

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

М. А. АНТОНОВА Ю. К. КОКУРИНА

ФИЗИКА

Механика. Молекулярная физика. Термодинамика.
Электричество. Магнетизм. Механические
колебания и волны. Волновая оптика

Учебное пособие



Владимир 2017

УДК 53
ББК 22.3
А72

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры менеджмента и бизнес-информатики
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
(Владимирский филиал)
Н. Н. Мануйлов

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. В. Прохоров

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Антонова, М. А. ФИЗИКА. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика. Электричество. Магнетизм. Механические колебания и волны. Волновая оптика : учеб. пособие / М. А. Антонова, Ю. К. Кокурина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 123 с.
ISBN 978-5-9984-0776-5

При полном соответствии программе курса акцент сделан на сведениях, необходимых студентам для практического применения при решении задач. Приведены графические иллюстрации и примеры решения типовых задач. Предполагается, что доказательства некоторых теорем и выводы части расчетных соотношений могут быть разобраны по рекомендуемой литературе.

Предназначено для студентов различных специальностей очной и заочной форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 38. Библиогр.: 10 назв.

УДК 53
ББК 22.3

ISBN 978-5-9984-0776-5

© ВлГУ, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Физика» относится к базовой (обязательной) части математического и естественно-научного цикла ООП.

Учебное пособие написано в соответствии с действующей программой курса физики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений и предназначено для студентов, слушателей высших технических учебных заведений дневной формы обучения с ограниченным числом часов по физике, возможно его использование при заочной форме обучения.

Небольшой объем учебного пособия достигнут за счет тщательного отбора материала и его лаконичного изложения.

В приложении приведены значения основных физических констант, а также некоторая справочная информация, необходимая при решении задач.

Цели дисциплины: обеспечить усвоение основных физических явлений и законов классической и современной физики, методов физического исследования; ознакомить студентов (слушателей) с современной научной аппаратурой и выработать у студентов (слушателей) начальные навыки проведения экспериментальных научных исследований различных физических явлений и оценки погрешности измерений; заложить основы для профессиональной подготовки будущего инженера, дать теоретическую базу, которая позволит студенту (слушателю) свободно ориентироваться в частных вопросах, возникающих в процессе подготовки по общетехническим и профилирующим дисциплинам вуза.

Задачи дисциплины: научить будущих специалистов приемам и навыкам решения конкретных задач из разных областей физики.

Курс физики изучается в течение первого и второго семестров первого года обучения. Он охватывает теоретические основы классической и современной физики и направления ее дальнейшего развития, с учетом специализации вуза. Основные теоретические положения по изучаемым темам излагаются студентам на лекциях, которые являются одной из основных форм обучения. Лекционные занятия дополняют семинары и уроки, имеющие тесную связь с темами лекций. Предусмотрен контроль самостоятельной работы студентов: письменные контрольные работы, собеседование по индивидуальному плану. Физиче-

ский практикум представлен лабораторными работами. Они призваны формировать у студентов навыки экспериментальных исследований и умение работать с физическими приборами и оборудованием.

В результате изучения курса физики студент должен:

1) знать:

- физические идеи, опытные факты, понятия, законы, которые студенты должны применять для объяснения физических процессов, свойств вещества, технических устройств и т. д.;

- приборы и устройства, которыми обучающиеся должны уметь пользоваться, физические величины, которые студенты должны определять опытным путем, и др.;

- основные типы задач, формулы, которые студенты должны уметь применять при решении вычислительных практических задач, физические процессы, технические устройства, которые могут являться объектами рассмотрения в качественных задачах;

2) уметь:

- собирать экспериментальные установки и схемы, измерять физические характеристики, обрабатывать данные физического эксперимента;

- переводить единицы измерений физических величин из одной системы единиц в другие;

- решать качественные, количественные, расчетные и экспериментальные задачи;

- объяснять наблюдаемые физические явления с позиций современной физической картины мира;

3) иметь представление:

- о структуре и содержании курса и отдельно его разделов;

- о роли зарубежных и российских ученых-физиков в развитии цивилизации, их вкладе в мировой прогресс;

- об основных физических принципах и теориях, о влиянии физики на развитие науки и техники;

4) уметь применять полученные знания и сформированные умения и навыки в выполнении лабораторного практикума, профессиональных задач.

В пособие вошли следующие разделы физики: физические основы механики, молекулярная физика и термодинамика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. Каждая тема содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы.

В приложении приведены значения основных физических констант, справочная информация, необходимая для решения задач.

ПРОГРАММА КУРСА

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Кинематика поступательного движения. Кинематика как раздел механики. Механическое движение как простейшая форма движения материи. Материальная точка (частица). Система отсчета. Инерциальные системы отсчета. Радиус-вектор. Принцип относительности Галилея. Траектория. Радиус кривизны траектории. Линейная скорость и линейное ускорение. Тангенциальное и нормальное ускорения. Связь между линейными и угловыми кинематическими величинами. Поступательное движение твердого тела.

Динамика поступательного движения. Динамика как раздел механики. Первый закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчета. Второй закон Ньютона и понятия силы, массы и импульса. Уравнение движения. Третий закон Ньютона и пределы его применимости. Неинерциальные системы отсчета. Абсолютные и относительные скорость и ускорение. Силы инерции. Центробежная сила. Сила Кориолиса. Система материальных точек. Центр инерции (центр масс). Теорема о движении центра инерции.

Вращательное движение твердого тела. Понятие абсолютного твердого тела. Момент силы. Момент импульса. Момент инерции. Теорема Штейнера. Уравнение моментов (связь момента импульса с моментом силы). Уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. Гироскопический эффект. Свободные оси.

Законы сохранения. Значение и содержание законов сохранения в механике. Закон сохранения импульса. Однородность пространства. Реактивное движение. Закон сохранения момента импульса. Изотропия пространства. Работа, энергия, мощность. Связь между потенциальной энергией и силой. Понятие силового поля. Консервативные и неконсервативные силы. Закон сохранения энергии в механике. Однородность времени. Консервативная и диссипативная системы.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Молекулярно-кинетическая теория идеального газа. Основные положения молекулярно-кинетической теории вещества. Микро- и макросостояния системы. Макроскопические параметры. Понятие идеального газа. Молекулярно-кинетическое толкование температуры. Число степеней свободы молекулы. Внутренняя энергия идеального газа. Закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Давление газа с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона – Менделеева).

Элементы классической статистики. Динамические и статистические закономерности в физике. Статистический метод исследования систем. Фазовое пространство, фазовая точка, фазовая ячейка. Понятие о функции распределения. Статистическое усреднение. Распределение Максвелла (распределение молекул по абсолютным значениям скорости). Средние скорости молекул. Барометрическая формула. Распределение Больцмана. Распределение Максвелла – Больцмана.

Реальные газы. Силы межмолекулярного взаимодействия в газах. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы реального газа. Метастабильные состояния. Критическое состояние. Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля – Томсона. Сжижение газов и получение низких температур.

Свойства жидкостей. Характеристика жидкого состояния. Строение жидкостей. Ближний порядок. Поверхностное натяжение. Силы, возникающие на кривой поверхности жидкости. Формула Лапласа. Условия равновесия на границе двух сред. Краевой угол. Смачивание. Капиллярные явления.

Свойства твердых тел. Аморфные и кристаллические тела. Кристаллическая решетка. Дальний порядок. Упругая и пластическая деформации. Закон Гука.

Элементы физической кинетики. Понятие о физической кинетике. Неравновесные системы. Время релаксации. Явления переноса.

Диффузия. Коэффициент диффузии. Теплопроводность. Коэффициент теплопроводности. Вязкость (внутреннее трение). Коэффициент вязкости. Динамическая и кинематическая вязкость. Понятие столкновения. Упругое и неупругое столкновения. Прицельное расстояние. Рассеяние частиц. Средняя длина свободного пробега. Принцип детального равновесия.

Первое начало термодинамики. Статистический и термодинамический методы. Термодинамическая система. Термодинамический процесс. Основные термодинамические понятия: внутренняя энергия, работа, теплота. Формулировки первого начала термодинамики. Уравнение первого начала термодинамики. Теплоёмкость. Зависимость теплоёмкости идеального газа от вида процесса. Формула Майера. Работа, совершаемая газом при изопроцессах. Энтальпия (тепловая функция). Адиабатический процесс. Теплоёмкость твердых тел.

Второе начало термодинамики. Равновесные и неравновесные состояния системы. Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл). Формулировки второго начала термодинамики. Цикл Карно и его КПД для идеального газа. Тепловые двигатели и холодильные машины. Максимальный КПД теплового двигателя. Энтропия. Статистический вес (термодинамическая вероятность). Закон возрастания энтропии. Статистическое толкование второго начала термодинамики.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Напряжённость электростатического поля в вакууме. Электрический заряд. Сохранение и инвариантность заряда. Дискретность заряда. Закон Кулона. Понятие электростатического поля. Силовые линии (линии напряженности). Принцип суперпозиции электростатических полей. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме и её связь с законом Кулона. Дифференциальная форма теоремы Гаусса. Применение теоремы Гаусса для расчета полей.

Потенциал электростатического поля в вакууме. Работа сил электростатического поля. Циркуляция напряженности электростати-

ческого поля. Ротор напряженности электростатического поля. Потенциальность (консервативность) электростатического поля. Потенциал. Разность потенциалов. Связь между потенциалом и напряжённостью электростатического поля. Уравнение Лапласа. Электрический диполь. Электрический момент диполя (дипольный момент). Потенциал и напряженность поля диполя. Момент сил, действующий на диполь во внешнем электрическом поле. Энергия диполя в электрическом поле.

Электрическое поле в диэлектриках. Свободные и связанные заряды в веществе. Сторонние заряды. Полярные и неполярные молекулы. Типы диэлектриков. Ионная, электронная и ориентационная поляризации. Поляризуемость молекулы. Поляризованность (вектор поляризации). Однородная и неоднородная поляризации. Связь поляризованности с поверхностной плотностью поляризационного заряда. Диэлектрическая восприимчивость вещества и её зависимость от температуры. Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Электрическое смещение (электрическая индукция) в диэлектрике. Диэлектрическая проницаемость среды. Вычисление напряженности электрического поля в диэлектрике. Граничные условия для электрического поля на границе раздела «диэлектрик – диэлектрик». Сегнетоэлектрики.

Электрическое поле проводников. Распределение зарядов в проводнике. Электростатическое поле внутри и снаружи проводника. Граничные условия на границе «проводник – вакуум». Электрические свойства проводящей оболочки. Электростатическая защита. Метод изображений. Граничные условия на границе «проводник – диэлектрик». Электроёмкость уединённого проводника, системы проводников и конденсатора. Электрическая энергия системы точечных зарядов. Энергия заряженного проводника, системы проводников и конденсатора. Энергия электростатического поля. Объёмная плотность энергии электростатического поля.

Постоянный электрический ток. Характеристики электростатического тока: плотность тока, сила тока. Условие существования электрического тока. Сторонние силы. Разность потенциалов, напряжение, электродвижущая сила (ЭДС). Классическая электронная теория

рия электропроводимости металлов. Законы Ома и Джоуля – Ленца в дифференциальной форме. Законы Ома и Джоуля – Ленца в интегральной форме. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Правила Кирхгофа. Недостаточность классической электронной теории электропроводимости.

Магнитное поле в вакууме. Закон Ампера. Магнитная индукция. Закон Био – Савара (закон Био – Савара – Лапласа). Понятие магнитного поля. Принцип суперпозиции магнитных полей. Сила Лоренца и сила Ампера. Виток с током в магнитном поле. Магнитный момент. Момент сил, действующий на рамку с током во внешнем магнитном поле. Магнитное поле прямолинейного и кругового токов. Циркуляция вектора магнитной индукции. Закон полного тока (теорема о циркуляции индукции магнитного поля) в вакууме. Применение закона полного тока для расчета магнитных полей. Магнитное поле длинного соленоида и тороида. Магнитное взаимодействие токов. Единица силы тока – ампер. Вихревое поле движущегося заряда. Инвариантность электрического заряда. Магнитное поле как релятивистский эффект.

Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях. Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях. Понятие об электронной оптике. Эффект Холла. Ускорители заряженных частиц.

Магнитное поле в веществе. Понятие магнитного момента атома. Микро- и макроток. Молекулярные токи. Намагниченность (вектор намагничивания). Магнитная восприимчивость вещества и её зависимость от температуры. Закон полного тока (теорема о циркуляции напряженности магнитного поля) в веществе. Напряжённость магнитного поля в веществе. Магнитная проницаемость среды. Индукция магнитного поля в веществе. Граничные условия для магнитного поля на границе раздела двух сред. Типы магнетиков. Точка Кюри. Домены. Кривая намагничивания.

Электромагнитная индукция. Опыт Фарадея. Магнитный поток. ЭДС индукции. Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея). Вывод основного закона электромагнитной индукции из закона сохранения энергии, а также на основе электронной теории. Правило Ленца (закон Ленца). Явление самоиндукции. Индуктив-

ность. Индуктивность длинного соленоида. Токи замыкания и размыкания цепи. Явление взаимной индукции. Взаимная индуктивность. Энергия магнитного поля. Объёмная плотность энергии магнитного поля.

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Механические колебания. Свободные (собственные) и вынужденные колебания. Понятие об автоколебаниях. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение. Характеристики гармонических колебаний. Энергия гармонических колебаний. Сложение одинаково направленных (скалярных) гармонических колебаний. Метод векторной диаграммы. Биения. Сложение взаимно перпендикулярных (векторных) гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Аperiodический процесс. Частота и коэффициент затухания. Логарифмический декремент затухания и добротность колебательной системы. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Амплитуда и фаза при вынужденных механических колебаниях. Механический резонанс. Резонансные кривые. Соотношение между фазами вынуждающей силы и скорости при механическом резонансе. Спектр колебаний, понятие о разложении Фурье.

Механические волны. Механизм образования механических волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Волновое уравнение и его решение. Гармонические волны и их характеристики. Ударные волны. Принцип суперпозиции волн и граница его применимости. Фазовая скорость и дисперсия волн. Волновой пакет и групповая скорость. Понятие о когерентности. Интерференция волн. Стоячие волны. Эффект Доплера для звуковых волн. Ультра- и инфразвуки.

Электромагнитные колебания. Дифференциальное уравнение колебаний в колебательном контуре и его решение. Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний и его решение. Частота и коэффициент затухания электромагнитного колебания. Логарифмический декремент затухания и добротность контура. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение. Амплитуда и фаза при вынужденных электромаг-

нитных колебаниях. Резонанс в колебательном контуре. Резонансные кривые для напряжения и силы тока. Переменный ток.

Электромагнитные волны. Фарадеевская и максвелловская трактовки явления электромагнитной индукции. Ток смещения. Электромагнитное поле. Система уравнений Максвелла. Волновое уравнение для электромагнитного поля и его решение. Скорость распространения электромагнитных волн в средах. Основные свойства электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга. Импульс электромагнитного поля. Излучение диполя. Диаграмма направленности. Эффект Доплера для электромагнитных волн. Шкала электромагнитных волн.

5. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Распространение света через границу двух сред. Электромагнитная природа света. Принцип Гюйгенса. Законы отражения и преломления. Абсолютный и относительный показатели преломления. Полное внутреннее отражение. Световоды. Геометрическая оптика как предельный случай волновой оптики. Оптические инструменты.

Интерференция света. Монохроматические и немонахроматические волны. Принцип суперпозиции и интенсивность при сложении световых волн. Временная когерентность. Время и длина когерентности. Пространственная когерентность. Радиус когерентности. Оптическая длина пути. Оптическая разность хода. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников. Полосы равной толщины и равного наклона. Многолучевая интерференция. Способы получения когерентных лучей. Интерферометры.

Дифракция света. Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света. Дифракция Френеля. Дифракция Френеля от круглого отверстия и круглого диска. Дифракция Френеля от края полуплоскости. Спираль Корню. Дифракция Фраунгофера от бесконечно длинной прямой щели. Дифракционная расходимость. Дифракция от одномерной дифракционной решетки. Разрешающая способность оптических инструментов. Понятие о голографии.

Поляризация света. Естественный и поляризованный свет. Степень поляризации. Поляризация света при преломлении и отражении. Закон Брюстера. Поляризация при двойном лучепреломлении. Обыкновенный и необыкновенный лучи. Оптическая ось кристалла. Поляроиды и поляризационные призмы. Поляризаторы и анализаторы. Закон Малюса. Полуволновые и четвертьволновые пластинки. Искусственная оптическая анизотропия. Оптическая активность вещества. Эффект Фарадея.

Дисперсия света. Затруднения в электромагнитной теории Максвелла. Нормальная и аномальная дисперсии. Методы наблюдения дисперсии. Призматический и дифракционный спектры. Электронная теория дисперсии света. Поглощение света. Закон Бугера. Цвета тел и спектры поглощения.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Краткие теоретические сведения

Кинематика

• Положение материальной точки A (рис. 1) в пространстве задается радиус-вектором \vec{r} (вектор, проведенный из начала координат в данную точку):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы направлений; x, y, z – координаты точки.

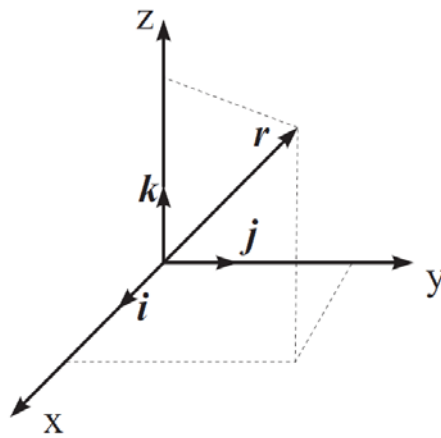


Рис. 1. Декартова система координат

Кинематические уравнения движения в координатной форме:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad \text{где } t \text{ – время.}$$

• Средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{r}$ – перемещение материальной точки за интервал времени Δt .

В Международной системе (СИ) единицей расстояния является метр, единицей времени – секунда, поэтому скорость выражается в метрах в секунду (м/с).

Средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt .

Путь Δs в отличие от разности координат $\Delta x = x_2 - x_1$ не может убывать и принимать отрицательные значения, т. е. $\Delta s \geq 0$.

Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z,$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции скорости v на оси координат.

$$\text{Модуль скорости } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

• Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z,$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ – проекции ускорения a на оси координат; единица измерения ускорения – метр на секунду в квадрате (м/с^2).

$$\text{Модуль ускорения } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

При криволинейном движении (рис. 2) ускорение можно представить как сумму нормальной a_n и тангенциальной a_τ составляющих:

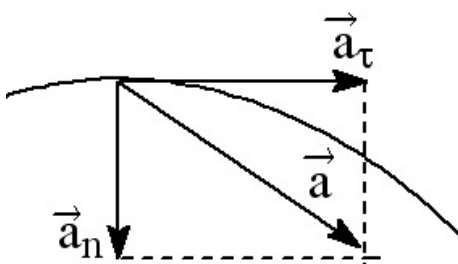


Рис. 2. Криволинейное движение точки (тела)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

Модули этих ускорений:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},$$

где R – радиус кривизны в данной точке траектории.

• Кинематические уравнения прямолинейного равномерного движения ($v = \text{const}$):

1) в векторной форме

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t,$$

где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор, определяющий положение материальной точки в момент времени t ; \vec{r}_0 – радиус-вектор, определяющий положение точки в начальный момент времени ($t = 0$);

2) в координатной форме (в проекции на координатные оси Ox , Oy , Oz)

$$x(t) = x_0 + v_x t, \quad y(t) = y_0 + v_y t, \quad z(t) = z_0 + v_z t,$$

где x_0, y_0, z_0 – начальные координаты; v_x, v_y, v_z – проекции скорости на координатные оси.

