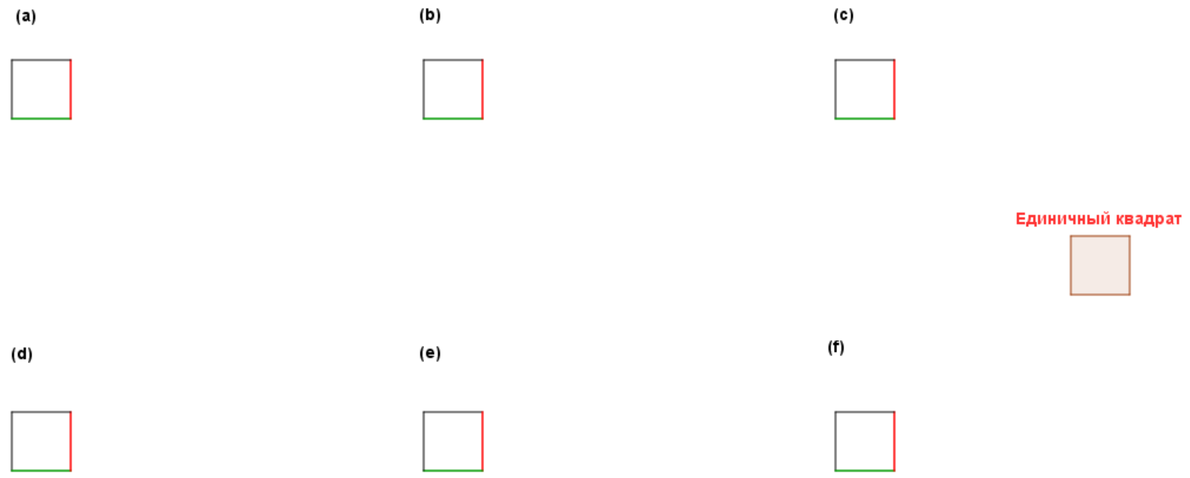


Рисунок 3.14

Ученики имеют доступ только к инструменту ПЕРЕМЕЩАТЬ.

Цели задания

Это задание на исследование. С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ ученики вытягивают стороны каждого квадрата, превращая их в шесть прямоугольников с *различными* высотами и основаниями. См. возможный вариант на Рис. 3.15.

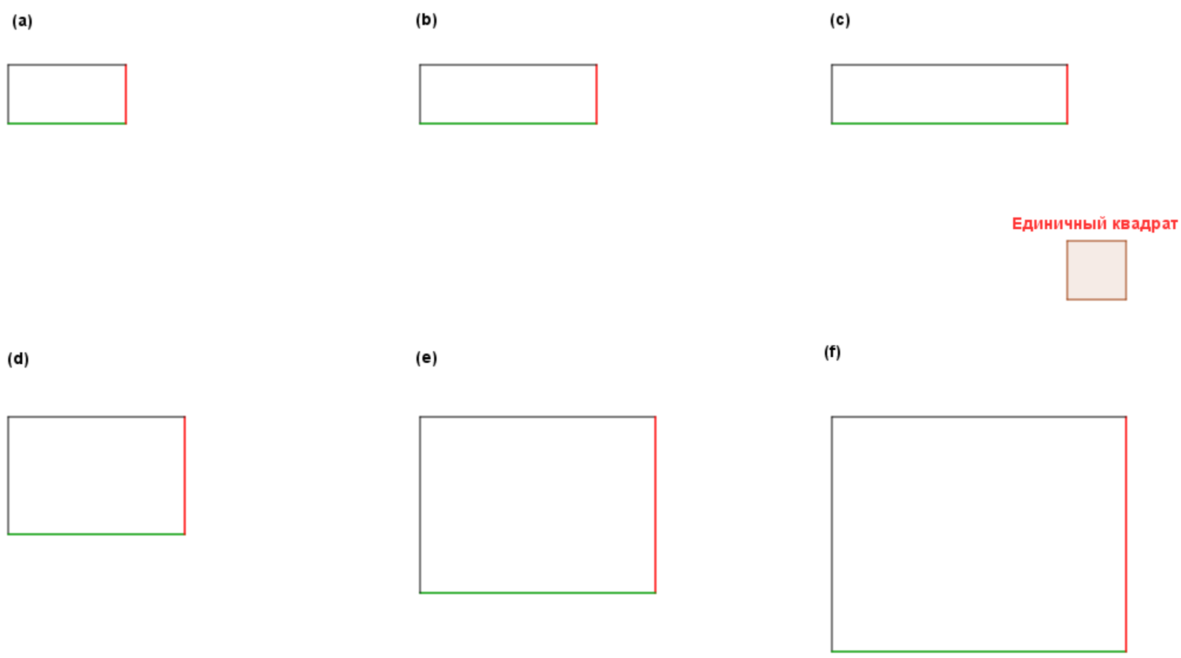


Рисунок 3.15

Затем ученики с помощью единичного квадрата измеряют площадь и длины сторон каждого прямоугольника. Возможные результаты для набора прямоугольников с Рис. 3.15 представлены в таблице данных.

Таблица данных				
Фигура	*Основание в единицах длины*	*Высота в единицах длины*	*Площадь в единичных квадратах*	*Проверка*
Прямоугольник *a*	2	1	2	
Прямоугольник *b*	3	1	3	
Прямоугольник *c*	4	1	4	
Прямоугольник *d*	3	2	6	
Прямоугольник *e*	4	3	12	
Прямоугольник *f*	6	4	24	

Чтобы проверить свои результаты, ученики могут включить инструмент СЕТКА и подсчитать единичные квадраты по сетке (Рис. 3.16).

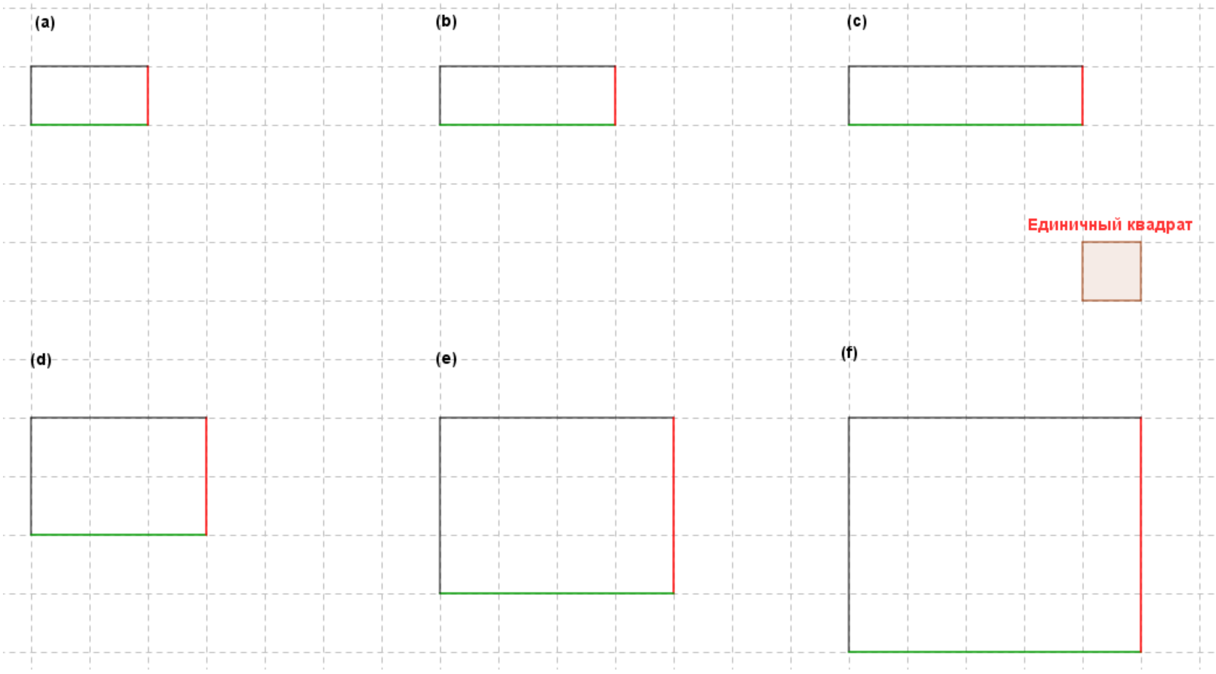


Рисунок 3.16

Ученики должны внимательно рассмотреть данные в таблице и прийти к выводу, что такая площадь может быть найдена умножением длин двух соседних сторон. На основании этого ученики должны сделать вывод, что площадь прямоугольника вычисляется по следующей формуле:

площадь = основание × высота.

Площадь фигур, составленных из прямоугольников (урок 3.2.3)

Учебные задачи:

- Ученики получают представление о площади как аддитивной величине.
- Ученики находят площадь многоугольника, с попарно-перпендикулярными[2] сторонами, разбивая его на неперекрывающиеся прямоугольники и складывая площади этих неперекрывающихся частей.

[2] Попарно-перпендикулярно означает, что стороны многоугольника можно разбить на пары сторон и в каждой паре стороны перпендикулярны.

Материалы: Файл GeoGebra 3_2_3_площадь_составленных фигур.ggb

В этом файле ученикам предлагается многоугольник, с попарно-перпендикулярными сторонами и единичный квадрат для сравнения (Рис. 3.17).

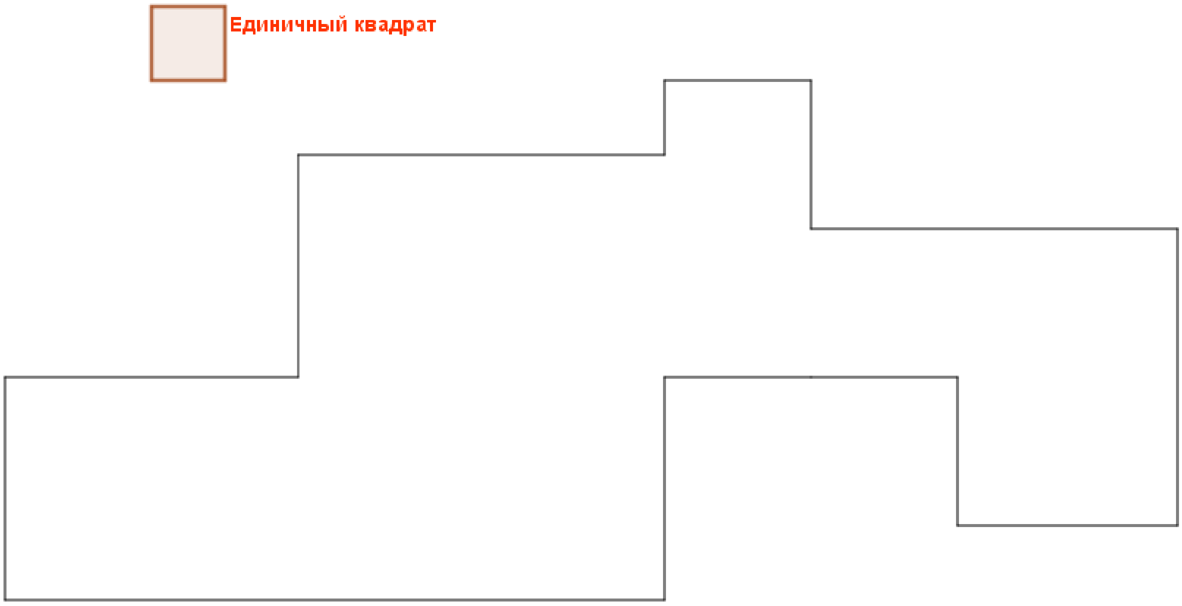


Рисунок 3.17

В этом задании ученики имеют доступ к инструментам ПЕРЕМЕЩАТЬ и ОТРЕЗОК.

Цели задания

Это задание разработано, чтобы познакомить учеников с площадью как с аддитивной величиной и использовать формулу площади прямоугольника при вычислении площади других фигур.

В начале задания ученикам ставится задача найти площадь данной фигуры без подсчета единичных квадратов. Ученики оценивают площадь фигуры без использования единичных квадратов.

Затем им предлагается с помощью инструмента ОТРЕЗОК разбить фигуру на меньшие части, прямоугольной формы. Возможное решение представлено на Рис. 3.18.

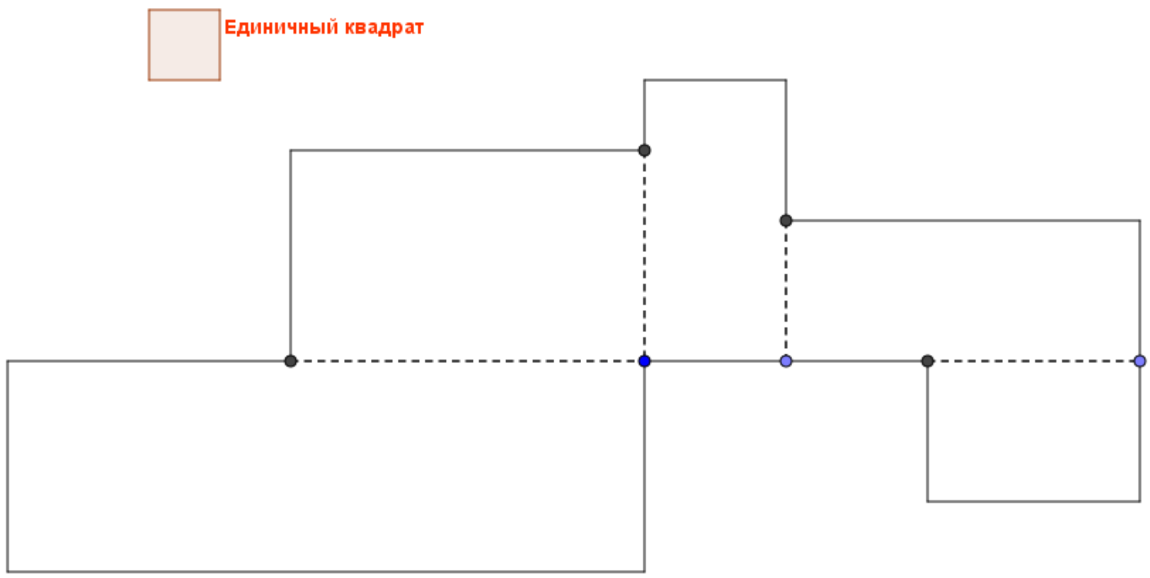


Рисунок 3.18

Ученики могут разными способами найти площадь каждого прямоугольника. Они могут включить СЕТКУ и подсчитать число единичных квадратов. Могу использовать СЕТКУ, чтобы найти длины сторон каждого прямоугольника и найти его площадь с помощью умножения (Рис. 3.19).

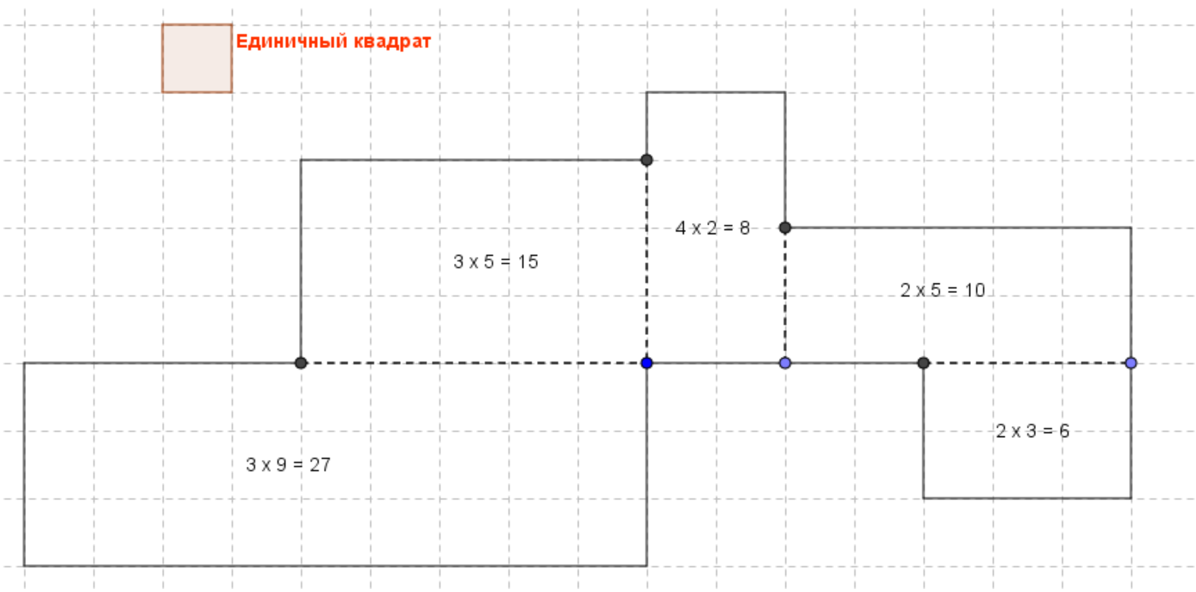


Рисунок 3.19

Затем ученики складывают полученные площади, чтобы найти площадь фигуры, составленной из этих прямоугольников: 27 + 15 + 8 + + 10 + 6 = 66 квадратных единиц.

Пусть ученики поменяются своими решениями и убедятся, что разные решения привели к одному и тому же результату.

Площадь и периметр прямоугольников (урок 2.2.4)

Учебные задачи:

- При решении задач ученики применяют формулы площади и периметра прямоугольника.
- Ученики должны найти прямоугольники с одинаковыми периметрами и разными площадями или с одинаковыми площадями и разными периметрами.

Материалы: Файл GeoGebra 3_2_4_площадь_периметр_прямоугольника.ggb

Файл создан для проведения учениками исследований и открытия новых знаний. Имеется два прямоугольника, которыми ученики могут манипулировать, изменяя основание или высоту. Чтобы изменить высоту, ученики должны потянуть верхнюю (зеленую) сторону прямоугольника. Чтобы изменить основание, ученики должны потянуть правую (красную) сторону. Площадь и периметр каждого прямоугольника показывается динамически при изменении размеров фигур (Рис. 3.20).

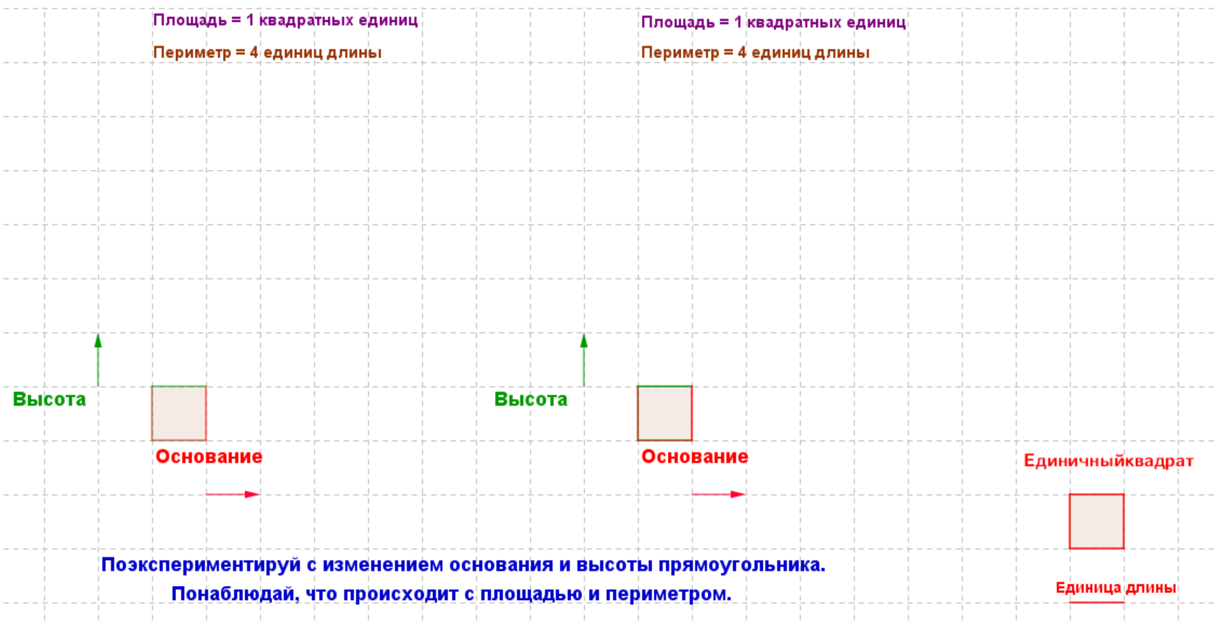


Рисунок 3.20

В этом задании ученики имеют доступ только к инструменту ПЕРЕМЕЩАТЬ.

Цели задания

Сначала ученики наблюдают за значениями площади и периметра по мере изменения основания и высоты прямоугольника. Затем они экспериментируют с фигурами, чтобы выполнить следующие задания:

1) Добейся, чтобы два прямоугольника имели одинаковые площади и разные периметры. Вот возможное решение (Рис. 3.21):

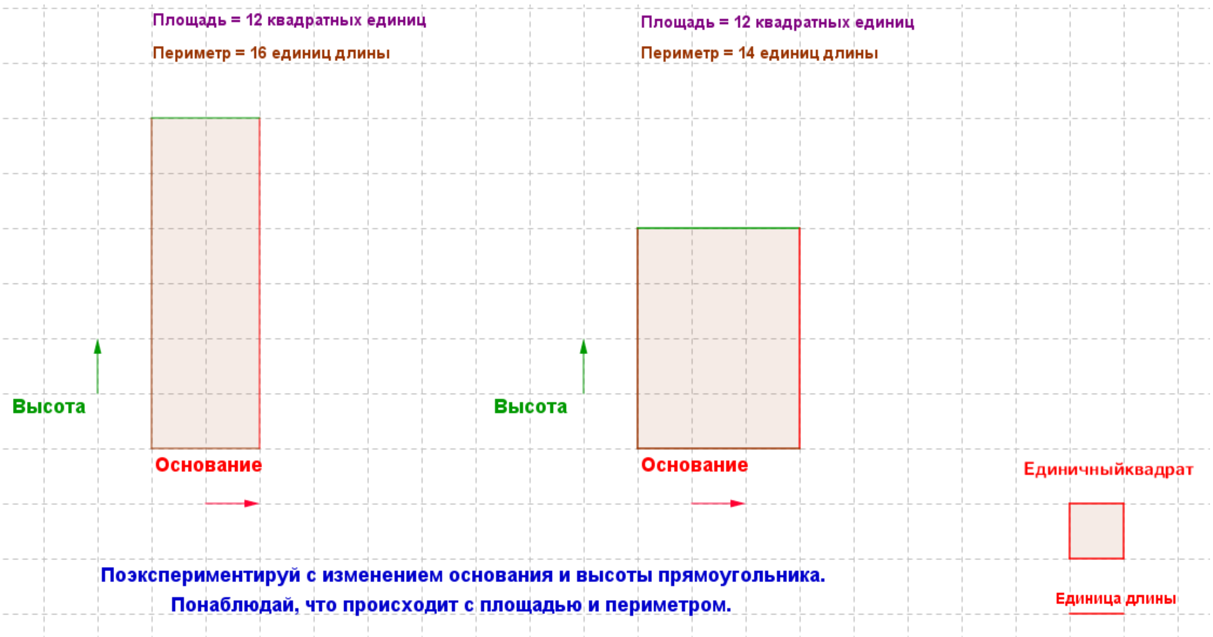


Рисунок 3.21

Площадь левого прямоугольника = 12 кв.ед.	Площадь правого прямоугольника = 12 кв.ед.
Высота левого прямоугольника = 6 ед.	Высота правого прямоугольника = 4 ед.
Основание левого прямоугольника = 2 ед.	Основание правого прямоугольника = 3 ед.

2) Добейся, чтобы два прямоугольника имели одинаковые периметры и разные площади. Вот возможное решени (Рис. 3.22):

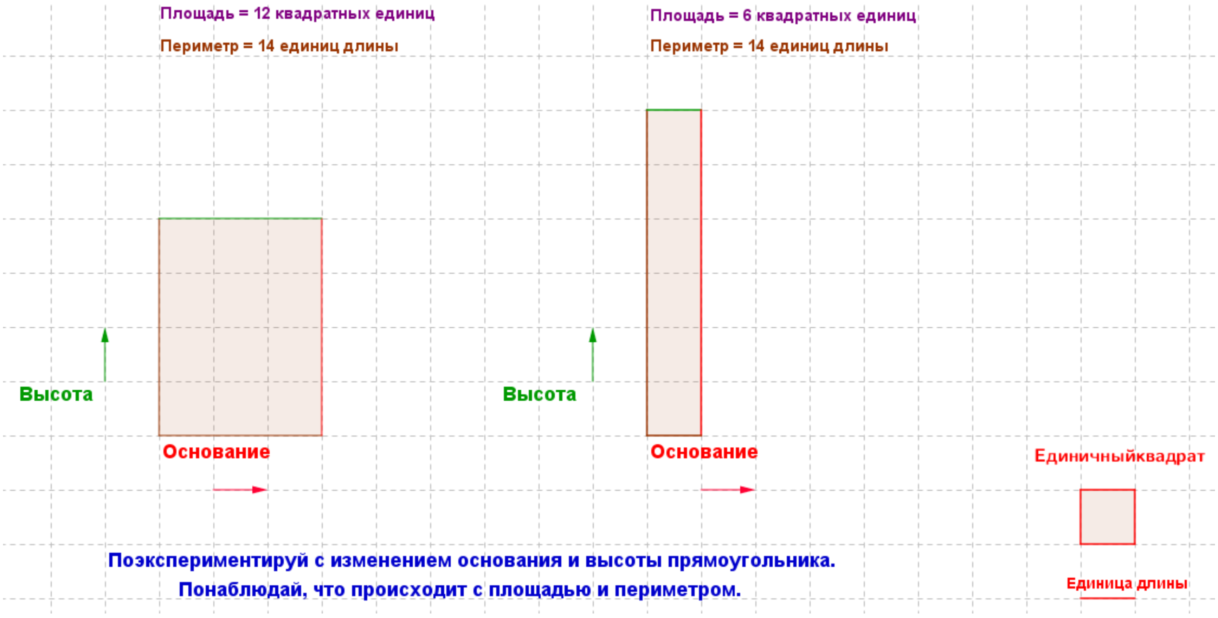


Рисунок 3.22

Площадь левого прямоугольника = 12 кв.ед.	Площадь правого прямоугольника = 6 кв.ед.
Высота левого прямоугольника = 4 ед.	Высота правого прямоугольника = 6 ед.
Основание левого прямоугольника = 3 ед.	Основание правого прямоугольника = 1 ед.

Периметр: головоломки (урок 2.2.5)

Учебная задача:

- Ученики решают задачи на нахождение периметра прямоугольников

Материалы: Файл GeoGebra 3_2_5_периметр_головоломки.ggb

Файл предоставляет ученикам поля для построения прямоугольников. Они имеют доступ к инструментам ПЕРЕМЕЩАТЬ, МНОГОУГОЛЬНИК, РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА и УДАЛИТЬ (Рис. 3.23).

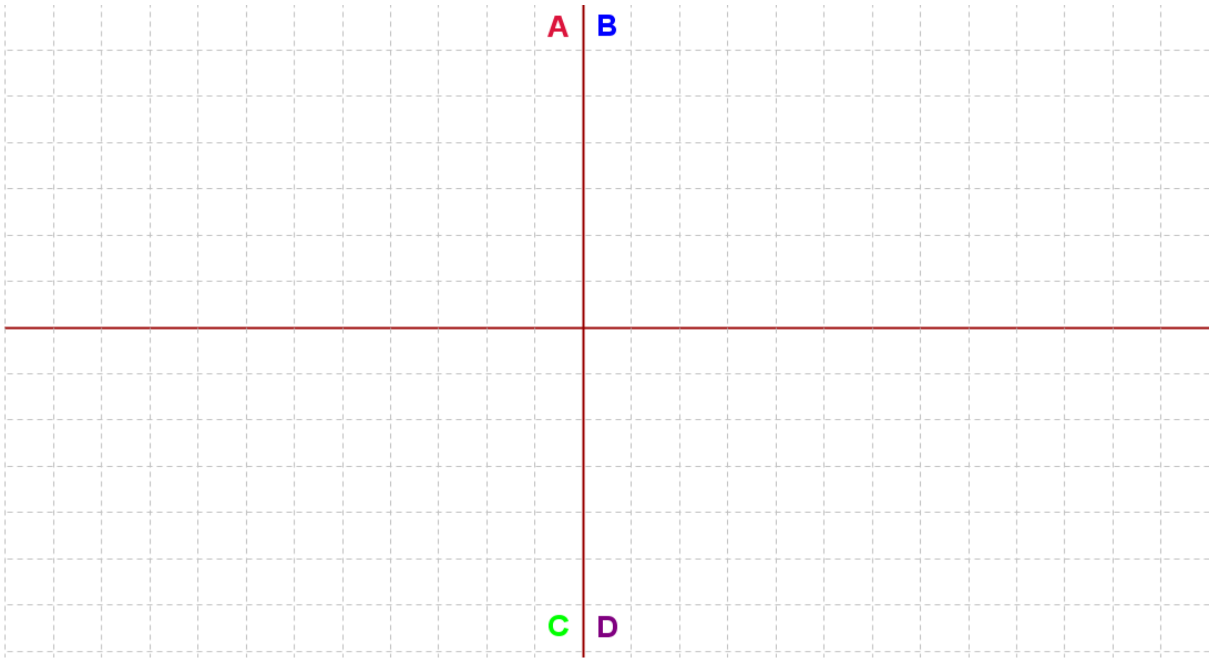


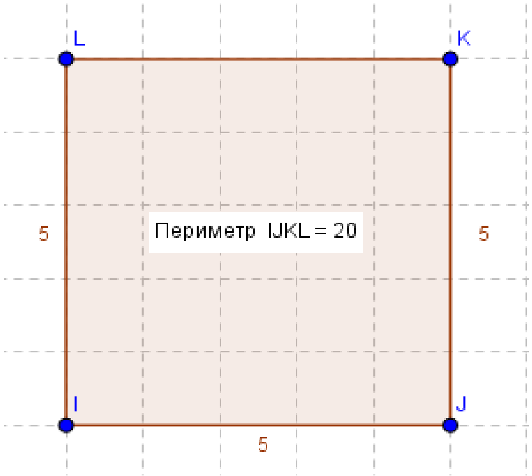
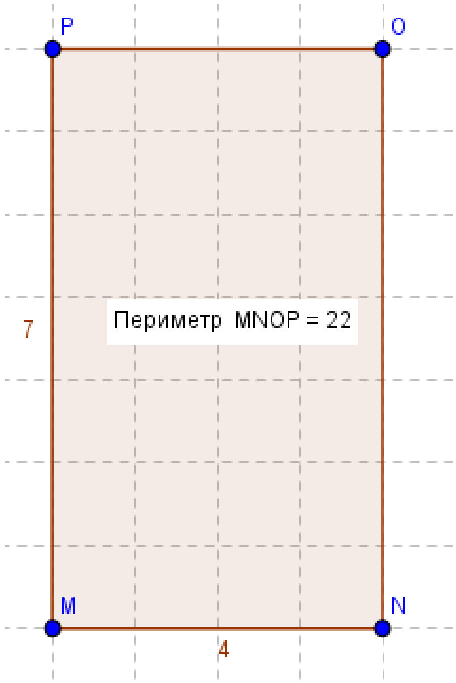
Рисунок 3.23

Цели задания

В этом задании ученикам дан набор условий, касающихся периметров прямоугольников. Им требуется на основе этих условий построить прямоугольник в отведенном поле. Это задание может использоваться как оценочное в завершении изучения темы «Периметр».

С помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК ученики строят фигуры. Затем с помощью инструмента РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА вычисляют периметр и длины сторон каждой фигуры. С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ они могут тянуть за вершины прямоугольника, изменяя его размеры и форму, чтобы привести его к фигуре, соответствующей заданным условиям. Ученики могут использовать инструмент СЕТКА, чтобы измерять и сравнивать площадь и периметр.

Вот пример решений для каждого случая:

Головоломка	*Решение*
Построение в поле A Условие 1: периметр равен 20 единицам Условие 2: основание в четыре раза больше высоты	
Построение в поле B Условие 1: периметр равен 26 единицам Условие 2: основание равно 10 единицам	
Построение в поле C Условие 2: периметр равен 20 единицам Условие 3: три стороны имеют равные длины	
Построение в поле D Условие 1: периметр равен 22 единицам Условие 2: высота больше основания на 3 единицы	

4. Угол и мера угла

4.1. Ключевые идеи и основные понятия

Если на плоскости из некоторой точки провести два луча, то они разбивают плоскость на две части – два угла. **Угол** – это часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом. [3, с. 53]. Эти лучи называются *сторонами угла*, а их общее начало – *вершиной угла* (см. Рис. 4.1).

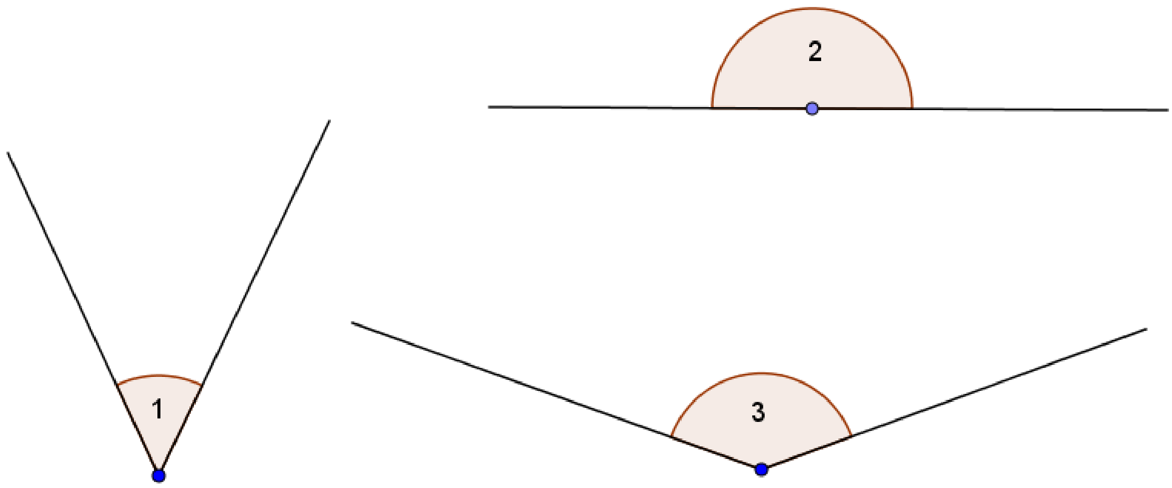


Рисунок 4.1

В соответствии с определением, угол – неограниченная часть плоскости. Поэтому мы не можем нарисовать угол целиком. При изображении угла мы рисуем только части сторон угла, как показано на Рис. 4.1.

Посмотрите внимательно на угол 2 на Рис. 4.1. Стороны этого угла образуют прямую, а угол – это полуплоскость, ограниченная этой прямой с выделенной на прямой точкой. Эта точка определяет вершину угла. Такой угол называют развернутым. Когда угол не является развернутым, то возможны две ситуации. Угол может быть меньше развернутого угла (см. углы 1 и 3 на Рис. 4.1) или больше развернутого (см. углы 4 и 5 на Рис. 4.2)

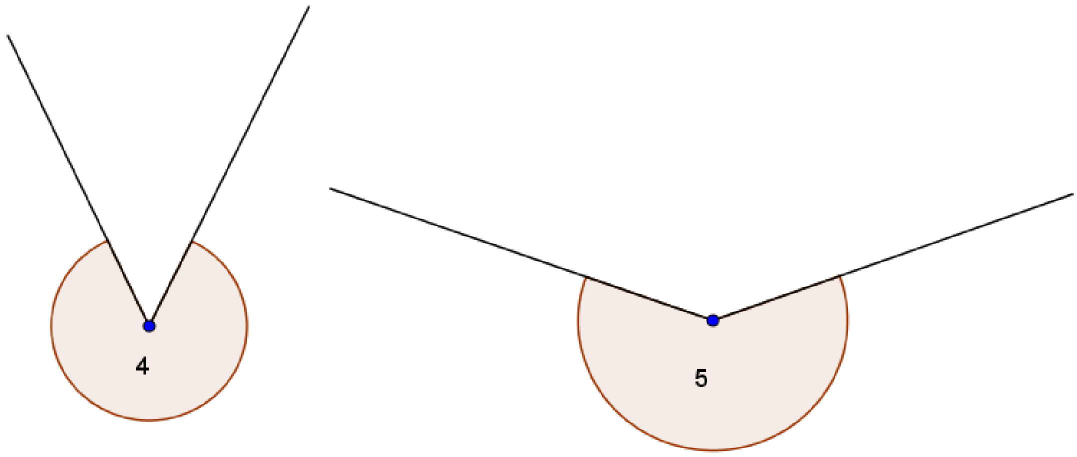


Рисунок 4.2

Два луча с общим началом, не лежащих на одной прямой, разбивают плоскость на два угла – один больше развернутого, и один меньше развернутого. В начальной школе мы не рассматриваем углы больше развернутого. С этого момента, говоря слово *угол,* мы будем подразумевать угол, который меньше развернутого или равен ему.

На листе бумаги нарисуйте угол. На Рисунке 4.3 внешняя область угла закрыта вертикальной штриховкой, внутренняя – горизонтальной.

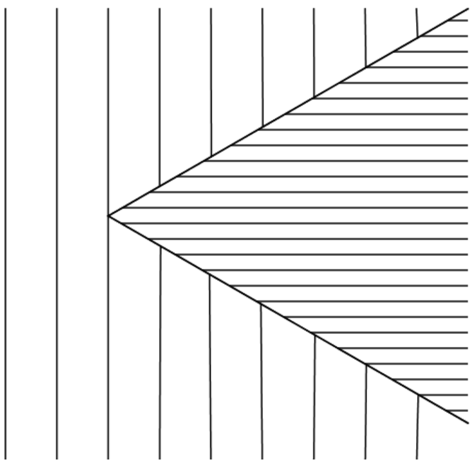


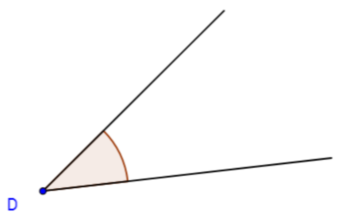
Рисунок 4.3

Понятно, что положение всех точек плоскости относительно угла однозначно определено – они либо внутри угла, либо вне угла, либо на сторонах угла. Точки угла, не лежащие на его сторонах, называются *внутренними*.

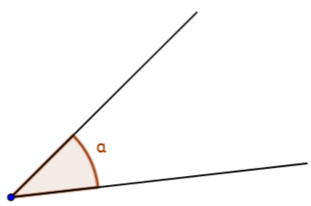
Чтобы составить модель угла, достаточно взять две тонкие палочки (каждая длиной с ладонь, на одном из концов просверлена дырочка), скрепить их болтиком. Раздвигая и сдвигая палочки, будем получать углы разной величины. Палочки (стороны угла) раздвигаем – угол увеличивается, постепенно сдвигаем палочки – угол при этом уменьшается. С помощью такой модели можно сравнивать углы. Приложим модель к углу 1 на Рис. 4.1. Не меняя положения палочек, приложим модель к углу 3, совмещая вершину и одну палочку со стороной угла (правую – с правой). Левая палочка оказалась внутри угла 3, поэтому угол 1 меньше угла 3.

Углы можно обозначать и называть по-разному. Например, можно использовать большие латинские буквы около вершины, маленькие греческие буквы или цифры внутри угла, названия сторон, и т.п. При этом слово *угол* можно заменить символом $\angle$, за исключением случаев, когда угол обозначается греческими буквами. (см. Рис. 4.4)

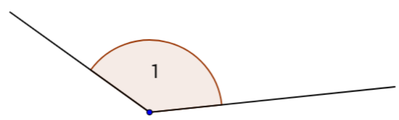
Угол D или $\angle D$



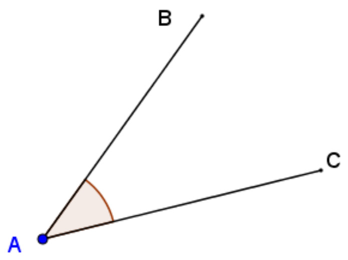
Угол α или $\angle\alpha$



Угол 1 или $\angle 1$



Угол BAC или $\angle BAC$



Угол hb или $\angle hb$

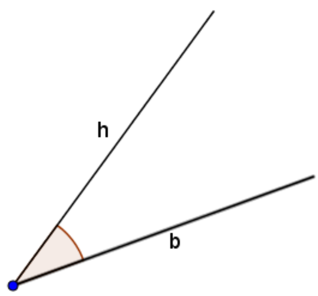


Рисунок 4.4

Сравнивать два любых угла можно с помощью откладывания угла, аналогично тому, как сравнивать два отрезка мы могли благодаря откладыванию отрезка.

Сравним углы $\angle BAC$ и $\angle DEF$, изображенные на Рисунке 4.5.