• Кинематические уравнения прямолинейного равноускоренного движения ($a = \text{const}$):

1) в векторной форме

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2},$$

где \vec{v}_0 – начальная скорость (скорость материальной точки в момент времени $t = 0$);

2) в координатной форме

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}, \quad z(t) = z_0 + v_{0z} t + \frac{a_z t^2}{2},$$

где v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} – проекции начальной скорости на координатные оси; a_x, a_y, a_z – проекции ускорения.

• Скорость точки при равноускоренном движении:

1) в векторной форме

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t;$$

2) в координатной форме

$$v_x(t) = v_{0x} + a_{0x} t, \quad v_y(t) = v_{0y} + a_{0y} t, \quad v_z(t) = v_{0z} + a_{0z} t.$$

• Средняя угловая скорость

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta \varphi$ – угловое перемещение за время Δt ; единица измерения угловой скорости – радиан в секунду (рад/с).

• Мгновенная угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

в проекции на ось вращения

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

• Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

в проекции на ось вращения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Единица измерения углового ускорения – радиан в секунду в квадрате ($\text{рад}/\text{с}^2$).

• Кинематическое уравнение равномерного ($\omega = \text{const}$) вращения в проекции на ось вращения

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 – начальное угловое ускорение.

• Частота вращения

$$n = \frac{N}{t}, \text{ или } n = \frac{1}{T},$$

где N – число оборотов, совершаемое телом за время t ; T – период вращения (время одного полного оборота); единица измерения частоты – секунда в минус первой степени (с^{-1}).

Угловое перемещение φ и угловое ускорение ω связаны с числом оборотов, частотой вращения и периодом вращения соотношениями

$$\varphi = 2\pi N, \quad \omega = 2\pi n, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

• Кинематическое уравнение равноускоренного вращения в проекции на ось вращения

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

Угловая скорость при равноускоренном вращении

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Число оборотов N связано со средней частотой $\langle n \rangle$ вращения соотношением

$$N = \langle n \rangle t.$$

При равноускоренном вращении $\langle n \rangle$ есть полусумма начальной и конечной мгновенных частот вращения:

$$\langle n \rangle = \frac{n_0 + n}{2}.$$

• Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими вращение материальной точки, выражается следующими формулами:

$$s = \varphi R,$$

где φ – угол поворота тела; s – путь, пройденный точкой по дуге окружности радиуса R .

Скорость точки (линейная) $v = \omega R$, $\vec{v} = [\vec{\omega}R]$;

ускорение точки $a_\tau = \varepsilon R$, $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}R]$ (тангенциальное), $a_n = \omega^2 R$ (нормальное).

Динамика материальной точки и тела, движущихся поступательно

• Уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона):

1) в векторной форме

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad \text{или} \quad m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

где $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ – геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; m – масса точки, кг; \vec{a} – ускорение, м/с²; $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс, кг · м/с; N – число сил, действующих на точку;

2) в координатной форме

$$ma_x = \sum F_{xi}, \quad ma_y = \sum F_{yi}, \quad ma_z = \sum F_{zi}$$

$$\text{или} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{xi}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{yi}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{zi},$$

где под знаком суммы стоят проекции сил \vec{F}_i на соответствующие оси координат.

В Международной системе единиц за единицу силы принимается сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с². Эта единица называется ньютоном, 1 Н = кг · м/с².

• Сила упругости

$$F_{\text{упр}} = -kx,$$

где k – коэффициент упругости; x – абсолютная деформация.

• Сила гравитационного взаимодействия

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная, $\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, рассматриваемых как материальные точки; r – расстояние между ними.

- Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила нормального давления.

- Координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

где m_i – масса i -й материальной точки; x_i, y_i, z_i – ее координаты.

- Закон сохранения импульса замкнутой системы:

$$\sum_{i=1}^N p_i = \text{const}, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \text{const},$$

где N – число материальных точек, входящих в систему; единица измерения импульса – килограмм на метр в секунду ($\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$).

- Работа, совершаемая постоянной силой,

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}, \quad \text{или} \quad \Delta A = F \cdot \Delta r \cos \alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов силы и перемещения; единица измерения работы – джоуль (Дж).

- Средняя мощность за интервал времени

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad \text{Единица измерения мощности – ватт (Вт).}$$

- Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt}, \quad \text{или} \quad N = F v \cos \alpha,$$

где dA – работа, совершаемая за промежуток времени.

• Кинетическая энергия материальной точки (тела), движущейся поступательно,

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad \text{или} \quad E_k = \frac{p^2}{2m}. \quad \text{Единица измерения энергии – джоуль (Дж).}$$

• Потенциальная энергия тела и сила, действующая на тело в данной точке поля,

$$\vec{F} = -\text{grad}E_{\text{п}}, \text{ или } \vec{F} = -\left(\vec{i} \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}\right).$$

- Потенциальная энергия упругодеформированного тела (сжатой или растянутой пружины)

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}.$$

- Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек (тел) массами m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$E_{\text{п}} = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

- Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле силы тяжести,

$$E_{\text{п}} = mgh,$$

где h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой для отсчета потенциальной энергии. Эта формула справедлива при условии $h \ll R$, где R – радиус Земли.

- Закон сохранения энергии для замкнутой системы, в которой действуют только консервативные силы,

$$E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \text{const}.$$

Динамика вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

- Момент силы \vec{F} , действующей на тело, относительно оси вращения

$$M = F_{\perp} l,$$

где F_{\perp} – проекция силы \vec{F} на плоскость, перпендикулярную оси вращения; l – плечо силы \vec{F} (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы). Единица измерения момента силы – ньютон на метр ($\text{Н} \cdot \text{м}$).

- Момент инерции относительно оси Oz :

$$1) \text{ материальной точки } I = mr^2,$$

где m – масса материальной точки; r – расстояние от нее до оси вращения;

2) системы материальных точек

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где m_i – масса i -й материальной точки; r_i – расстояние от этой точки до оси Oz . Единица измерения момента инерции – килограмм на метр в квадрате ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

• Теорема Штейнера: *момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту его инерции I_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями:*

$$I = I_C + ma^2.$$

• Момент силы относительно оси, проходящей через точку O ,

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}],$$

где \vec{r} – радиус-вектор, направленный от точки O , относительно которой определяется момент силы, к точке приложения силы \vec{F} .

• Момент силы, действующей на тело, относительно оси Oz (проекция вектора \vec{M} на ось Oz)

$$M_z = [\vec{r}\vec{F}]_z, \text{ или } M_z = F_{\perp} l,$$

где F_{\perp} – проекция силы \vec{F} на плоскость, перпендикулярную оси Oz ; l – плечо силы \vec{F} (кратчайшее расстояние от оси до линии действия силы).

• Момент импульса материальной точки относительно точки O

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}],$$

где \vec{r} – радиус-вектор, направленный от точки O , относительно которой определяется момент импульса, к движущейся материальной точке, импульс которой равен \vec{p} . Единица измерения момента импульса – килограмм на метр в квадрате на секунду ($\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$).

• Момент импульса материальной точки относительно оси Oz (проекция вектора \vec{L} на ось Oz)

$$L_z = [\vec{r}\vec{p}]_z, \text{ или } L_z = p_{\perp} l,$$

где p_{\perp} – проекция импульса \vec{p} на плоскость, перпендикулярную оси Oz ; l – плечо импульса \vec{p} (кратчайшее расстояние от оси Oz до линии, вдоль которой движется материальная точка).

- Момент импульса твердого тела, вращающегося относительно оси Oz ,

$$L_z = I_z \omega.$$

- Основной закон динамики вращательного движения:

1) относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

где \vec{M} – главный момент всех внешних сил, действующих на систему, относительно неподвижной точки O ; $\frac{d\vec{L}}{dt}$ – скорость изменения момента импульса системы относительно той же точки;

2) относительно неподвижной оси Oz

$$M_z = \frac{dL_z}{dt},$$

где M_z и L_z – главный момент внешних сил и момент импульса системы относительно оси Oz или для твердого тела с неизменным моментом инерции

$$M_z = I_z \varepsilon,$$

где I_z – момент инерции твердого тела; ε – угловое ускорение.

- Работа постоянного момента силы M_z , действующего на вращающееся вокруг оси Oz тело,

$$A = M_z \varphi, \text{ где } \varphi \text{ – угол поворота тела.}$$

- Мгновенная мощность $N = M_z \omega$.

- Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси Oz ,

$$E_k = \frac{I_z \omega^2}{2}.$$

- Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости,

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_z \omega^2}{2},$$

где v_C – скорость центра масс тела; I_z – момент инерции тела относительно оси Oz , проходящей через его центр масс.

Примеры решения задач

Пример 1. Движение материальной точки задано уравнениями $x = A_1 t^2$ и $y = A_2 + B_2 t^3$. Определите скорость и ускорение точки к концу второй секунды движения и его среднюю скорость за первые 2 с движения. Принять $A_1 = 1,5 \text{ м/с}^2$, $A_2 = 2,5 \text{ м}$, $B_2 = 0,5 \text{ м/с}^3$.

Решение. Движение материальной точки происходит по кривой линии в плоскости, определяемой осями X и Y . Проекции вектора на оси X и Y равны первой производной по времени от соответствующей координаты:

$$v_x = dx / dt = d(A_1 t^2) / dt = 2A_1 t;$$

$$v_y = dy / dt = d(A_2 + B_2 t^3) / dt = 3B_2 t^2.$$

Величина (модуль) мгновенной скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4A_1^2 t^2 + 9B_2^2 t^4} = t\sqrt{4A_1^2 + 9B_2^2 t^2}.$$

Мгновенное ускорение равно первой производной от скорости по времени:

$$a = dv / dt = d\left(t\sqrt{4A_1^2 + 9B_2^2 t^2}\right) / dt = \left(\sqrt{4A_1^2 + 9B_2^2 t^2} + 9B_2^2 t^2 / \sqrt{4A_1^2 + 9B_2^2 t^2}\right).$$

Средняя путевая скорость за некоторый промежуток времени t равна отношению пути s , пройденного за данный промежуток времени, к величине этого промежутка:

$$\langle v \rangle = s / t.$$

Путь, пройденный материальной точкой за время t ,

$$s = \int_0^t v d\tau = \int_0^t \tau \sqrt{4A_1^2 + 9B_2^2 \tau^2} d\tau = (4A_1^2 + 9B_2^2 t^2)^{3/2} / (27B_2^2).$$

Таким образом, средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = s / t = (4A_1^2 + 9B_2^2 t^2)^{3/2} / (27B_2^2 t).$$

Выпишем численные значения величин в СИ: $A_1 = 1,5 \text{ м/с}^2$, $A_2 = 2,5 \text{ м}$, $B_2 = 0,5 \text{ м/с}^3$, $t = 2 \text{ с}$.

Проверим правильность расчётных формул, проанализировав единицы измерения. Для этого в расчётные формулы подставим единицы измерения величин и преобразуем их до получения единиц определяемой величины:

$$m/c = c\sqrt{\left(\frac{m}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{m}{c^3}\right)^2 c^2} = c\sqrt{m^2/c^4 + m^2/c^4} = c\sqrt{m^2/c^4} = c \cdot m/c^2 = m/c;$$

$$m/c^2 = \sqrt{\left(\frac{m}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{m}{c^3}\right)^2 c^2} + \frac{\left(\frac{m}{c^3}\right)^2 c^2}{\sqrt{\left(\frac{m}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{m}{c^3}\right)^2 c^2}} = \frac{m}{c^2} + \frac{\left(\frac{m}{c^2}\right)^2}{m/c^2} = m/c^2;$$

$$m/c = \frac{\left[\left(\frac{m}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{m}{c^3}\right)^2 c^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{m}{c^3}\right)^2 c} = \frac{\left[\left(\frac{m}{c^2}\right)^2\right]^{3/2}}{m^2/c^5} = \frac{m^3/c^6}{m^2/c^5} = m/c.$$

Расчётные формулы верны, так как единицы левой и правой частей расчётных формул одинаковы.

Подставим численные значения величин в расчётные формулы и произведём вычисления:

$$v = 2\sqrt{4 \cdot 1,5^2 + 9 \cdot 0,5^2 \cdot 2^2} \text{ м/с} = 8,5 \text{ м/с};$$

$$a = \left(\sqrt{4 \cdot 1,5^2 + 9 \cdot 0,5^2 \cdot 2^2} + 9 \cdot 0,5^2 \cdot 2^2 / \sqrt{4 \cdot 1,5^2 + 9 \cdot 0,5^2 \cdot 2^2}\right) \text{ м/с}^2 = 6,4 \text{ м/с}^2;$$

$$\langle v \rangle = \left(\sqrt{4 \cdot 1,5^2 + 9 \cdot 0,5^2 \cdot 2^2}\right)^3 / (27 \cdot 0,5^2 \cdot 2) \text{ м/с} = 5,7 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Навстречу шару массой $m_1 = 500$ г, движущемуся со скоростью $v_1 = 10$ м/с, летит шар массой $m_2 = 200$ г со скоростью $v_2 = 25$ м/с. При столкновении шары испытывают прямой, центральный, абсолютно упругий удар. Определите скорости u_1 и u_2 шаров после столкновения.

Решение. Систему взаимодействующих шаров будем рассматривать как замкнутую систему. Для такой системы при абсолютно упругом ударе справедливы законы сохранения импульса и кинетической энергии.

Закон сохранения импульса для системы двух взаимодействующих шаров выражается соотношением

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2,$$

где m_1 и m_2 – массы шаров; \vec{v}_1 и \vec{v}_2 – векторы скоростей шаров до столкновения; \vec{u}_1 и \vec{u}_2 – векторы скоростей шаров после столкновения; $m_1 \vec{v}_1$ и $m_1 \vec{u}_1$ – импульсы первого шара до и после столкновения; $m_2 \vec{v}_2$ и $m_2 \vec{u}_2$ – импульсы второго шара до и после столкновения.

Спроектируем это уравнение на ось, совпадающую с направлением движения первого шара:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (1)$$

Закон сохранения кинетической энергии для рассматриваемой системы выглядит следующим образом:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (2)$$

Решим совместно уравнения (1) и (2): для этого каждое слагаемое второго уравнения умножим на 2, а затем в первом и втором уравнениях перенесём в левую часть уравнения характеристики, касающиеся первого шара, характеристики же, касающиеся второго шара, перенесём в правую часть:

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 + m_2 v_2; \quad (3)$$

$$m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2. \quad (4)$$

Разделим уравнение (4) на уравнение (3):

$$\frac{m_1(v_1^2 - u_1^2)}{m_1(v_1 - u_1)} = \frac{m_2(u_2^2 - v_2^2)}{m_2(u_2 + v_2)}.$$

После преобразования получим

$$\frac{(v_1 - u_1)(v_1 + u_1)}{(v_1 - u_1)} = \frac{(u_2 - v_2)(u_2 + v_2)}{(u_2 + v_2)}, \quad \text{или} \quad v_1 + u_1 = u_2 - v_2.$$

Отсюда $u_2 = v_1 + v_2 + u_1$.

Подставим полученное для скорости u_2 выражение в уравнение (3):

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2(v_1 + v_2 + u_1) + m_2 v_2.$$

Решим последнее уравнение относительно u_1 :

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Скорость второго шара после столкновения

$$u_2 = v_1 + v_2 + \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Выпишем численные значения величин в единицах СИ: $m_1 = 500 \text{ г} = 0,5 \text{ кг}$; $m_2 = 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг}$; $v_1 = 10 \text{ м/с}$; $v_2 = 25 \text{ м/с}$.

Проверим правильность расчётных формул, проанализировав единицы измерения. Для этого в расчётные формулы подставим еди-

ницы измерения величин и преобразуем их до получения единиц определяемой величины:

$$m/c = \frac{(кг - кг) м/с \pm кг \cdot м/с}{кг + кг} = \frac{кг \cdot м/с}{кг} = м/с.$$

Расчётные формулы верны, так как единицы левой и правой частей расчётных формул одинаковы.

Подставим численные значения величин в расчётные формулы и произведём вычисления скоростей шаров после соударения:

$$u_1 = \frac{(0,5 - 0,2) 10 - 2 \cdot 0,2 \cdot 25}{0,5 + 0,2} м/с = -10 м/с;$$

$$u_2 = \frac{(0,5 - 0,2) 25 + 2 \cdot 0,5 \cdot 10}{0,5 + 0,2} м/с = 25 м/с.$$

Результат показывает, что оба шара, не изменив величин скоростей, изменили направление движения на противоположное.

Пример 3. На блок намотана невесомая и нерастяжимая нить, к свободному концу которой подвешен груз массой $m_1 = 0,5$ кг. Блок представляет собой сплошной диск массой $m_2 = 20$ кг и радиусом $R = 15$ см. Груз отпускают. Определите угловое ускорение и кинетическую энергию блока, а также полное ускорение точек на ободу блока через $t = 2$ с после начала падения груза. Сколько оборотов выполнит блок к указанному моменту времени?

Решение. На груз действуют две силы: сила тяжести $m_1 \vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити \vec{T} , направленная вертикально вверх (рис. 3).

Если принять направление вниз за положительное, то согласно второму закону Ньютона можно написать динамическое уравнение движения груза в виде $m_1 g - T = m_1 a_1$, где m_1 – масса груза; g – ускорение свободного падения; a_1 – ускорение движения груза.

$$\text{Отсюда } T = m_1(g - a_1).$$

С такой же силой, но направленной вниз, нить действует на блок. Эта сила создает вращающий момент

$$M = TR = m_1(g - a_1)R, \quad (1)$$

где R – радиус блока.

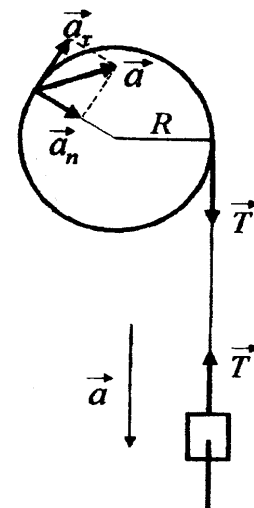


Рис. 3. Схема для решения примера 3

Из основного уравнения динамики вращательного движения вращающий момент

$$M = J\varepsilon, \quad (2)$$

где J – момент инерции блока; ε – его угловое ускорение.

Момент инерции сплошного диска

$$J = m_2 R^2 / 2,$$

где m_2 – масса блока.

Угловое ускорение блока

$$\varepsilon = a_\tau / R,$$

где a_τ – тангенциальное ускорение точек на ободу блока.

Подставив выражения для J и ε в формулу (2), получим

$$M = \frac{1}{2} m_2 R^2 a_\tau / R = \frac{1}{2} m_2 R a_\tau. \quad (3)$$

Так как нить нерастяжима, то ускорение движения груза и тангенциальное ускорение точек на ободу блока одинаковы: $a_1 = a_\tau$.

Приравняем выражения (1) и (3) для вращающего момента:

$$m_1(-a_\tau)R = \frac{1}{2} m_2 R a_\tau.$$

Из последнего выражения получаем

$$a_\tau = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} g.$$

Угловое ускорение блока

$$\varepsilon = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} \frac{g}{R}. \quad (4)$$

Угловая скорость блока в момент времени t

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

где ω_0 – начальная угловая скорость блока ($\omega_0 = 0$ по условию задачи).

Кинетическая энергия блока в этот момент

$$W_\kappa = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m_2 R^2 \varepsilon^2 t^2}{4} = \frac{m_2 (R\varepsilon t)^2}{4}. \quad (5)$$

Нормальное ускорение точек на ободу блока

$$a_n = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R.$$

Полное линейное ускорение точек на ободе блока

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(\varepsilon^2 t^2 R)^2 + (\varepsilon R)^2} = \varepsilon R \sqrt{(\varepsilon t^2)^2 + 1}. \quad (6)$$

Количество оборотов, выполненных блоком к моменту времени t , $N = \varphi/(2\pi)$, где φ – угол поворота блока за время t ; 2π – радиан-угол, соответствующий одному обороту блока.

В случае равноускоренного вращения $\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2/2$.