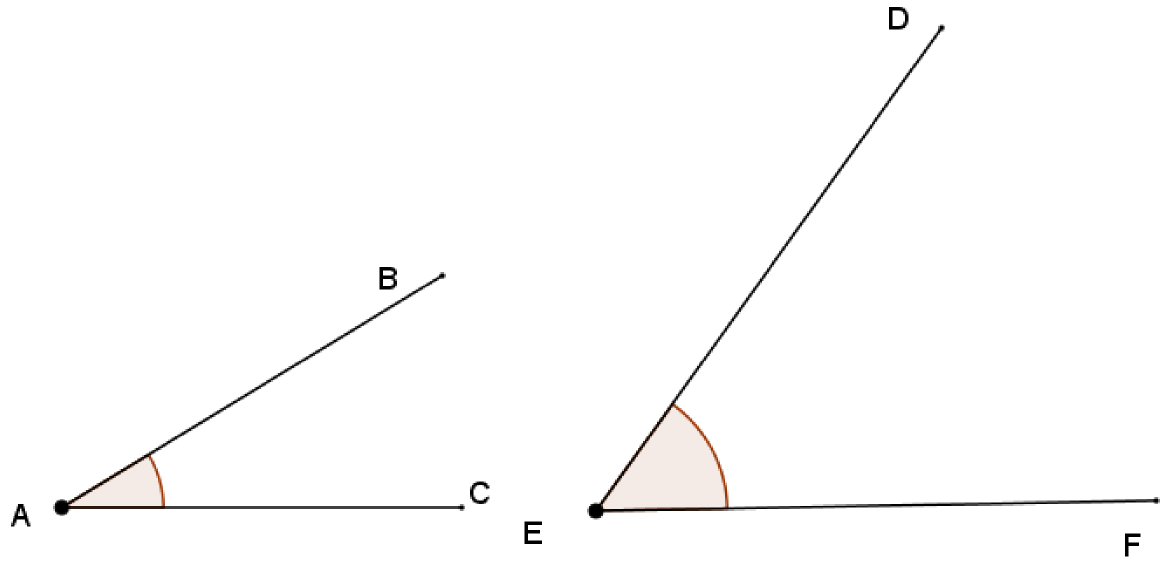


Рисунок 4.5

Отложим угол, равный $\angle BAC$ от луча EF в направлении против часовой стрелки. Если луч EB' лежит внутри угла DEF, то $\angle BAC$ меньше $\angle DEF$ (Рис. 4.6а). Если луч EB лежит вне угла DEF, то $\angle BAC$ больше $\angle DEF$ (Рис. 4.6б). Если луч EB' лежит на луче угла ED, то $\angle BAC$ равен $\angle DEF$ (Рис. 4.5в).

а) $\angle BAC < \angle DEF$

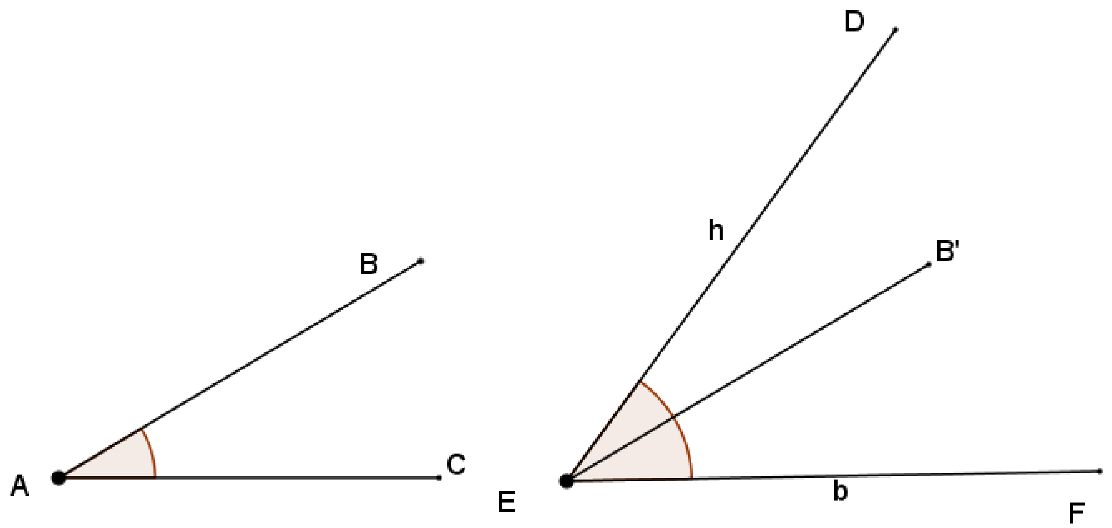
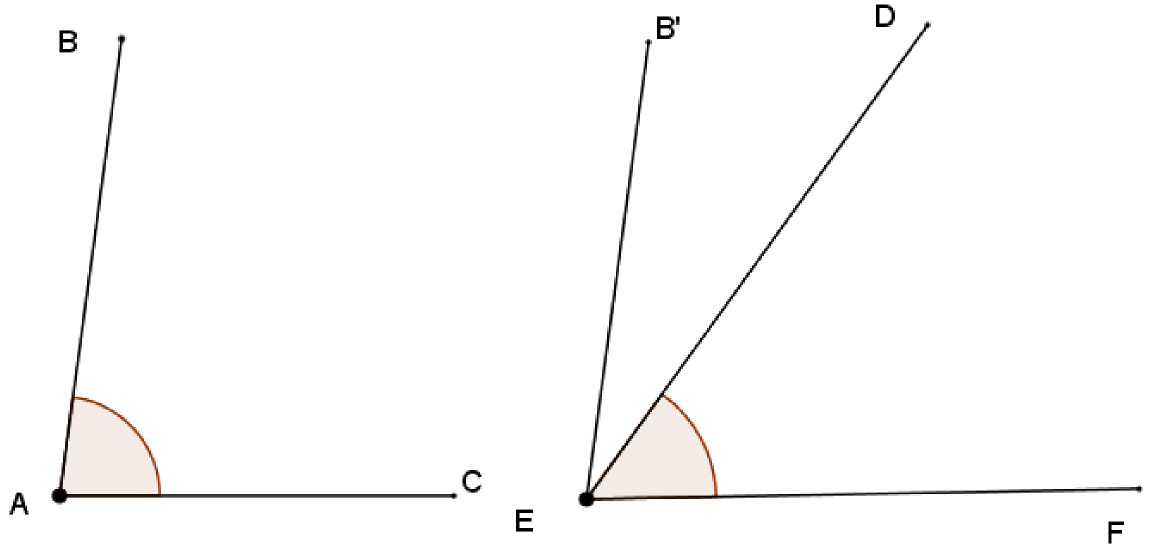


Рисунок 4.6

б) $\angle BAC > \angle DEF$



в) $\angle BAC = \angle DEF$

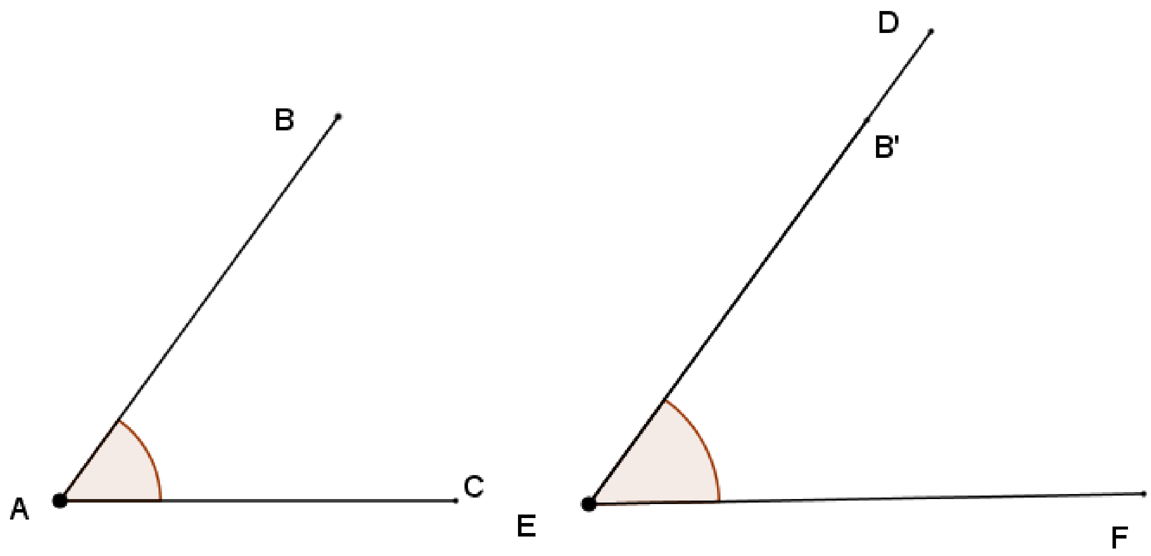


Рисунок 4.6 (Окончание)

Зная, как сравнивать углы, мы можем ввести прямой, острый и тупой углы. *Прямой угол* равен половине развернутого, поэтому все прямые углы равны друг другу. Модель прямого угла дети получают, выполняя практическую работу [6]. Каждому из них выдаются листы бумаги разных размеров с неровными краями. Внутри листа ставится точка, которая задает вершину угла. Дети должны сложить лист так, чтобы линия сгиба прошла через эту точку. При этом линия сгиба определяет стороны развернутого угла. Затем они еще раз складывают полученный лист так, чтобы части линии сгиба первого листа совместились. Тем самым развернутый угол делится пополам и линии сгиба формируют четыре прямых угла с общей вершиной. В дважды сложенном виде лист бумаги является физической моделью прямого угла. Все модели, изготовленные учащимися, накладываются друг на друга и делается вывод, что все прямые углы равны между собой.

С моделью прямого угла школьники выполняют различные упражнения: накладывают эту модель на соответствующие углы, тетради, книги и убеждаются, что эти углы прямые; строят прямые углы на клетчатой и нелинованной бумаге. Ученики находят прямые углы на различных предметах. Необходимо строить прямые углы в различном положении на плоскости. Для этого раздаются листочки с начерченными на них лучами и предлагается провести ровно лучи так, чтобы образовались прямые углы. Учащиеся строят их при помощи модели прямого угла и при помощи *чертежного треугольника*.

Учащиеся также могут использовать программу GeoGebra для построения прямых углов. Они могут убедиться в равенстве прямых углов между собой путем перемещения фигур и команды УГОЛ.

Угол меньше прямого называется *острым* углом. Угол больше прямого, но меньше развернутого, называется *тупым* углом. Например, ранее на рисунке 4.1 угол 1 – острый, а угол 3 - тупой.

Мера угла характеризует величину отклонения одного луча от другого и обладает следующими свойствами:

1. Меры равных углов равны;
2. При сложении углов их меры складываются.

Для измерения углов поступают так. Делят прямой угол на 90 равных углов. Один из таких углов принимают за единицу измерения. Эту единицу измерения углов называют *градусом* и обозначают значком °. Тогда прямой угол содержит 90°, а развернутый угол - 180°. Острый угол имеет градусную меру, которая меньше 90°, а тупой – больше 90°, но меньше 180°.

Самый простой прибор для измерения углов (в градусах) – *транспортир* (см. Рис. 4.7). Транспортир состоит из полукруга (угломерной шкалы), разделенного на градусы от 0 до 180°.

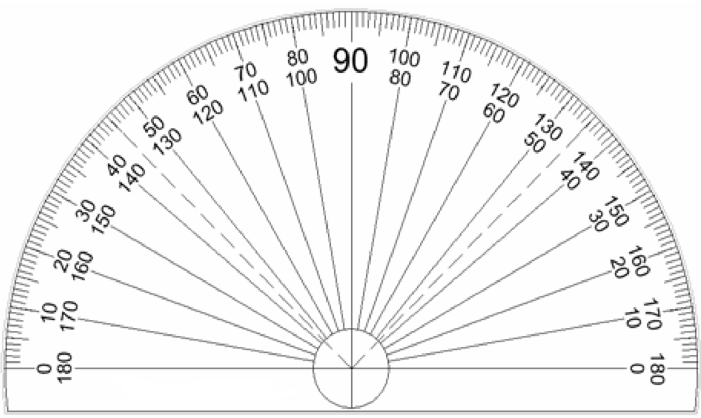


Рисунок 4.7

Как измерить угол с помощью транспортира? Совместите центр транспортира с вершиной угла. Поверните транспортир так, чтобы одна из сторон угла совпала с линией, с которой будет осуществляться начало отсчета. Проследите за второй стороной угла, которая пересекает дугу транспортира. Если вторая сторона не доходит до дуги инструмента, продлите ее.

Как построить угол с помощью транспортира? Проведите прямую линию. Это будет опорная линия, которая послужит одной из двух сторон будущего угла. С ее помощью вы определите направление, в котором следует провести вторую сторону угла. Расположите центр транспортира на проведенной прямой и выровняйте его так, чтобы прямая совпала с линией, с которой будет осуществляться начало отсчета. Это будет вершина будущего угла. Отыщите на соответствующей шкале транспортира необходимый вам угол и поставьте в этом месте точку. Соедините вершину со сделанной ранее меткой. В результате у вас получится заданный угол.

4.2. Уроки GeoGebra

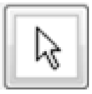
4.2.1. Определение угла

Файл GeoGebra: 4_2_1_определение_угла.ggb

Основные понятия

Что такое “угол”? В математике используется очень точное определение угла. Данное упражнение в среде *GeoGebra* поможет понять это определение угла.

Построение угла

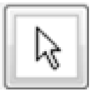


Выбери инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ и выбери по порядку все этапы построения.

Точка A называется *вершиной* угла. Лучи AB и AC называются *сторонами* угла. Пространство, ограниченное двумя лучами, называется *внутренней областью* угла.

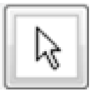
Два луча с общей вершиной делят плоскость на два угла!

Эксперименты с углом

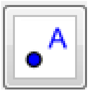


С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ потяни за точки A, B и C и посмотри, что получится.

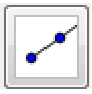
Построй угол самостоятельно



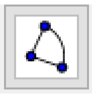
С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ сбрось все галочки, отмечавшие этапы построения, и очисти рабочее пространство.



С помощью инструмента ТОЧКА нанеси на плоскость три точки.



С помощью инструмента ЛУЧ построй два луча с общей вершиной.



С помощью инструмента СЕКТОР ПО ЦЕНТРУ И ДВУМ ТОЧКАМ выбери область между лучами, чтобы задать угол: сначала щелкни на вершине, а затем на каждом из лучей в направлении против часовой стрелки.

4.2.2. Виды углов

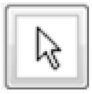
Файл GeoGebra: 4_2_2_виды_углов.ggb

Основные понятия

Углы получают названия в соответствии со своей величиной. Углы могут быть *тупые, острые, прямые* и *развернутые*.

Данное упражнение *GeoGebra* поможет тебе определить эти различные виды углов.

Эксперимент



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ передвигай ползунок. Это будет менять размер угла *ABC*.

По мере перемещения ползунка ты будешь видеть тип угла, который получился. Поэкспериментируй с разными размерами угла. Понаблюдай, какие названия получают углы.

Определения видов углов

Опираясь на то, что ты узнал из эксперимента, напиши определение каждого из видов углов:

Острый угол – это ...

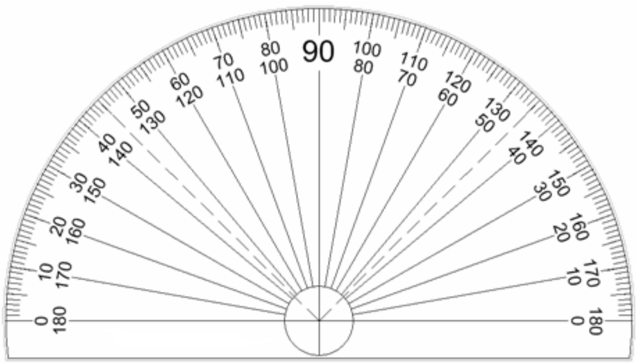
Прямой угол – это…

Тупой угол – это…

Развернутый угол – это…

4.2.3. Знакомство с транспортиром

Файл GeoGebra: 4_2_3_транспортир_введение.ggb



Основные понятия

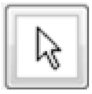
Инструмент для измерения углов, изображенных на бумаге, называется *транспортиром*.

Размер углов измеряется и записывается в градусах.

Транспортир позволяет измерять угол слева направо и справа налево.

Проведение наблюдений

Обрати внимание, что на странице *GeoGebra* изображены два угла: угол *BCA* (красный) и угол *BCD* (зеленый).



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) ты можешь перемещать точку *B*, изменяя размеры двух углов.

Эксперимент с транспортиром

1. Установи флажок в первом контрольном окошке, чтобы появился транспортир. 

2. Наружная шкала градусов на транспортире идет слева направо. В нашем примере слева находится зеленый угол.
   - Установи флажок в контрольном окошке, чтобы увидеть размер зеленого угла в градусах.
   - 

   - Теперь ты видишь измерение зеленого угла в градусах на транспортире и в строке зеленого цвета под транспортиром.
   - Поэкспериментируй, двигая точку *B*, и сравни значения.
3. Внутренняя шкала градусов на транспортире идет справа налево. В нашем примере справа находится красный угол.
   - Установи флажок в контрольном окошке, чтобы увидеть размер красного угла в градусах.

   - Теперь ты видишь измерение красного угла в градусах на транспортире и в строке красного цвета под транспортиром.
   - Поэкспериментируй, двигая точку *B*, и сравни значения.

4.3. Методические рекомендации для учителя

Определение угла (урок 4.2.1)

Учебные задачи:

- Ученики должны определять угол как часть плоскости, ограниченную двумя лучами, имеющими общую начальную точку.

- Ученики должны построить угол, построив два луча, выходящих из одной точки и отметив одну из двух образовавшихся областей на плоскости как внутреннюю область угла.

Материалы: Файл GeoGebra 4_2_1_определение_угла.ggb

Файл содержит четыре контрольных окошка, которые соответствуют этапам построения угла (Рис. 4.8).

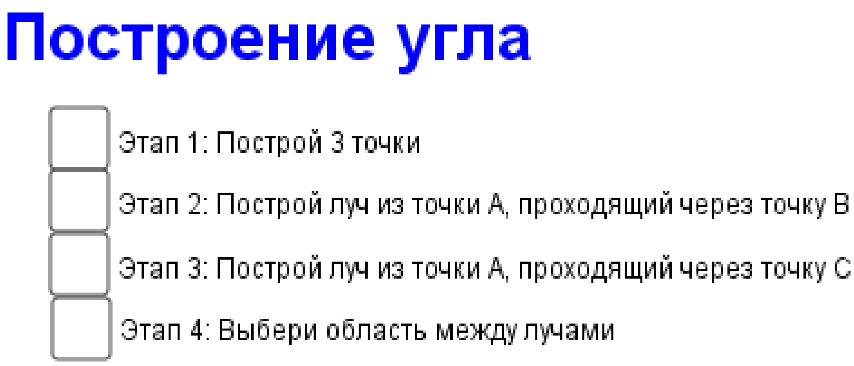


Рисунок 4.8

Ученики имеют доступ к инструменту ПЕРЕМЕЩАТЬ, чтобы устанавливать флажки в окошках, и к инструментам ТОЧКА, ЛУЧ и СЕКТОР ПО ЦЕНТРУ И ДВУМ ТОЧКАМ. Кроме того, доступен инструмент УДАЛИТЬ.

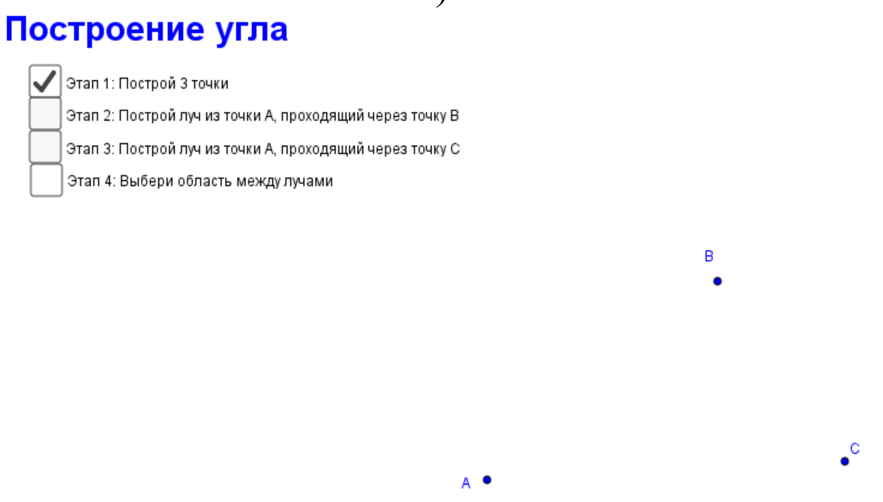
Цели задания

Наиболее часто в представлении учащихся угол – это два луча с общей вершиной. Они упускают, что угол – это геометрическая фигура на плоскости, которая определяет часть плоскости, ограниченную этими лучами. Данное задание *GeoGebra* помогает ученикам до конца понять это определение угла.

В первой части задания ученики с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ устанавливают флажки в порядке этапов построения (Рис. 4.9). По мере отображения каждого этапа вы можете предложить ученикам записать эти этапы в свои тетради.

Этап 1. Построение точек *A*, *B* и *C* (Рис. 4.9а).

а)



Этап 2. Построение луча *AB* (Рис. 4.9б).

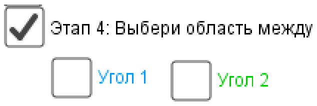
б)

Этап 3. Построение луча AC (Рис. 4.9в).

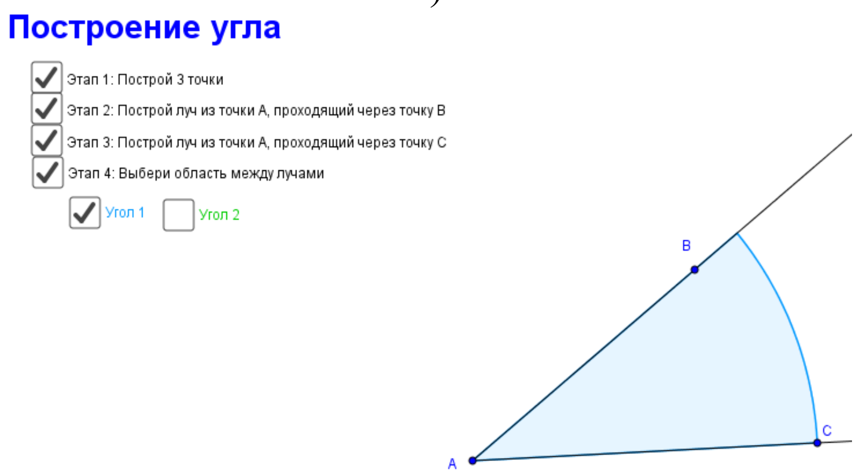
в)

Рисунок 4.9

Этап 4. Ученики могут выбрать, какую из областей, ограниченных лучами, выбрать для данного угла.



г)



Они могут выбрать Угол 1, чтобы отобразился меньший, внутренний, угол (Рис. 4.9г), или Угол 2, чтобы отобразился больший, наружный, угол (Рис. 4.9д).

д)

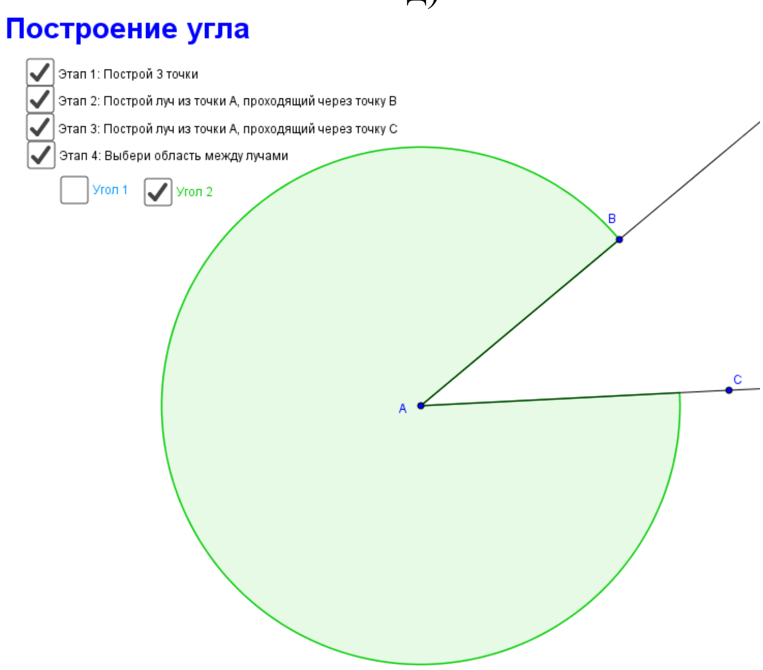


Рисунок 4.9 (Окончание)

Ученики могут поэкспериментировать с построенным углом и понаблюдать, что будет меняться, когда они двигают точки *A*, *B* и *C*.

После того как ученики освоят этапы построения и поэкспериментируют с углом, очень важно организовать обсуждение всем классом определения угла и специально сделать акцент на том, что два луча с общей вершиной разбивают плоскость на два угла! Это также момент, когда учитель должен закрепить словесное определение терминов: точка A называется *вершиной* угла; лучи AB и AC называются *сторонами* угла; область, ограниченная двумя лучами, называется *внутренней областью* угла.

Вторая часть этого задания – отдельное задание, в котором ученики строят углы самостоятельно. Ученикам уже должны быть знакомы все инструменты, кроме инструмента СЕКТОР ПО ЦЕНТРУ И ДВУМ ТОЧКАМ. Необходимо вместе с ними просмотреть, как пользоваться этим инструментом, прежде чем они начнут самостоятельные построения. Указания по использованию этого инструмента содержатся в раздаточных материалах и состоят в следующем: сначала щелкните вершину, а затем каждый из лучей, выбрав их в направлении против часовой стрелки.

Когда ученики закончат выполнение работы, предложите им поменяться своими результатами с товарищем или в небольшой группе, чтобы сравнить получившиеся углы. Предложите ученикам описать свои углы, используя правильную математическую терминологию.

Виды углов (урок 4.2.2)

Учебная задача:

- Ученики должны уметь определять различные виды углов: острый, прямой, тупой и развернутый.

Материалы: Файл GeoGebra 4_2_2_ виды_углов.ggb

Этот файл предлагает ученикам окружность с центром в точке *B*, два отрезка, *AB* и *BC*, и ползунок, который позволяет изменять размер угла от 0° до 180° (Рис. 4.10).

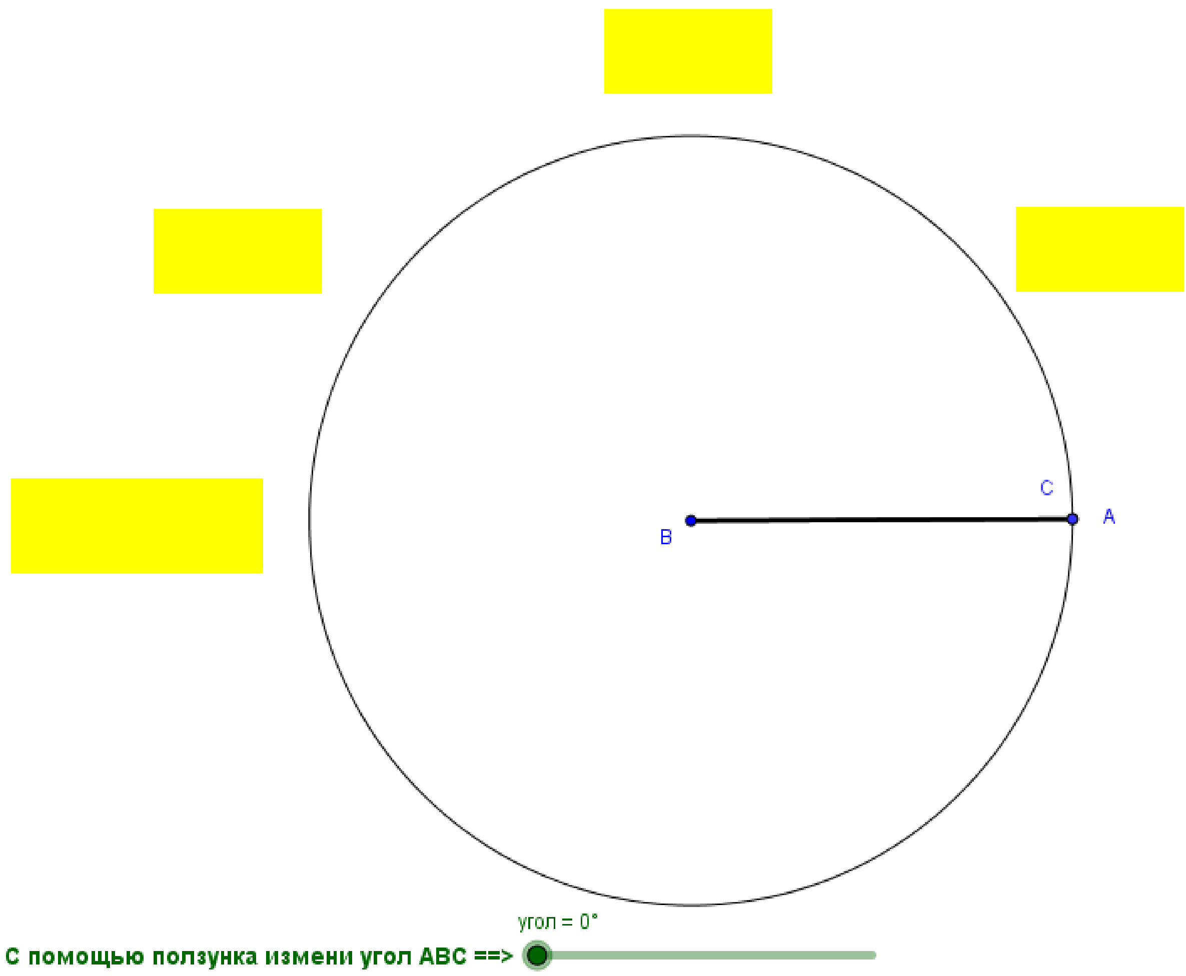


Рисунок 4.10

При изменении значения на ползунке отрезок *BC* поворачивается относительно точки *B*, образуя угол *ABC* величиной, соответствующей значению на ползунке. В желтых прямоугольниках показывается название вида угла в соответствии с его величиной (Рис. 4.11).

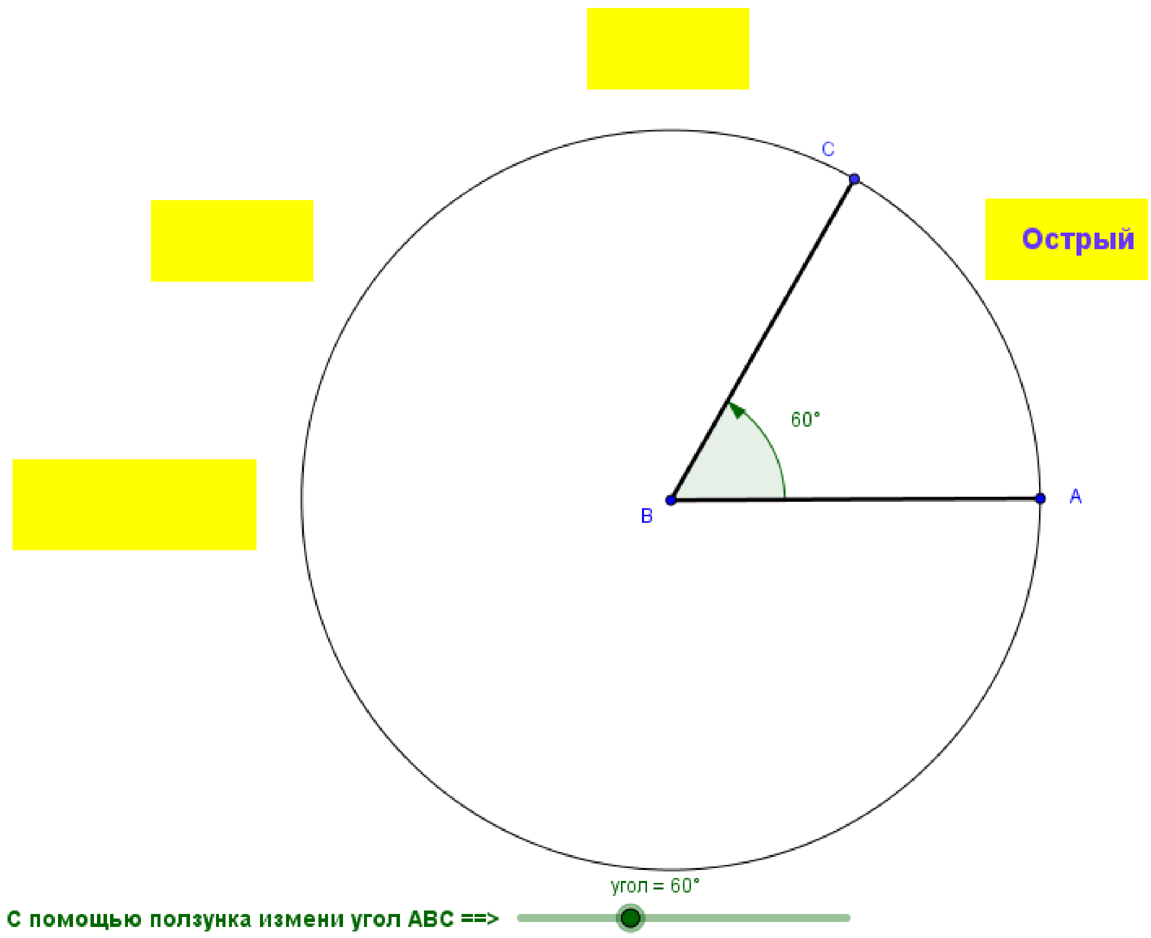


Рисунок 4.11

В этом задании ученики имеют доступ только к инструменту ПЕРЕМЕЩАТЬ.

Цели задания

В этом задании ученики наблюдают за изменениями в величине угла и в названиях углов по мере перемещения ползунка, меняющего величину угла *ABC*. На основе этих наблюдений они получают представление о *тупых углах*, *острых углах*, *прямых углах* и *развернутых углах* с точки зрения величины угла.

Важно, чтобы ученики понимали, что одни виды углов определены для диапазона значений величины угла, а другие – для конкретного значения. Также важно заострить внимание на том, что мы определяем виды углов на основании их величин, и поэтому ученики должны использовать соответствующий словарь, говоря о величинах углов. Предполагается, что ученики дадут следующие ответы:

Острый угол – это угол, величина которого находится между значениями 0° и 90°.
Прямой угол – это угол, величина которого равна ровно 90°.
Тупой угол – это угол, величина которого находится между значениями 90° и 180°.
Развернутый угол – это угол, величина которого равна ровно 180°.

Это задание можно использовать как интерактивное введение в тему названия углов. Кроме того, его также можно использовать в качестве повторения определений.

Знакомство с транспортиром (урок 4.2.3)
Учебная задача:

- Ученики должны научиться измерять углы транспортиром.

Материалы: Файл GeoGebra 4_2_3_транспортир_введение.ggb

На странице *GeoGebra* изображено два угла: угол *BCA* (красный угол) и угол *BCD* (зеленый угол). Ученики могут перемещать точку *B*, изменяя размеры этих углов (Рис. 4.12).

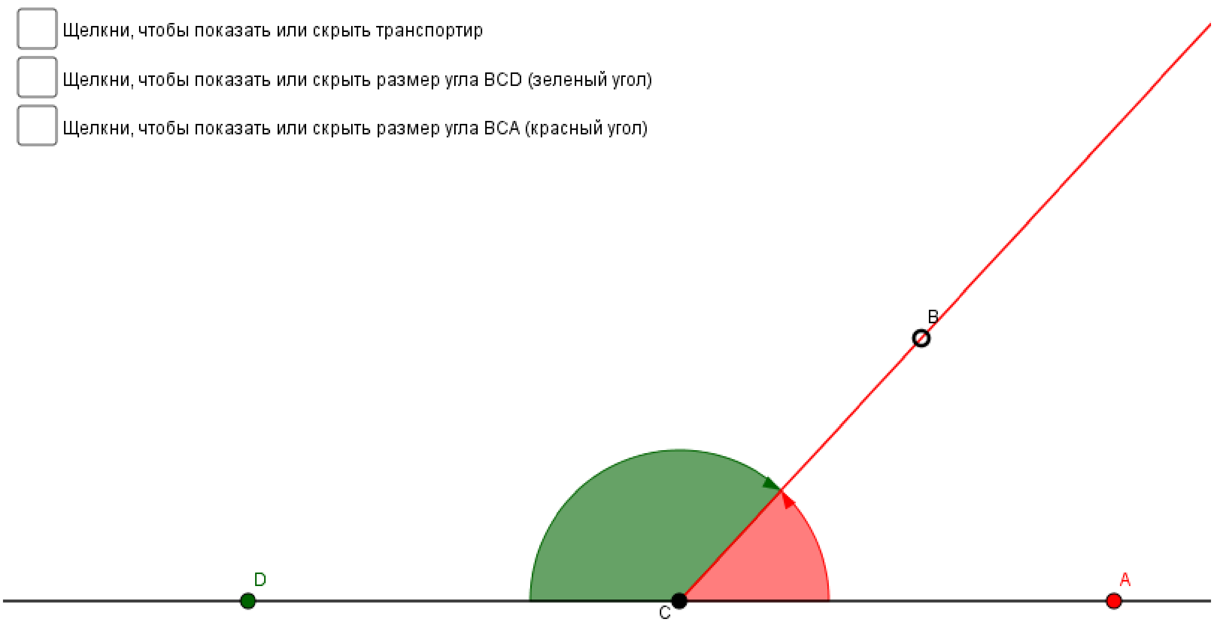


Рисунок 4.12

Контрольные окошки, включенные в этот файл, позволяют ученикам

- Показать или скрыть транспортир. Транспортир располагается так, чтобы им можно было измерить оба угла.
- Показать или скрыть надпись с величиной угла *BCD* – цвет текста соответствует цвету угла.
- Показать или скрыть надпись с величиной угла *BCA* – цвет текста соответствует цвету угла. (см. Рис. 4.13)

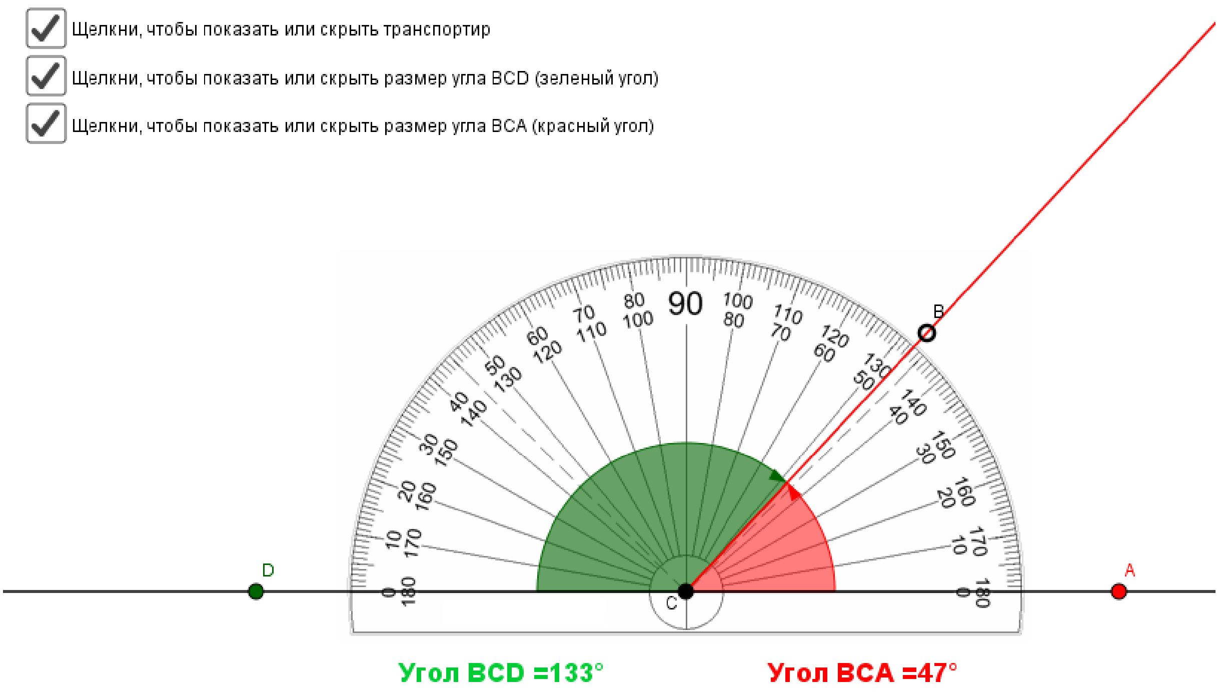


Рисунок 4.13

В этом задании ученики имеют доступ только к инструменту ПЕРЕМЕЩАТЬ.

Цели задания

Целью включения в рассмотрение двух дополнительных углов *BCD* и *BCA* было помочь ученикам понять, что транспортиром можно измерять углы как слева направо, так и справа налево. Также важно заострить внимание на том, что единицами измерения углов являются градусы.