При $\omega_0 = 0$ $\varphi = \varepsilon t^2/2$, а $N = \varepsilon t^2/(4\pi)$.

Выпишем численные значения величин в СИ: $m_1 = 0,5$ кг; $m_2 = 20$ кг; $R = 15$ см = $0,15$ м; $t = 2$ с.

Проверим правильность расчётных формул (4), (5) и (6), проанализировав единицы измерения. Для этого в расчётные формулы подставим единицы измерения величин и преобразуем их до получения единиц определяемой величины:

$$c^{-2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2}{\text{кг} + \text{кг} \cdot \text{м}} = \text{с}^{-2}.$$

$$\text{Дж} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-4} \cdot \text{с}^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж};$$

$$\text{м}/\text{с}^2 = \text{с}^{-2} \cdot \text{м} \cdot \sqrt{(\text{с}^{-2} \cdot \text{с}^2)^2} = \text{м}/\text{с}^2.$$

Расчётные формулы верны, так как единицы левой и правой частей расчётных формул одинаковы.

Подставим численные значения величин в расчётные формулы и произведём вычисления:

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,5 + 20} \cdot \frac{9,8}{0,15} \text{ с}^{-2} = 3,1 \text{ с}^{-2};$$

$$W_k = \frac{20 (0,15 \cdot 3,1 \cdot 2)^2}{4} \text{ Дж} = 4,3 \text{ Дж};$$

$$a = 3,1 \cdot 0,15 \sqrt{(3,1 \cdot 2^2)^2 + 1} \text{ м}/\text{с}^2 = 5,8 \text{ м}/\text{с}^2;$$

$$N = \frac{3,1 \cdot 2^2}{4 \cdot 3,14} = 0,99.$$

Пример 4. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину от $\Delta x_1 = 1$ см до $\Delta x_2 = 3$ см, если под действием силы $F = 50$ Н пружина растягивается на $\Delta x = 2$ см?

Решение. В соответствии с законом сохранения и превращения механической энергии работа внешней деформирующей силы равна приращению потенциальной энергии пружины:

$$A = W_{n2} - W_{n1},$$

где W_{n2} – потенциальная энергия пружины, растянутой на Δx_2 ; W_{n1} – потенциальная энергия пружины, растянутой на Δx_1 .

Потенциальная энергия упругодеформированной пружины

$$W_n = \frac{k \cdot \Delta x^2}{2}, \text{ где } k \text{ – жесткость пружины.}$$

$$\text{Поэтому } W_{n1} = \frac{k \cdot \Delta x_1^2}{2} \text{ и } W_{n2} = \frac{k \cdot \Delta x_2^2}{2},$$

$$\text{а } A = \frac{k \cdot \Delta x_2^2}{2} - \frac{k \cdot \Delta x_1^2}{2} = \frac{k}{2} (\Delta x_2^2 - \Delta x_1^2).$$

По закону Гука сила упругости, возникающая в упругодеформированном теле, $F_y = -k \cdot \Delta x$.

В соответствии с третьим законом Ньютона сила упругости F_y равна по величине внешней силе F , вызывающей деформацию, и противоположно ей направлена: $F_y = -F$. Поэтому $F = k \cdot \Delta x$. Отсюда $k = F / \Delta x$. С учетом последнего выражения $A = \frac{F}{2 \cdot \Delta x} (x_2^2 - x_1^2)$.

Выпишем численные значения величин в СИ: $F = 50 \text{ Н}$; $\Delta x = 2 \text{ см} = 0,02 \text{ м}$; $x_1 = 1 \text{ см} = 0,01 \text{ м}$; $\Delta x_2 = 3 \text{ см} = 0,03 \text{ м}$.

Проверим правильность расчётной формулы, проанализировав единицы измерения. Для этого в расчётную формулу подставим единицы измерения величин и преобразуем их до получения единицы измерения определяемой величины:

$$\text{Дж} = \frac{\text{Н}}{\text{м}} (\text{м}^2 - \text{м}^2) = \frac{\text{Н}}{\text{м}} \text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Расчётная формула верна, так как единицы её левой и правой частей одинаковы.

Подставим численные значения величин в расчётную формулу и произведём вычисления:

$$A = \frac{50}{2 \cdot 0,02} (0,03^2 - 0,01^2) \text{ Дж} = 1 \text{ Дж}.$$

Пример 5. На скамье Жуковского стоит человек и держит над головой стержень длиной $l = 1,5 \text{ м}$ и массой $m = 6 \text{ кг}$, расположенный вертикально по оси вращения скамьи, которая вращается с частотой $n = 48 \text{ об/мин}$. С какой частотой n' будет вращаться скамья с челове-

ком, если он повернёт стержень в горизонтальное положение, держа его за середину? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен $J = 6,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Решение. В соответствии с законом сохранения момента импульса момент импульса $J'\vec{\omega}'$ вращающейся системы «скамья – человек – стержень» при горизонтальном положении стержня равен моменту импульса системы $J\vec{\omega}$ при начальном вертикальном положении стержня $J'\vec{\omega}' = J\vec{\omega}$,

где J' – момент инерции системы при горизонтальном положении стержня; $\vec{\omega}'$ – вектор угловой скорости системы при горизонтальном положении стержня; J – момент инерции системы при вертикальном положении стержня; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости системы при вертикальном положении стержня.

Так как направления векторов угловых скоростей $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}'$ в рассматриваемом случае совпадают, то в проекции на ось вращения закон сохранения момента импульса запишется в виде $J'\omega' = J\omega$.

Момент инерции стержня при его расположении вертикально вдоль оси вращения скамьи равен нулю, а при его горизонтальном положении, когда ось вращения проходит через середину стержня, $J_{\text{ст}} = ml^2/12$, где m – масса стержня; l – его длина.

Момент инерции системы при горизонтальном положении стержня $J' = J + J_{\text{ст}} = J + ml^2/12$.

Угловые скорости скамьи при вертикальном и горизонтальном положениях стержня соответственно равны: $\omega = 2\pi n$ и $\omega' = 2\pi n'$, где n и n' – частоты вращения скамьи при вертикальном и горизонтальном положениях стержня.

С учётом всего сказанного закон сохранения момента импульса для рассматриваемой системы запишется в виде

$$(J + ml^2 / 12) 2\pi n' = J \cdot 2\pi n.$$

$$\text{Отсюда } n' = \frac{Jn}{J + ml^2 / 12}.$$

Выпишем численные значения величин в СИ: $l = 1,5 \text{ м}$; $m = 6 \text{ кг}$; $n = 48 \text{ об/мин} = 8 \text{ об/с}$; $J = 6,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Проверим правильность расчётной формулы, проанализировав единицы измерения:

$$\text{об/с} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{об/с}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 + \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{об/с}}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \text{об/с}.$$

Расчётная формула верна, так как единицы её левой и правой частей одинаковы.

Подставим численные значения величин в расчётную формулу и произведём вычисления:

$$n' = \frac{6,5 \cdot 8}{6,5 + \frac{1}{12} \cdot 6 \cdot 1,5^2} \text{ об/с} = 6,8 \text{ об/с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Закон движения материальной точки имеет вид $\vec{r} = 3t\vec{i} + (3 + 2t^2)\vec{j}$. Найдите скорость и ускорение тела в конце пятой секунды движения.

2. Тело брошено под углом к горизонту так, что его радиус-вектор изменяется по закону $\vec{r} = 3t\vec{i} + (3t - 2t^2)\vec{j}$. Определите дальность полета тела.

3. Уравнение движения материальной точки вдоль оси X имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ м; $B = 10$ м/с; $C = -0,5$ м/с³. Найдите координату x , скорость v_x и ускорение a_x точки в момент времени $t = 2$ с.

4. Барабан сепаратора радиусом $R = 0,2$ м вращается согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад; $B = -1$ рад/с; $C = 0,1$ рад/с³. Определите тангенциальное a_τ , нормальное a_n и полное ускорение a точек на поверхности барабана в момент времени $t = 10$ с.

5. Города А и В расположены на одном берегу реки, причем город В расположен ниже по течению. Одновременно из города А в город В отправляется плот, а из города В в город А – лодка, которая встречается с плотом через $t = 5$ ч. Доплыв до города А, лодка поворачивает обратно и приплывает в город В одновременно с плотом. Сколько времени t плот и лодка находились в движении?

6. Два тела падают с высоты $H = 20$ м без начальной скорости, но одно из них встречает на своем пути закрепленную площадку, наклоненную под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. В результате удара о площадку направление скорости становится горизонтальным. Место

удара находится на высоте $h = 10$ м. Определите время падения тел t_1 и t_2 .

7. Тело брошено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Каковы будут значения нормального и тангенциального ускорений тела через $\tau = 1$ с после начала движения? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

8. Шарик бросают под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 14$ м/с. На расстоянии $L = 11$ м от места бросания шарик упруго ударяется о вертикальную стену. На каком расстоянии s от стены шарик упадет на землю?

9. С высокого берега брошен камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с, направленной вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найдите высоту точки H , с которой был брошен камень, если дальность полета камня $s = 20$ м.

10. Две материальные точки движутся по окружности радиусом 1,2 м согласно уравнениям $\xi_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ и $\xi_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где ξ_1 и ξ_2 – криволинейные координаты; $A_1 = 8$ м, $B_1 = 1,8$ м/с, $C_1 = -0,5$ м · с⁻², $A_2 = -1$ м, $B_2 = 1$ м/с, $C_2 = 1,2$ м · с⁻². Определите линейную и угловую скорости, тангенциальные, нормальные, полные и угловые ускорения в момент совмещения точек.

11. Точка равномерно вращается по окружности против часовой стрелки, делая 5 об/с. Радиус окружности 20 см. Найдите смещение, скорость и ускорение проекции точки на вертикальный диаметр в тот момент, когда точка прошла треть окружности. В момент, выбранный за начальный, точка имела положительное максимальное смещение.

12. Координаты движущейся материальной точки меняются по времени: $x = t$; $y = e^t$; $Z = 0$. Постройте траекторию движения точки, найдите скорость, полное, тангенциальное и нормальное ускорения в момент времени $t = -1, 0, 2$ с.

13. Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения 50 с⁻¹, после выключения тока, сделав 628 оборотов, остановился. Определите угловое ускорение якоря.

14. Точка движется по окружности радиусом 20 см с постоянным тангенциальным ускорением 5 см/с². Через сколько времени после начала движения нормальное ускорение точки будет равно ее тангенциальному ускорению?

15. Найдите угловое ускорение колеса, если известно, что через 2 с после начала равноускоренного движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол 60° с направлением линейной скорости этой точки.

16. Определите работу по растяжению двух последовательно соединенных пружин с жесткостями $k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 300$ Н/м, если первая пружина при этом растянулась на $x_1 = 3$ см.

17. Две пружины жесткостью $k_1 = 0,5$ кН/м и $k_2 = 1$ кН/м скреплены параллельно. Определите потенциальную энергию этой системы при абсолютной деформации $x = 4$ см.

18. Налетев на пружинный буфер, вагон массой $m = 16$ т, двигавшийся со скоростью $0,6$ м/с, остановился, сжав пружину на $\Delta x = 8$ см. Найдите общую жесткость пружин буфера.

19. Груз массой $m = 0,5$ кг свободно падает с высоты $h = 2$ м на плиту $M = 1$ кг, укрепленную на пружине. Определите величину наибольшего сжатия пружины, если известно, что при действии на неё силы $F = 9,8$ Н она сжимается на $x = 1$ см. Удар считать неупругим.

20. Нить с привязанными к ее концам грузами массами $m_1 = 50$ г и $m_2 = 60$ г перекинута через блок диаметром $d = 20$ см. Определите момент инерции J блока, если под действием силы тяжести грузов он получил угловое ускорение $\varepsilon = 1,5$ рад/с². Трением и проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

21. Определите тормозящий момент M , который необходимо приложить к блоку, вращающемуся с частотой $n = 12$ с⁻¹, чтобы он остановился в течение времени $t = 8$ с. Диаметр блока $d = 30$ см. Массу блока $m = 6$ кг считать равномерно распределённой по ободу.

22. По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром $d = 75$ см и массой $m = 40$ кг приложена сила $F = 1$ кН. Определите угловое ускорение ε и частоту вращения n маховика через время $t = 10$ с после начала действия силы, если радиус шкива R равен 12 см. Силой трения пренебречь.

23. Наклонная плоскость, образующая угол 25° с плоскостью горизонта, имеет длину 2 м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за 2 с. Определите коэффициент трения тела о плоскость.

24. Определите линейное ускорение центра сплошного однородного диска, который скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α .

25. На однородный цилиндрический вал радиусом 50 см намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой 6,4 кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением 2 м/с^2 . Определите массу вала.

26. На краю платформы в виде диска, вращающегося по инерции вокруг вертикальной оси с частотой $n_1 = 8 \text{ мин}^{-1}$, стоит человек массой $m_1 = 70 \text{ кг}$. Когда человек перешёл в центр платформы, она стала вращаться с частотой $n_2 = 10 \text{ мин}^{-1}$. Определите массу m_2 платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

27. Человек сидит на скамье Жуковского и держит на вытянутых руках гири массой $m = 5 \text{ кг}$. Расстояние от каждой гири до оси скамьи $r_1 = 70 \text{ см}$. Скамья вращается с частотой $n_1 = 1 \text{ с}^{-1}$. Как изменится частота вращения скамьи и какую работу A совершит человек, если он сожмет в локтях руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до $r_2 = 20 \text{ см}$? Момент инерции скамьи с человеком вместе относительно оси скамьи $J = 2,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

28. Период обращения Луны вокруг Земли $T = 27 \text{ сут}$, средний радиус Земли $R_3 = 6400 \text{ км}$, средняя плотность Земли $\rho = 6 \text{ г/см}^3$. Определите расстояние r от Земли до Луны.

29. Спутник массой $m = 3 \text{ т}$ вращается вокруг Земли по круговой орбите на высоте $h = 520 \text{ км}$. Определите полную механическую энергию W спутника относительно Земли.

30. С наклонной плоскости скатываются сплошной и полый цилиндры с одинаковыми массами и радиусами. Сравните время их скатывания с наклонной плоскости.

31. Снаряд массой 10 кг обладал скоростью 10 м/с в верхней точке траектории. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая массой 3 кг получила скорость 400 м/с в прежнем направлении. Найдите скорость большей части после разрыва.

32. В баллистический маятник массой 5 кг попала пуля массой 10 г и застряла в нем. Найдите скорость пули, если маятник, отклонившись после удара, поднялся на высоту 10 см.

33. Шар массой 200 г, движущийся со скоростью 10 м/с, ударяет неподвижный шар массой 800 г. Удар прямой, абсолютно упругий. Каковы будут скорости шаров после удара?

34. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой 60 кг. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы равна 240 кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

35. Маховик в виде диска массой 50 кг и радиусом 20 см был раскручен до частоты вращения 480 мин^{-1} и затем предоставлен самому себе. Вследствие трения маховик остановился. Найдите момент сил трения, считая его постоянным для случая, когда маховик остановится через 50 с.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Краткие теоретические сведения

Молекулярное строение вещества и газовые законы

- Количество вещества

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где N – число структурных элементов (молекул, атомов, ионов и т. п.), составляющих тело (систему); N_A – постоянная Авогадро, $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ моль⁻¹. Единица измерения количества вещества – моль (моль).

- Молярная масса вещества

$$M = \frac{m}{\nu},$$

где m – масса тела (системы); ν – количество вещества этого тела. Единица измерения молярной массы – килограмм на моль (кг/моль).

- Относительная молекулярная масса вещества

$$M_r = \sum_i n_i A_{r,i},$$

где n_i – число атомов i -го химического элемента; $A_{r,i}$ – относительная атомная масса этого элемента. Относительные атомные массы приводятся в таблице Д. И. Менделеева.

• Связь молярной массы M с относительной молекулярной массой вещества

$$M = M_r k, \text{ где } k = 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

- Количество вещества смеси газов

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n = \frac{N_1}{N_A} + \frac{N_2}{N_A} + \dots + \frac{N_n}{N_A},$$

$$\text{или } \nu = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_n}{M_n},$$

где ν_n , m_n , M_n , N_n – соответственно количество вещества, масса, молярная масса и число молекул n -го компонента смеси.

• Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона – Менделеева)

$$pV = \frac{m}{M} RT, \text{ или } pV = \nu RT,$$

где m – масса газа; M – молярная масса газа; R – молярная газовая постоянная; T – термодинамическая температура; ν – количество вещества; p – давление; V – объем газа.

• Опытные газовые законы, являющиеся частными случаями уравнения Клапейрона – Менделеева:

а) закон Бойля – Мариотта (изотермический процесс: $T = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$pV = \text{const},$$

или для двух состояний газа

$$p_1V_1 = p_2V_2;$$

б) закон Гей-Люссака (изобарный процесс: $p = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$\frac{V}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний газа

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2};$$

в) закон Шарля (изохорный процесс: $V = \text{const}$, $m = \text{const}$):

$$\frac{p}{T} = \text{const},$$

или для двух состояний газа

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2};$$

г) объединенный газовый закон ($m = \text{const}$):

$$\frac{pV}{T} = \text{const}, \text{ или } \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2},$$

где p_1 , V_1 , T_1 – давление, объем и температура газа в начальном состоянии; p_2 , V_2 , T_2 – те же величины в конечном состоянии.

Молекулярно-кинетическая теория газов

• Концентрация частиц (молекул, атомов и т. п.) однородной системы

$$n = \frac{N}{V} \text{ и } n = \frac{\rho}{M} N_A,$$

где N – число частиц; V – объем системы; ρ – плотность вещества (в любом агрегатном состоянии); M – молярная масса; N_A – постоянная Авогадро.

- Основное уравнение кинетической теории газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_n \rangle,$$

где p – давление газа; $\langle \epsilon_n \rangle$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

- Средняя кинетическая энергия молекулы (с учетом поступательного и вращательного движения)

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – число степеней свободы ($i = 3$ для одноатомной молекулы, $i = 5$ для двухатомной и $i = 6$ для трех- и более атомной молекулы); k – постоянная Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

- Средняя кинетическая энергия:

а) поступательного движения молекулы

$$\langle \epsilon_{\text{п}} \rangle = \frac{3}{2} kT;$$

б) вращательного движения молекулы

$$\epsilon_{\text{вр}} = \frac{i_{\text{вр}}}{2} kT,$$

где $i_{\text{вр}}$ – число вращательных степеней свободы ($i_{\text{вр}} = 2$ для двухатомной молекулы, $i_{\text{вр}} = 3$ для трех- и более атомной молекулы);

в) колебательного движения молекулы

$$\langle \epsilon_{\text{кол}} \rangle = kT.$$

- Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT.$$

- Скорость молекул:

а) средняя квадратичная

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_1}}, \text{ или } \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}};$$

б) средняя арифметическая

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_1}}, \text{ или } \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\pi M}};$$

в) наиболее вероятная

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_1}}, \text{ или } v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

где m_1 – масса одной молекулы.

Элементы статистической физики

- Распределение Больцмана (распределение частиц в силовом поле)

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right),$$

где n – концентрация частиц; U – их потенциальная энергия; n_0 – концентрация частиц в токах поля, где $U = 0$.

- Барометрическая формула (распределение давления в однородном поле силы тяжести)

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right), \text{ или } p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right),$$

где p – давление газа; m – масса частицы; g – ускорение свободного падения; h – высота точки по отношению к уровню, принятому за нулевой; p_0 – давление на этом уровне; M – молярная масса.

- Вероятность того, что физическая величина x , характеризующая молекулу, лежит в интервале значений от x до $(x + dx)$, определяется по формуле

$$dW(x) = f(x) dx,$$

где $f(x)$ – функция распределения молекул по значениям данной физической величины x (плотность вероятности).

- Количество молекул, для которых физическая величина x , характеризующая их, заключена в интервале значений от x до $(x + dx)$,

$$dN = NdW(x) = Nf(x) dx.$$

- Распределение Максвелла (распределение молекул по скоростям в пределах от v до $(v + dv)$)

$$dN(v) = Nf(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv,$$

где $f(v)$ – функция распределения молекул по модулям скоростей, выражающая отношение вероятности того, что скорость молекулы лежит в интервале v до $(v + dv)$, к величине этого интервала, а также долю числа молекул, скорости которых лежат в указанном интервале; N – общее число молекул; m – масса молекулы.

- Распределение молекул по импульсам. Число молекул, импульсы которых заключены в пределах от p до $(p + dp)$,

$$dN(p) = Nf(p) dp = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \left(\frac{m}{2mkT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) p^2 dp,$$

где $f(p)$ – функция распределения по импульсам.

- Распределение молекул по кинетическим энергиям поступательного движения. Число молекул, энергии которых заключены в интервале от ε до $(\varepsilon + d\varepsilon)$,

$$dN(\varepsilon) = Nf(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \left(\frac{1}{kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \varepsilon^{1/2} d\varepsilon,$$

где $f(\varepsilon)$ – функция распределения по кинетическим энергиям.

- Эффективное сечение столкновения молекул

$$\sigma = \pi d^2,$$

где d – эффективный диаметр молекулы, м. Единица измерения эффективного сечения столкновения молекул – метр в квадрате (м^2).

- Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle, \text{ или } \langle z \rangle = \sqrt{2} \sigma n \langle v \rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

- Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}.$$

- Импульс, переносимый молекулами из одного слоя газа в другой через элемент поверхности,

$$dp = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S dt,$$

где η – динамическая вязкость газа; $\frac{dv}{dz}$ – градиент скорости течения его слоев; ΔS – площадь элемента поверхности; dt – время переноса.

Физические основы термодинамики

- Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, получаемое системой, Дж; ΔU – изменение внутренней энергии системы, Дж; A – работа, совершаемая системой против внешних сил, Дж.

- Первое начало термодинамики в дифференциальной форме

$$\delta Q = dU + \delta A,$$

где δQ – бесконечно малое количество теплоты; dU – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы; δA – элементарная работа.

- Работа, совершаемая газом при изменении его объема,
 $\delta A = p dV$.

Частные случаи:

- а) при изобарном процессе ($p = \text{const}$)

$$A = p(V_2 - V_1);$$

- б) при изотермическом процессе ($T = \text{const}$)

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

- в) при изохорном процессе ($V = \text{const}$)

$$A = 0;$$

- г) при адиабатном процессе:

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2).$$

- Удельная теплоемкость вещества – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}.$$

Единица измерения удельной теплоемкости – джоуль на килограмм-кельвин (Дж/кг · К).

- Молярная теплоемкость вещества – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu \cdot dT}.$$

Единица измерения удельной теплоемкости – джоуль на моль-кельвин (Дж/моль · К).

- Связь между молярной C_m и удельной c теплоемкостями

$$C_m = cM,$$

где M – молярная масса газа.

- Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении

$$C_V = \frac{iR}{2}, \quad C_p = \frac{(i+2)R}{2},$$

где i – число степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

- Удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении

$$c_V = \frac{iR}{2M}, \quad c_p = \frac{(i+2)R}{2M}.$$

- Уравнение Майера

$$C_p = C_V + R.$$

- Показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}, \text{ или } \gamma = \frac{i+2}{i}.$$

- Применение первого начала термодинамики к изопроцессам:

а) к изохорному

$$\delta Q = dU;$$

$$Q = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1), \quad \Delta U = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1), \quad A = 0;$$

б) к изобарному

$$\delta Q = dU + \delta A;$$

$$Q = \frac{m}{M} C_p (T_2 - T_1), \quad \Delta U = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1), \quad A = p(V_2 - V_1), \text{ или } A = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1};$$

в) к изотермическому

$$\delta Q = \delta A;$$

$$Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad \Delta U = 0, \quad A = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1};$$

г) к адиабатному

$$\delta A = -dU;$$

$$\delta Q = 0, \quad \Delta U = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1), \quad A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2).$$

Уравнение адиабаты (уравнение Пуассона)

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

Связь между начальным и конечным значениями параметров состояний газа при адиабатном процессе:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

• Энтропия – функция состояния, дифференциалом которой является $\delta Q/T$:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Единица измерения энтропии – джоуль на кельвин (Дж/К).

Изменение энтропии:

а) при обратимых процессах (в замкнутой системе) $\Delta S = 0$;

б) при необратимых процессах (в замкнутой системе) $\Delta S > 0$.

• Формула Больцмана (статистическое толкование энтропии)

$$S = k \ln W,$$

где S – энтропия системы; k – постоянная Больцмана; W – статистический вес или термодинамическая вероятность состояния системы.

• Второе начало термодинамики: *любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает:*

$$\Delta S \geq 0.$$

• Третье начало термодинамики: *энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю Кельвина:*

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

• Энтальпия и ее изменение:

$$H = U + pV, \quad \Delta H = \Delta U + p\Delta V = Q \quad (\text{при } p = \text{const}),$$

$$\Delta H = \Delta U + V\Delta p \quad (\text{при } V = \text{const}).$$

• Термический коэффициент полезного действия цикла в общем случае равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю.

• КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad \text{или} \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура охладителя.

Реальные газы

• Уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT,$$

для произвольного количества вещества

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V_m^2}\right)(V_m - \nu b) = \nu RT,$$

где a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса; V – объем, занимаемый газом; V_m – молярный объем; p – давление газа на стенки сосуда; ν – количество вещества.

• Связь критических параметров – объема, давления и температуры газа – с постоянными Ван-дер-Ваальса:

$$V_{\text{кр}} = 3b, \quad p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{\text{кр}} = \frac{3a}{27Rb}.$$

• Внутренняя энергия реального газа

$$U = \nu \left(C_V T - \frac{a}{V_m} \right).$$

Примеры решения задач

Пример 1. Определите плотность смеси газов ($\nu_1 = 5$ моль азота и $\nu_2 = 10$ моль кислорода), содержащихся в баллоне при температуре $t = 17$ °С и давлении $p = 2,5$ МПа.

Решение. По определению плотность смеси газов

$$\rho_{\text{см}} = (m_1 + m_2)/V,$$

где m_1 и m_2 – массы азота и кислорода соответственно; V – объём баллона.

Причем $m_1 = \nu_1 M_1$ и $m_2 = \nu_2 M_2$, где ν_1 и ν_2 – количество молей азота и кислорода соответственно; M_1 и M_2 – их молярные массы.

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для каждого газа в отдельности:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT \quad \text{и} \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT,$$

где p_1 и p_2 – парциальные давления азота и кислорода соответственно; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная (термодинамическая) температура.

Суммируя правые и левые части этих равенств, получим

$$(p_1 + p_2)V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT.$$

Согласно закону Дальтона давление смеси газов $p_{\text{см}} = p_1 + p_2$.

Поэтому $p_{\text{см}}V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) RT = (v_1 + v_2)RT$. Отсюда объём газа в баллоне $V = (v_1 + v_2)RT / p_{\text{см}}$.

Подставив выражения для m_1 , m_2 и V в исходную формулу, получим

$$\rho_{\text{см}} = \frac{(v_1 M_1 + v_2 M_2) p_{\text{см}}}{(v_1 + v_2) RT}.$$

Выпишем численные значения величин в единицах СИ: $v_1 = 5$ моль; $v_2 = 10$ моль; $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $R = 8,31$ Дж/(К·моль); $T = 290$ К; $p_{\text{см}} = 2,5 \cdot 10^6$ Па.

Проверим размерность левой и правой частей расчётной формулы:

$$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{\text{моль} \cdot \text{кг/моль} \cdot \text{Па}}{\text{моль} \cdot \text{Дж/(К} \cdot \text{моль)} \cdot \text{К}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Па}}{\text{Дж}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Расчётная формула верна, так как единицы измерения левой и правой частей формулы одинаковы.

Произведём вычисления:

$$\rho_{\text{см}} = \frac{(5 \cdot 28 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 32 \cdot 10^{-3}) 2,5 \cdot 10^{-6}}{(5 + 10) 8,31 \cdot 290} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 31,8 \text{ кг/м}^3.$$

Пример 2. Определите массу углекислого газа, продиффундировавшего за время $t = 1$ ч через площадь $S = 1 \text{ м}^2$ почвы, прогретой до температуры $t_{\text{п}} = 27$ °С. Коэффициент диффузии D через почву принять равным $0,05 \text{ см}^2/\text{с}$. Плотность газа на глубине $h = 0,5$ м составляет $\rho_1 = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ г/см}^3$, а у поверхности почвы $\rho_2 = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ г/см}^3$. Определите, во сколько раз почва ослабляет диффузию.

Решение. Масса продиффундировавшего вещества выражается уравнением диффузии (законом Фика):

$$m = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S t, \quad (1)$$

где D – коэффициент диффузии; $\Delta \rho / \Delta x$ – градиент плотности; S – площадь поверхности, через которую рассчитывается диффузия; t – продолжительность диффузии.

При вертикальном направлении диффузионного потока углекислого газа из почвы градиент плотности

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta x} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{h},$$

где ρ_2 – плотность углекислого газа в почве вблизи ее поверхности; ρ_1 – плотность углекислого газа в почве на глубине h ; h – расстояние между слоями почвы, разность плотностей газа $\Delta\rho$ в которых требуется определить.

Следовательно, масса продиффундировавшего из почвы углекислого газа

$$m = -D \frac{\rho_2 - \rho_1}{h} St. \quad (2)$$

Влияние среды на интенсивность диффузии определяется отношением коэффициентов диффузии, так как отношение диффундирующих масс при одинаковых численных значениях $\Delta\rho/\Delta x$, S и t равно отношению коэффициентов диффузии. Поэтому ослабление диффузии почвой по сравнению с диффузией в газовой среде равно отношению D_r/D , где D_r – коэффициент диффузии углекислого газа через газовую среду (воздух).

Коэффициент диффузии вещества в газовой среде

$$D_r = \frac{1}{3} \langle l \rangle \langle v \rangle, \quad (3)$$

где $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекулы в газовой среде (воздухе); $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул углекислого газа.

При диффузии углекислого газа через воздух при температуре, равной средней температуре почвы,

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad \text{и} \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (4)$$

где d – эффективный диаметр молекулы диффундирующего газа; n – концентрация молекул газа, являющегося средой диффузии; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная (термодинамическая) температура газа; M – молярная масса углекислого газа.

Подставив эти выражения для $\langle l \rangle$ и $\langle v \rangle$ в формулу (3), получим

$$D_r = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{2}{3d^2 n} \sqrt{\frac{RT}{\pi^3 M}}. \quad (5)$$

Концентрация молекул воздуха

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\nu N_A}{V}, \quad (6)$$

где ν – количество вещества; N_A – постоянная Авогадро; V – объем газа.

Из уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = \nu RT$, где p – давление воздуха, имеем

$$\nu = \frac{pV}{RT}. \quad (7)$$

Подставив (7) в (6), а затем полученное выражение в (5), получим

$$D_r = \frac{2}{3d^2 p N_A} \sqrt{\frac{1}{M} \left(\frac{RT}{\pi} \right)^3}.$$

Ослабление диффузии почвой

$$\frac{D_r}{D} = \frac{2}{3Dd^2 p N_A} \sqrt{\frac{1}{M} \left(\frac{RT}{\pi} \right)^3}. \quad (8)$$

Выразим величины, входящие в формулу (8), в СИ: $p = 10^5$ Па (атмосферное давление); $R = 8,31$ Дж/(моль · К); $t = 1$ ч = 3600 с; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹; $d = 3,5 \cdot 10^{-10}$ м; $M = 0,044$ кг/моль; $t_{\text{п}} = 27$ °С (температура почвы); $T = 273 + t_{\text{п}} = (273 + 27)$ К = 300 К; $h = 0,5$ м; $S = 1$ м²; $D = 0,05$ см²/с = $5 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\rho_1 = 1,2 \cdot 10^{-5}$ г/см³ = 0,012 кг/м³; $\rho_2 = 1,0 \cdot 10^{-5}$ г/см³ = 0,010 кг/м³.

Проверим правильность формулы (8), проанализировав единицы измерения:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\text{м}^2/\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Па} \cdot \text{моль}^{-1}} \sqrt{\frac{1}{\text{кг}/\text{моль}} [\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot \text{К}]^3} = \\ &= \frac{\text{с} \cdot \text{моль}}{\text{м}^4 \cdot \text{Н}/\text{м}^2} \sqrt{\frac{\text{моль}}{\text{кг}} \left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{моль}} \right)^3} = \frac{\text{с} \cdot \text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 \cdot \text{моль}} \sqrt{\frac{\text{кг}^3 \cdot \text{м}^3/\text{с}^6 \cdot \text{м}^3}{\text{кг}}} = \\ &= \frac{\text{с}^3}{\text{м}^3 \cdot \text{кг}} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{с}^3} = 1. \end{aligned}$$

Подставим численные значения величин в формулы (2) и (8) и произведем вычисления:

$$m = -5 \cdot 10^{-6} \frac{0,0010 - 0,0012}{0,5} 1 \cdot 3600 \text{ кг} = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ кг};$$

$$\frac{D_r}{D} = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 3,5^2 \cdot 10^{-20} \cdot 10^5 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}} \sqrt{\frac{1}{0,044} \left(\frac{8,31 \cdot 300}{3,14} \right)^3} = 1,93.$$

Пример 3. Считая водяной пар массой $m = 180$ г, находящийся при температуре $t = 123$ °С, идеальным газом, определите: 1) внутреннюю энергию пара; 2) среднюю энергию вращательного движения одной молекулы этого пара.

Решение. Внутренняя энергия идеального газа выражается формулой

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT,$$

где i – число степеней свободы молекулы газа; m – масса газа; M – его молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; T – термодинамическая температура.

Выразим величины, входящие в формулу, в единицах СИ: $m = 0,18$ кг; $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $T = 400$ К; $R = 8,31$ Дж/(К·моль); $i = 6$ (так как молекула водяного пара трехатомная).

Проверим правильность расчётной формулы, сравнив единицы измерения её левой и правой частей:

$$\text{Дж} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})\text{К}}{\text{кг}/\text{моль}} = \text{Дж}.$$

Расчётная формула верна, так как единицы измерения левой и правой частей формулы одинаковы.

Произведём вычисления:

$$U = \frac{6 \cdot 0,18 \cdot 8,31 \cdot 400}{2 \cdot 18 \cdot 10^{-3}} \text{Дж} = 9,98 \cdot 10^4 \text{Дж} = 99,8 \text{ кДж}.$$

Известно, что на каждую степень свободы молекулы газа приходится в среднем энергия

$$w_0 = kT / 2,$$

где k – постоянная Больцмана.

Вращательному движению каждой молекулы соответствует некоторое число степеней свободы $i_{\text{вр}}$. Это относится ко всем молекулам, кроме одноатомных, для которых $i_{\text{вр}} = 0$ и $w_{\text{вр}} = 0$. Таким образом, энергия вращательного движения молекулы

$$w_{\text{вр}} = \frac{i_{\text{вр}}}{2} kT.$$

Выпишем численные значения величин в единицах СИ: $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; $T = 400$ К; $i_{\text{вр}} = 3$, так как вращательному движению трехатомной молекулы соответствуют три степени свободы.

Проверим правильность расчётной формулы, проанализировав единицы измерения:

$$\text{Дж} = (\text{Дж/К})\text{К} = \text{Дж}.$$

Произведём вычисления:

$$w_{\text{вр}} = \frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 400}{2} \text{ Дж} = 8,28 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

Пример 4. Кислород массой $m = 320$ г изобарно расширяется под давлением $p = 2 \cdot 10^5$ Па от начальной температуры $t_1 = 20$ °С, поглощая в процессе расширения теплоту $Q = 10$ кДж. Определите работу расширения и приращение энтропии газа в этом процессе.

Решение. Работа, совершаемая газом при неизменном давлении, выражается формулой

$$A = p(V_2 - V_1),$$

где p – давление газа; V_1 и V_2 – его начальный и конечный объёмы соответственно.

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для начального и конечного состояний газа:

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1 \quad \text{и} \quad pV_2 = \frac{m}{M}RT_2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1).$$

Отсюда искомая работа расширения газа

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1),$$

где m – масса кислорода; M – его молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; T_1 и T_2 – начальная и конечная температуры газа соответственно.

Так как теплота, необходимая для нагревания газа при изобарном процессе,

$$Q = c_p m(T_2 - T_1), \quad \text{то} \quad T_2 - T_1 = \frac{Q}{mc_p},$$

где c_p – удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении.

Поскольку $c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}$, то окончательно получаем

$$A = \frac{m}{M} R \frac{Q \cdot 2M}{m(i+2)R} = \frac{2Q}{i+2}.$$

Приращение энтропии в изотермическом процессе

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T},$$

где ΔQ – количество теплоты, сообщенное газу при температуре T .

Так как процесс не изотермический, его следует разбить на такие бесконечно малые (элементарные) процессы, в пределах которых температуру можно считать постоянной.

Приращение энтропии в таком процессе

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Приращение энтропии газа за весь процесс

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T}.$$

Конечная температура газа

$$T_2 = T_1 + \frac{Q}{mc_p} = T_1 + \frac{2QM}{m(i+2)R}.$$

Теплота, сообщенная газу в элементарном процессе,

$$dQ = mc_p dT = \frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R dT,$$

где dT – приращение температуры в этом элементарном процессе.

Следовательно, приращение энтропии в рассматриваемом изобарном процессе

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R \frac{dT}{T} = \frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R \ln \frac{T_2}{T_1} = \\ &= \frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R \ln \left(1 + \frac{2QM}{m(i+2)RT_1} \right). \end{aligned}$$

Запишем численные значения величин, входящих в расчётную формулу, в единицах СИ: $Q = 10^4$ Дж; $i = 5$ (так как молекула кислорода двухатомная); $m = 320$ г = 0,320 кг; $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $t_1 = 20$ °С; $T_1 = 293$ К.

Проверим правильность расчётных формул, сравнив единицы измерения левой и правой частей формул:

$$\text{Дж} = \text{Дж};$$

$$\frac{\text{Дж}}{\text{К}} = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{кг}} \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}}{\text{моль}} \ln \left(\frac{\frac{\text{Дж} \cdot \text{кг/моль}}{\text{кг}}}{\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}} \right) = \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Расчётные формулы верны, так как единицы измерения левой и правой частей формул одинаковы.

Выполним вычисления:

$$A = \frac{2 \cdot 10^4}{5+2} \text{ Дж} = 2,86 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 2,86 \text{ кДж}.$$

$$\Delta S = \frac{5+2}{2} \frac{0,320}{0,032} 8,31 \cdot \ln \left(1 + \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0,032}{0,320 \cdot (5+2) \cdot 8,31 \cdot 293} \right) \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 32,3 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Пример 5. Через площадь $S = 1 \text{ м}^2$ поверхности суглинистой почвы за время $\tau = 1 \text{ ч}$ на глубину $h = 0,5 \text{ м}$ проникает теплота $Q = 58,2 \text{ кДж}$. Какова температура t_1 поверхности почвы, если на глубине h температура почвы $t_2 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$. Во сколько раз процесс теплопроводности через почву интенсивнее, чем через воздух?

Решение. Количество теплоты Q , передаваемое через вещество в процессе теплопроводности, определяется законом Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S \tau, \quad (1)$$

где λ – коэффициент теплопроводности вещества; $\Delta T / \Delta x$ – градиент температуры в направлении передачи теплоты; S – площадь поверхности, через которую переносится теплота (точнее, её проекция на плоскость, перпендикулярную тепловому потоку); τ – продолжительность процесса теплопроводности.