Это задание может использоваться как исследование, направляемое по усмотрению учителя. Сначала ученики проводят наблюдения за изменениями размеров углов *BCA* и *BCD* при перемещении точки *B*. Имеет смысл, чтобы ученики двигали точку *B* по кругу, а не вверх и вниз по лучу *CB*. В этой части урока полезно дать ученикам возможность поделиться своими наблюдениями или задать вопросы об углах. В этой части задания учитель может преследовать разные цели. Учитель мог бы, однако, организовать здесь обсуждение о сравнении этих двух углов, с нахождением их точных величин, и таким образом подвести учеников к следующей части задания.

Затем предложите ученикам установить флажок в контрольном окошке, чтобы отобразился транспортир. Здесь учитель может использовать возможность задать ученикам несколько вопросов про транспортир, например:

Почему, как вы думаете, на транспортир нанесено два набора чисел – снаружи и ближе к центру? Как транспортир может нам помочь найти размер угла? Что транспортир нам говорит про прямой угол? Про развернутый угол?

Затем ученики устанавливают флажок в контрольном окошке, чтобы отображалась величина угла *BCD* (зеленый угол) в градусах. Они экспериментируют, меняя размер угла, и наблюдают за совпадением значений в надписи со значениями на транспортире при прохождении луча *CB* по шкале транспортира. Учитель должен обратить их внимание на то, что значения на внешней шкале транспортира соответствуют величине угла *BCD*. Аналогично ученики исследуют величину угла *BCA* (красный угол) и выясняют, что для измерения этого угла им нужно использовать внутреннюю шкалу транспортира.

В качестве дальнейшего развития темы учитель может предложить ученикам скрыть отображение измерений обоих углов, оставив видимым только транспортир. Ученики могут перемещать точку *B* и измерять углы самостоятельно с помощью транспортира (Рис. 4.14).

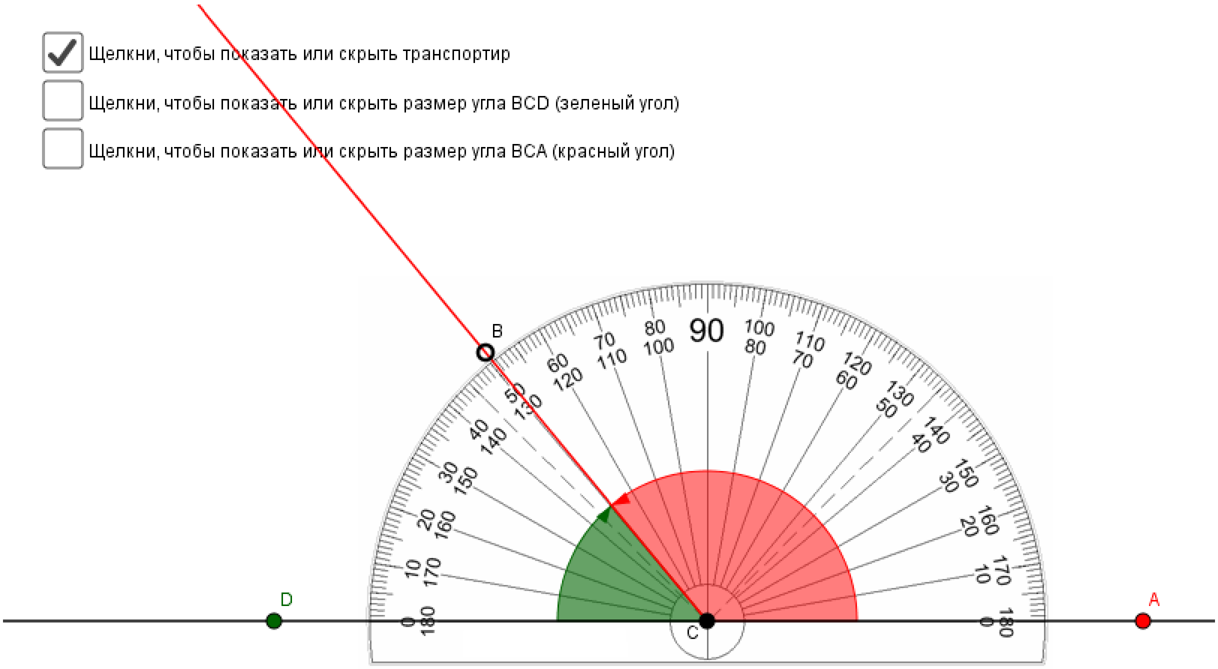


Рисунок 4.14

Затем они могут снова включить отображение измерений обоих углов и сравнить со значениями, которые они получили по транспортиру.

5. Перпендикулярные и параллельные прямые

5.1. Ключевые идеи и основные понятия

Прямые на плоскости могут пересекаться, не пересекаться или совпадать. В случае пересечения прямые имеют одну общую точку, в случае совпадения, все точки являются общими, и в случае отсутствия пересечения – прямые не имеют общих точек и называются параллельными. Таким образом, **параллельными** прямыми называют непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости (рис. 5.1).

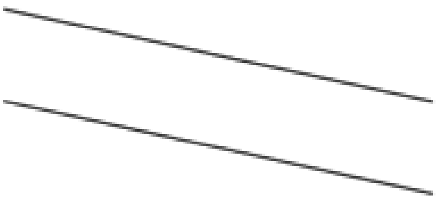


Рисунок 5.1

В начальной школе случай совпадающих прямых не рассматривается, поэтому и здесь мы ограничимся только двумя другими случаями.

Отрезки и лучи параллельных прямых также считаются параллельными. В геометрии есть аксиома параллельности, утверждающая, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной. (Рис. 5.2)

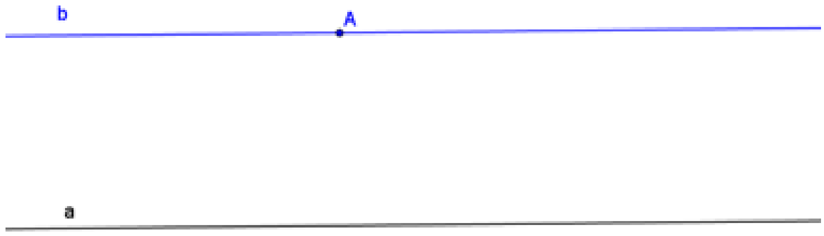


Рисунок 5.2

Из этой аксиомы следует несколько важных следствий, которые могут быть очевидны в начальной школе, но потребуют доказательства в средней школе.

Следствие 1: На плоскости две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу. (Рис. 5.3а)

Следствие 2: Если три прямые лежат в одной плоскости, две из них параллельны, а третья пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую. (Рис. 5.3б)

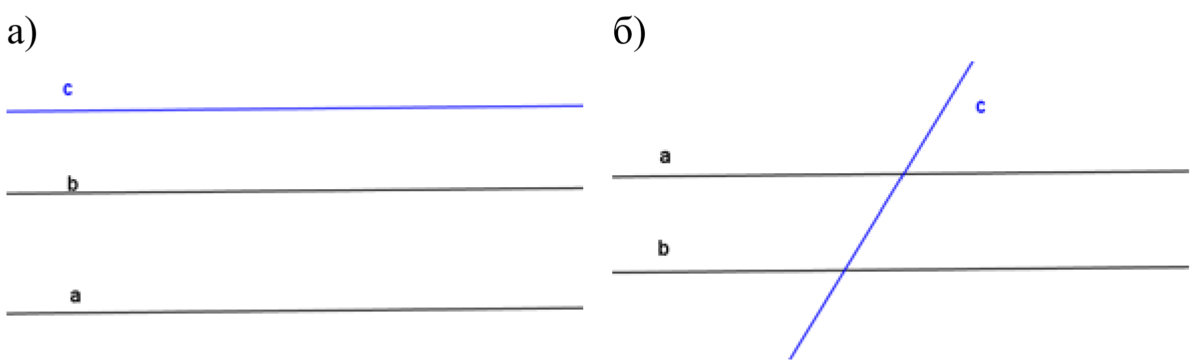


Рисунок 5.3

Мы не приводим здесь доказательства, их можно найти в учебниках по геометрии [3, с. 139]. Мы подчеркиваем, что учителю начальной школы важно понимать эти свойства, чтобы подготовить своих учеников к успешному обучению геометрии в средней школе. Слово *параллельный* в переводе с греческого означает *идущий рядом*. Идущие рядом рельсы железной дороги всегда находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Можно сказать, что параллельные прямые проходят на постоянном расстоянии друг от друга. Для того, чтобы пояснить это утверждение, нам понадобится ввести понятие *перпендикуляр*.

Ранее мы ввели понятие прямого угла. Заметим, что две пересекающиеся прямые на плоскости разбивают ее на две пары вертикальных углов. На Рисунке 5.4 углы 1 и 3 образуют одну пару, углы 2 и 4 образуют другую пару. Вертикальные углы равны.

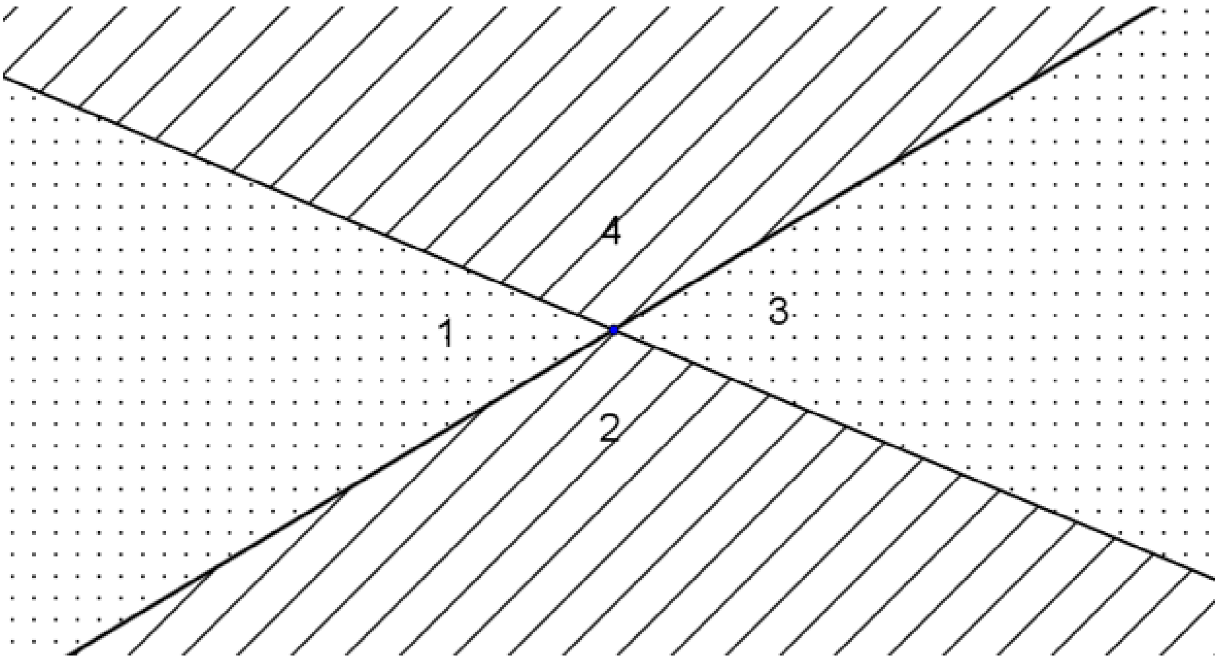


Рисунок 5.4

Пересекающиеся прямые, которые образуют четыре прямых угла, называют **перпендикулярными** (Рис. 5.5). Перпендикулярными могут быть прямые, лучи или отрезки, если при их пересечении образуется прямой угол.

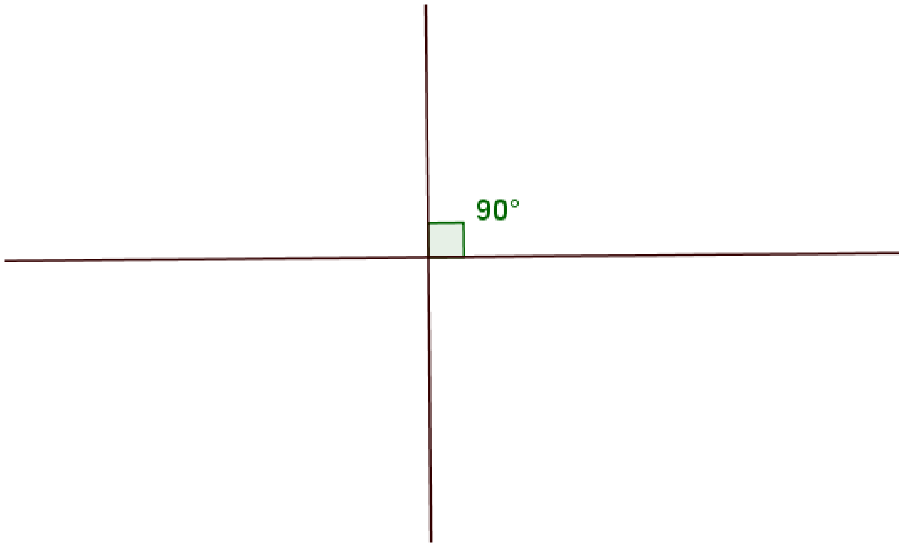


Рисунок 5.5

Теперь можно пояснить более раннее утверждение о постоянстве расстояния между параллельными прямыми. Пусть a и b - параллельные прямые. На прямой a возьмем две произвольные точки A и B и опустим перпендикуляры из этих точек на прямую b (см. Рис. 5.6)

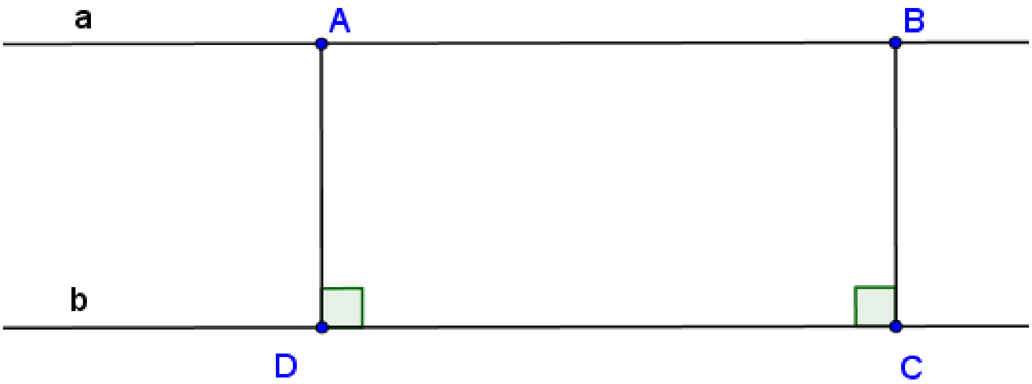


Рисунок 5.6

Получился четырехугольник $ABCD$, у которого все углы прямые, поэтому $ABCD$ – прямоугольник. Мы знаем, что противоположные стороны прямоугольника равны, поэтому AD = BC. Отрезок AD (и BC) перпендикулярен прямым a и b, и поэтому называется общим перпендикуляром прямых a и b. Мы показали, что все общие перпендикуляры к двум параллельным прямым равны и параллельны друг другу. Расстояние между двумя параллельными прямыми – это длина общего перпендикуляра этих прямых, и значит это расстояние постоянное.

Часть плоскости, заключенную между двумя параллельными прямыми, называют **полосой**. Сами прямые называют *краями полосы* и принадлежат полосе. Параллельные прямые ограничивают полосу постоянной ширины, а ширина полосы – это длина общего перпендикуляра (Рис. 5.7).

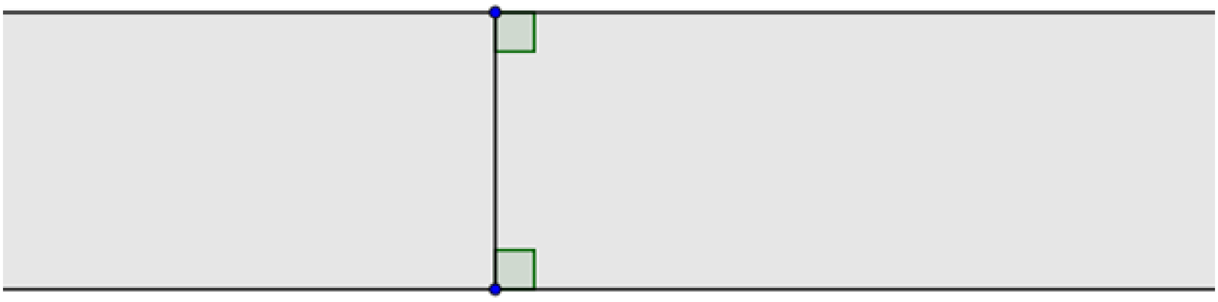


Рисунок 5.7

Параллельные прямые вычерчивают с помощью линейки и чертежного треугольника. Чтобы изобразить таким способом параллельные прямые, надо расположить линейку на листе, приставить треугольник к линейке одной из сторон. Треугольник скользит вдоль линейки. При таком движении множество прямых, идущих вдоль одной из двух других сторон, описывает множество параллельных между собой прямых (Рис. 5.8).

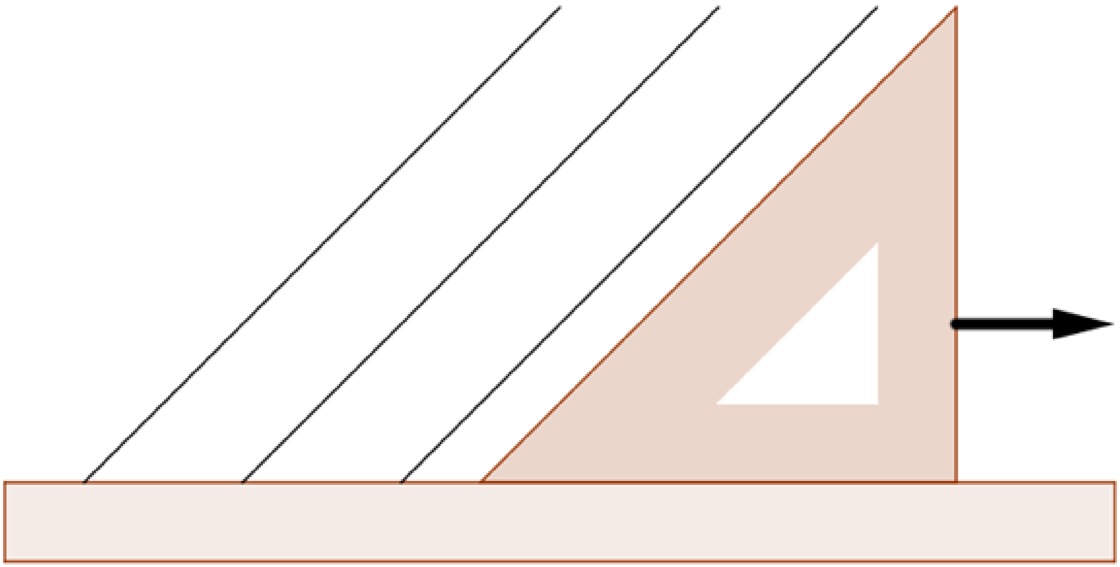


Рисунок 5.8

Перпендикулярные прямые вычерчивают с помощью чертежного треугольника. Сначала начертите прямую. Приставьте треугольник к прямой одним из катетов. Прямые, проведенные вдоль другого катета будут перпендикулярны данной прямой. (Рис. 5.9).

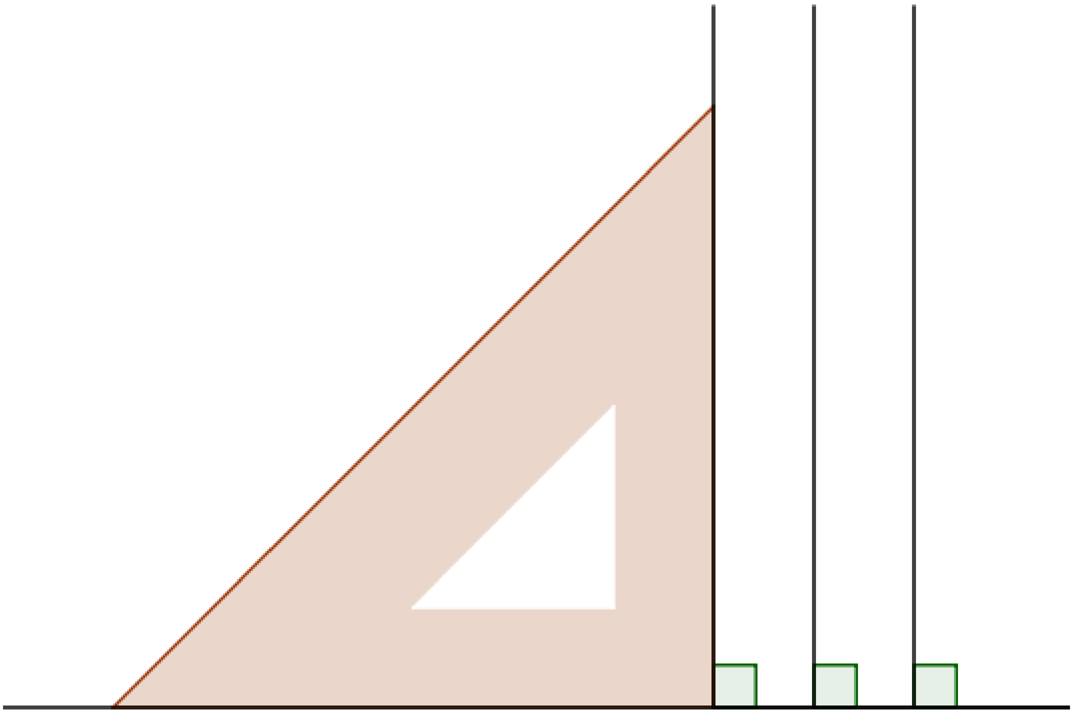


Рисунок 5.9

Умея чертить параллельные и перпендикулярные прямые и зная определения, свойства и признаки параллелограмма и прямоугольника, мы можем строить эти фигуры с помощью чертежного угольника и линейки.

Для построения произвольного параллелограмма построим две параллельные прямые a и b. Отметим точки A и B на прямой a. Проведем через точку A прямую под некоторым углом к прямой a. Эта прямая пересечет прямую b в точке, которую обозначим D. Теперь построим прямую через точку B, параллельную прямой AD. Эта прямая пересечет прямую b в точке, которую обозначим C. Получившийся четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом (Рис. 5.10).

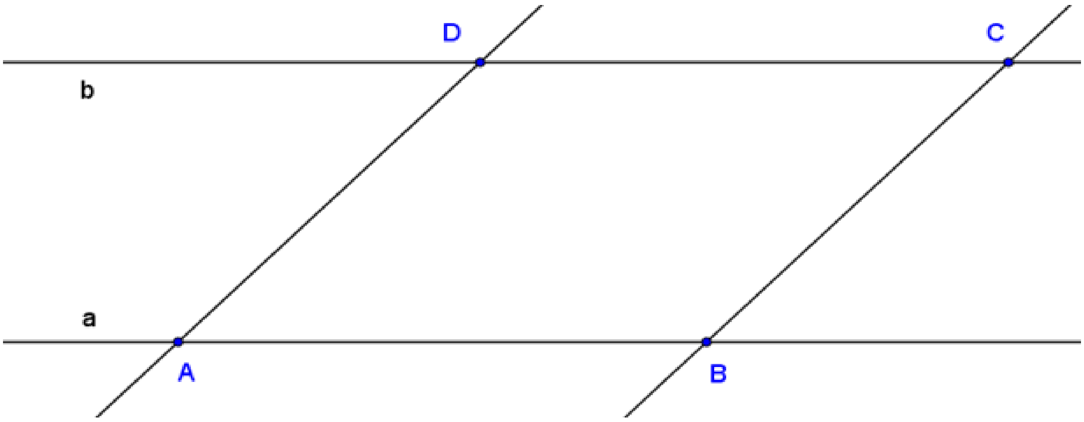


Рисунок 5.10

В четырехугольнике *ABCD* противоположные стороны параллельны по построению. Доказательство того, что противоположные стороны равны, выходит за рамки программы начальной школы. Учащиеся могут проверить это свойство измерениями. В программах динамической геометрии они также смогут проверить равенство сторон для большого числа примеров, двигая сторону параллелограмма *AB* по прямой *a*.

Построим произвольный прямоугольник. Начнем, как и прежде с построения прямой *a* и точек *A* и *B* на прямой *a*. Через точки *A* и *B* проведем прямые, перпендикулярные прямой *a*. На прямой, которая проходит через точку *A*, отметим точку *D*. Через точку *D* проведем прямую параллельную прямой *a*. Точку пересечения этой прямой и перпендикуляра из точки *B* отметим *C*. Полученная фигура *ABCD* является прямоугольником. (Рис. 5.11).

Рисунок 5.11

По построению углы A и B – прямые, прямые a и CD параллельны, значит, прямые BC и AD также перпендикулярны прямой CD. Таким образом, углы C и D – тоже прямые. Поскольку расстояние между параллельными прямыми постоянное, $BC = AD$ и $AB = CD$.

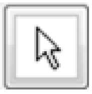
Проверку построения прямоугольника учащиеся могут осуществить в программе GeoGebra путем измерения сторон и углов.

5.2. Уроки GeoGebra

5.2.1. Параллельные прямые

Файл GeoGebra: 5_2_1_параллельные_прямые.ggb

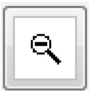
Эксперимент первый



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) подвигай Перемещаемую точку вверх и вниз.

Что происходит с красным и зеленым отрезками, проведенными между синей и лиловой линиями, когда ты делаешь это?

Установи перемещаемую точку так, чтобы длина зеленого отрезка была немного меньше 40 единиц длины.

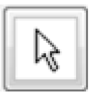


Выбери инструмент УМЕНЬШИТЬ.
Щелкни на крестике ПРИМЕНИТЬ МАСШТАБИРОВАНИЕ несколько раз.

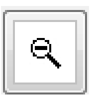
Какое взаимное положение синей и лиловой линий после этого?

Щелкни кнопку ОТМЕНИТЬ, чтобы вернуться к исходному изображению.

Эксперимент второй



Установи перемещаемую точку так, чтобы длины зеленого и красного отрезков были равны 40 единицам длины.



Выбери инструмент УМЕНЬШИТЬ и снова щелкни на крестике ПРИМЕНИТЬ МАСШТАБИРОВАНИЕ несколько раз.
Как ведут себя синяя и лиловая линии теперь?

Параллельные прямые

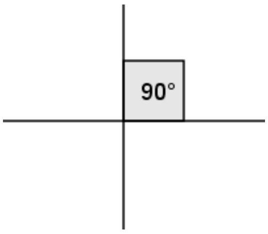
Две прямые, имеющие общую точку, называются *пересекающимися*. Общая точка называется точкой пересечения.

Если прямые идут на постоянном расстоянии, они не пересекутся. Такие прямые называются *параллельными*.

5.2.2. Перпендикулярные прямые

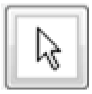
Файл GeoGebra: 5_2_2_перпендикулярные_прямые.ggb

Основные понятия



Когда две пересекающиеся прямые образуют прямой угол (90 градусов), на чертеже этот угол обозначают, как показано на рисунке.

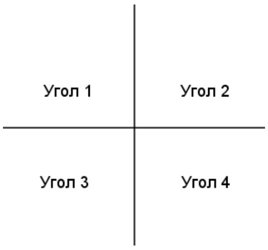
Эксперимент



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) подвигай Перемещаемые точки, находящиеся на пересекающихся линиях.

Постарайся получить прямой угол в пересечении этих линий.
Потом снова подвигай линии, чтобы получить прямой угол при другом положении прямых.

Наблюдение



Когда ты получил прямой угол в пересечении двух прямых, то какими окажутся остальные углы, которые получились в пересечении?

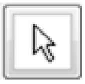
Когда пересекающиеся прямые или отрезки образуют прямой угол, то эти прямые или отрезки называются *перпендикулярными*.

5.2.3. Игра-квест

Файл GeoGebra: 5_2_3_игра_квест.ggb

Основные понятия

На странице *GeoGebra* размещена фотография Воскресенской церкви из с. Потакино Камешковского района (1776) в Суздале, в музее деревянного зодчества.



В каждом задании используй инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель), чтобы двигать и изменять размеры отрезков, которыми ты будешь отмечать требуемые наборы линий на фотографии.

Задание 1

Найди на снимке две пары перпендикулярных отрезков. Отметь эти перпендикулярные отрезки красными отрезками.

Задание 2

Найди на снимке две пары параллельных отрезков. Отметь эти параллельные отрезки лиловыми отрезками.

Задание 3

С помощью синих отрезков выдели на снимке острый угол.

Задание 4

С помощью зеленых отрезков выдели на снимке тупой угол.

Задание 5

С помощью черных отрезков выдели на снимке прямой угол.

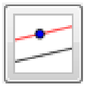
5.2.4. Построение параллелограмма

Файл GeoGebra: 5_2_4_построение_параллелограмма.ggb

Основные понятия

Как определить, что некоторую фигуру можно назвать “параллелограмм”? В этом задании мы будем исследовать один из признаков параллелограмма.

Задача на построение
На странице *GeoGebra* построены два отрезка: **Отрезок *AB*** и **Отрезок *BC***.


Попробуй только с помощью инструмента ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ построить параллелограмм.

Эксперимент и выводы


После того, как ты построил параллелограмм, начни перетаскивать точки *A* и *C* инструментом ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) в различные места на странице.

Опираясь на построение, определи ***параллелограмм*** через понятие параллельных прямых:
Параллелограмм – это четырехугольник, у которого …

Какие еще известные фигуры ты можешь получить, изменяя вид построенного параллелограмма?

Можешь ты преобразовать его в прямоугольник?

Можешь ты преобразовать его в квадрат?

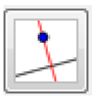
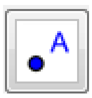
5.2.5. Построение прямоугольника

Файл GeoGebra: 5_2_5_построение_прямоугольника.ggb

Основные понятия

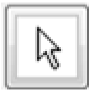
Как определить, что некоторую фигуру можно назвать “прямоугольник”? В этом задании мы будем исследовать один из признаков прямоугольника.

Задача на построение
На странице *GeoGebra* находится **Отрезок *AB***.

Попробуй только с помощью инструмента ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ и инструмента ТОЧКА построить прямоугольник, начиная с **Отрезка *AB***.

Эксперимент и выводы



После того как ты построил прямоугольник, потяни за точки *A*, *B*, и *C* инструментом ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель), изменяя форму прямоугольника.

Опираясь на построение, определи ***прямоугольник***, используя понятие перпендикулярных прямых:

Прямоугольник – это четырехугольник, у которого…

Можешь ты преобразовать его в квадрат?

Что ты можешь сказать об углах прямоугольника?

5.3. Методические рекомендации для учителя

Параллельные прямые (урок 5.2.1)

Учебная задача:

- Ученики должны узнать, что параллельные прямые идут на постоянном расстоянии между собой и никогда не пересекутся.

Материалы: Файл GeoGebra 5_2_1_параллельные_прямые.ggb

На странице GeoGebra ученики видят две прямые, лиловую и синюю. Прямые соединены двумя отрезками, зеленым и красным, оба отрезка являются перпендикулярами к лиловой прямой. Лиловая прямая зафиксирована, а синюю можно поворачивать, потянув за Перемещаемую точку, так что длина красного отрезка не меняется, а длина зелёного отрезка меняется. При открытии файла длины отрезков равны между собой (Рис. 5.12).

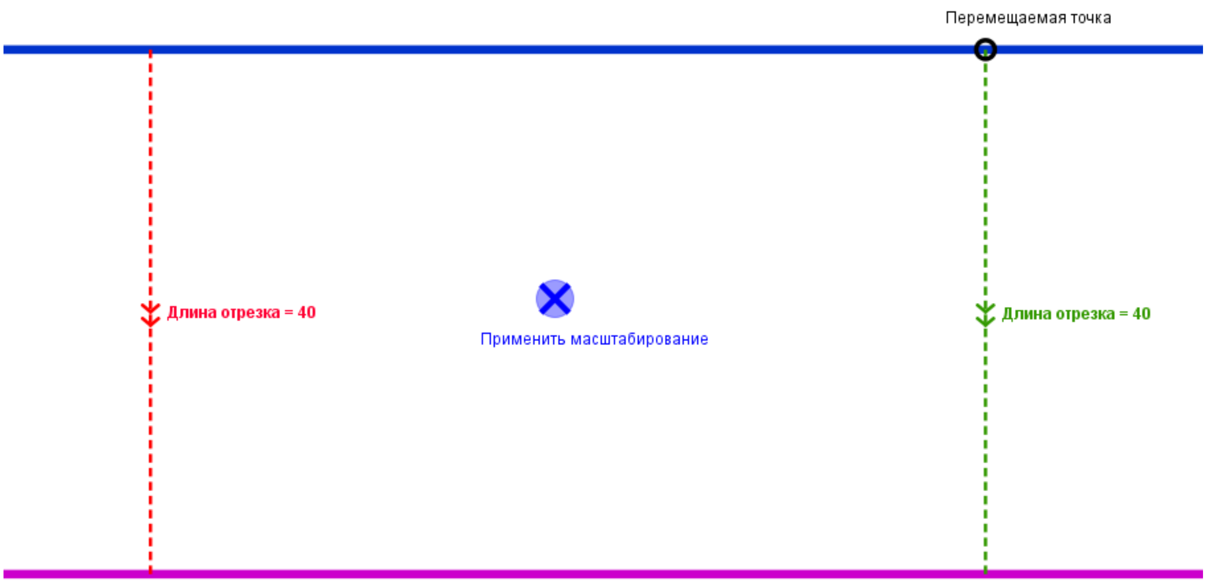


Рисунок 5.12

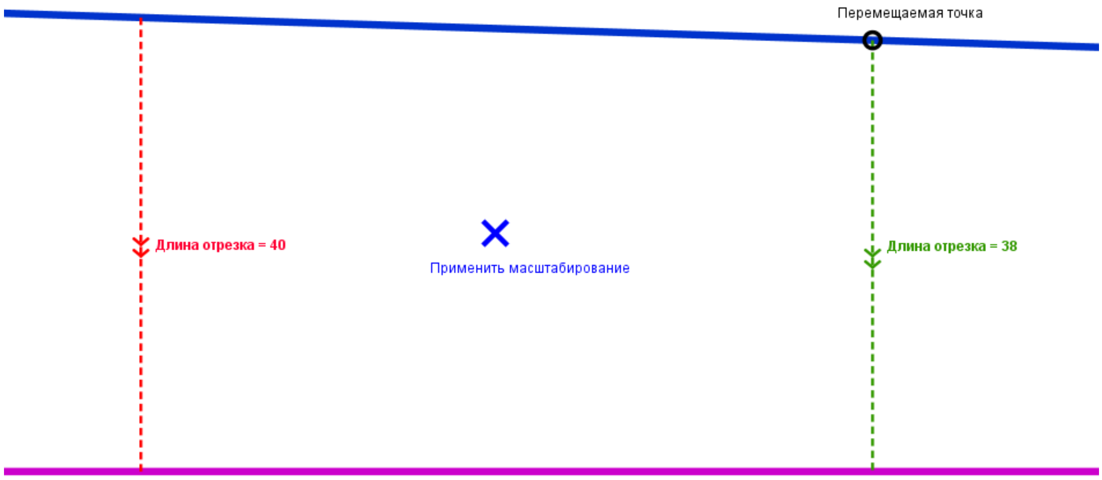
Ученики могут подцепить и перетащить отмеченную точку с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ. Кроме того, они могут с помощью инструментов УМЕНЬШИТЬ и УВЕЛИЧИТЬ отмасштабировать график, как это им нужно для исследования.

Цели задания

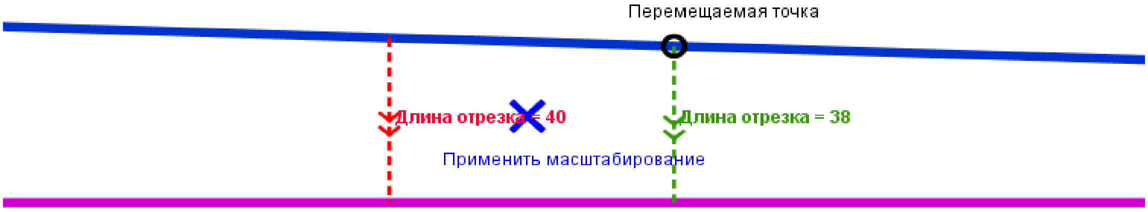
В этом задании ученики экспериментируют с двумя прямыми, изменяя наклон синей прямой и наблюдая взаиморасположение прямых, масштабируя изображение. Задание иллюстрирует два понятия: *пересекающиеся прямые* и *параллельные прямые.*

В первой части задания ученики передвигают отмеченную точку, чтобы слегка уменьшить длину зеленого отрезка. Они уменьшают масштаб картинки, чтобы увидеть, что произойдет с двумя прямыми, когда они достаточно уменьшат картинку. На рисунке 5.13 показаны изменения изображения по мере уменьшения масштаба:

Без уменьшения



Инструмент УМЕНЬШИТЬ применен три раза



Инструмент УМЕНЬШИТЬ применен десять раз

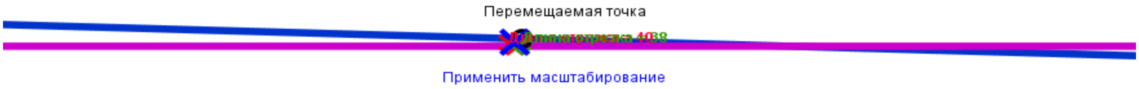


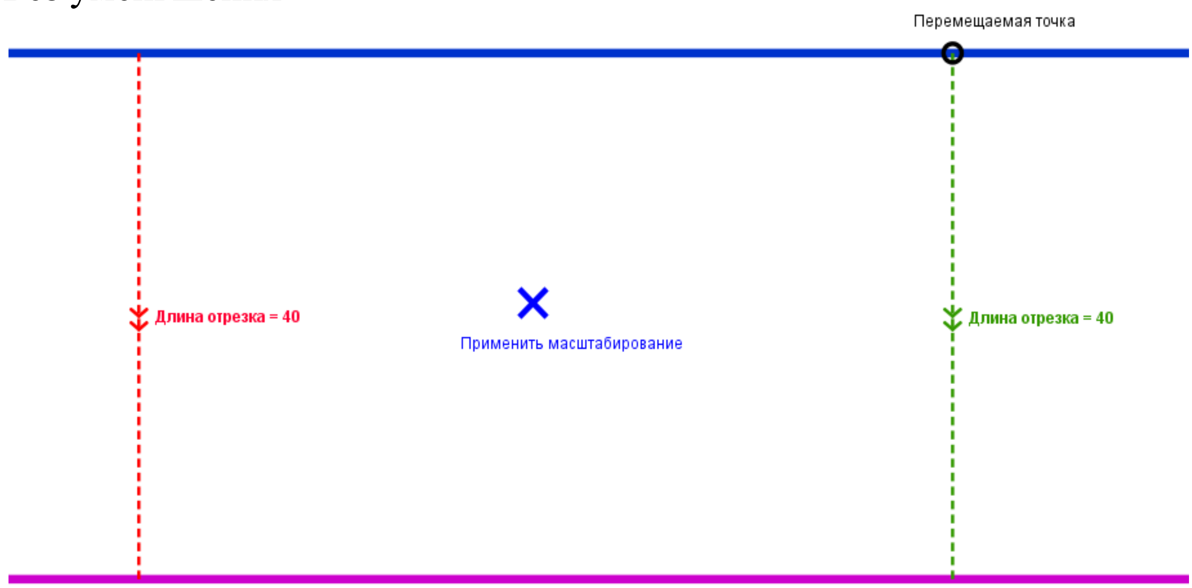
Рисунок 5.13

Заметьте, что в этом примере зеленый отрезок был на две единицы короче красного. Если разница между ними будет больше, ученикам потребуется использовать инструмент УМЕНЬШАТЬ меньше раз, чтобы увидеть пересечение прямых. Ожидается, что после этого исследования ученики усвоят, что при достаточном уменьшении масштаба они обязательно увидят пересечение прямых.

В этом задании ученики должны использовать кнопку ОТМЕНИТЬ, чтобы вернуться к начальному изображению. Ее требуется нажать только один раз, независимо от того, сколько раз они использовали инструмент УМЕНЬШИТЬ.

Во второй части задания длины зеленого и красного отрезков должны быть равны друг другу. Ученики повторяют эксперимент с уменьшением масштаба. На рисунке 5.14 показаны три изменения изображения по мере уменьшения масштаба:

Без уменьшения



Инструмент УМЕНЬШИТЬ применен три раза

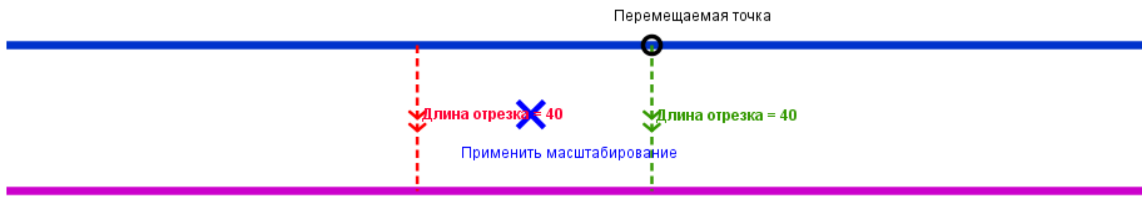


Рисунок 5.14

Инструмент УМЕНЬШИТЬ применен десять раз

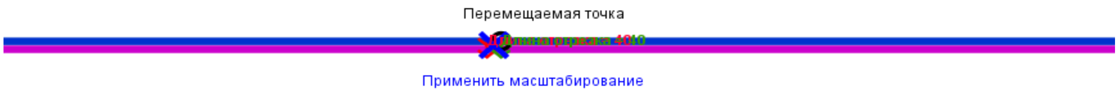


Рисунок 5.14 (Окончание)

Ученики могут убедиться, что прямые не пересекаются. Некоторые ученики при этом могут утверждать, что прямые приблизились друг к другу при уменьшении масштаба. Задача учителя – объяснить, что процедура уменьшения масштаба меняет только масштаб, но не меняет расстояния. Возьмите примеры из жизни (например, карты, снимки с воздуха и т.п.), чтобы эти ученики поняли, что с изменением масштаба расстояния остаются неизменными.