По условию задачи передача теплоты происходит от поверхности почвы к слою, лежащему на глубине h , т. е. тепловой поток направлен вертикально вниз. В этом случае

$$\Delta T / \Delta x = \Delta T / h. \quad (2)$$

Разность температур слоёв почвы

$$\Delta T = \Delta t = t_2 - t_1, \quad (3)$$

где t_1 и t_2 – температуры слоёв почвы на поверхности и на глубине h .

Перепишем уравнение теплопроводности (1) с учётом (2) и (3):

$$Q = -\lambda \frac{t_2 - t_1}{h} S \tau.$$

Отсюда $t_1 = t_2 + Qh / (\lambda S \tau)$.

Выпишем численные значения величин и, подставив их в полученную формулу, вычислим температуру поверхности почвы: $t_2 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$; $Q = 58,2 \text{ кДж} = 58200 \text{ Дж}$; $h = 0,5 \text{ м}$; $\tau = 1 \text{ ч} = 3600 \text{ с}$; $S = 1 \text{ м}^2$; $\lambda = 1,01 \text{ Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{K})$; $t_1 = [10 + 58200 \cdot 0,5 / (1,01 \cdot 1 \cdot 3600)] \text{ }^\circ\text{C} = 18 \text{ }^\circ\text{C}$.

Влияние среды на интенсивность процесса теплопроводности определяется отношением коэффициентов теплопроводности, так как сравнение интенсивностей этого процесса допустимо при одинаковых численных значениях S , τ и $\Delta T / \Delta x$. Поэтому ответом на второй вопрос условия задачи будет числовое значение отношения $\lambda / \lambda_{\text{в}}$, где $\lambda_{\text{в}}$ – коэффициент теплопроводности воздуха.

Известно, что для газов (в том числе и для воздуха)

$$\lambda_{\text{г}} = \lambda_{\text{в}} = (1/3) \langle l \rangle \langle v \rangle \rho c_v, \quad (4)$$

где $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул воздуха; $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул воздуха; ρ – плотность воздуха; c_v – удельная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме.

Средняя длина свободного пробега молекулы

$$\langle l \rangle = 1 / (\sqrt{2} \pi d^2 n), \quad (5)$$

где d – эффективный диаметр молекулы воздуха; n – концентрация молекул воздуха.

Концентрация молекул

$$n = N / V, \quad (6)$$

где N – количество молекул в объёме V .

Количество молекул

$$N = \nu N_A, \quad (7)$$

ν – количество вещества; N_A – постоянная Авогадро.

Количество вещества ν определим, используя уравнение состояния воздуха (уравнение Клапейрона – Менделеева), считая его идеальным газом: $pV = \nu RT$, где p – атмосферное давление; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная (термодинамическая) температура воздуха, которая равна температуре поверхности почвы.

Отсюда

$$v = pV / (RT). \quad (8)$$

Подставив последовательно (8) в (7), а затем в (6) и (5), получим

$$\langle l \rangle = \frac{RT}{\sqrt{2\pi}d^2 pN_A}. \quad (9)$$

Средняя арифметическая скорость молекул воздуха

$$\langle v \rangle = \sqrt{8RT / (\pi M)}, \quad (10)$$

где M – молярная масса воздуха, $M = 0,025$ кг/моль.

Удельная теплоемкость воздуха при постоянном объёме

$$c_v = iR / (2M), \quad (11)$$

где i – число степеней свободы молекулы воздуха.

Подставив (9), (10) и (11) в (4), получим выражение для коэффициента теплопроводности воздуха

$$\lambda_B = \frac{\rho i \sqrt{R^5 T^3}}{3d^2 pN_A \sqrt{\pi^3 M^3}}.$$

Отношение коэффициента теплопроводности почвы к коэффициенту теплопроводности воздуха

$$\frac{\lambda}{\lambda_B} = \frac{3\lambda d^2 pN_A}{i\rho} \sqrt{\left(\frac{\pi M}{T}\right)^3 \frac{1}{R^5}}. \quad (12)$$

Уточним численные значения некоторых входящих в (12) величин, не использовавшихся ранее: $R = 8,31$ Дж/(моль · К); $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ моль⁻¹; $T = 273 + t_1 = (273 + 18)$ К = 291 К; $p = 10^5$ Па (атмосферное давление); $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м; $\rho = 1,196$ кг/м³.

Подставим численные значения величин в формулу (12) и вычислим искомое отношение коэффициентов теплопроводности:

$$\frac{\lambda}{\lambda_B} = \frac{3 \cdot 1,01 \cdot (3 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 10^5 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{5 \cdot 1,196} \sqrt{\left(\frac{3,14 \cdot 0,029}{291}\right)^3 \frac{1}{8,31^5}} = 76,3.$$

Задачи для самостоятельного решения

36. Каково давление, оказываемое идеальным газом на дно и стенки сосуда, объем которого $V = 3 \text{ м}^3$, если в нем содержится $N = 15 \cdot 10^{26}$ молекул и каждая обладает средней кинетической энергией поступательного движения $E = 6 \cdot 10^{-22} \text{ Дж}$?

37. Дано соединение $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$. Определите: 1) массу одной молекулы в граммах; 2) массу 120 молей в килограммах; 3) сколько молекул содержится в 0,7 кг соединения?

38. В сосуде вместимостью $V = 0,04 \text{ м}^3$ находится $\nu = 1,8$ молей газа. Плотность газа $\rho = 0,9 \text{ кг/м}^3$. Определите, какой это газ?

39. Вычислите давление, оказываемое кислородом с концентрацией $n = 3 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$, если средняя квадратичная скорость движения равна $v_{\text{кв}} = 500 \text{ м/с}$.

40. Найдите температуру T , при которой средняя квадратичная скорость молекул азота N_2 больше средней арифметической скорости на $\Delta v = 40,0 \text{ м/с}$.

41. При какой температуре T воздуха средние арифметические скорости молекул азота N_2 и кислорода O_2 отличаются на $\Delta v = 30,0 \text{ м/с}$?

42. В запаянном стеклянном баллоне заключен 1 моль одноатомного идеального газа при температуре $T = 293 \text{ К}$. Какое количество теплоты Q нужно сообщить газу, чтобы средняя арифметическая скорость его молекул увеличилась на 1 %?

43. Вычислите наиболее вероятную, среднюю арифметическую и среднеквадратичную скорости молекул азота N_2 при $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

44. Считая атмосферу изотермической, а ускорение свободного падения не зависящим от высоты, вычислите давление:

- а) на высоте 6 км;
- б) на высоте 12 км;
- в) в шахте на глубине 3 км.

Расчет произвести для $T = 300 \text{ К}$. Давление на уровне моря принять равным p_0 .

45. Полагая температуру воздуха и ускорение свободного падения не зависящими от высоты, определите, на какой высоте h над уровнем моря плотность воздуха меньше своего значения на уровне моря в два раза? Температуру воздуха положить равной $0 \text{ }^\circ\text{C}$.

46. На какой высоте давление воздуха составляет $n = 70\%$ от давления на уровне моря? Считать, что температура везде одинакова и равна $25\text{ }^\circ\text{C}$.

47. Найдите молярную массу смеси, состоящей из $m_1 = 25\text{ г}$ кислорода и $m_2 = 75\text{ г}$ азота.

48. Определите плотность воздуха при нормальных условиях ($p = 101\text{ кПа}$, $t = 0\text{ }^\circ\text{C}$), если молярная масса воздуха $\mu = 29\text{ г/моль}$.

49. Какое количество ртути содержится в зараженном ртутью помещении объемом $V = 50\text{ м}^3$ при комнатной температуре $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$, если давление насыщенного пара ртути при этой температуре $p = 0,0011\text{ мм рт. ст.}$?

50. Некоторая масса воздуха при $t_1 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ и давлении $p_1 = 1,33 \cdot 10^5\text{ Па}$ занимает объем $V_1 = 2\text{ л}$. При какой температуре давление будет равно $p_2 = 2 \cdot 10^5\text{ Па}$, если при той же массе воздуха уменьшить объем до $V_2 = 1\text{ л}$? Воздух считать идеальным газом.

51. При изохорном нагревании на 6 К давление некоторой массы газа возросло на 2% . Найдите начальную температуру газа.

52. При температуре $t_1 = 27\text{ }^\circ\text{C}$ объем воздуха в воздушном шаре $V_1 = 10\text{ м}^3$. Как изменится объем шара при понижении температуры до $t_2 = -3\text{ }^\circ\text{C}$? Давление окружающего воздуха при этом не меняется.

53. Газ в закрытом сосуде нагрели от $t_1 = 10\text{ }^\circ\text{C}$ до $t_2 = 50\text{ }^\circ\text{C}$. Во сколько раз возросло давление газа?

54. Газ изотермически сжали от первоначального объема $V_1 = 0,15\text{ м}^3$ до $V_2 = 0,1\text{ м}^3$. Давление при этом повысилось на $\Delta p = 20\text{ Па}$. Каково было первоначальное давление газа?

55. В одном баллоне емкостью $V_1 = 2\text{ л}$ давление газа $p_1 = 33\text{ кПа}$, в другом, емкостью $V_2 = 6\text{ л}$, давление того же газа $p_2 = 66\text{ кПа}$. Баллоны соединяют трубкой, имеющей кран. Какое давление установится в баллонах при открывании крана? Процесс считать изотермическим.

56. Сравните внутреннюю энергию одного моля гелия и одного моля кислорода, если температура кислорода в два раза больше температуры гелия.

57. В результате адиабатического процесса один моль двухатомного идеального газа перешел из состояния 1 с температурой T_1 в состояние 2 с температурой T_2 . Определите изменение энтропии газа при этом процессе.

58. Двигатель работает как машина Карно и за цикл получает от нагревателя $Q_1 = 700$ кал. Температура нагревателя $T_1 = 600$ К, температура холодильника $T_2 = 300$ К. Найдите совершаемую за цикл работу и количество теплоты, отдаваемое холодильнику.

59. Газ расширяется адиабатически и при этом объем его увеличивается вдвое, а температура падает в 1,32 раза. Какое число степеней свободы имеют молекулы этого газа?

60. В закрытом сосуде находится 20 г азота и 32 г кислорода. Найдите изменение внутренней энергии этой смеси газов при охлаждении ее на 28° .

61. Найдите изменение энтропии при превращении 10 г льда при -20°C в пар при 100°C .

62. Найдите изменение энтропии при плавлении 1 кг льда, находящегося при 0°C .

63. 6,6 г водорода расширяются изобарически до удвоения объема. Найдите изменение энтропии при этом расширении.

64. Найдите изменение энтропии при изотермическом расширении 6 г водорода от 10^5 Па до $0,5 \cdot 10^5$ Па.

65. Найдите изменение энтропии при изобарическом расширении 8 г гелия от объема 10 л до объема 25 л.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Краткие теоретические сведения

Электростатика в вакууме и веществе

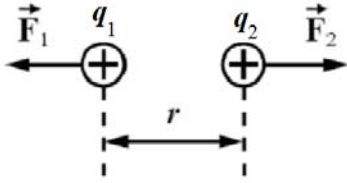


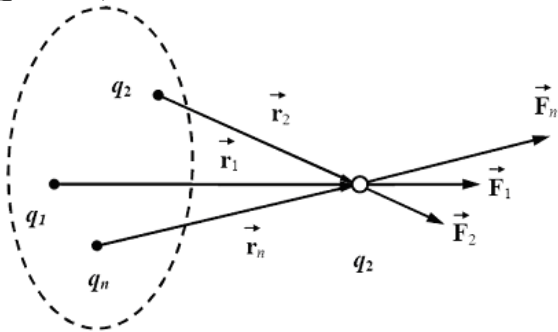
Рис. 4. Взаимодействие зарядов

- Закон Кулона

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

где \vec{F}_{12} – сила, действующая на точечный заряд q_1 со стороны точечного заряда q_2 , Кл (рис. 4); ϵ – диэлектрическая постоянная среды; ϵ_0 – электрическая постоянная, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

- Принцип суперпозиции: результирующая сила \vec{F} , действующая на пробный заряд, равна геометрической сумме сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$ (рис. 5).



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n.$$

Рис. 5. Система точечных зарядов

- Напряженность электрического поля в точке

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Единица измерения напряженности – вольт на метр (В/м).

- Принцип суперпозиции (наложения) электрических полей:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i.$$

В случае наложения двух электрических полей с напряженностями \vec{E}_1 и \vec{E}_2 модуль вектора напряженности определяется по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha},$$

где α – угол между векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_2 .

• Графическое изображение электростатического поля: в наглядной форме электростатическое поле принято изображать графически с помощью линий напряженности электростатического поля.

На рис. 6 представлены линии напряженности поля:

а) линия напряженности (силовая линия) – линия, проведенная в электростатическом поле так, что вектор напряженности в каждой ее точке направлен по касательной к этой линии (рис. 6, а);

б) линия положительного точечного заряда (рис. 6, б);

в) отрицательного точечного заряда (рис. 6, в);

г) двух разноименных зарядов (диполя) (рис. 6, г).

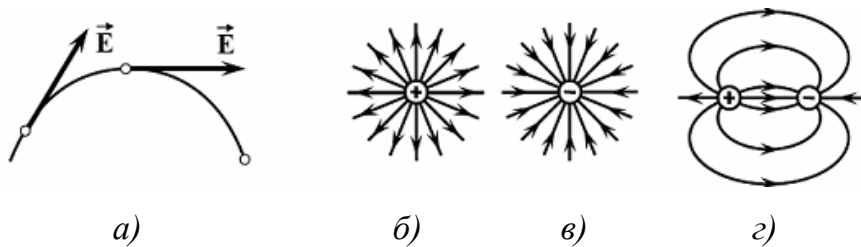


Рис. 6. Линии напряженности

• Поток вектора напряженности электрического поля:

а) через произвольную поверхность S , помещенную в неоднородное поле:

$$\Phi_E = ES_0 = ES \cos(\vec{n}, \vec{E}) = ES \cos \alpha = E_n S,$$

где S_0 – проекция площадки S на плоскость, перпендикулярную силовым линиям; α – угол между вектором напряженности и нормалью n к элементу поверхности; E_n – проекция вектора напряженности на нормаль (рис. 7).

б) через плоскую поверхность (рис. 8), помещенную в однородное электрическое поле:

$$\Phi_E = ES \cos \alpha.$$

Поток вектора напряженности через замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint E_n dS,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности.

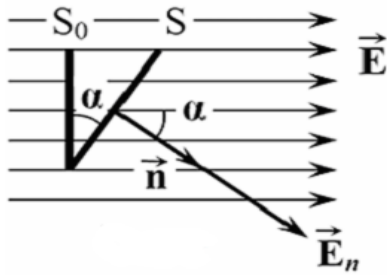


Рис. 7. Поток вектора напряженности через поверхность S

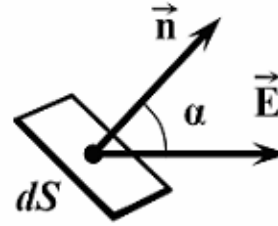


Рис. 8. Поток вектора напряженности через плоскую поверхность dS

- Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда,

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

- Напряженность электрического поля, создаваемого металлической сферой радиусом R , несущей заряд q , на расстоянии r от центра сферы:

- а) внутри сферы ($r < R$):

$$E = 0;$$

- б) на поверхности сферы ($r = R$):

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2};$$

- в) вне сферы ($r > R$):

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

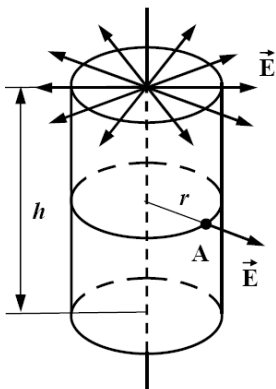


Рис. 9. Бесконечно длинная равномерно заряженная нить

- Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром, рис. 9) на расстоянии r от ее оси,

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r},$$

где τ – линейная плотность заряда, Кл/м.

- Линейная плотность заряда есть величина, равная отношению заряда, распределенного по нити, к длине нити:

$$\tau = \frac{\Delta q}{\Delta l}.$$

- Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью (рис. 10),

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда, Кл/м².

- Поверхностная плотность заряда есть величина, равная отношению заряда, распределенного по поверхности, к площади этой поверхности:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}.$$

- Напряженность поля, создаваемого двумя параллельными бесконечными равномерно и разноименно заряженными плоскостями с одинаковой по модулю поверхностной плотностью заряда σ (рис. 11),

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}.$$

- Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{T}{q},$$

где T – потенциальная энергия точечного заряда, помещенного в данную точку поля, при условии, что его потенциальная энергия в бесконечности принята равной нулю.

Единица измерения потенциала – вольт (В).

- Связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля: проекция вектора напряженности электростатического поля E_l на любое направление l в пространстве равна убыли потенциала на единице длины вдоль этого направления:

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l}.$$

- Потенциал электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда, $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$.

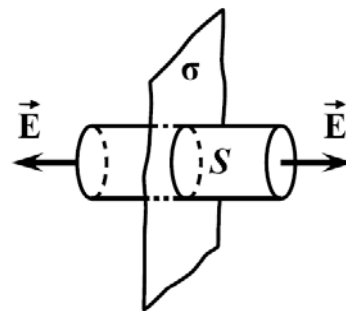


Рис. 10. Равномерно заряженная плоскость

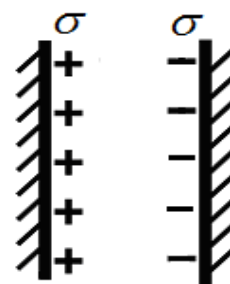


Рис. 11. Поле, образованное двумя параллельными бесконечными равномерно и разноименно заряженными плоскостями

- Потенциал электрического поля, создаваемого металлической, несущей заряд q , сферой радиусом R , на расстоянии r от центра сферы (рис. 12):

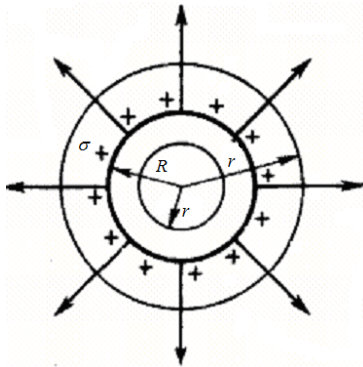


Рис. 12. Равномерно заряженная металлическая сфера

а) внутри сферы ($r < R$):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R};$$

б) на поверхности сферы ($r = R$):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R};$$

в) вне сферы ($r > R$):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

- Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда из одной точки поля, имеющей потенциал φ_1 , в другую, имеющую потенциал φ_2 , $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$.

- Электрическая емкость уединенного проводника

$$C = \frac{q}{\varphi}.$$

Единица измерения емкости – фарад (Ф).

- Емкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на обкладках конденсатора.

- Электрическая емкость уединенной проводящей сферы радиусом R , находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ ,

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R.$$

- Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами; S – площадь пластин; d – расстояние между ними.

Электрическая емкость плоского конденсатора, заполненного n слоями диэлектрика толщиной d_i , каждый с диэлектрическими проницаемостями ϵ_i ,

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} + \dots + \frac{d_n}{\epsilon_n}}.$$

• Электрическая емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ)

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

• Электрическая емкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра длиной l и радиусами R_1 и R_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ)

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

• Электрическая емкость последовательно соединенных конденсаторов:

а) в общем случае $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$,

где n – число конденсаторов;

б) в случае двух конденсаторов $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

• Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов:

а) в общем случае $C = \sum_{i=1}^n C_i$;

б) в случае двух конденсаторов $C = C_1 + C_2$.

• Энергия заряженного проводника

$$W = \frac{C\Phi^2}{2}, \quad W = \frac{q^2}{2C}, \quad W = \frac{q\Phi}{2}.$$

• Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2}, \quad W = \frac{q^2}{2C}, \quad W = \frac{qU}{2}.$$

Постоянный электрический ток

- Сила постоянного тока

$$I = \frac{Q}{t},$$

где Q – количество электричества (заряд), прошедшее через поперечное сечение проводника за время t .

Единица измерения силы тока – ампер (А).