Понятия параллельных и пересекающихся прямых отражены в выводах, которые содержатся в конце задания. Требуется провести расширенное обсуждение этих понятий с классом. Попросите учеников привести примеры параллельных прямых из жизни (рельсы железнодорожного полотна, дорожки в плавательном бассейне и т.п.) и попросить их объяснить, почему они считают, что эти примеры иллюстрируют параллельные прямые.

Это задание может использоваться как введение в тему “параллельные прямые”. Оно может выполняться как индивидуально, так и в небольших группах. При этом настоятельно рекомендуется, чтобы задание завершилось общим обсуждением. Это позволит учителю выявить неверные ученические представления и разобрать их перед тем, как двигаться дальше.

Перпендикулярные прямые (урок 5.2.2)

Учебная задача:

- Ученики должны знать, что перпендикулярные прямые – это пересекающиеся прямые, которые при пересечении образуют прямой угол (90 градусов).

Материалы: Файл GeoGebra 5_2_2_перпендикулярные_прямые.ggb

При открытии файла ученики видят две пересекающиеся прямые и размеры углов, образовавшихся при пересечении этих прямых (Рис. 5.15).

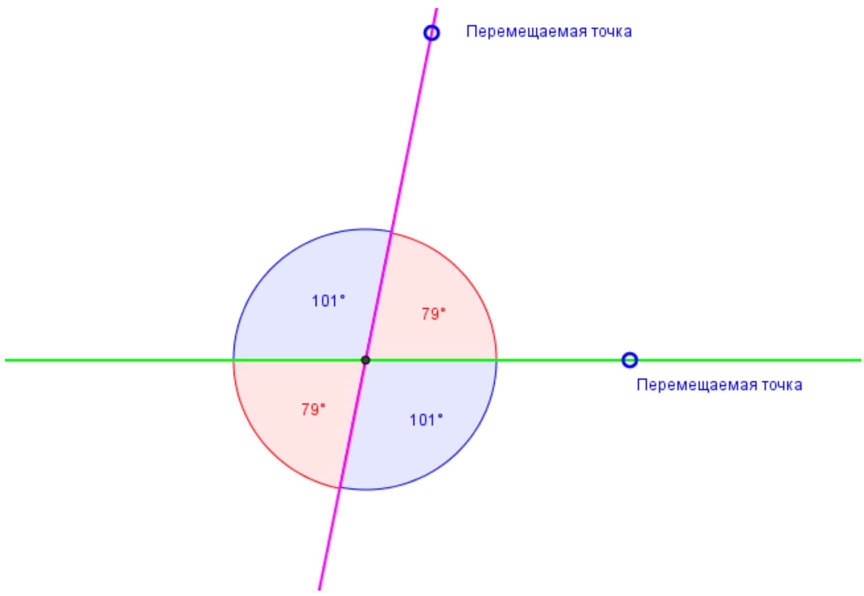


Рисунок 5.15

Ученики имеют доступ только к инструменту ПЕРЕМЕЩАТЬ, с помощью которого они могут изменять взаимное расположение этих прямых, перетаскивая перемещаемые точки, имеющиеся на каждой прямой.

Цели задания

С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ ученики могут передвигать Перемещаемые точки, находящиеся на каждой из прямых, чтобы добиться различного взаимного расположения двух пересекающихся прямых. Их задача – изобразить прямые так, чтобы они образовывали в пересечении прямой угол. Когда это положение будет найдено, метки на углах поменяются с дуговых на квадратные (Рис. 5.16):

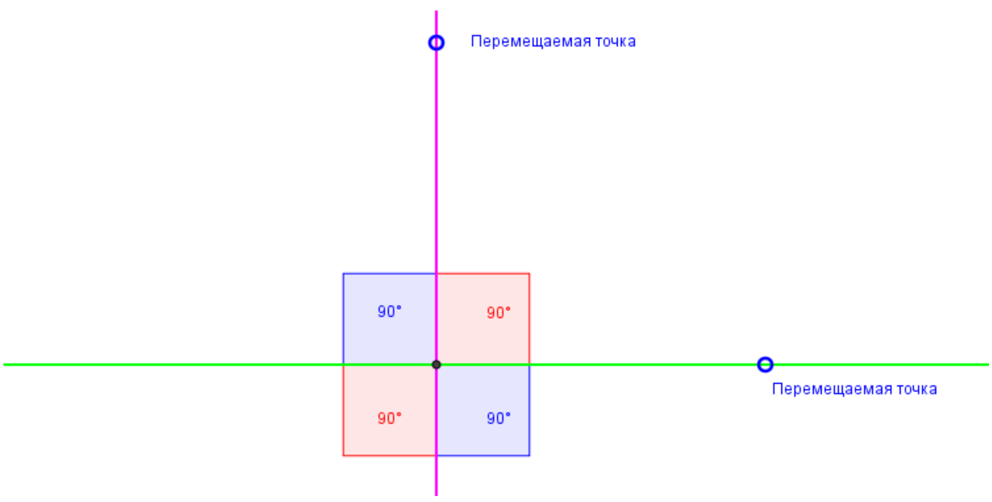


Рисунок 5.16

Существует бесконечно много возможностей достижения этого результата, поэтому ученикам следует предложить найти другие комбинации. Кроме этого, вы можете предложить ученикам в классе показать свои результаты друг другу, чтобы они могли увидеть разнообразие вариантов.

Важно в этом задании, чтобы ученики заметили, что, если один из углов в пересечении прямой, то все четыре угла, образовавшиеся при пересечении, оказываются прямыми.

Понятие *перпендикулярных прямых* вводится после выполнения учениками этого задания GeoGebra. После этого необходимо продолжить обсуждение этого понятия в классе. Попросите учеников привести примеры перпендикулярных отрезков из реальной жизни (стороны оконной рамы, стены и пол в комнате и т.п.) и попросите их объяснить, почему они считают, что эти примеры демонстрируют перпендикулярные прямые.

Это задание может использоваться как введение в тему “Перпендикулярные прямые”. Его можно выполнять индивидуально или в небольших группах. При этом настоятельно рекомендуется, чтобы оно завершалось обсуждением со всем классом. Это позволит учителю выявить неверные ученические представления, которые могут оставаться у учеников, и разобрать их перед тем, как двигаться дальше.

Игра-квест (урок 5.2.3)

Учебная задача:

- Ученики должны найти параллельные прямые, перпендикулярные прямые, острый угол, тупой угол и прямой угол.

Материалы: Файл GeoGebra 5_2_3_игра_квест.ggb

На странице GeoGebra размещена фотография Воскресенской церкви из с. Потакино Камешковского района (1776) в Суздале, в музее деревянного зодчества. Кроме того, здесь имеются горизонтальные и вертикальные отрезки, которые нужно будет использовать для указания на параллельные и перпендикулярные отрезки, а также на различные углы на этой фотографии (Рис. 5.17).

Рисунок 5.17

Ученикам доступен только инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ, которым они могут подцеплять и перетаскивать отрезки, располагая их на снимке, и, подцепив и потянув за вершину отрезка, поворачивать его по мере необходимости.

Цели задания

Это задание может использоваться для оценки знаний, которые ученики получили о параллельных и перпендикулярных прямых и видах углов. Примерные ответы для каждого задания приведены ниже.

Задание 1: Найди на снимке две пары перпендикулярных отрезков. Отметь эти перпендикулярные отрезки красными отрезками (Рис. 5.18).

Рисунок 5.18

Задание 2: Найди на снимке две пары параллельных отрезков. Отметь эти параллельные отрезки лиловыми отрезками (Рис. 5.19).

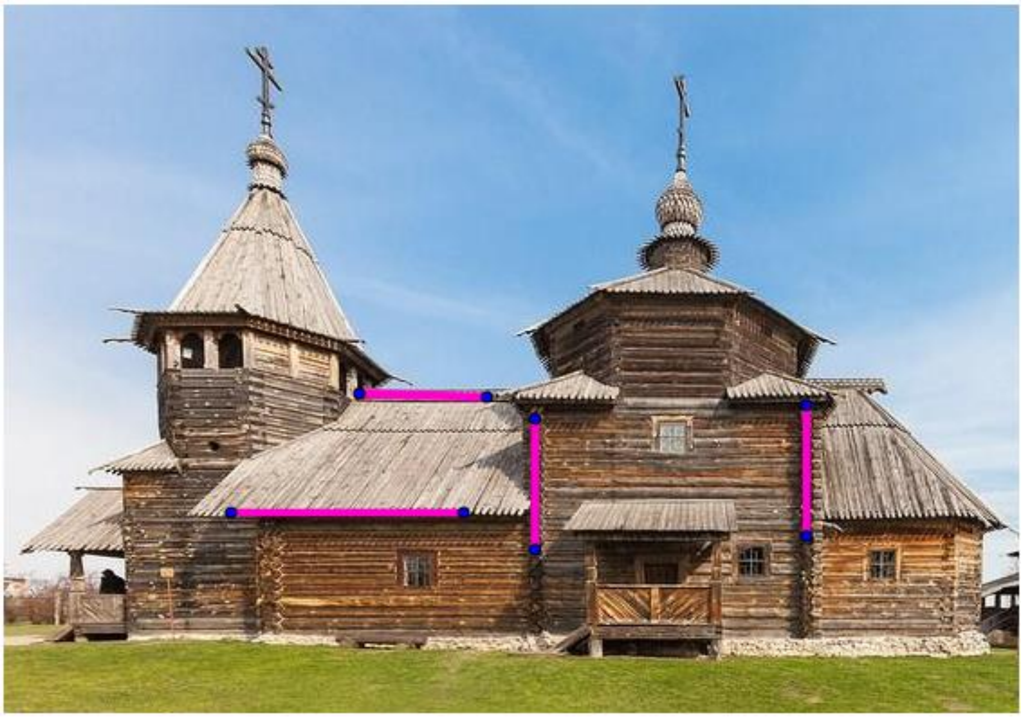


Рисунок 5.19

Задание 3: С помощью синих отрезков выдели на снимке острый угол (Рис. 5.20).

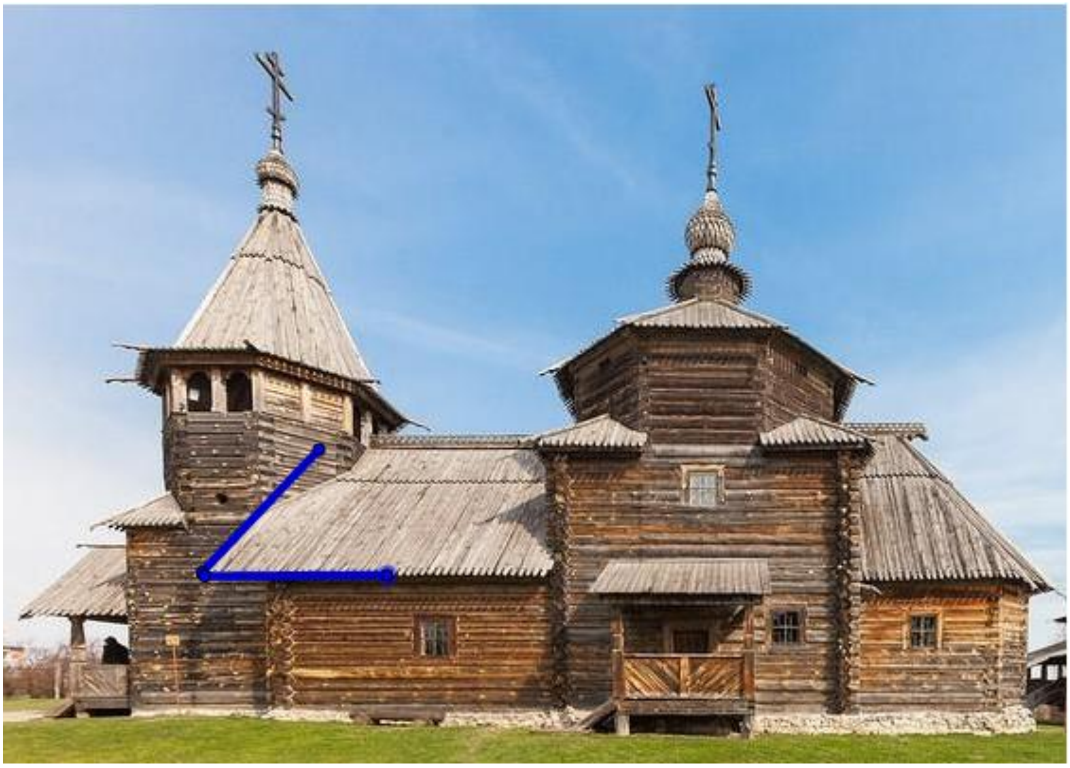


Рисунок 5.20

Задание 4: С помощью зеленых отрезков выдели на снимке тупой угол (Рис. 5.21).

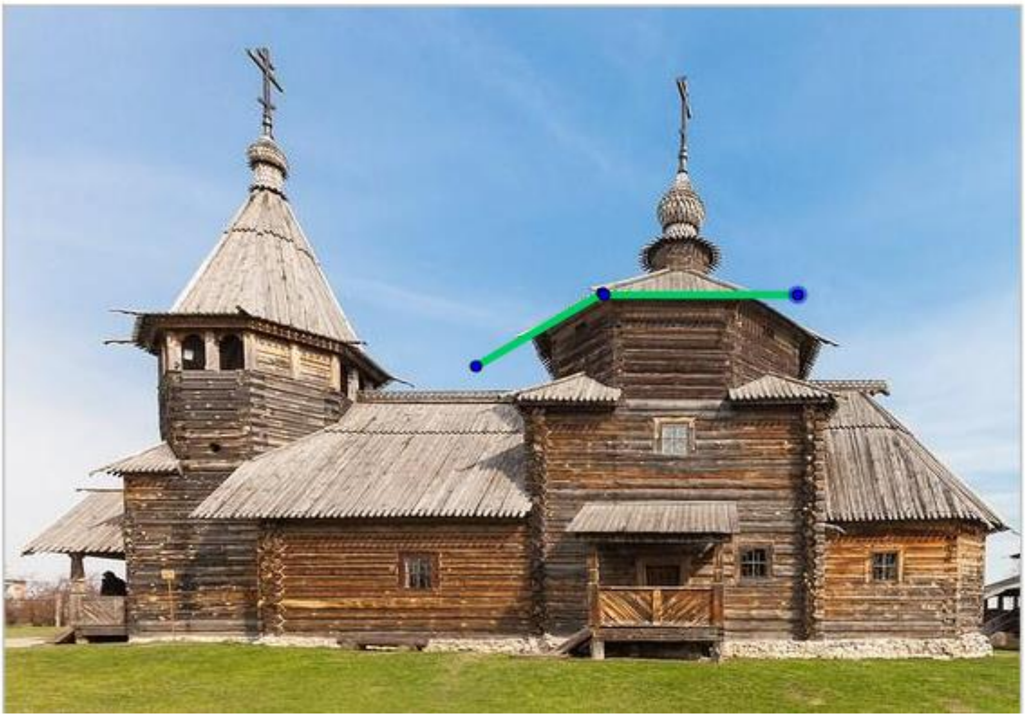


Рисунок 5.21

Задание 5: С помощью черных отрезков выдели на снимке прямой угол (Рис. 5.22).

Рисунок 5.22

Когда ученики завершат выполнение этого задания, распечатайте и раздайте вперемешку получившиеся решения всему классу или в небольшие группы. Пусть ученики просмотрят работы друг друга и выскажут свое мнение о работе и возможных ошибках.

Построение параллелограмма (урок 5.2.4)

Учебные задачи:

- Ученики должны построить параллелограмм, используя параллельные прямые.
- Ученики должны дать определение параллелограмма как четырехугольника, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Материалы: Файл GeoGebra 5_2_4_построение_параллелограмма.ggb

На странице Geogebra ученики видят два отрезка *AB* и *BC*, имеющих общий конец. (Рис. 5.23).

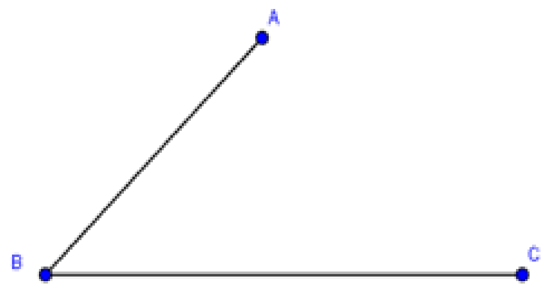


Рисунок 5.23

Ученикам доступны только инструменты ПЕРЕМЕЩАТЬ и ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ.

Цели задания

В этом задании ученикам даны два отрезка, представляющих смежные стороны параллелограмма. Задача учеников завершить построение параллелограмма, используя только инструмент ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ. Чтобы выполнить задачу, ученики должны опираться на знание того, что у параллелограмма противоположные стороны параллельны. Следовательно, они должны построить прямую через точку *A*, параллельную отрезку *BC*, прямую через точку *C*, параллельную отрезку *AB*. Результат построения представлен на Рис. 5.24.

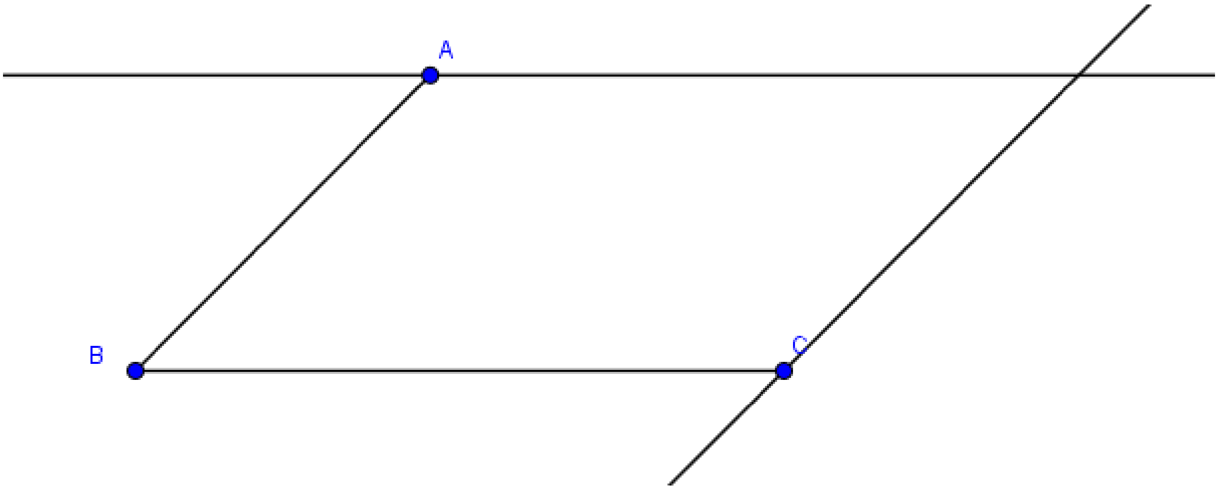
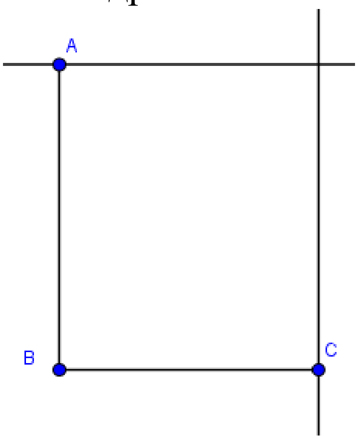


Рисунок 5.24

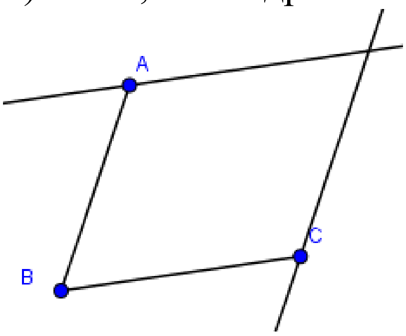
Фигура, ограниченная отрезками *AB* и *BC* и построенными параллельными прямыми, является параллелограммом. Ученики могут понаблюдать за свойствами этой фигуры, подвигав точки *A* и *C*. На основе своих наблюдений они должны предложить определение параллелограмма. Вот один из возможных ответов ученика:
Параллелограмм – это четырехугольник, имеющий две пары параллельных сторон.

Когда ученики двигают точки *A* и *C*, они могут получить также другие известные им фигуры (см. Рис. 5.25).

а) Прямоугольник, не квадрат



б) Ромб, не квадрат



в) Квадрат

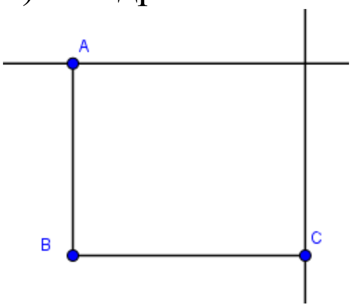


Рисунок 5.25

Это позволяет учителю начать обсуждение общих признаков разных фигур и их классификацию, например, квадрат является также прямоугольником, ромб – параллелограммом, прямоугольник – параллелограммом и т.д.

Построение прямоугольника (урок 2.2.5)

Учебные задачи:

- Ученики должны построить прямоугольник, используя перпендикулярные прямые.
- Ученики должны определить прямоугольник как четырехугольник с четырьмя прямыми углами.

Материалы: Файл GeoGebra 5_2_5_построение_прямоугольника.ggb

На странице GeoGebra находится только отрезок *AB* (Рис. 5.26).

Рисунок 5.26

Ученикам доступны инструменты ПЕРЕМЕЩАТЬ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ и ТОЧКА.

Цели задания

В этом задании ученикам дан один отрезок, который является одной стороной прямоугольника. Задача состоит в том, чтобы построить прямоугольник, используя только инструменты ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ и ТОЧКА. Чтобы выполнить задание, ученики должны знать, что углы прямоугольника прямые. Поэтому они могут построить через точки *A* и *B* прямые, перпендикулярные отрезку *AB* (см. Рис. 5.27).

Рисунок 5.27

Чтобы построить последнюю сторону прямоугольника, ученики могут поставить точку *C* на перпендикуляре, построенном через точку *B*, и затем построить прямую через точку *C*, перпендикулярную прямой *BC*. Результат построения приведен на Рис. 5.28.

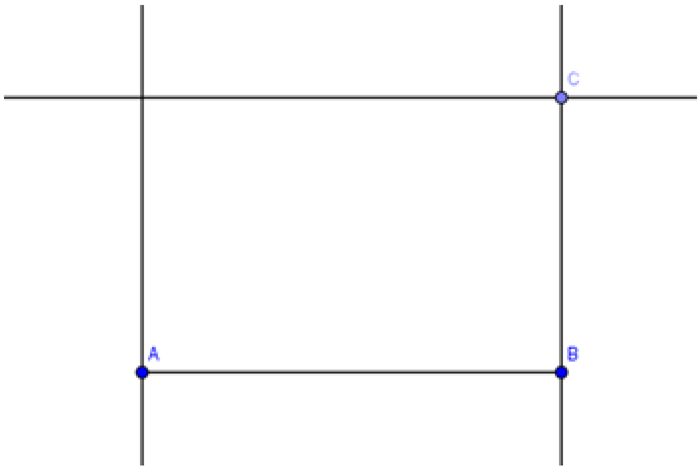


Рисунок 5.28

Фигура, ограниченная отрезком *AB* и тремя построенными прямыми, является прямоугольником. Ученики могут понаблюдать за свойствами этой фигуры, подвигав точки *A*, *B* и *C*. На основе своих наблюдений они должны предложить определение прямоугольника. Вот один из возможных ответов ученика:

Прямоугольник – это четырехугольник, у которого все углы прямые.

Когда ученики двигают точки *A*, *B* и *C*, они могут получить квадрат (см. Рис. 5.29).

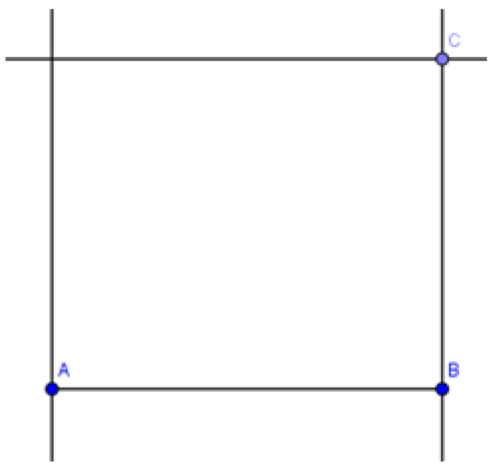


Рисунок 5.29

Это позволяет учителю поднять вопрос о взаимосвязи между прямоугольником и квадратом, которые обычно плохо понимаются учениками младших классов: квадрат является прямоугольником, но не всякий прямоугольник – квадрат. Множество квадратов – это подмножество множества прямоугольников.

6. Классификация плоских фигур

6.1. Ключевые идеи и основные понятия

В начальной школе впервые вводится понятие многоугольника. Это понятие непростое, требует очень аккуратного рассмотрения с детьми, чтобы не зародить неверных представлений, которые могут повлечь за собой сложности в последующем изучении геометрии в старших классах. Сначала давайте введем понятие ломаной линии. Ломаной называется фигура, состоящая из отрезков, следующих друг за другом так, что один из концов первого отрезка служит концом второго отрезка, другой конец второго отрезка служит концом третьего отрезка, и. т.д. [7, с. 16]. При этом соседние отрезки не лежат на одной прямой (Рис. 6.1).

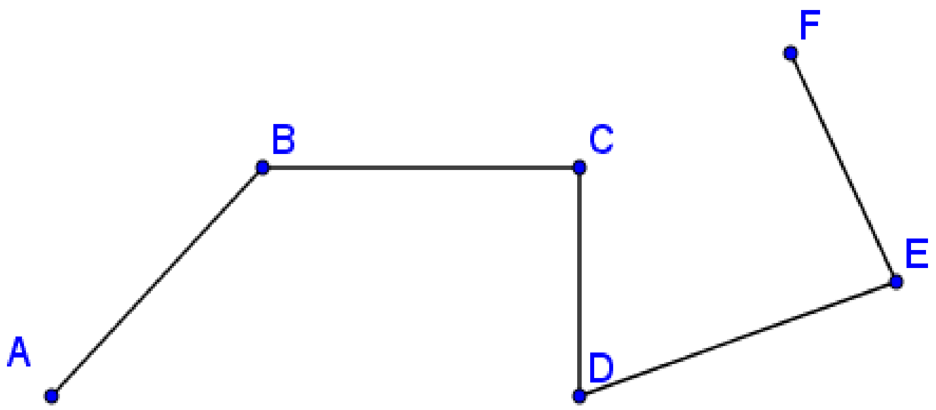


Рисунок 6.1

Отрезки, составляющие ломаную, называются ее *звеньями*. Если концы ломаной совпадают, то она называется замкнутой. Сама ломаная может пересекать сама себя (Рис. 6.2а), иметь точки касания сама с собой (Рис. 6.2б), и налегать на себя (Рис. 6.2в).

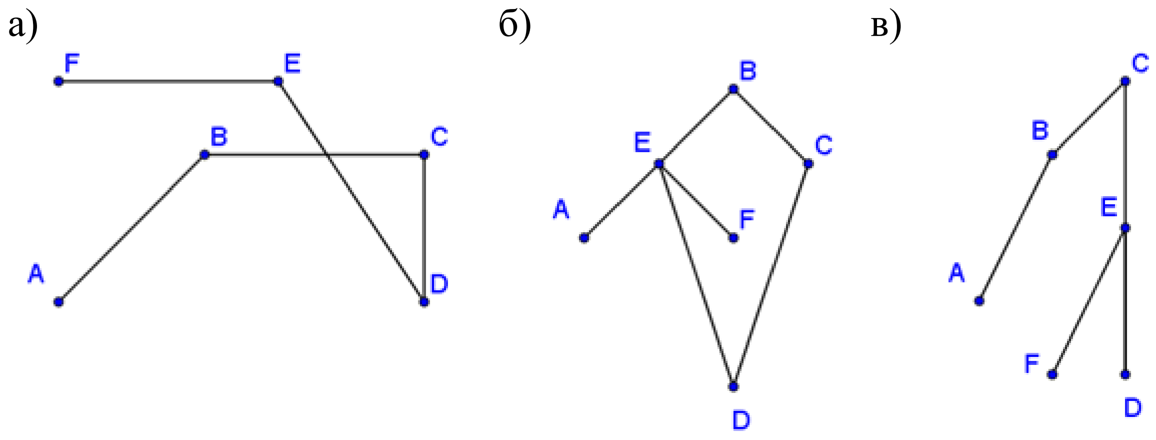


Рисунок 6.2

Если таких особенностей у ломаной нет, то она называется *простой*. **Многоугольником** называется простая замкнутая ломаная вместе с конечной частью плоскости, ограниченной ею. Ломаная называется *границей* этого многоугольника, звенья – *сторонами*, и концы отрезков – *вершинами*. В каждой вершине многоугольника его стороны задают угол. Число сторон многоугольника равно числу его вершин, и числу его углов.

С 5-6-ти лет дети учатся различать многоугольники по числу сторон (углов). Это фактически их первый опыт классификации фигур. Далее в начальной школе уделяется внимание видам треугольников и четырехугольников фиксируя внимание на то, чтобы учащиеся умели определять характерные свойства этих фигур и сопоставлять разные виды фигур, оставаясь в пределах одного множества, например, сравнивать остроугольные, прямоугольные и тупоугольные треугольники, выясняя, что между ними общего и в чем они различаются.

В этом разделе мы сосредоточимся на классификации четырехугольников. Исследования показывают, что именно с классификацией этих фигур связано довольно много ошибочных представлений у младших школьников [8].

Майкл де Вилье [9] сопоставляет две формы классификации математических понятий. *Иерархическая классификация*[3] означает «классификация понятий таким образом, что более конкретные понятия об-

[3] В русской литературе иерархическая классификация не рассматривается в качестве классификации.

разуют подмножество более общих понятий» (де Вилье, с.11). *Классификация разделения* основана на том, что «различные подмножества понятий рассматриваются независимо (раздельно) друг от друга» [9, с.11]. Эти две формы классификации сопоставлены на рисунке 6.3.

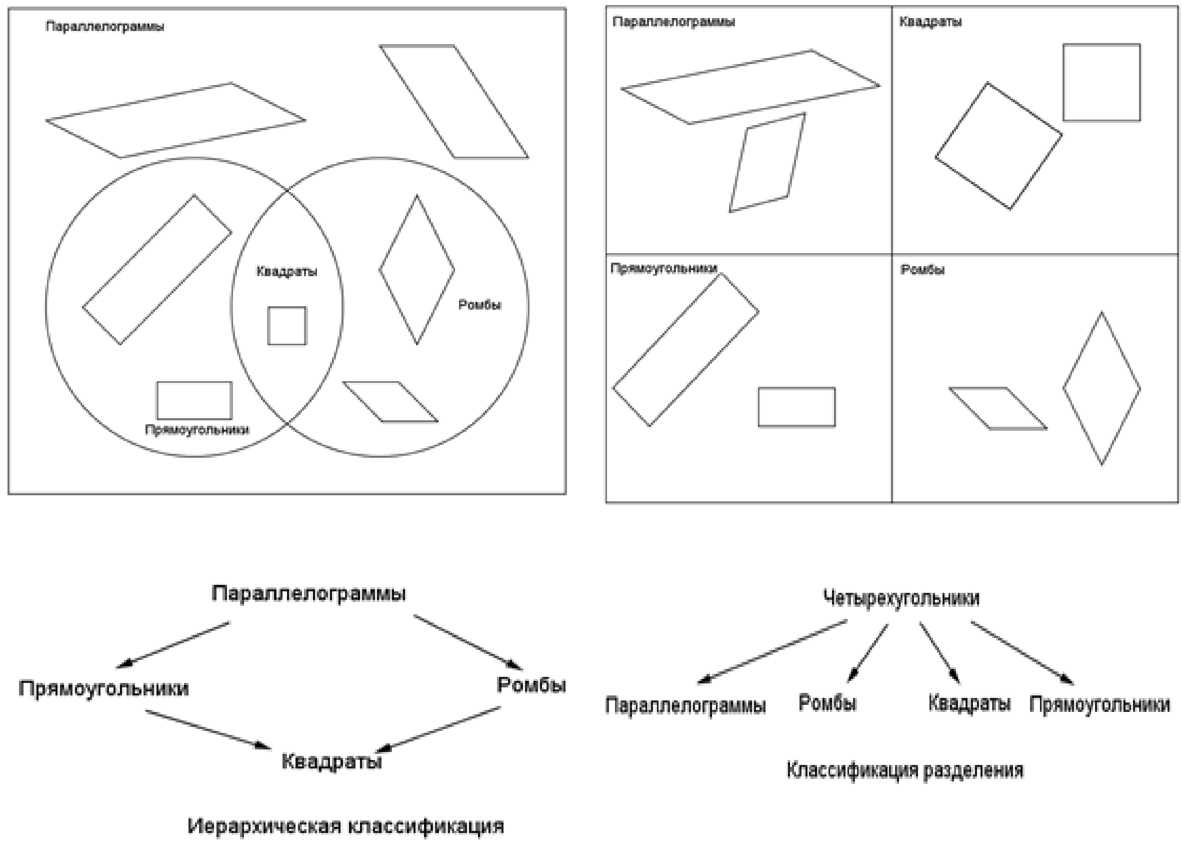


Рисунок 6.3

Исследования показывают, что учащиеся чаще всего выбирают классификацию разделения и не видят иерархических отношений, которые требуют более высокого уровня мышления. Некоторые из причин, вызывающих трудности у школьников с иерархией четырехугольников, основаны на ряде ошибочных представлений о фигурах [10].

Одно из ошибочных представлений связано с понятиями квадрат и прямоугольник. Определенную трудность для младших школьников представляет осознание того, что любой квадрат является прямоугольником. Причина в том, что целостный образ квадрата и прямоугольника уже сложился у большинства детей, а умением выделять существенные признаки фигуры они еще не овладели [6].

В данном случае очень важно продумать последовательность вопросов, организующих деятельность детей, направленную на выделение характерных признаков прямоугольника и квадрата. Для этой цели учитель может использовать раздаточный материал: конверт с набором различных геометрических фигур, окрашенных в разные цвета. Сначала следует выяснить, как можно их назвать (например, многоугольники). Затем предложить учащимся показать и назвать многоугольники, у которых три угла и три стороны; четыре угла и четыре стороны; пять углов и пять сторон и т. д. После этого предложить им оставить на парте только четырехугольники. Затем из них выделить те, у которых один, два, три, четыре прямых угла (после нескольких попыток некоторые ученики догадаются, что четырехугольников у которых только три прямых угла вообще быть не может). Дети выполняют задание учителя, сначала прикидывая «на глаз», какие углы могут быть прямыми, затем проверяют свое предположение с помощью модели прямого угла (рассмотрена в параграфе 4.1).

В результате выделяются четырехугольники, у которых все углы прямые. Они имеют название – прямоугольники. Среди прямоугольников можно выделить такие, у которых все стороны равны. Это квадраты. Отношения между понятиями многоугольник, ч*етырехугольник, прямоугольник, квадрат* представлены схематически на рисунке 6.4.

Рисунок 6.4

Эту схему можно затем использовать для проведения различных игр, например, игры «Где мое место?». Для этого двум ученикам дается одинаковое количество различных многоугольников (одному синего, другому красного цвета). Побеждает тот, кто правильно и быстро заполнит схему фигурами.

Можно игру провести иначе. Один ученик получает несколько геометрических фигур. Сначала он рассматривает каждую фигуру так, чтобы ее видел весь класс, но не видел партнер по игре. Затем описывает фигуру, называя ее характерные признаки, партнер угадывает ее название и помещает ее на схеме. Основное условие игры: фигуру нужно так описать, чтобы выбор ее места был однозначным. Например, ученик описывает фигуру так: «пять сторон и пять углов» (выбор однозначен - это пятиугольник, он помещается в области «многоугольники»). Далее он предлагает такое описание: «четыре стороны и четыре угла». В этом случае выбор не однозначен. Это может быть любой четырехугольник, либо общий прямоугольник, либо квадрат. Или такое описание: «четыре стороны и все равны» (выбор также не однозначен). Это может быть квадрат или ромб, который можно будет поместить в область «четырехугольники». В процессе такой игры дети начинают осознавать, что такое признаки геометрической фигуры [6].

Традиционное расположение фигур на доске учителем является основой для довольно распространенных среди младших школьниках ошибочных представлений о прямоугольнике (см. Рис. 6.5):

- Форма прямоугольника всегда протяженная (т.е. смежные стороны всегда различны, причём горизонтальная – если она есть – длиннее вертикальной)
- Прямоугольник имеет две длинные стороны и две короткие стороны.

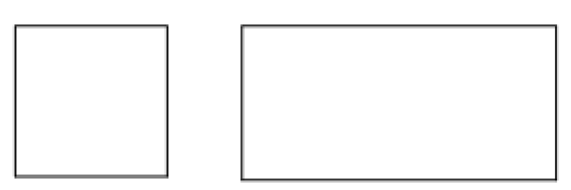
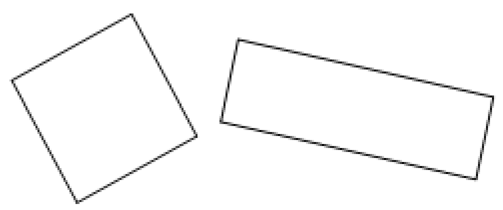
Привычное расположение квадрата и прямоугольника	Непривычное расположение квадрата и прямоугольника
	

Рисунок 6.5

Для ребенка младшего школьного возраста наиболее доступным и продуктивным способом приобретения знаний и умений является собственный практический опыт. Можно провести следующую работу. Учитель раздает детям прозрачную пленку и лист. На пленке имеются контуры четырех фигур: параллелограмма, ромба, квадрата и прямоугольника – достаточно по одному. На альбомном листе изображены по-разному расположенные четырехугольники разных цветов такого же размера, как на пленке. Прикладывая прозрачную пленку, ученик убеждается, что на листе находятся такие же четырехугольники, как и на пленке.

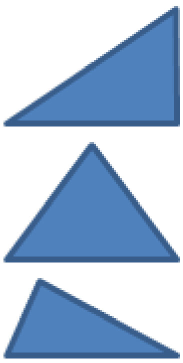
Аналогичную практическую работу можно проделать лишь с одной фигурой – прямоугольником. На листе разбросаны прямоугольники и квадраты. С помощью пленки или модели прямого угла ученик убеждается в том, что все эти фигуры являются прямоугольниками. Далее, пользуясь линейкой, ученик заключает, что некоторые из представленных прямоугольников являются квадратами.

6.2. Уроки GeoGebra

6.2.1. Классификация треугольников

Файл GeoGebra: 6_2_1_классификация_треугольников.ggb

Основные понятия



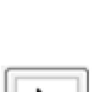
Не все треугольники одинаковые

У них могут отличаться длины сторон. Величины углов треугольника (внутренних углов) тоже могут различаться.

В зависимости от величин углов и сторон можно определить виды треугольников.

Эксперимент и наблюдения - *Часть I. Виды треугольников в зависимости от длин сторон*

С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) установи флажок в контрольном окошке “Часть I. Сравниваем длины сторон”.



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) подцепи и потяни любую из трех вершин (*A*, *B* или *C*) треугольника на странице *GeoGebra*.

При изменении длин сторон треугольник будет получать название одного из следующих видов:

1. Разносторонний треугольник
2. Равнобедренный треугольник
3. Равносторонний треугольник

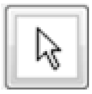
Постарайся получить треугольники всех трех видов. Как ты думаешь, опираясь на проведенные наблюдения, что позволяет определить, к какому виду относится треугольник?

1. Разносторонний треугольник

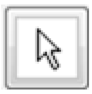
2. Равнобедренный треугольник

3. Равносторонний треугольник

Эксперимент и наблюдения - Часть II. Виды треугольников в зависимости от величины углов



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) сбрось флажок в контрольном окошке “Часть I.” и установи флажок в контрольном окошке “Часть II. Сравниваем величины углов”.



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) подцепи и потяни любую из трех вершин (*A*, *B* или *C*) треугольника на странице *GeoGebra*.

При изменении величин углов треугольник будет получать название одного из следующих видов:

1. Остроугольный треугольник
2. Тупоугольный треугольник
3. Прямоугольный треугольник

Постарайся получить треугольники всех трех видов. Как ты думаешь, опираясь на проведенные наблюдения, что позволяет определить, к какому виду относится треугольник?