- Плотность электрического тока

$$\vec{j} = \frac{I}{S} \vec{k},$$

где \vec{k} – единичный вектор, по направлению совпадающий с направлением движения положительных носителей заряда.

Единица измерения плотности тока – ампер на метр в квадрате ($\text{А}/\text{м}^2$).

- Сопротивление однородного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное сопротивление вещества проводника, $\text{Ом} \cdot \text{м}$; l – его длина, м.

Единица измерения сопротивления – ом (Ом).

- Зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

где ρ и ρ_0 – удельные сопротивления соответственно при t и 0 °С; t – температура; α – температурный коэффициент сопротивления.

- Сопротивление последовательного соединения проводников

$$R = \sum_{i=1}^n R_i,$$

где R_i – сопротивление i -го проводника; n – число проводников.

- Сопротивление параллельного соединения проводников

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

- Закон Ома:

а) для неоднородного участка цепи

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon_{12}}{R} = \frac{U}{R};$$

б) для однородного участка цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R};$$

в) для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R},$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; ε_{12} – ЭДС источников тока, входящих в участок; U – напряжение на участке цепи, В; R – сопротивление цепи; ε – ЭДС всех источников тока цепи, В.

• Закон Ома в дифференциальной форме: *плотность тока в любой точке проводника пропорциональна напряженности электрического поля в этой точке:*

$$j = \frac{E}{\rho} = \sigma E.$$

• Правила Кирхгофа:

а) первое правило (рис. 13): *алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

где n – число токов, сходящихся в узле.

б) второе правило (рис. 14): *в замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех участках контура равна алгебраической сумме электродвижущих сил:*

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i,$$

где I_i – сила тока на i -м участке; R_i – активное сопротивление на i -м участке; ε_i – ЭДС источников тока на i -м участке; n – число участков, содержащих активное сопротивление; k – число участков, содержащих источники тока.

• Работа, совершаемая электростатическим полем и сторонними силами в участке цепи постоянного тока за время t ,

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU = IU\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t = I^2 R\Delta t.$$

• Мощность тока

$$P = IU.$$

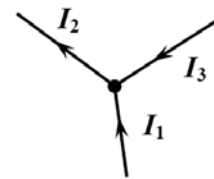


Рис. 13. Токи, сходящиеся в узле

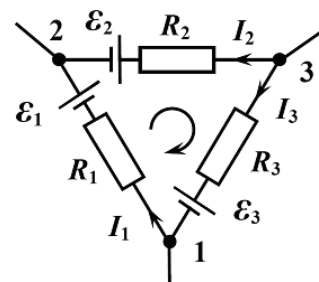


Рис. 14. Замкнутый контур

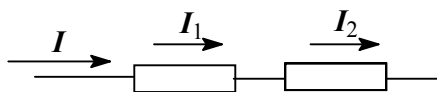
- Закон Джоуля – Ленца:

$$dQ = IUdt = I^2 Rdt = \frac{U^2}{R} dt,$$

где dQ – количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t , Дж.

- Параллельное и последовательное соединение проводников. Сопротивление внешней цепи зависит от того, каким образом соединены ее элементы:

а) последовательное соединение проводников (рис. 15):



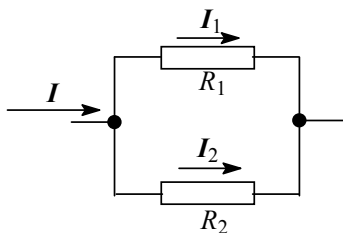
$$I = I_1 = I_2 = \text{const},$$

$$U = U_1 + U_2,$$

$$R = R_1 + R_2.$$

Рис. 15. Последовательное соединение проводников

б) параллельное соединение проводников (рис. 16):



$$U_1 = U_2 = U = \text{const},$$

$$I = I_1 + I_2,$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Рис. 16. Параллельное соединение проводников

Магнетизм

- Механический момент, действующий на контур с током (рис. 17), помещенный в однородное магнитное поле,

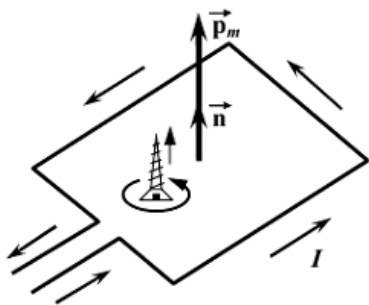


Рис. 17. Рамка с током

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}],$$

где \vec{p}_m – вектор магнитного момента рамки с током; \vec{B} – вектор магнитной индукции (количественная характеристика магнитного поля).

Единица измерения магнитной индукции – тесла (Тл).

• Закон Био – Савара – Лапласа: *каждый элемент $d\vec{l}$ проводника с током создает в некоторой точке A индукцию поля $d\vec{B}$* (рис. 18):

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \left[d\vec{l} \times \vec{r} \right] \frac{I}{r^3},$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемого элементом проводника с током, Тл; μ – магнитная проницаемость; μ_0 – магнитная постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $d\vec{l}$ – вектор, равный по модулю длине dl проводника и совпадающий по направлению с током; I – сила тока; \vec{r} – радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника к точке, магнитная индукция в которой определяется.

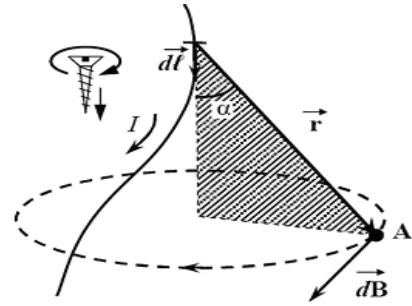


Рис. 18. Магнитное поле, созданное проводником с током

• Модуль вектора $d\vec{B}$ выражается формулой

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

• Магнитная индукция \vec{B} связана с напряженностью \vec{H} магнитного поля соотношением $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$.

• Магнитная индукция в центре кругового проводника с током (рис. 19)

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{I}{r}, \text{ где } r \text{ – радиус витка.}$$

• Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током (рис. 20),

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R},$$

где R – расстояние от оси проводника.

• Магнитная индукция поля, создаваемого соленоидом в средней его части (рис. 21),

$$B = \mu\mu_0 nI,$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; I – сила тока в одном витке.

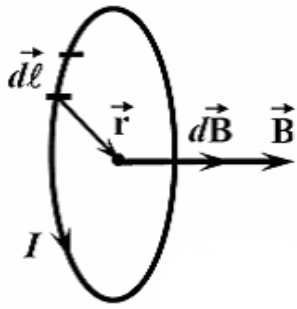


Рис. 19. Магнитное поле, созданное круговым проводником с током

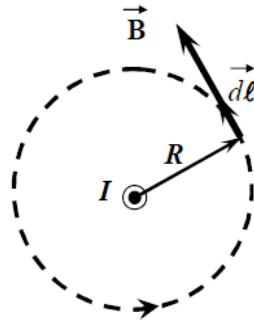


Рис. 20. Магнитное поле, созданное длинным прямым проводником с током

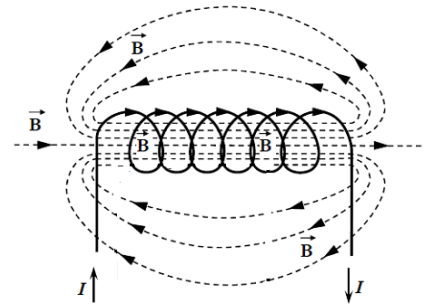


Рис. 21. Магнитное поле, созданное соленоидом

• Принцип суперпозиции магнитных полей: магнитная индукция результирующего поля равна векторной сумме магнитных индукций складываемых полей: $\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$.

В частном случае наложения двух полей $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, а модуль магнитной индукции $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}$, где α – угол между векторами \vec{B}_1 и \vec{B}_2 .

• Магнитная индукция поля, создаваемого движущимся точечным зарядом в вакууме,

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad \text{или} \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qv}{r} \sin \alpha,$$

где \vec{v} – скорость движущегося заряда; \vec{r} – радиус-вектор, направленный от заряда к точке, в которой определяется магнитная индукция; α – угол между векторами \vec{v} и \vec{r} .

• Закон Ампера

$$\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}],$$

где $d\vec{l}$ – вектор, по модулю равный dl и совпадающий по направлению с током; \vec{B} – вектор магнитной индукции.

Модуль силы Ампера вычисляется по формуле

$$dF = IBdl \sin \alpha, \quad \text{где } \alpha \text{ – угол между векторами } d\vec{l} \text{ и } \vec{B}.$$

В случае однородного магнитного поля и прямолинейного отрезка проводника $\vec{F} = I [\vec{l} \times \vec{B}]$, или $F = IBl \sin \alpha$.

Направление вектора может быть найдено, согласно последней формуле, по общим правилам векторного произведения. Этим правилам соответствует *правило левой руки*: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на ток (рис. 22).



Рис. 22. Правило левой руки

- Магнитный момент контура с током

$$\vec{p}_m = \vec{n}IS,$$

где $\vec{n}S$ – вектор, равный по модулю площади, охватываемой контуром, и совпадающий по направлению с нормалью \vec{n} к его плоскости.

- Сила Лоренца – сила, действующая на одну заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле:

$$\vec{F} = Q[\vec{v} \times \vec{B}], \text{ или } F = |Q|vB \sin \alpha,$$

где α – угол, образованный вектором скорости движущейся частицы и вектором магнитной индукции.

- Магнитный поток Φ через плоский контур площадью S (рис. 23):

а) в случае однородного поля

$$\Phi = BS \cos \alpha, \text{ или } \Phi = B_n S,$$

где α – угол между вектором нормали \vec{n} к плоскости контура и вектором магнитной индукции \vec{B} ; B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} ;

б) в случае неоднородного поля

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности S .

- Работа сил магнитного поля, совершаемая при перемещении контура с током в магнитном поле,

$$A_{1,2} = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где I – сила тока в контуре, которая поддерживается неизменной; Φ_2 и Φ_1 – магнитные потоки, пронизывающие контур, в конечном и начальном его положениях.

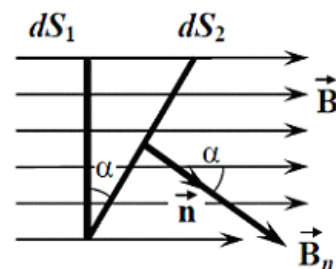


Рис. 23. Магнитный поток через плоский контур

- Закон Фарадея – Максвелла (основной закон электромагнитной индукции)

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где ε_i – электродвижущая сила индукции; N – число витков контура; Ψ – потокосцепление.

- Электродвижущая сила самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем,

$$\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt}, \text{ где } L \text{ – индуктивность контура.}$$

- Энергия магнитного поля

$$W = \frac{LI^2}{2}, \text{ где } I \text{ – сила тока в контуре.}$$

- Формула Томсона: период собственных колебаний в контуре без активного сопротивления

$T = 2\pi\sqrt{LC}$, где L – индуктивность контура, Гн; C – его емкость, Ф.

Примеры решения задач

Пример 1. Электрическое поле создано в вакууме двумя точечными зарядами $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = -3$ нКл. Расстояние между зарядами $d = 20$ см. Определите напряженность E и потенциал φ электрического поля в точке A , находящейся на расстоянии $r_1 = 15$ см от первого и $r_2 = 10$ см от второго заряда.

Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает собственное электрическое поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность \vec{E} результирующего электрического поля в точке A будет равна геометрической сумме напряженностей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Напряженности электрических полей, создаваемых в вакууме зарядами Q_1 и Q_2 , равны соответственно

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2},$$

где $|Q_1|$ и $|Q_2|$ – модули зарядов Q_1 и Q_2 ; r_1 и r_2 – расстояние от зарядов Q_1 и Q_2 до точки A соответственно.

Вектор \vec{E} направлен по прямой, соединяющей заряд и точку A , от заряда Q_1 , так как заряд Q_1 – положителен. Вектор \vec{E}_2 направлен по прямой, соединяющей заряд Q_2 и точку A , к заряду Q_2 , так как этот заряд отрицателен (рис. 24).

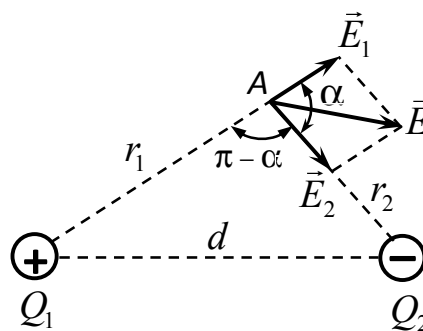


Рис. 24. Схема для решения примера 1

Модуль вектора \vec{E} результирующего поля найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha},$$

где α – угол между векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_2 .

Из рис. 24 видно, что $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\pi - \alpha)$.

Но $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, поэтому $\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$,

где d – расстояние между зарядами.

Напряженность результирующего поля

$$E = \sqrt{\left(\frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}\right)^2 + 2\frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \cos \alpha} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + \frac{2|Q_1||Q_2|}{r_1^2 r_2^2} \cos \alpha}.$$

Потенциал электрического поля в точке A определяется алгебраической суммой потенциалов полей, созданных зарядами Q_1 и Q_2 :

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Поскольку потенциалы в точке A полей, созданных в вакууме точечными зарядами Q_1 и Q_2 , соответственно равны

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$

то потенциал результирующего поля в точке A равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right).$$

Выпишем численные значения величин, выразив их в СИ: $Q_1 = 2 \text{ нКл} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$; $Q_2 = -3 \text{ нКл} = -3 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$; $d = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$; $r_1 = 15 \text{ см} = 0,15 \text{ м}$; $r_2 = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

Вычислим значение $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{0,2^2 - 0,15^2 - 0,1^2}{2 \cdot 0,15 \cdot 0,1} = 0,25.$$

Проверим правильность расчётных формул, проанализировав единицы измерения:

$$\frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \sqrt{\frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^4} + \frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^4} + \frac{\text{Кл} \cdot \text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{Ф} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$\text{В} = \frac{\text{м}}{\text{Ф}} \left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}} + \frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right) = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{Ф} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Расчётные формулы верны, так как единицы левой и правой частей формул одинаковы.

Подставив численные значения величин в расчётные формулы, произведём вычисления:

$$E = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \sqrt{\frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{0,15^4} + \frac{(3 \cdot 10^{-9})^2}{0,1^4} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot 3 \cdot 10^{-9}}{0,15^2 \cdot 0,1^2}} \cdot 0,25 \frac{\text{В}}{\text{м}} =$$

$$= 3,0 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 3,0 \text{ кВ/м};$$

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{2 \cdot 10^{-9}}{0,15} - \frac{3 \cdot 10^{-9}}{0,1} \right) \text{ В} = -150 \text{ В}.$$

Пример 2. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d_1 = 10 \text{ см}$, заряжен до разности потенциалов $U_1 = 250 \text{ В}$ и отключён от источника. Площадь пластин конденсатора $S = 100 \text{ см}^2$. Определите заряд конденсатора. Как изменяются ёмкость, разность потенциалов и энергия конденсатора, если в пространство между пластинами конденсатора поместить фарфоровую плитку толщиной $d_2 = 2 \text{ см}$ и прижать к ней пластины?

Решение. По определению ёмкость конденсатора

$$C_1 = q / U_1, \quad (1)$$

где q – заряд конденсатора; U_1 – разность потенциалов между пластинами.

Ёмкость конденсатора зависит от его размеров:

$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 S / d_1, \quad (2)$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная; ϵ_1 – диэлектрическая проницаемость пространства между пластинами; S – площадь пластины; d_1 – расстояние между пластинами конденсатора.

$$\text{Отсюда } q = C_1 U_1 = \epsilon_0 \epsilon_1 S U_1 / d_1.$$

Выпишем численные значения величин в единицах СИ: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\epsilon_1 = 1$; $S = 10^{-2}$ м²; $d_1 = 0,1$ м; $U_1 = 250$ В.

Проверим правильность расчётной формулы, проанализировав единицы измерения:

$$C_{\text{Л}} = \frac{\text{Ф} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}}{\text{м} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{В}} = \text{Кл}.$$

Произведём вычисления:

$$q = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 250}{0,1} \text{ Кл} = 222 \cdot 10^{-12} \text{ Кл} = 222 \text{ пКл}.$$

При изменении вида диэлектрика и расстояния между пластинами конденсатора происходит изменение его ёмкости:

$$C_2 = \epsilon_0 \epsilon_2 S / d_2. \quad (3)$$

Тогда $C_1 / C_2 = \epsilon_1 d_2 / (\epsilon_2 d_1)$.

Выразим входящие в данную формулу величины в единицах СИ: $\epsilon_1 = 1$; $\epsilon_2 = 5$; $d_1 = 0,1$ м; $d_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м.

Произведём вычисления:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 0,1} = \frac{1}{25} = 0,04.$$

Следовательно, ёмкость конденсатора увеличилась в 25 раз.

Так как конденсатор отключён от источника, заряд его не изменится при замене диэлектрика и изменении расстояния между пластинами.

Разность потенциалов на обкладках первого конденсатора можно выразить из формулы (1):

$$U_1 = q / C_1,$$

и аналогично записать формулу для разности потенциалов на пластинах второго конденсатора:

$$U_2 = q / C_2.$$

Отсюда

$$U_1 / U_2 = C_2 / C_1. \quad (4)$$

Используя формулы (2) и (3), получаем

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\epsilon_2 d_1}{\epsilon_1 d_2}. \quad (5)$$

Произведём вычисления: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{5 \cdot 0,1}{1 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 25.$

Следовательно, напряжение на конденсаторе уменьшается в 25 раз.

Энергия электрического поля заряженного конденсатора в его начальном и конечном состояниях выражается формулами

$$W_1 = qU_1/2 \text{ и } W_2 = qU_2/2.$$

Отсюда $\frac{W_1}{W_2} = \frac{U_1}{U_2} = 25.$

Следовательно, энергия конденсатора уменьшается в 25 раз.

Пример 3. Электрон, начальная скорость которого $v_0 = 2$ Мм/с, влетел в однородное электрическое поле с напряженностью $E = 10$ кВ/м так, что вектор начальной скорости перпендикулярен его силовым линиям. Определите скорость электрона по истечении времени $t = 1$ нс.

Решение. На электрон, находящийся в электрическом поле, действует сила $F = eE$, где e – заряд электрона; E – напряженность электрического поля.

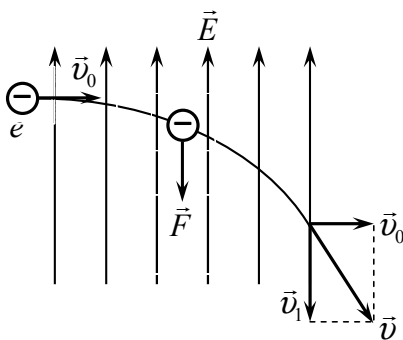


Рис. 25. Схема для решения примера 3

Направление этой силы противоположно направлению силовых линий поля (рис. 25). В данном случае сила F направлена перпендикулярно скорости v_0 и сообщает электрону ускорение $a = F/m$, где m – масса электрона.

Движение электрона в электрическом поле по условию задачи является сложным движением, состоящим из двух взаимно перпендикулярных движений: равномерного со скоростью \vec{v}_0 и равноускоренного в направлении действия силы \vec{F} .

Таким образом, в момент времени t скорость электрона $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, где \vec{v}_1 – скорость, приобретенная электроном под действием силы \vec{F} , причём $v_1 = at = Ft/m = eEt/m$.

Так как направления векторов скоростей \vec{v}_0 и \vec{v}_1 взаимно перпендикулярны, то значение результирующей скорости $v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2}$, откуда $v = \sqrt{v_0^2 + (eEt/m)^2}$.

Выпишем численные значения величин в единицах СИ: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг; $t = 10^{-9}$ с; $v_0 = 2 \cdot 10^6$ м/с; $E = 10^4$ В/м.

Проверим правильность расчётной формулы, проанализировав единицы измерения:

$$\begin{aligned} \text{м/с} &= \sqrt{(\text{м/с})^2 + \left(\frac{\text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}}\right)^2} = \sqrt{(\text{м/с})^2 + \left(\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{м}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(\text{м/с})^2 + \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}\right)^2} = \sqrt{(\text{м/с})^2 + (\text{м/с})^2} = \text{м/с}. \end{aligned}$$

Расчётная формула верна, так как единицы измерения левой и правой частей формулы одинаковы.

Произведём вычисления:

$$v = \sqrt{(2 \cdot 10^6)^2 + \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4 \cdot 10^{-9}}{9,11 \cdot 10^{-31}}\right)^2} = 2,68 \cdot 10^6 \text{ м/с} = 2,68 \text{ Мм/с}.$$

Пример 4. Определите разность потенциалов ($\phi_1 - \phi_2$) между клеммами и токи в ветвях цепи, изображенной на рис. 26, если $\varepsilon_1 = 10$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В, $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = R_5 = 20$ Ом и $R_3 = R_4 = 10$ Ом.

Решение. В случае сложной электрической цепи для решения задачи применяют законы Кирхгофа. С этой целью укажем стрелками на схеме предполагаемые направления токов I_1 , I_2 и I_3 в ветвях цепи и направления обхода контуров.

Применим первое правило Кирхгофа к узлу А (токи, входящие в узел, считаем положительными, а выходящие – отрицательными): $I_1 - I_2 - I_3 = 0$.

Для записи ещё двух уравнений применим второе правило Кирхгофа для контуров. При записи уравнений учитывают два условия: 1) если направление ЭДС (от отрицательного полюса источника тока – к положительному) совпадает с направлением

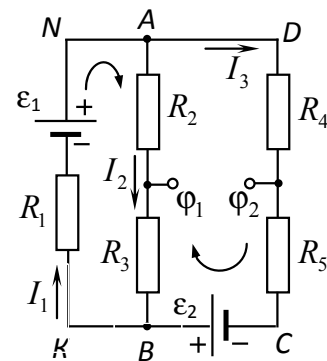


Рис. 26. Схема для решения примера 4

ем обхода контура, то ЭДС считается положительной; 2) если направление тока в проводнике совпадает с направлением обхода контура, то падение напряжения на этом проводнике тоже считается положительным, в противном случае – отрицательным.

Для контура $ABKDA$

$$I_2 R_2 + I_2 R_3 + I_1 R_1 = \varepsilon_1,$$

для контура $ADCBA$

$$I_3 R_3 + I_3 R_5 - I_2 R_3 - I_2 R_2 = \varepsilon_2.$$

Получаем систему уравнений с тремя неизвестными I_1 , I_2 и I_3 :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0,$$

$$I_1 R_1 + I_2 (R_2 + R_3) = \varepsilon_1,$$

$$-I_2 (R_2 + R_3) + I_3 (R_3 + R_5) = \varepsilon_2.$$

Решить эту систему уравнений можно двумя способами.

Первый способ решения заключается в выделении из уравнения неизвестного и подстановке его в другое уравнение:

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad (I_2 + I_3) R_1 + I_2 (R_2 + R_3) = \varepsilon_1;$$

$$I_2 (R_1 + R_2 + R_3) + I_3 R_1 = \varepsilon_1; \quad I_2 = (\varepsilon_1 - I_3 R_1) / (R_1 + R_2 + R_3);$$

$$-(\varepsilon_1 - I_3 R_1) (R_2 + R_3) / (R_1 + R_2 + R_3) + I_3 (R_3 + R_5) = \varepsilon_2;$$

$$I_3 = [\varepsilon_1 (R_2 + R_3) + \varepsilon_2 (R_1 + R_2 + R_3)] / [R_1 (R_2 + R_3) + (R_3 + R_5) (R_1 + R_2 + R_3)].$$

Выпишем численные значения величин: $\varepsilon_1 = 10$ В; $\varepsilon_2 = 4$ В; $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = R_5 = 20$ Ом; $R_3 = R_4 = 10$ Ом.

Вычислим токи в ветвях цепи:

$$I_3 = \frac{10(20+10)+4(2+20+10)}{2(20+10)+(10+20)(2+20+10)} \text{ А} = 0,42 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{10-0,42 \cdot 2}{2+20+10} \text{ А} = 0,29 \text{ А};$$

$$I_1 = (0,29 + 0,42) \text{ А} = 0,71 \text{ А}.$$

Решим эту систему уравнений другим методом – методом определителей.

Запишем главный определитель системы – определитель из коэффициентов при неизвестных – и вычислим его:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 + R_3 & 0 \\ 0 & -(R_2 + R_3) & R_3 + R_5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (R_2 + R_3)(R_3 + R_5) + R_1(R_2 + R_3) + R_1(R_3 + R_5) = \\ &= R_1(R_2 + R_3) + (R_3 + R_5)(R_1 + R_2 + R_3), \\ \Delta &= 2(20 + 10) + (10 + 20)(2 + 20 + 10) = 1020. \end{aligned}$$

Теперь запишем дополнительные определители, заменяя в главном определителе коэффициенты при каком-то из неизвестных свободными членами:

$$\Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \varepsilon_1 & R_2 + R_3 & 0 \\ \varepsilon_2 & -(R_2 + R_3) & R_3 + R_5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{I_1} &= \varepsilon_1(R_2 + R_3) + \varepsilon_2(R_2 + R_3) + \varepsilon_1(R_3 + R_5) = \varepsilon_1(R_2 + R_3 + R_3 + R_5) + \varepsilon_2(R_2 + R_3), \\ \Delta_{I_1} &= 10(20 + 10 + 10 + 20) + 4(20 + 10) = 720; \end{aligned}$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & R_3 + R_5 \end{vmatrix} = \varepsilon_1(R_3 + R_5) - \varepsilon_2 R_1,$$

$$\Delta_{I_2} = 10(10 + 20) - 4 \cdot 2 = 292.$$

Сила тока равна отношению соответствующего данному току дополнительного определителя к главному определителю:

$$I_1 = \Delta_{I_1} / \Delta, \quad I_1 = 720/1020 \text{ А} = 0,71 \text{ А};$$

$$I_2 = \Delta_{I_2} / \Delta, \quad I_2 = 292/1020 \text{ А} = 0,29 \text{ А}.$$

Ток I_3 найдём из первого уравнения системы:

$$I_3 = I_1 - I_2 = (0,71 - 0,29) \text{ А} = 0,42 \text{ А}.$$

Разность потенциалов между клеммами:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_A - \varphi_2) - (\varphi_A - \varphi_1) = I_3 R_4 - I_2 R_2,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (0,42 \cdot 10 - 0,29 \cdot 20) \text{ В} = -1,6 \text{ В}.$$

Знак «минус» указывает на то, что потенциал φ_2 больше потенциала φ_1 .

Пример 5. Два бесконечных прямых параллельных проводника с противоположно направленными токами $I_1 = 3 \text{ А}$ и $I_2 = 5 \text{ А}$ расположены на расстоянии $d = 5 \text{ см}$. Определите индукцию B в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 3 \text{ см}$ от первого проводника и $r_2 = 4 \text{ см}$ от второго проводника.

Решение. Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, каждый электрический ток создаёт магнитное поле независимо от присутствия в пространстве других электрических токов и полей. Индукция \vec{B} магнитного поля, созданного несколькими токами, равна векторной сумме индукций магнитных полей, созданных каждым током в отдельности. В случае двух параллельных токов индукция суммарного магнитного поля, созданного этими токами, $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, где \vec{B}_1 – вектор магнитной индукции поля, созданного первым током; \vec{B}_2 – вектор магнитной индукции поля, созданного вторым током.

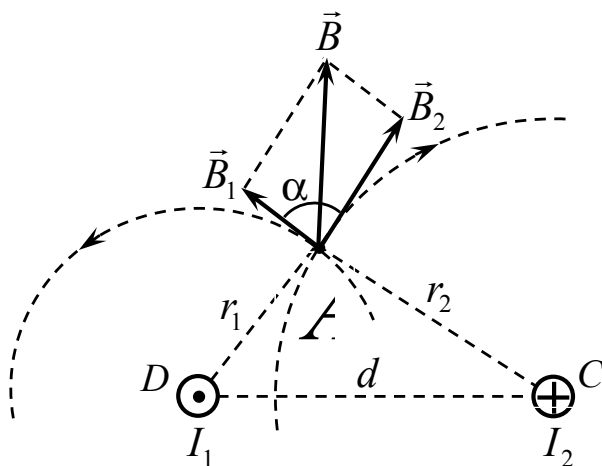


Рис. 27. Схема для решения примера 5

Для определения величины магнитной индукции \vec{B} суммарного поля необходимо знать направления векторов \vec{B}_1 и \vec{B}_2 . Покажем эти векторы на рисунке (рис. 27).

На рисунке проводники расположены перпендикулярно плоскости листа. Маленькими кружочками показаны сечения проводников. Точка в первом кружочке означает, что в первом проводнике ток течёт к нам, крестик во втором кружочке, – что во втором проводнике ток течёт от нас.

Силловые линии магнитного поля, созданного прямым током, представляют собой окружности с центром на оси проводника, по которому течёт ток.

Силловая линия магнитного поля первого тока в точке A представляет собой окружность радиуса $DA = r_1$ и, в соответствии с правилом буравчика, направлена против часовой стрелки.

Силловая линия магнитного поля второго тока – окружность радиуса $CA = r_2$, направленная по часовой стрелке.

Векторы магнитных индукций \vec{B}_1 и \vec{B}_2 направлены по касательной к соответствующей силловой линии в точке A.

Векторы магнитных индукций \vec{B}_1 и \vec{B}_2 направлены по касательной к соответствующей силловой линии в точке A.

Вектор магнитной индукции \vec{B} является диагональю параллелограмма, построенного на векторах \vec{B}_1 и \vec{B}_2 как на сторонах.

Модуль вектора \vec{B} может быть найден по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \text{ где } \alpha \text{ – угол между векторами } \vec{B}_1 \text{ и } \vec{B}_2.$$

Так как проводники бесконечно длинные, то магнитные индукции

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1} \text{ и } B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r_2},$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – относительная магнитная проницаемость среды, в которой создается магнитное поле; I_1 и I_2 – токи, создающие магнитное поле; r_1 – расстояние от первого проводника до точки A , в которой определяется индукция; r_2 – расстояние от второго проводника до точки A .

Угол α между векторами \vec{B}_1 и \vec{B}_2 численно равен углу A в треугольнике DAC (углы α и A – углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

По теореме косинусов $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos A$.

Отсюда $\cos A = (r_1^2 + r_2^2 - d^2) / (2r_1r_2)$.

Так как $r_1 = 3$ см, $r_2 = 4$ см и $d = 5$ см, то $\cos A = (3^2 + 4^2 - 5^2) / (2 \cdot 3 \cdot 4) = 0$,

а значит и $\cos \alpha = 0$.

С учётом этого $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$.

Подставив в эту формулу выражения для B_1 и B_2 , получим

$$B = \sqrt{\left(\mu_0 \frac{I_1}{2\pi r_1}\right)^2 + \left(\mu_0 \frac{I_2}{2\pi r_2}\right)^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2}.$$

Выпишем численные значения величин: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\mu = 1$ (для вакуума); $I_1 = 3$ А; $I_2 = 5$ А; $r_1 = 3$ см = 0,03 м; $r_2 = 4$ см = 0,04 м.

Проверим правильность расчётной формулы, проанализировав единицы измерений:

$$Tл = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \sqrt{\left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right)^2 + \left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right)^2} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \sqrt{\left(\frac{\text{А}}{\text{м}}\right)^2} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Расчётная формула верна, так как единицы левой и правой частей формулы одинаковы.

Подставим численные значения величин в расчётную формулу и произведем вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{3}{0,03}\right)^2 + \left(\frac{5}{0,04}\right)^2} \text{ Тл} = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} = 32 \text{ мТл}.$$

Пример 6. По тонкому кольцу радиусом $R = 20$ см течет ток $I = 40$ А. Определите магнитную индукцию B на оси кольца в точке, удалённой от плоскости кольца на расстояние $b = 16$ см.

Решение. Выделим на кольце элемент $d\vec{l}$ и от него в точку A , в которой определяется магнитная индукция, проведём радиус-вектор \vec{r} (рис. 28).

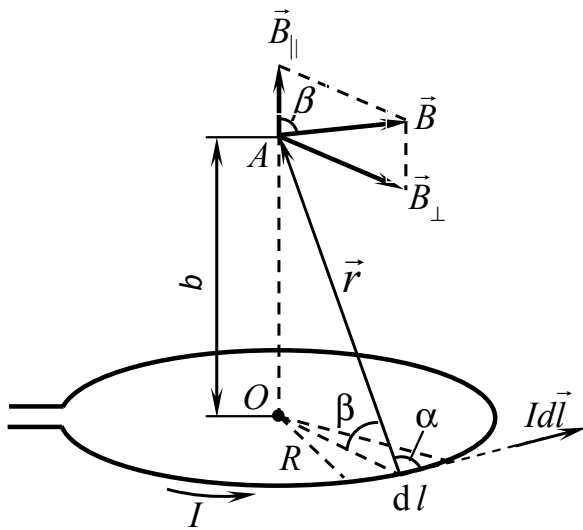


Рис. 28. Схема для решения примера 6

По закону Био – Савара – Лапласа магнитная индукция $d\vec{B}$ поля, создаваемого элементом тока $I d\vec{l}$, $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I [d\vec{l} \vec{r}]}{4\pi r^3}$, где μ_0 – магнитная постоянная; μ – относительная магнитная постоянная среды, в которой создается магнитное поле; I – сила тока в кольце; r – модуль радиус-вектора \vec{r} (расстояние от элемента проводника до точки A); $[d\vec{l} \vec{r}]$ – векторное

произведение вектора элемента длины проводника $d\vec{l}$ на радиус-вектор (вектор $d\vec{l}$ совпадает по направлению с током в элементе $d\vec{l}$).

Вектор $d\vec{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и \vec{r} , и направлен в сторону перемещения правого винта при вращении его головки от вектора $d\vec{l}$ к вектору \vec{r} .

Согласно принципу суперпозиции полей, магнитная индукция поля, создаваемого в точке A всем кольцом, определяется равенством $\vec{B} = \oint_l d\vec{B}$, причем интегрирование ведётся по всем элементам $d\vec{l}$ кольца. Разложим вектор $d\vec{B}$ на две составляющие: $d\vec{B}_\perp$, перпендику-

лярную оси кольца, и $d\vec{B}_{\parallel}$, параллельную оси кольца, т. е. $d\vec{B} = d\vec{B}_{\perp} + d\vec{B}_{\parallel}$. Тогда $\vec{B} = \oint_I d\vec{B}_{\perp} + \oint_I d\vec{B}_{\parallel}$,

Каждому элементу тока $I d\vec{l}$ в кольце соответствует симметричный с ним, равный по величине, но противоположно направленный элемент. Составляющие $d\vec{B}_{\perp}$ полей, создаваемых симметричными элементами тока, противоположны. Поэтому $\oint_I d\vec{B}_{\perp} = 0$, а $\vec{B} = \oint_I d\vec{B}_{\parallel}$.

Векторы $d\vec{B}_{\parallel}$ полей, созданных различными элементами $d\vec{l}$, сонаправлены, поэтому векторное интегрирование можно заменять скалярным:

$$B = \oint_I dB_{\parallel}.$$

Из рис. 28 видно, что $dB_{\parallel} = dB \cos \beta$, а $\cos \beta = R/r$, где β – угол между направлением положительной нормали к плоскости кольца и вектором $d\vec{B}$ (он также равен углу между радиус-вектором \vec{r} и плоскостью кольца); R – радиус кольца.

Согласно закону Био – Савара – Лапласа

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r^2} dl,$$

где α – угол между направлением тока в элементе длины кольца dl и направлением радиус-вектора \vec{r} ($\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$, так как векторы $d\vec{l}$ и \vec{r} взаимно перпендикулярны).

Таким образом,

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi r^2} \cos \beta dl = \frac{\mu_0 \mu IR}{4\pi r^3} dl,$$

$$\text{а } B = \frac{\mu_0 \mu IR}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 \mu IR^2}{2r^3}.$$

(Интегрирование проведено по всей длине контура от нуля до $2\pi R$).

Модуль радиус-вектора $r = \sqrt{R^2 + b^2}$, где b – расстояние от плоскости контура до точки A , в которой определяется магнитная индукция.

Поэтому

$$B = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2(R^2 + b^2) \sqrt{R^2 + b^2}} = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2(R^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Вектор магнитной индукции $d\vec{B}$ поля на оси контура совпадает по направлению с положительной нормалью к контуру.

Выпишем численные значения величин в СИ: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м; $\mu = 1,0$ (для вакуума); $I = 40$ А; $R = 20$ см = 0,20 м; $b = 15$ см = 0,15 м.

Выполним проверку единиц измерения:

$$Tл = \frac{\text{Гн/м} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{(\text{м}^2 + \text{м}^2)^{3/2}} = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Произведём вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 40 \cdot 0,20^2}{2(0,20^2 + 0,15^2)^{3/2}} \text{ Тл} = 6,4 \cdot 10^{-5} \text{ Тл} = 64 \text{ мкТл}.$$

Пример 7. α -частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 40$ кВ, влетела в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2$ Тл под углом $\alpha = 60^\circ$. Вычислите радиус и шаг спирали, описываемой α -частицей, а также период её обращения.

Решение. α -частица из состояния покоя в ускоряющем электрическом поле разгоняется до скорости v . В соответствии с законом сохранения энергии, работа, совершённая полем при перемещении α -частицы, равна приращению кинетической энергии α -частицы, т. е.

$$A = \Delta W_k. \quad (1)$$

Работа сил электрического поля при перемещении заряженной частицы $A = |q|U$, а приращение кинетической энергии частицы $\Delta W_k = m v^2 / 2 - m v_0^2 / 2 = m v^2 / 2$, так как начальная скорость α -частицы $v_0 = 0$.

С учётом этого равенство (1) примет следующий вид:

$$|q|U = m v^2 / 2, \text{ откуда } v = \sqrt{2|q|U / m}. \quad (2)$$

В формулах v – скорость, полученная частицей при её ускорении в электрическом поле; $|q|$ – модуль заряда α -частицы; m – её масса; U – ускоряющая разность потенциалов электрического поля; $m v^2 / 2$ – кинетическая энергия ускоренной α -частицы.

Далее α -частица попадает в магнитное поле. На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле с индукцией B , действует сила Лоренца F_L (рис. 29):

$F_L = |q|vB \sin \alpha$, где α – угол между направлением векторов скорости \vec{v} и индукции \vec{B} .

Сила Лоренца всегда перпендикулярна плоскости, образованной векторами \vec{v} и \vec{B} . Так как сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости, то она, не изменяя величину скорости, изменяет только её, т. е. является центростремительной силой, и искривляет траекторию движения частицы.