1. Остроугольный треугольник

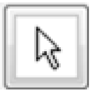
2. Тупоугольный треугольник

3. Прямоугольный треугольник

6.2.2. Классификация четырехугольников

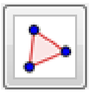
Файл GeoGebra: 6_2_2_классификация_четырехугольников.ggb

Сортировка



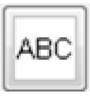
С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) отсортируй многоугольники, перетаскивая их в соответствующие контейнеры.

Построение



В пространстве слева от заполненных контейнеров с помощью инструмента МНОГОУГОЛЬНИК построй новые фигуры, которые можно добавить в каждый из контейнеров:

1) Один прямоугольник
2) Один квадрат
3) Один ромб
4) Один четырехугольник, который не является ни квадратом, ни прямоугольником, ни ромбом
5) Один многоугольник, который не является четырехугольником



Не перетаскивай эти новые фигуры в контейнеры. Вместо этого с помощью инструмента ТЕКСТ надпиши на каждой фигуре ее название:

1) прямоугольник
2) квадрат
3) ромб
4) другой четырехугольник
5) не четырехугольник

Обсуждение

Когда ты закончишь построения и надписывание названий, найди себе в пару товарища, который тоже все закончил и надписал.

Сравните свои сортировки. Вы согласны с результатами друг друга? Если нет, обсудите, как вы решили, в какой контейнер отнести спорный многоугольник.

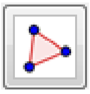
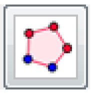
Проверьте друг у друга остальные построенные многоугольники. Согласны ли вы с тем, как они названы?

6.2.3. Правильные многоугольники

Файл GeoGebra: 6_2_3_правильные_многоугольники.ggb

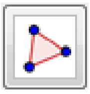
Основные понятия

Многоугольники можно сортировать и классифицировать по разным признакам, например, по числу сторон. Например, все многоугольники с четырьмя сторонами (углами) отнести к четырехугольникам.

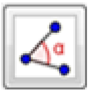
 

В этом задании ты будешь пользоваться инструментом МНОГОУГОЛЬНИК и инструментом ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК.

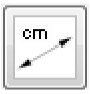
Построение и эксперимент с многоугольником



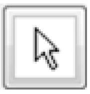
Выбери инструмент МНОГОУГОЛЬНИК. Начав в точке *A*, построй произвольный четырехугольник.



Выбери инструмент УГОЛ. Щелкни где-нибудь в середине четырехугольника. Все углы четырехугольника будут измерены и надписаны.

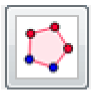


Выбери инструмент РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА. Щелкни на каждой стороне четырехугольника, чтобы измерить их и надписать значения длин всех сторон.

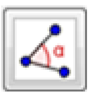


С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) подцепи и подвигай углы своего четырехугольника. Понаблюдай за изменениями размеров углов и сторон.

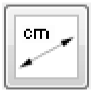
Построение и эксперимент с правильным многоугольником



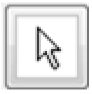
Выбери инструмент ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК. Начав в точке *B*, построй правильный четырехугольник. После того как ты выберешь вторую точку, инструмент спросит тебя, сколько сторон будет в твоем правильном многоугольнике. Оставь установленное значение 4 – для четырехугольника.



Выбери инструмент УГОЛ. Щелкни где-нибудь в середине правильного четырехугольника. Все углы правильного четырехугольника будут измерены и надписаны.



Выбери инструмент РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА. Щелкни на каждой стороне твоего правильного четырехугольника, чтобы измерить их и надписать значения длин всех сторон.



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) подцепи и подвигай углы своего правильного четырехугольника. Понаблюдай за изменениями размеров углов и сторон.

Выводы

Итак, какие свойства многоугольника достаточны для того, чтобы рассматриваемый многоугольник был правильным? Что делает многоугольник “правильным”?

6.3. Методические рекомендации для учителя

Классификация треугольников (урок 6.2.1)

Учебные задачи:

- Ученики должны определять вид треугольника по заданным признакам.
- Ученики должны определять виды треугольников по длине сторон: разносторонний, равнобедренный, равносторонний.
- Ученики должны определять виды треугольников по величине углов: остроугольный, тупоугольный и прямоугольный.

Материалы: Файл GeoGebra 6_2_1_классификация_треугольников.ggb

На странице GeoGebra ученикам дан треугольник, который можно изменять, потянув за вершины, и два контрольных окошка. (Рис. 6.6)

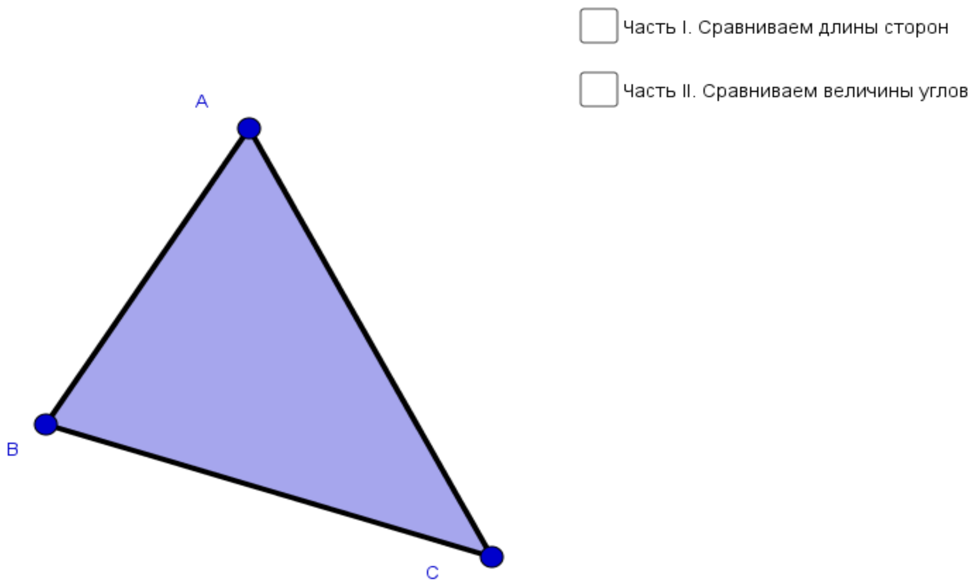


Рисунок 6.6

При установлении флажка в окошке “Часть I. Сравниваем длины сторон” вверху страницы отображается название вида треугольника в зависимости от длин сторон, и это название меняется в соответствии с изображением (Рис. 6.7).

Рисунок 6.7

Отметим, что при появлении надписи “равносторонний треугольник” остается надпись “равнобедренный треугольник”, отражая тот факт, что равносторонний треугольник является частным случаем равнобедренного.

При установлении флажка в окошке “Часть II. Сравниваем величины углов” внизу страницы отображается название вида треугольника в зависимости от величины, и это название меняется в соответствии с изображением (Рис. 6.8).

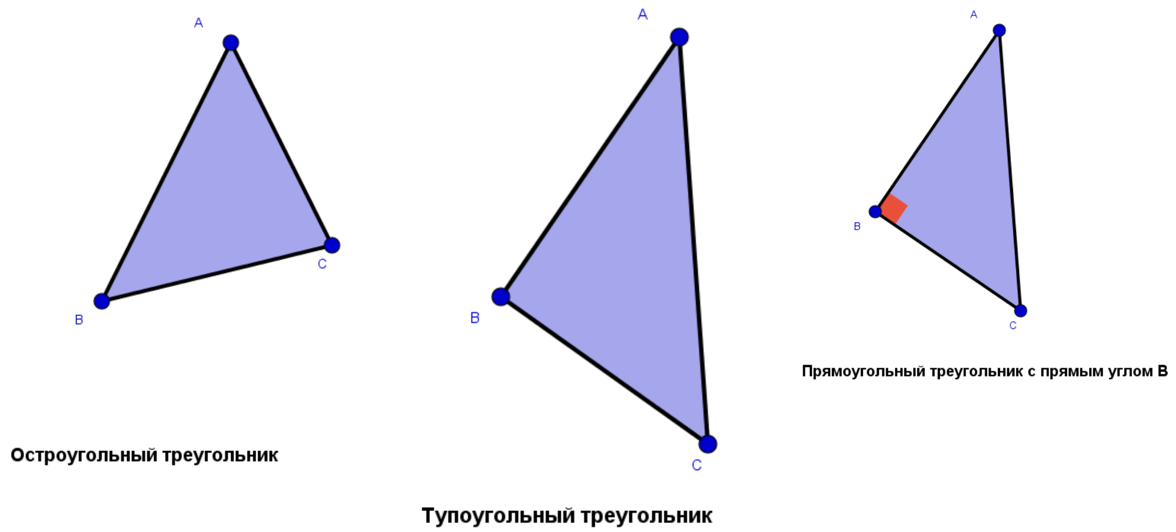


Рисунок 6.8

В этом задании ученикам доступен только инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ.

Цели задания

Цель данного задания – познакомить учеников с различными видами треугольников, в первой части – такими, как разносторонний, равнобедренный и равносторонний, и во второй части – такими, как остроугольный, тупоугольный и прямоугольный.

Когда ученики двигают вершины треугольника *ABC*, в первой части задания они должны наблюдать за изменением в длинах сторон треугольника *ABC*. Во второй части они должны наблюдать за изменением величин углов треугольника *ABC*. Название вида треугольника отображается на странице и меняется динамически при изменении признаков того или иного вида треугольника. На основе наблюдений ученики дают определения разностороннего, равнобедренного и равностороннего треугольников, опираясь на сравнение длин сторон, и остроугольного, тупоугольного и прямоугольного треугольника, опираясь на сравнение величин углов.

В задании GeoGebra используются стандартные математические обозначения для равных длин. Если ученики их еще не изучали, необходимо познакомить их с этими обозначениями перед выполнением задания. Важно также обратить внимание на то, что существует множество способов расположить треугольник какого-либо вида. Дайте ученикам задание найти как можно больше различных треугольников одного вида, например, равнобедренных.

Предполагается, что ученики смогут дать следующие ответы на вопрос: *На основе проведенных наблюдений что, как ты думаешь, определяет попадание треугольника в один из классов?*

Часть I:

1. *Разносторонний треугольник – это треугольник, у которого все стороны различны.*
2. *Равнобедренный треугольник – это треугольник, который имеет хотя бы две равные стороны.*
3. *Равносторонний треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны.*

Часть II.

1. *Остроугольный треугольник – это треугольник у которого все углы острые*
2. *Тупоугольный треугольник – это треугольник, у которого есть тупой угол*
3. *Прямоугольный треугольник – это треугольник, у которого есть прямой угол.*

Наблюдение за разнообразием треугольников одного вида, по-разному ориентированных на странице, должно помочь ученикам в дальнейшем опознавать треугольники этого вида в самых разных задачах. Обратите внимание учеников, что треугольник может быть одновременно прямоугольным и равнобедренным, остроугольным и равносторонним, и т.д. Для проведения наблюдения таких ситуаций, предложите ученикам поставить флажки в оба контрольных окошка. Спросите у учеников, может ли треугольник быть одновременно прямоугольным и равносторонним.

Это задание может использоваться как интерактивное введение в тему «Виды треугольников». Также его можно использовать для отработки терминологии.

Классификация четырехугольников (урок 6.2.2)

Учебные задачи:

- Ученики должны уметь классифицировать четырехугольники на основе их характерных свойств.
- Ученики должны понимать, что признаки, относящиеся к некоторому множеству фигур, также относятся ко всем подмножествам этого множества.
- Ученики должны нарисовать многоугольники данного вида.

Материалы: Файл GeoGebra 6_2_2_классификация_четырехугольников.ggb

В файле ученикам предлагается распределить 18 заданных многоугольников по таблице (см. Рис. 6.9).

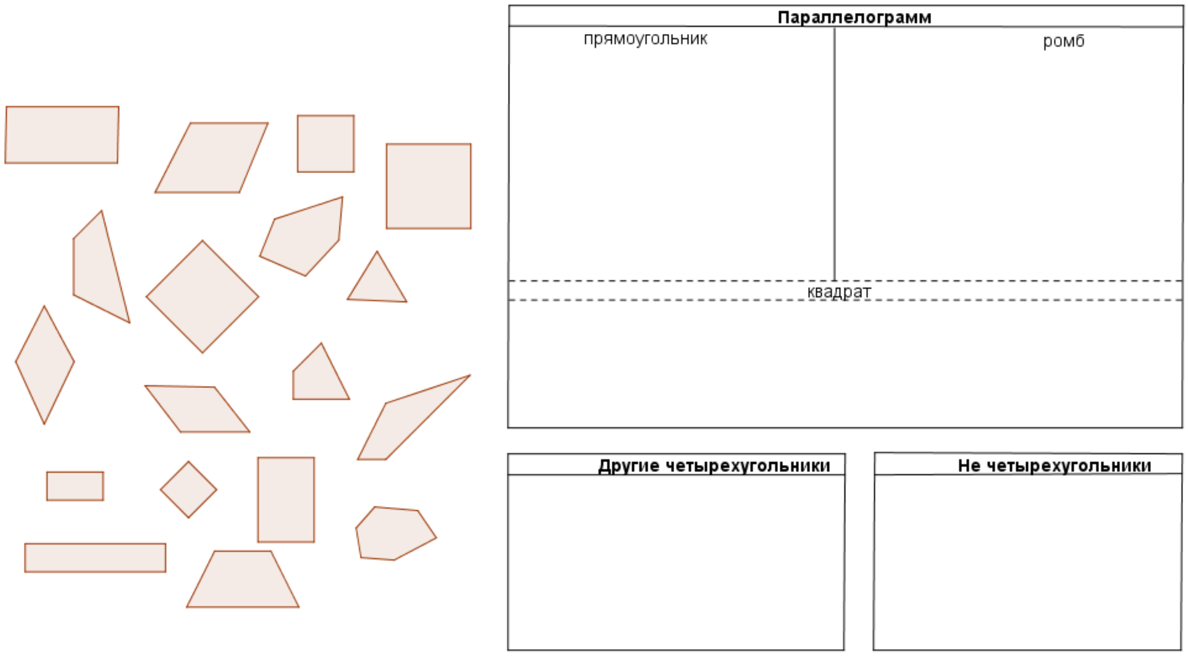


Рисунок 6.9

Выполнять сортировку ученики могут с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ. Кроме того, для построения и надписывания многоугольников им доступны инструменты МНОГОУГОЛЬНИК и ТЕКСТ. Файл настроен таким образом, что точки притягиваются к узлам координатной сетки, что облегчает построение требуемых фигур.

Цели задания

Это задание можно использовать как контрольное. Верхняя таблица посвящена видам параллелограмма. Прямоугольник и ромб являются видами параллелограмма. Фигуры, имеющие признаки и прямоугольников, и ромбов, являются квадратами, например, квадрат – это прямоугольник и квадрат – это ромб. Эта таблица может рассматриваться как аналог кругов Эйлера, где левая и правая области представляют различия между прямоугольниками и ромбами, а нижняя представляет их сходство. Ученикам нужно объяснить устройство таблицы, прежде чем они начнут сортировку. Еще две области отведены для других четырехугольников и для фигур, не являющихся четырехугольниками.

Требуемая сортировка приведена на Рис. 6.10. Учитель может на основе ответов учеников выявить наличие у учеников неверных представлений об отношениях между четырехугольниками.

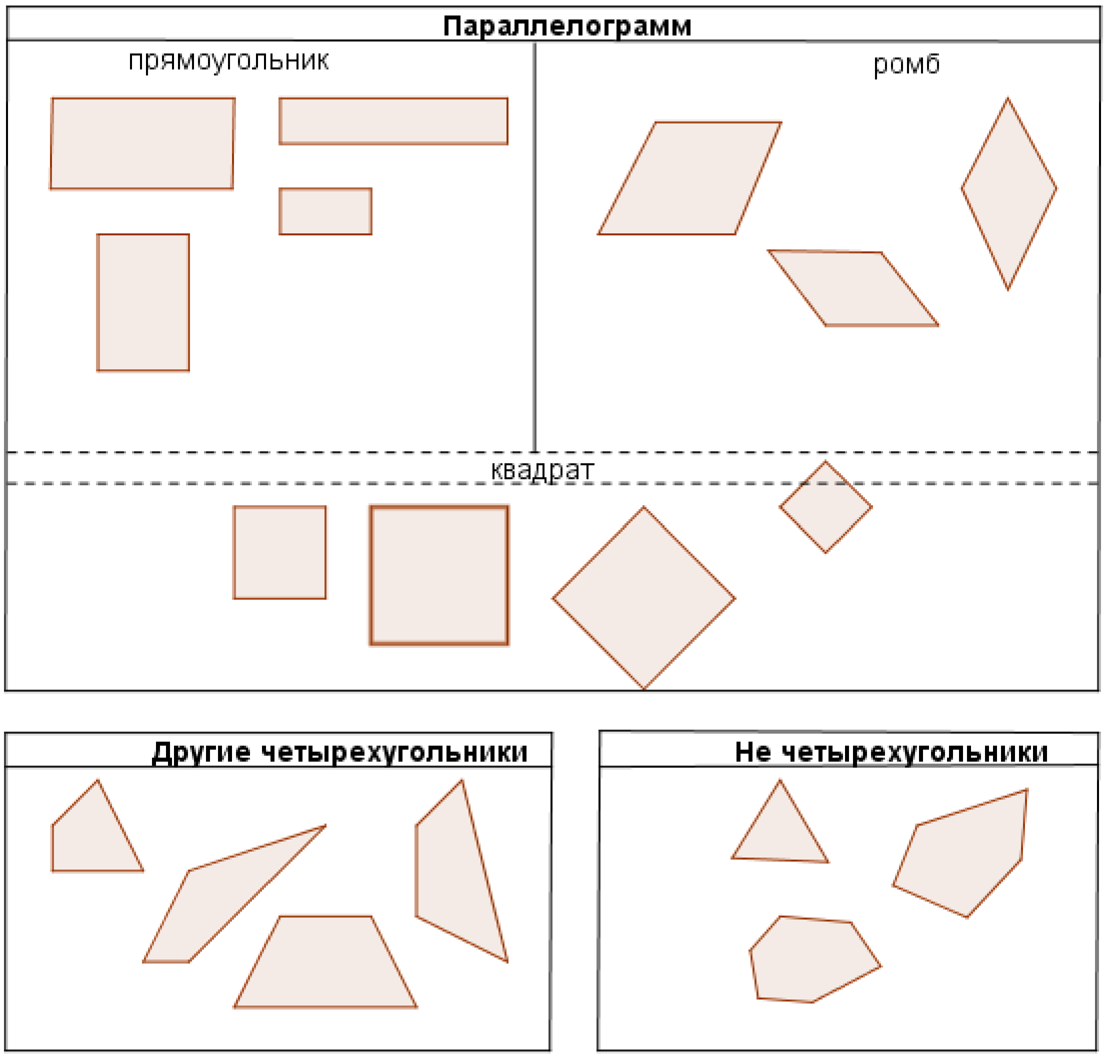


Рисунок 6.10

Во второй части задания ученикам предлагается построить и надписать следующие фигуры. Скажите ученикам, что созданные ими фигуры должны отличаться от тех, которые они распределяли в таблицу.

1) Один прямоугольник
2) Один квадрат
3) Один ромб
4) Один четырехугольник, который не является ни квадратом, ни прямоугольником, ни ромбом
5) Один многоугольник, который не является четырехугольником

Пример выполнения задания приведен на Рис. 6.11.

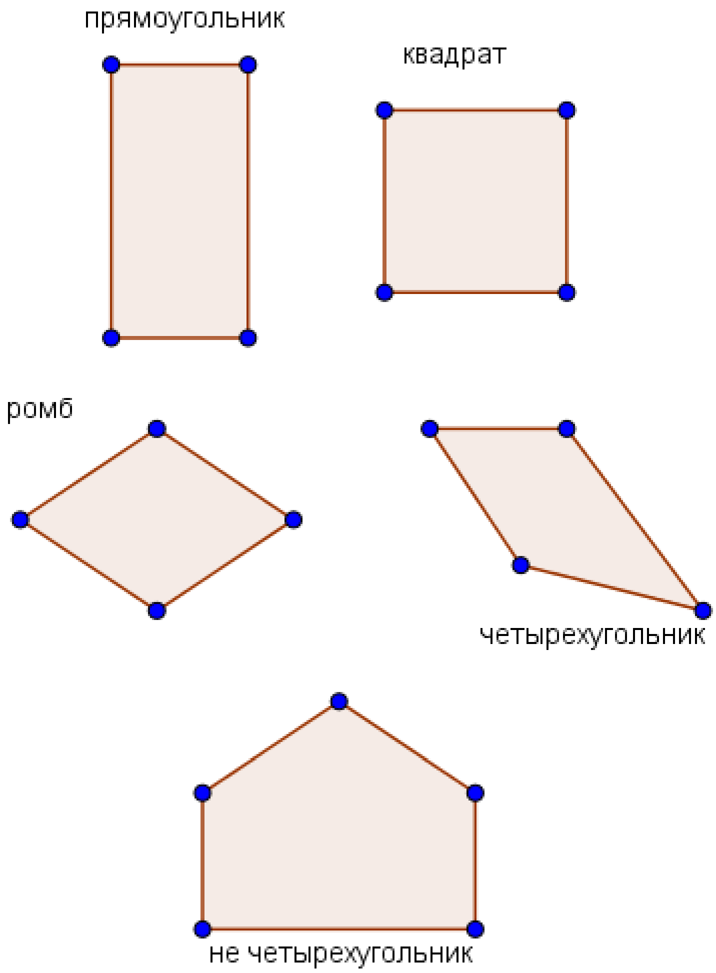


Рисунок 6.11

Это задание предполагает обсуждение работы в парах. Эта форма проверки полезна для учеников, т.к. учит критически рассматривать работы друг друга и находить аргументы для защиты своей работы.

Правильные многоугольники

Учебная задача:

- Ученики должны понять, что у правильного многоугольника равные стороны и равные углы.

Материалы: Файл GeoGebra 6_2_3_правильные_многоугольники.ggb

Файл GeoGebra содержит две точки, A и B, которые зафиксированы. Чтобы произвести все построения и измерения в этом задании, ученикам предоставлены следующие инструменты: МНОГОУГОЛЬНИК и ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК для построения, УГОЛ и РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА для измерений и инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ для манипулирования построенными фигурами.

Цели задания

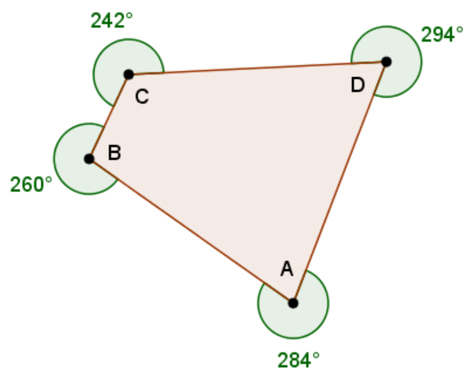
В этом задании ученики знакомятся с понятием «правильный многоугольник» на примере четырехугольника. Это задание на исследование. С помощью инструментов МНОГОУГОЛЬНИК и ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК ученики строят два четырехугольника и затем находят у них сходства и различия, чтобы определить, что делает многоугольник «правильным».

Так как задание опирается на использование нескольких инструментов, важно, чтобы ученики познакомились и попрактиковались в использовании этих инструментов до выполнения задания. Центром внимания при выполнении данного задания должна быть не техника выполнения построений и измерений, а математика.

Заметки касательно построения и измерений:

1. Ученики должны размещать вершины многоугольника в направлении против часовой стрелки. В этом случае будут измеряться углы фигуры. Если они будут размещать точки по часовой стрелке, по умолчанию инструмент УГОЛ измерит наружные углы (см. Рис. 6.12).

Расстановка вершин по часовой стрелке – неверно



Расстановка вершин против часовой стрелки – верно

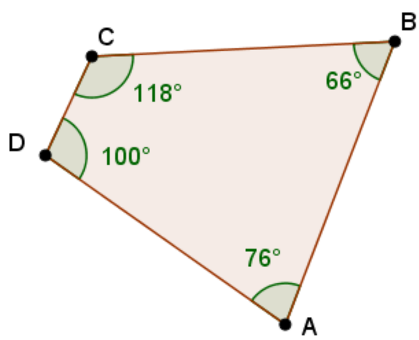


Рисунок 6.12

2. Если величины углов и обозначения вершин наползают друг на друга, ученики должны переместить надписи, чтобы им было удобно наблюдать за изменениями в величинах углов, когда они будут изменять форму фигуры.
3. Инструмент УГОЛ позволяет измерить все четыре угла одним щелчком во внутренней области четырехугольника. Если так же применить инструмент РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА, то мы получим периметр фигуры. Чтобы получить значения длин сторон, нужно щелкнуть на каждой стороне по очереди.
4. В случае ошибок в построении или измерениях порекомендуйте ученикам использовать инструмент УДАЛИТЬ, а не ОТМЕНИТЬ. Так они смогут удалить только неправильные измерения или построения, не проходя последовательно по всем шагам, которые они произвели.
5. Когда используется инструмент ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК, для управления фигурой доступны только две вершины, которые можно перемещать. Это начальная точка *B* и первая точка, которую ученик поставил, взяв этот инструмент. Эти подвижные точки по умолчанию выделяются синим цветом.

Пример возможного построения с нанесенными измерениями показан на Рис. 6.13.

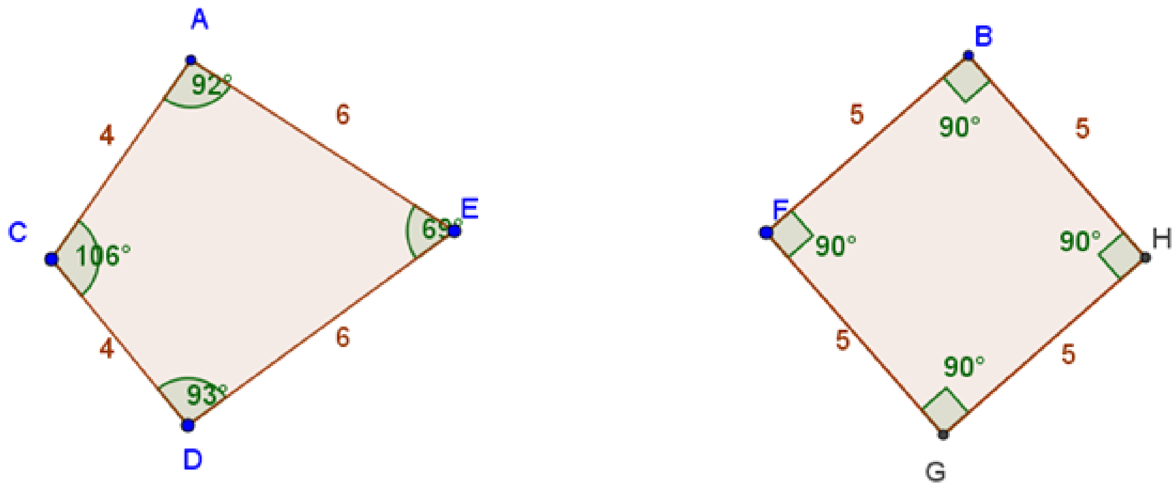


Рисунок 6.13

Предполагается, что по мере того, как ученики перемещают вершины каждой из фигур и наблюдают за длинами сторон и величинами углов, они смогут прийти к заключению о том, что делает многоугольник «правильным». Ожидаемый ответ: правильный многоугольник имеет равные стороны и равные углы.

Учитель может предложить ученикам попробовать построить другие фигуры, чтобы проверить, верно ли заключение, к которому они пришли. Можно разбить учеников на небольшие группы и дать каждой группе различные фигуры: треугольник, пятиугольник, шестиугольник и т.д. Это поможет ученикам распространить свои заключения на другие по виду многоугольники.

7. Осевая симметрия

7.1. Ключевые идеи и основные понятия

Слово *симметрия* имеет греческое происхождение и означает *соразмерность* или *согласованность размеров.* Симметрия существует как в природе, так и в искусственном мире (Рис. 7.1).

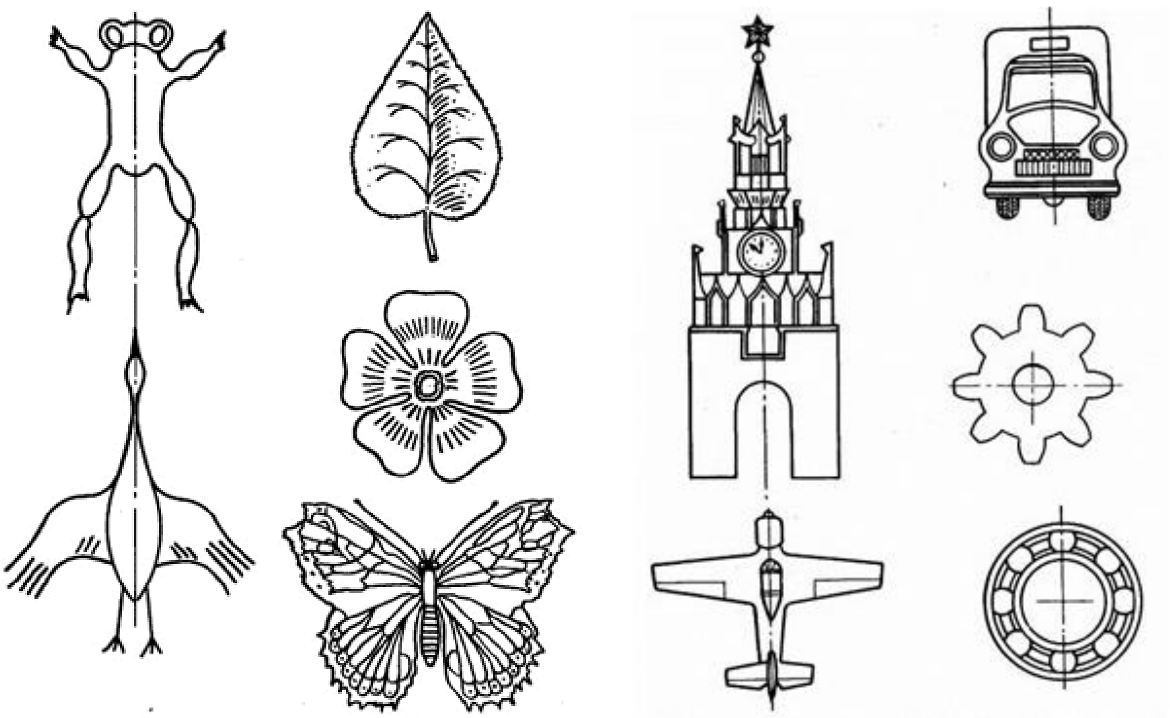


Рисунок 7.1

В геометрии, фигура обладает симметрией, если существует нетождественное движение этой фигуры, при котором образом фигуры является сама фигура. [11, с.84]. Виды симметрий, возможных для геометрической фигуры, зависят от вида геометрических преобразований. В начальной школе учащиеся знакомятся с осевой симметрией (на плоскости). Именно этой симметрией обладают изображенные на Рисунке 7.1 предметы.

Осевая симметрия – это симметрия относительно прямой, которую называют осью симметрии. Рассмотрим фигуры F_1 и F_2 и прямую a (Рис. 7.2). Если рисунок перегнуть по прямой a, то фигуры совместятся.

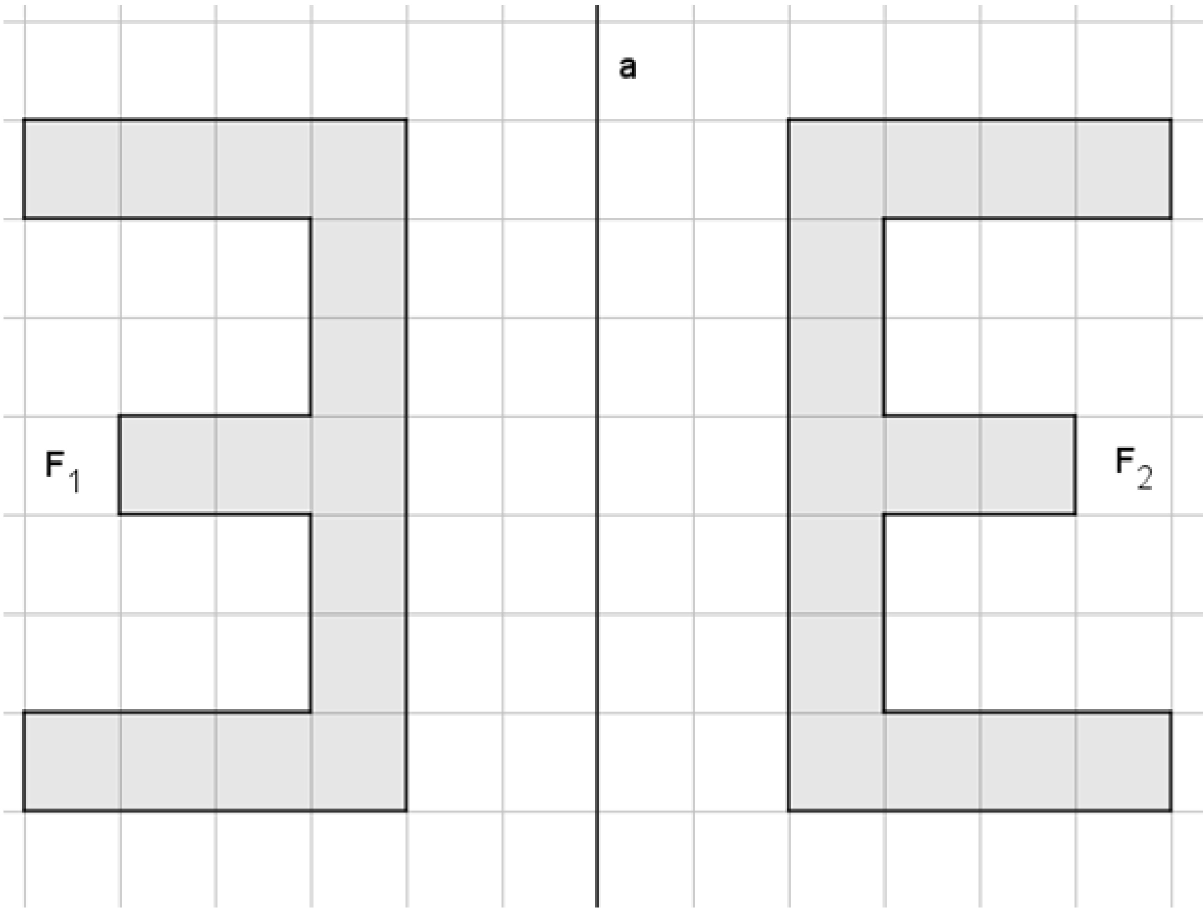


Рисунок 7.2

Такие фигуры называют *симметричными относительно прямой a*. На Рисунке 7.3 показана та же фигура F_1 и прямая b. Если рисунок перегнуть по прямой b, то одна половина фигуры совместится с другой ее половиной.

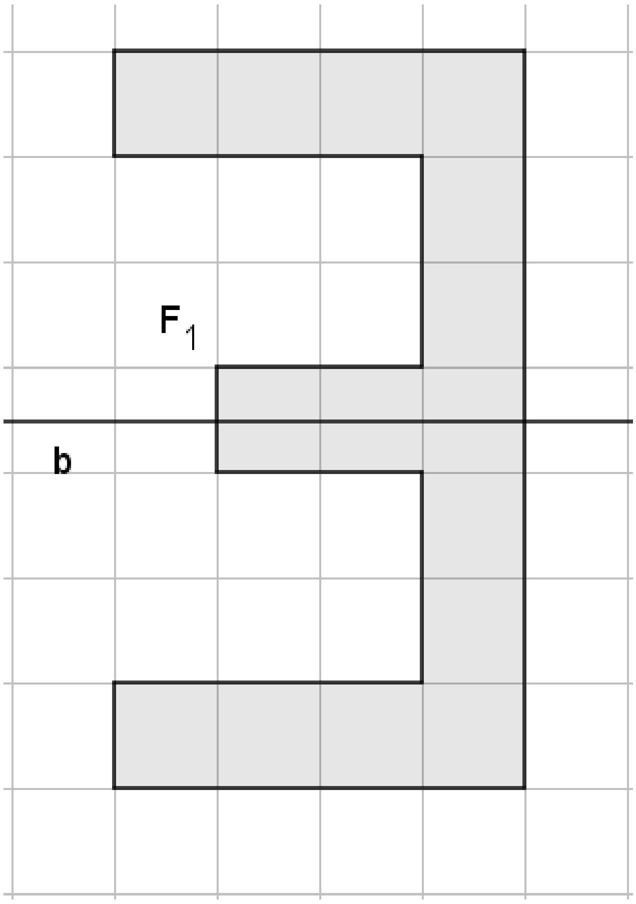


Рисунок 7.3

Такую фигуру называют *симметричной относительно прямой b*. Симметричность относительно прямой присуща многим геометрическим фигурам. Равнобедренный треугольник симметричен относительно прямой, проведенной через середину его основания и противолежащую основанию вершину (Рис. 7.4а). Прямоугольник общего вида имеет две оси симметрии (Рис. 7.4б), квадрат имеет четыре оси симметрии (Рис. 7.4в), а круг имеет бесконечно много осей симметрии – любую прямую, проходящую через центр круга (Рис. 7.4г).

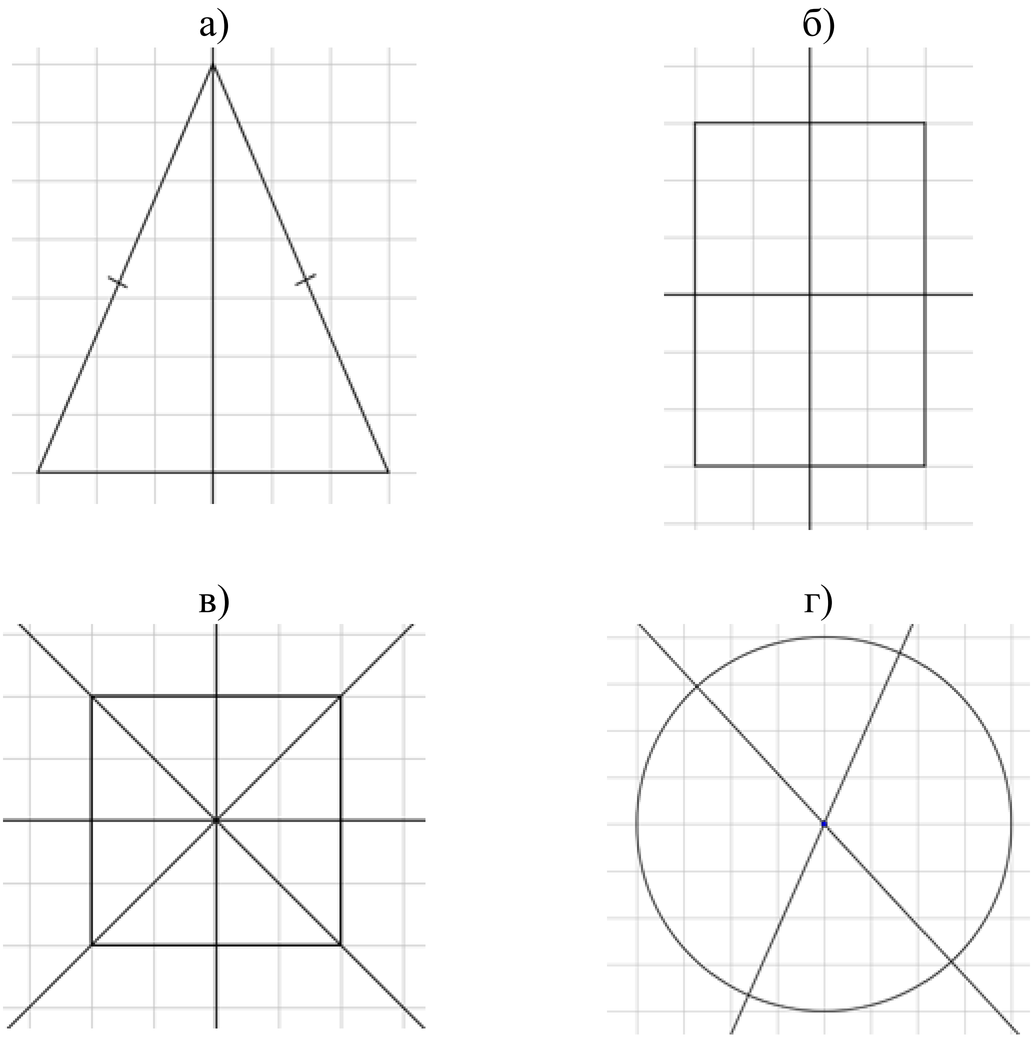


Рисунок 7.4

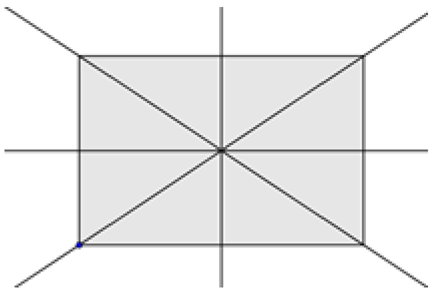


Рисунок 7.5

Учащиеся иногда находят больше осей симметрии, чем существует на самом деле. Например, в прямоугольнике на рисунке 7.5 ученик ошибочно выделил диагонали прямоугольника как оси симметрии. Такой выбор основан на примитивном понимании, что ось симметрии делит фигуру пополам.

Данная проблема легко устранима при помощи подручных средств или компьютерных технологий. Предложите ученикам вырезать из бумаги прямоугольник и согнуть его по каждой прямой, которую они обозначили как ось симметрии. Если после сгибания одна часть прямоугольника совместится с другой ее частью, то ось симметрии найдена верно. При сгибе по диагонали ученики убедятся, что части прямоугольника в этом случае не совпали (Рис. 7.6)

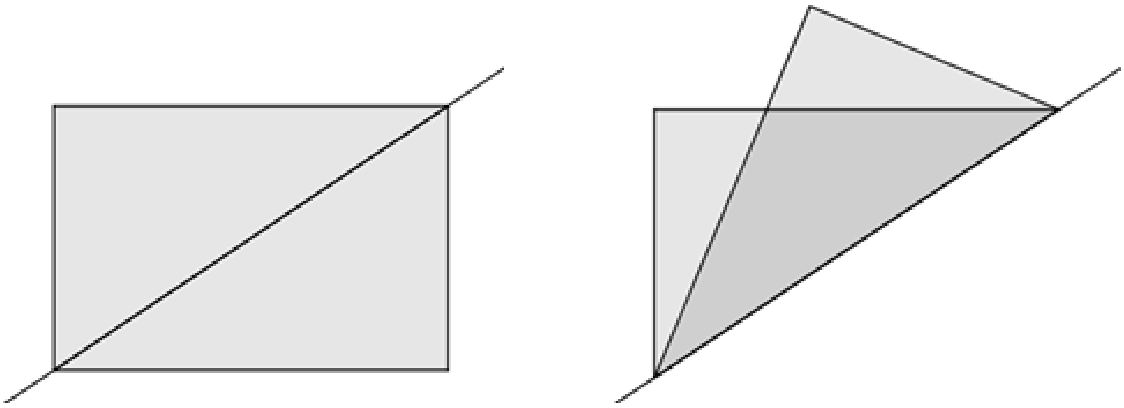
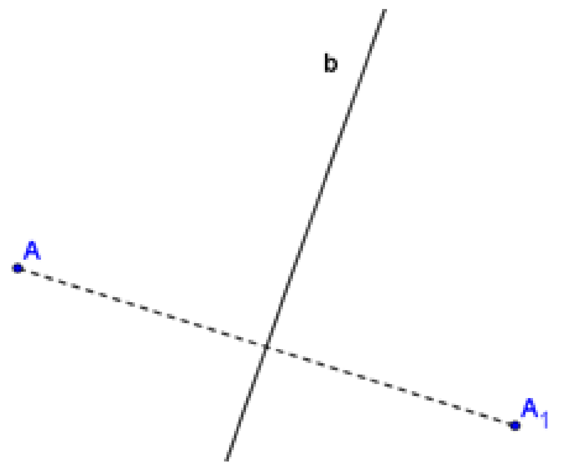
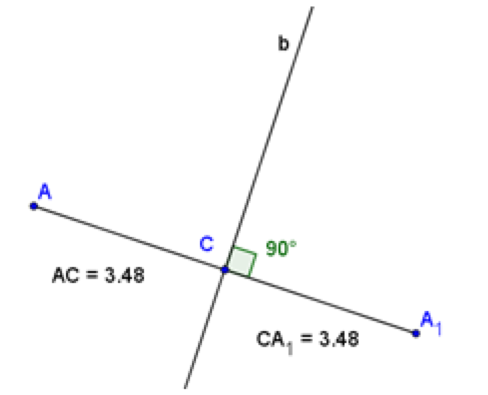
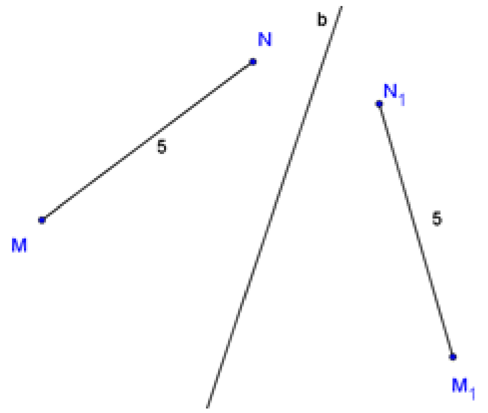
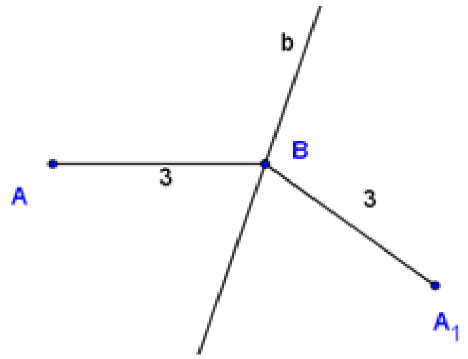
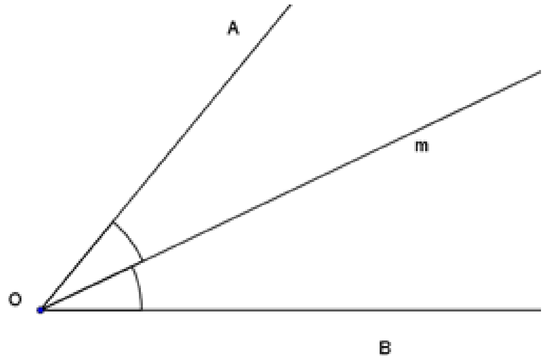


Рисунок 7.6

Альтернативным средством в решении этой проблемы являются компьютерные технологии, именно, программы динамической геометрии. Например, рисунок 7.6 выполнен в программе GeoGebra используя инструмент ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ.

В заключение сформулируем главные свойства осевой симметрии. Этот материал не входит в программу начальной школы, но полезен для учителей, чтобы лучше знать, к чему они готовят своих учеников.

• Для любой точки плоскости всегда можно построить симметричную ей точку относительно некоторой прямой.	

• Отрезок, соединяющий симметричные точки, перпендикулярен оси симметрии и делится ею пополам	
• Если отрезок MN симметричен отрезку M_1N_1 относительно прямой b, то они равны.	
• Если точка A_1 симметрична точке A относительно прямой b, то для любой точки B на этой прямой отрезки A_1B и AB равны.	
• Биссектриса угла лежит на его оси симметрии	

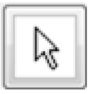
• При осевой симметрии относительно прямой, точки, лежащие на этой прямой, переходят в себя.
• В результате осевой симметрии остаются неподвижными как сама ось симметрии, так и любая прямая, ей перпендикулярная.

7.2. Уроки GeoGebra

7.2.1. Осевая симметрия

Файл GeoGebra: 7_2_1_осевая _симметрия.ggb

Основные понятия

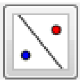


С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) установи флажок в контрольном окошке “Показать отрезки”.

Представь себе, какие фигуры получились бы, если бы ты сделал точную копию к каждому изображению и приставил ее вплотную к нему вдоль оранжевой пунктирной линии. Другой способ представить это – представить отражение каждой из фигур в зеркале, приставленном вдоль ее оранжевой пунктирной линии.

GeoGebra позволяет построить такие отражения.

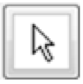
Построение отражений



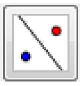
Выбери инструмент ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ.

Чтобы воспользоваться этим инструментом, сначала щелкни на красной фигуре, а затем щелкни точно на оранжевой пунктирной линии, примыкающей к красной фигуре.

С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) щелкни в контрольном окошке, чтобы *выключить* оранжевые пунктирные линии. Теперь ты видишь новую красную фигуру, созданную отражением исходной красной фигуры относительно прямой.

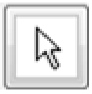


С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) еще раз щелкни в контрольном окошке, чтобы *включить* оранжевые пунктирные линии.



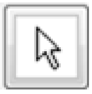
Теперь с помощью инструмента ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ построй отражения остальных пяти фигур. Перед тем как проделать это, попытайся вообразить, какой будет каждая фигура.

Где здесь геометрия?



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) *выключи* в контрольном окошке оранжевые пунктирные линии. Теперь ты видишь все свои новые фигуры, созданные отражением относительно прямой.

Каждая из этих новых фигур имеет свойство, которое в геометрии называется ***симметрией***.



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) еще раз щелкни в контрольном окошке, чтобы *включить* оранжевые пунктирные линии.

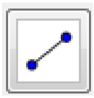
Эти оранжевые пунктирные линии называются ***осью симметрии*** каждой из новых фигур.

7.2.2. Нахождение оси симметрии

Файл GeoGebra: 7_2_2_нахождение_оси_симметрии.ggb

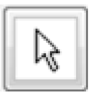
Рисуем оси симметрии

Каждая из этих фигур имеет <u>единственную</u> ось симметрии.



С помощью инструмента ОТРЕЗОК нарисуй для каждой фигуры предполагаемую ось симметрии.

Проверка работы



Когда ты нарисуешь оси симметрии для всех фигур, с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) щелкни в контрольных окошках, чтобы проверить свои результаты.

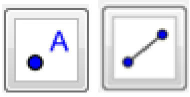
7.2.3. Дополнить фигуру

Файлы GeoGebra: 7_2_3_дополнить_фигуру1.ggb, 7_2_3_дополнить_фигуру2.ggb, 7_2_3_дополнить_фигуру3.ggb, 7_2_3_дополнить_фигуру4.ggb, 7_2_3_дополнить_фигуру5.ggb

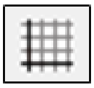
Основные понятия
На странице *GeoGebra* представлены два объекта:
1. Ось симметрии
2. Половина симметричной фигуры

Задача
По данной половине фигуры и оси симметрии достроить вторую половину фигуры.

Указания

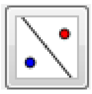


Используй для построения недостающей половины фигуры инструменты ТОЧКА и ОТРЕЗОК.



<u>*Подсказка*</u>: Выполнить задание будет значительно проще, если перед выполнением ты включишь СЕТКУ.

Проверка построения



После завершения построения проверь свое решение с помощью инструмента ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ. Выбрав этот инструмент, щелкни по исходной фигуре и затем по оси симметрии. Инструмент ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ создаст недостающую половину фигуры.

Проверь, совпадает ли твое построение с недостающей половиной фигуры.

7.3. Методические рекомендации для учителя

Осевая симметрия (урок 7.2.1)

Учебные задачи:

- Ученики должны построить отражение плоской фигуры относительно прямой.
- Ученики должны понимать, что ось симметрии плоской симметричной фигуры является прямой, такой, что при сгибании фигуры вдоль этой прямой получившиеся части совместятся.

Материалы: Файл GeoGebra 7_2_1_осевая_симметрия.ggb

На странице GeoGebra ученики видят 6 двумерных фигур и контрольное окошко, которое включает отображение осей отражения, когда установлен флажок (Рис. 7.7).

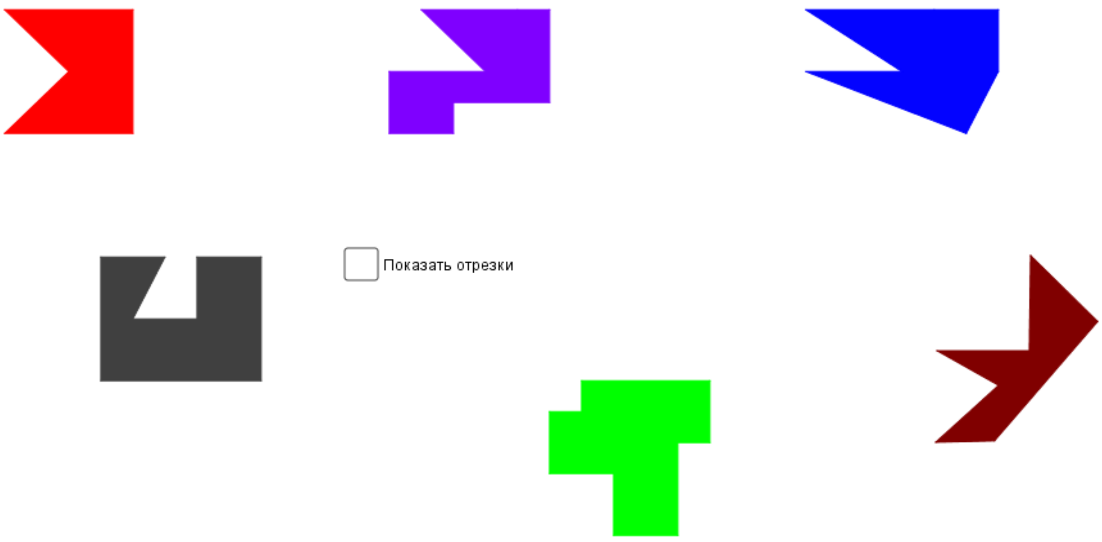


Рисунок 7.7

В этом задании ученикам доступны следующие инструменты: ПЕРЕМЕЩАТЬ, ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ и УДАЛИТЬ.

Цели задания

Цель данного задания – познакомить учеников с понятиями осевой симметрии и оси симметрии. Это задание можно использовать для пробуждения интереса и введения в тему «осевая симметрия». Установка флажка в контрольном окошке вызовет отображение оранжевой линии (см. Рис. 7.8).

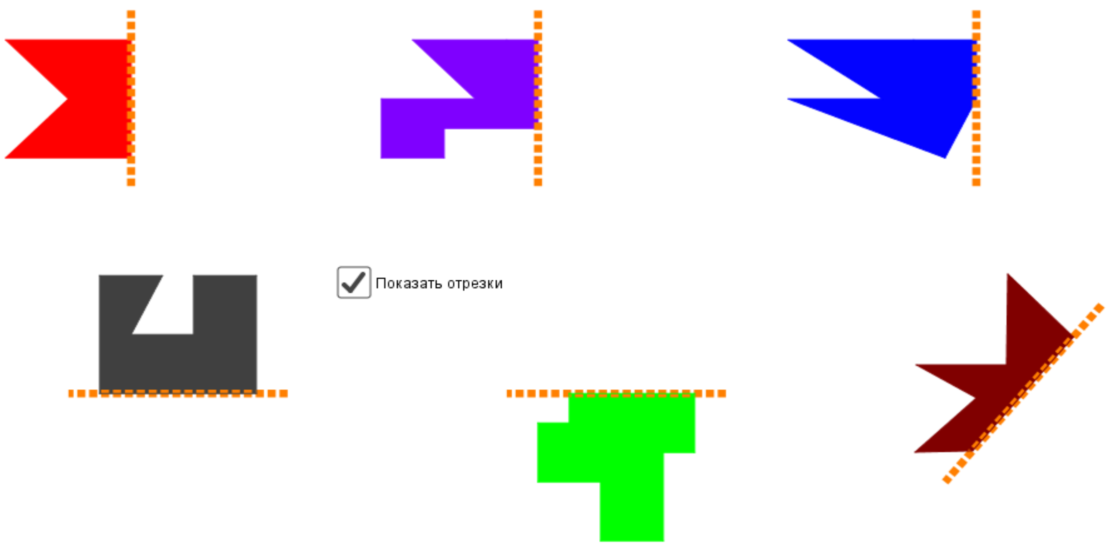


Рисунок 7.8

Затем вы просите учеников представить, что фигура была согнута вдоль этой оранжевой линии и они видят только половину исходной фигуры. Нужно узнать, какова была исходная фигура. Перед тем как выполнять задание GeoGebra, учитель может попросить учеников нарисовать на бумаге, как они себе представили эту фигуру. И только после этого допустить учеников к выполнению задания на компьютере.

Чтобы воспроизвести «пропавшую» часть фигуры, в этом задании ученики должны использовать инструмент ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ. Для каждой фигуры ученики должны выполнить отражение фигуры и сравнить результат со своими предварительными рисунками. Если сбросить флажок, оранжевая линия исчезнет. Рисунок 7.9 показывает, как должна выглядеть страница после того, как все отражения были построены и оси симметрии скрыты.

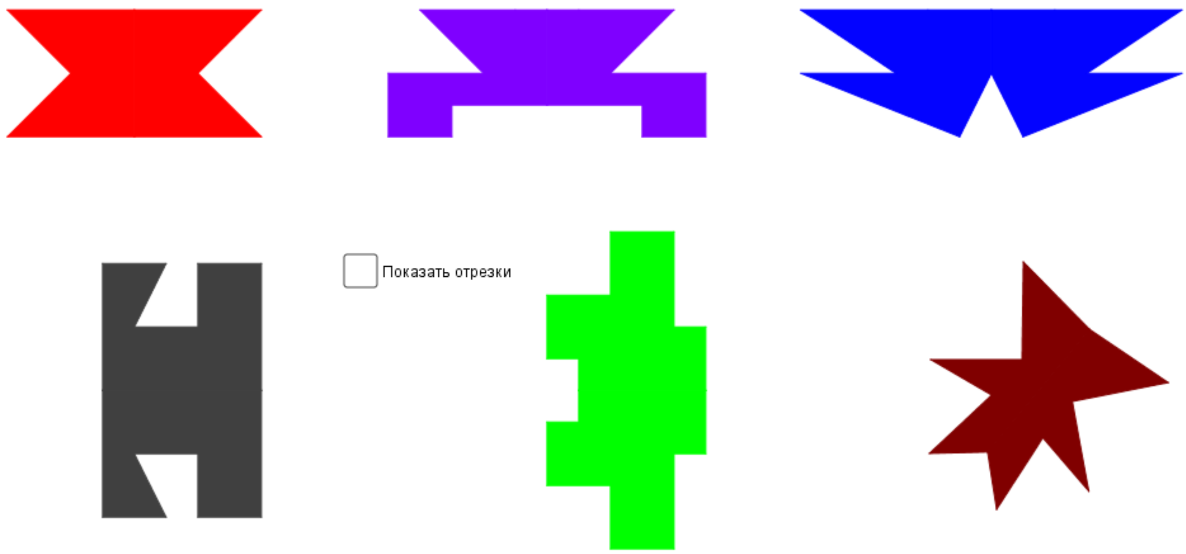


Рисунок 7.9

Задание должно завершаться обсуждением симметрии, организованным учителем. Дайте ученикам осознать, что все фигуры перед ними имеют *ось симметрии.* Учитель может распечатать заранее эти фигуры и раздать их ученикам, чтобы они проверили наличие симметрии, согнув их на совмещающиеся друг с другом части. Ученики могут сравнить положение сгиба с положением оранжевых пунктирных линий на странице GeoGebra. Это может привести к обсуждению *оси симметрии* и введению этого понятия для учеников.

Нахождение оси симметрии (урок 7.2.2)

Учебные задачи:

- Ученики должны понимать ось симметрии плоской симметричной фигуры является прямой, такой, что при сгибании фигуры вдоль этой прямой получившиеся части совместятся.
- Ученики найдут ось симметрии заданных фигур.

Материалы: Файл GeoGebra 7_2_2_нахождение_оси_симметрии.ggb

В файле ученикам представлены 6 фигур, имеющих ось симметрии. Рядом с каждой фигурой есть контрольное окошко; если установить в нем флажок, то отобразится соответствующая ось симметрии (Рис. 7.10).

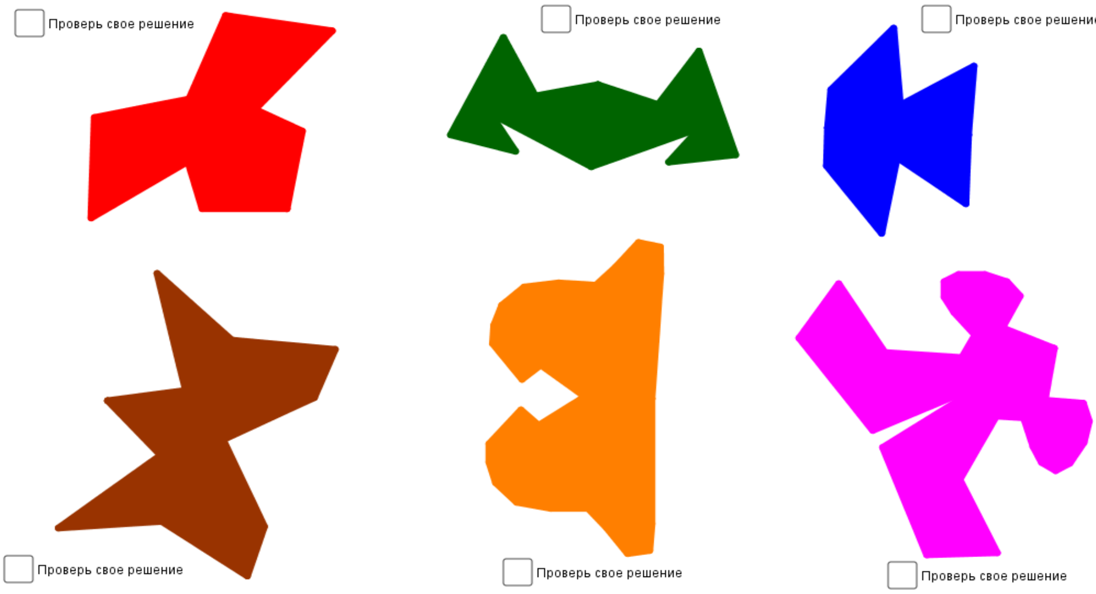


Рисунок 7.10

В этом задании ученики имеют доступ к инструментам ПЕРЕМЕЩАТЬ и ОТРЕЗОК. При необходимости они могут использовать инструмент УДАЛИТЬ.

Цели задания

В этом задании ученики с помощью инструмента ОТРЕЗОК рисуют ось симметрии каждой из фигур. Затем они устанавливают флажки в контрольных окошках, чтобы проверить свои результаты. Возможный результат работы ученика представлен на Рис. 7.11.

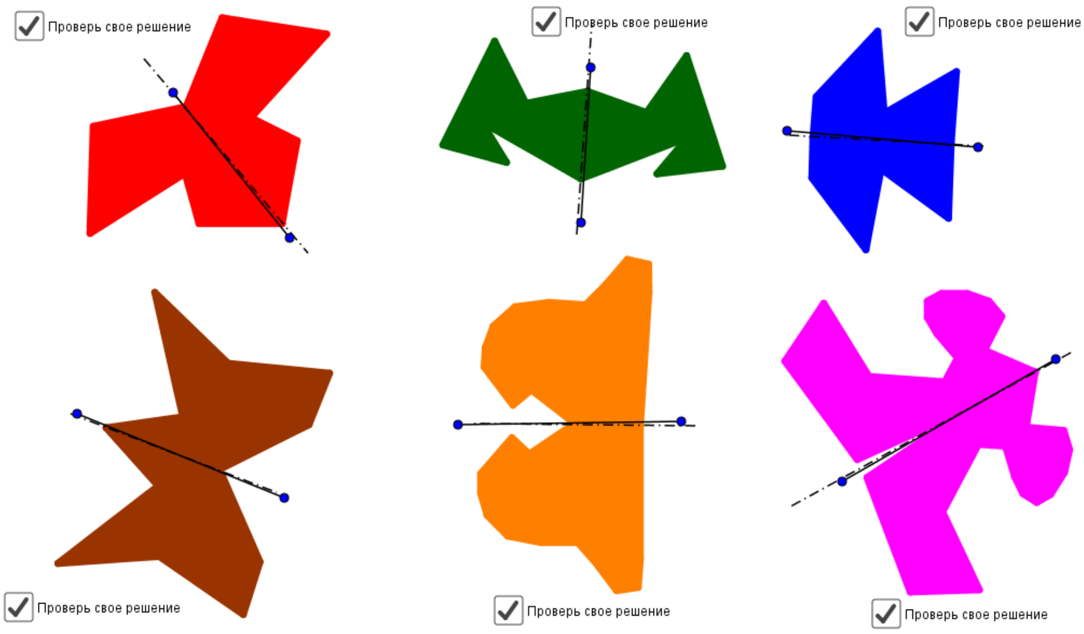


Рисунок 7.11

Это задание можно использовать и как игру, и как подведение итогов. Во втором случае ученики уже должны быть знакомы с понятиями осевой симметрии и оси симметрии.

Иначе это задание можно использовать для пробуждения интереса и введения в тему «осевая симметрия». В этом случае учитель может заранее подготовить вырезанные из бумаги фигуры, чтобы ученики получили возможность дополнительной проверки перед построением оси симметрии на компьютере. Это позволит ученикам прийти к пониманию симметрии через сгибание и вслед за этим поможет им подойти к понятию оси симметрии.

Дополнить фигуру (урок 7.2.3)

Учебная задача:

- Ученики строят половину симметричной фигуры по заданным второй половине и оси симметрии

Материалы: Файлы GeoGebra: 7_2_3_дополнить_фигуру1.ggb, 7_2_3_дополнить_фигуру2.ggb, 7_2_3_дополнить_фигуру3.ggb, 7_2_3_дополнить_фигуру4.ggb, 7_2_3_дополнить_фигуру5.ggb

Задание состоит из пяти файлов. В каждом файле на странице GeoGebra имеется два объекта:

1. Ось симметрии.
2. Половина симметричной фигуры.

Фигуры в разных файлах разные (см. Рис. 7.12).

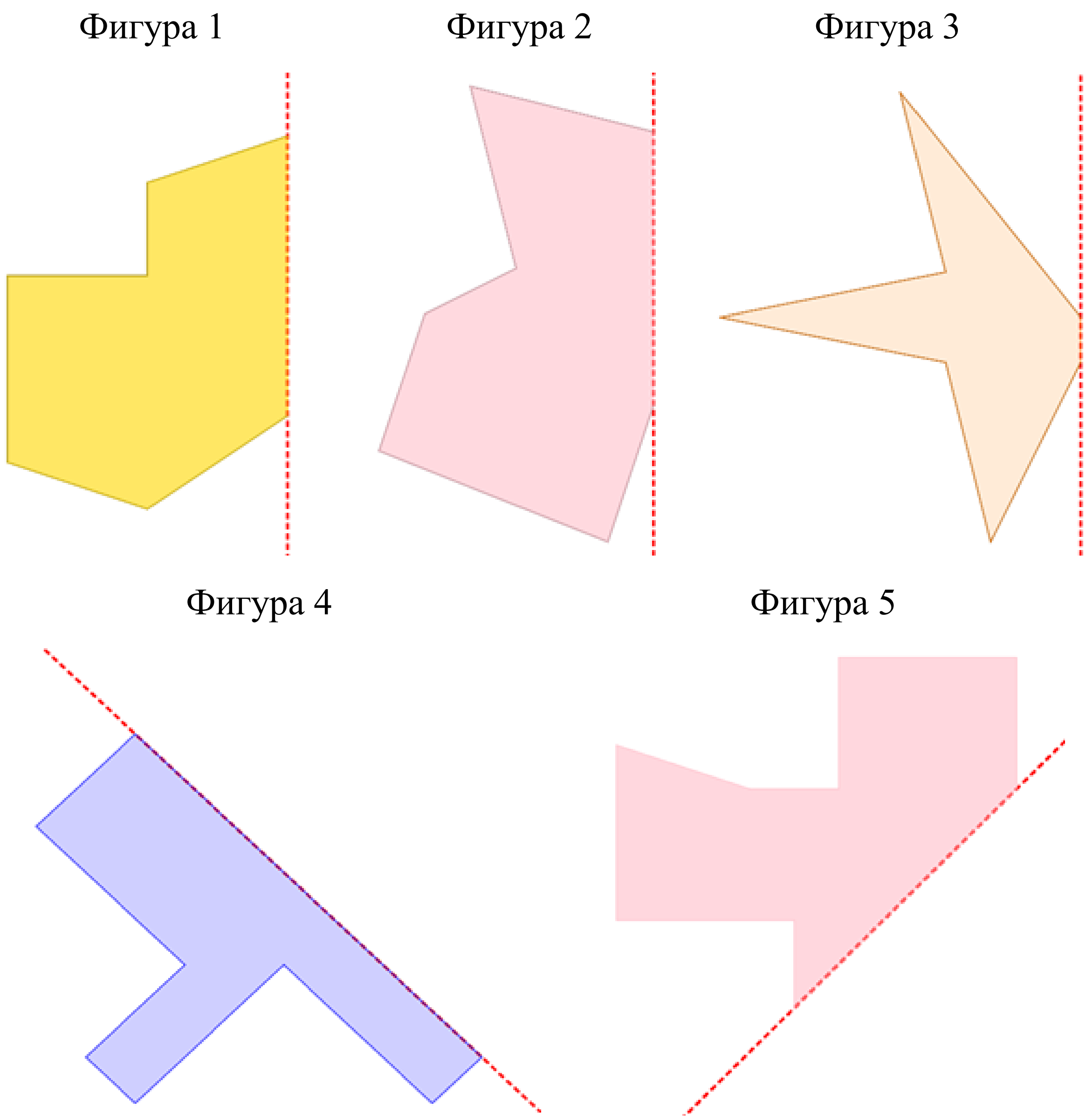


Рисунок 7.12

Цели задания

В этом задании ученики должны построить недостающую половину фигуры по заданной оси симметрии и половине фигуры с помощью инструментов ТОЧКА и ОТРЕЗОК. Чтобы было удобнее, они также могут включить СЕТКУ. Учитель может продемонстрировать выполнение задания на одном из файлов, а затем дать ученикам работать с остальными четырьмя фигурами.

Также учитель может раздать разные фигуры разным ученикам. Обратите внимание, что фигуры 4 и 5 для учеников более сложные, чем фигуры 1–3, из-за того, что ось симметрии не проходит горизонтально или вертикально.

Когда ученики закончат построения, они могут с помощью инструмента ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ проверить свои результаты. В качестве иллюстрации на рисунке 7.13 приведено правильно построенное изображение для фигуры 2. Рисунок 7.14 представляет пример неверного построения для фигуры 5, отражающее одну из распространенных ошибок, которые могут допускать ученики при построении относительно «наклоненной» оси симметрии.

Ученическое построение с использованием точек и отрезков для фигуры 2

Отраженный рисунок полностью совпадает с рисунком, построенным учеником для фигуры 2

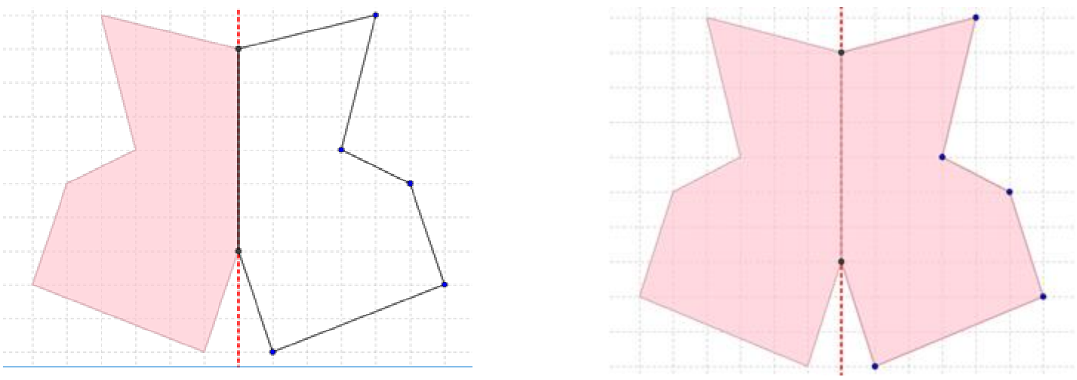


Рисунок 7.13

Ученическое построение для фигуры 5, иллюстрирующее одну из распространенных ошибок

Отраженный рисунок для фигуры 5 не совпадает с ученическим построением

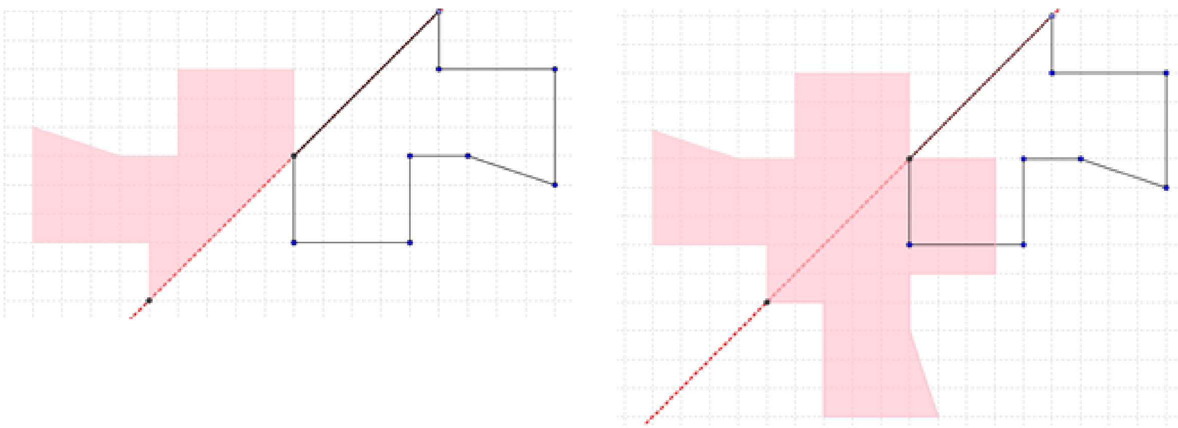


Рисунок 7.14

Целью данного задания является выявить, насколько ученики понимают, что означает, что фигура симметрична, и что такое ось симметрии. Это задание подходит для завершения темы, когда ученики уже понимают, что при осевой симметрии симметричные точки лежат на равном расстоянии от оси симметрии.

8. Объем

8.1. Ключевые идеи и основные понятия

В повседневной жизни нам часто приходится определять объемы различных емкостей. В житейской практике единицами объема служили меры емкости, используемые для хранения сыпучих и жидких материалов. Объемы различных сосудов можно сравнивать, наполняя один из них водой и переливая ее в другие сосуды или пересыпая определенное количество песка в коробки различных размеров.

В геометрии понятие объема в пространстве вводится аналогично понятию площади для фигур на плоскости. **Объемом фигуры** называется положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемого фигурой, и обладающая следующими свойствами:

- Равные фигуры имеют равные объемы; при движении фигуры ее объем не изменяется, фигуры с равными объемами называются *равновеликими*;
- если фигуру разбить на части, являющиеся простыми фигурами, то объем исходной фигуры равен сумме объемов ее частей;
- за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины.

В начальной школе мы ограничиваемся изучением объема прямой прямоугольной призмы. Прямая прямоугольная призма называется также прямоугольным параллелепипедом. В качестве физической модели прямой прямоугольной призмы можно взять закрытую коробку. Сравним объемы двух прямых прямоугольных призм при помощи вложения одной призмы в другую. Если возможно, что одна призма полностью поместилась в другой, то в этом случае мы говорим, что объем вложенной призмы меньше объема исходной призмы.

Однако, возможна ситуация, когда ни одна призма не помещается в другую. Возникает вопрос о том, как сравнивать их объёмы. Для иллюстрации этой ситуации можно взять две открытые коробки, представляющие равновеликие призмы, но заметно отличающиеся размерами ребер (Рис. 8.1), и поставить вопрос о том, какая из них имеет больший объем.

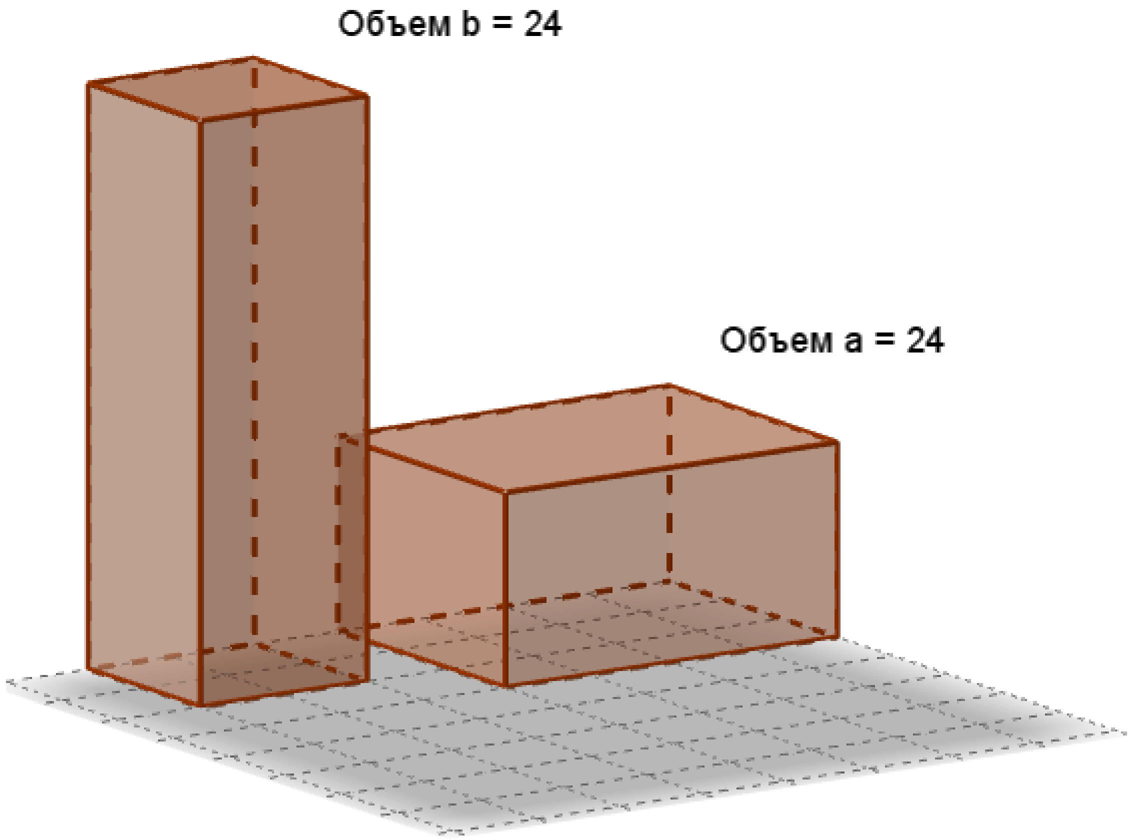


Рисунок 8.1

Напомним, что у каждой величины свои единицы измерения: длина измеряется в единицах длины, площадь – в квадратных единицах. За единицу измерения объема принимается объем куба, у которого длина ребра равна единицы длины. Такой куб называется единичным. Число единичных кубов, которыми можно заполнить прямую прямоугольную призму равно объему призмы, измеренному в кубических единицах.

В качестве практического задания, можно воспользоваться заранее изготовленными коробками, такими, чтобы в них уложилось целое количество кубических единиц[4]. Учащиеся измеряют их объем при помощи заполнения единичными кубами. Желательно, чтобы ученики, пользуясь набором кубических единиц, сложили бы из кубических единиц брусок, из брусков — слой, из слоев — прямую прямоугольную призму. (Рис. 8.2).

---

[4] Материал частично заимствован с сайта http://www.kaknauchit.ru (дата обращения: 07.07.2017).

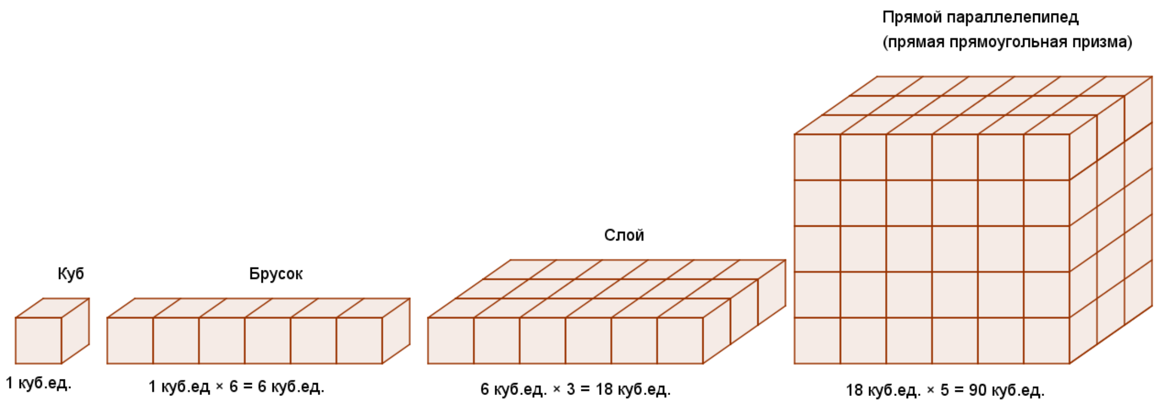


Рисунок 8.2

Далее можно использовать процедуру *разрезания* предмета *на кубические единицы*. Покажем разрезание прямой прямоугольной призмы на чертежах. Рисунок 8.3а показывает призму, в которой выделен верхний слой. Рисунок 8.3б служит для того, чтобы показать ту же призму, но с одним отделенным слоем.

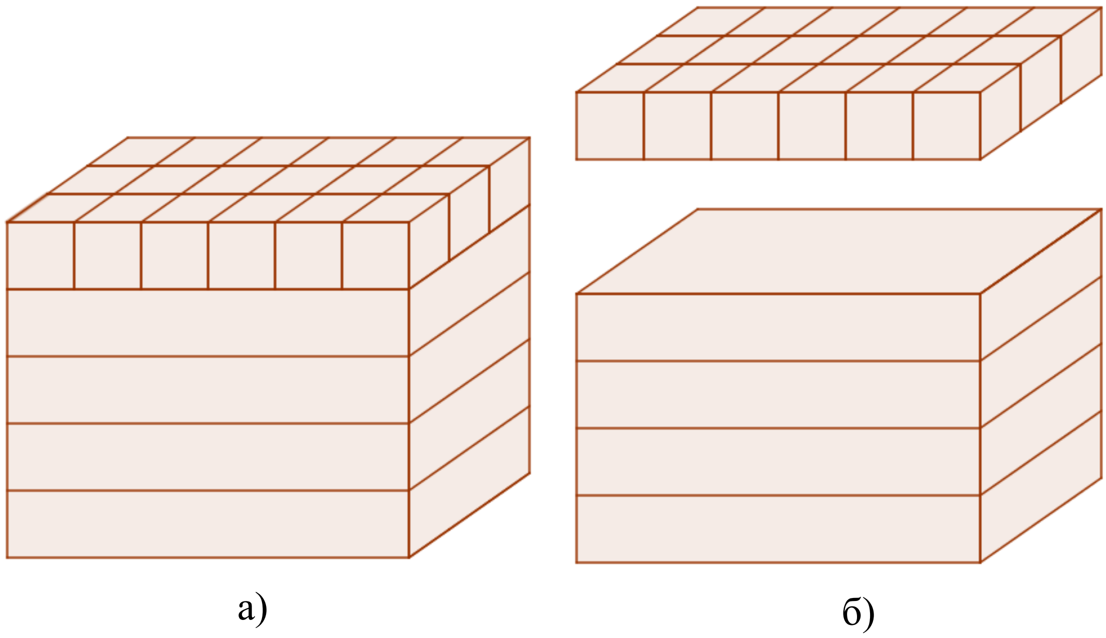
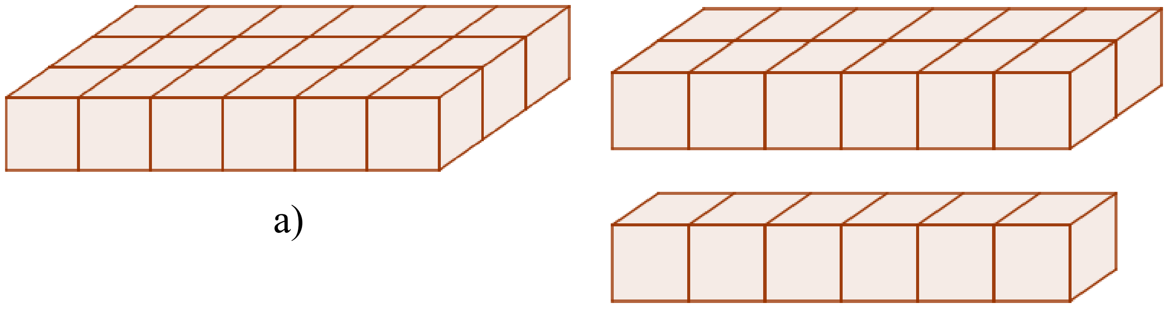


Рисунок 8.3

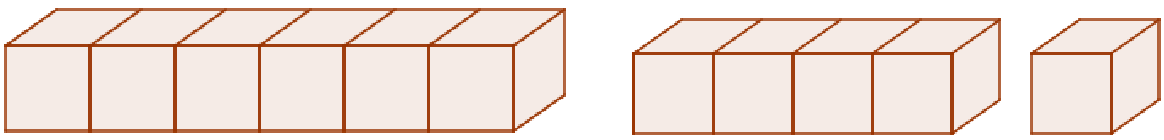
По данному рисунку легко установить число слоев и связать его с высотой призмы. Затем берем один слой (рис. 8.4а) и отделяем от него один брусок (рис. 8.4б).



а) б)

Рисунок 8.4

На этом рисунке видно число брусков в одном слое, и это надо связать с шириной основания призмы.



а) б)

Рисунок 8.5

Далее берем один брусок (рис. 8.5а) и отделяем один единичный кубик (рис. 8.5б), установив связь количества кубических единиц в одном бруске с длиной основания призмы. Теперь уже нетрудно восстановить ход рассуждений в обратном порядке и определить количество кубических единиц в призме путем перехода от бруска к слою и от одного слоя к числу слоев.

Итак, подготовительная работа закончена, надо перейти к выводу **способа для вычисления объема** прямой прямоугольной призмы. Стоит подвергнуть критике способ заполнения тела кубическими единицами как неудобный, а практически зачастую и невыполнимый. (Но именно он лежит в основе теории при конструктивном определении объема. Кроме того, он аналогичен работе с площадью.)

Объяснение протекает примерно так. Учитель заполняет открытую коробку кубическими единицами. Затем снимаются все слои призмы, кроме нижнего, а в одном из углов оставляется один столбик, при помощи которого можно подсчитать количество слоев (рис. 8.6).

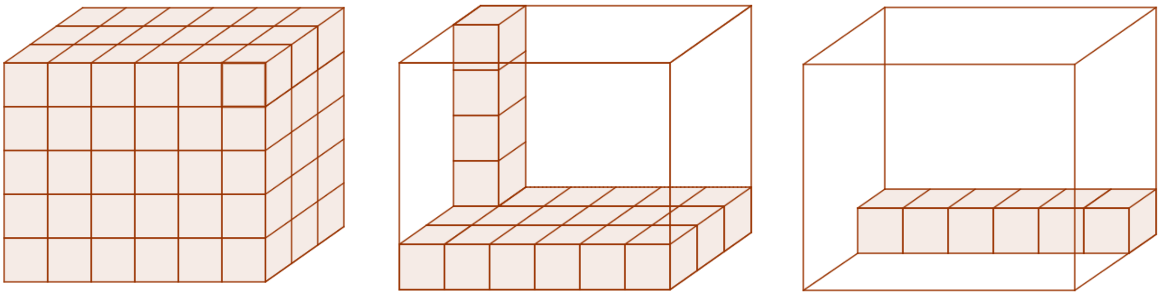


Рисунок 8.6

Затем учитель подводит учеников к выводу, что измерение ширины укажет число брусков, а измерение длины — число кубических единиц в бруске.

В результате формулируется **способ вычисления объема** прямой прямоугольной призмы: *чтобы вычислить объем прямой прямоугольной призмы, можно измерить ее длину, ширину и высоту одной и той же единицей длины и полученные числа перемножить. В произведении получим число, выражающее в кубических единицах объем призмы.*

Обратим внимание учителя, что проделанную выше работу можно осуществить и в программе GeoGebra. Соответствующие задания приведены в уроках этой главы.

8.2. Уроки GeoGebra

8.2.1. Единичный куб и объём

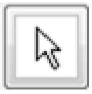
Файл GeoGebra: 8_2_1_единичный_куб_объем.ggb

Основные понятия

Некоторые фигуры относятся к трехмерным. Один из способов сравнивать их размеры – сравнивать их *объемы*. Объем можно измерить с помощью единичного куба. Каждое ребро единичного куба имеет длину, равную единице длины. Реально единицей может быть сантиметр, дециметр, метр или километр, – какая единица будет более подходящей.

Про пространственную, или трехмерную, фигуру, которую можно заполнить без зазоров и перекрытий с помощью X единичных кубов, говорят, что она имеет объем X кубических единиц. Например, если пространственная фигура или контейнер вмещает 5 единичных кубов, то говорят, что ее объем равен 5 кубических единиц.

Практическое задание



Потренируйся двигать единичный куб с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ. Каждый единичный куб отмечен красной точкой. Для перемещения единичных кубов зацепи за эту точку и перетащи куб на новое место.

Измерения

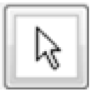
Выясни, сколько единичных кубов потребуется для заполнения каждого из пяти контейнеров. Запиши полученные результаты в таблицу данных.

Таблица данных	
Контейнер	*Объем в куб. ед.*
красный	
синий	
зеленый	
черный	
лиловый	

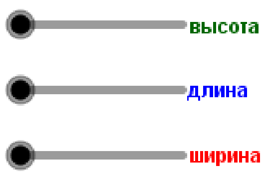
8.2.2. Выведи формулу объема прямой прямоугольной призмы

Файл GeoGebra: 8_2_2_вывод_формулы_объема.ggb

Изменение объема



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ подвигай ползунки, которые управляют изменениями высоты, длины и ширины прямой прямоугольной призмы.

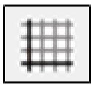


Поэкспериментируй с различными настройками, чтобы понаблюдать, как меняется размер и форма призмы.

Задание и проверка

С помощью ползунков установи следующие значения:

высота = 3 единицы, длина = 1 единица, ширина = 3 единицы



Сетка поможет тебе определить объем этой прямоугольной призмы. Заметь, что для заполнения призмы потребуется 9 единичных кубов, поэтому объем равен 9 кубическим единицам.

Сбор данных

Данные для первой призмы уже внесены в твою таблицу данных. Теперь создай еще четыре различные прямые прямоугольные призмы и заполни оставшиеся строки в таблице данных.

Таблица данных				
Эксперимент	*Высота в единицах*	*Длина в единицах*	*Ширина в единицах*	*Объем в кубических единицах*
1	3	1	3	9
2				
3				
4				
5				

Поиск закономерности

Ты заметил закономерность? Как ты можешь вычислить объем прямой прямоугольной призмы без использования сетки?

8.2.3. Нахождение объема

Файл GeoGebra: 8_2_3_объем.ggb

Основные понятия

Трехмерные фигуры в реальном мире обычно имеют более сложную форму, чем прямые прямоугольные призмы. Здания, например, часто представляют собой комбинации прямых прямоугольных призм. Простая формула вида

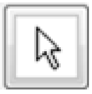
Объем = высота × ширина × длина

не работает для вычисления объема этих сложных фигур.

Посмотри на красную, синюю и зеленую фигуры на странице *GeoGebra*. Представь, что эти фигуры – проекты новых трех зданий. Архитекторы и строители должны учитывать объем здания при расчете таких параметров, как кондиционирование и обогрев. Чем больше объем здания, тем больше воздуха требуется охлаждать или нагревать.

В этой задаче каждый единичный куб будет представлять объем здания, для обслуживания которого требуется один обогреватель. Требуется узнать, сколько обогревателей необходимо иметь для наших новых зданий.

Заполнение таблицы данных



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ найди объем каждого здания, расставляя по нему обогреватели, которые ты подцепишь за красную точку и перетащишь на место так, чтобы заполнить полностью все здание. Когда закончишь работу, заполни таблицу данных.

Таблица данных	
Здание	*Требуется обогревателей*
красное	
синее	
зеленое	

Существует ли более простой способ?
Можем ли мы найти объем зданий, используя формулу

Объем = высота ✗ ширина ✗ длина?

Представь себе, что каждое здание составлено из прямых прямоугольных призм. Где ты нарисуешь линии для отделения составляющих здание прямых прямоугольных призм?

После того как ты попытался придумать, как можно было бы решить эту задачу, щелкни в контрольном окошке, чтобы увидеть некоторые возможные способы это сделать.

Теперь как мы можем найти объем и число обогревателей для каждого здания без того, чтобы двигать единичные кубы или считать по сетке? Как мы можем использовать формулу

Объем = высота ✗ ширина ✗ длина?

Опиши свой метод:

8.3. Методические рекомендации для учителя

Единичный куб и объем (урок 8.2.1)

Учебные задачи:

- Ученики должны понимать объем как характеристику пространственных фигур
- Ученики должны объяснить, что объем фигур равен числу единичных кубов, которых можно в него вложить без просветов и перекрытий, закрыв его полностью
- Ученики должны вычислить объем подсчетом единичных кубов

Материалы: Файл GeoGebra 8_2_1_единичный_куб_объем.ggb

В файле представлены 5 различных прямых прямоугольных призм. Изображения этих фигур построены из четырехугольников. Эти изображения зафиксированы и не могут быть изменены (Рис. 8.7).

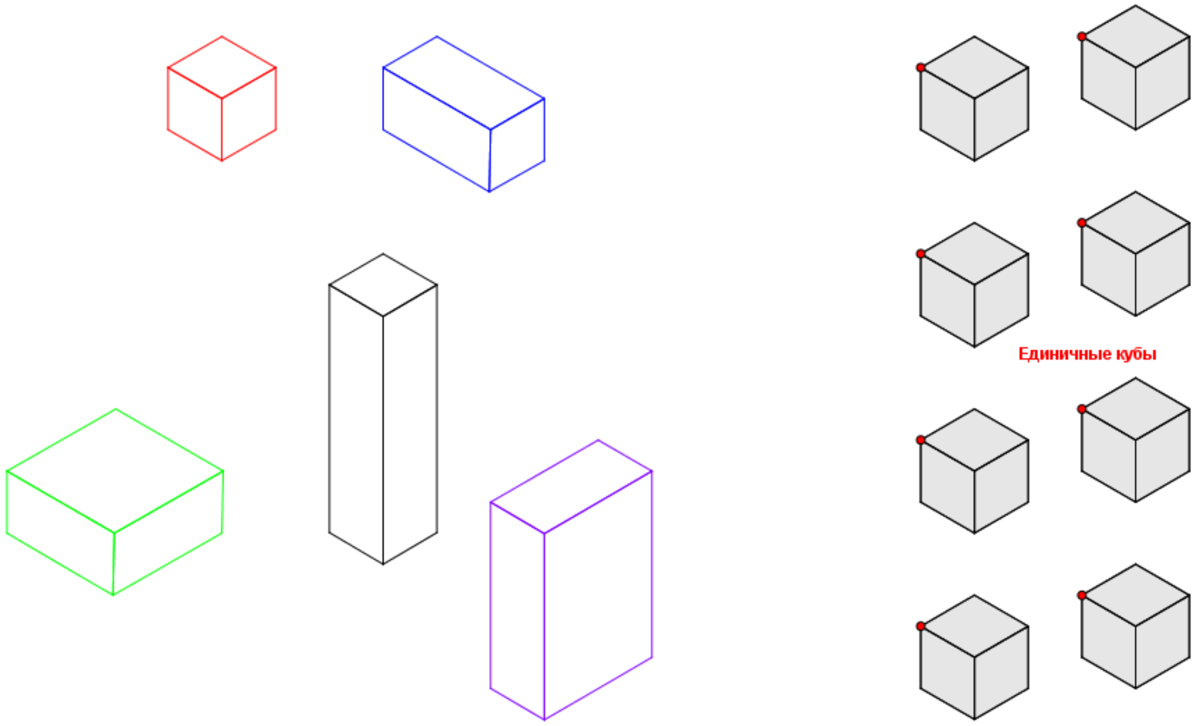


Рисунок 8.7

На странице также есть набор из 8 единичных кубов для вычисления объемов. На каждом единичном кубе есть красная точка, за которую ученики могут подцепить и перетащить единичный куб. Файл настроен так, что красные точки притягиваются к узлам скрытой решетки, чтобы обеспечить точное размещение единичных кубов. Ученики имеют доступ к инструменту ПЕРЕМЕЩАТЬ, который позволяет им передвигать единичные кубы для определения объема каждого тела.

Цели задания

Цель данного задания – познакомить учеников с понятием объема. Объем измеряется с помощью единичных кубов. Единичный куб определен как куб, ребра которого имеют длину в 1 единицу. Поэтому объем определяется как число единичных кубов, которыми можно заполнить фигуру без просветов и перекрытий. Сначала ученики практикуются в перемещении единичного куба с помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ. Для вычисления объема им нужно заполнить каждую из фигур единичными кубами (см. Рис. 8.8).

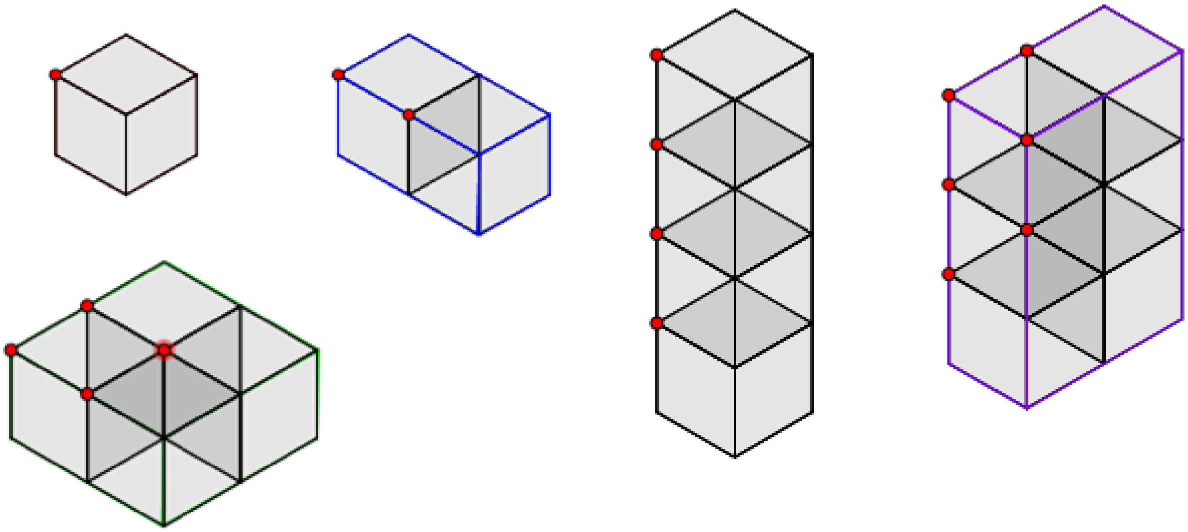


Рисунок 8.8

Ответы приведены в следующей таблице.

Таблица данных	
Тело	*Объем в куб. ед.*
красное	1
синее	2
зеленое	4
черное	4
лиловое	8

Объем – сложное понятие для учеников. Его понимание требует наличия у учеников пространственного мышления, которое у многих детей не развивается при изучении ими курса математики в начальной школе. Очень важно, чтобы компьютерные задания, подобные этому, были дополнены учебными материалами для работы руками (кубики, прямоугольные коробки, и т.д.)

Выведи формулу объема прямой прямоугольной призмы (урок 8.2.2)

Учебные задачи:

- Ученики должны связать вычисление объема с операцией умножения
- Ученики должны вывести формулу объема прямой прямоугольной призмы

Материалы: Файл GeoGebra 8_2_2_вывод_формулы_объема.ggb

На странице GeoGebra ученикам дан куб, который они могут преобразовать в разные прямые прямоугольные призмы с помощью ползунков (Рис. 8.9).

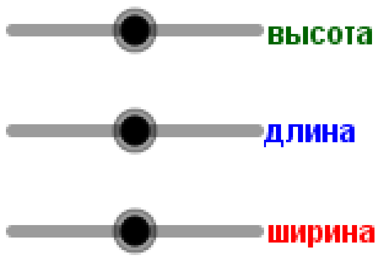


Рисунок 8.9

Ползунки позволяют изменять высоту, длину и ширину призмы в целых единицах от 1 до 3. Также для справки дан единичный куб для измерения объема каждой из созданных учениками фигур (Рис. 8.10).

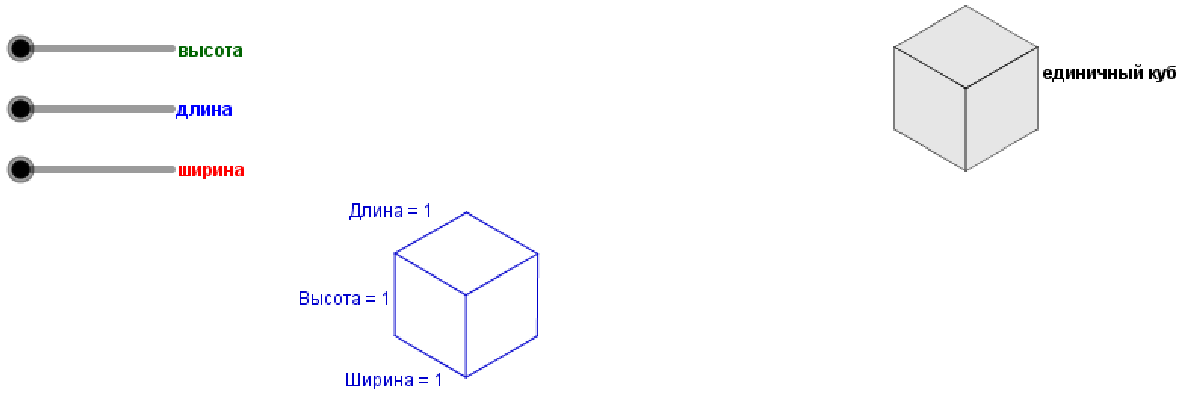


Рисунок 8.10

Ученики имеют доступ только к инструменту ПЕРЕМЕЩАТЬ.

Цели задания

Это исследовательское задание, которое дает ученикам возможность применить их знание об объеме как о числе единичных кубов, заполняющих пространственную фигуру, чтобы вывести формулу объема прямой прямоугольной призмы:

Объем = высота ✗ ширина ✗ длина.

В начале работы ученики экспериментируют с ползунками, чтобы увидеть, как различные настройки приводят к изменению линейных размеров призмы. Затем они следуют предложенному примеру, в котором показано вычисление объема призмы с помощью сетки. Обратите внимание, что в этом задании для подсчета единичных кубов, расположенных в призме нужным образом, используется сетка, которая отличается от стандартной сетки на плоскости (Рис. 8.11).

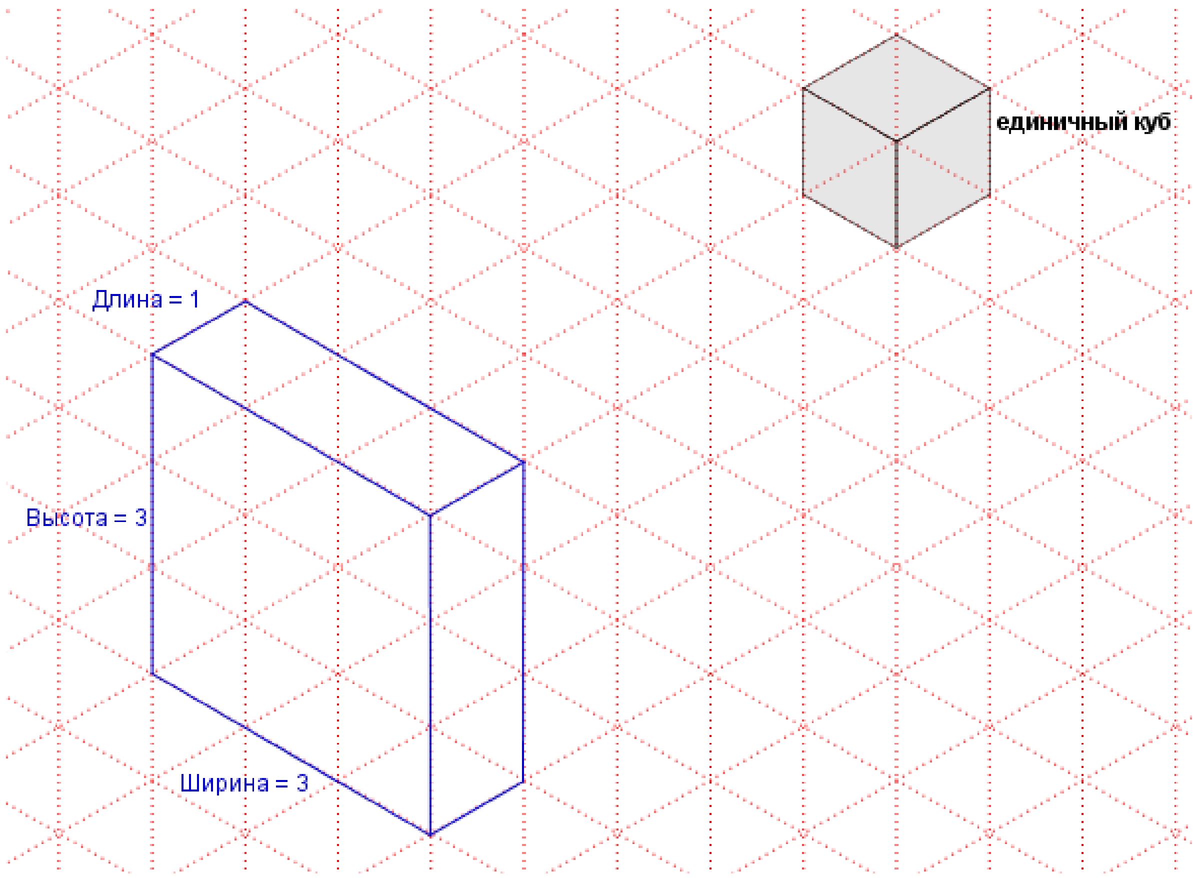


Рисунок 8.11

Ученикам потребуется некоторая практика, чтобы научиться пользоваться этой сеткой. Чтобы не испытывать трудностей с выполнением этого задания, им было бы полезно сначала потренироваться на задании *8.2.1. Единичный куб и объем.* Кроме того, обратите внимание учеников на изображение единичного куба на этой странице.

Если ученикам сложно подсчитать число единичных кубов без того, чтобы ими заполнять фигуру, как они делали в задании *Единичный куб и объем,* покажите классу, как считать единичные кубы, если изменять только один из линейных размеров прямоугольной призмы за один раз. Измените высоту с 1 единицы до 2 единиц и спросите, сколько единичных кубов потребуется, чтобы заполнить призму (Рис. 8.12). Затем измените высоту с 2 единиц до 3 единиц и снова спросите, сколько единичных кубов потребуется, чтобы заполнить призму. Потом измените ширину с 1 единицы до 2 единиц. Спросите, сколько дополнительных единичных кубов добавилось? Продолжайте предлагать простые примеры, пока все ученики не станут с легкостью использовать изометрическую сетку для подсчета единичных кубов.

Объем = 2 единичных куба | Объем = 3 единичных куба | Объем = 6 единичных кубов

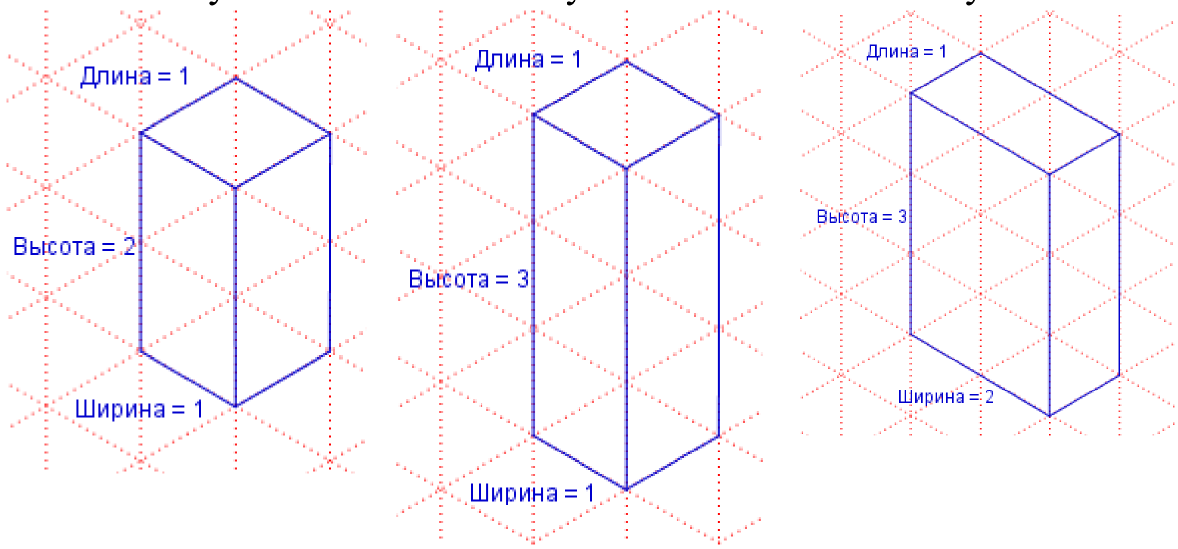


Рисунок 8.12

Следующая часть задания должна выполняться учениками самостоятельно. Ученики создают четыре различных прямых прямоугольных призмы, находят число единичных кубов, заполняющих каждую из них, и записывают линейные размеры и объем каждой призмы в таблицу.

Таблица данных				
Эксперимент	*Высота в ед.*	*Длина в ед.*	*Ширина в ед.*	*Объем в куб.ед.*
1	3	1	3	9
2	2	2	1	4
3	3	1	2	6
4	1	3	3	9
5	3	2	2	12

Ученики должны рассмотреть данные в таблице, чтобы сделать вывод, что объем можно было найти перемножением длин всех трех ребер. Исходя из этого, ученики должны вывести следующую формулу объема прямой прямоугольной призмы:

Объем = высота ✕ ширина ✕ длина.

Если ученики не увидели закономерности на основе 5 наборов данных, создайте на классной доске таблицу с данными и попросите всех учеников дать свои данные для *различных* прямых прямоугольных призм. В этом случае у учеников будет больше данных для анализа, чтобы вывести формулу объема.

Нахождение объема (урок 8.2.3)

Учебные задачи:

- Ученики узнают, что объем – аддитивная величина
- Ученики находят объемы пространственных фигур, составленных из двух или более неперекрывающихся прямых прямоугольных призм, складывая объемы неперекрывающихся частей.
- Ученики применяют формулу

  Объем = высота ✕ ширина ✕ длина

  для решения задач из реальной жизни.

Материалы: Файл GeoGebra 8_2_3_объем.ggb

В этом файле ученикам даны 3 различных фигуры, составленные из прямых прямоугольных призм, набор из 12 единичных кубов для измерения объема и контрольное окошко, которое предлагает один из способов разбиения каждого тела на неперекрывающиеся прямые прямоугольные призмы (Рис. 8.13).

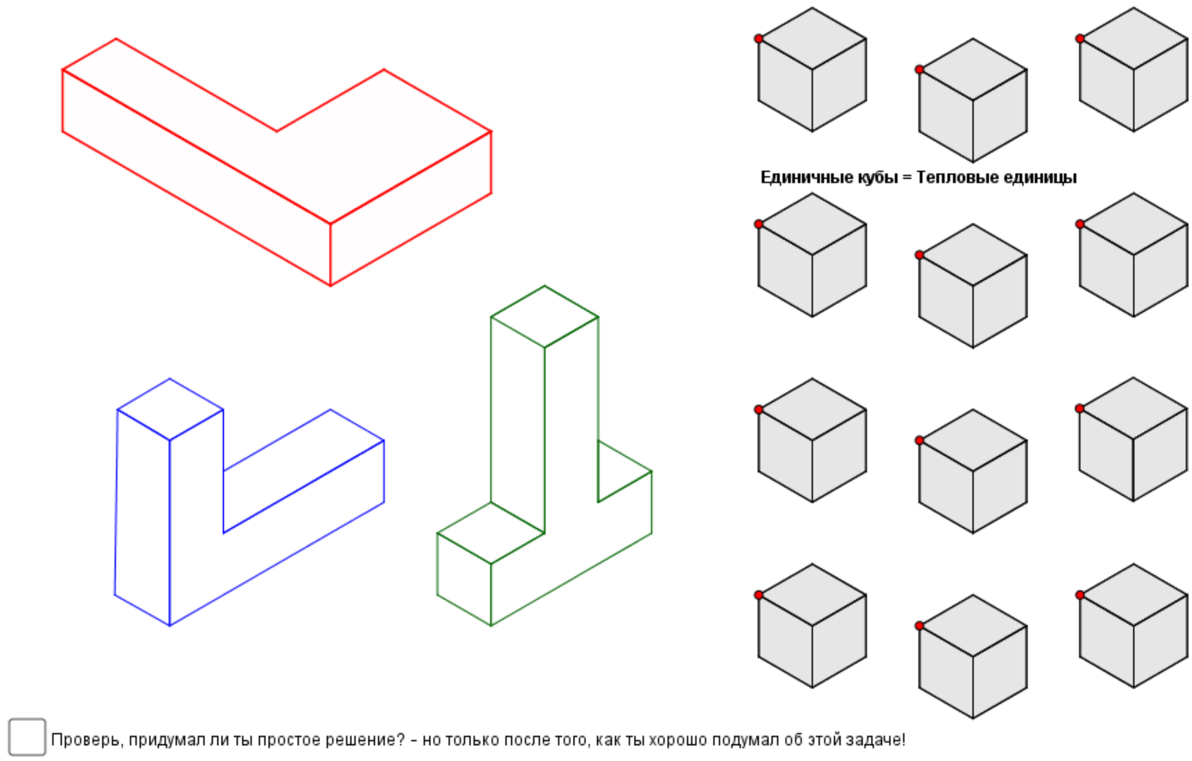


Рисунок 8.13

Изображения этих фигур построены из четырехугольников. Эти изображения зафиксированы и не могут быть изменены.

На странице также есть набор из единичных кубов для вычисления объемов. На каждом единичном кубе есть красная точка, за которую ученики могут подцепить и перетащить единичный куб. Файл настроен так, что красные точки притягиваются к узлам скрытой решетки, чтобы обеспечить точное размещение единичных кубов.

В этом задании ученики имеют доступ к инструменту ПЕРЕМЕЩАТЬ, что позволяет им передвигать единичные кубы для вычисления объема каждой фигуры. Кроме того, им доступен инструмент ОТРЕЗОК, чтобы они могли показать свой способ разбиения тел на прямые прямоугольные призмы.

Цели задания

Данное задание предоставляет ученикам возможность применить свои знания об объеме прямых прямоугольных призм к задаче из реальной жизни. Так как эти фигуры не являются прямыми прямоугольными призмами, ученикам придется творчески подойти к изученному ранее материалу, чтобы использовать уже известную им формулу объема прямой прямоугольной призмы. Это задание задумано как индивидуальное с последующим обсуждением.

Задание состоит из двух частей. В первой части ученикам предложена практическая задача: каждое тело – это здание, которому требуется определенное количество обогревателей. Единичный куб соответствует объему, который обслуживается одним обогревателем, поэтому ученикам необходимо найти объем каждого здания, чтобы определить количество обогревателей, которое требуется приобрести для каждого здания. Ученики заполняют каждую фигуру единичными кубами без зазоров и перекрытий, чтобы измерить объем каждого здания (Рис. 8.14) и записывают полученные значения в предлагаемую таблицу.

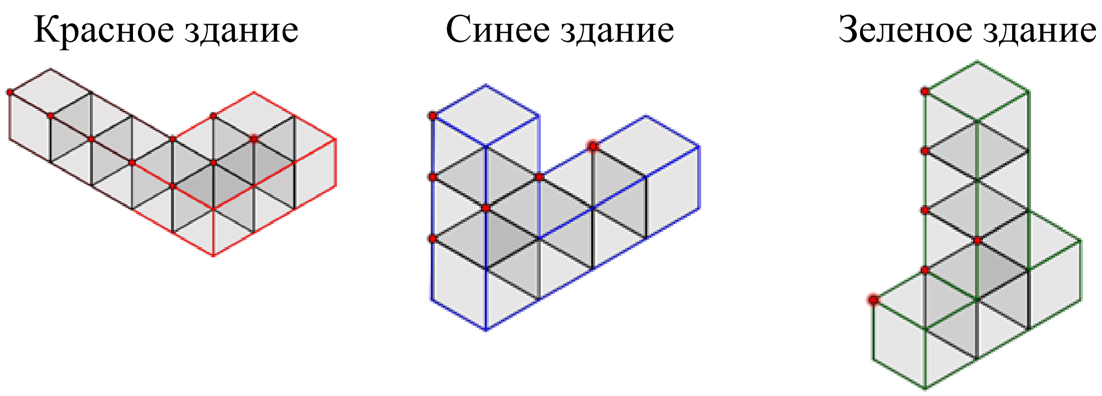


Рисунок 8.14

Таблица данных	
Здание	*Требуется тепловых единиц*
красное	9
синее	6
зеленое	6

Во второй части задания учеников просят найти более простой способ, разбив каждую фигуру на прямые прямоугольные призмы и применив формулу

Объем = высота ✕ ширина ✕ длина.

Ученики могут с помощью инструмента ОТРЕЗОК нарисовать линии, показывающих как можно отделить эти призмы. Возможное решение представлено на Рис. 8.15.

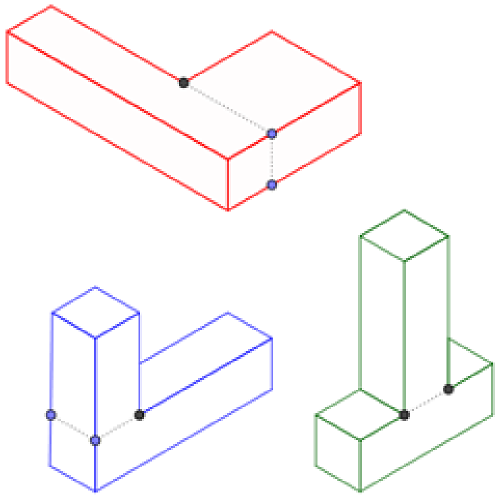


Рисунок 8.15

Очень важно, чтобы ученики сначала постарались придумать свое решение, прежде чем они установят флажок в контрольном окошке и получат одно из возможных решений, предлагаемых заданием (см. Рис. 8.16).

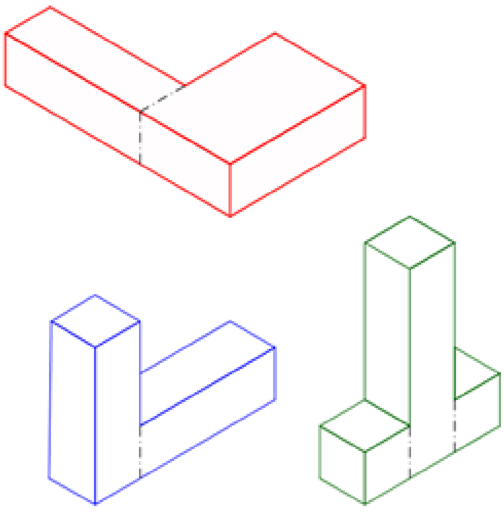


Рисунок 8.16

Учитель может предложить ученикам найти разные способы разбиения этих трех фигур на прямые прямоугольные призмы. Предложите им найти разбиение с наименьшим числом призм. Попросите учеников использовать формулу объема

Объем = высота × ширина × длина

для вычисления объема каждого тела и сравнить результаты с теми, что получены подсчетом единичных кубов. Предложите им создать таблицу, занести в нее высоту, длину и ширину каждой прямоугольной призмы из их разбиения и затем подсчитать объем.

Для двух примеров с рисунков 8.15 и 8.16 таблица с вычислениями выглядит так:

<table>
<tr><td colspan="4">Рисунок 8.15</td><td colspan="4">Рисунок 8.16</td></tr>
<tr><td>высота</td><td>длина</td><td>ширина</td><td>объем</td><td>высота</td><td>длина</td><td>ширина</td><td>объем</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>5</td><td>5</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="3">Объем красного здания</td><td>9</td><td colspan="3">Объем красного здания</td><td>9</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Объем синего здания</td><td>6</td><td colspan="3">Объем синего здания</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Объем зеленого здания</td><td>6</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td><td colspan="3">Объем зеленого здания</td><td>6</td></tr>
</table>

Ученики должны заметить, что объем каждого здания окажется одинаковым независимо от того, вычисляли его с помощью единичных кубов или различными разбиениями с применением формулы объема для прямой прямоугольной призмы. Обсуждение, которое за этим последует, должно быть сфокусировано на выводах, к которым пришли ученики, и привести к их пониманию объема как аддитивной величины.

9. Построение точек на координатной плоскости

9.1. Ключевые идеи и основные понятия

Введем понятие координатной оси. Прямую, на которой выбрана начальная точка, задано положительное направление и фиксирован единичный отрезок, называют координатной осью (Рис. 9.1)

Рисунок 9.1

На рисунке 9.1 координатная ось нарисована горизонтально с положительным направлением, идущим вправо от точки O. Но, вообще говоря, координатная ось может быть расположена вертикально или еще как-нибудь, и положительное направление на ней может быть выбрано так, как удобно.

Начальная точка делит координатную ось на два луча. Один из них, идущий от точки O в положительном направлении, называют положительным, другой – отрицательным. Каждой точке координатной оси ставится в соответствие действительное число x по определенному правилу. Начальной точке O ставим в соответствие число 0. Точке A, находящейся на положительном луче, ставим в соответствие число x равное длине отрезка OA, $x = OA$. Число x называют *координатой* точки A. Буква x может быть заменена на любую другую букву латинского алфавита.

В начальной школе мы рассматриваем только положительное направление координатной оси, поэтому здесь мы опускаем определение координат для точек на отрицательном луче. Обратите внимание, что присутствует взаимно однозначное соответствие между точками положительного луча – полуоси x и действительными неотрицательными числами:

1. Каждой точке полуоси *x* соответствует неотрицательное действительное число – координата этой точки
2. Две различные точки имеют разные координаты
3. Каждое неотрицательное действительное число есть координата некоторой точки на полуоси *x*.

Для однозначного определения положения точки на плоскости одной координатной оси недостаточно. Нам понадобятся две оси координат. В начальной школе используется прямоугольная система координат, также известная как Декартова, в которой две оси, ось *x* и ось *y*, расположены под прямым углом друг к другу и пересекаются в точке *O*. Возьмем при этом равные единичные отрезки на осях.

Плоскость, на которой задана Декартова система координат называют **координатной плоскостью**, ось *x* называют **осью абсцисс**, ось *y* – **осью ординат**, и точку *O* - **началом системы координат**.

Принято рисовать ось абсцисс в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось ординат - в виде вертикальной прямой направленной вверх (Рис. 9.2).

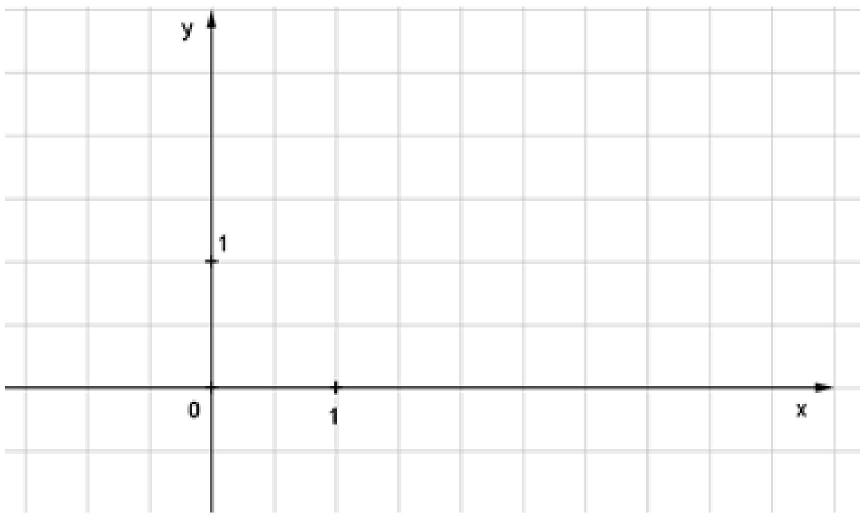


Рисунок 9.2

Прямоугольная координатная система разделяет плоскость на четыре угла, называемые **координатными углами** или **координатными четвертями.** Координатные углы обозначают римскими цифрами: I, II, III и IV. В математике для начальной школы чаще всего рассматривают только первый координатный угол, ограниченный положительными полуосями *x* и *y*. В этом координатном углу $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Легко видеть, что абсцисса точки может быть равна нулю тогда и только тогда, когда точка из этого угла лежит на оси *y*, а ордината точки может быть равна нулю тогда и только тогда, когда точка лежит на оси *x*.

Для данной точки *M* введем два числа: абсциссу *x* и ординату *y* этой точки. **Абсциссой** *x* называется число, выражающее в принятом масштабе расстояние от точки *M* до оси ординат. **Ординатой** *y* называется число, выражающее в принятом масштабе (обыкновенно в том же, как и для абсциссы) расстояние от точки *M* до оси абсцисс. (Рис. 9.3).

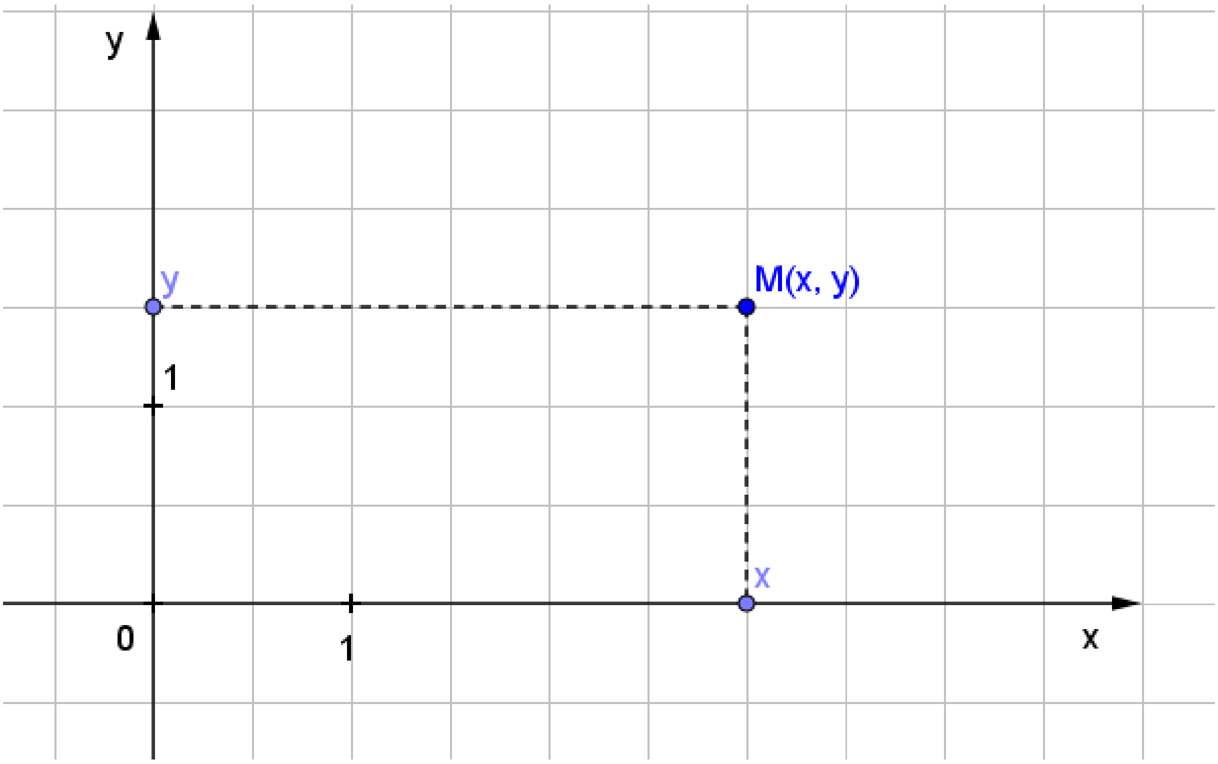


Рисунок 9.3

Эти два числа называются **координатами** точки *M*, поскольку они однозначно определяют положение точки на плоскости, а именно: каждой упорядоченной паре чисел (*x*, *y*) соответствует единственная точка, координатами которой являются эти числа; и наоборот, каждой точке плоскости соответствует упорядоченная пара чисел (*x*, *y*).

Если точка *M* имеет координаты (*x*, *y*), то это записывают так: *M* (*x*, *y*) (на первом месте ставится абсцисса *x*, на втором – ордината *y*). В качестве примера рассмотрим построение точки *A* (5,3) по заданным координатам. Абсцисса точки *A* равна 5, значит эта точка находится на расстоянии 5 единиц от оси ординат. Отсчитаем 5 единиц от начала координат по оси абсцисс и поставим точку. Через эту точку проведем прямую параллельную оси ординат. Ордината точки *A* равна 3, значит эта точка находится на расстоянии 3 единиц от оси абсцисс. Отсчитаем 3 единицы от начала координат по оси ординат. Через эту точку проведем прямую параллельную оси абсцисс. Точка пересечения этих прямых и есть искомая точка (Рис. 9.4).

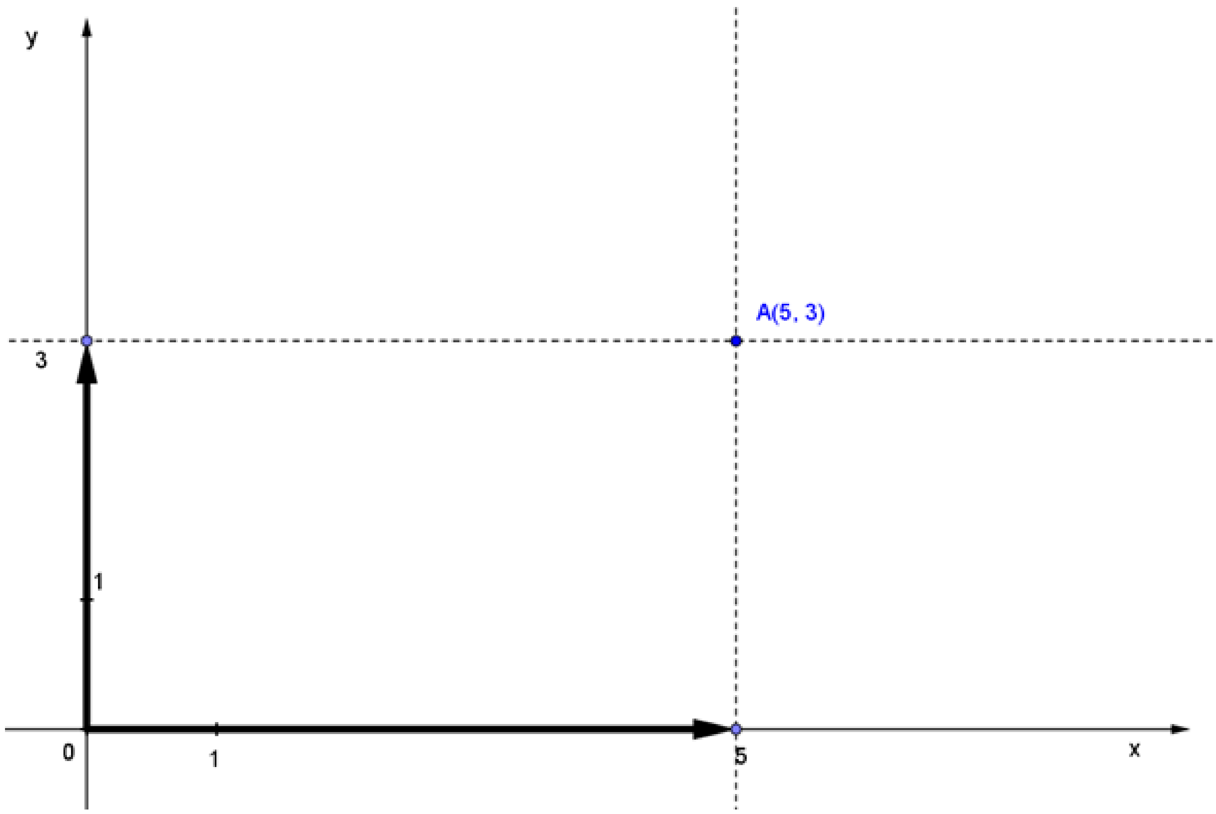


Рисунок 9.4

Очень часто учащиеся путают абсциссу и ординату, переставляют их местами, и поэтому выполняют построения точек неверно. Одной из причин этому является тот факт, что абсцисса вводится как расстояние от оси ординат, и ордината, как расстояние от оси абсцисс. Учитель может помочь учащимся преодолеть эту трудность, направив фокус учеников на то, что расстояние, которое определяется абсциссой, отсчитывается по оси абсцисс, в то время, как расстояние, которое определяется ординатой, отсчитывается по оси ординат. При таком подходе есть соответствие между названиями координат и координатных осей.

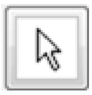
9.2. Уроки GeoGebra

9.2.1. Поиски клада

Файл GeoGebra: 9_2_1_поиски_клада.ggb

Пираты закопали на острове несколько сундуков с сокровищами. Попытайся найти как можно больше мест, где спрятаны сундуки с сокровищами.

На странице GeoGebra установи флажок в контрольном окошке “На старт, внимание, марш!”, чтобы показался сундук с сокровищами. Запиши его координаты в таблицу в виде упорядоченной пары (координаты определи с помощью белой точки).



С помощью инструмента ПЕРЕМЕЩАТЬ щелкни в ячейке таблицы и замени (0,0) на координаты сундука.

Как только ты найдешь координаты, откроется расположение следующего сундука. Удачи!

Запиши координаты всех найденных сундуков с сокровищами в таблицу данных.

Таблица данных	
Сундук #	*Координаты (x,y)*
Сундук 1	
Сундук 2	
Сундук 3	
Сундук 4	
Сундук 5	
Сундук 6	

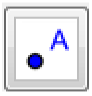
Объясни, как ты нашел координаты каждого из сундуков с сокровищами:

9.2.2. Угадай картинку!

Файл GeoGebra: 9_2_2_угадай_картинку.ggb

Головоломка

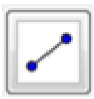
Эти точки определяют контур картинки. Построй эти точки и угадай, что изображено на картинке.



С помощью инструмента ТОЧКА построй точки по заданным координатам.

(1,2)	(2,3)	(3,4)	(5,5)	(8,6)
(10,8)	(10,6)	(13,5)	(16,7)	(15,5)
(15,4)	(16,2)	(14,3)	(11,2)	(8,2)
(5,2)	(6,3)	(4,2)	(3,2)	

Можешь угадать, что изображено на картинке?

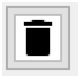


С помощью инструмента ОТРЕЗОК соедини точки в том порядке, в котором они перечислены в таблице (слева направо). Не забудь соединить последнюю точку с первой.

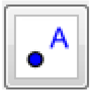
Ты правильно угадал? Что на картинке?

Построй свою картинку

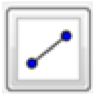
На клетчатой бумаге нарисуй набросок своей картинки. Затем запиши координаты всех угловых точек в следующую таблицу.



С помощью инструмента УДАЛИТЬ очисти страницу.



С помощью инструмента ТОЧКА построй точки по заданным координатам.



С помощью инструмента ОТРЕЗОК соедини точки.

Получилась фигура, которая была нарисована на бумаге? Распечатай картинку и раскрась ее.

9.3. Методические рекомендации для учителя

Поиски клада (урок 9.2.1)

Учебные задачи:

- Ученики узнают, что координаты точки на координатной плоскости определяются упорядоченной парой чисел (x, y), где первое число называется координатой x (абсциссой), а второе – координатой y (ординатой).
- Ученики узнают, что абсцисса (координата x) показывает, насколько нужно отступить от начала координат в положительном направлении оси x.
- Ученики узнают, что ордината (координата y) показывает, насколько нужно отступить от начала координат в положительном направлении оси y.
- Ученики будут определять координаты заданных точек, расположенных в первом квадранте координатной плоскости.

Материалы: Файл GeoGebra 9_2_1_поиски_клада.ggb

Страница GeoGebra разбита на два окна: графическое, с изображением первого квадранта координатной плоскости, и табличное, с таблицей из двух столбцов. При открытии страницы в графическом окне есть только контрольное окошко “На старт, внимание, марш!”, а в табличном – таблица из двух столбцов с введенными координатами начала координат на месте неизвестных координат (Рис. 9.5).

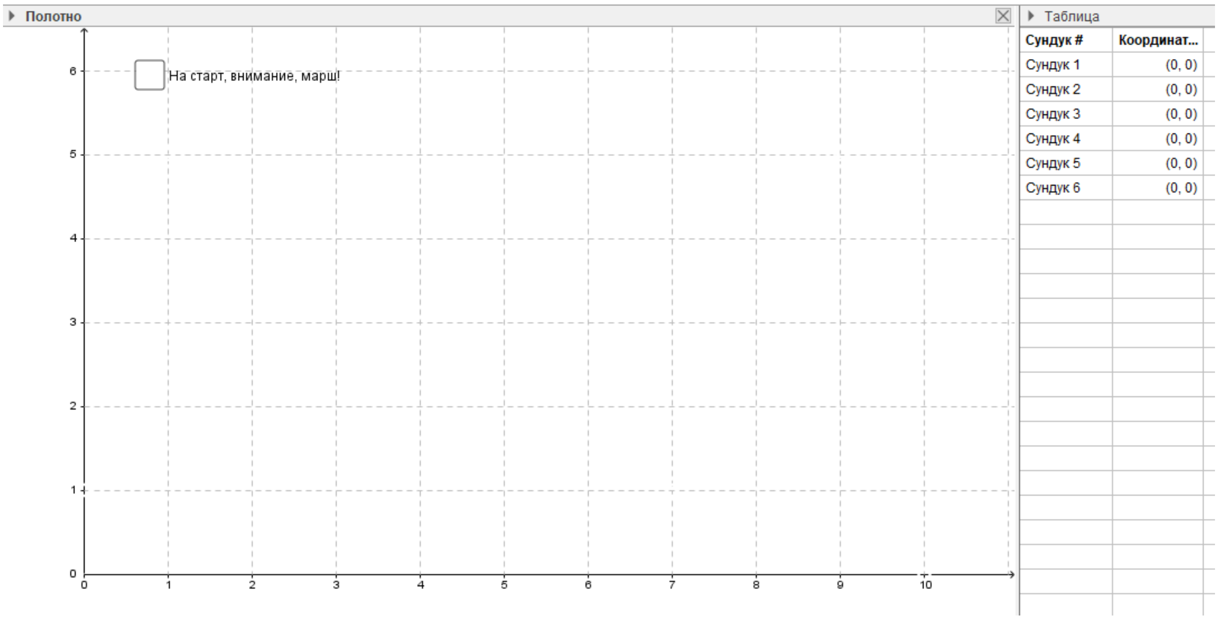


Рисунок 9.5

В обоих окнах ученикам доступен только инструмент ПЕРЕМЕЩАТЬ. Файл настроен так, что, когда ученик устанавливает флажок в контрольном окошке “На старт, внимание, марш!”, на координатной плоскости показывается первый сундук с сокровищами (Рис. 9.6).

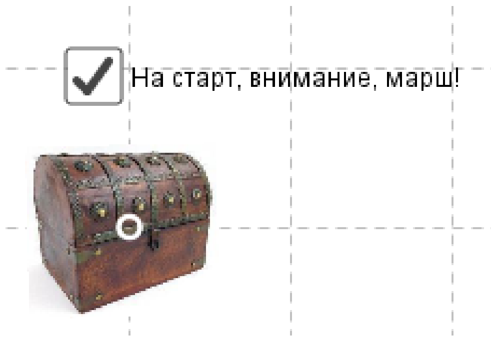


Рисунок 9.6

После этого ученики должны ввести в таблицу справа координаты белой точки, отмечающей середину сундука, в виде упорядоченной пары (x, y).

При работе в программе на компьютере, достаточно щелкнуть на ячейке таблицы и начать вводить координаты с клавиатуры. При работе в веб-приложении, нужно дважды щелкнуть на ячейке, удалить введенные координаты клавишей Backspace и ввести новые.

Если координаты введены правильно, появится второй сундук, и т.д. Если новый сундук не появляется, значит, введены неправильные координаты. В этом случае ученики должны удалить введенные координаты клавишей Backspace и попытаться снова.

Всего на странице спрятано 6 сундуков. Когда ученик введет правильные координаты последнего сундука, он увидит поздравление и картинку с кучей золотых монет (Рис. 9.7).

Рисунок 9.7

Настоятельно рекомендуется, чтобы учитель сохранил исходный файл и раздал ученикам для выполнения задания копию файла. В файле используется логические переменные для создания среды, похожей на компьютерную игру, и если ученики случайно удалят какие-то из условий, у учителя останется экземпляр работающего файла. Для повторного использования файла учитель может удалить введенные учениками данные, и ввести (0, 0) в каждое поле таблицы, в которое должны вводиться координаты.

Цели задания

Это задание погружает учеников в игровую среду. Они ищут клады с пиратским золотом. Предполагается, что ученики уже знакомы с понятием координат точки и знают, как найти координаты x и y точки, нанесенной на координатную плоскость. Это задание можно использовать для повторения или проверки этих умений.

Ученики начинают выполнение задания со щелчка в окошке “На старт, внимание, марш!”, чтобы увидеть первый сундук с сокровищами. Они записывают координаты белой точки, отмечающей середину сундука, и, если координаты введены правильно, на плоскости появится второй сундук. Если они определят все координаты правильно, они увидят картинку, приведенную на Рис. 9.8:

Рисунок 9.8

Ученики должны записать все координаты в таблицу в своем файле и объяснить, как они нашли координаты сундуков. Предполагается, что ученики представят объяснение нахождения каждой из координат на основе расстояния от начала координат в направлении соответствующей оси.

Угадай картинку! (урок 9.2.2)

Учебные задачи:

- Ученики узнают, что координаты точки на координатной плоскости определяются упорядоченной парой чисел (x, y), где первое число называется координатой x (абсциссой), а второе – координатой y (ординатой).
- Ученики узнают, что абсцисса (координата x) показывает, насколько нужно отступить от начала координат в положительном направлении оси x.
- Ученики узнают, что ордината (координата y) показывает, насколько нужно отступить от начала координат в положительном направлении оси y.

- Ученики будут размещать точки в первом квадранте координатной плоскости по заданным координатам.
- Ученики должны определить систему координат как пару осей, пересечение которых называется началом координат и имеет координаты (0, 0).

Материалы: Файл GeoGebra 9_2_2_угадай_картинку.ggb

На странице GeoGebra приведен первый квадрант координатной плоскости с координатной сеткой. Размеры окна 18 x 10 единиц (Рис. 9.9).

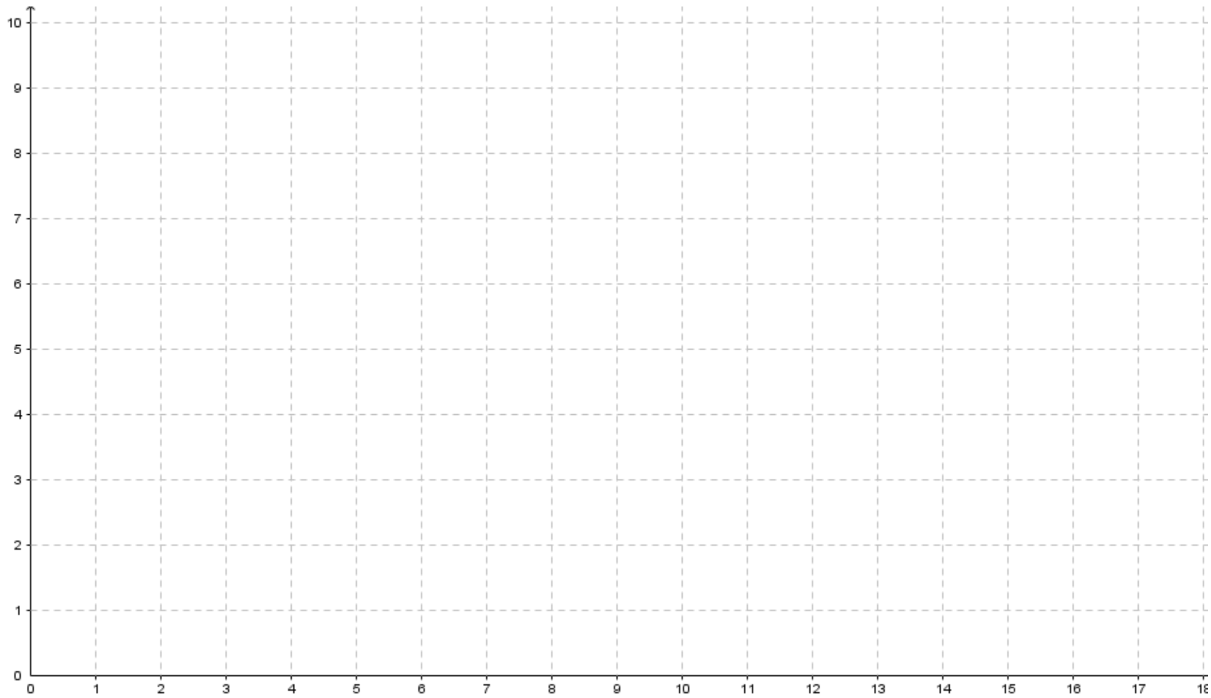


Рисунок 9.9

Ученики имеют доступ к инструментам ПЕРЕМЕЩАТЬ, ТОЧКА, ОТРЕЗОК и УДАЛИТЬ. Все нанесенные точки автоматически привязываются к узлам сетки, чтобы обеспечить точность построения.

Цели задания

Это задание позволяет ученикам попрактиковаться в нанесении точек на координатную сетку по заданным координатам.

(1,2)	(2,3)	(3,4)	(5,5)	(8,6)
(10,8)	(10,6)	(13,5)	(16,7)	(15,5)
(15,4)	(16,2)	(14,3)	(11,2)	(8,2)
(5,2)	(6,3)	(4,2)	(3,2)	

Данный ученикам набор точек, если их соединить в заданном порядке, составит изображение акулы, если точки будут соединены правильно. Это является и мотивацией, и самоконтролем. На рисунке 9.10 приведен чертеж после нанесения всех точек:

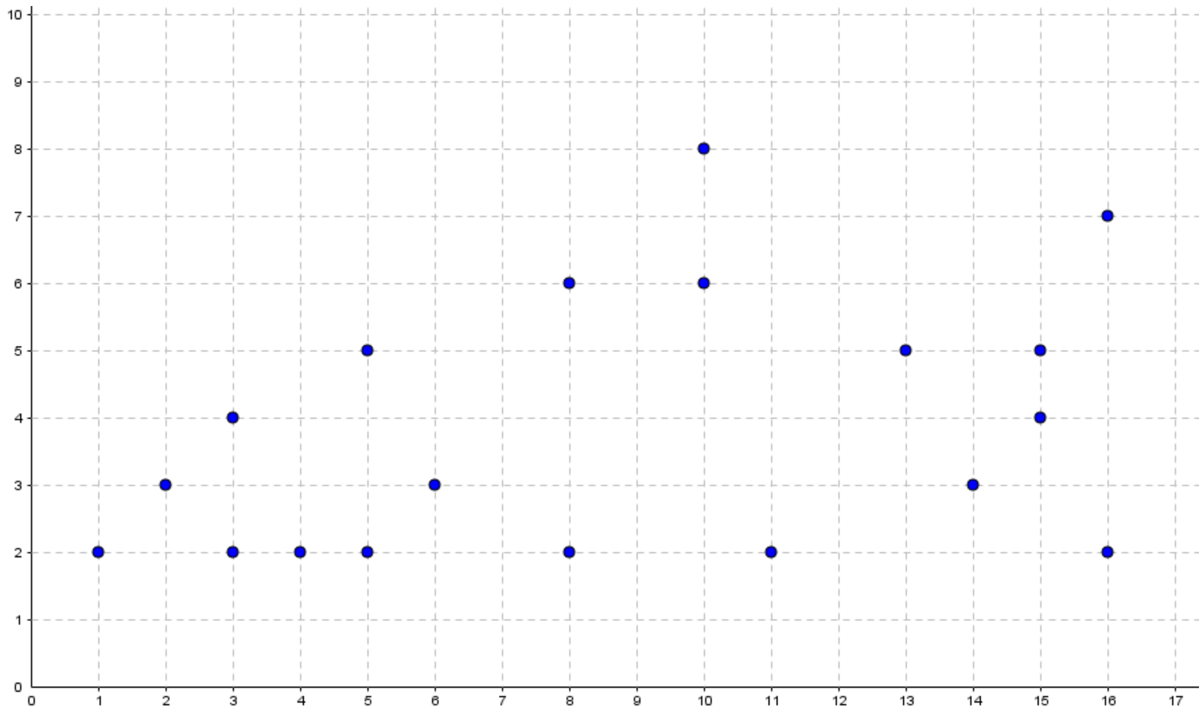


Рисунок 9.10

Ученикам предлагается угадать, что изображено на картинке. Учитель может ожидать самых разных догадок на этот счет. Потом ученики с помощью инструмента ОТРЕЗОК соединяют точки. Напомните ученикам, чтобы они точно следовали порядку перечисления точек в таблице – слева направо, строка за строкой. Также скажите им, что для завершения рисунка последнюю точку (3, 2) нужно соединить с первой точкой (1, 2). Результат приведен на Рис. 9.11:

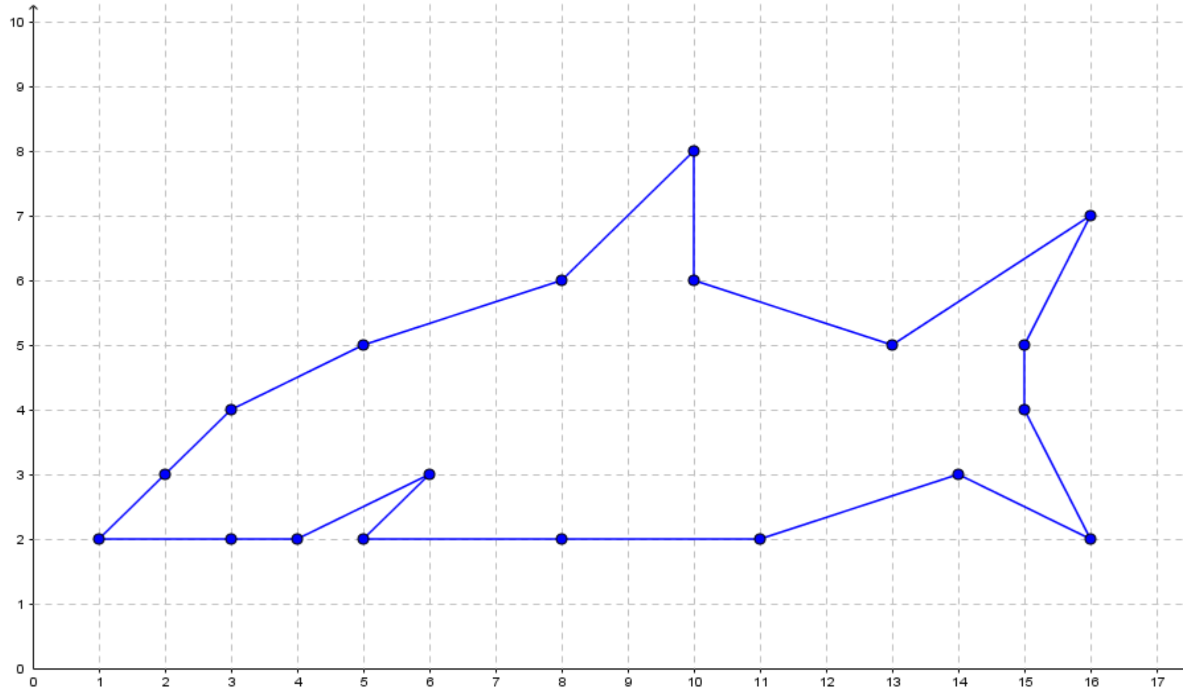


Рисунок 9.11

Во второй части задания ученикам предлагается придумать и разметить точками свою собственную картинку. Учитель должен раздать ученикам клетчатую (или миллиметровую) бумагу. Сначала ученики должны определить систему координат и нарисовать на бумаге координатные оси. Они должны отметить пересечение прямых как точку начала координат, имеющую координаты (0, 0). Также они должны выбрать шкалу для каждой оси с равными делениями. Учителю может потребоваться помочь им в этом или сделать для них образец, прежде чем ученики начнут рисовать свои собственные картинки.

Попросите учеников записать в таблицу координаты точек, которые они нанесли, в том порядке, в котором точки нужно будет соединять, чтобы получилась картинка. Затем ученики могут очистить свою страницу GeoGebra от предыдущего изображения с помощью инструмента УДАЛИТЬ и нанести точки своей картинки.

Эту часть работы учитель может сделать работой в парах. Когда ученики придумали свои картинки и записали координаты точек, предложите им поменяться таблицами с соседом, не рассказывая, что должно получиться, если все точки будут соединены правильно. Тогда каждый ученик будет наносить на плоскость картинку соседа и угадывать, что он задумал. Это расширит возможности проверки для учителя и будет интересно детям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основная особенность этой книги состоит в том, что она своей целью ставит не “прохождение программы по математике”, которое содержится в большинстве учебных программ для начальной школы, а принципиальное понимание основных идей геометрии, которые вводятся в начальной школе. Чрезвычайно важно добиваться, чтобы ученики действительно понимали математику, а не запоминали правила и алгоритмы. Главная головная боль многих учителей математики в средней и старшей школе – что после начальной школы ученики приходят к ним в классы, не зная математики, потому что в действительности они не понимают ее.

Книга предлагает 32 интерактивных исследования, которые используют динамическую математическую среду *GeoGebra* для преподавания и изучения большой части основных концепций геометрии, изучаемых в начальной школе. Применение *GeoGebra* обеспечивает возможность обучения как для учителя, так и для учеников. Использование современных технологий в преподавании математики является важной составляющей современного математического образования. Мы считаем, что изучение и грамотное применение новых образовательных программных продуктов должно быть одной из составляющих непрерывного профессионального роста преподавателя.

Динамическая визуализация, предлагаемая ученикам при изучении геометрии, дает им возможность

- На более глубоком уровне освоить геометрические понятия
- Развить исследовательские навыки в процессе решения задач
- Проверить собственные рассуждения и шаги решения задачи
- Получить новое представление о математике как о предмете, позволяющем экспериментировать.

Мы надеемся, что каждый читатель этой книги найдет что-то для себя полезное в представленных в ней уроках *GeoGebra*. Возможно, вы обнаружите новые подходы к знакомым геометрическим задачам, или увидите новые связи между традиционными тематическими разделами, или познакомитесь с совершенно новыми для себя геометрическими концепциями. Мы также надеемся, что эта книга вызовет размышления о роли, которую компьютерные технологии, такие как *GeoGebra*, должны играть в математическом образовании в будущем, и о том, как эта программа пробуждает способность учеников мыслить здраво и независимо.

Мир не стоит на месте. Мы живем в эпоху расцвета математики. Мы видим рост на каждой ветви этого старого дерева по мере того, как множество людей обращают свои способности на развитие математики, необходимой для 21 века и далее. Учителя также устремлены вперед с надеждой и вдохновением, стремясь донести смыслы, навыки и технологии, нужные завтра, своим сегодняшним ученикам.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Мы написали эту книгу в надежде помочь учителю пробудить у учеников интерес к изучению геометрии и поддержать их в освоении словесно-логического мышления. Книга предлагает 32 интересных урока по геометрии, разработанных в результате сотрудничества российских и американских преподавателей. Они соответствуют содержанию стандартной учебной программы для начальной школы в обеих странах. Отличительной чертой этих уроков является использование свободно распространяемого динамического математического программного продукта GeoGebra. Каждое задание содержит раздаточные материалы с инструкциями для учеников и подробные замечания для учителя: с постановкой целей, предложениями по применению в классе и описанием шагов работы с GeoGebra.

Мы надеемся, что эта книга окажется полезной для учителей, которых интересует преподавание геометрии с использованием в классе современных технологий. Мы верим, что применение динамических математических программ в обучении и изучении является ключевым элементом математического образования в будущем. Их применение должно повышать интерес учеников к геометрии, а также способствовать приобретению необходимых компетенций в этом предмете.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Использованная литература

1. Goldenberg, P. Thinking (and talking) about technology in math classrooms. / P. Goldenberg // Issues in Mathematics Education. – 2000. – P. 1 – 8.

2. Gittinger, J. A laboratory guide for elementary and middle school geometry using GeoGebra. Retrieved December 10, 2015 from https://sites.google.com/site/geogebraiowa/a-laboratory-guide-for-elementary-geometry-using-geogebra.

3. Александров, А. Д. Геометрия – учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений / А. Д. Александров [и др.]. – М. : Просвещение, 2008. – 176 с. – ISBN 978-5-09-019005-3.

4. Пышкало, А. М. Геометрия в I – IV классах / А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1965. – 224 с.

5. Van de Walle, J.A., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (9th Ed.). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally. Boston, MA: Pearson Education, 2016. – 660 p. – ISBN 978-0-13-376893-0.

6. Истомина, Н. Б. Методика обучения математике в начальной школе: Развивающее обучение / Н. Б. Истомина. – 2-е изд., испр. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2009. – 288 с. – ISBN 978-5-89308-699-7.

7. Александров, А. Д. Геометрия – учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2009. – 176 с. – ISBN 978-5-090166668-3.

8. Atebe, Humphrey Uyouyo “As soon as the four sides are all equal, then the angles must be 90° each”. Children's misconceptions in geometry / Humphrey Uyouyo Atebe, Marc Schäfer // African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education. – 2008. – Vol. 12. – № 2. – P. 47 – 65.

9. De Villiers, Michael. The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals / Michael De Villiers // For the Learning of Mathematics. – 1994. – Vol. 14. – № 1. – P. 11 – 18.

10. Oberdorf, Christine D. and Taylor-Cox, Jennifer. “Shape Up!” Teaching Children Mathematics. – Vol. 5. – 1999. – P. 340 – 345.

11. Александров, А.Д. Геометрия – учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2010. – 175 с. – ISBN 978-5-09-010501-0.

Рекомендуемая литература

12. Истомина, Н. Б. Практикум по методике обучения математике в начальной школе: Развивающее обучение / Н. Б. Истомина, Ю. С. Заяц. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2009. – 144 с. – ISBN 978-5-89308-731-4.

13. Истомина, Н. Б. Наглядная геометрия. Тетрадь по математике. 1-й класс / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. – 8-е изд. – М. : Линка-пресс, 2016. – 64 с. – ISBN 978-5-904347-31-4.

14. Истомина, Н. Б. Наглядная геометрия. Тетрадь по математике. 2-й класс / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. – 5-е изд. – М. : Линка-пресс, 2015. – 48 с. – ISBN 978-5-904347-06-2.

15. Истомина, Н. Б. Наглядная геометрия. Тетрадь по математике. 3-й класс / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. – 5-е изд. – М. : Линка-пресс, 2015. – 48 с. – ISBN 978-5-904347-07-9.

16. Истомина, Н. Б. Наглядная геометрия. Тетрадь по математике. 4-й класс / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. – 6-е изд. – М. : Линка-пресс, 2014. – 48 с. – ISBN 978-5-904346-98-0.

17. Истомина, Н. Б. Математика. Рабочая тетрадь. 1 класс : в 2 ч. / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2016. – Ч. 1. – 64 с. – ISBN 978-5-418-00141-2 ; Ч. 2. – 64 с. – ISBN 978-5-418-00142-9.

18. Истомина, Н. Б. Математика. Рабочая тетрадь. 2 класс : в 2 ч. / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2016. – Ч. 1. – 64 с. – ISBN 5-89308-014-9 ; Ч. 2. – 64 с. – ISBN 5-89308-022-X.

19. Истомина, Н. Б., Редько З. Б. Математика. Рабочая тетрадь. 3 класс : в 2 ч. / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. – Смоленск : Ассоциация XXI век. – Ч. 1, 2017. – 88 с. – ISBN 5-89308-050-5 ; Ч. 2, 2016. – 88 с. – ISBN 5-89308-049-1.

20. Истомина, Н. Б., Редько З. Б. Математика. Рабочая тетрадь. 4 класс: в 2 ч. / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2017. – Ч. 1. – 80 с. ISBN 5-89308-048-3 ; Ч. 2. – 80 с. – ISBN 5-89308-047-5.

21. Редько, З. Б. Курс «Наглядная геометрия» в I – IV классах / З. Б. Редько // Начальная школа. – 2016. – № 11. – С. 53 – 57.

22. Редько, З. Б. Курс «Наглядная геометрия» в начальной школе / З. Б. Редько // Сибирский учитель. – 2016. – № 2. – С. 77 – 80.

23. Шадрина, И. В. Обучение геометрии в начальных классах : пособие для учителей, родителей, студентов педвузов / И. В. Шадрина. – М. : Школьная Пресса, 2002. – 95 с. – ISBN 5-9219-0144-X.

24. Петерсон, Л. Г. Геометрическое лото. Дидактическое пособие. 1 класс / Л. Г. Петерсон. – М. : Ювента, 2013. – 6 с. – ISBN 2000-2200.

25. Волшебная страна фигур. В пяти путешествиях. Пособие по развитию пространственного мышления / Н. С. Подходова, М. В. Горбачева, А. А. Мистонов. – СПб. : Питер, 2000. – ISBN 5-272-00247-4.

26. Жильцова, Т. В., Поурочные разработки по наглядной геометрии: 1 – 4 классы / Т. В. Жильцова, А. А. Обухова. – М. : ВАКО, 2004. – 288 с. – ISBN 5-94665-151-X.

27. Андрущенко, А. В. Развитие пространственного воображения на уроках математики. 1 – 4 классы : пособие для учителя / А. В. Андрущенко. – М. : ВЛАДОС, 2005. – 134 с. – ISBN 5-691-01030-1.

28. Добровольский, Н. М. Создание геометрических чертежей в TikkZ / Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян // Чебышевский сборник. – 2015. – Т. 16. – Вып. 2. – С. 282 – 295.

29. Динамическая математическая образовательная среда GeoGebra / А. Р. Есаян [и др.]. – Тула : Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2017. – Ч. 1. – 417 с. – ISBN 978-5-9500201-0-0

30. Ларин, С. В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики / С. В. Ларин. – М. : Легион, 2015. – 179 с. – ISBN 978-5-9966-0691-7.

31. Мордашева, Т. Ю. Использование приложения GeoGebra на уроках математики / Т. Ю. Мордашева // Педагогический опыт: теория, методика, практика : материалы IX Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 14 окт. 2016 г.) / редкол.: О. Н. Широков [и др.]. – Чебоксары : ЦНС «Интерактив плюс», 2016. – № 4 (9). – С. 170 – 173. – ISSN 2412-0529 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://interactive-plus.ru/ru/article/113693/discussion_platform (дата обращения: 01.08.2017).

32. Введение в GeoGebra. Версии 4.2. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/tex/intro-ru%20Geo%20Gebra.pdf (дата обращения: 16.11.2016).

Учебное издание

ЛЮБЛИНСКАЯ Ирина Ефимовна
ТИХОМИРОВА Светлана Викторовна

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИЛОЖЕНИЯ GEOGEBRA

Методическое пособие для учителей

Издается в авторской редакции

Дизайн обложки:
Дэниел Джонсон, Ирина Люблинская

Подписано в печать 15.08.17.
Формат 60 × 84/16. Усл. печ. л. 11,39. Тираж 500 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.