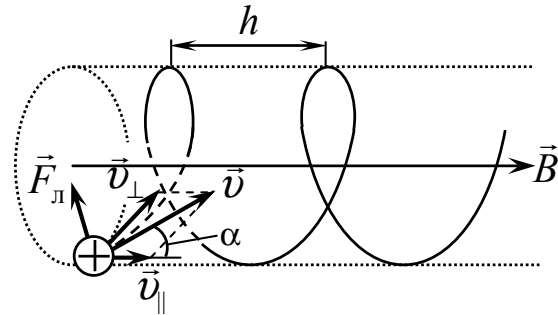


Рис. 29. Схема для решения примера 7

В результате частица участвует в двух движениях: в равномерном движении вдоль поля со скоростью $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ и в равномерном движении со скоростью $v_{\perp} = v \sin \alpha$ по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Сложение этих двух движений даёт движение по спирали радиусом R , ось которой параллельна вектору магнитной индукции. Движение по окружности вызывается действием силы Лоренца, которая, как уже отмечалось, является центростремительной силой: $F_L = F_{ц}$. Сила Лоренца $F = |q|vB \sin \alpha = |q|v_{\perp}B$, центростремительная сила $F_{ц} = mv_{\perp}^2 / R$. Приравняв выражения для силы Лоренца и центростремительной силы, получим:

$$|q|v_{\perp}B = mv_{\perp}^2 / R.$$

Отсюда радиус кривизны траектории частицы с учётом (2)

$$R = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} = \frac{mv}{|q|B} \sin \alpha = \sqrt{\frac{2mU}{|q|}} \frac{\sin \alpha}{B}. \quad (3)$$

Период T обращения частицы (время, за которое она совершает один полный оборот, двигаясь по спирали)

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m v_{\perp}}{v_{\perp} |q|B} = \frac{2\pi m}{|q|B}. \quad (4)$$

Шаг спирали, т. е. расстояние между соответствующими точками двух соседних витков спирали,

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi}{B} \sqrt{\frac{2mU}{|q|}} \cos \alpha. \quad (5)$$

Выпишем численные значения величин, входящих в формулы (3), (4) и (5): $|q| = 3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл (для α -частицы); $m = 6,6444 \cdot 10^{-27}$ кг; $B = 0,2$ Тл; $U = 40$ кВ = $4 \cdot 10^4$ В; $\alpha = 60^\circ$.

Проверим правильность расчётных формул (3), (4) и (5), проанализировав единицы измерения:

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{В}}{\text{Кл}}} \frac{1}{\text{Тл}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{Дж/Кл}}{\text{Кл}}} \frac{1}{\text{Н}/(\text{А} \cdot \text{м})} = \frac{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}}{\text{Кл}} \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \\ &= \frac{\sqrt{\text{Н}^2 \text{с}^2}}{\text{А} \cdot \text{с}} \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \text{м}; \end{aligned}$$

$$c = \frac{\text{кг}}{\text{Кл} \cdot \text{Тл}} = \frac{\text{кг}}{\text{Кл} \cdot \text{Н}/(\text{А} \cdot \text{м})} = \frac{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2} = \text{с};$$

$$m = \frac{1}{\text{Тл}} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{В}}{\text{Кл}}} = \frac{\text{А} \cdot \text{м}}{\text{Н}} \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{Дж/Кл}}{\text{Кл}}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{Н}} \frac{\sqrt{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}}{\text{Кл}} = \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{Н}} \text{Н} \cdot \text{с} = \text{м}.$$

Расчётные формулы верны, так как единицы их левых и правых частей одинаковы.

Произведём вычисления:

$$R = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6444 \cdot 10^{-27} \cdot 4 \cdot 10^4}{3,2 \cdot 10^{-19}}} \frac{\sin 60^\circ}{0,2} \text{ м} = 0,18 \text{ м};$$

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,6444 \cdot 10^{-27}}{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2} \text{ с} = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ с} = 0,65 \text{ мкс};$$

$$h = \frac{2 \cdot 3,14}{0,2} \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6444 \cdot 10^{-27} \cdot 4 \cdot 10^4}{3,2 \cdot 10^{-19}}} \cos 60^\circ \text{ м} = 0,64 \text{ м}.$$

Пример 8. Цепь, содержащая активное сопротивление $R = 20$ Ом и индуктивность $L = 10$ мГн, подключена к источнику ЭДС. Определите время t , в течение которого сила тока уменьшится в e раз при размыкании цепи (e – основание натурального логарифма).

Решение. При размыкании цепи, содержащей активное сопротивление R , индуктивность L и источник с ЭДС ε , сила тока изменяется по экспоненциальному закону

$$I = I_0 e^{-Rt/L}, \quad (1)$$

где $I_0 = \varepsilon/R$ – установившийся ток в цепи до её размыкания.

Из формулы (1)

$$I_0 / I = e^{Rt/L}. \quad (2)$$

Для того чтобы выделить время, необходимо прологарифмировать выражение (2):

$$\ln \frac{I_0}{I} = \frac{Rt}{L} \ln e = \frac{Rt}{L}.$$

$$\text{Отсюда } t = \frac{L}{R} \ln \frac{I_0}{I}.$$

Так как по условию $I_0 / I = e$, то $t = L/R$.

Промежуток времени, в течение которого сила тока уменьшается в e раз, называется временем релаксации и обозначается буквой τ – «тау», т. е. $\tau = L / R$.

Выпишем численные значения величин в СИ, произведем проверку единиц измерения и вычисления: $L = 10 \text{ мГн} = 0,010 \text{ Гн}$; $R = 20 \text{ Ом}$.

Проверим единицы измерения:

$$\tau = \text{Гн}/\text{Ом} = (\text{В} \cdot \text{с})/(\text{А} \cdot \text{Ом}) = (\text{В} \cdot \text{с})/\text{В} = \text{с}.$$

Произведём вычисления: $\tau = 0,010/20 \text{ с} = 0,00050 \text{ с} = 0,50 \text{ мс}$.

Задачи для самостоятельного решения

66. Электрическое поле создано точечным зарядом $q_1 = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Точки B и C расположены от заряда на расстояниях $r_B = 0,1$ м и $r_C = 0,2$ м соответственно. Вычислите работу A внешних сил по перемещению точечного заряда $q_2 = -2 \cdot 10^{-9}$ Кл из точки B в точку C .

67. Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд $q = 5 \cdot 10^{-10}$ Кл. Под действием поля заряд перемещается по силовой линии на расстояние $\Delta r = 0,02$ м; при этом совершается работа $A = 5 \cdot 10^{-6}$ Дж. Найдите поверхностную плотность заряда σ на плоскости.

68. В средней части плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого $d = 0,1$ м, расположен вдоль поля диэлектриче-

ский стержень длиной $l = 0,01$ м. На концах стержня имеются два точечных заряда одинаковой величины $q = 1 \cdot 10^{-11}$ Кл, но противоположного знака. Определите разность потенциалов U между пластинами конденсатора, если для того чтобы повернуть стержень на 90° вокруг оси, проходящей через его центр (т. е. расположить поперек поля), необходимо против сил поля совершить работу $A = 3 \cdot 10^{-10}$ Дж.

69. Напряженность однородного электрического поля в некоторой точке $E = 600$ В/м. Вычислите разность потенциалов ($\varphi_1 - \varphi_2$) между этой точкой и другой, лежащей на прямой, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением вектора напряженности. Расстояние между точками $r_{12} = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

70. Бесконечная тонкая прямая нить заряжена с линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/м. Определите напряженность поля E в точке, удаленной на расстояние $r = 0,1$ м от нити. Укажите направление градиента потенциала $d\varphi/dr$.

71. Две пластинки площадью $S = 2 \cdot 10^{-2}$ м² каждая находятся в керосине на расстоянии $d = 4 \cdot 10^{-3}$ м друг от друга. С какой силой F они взаимодействуют, если они заряжены до разности потенциалов $U = 150$ В? Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$.

72. Тонкий стержень длиной $l = 0,1$ м заряжен равномерно зарядом $q = 1$ нКл. Определите потенциал φ электрического поля в точке, лежащей на оси стержня на расстоянии $a = 0,2$ м от ближайшего его конца.

73. Заряд Q равномерно распределен по кольцу радиусом R . Найдите потенциал φ относительно бесконечности и напряженность E на оси кольца как функции расстояния h от центра кольца. Постройте графики зависимостей $E(h)$ и $\varphi(h)$.

74. Сфера радиусом $R_1 = 0,03$ м, равномерно заряженная зарядом $Q_1 = 7 \cdot 10^{-8}$ Кл, окружена тонкой концентрической сферой радиусом $R_2 = 0,09$ м. Какой заряд Q_2 надо равномерно распределить по поверхности внешней сферы, чтобы потенциал φ_1 внутренней сферы относительно бесконечности обратился в нуль?

75. Металлический шар радиусом $R_1 = 0,1$ м, имеющий заряд $Q_1 = 8 \cdot 10^{-8}$ Кл, окружен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Диэлектрик простирается до концентрической сферы с

шаром, ее радиус $R_2 = 0,2$ м. Начертите графики зависимостей напряженности $E(r)$ и потенциала $\varphi(r)$ поля, где r – расстояние от центра шара.

76. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 1$ нФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 300$ В. После отключения от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено до $d_2 = 5d_1$. Определите: 1) разность потенциалов U_2 на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2) работу A внешних сил по раздвижению пластин.

77. Между обкладками плоского конденсатора емкостью $C = 1 \cdot 10^{-10}$ Ф вставлена фарфоровая пластина. Диэлектрическая проницаемость фарфора $\varepsilon = 5$. Конденсатор зарядили до разности потенциалов $U = 600$ В и отключили от источника напряжения. Какую работу A надо совершить, чтобы вынуть диэлектрик из конденсатора?

78. Конденсатор емкостью $C_1 = 0,6$ мкФ был заряжен до напряжения $U_1 = 300$ В и соединен со вторым конденсатором емкостью $C_2 = 0,4$ мкФ, заряженным до напряжения $U_2 = 150$ В. Найдите величину заряда Δq , перетекающего с пластин первого конденсатора на второй.

79. Определите емкость C конденсатора, состоящего из двух шариков диаметром $d = 0,01$ м, центры которых находятся в воздухе на расстоянии $l = 0,20$ м друг от друга, приняв, что заряды на их поверхностях распределены равномерно.

80. Два одинаковых воздушных конденсатора емкостью $C = 1$ нФ заряжены до напряжения $U = 900$ В. Один из конденсаторов погружается в заряженном состоянии в керосин, после чего конденсаторы соединяются параллельно. Определите работу A происходящего при этом разряда. Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$.

81. Определите силу токов на всех участках электрической цепи (рис. 30), если $\varepsilon_1 = 10$ В, $\varepsilon_2 = 12$ В, $R_1 = R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_4 = 4$ Ом. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

82. Два источника тока $\varepsilon_1 = 10$ В с внутренним сопротивлением $r_1 = 4$ Ом и $\varepsilon_2 = 6$ В с внутренним сопротивлением $r_2 = 2$ Ом соединены, как показано на рис. 31. Определите силы тока в проводнике и источниках тока. Сопротивление проводника $R = 6$ Ом.

83. Две батареи ($\varepsilon_1 = 10 \text{ В}$, $r_1 = 2 \text{ Ом}$, $\varepsilon_2 = 24 \text{ В}$, $r_2 = 6 \text{ Ом}$) и проводники сопротивлением $R_1 = 12 \text{ Ом}$ и $R_2 = 8 \text{ Ом}$ соединены, как показано на рис. 32. Определите силу тока в батареях и проводниках.

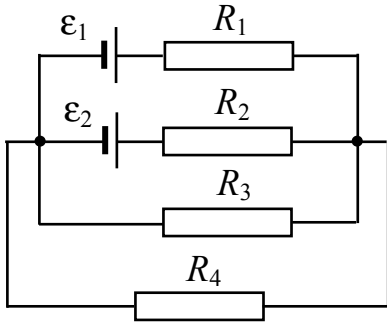


Рис. 30. Схема для решения задачи 81

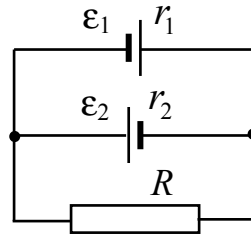


Рис. 31. Схема для решения задачи 82

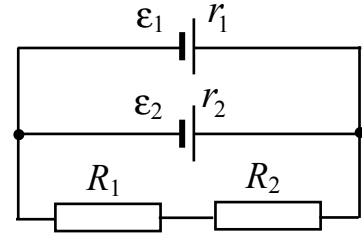


Рис. 32. Схема для решения задачи 83

84. Определите силу тока I_3 в проводнике R_3 (рис. 33) и напряжение U_3 на концах этого проводника, если $\varepsilon_1 = 8 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 10 \text{ В}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

85. Электрическая цепь состоит из двух гальванических элементов, трех сопротивлений и гальванометра (рис. 34). В этой цепи $R_1 = 50 \text{ Ом}$, $R_2 = 25 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$, ЭДС элемента $\varepsilon_1 = 4 \text{ В}$. Гальванометр регистрирует ток $I_3 = 40 \text{ мА}$, идущий в направлении, указанном стрелкой. Определите ЭДС ε_2 второго элемента. Сопротивлением гальванометра и внутренним сопротивлением элементов пренебречь.

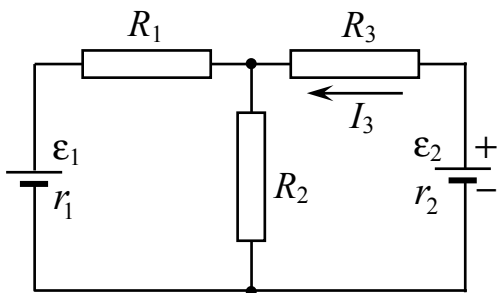


Рис. 33. Схема для решения задачи 84

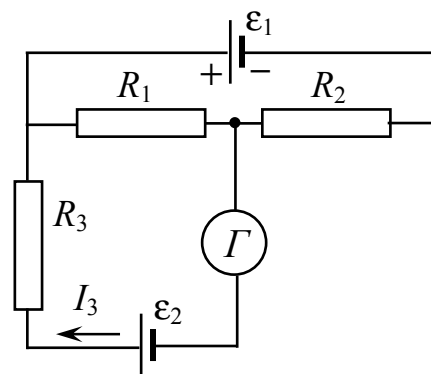


Рис. 34. Схема для решения задачи 85

86. Сила тока в проводнике равномерно нарастает от 0 до 3 А в течение 10 с. Определите заряд, прошедший в проводнике.

87. ЭДС батареи аккумуляторов 12 В, сила тока короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность можно получить во внешней цепи, соединенной с этой батареей?

88. При силе тока 3 А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность 18 Вт, при силе тока 1 А – соответственно 10 Вт. Определите ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

89. По алюминиевому проводу сечением $0,2 \text{ мм}^2$ течет ток 0,2 А. Определите силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля.

90. Сила тока в проводнике сопротивлением 100 Ом равномерно убывает от 10 А до 0 за 30 с. Определите выделившееся за это время в проводнике количество теплоты.

91. По прямому проводнику длиной $l = 1 \text{ м}$ течёт ток $I = 100 \text{ А}$. Определите индукцию B магнитного поля в точке, равноудалённой от концов проводника и находящейся на расстоянии $a = 0,5 \text{ м}$ от него.

92. Из проволоки длиной $l = 2 \text{ м}$ сделана квадратная рамка. По рамке пропускают ток $I = 5 \text{ А}$. Определите индукцию B магнитного поля в центре рамки.

93. Из проводника длиной $l = 3,14 \text{ м}$ сделано полукольцо. Определите индукцию B магнитного поля в точке, лежащей в центре диаметра полукольца, если разность потенциалов на концах проводника $U = 100 \text{ В}$, сопротивление проводника $r = 5 \text{ Ом}$.

94. Индукция B магнитного поля в точке, лежащей на оси проводящего кольца на расстоянии $b = 0,6 \text{ м}$ от плоскости кольца, равна 5 мкТл. Определите силу I тока в кольце. Диаметр кольца $D = 0,8 \text{ м}$.

95. Определите магнитную индукцию B_A на оси тонкого проводящего кольца радиусом $R = 10 \text{ см}$, в точке A , расположенной на расстоянии $b = 30 \text{ см}$ от центра кольца, если в центре кольца магнитная индукция $B = 100 \text{ мкТл}$.

96. Два длинных прямых параллельных проводника с одинаково направленными токами $I_1 = 2 \text{ А}$ и $I_2 = 4 \text{ А}$ расположены на расстоянии $d = 10 \text{ см}$ друг от друга. Определите магнитную индукцию B в точке, лежащей в середине отрезка прямой, соединяющего проводники.

97. По двум длинным прямым параллельным проводникам текут в противоположных направлениях токи $I_1 = 1 \text{ А}$ и $I_2 = 5 \text{ А}$. Определите магнитную индукцию B в точке, лежащей на продолжении прямой,

соединяющей проводники, на расстоянии $b = 5$ см от второго проводника. Расстояние между проводниками $d = 15$ см. Прямая, соединяющая проводники, перпендикулярна им.

98. Два круговых витка расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что центры этих витков совпадают. Радиус каждого витка – 2 см, токи, текущие по виткам, – 5 А. Найдите напряженность магнитного поля в центре этих витков.

99. Протон, пройдя в электрическом поле ускоряющую разность потенциалов $\Delta\phi = 100$ кВ, влетел в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5$ Тл перпендикулярно линиям индукции и начал двигаться по окружности. Определите частоту ν вращения протона.

100. Электрон влетел в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению линий магнитной индукции и движется по спирали радиуса $R = 2$ см. Индукция магнитного поля $B = 10$ мТл. Определите шаг спирали, по которой движется электрон.

101. Определите плотность электронов n_e в проводнике при эффекте Холла, если холловская разность потенциалов $\Delta\phi_H = 50$ мкВ. Индукция магнитного поля $B = 5$ Тл. Ширина проводника $b = 2$ см. Сила тока в проводнике $I = 3$ А.

102. Кольцо радиусом $r = 20$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл. Плоскость кольца составляет с линиями индукции угол $\alpha = 60^\circ$. Вычислите магнитный поток Φ , пронизывающий кольцо.

103. Прямой провод длиной $l = 0,3$ м, по которому течёт ток силой $I = 20$ А, помещен в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30^\circ$ к линиям индукции. Магнитная индукция $B = 1,5$ Тл. Какую работу A совершат силы, действующие на провод со стороны поля, перемещая его на расстояние $s = 20$ см перпендикулярно линиям поля?

104. Квадратная проволочная рамка со стороной $a = 10$ см помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл. Сила тока в рамке $I = 50$ А. Определите потенциальную (механическую) энергию рамки в магнитном поле, если на рамку действует механический момент $M = 0,25$ Н · м.

105. Тонкое проводящее кольцо радиусом $R = 20$ см подвешено свободно в однородном магнитном поле с напряженностью $H = 10^5$ А/м. Сила тока в кольце $I = 2$ А. Какую работу надо совершить, чтобы по-

вернуть кольцо на угол $\varphi = 60^\circ$ вокруг оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр?

106. Проволочная рамка, содержащая $N = 40$ витков, вращается в однородном магнитном поле относительно оси, лежащей в плоскости рамки перпендикулярно линиям индукции. Индукция магнитного поля $B = 0,2$ Тл, площадь контура рамки $S = 100$ см². Амплитудное значение ЭДС индукции, возникающей в рамке, $\varepsilon = 5$ В. Определите частоту вращения n рамки.

107. Плоский проводящий контур с площадью $S = 50$ см² помещён в однородное магнитное поле, индукция которого $B = 4$ Тл. Сопротивление контура $R = 1$ Ом. Плоскость контура составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с линиями магнитной индукции. Определите величину заряда q , который пройдет по контуру при выключении магнитного поля.

108. По соленоиду, содержащему $N = 600$ витков, течет ток силой $I = 5$ А. Длина соленоида $l = 40$ см, площадь его сечения $S = 10$ см², сердечник немагнитный. Определите среднее значение ЭДС $\langle \varepsilon \rangle$ самоиндукции, которая возникает в соленоиде, если сила тока уменьшится практически до нуля за время $\Delta t = 0,4$ мс после отключения соленоида от источника тока.

109. Источник тока замкнули на катушку с индуктивностью $L = 0,4$ Гн. Определите сопротивление R катушки, если сила тока I в катушке достигает 20 % её максимального значения за время $\Delta t = 0,1$ с после замыкания цепи.

110. На картонный каркас в один слой намотан провод диаметром $d = 0,5$ мм так, что витки плотно прилегают друг к другу. Определите объёмную плотность энергии магнитного поля такого соленоида при токе $I = 2$ А.

111. Последовательно соединённые конденсатор ёмкостью $C = 5$ мкФ, катушка с индуктивностью $L = 2$ мГн и омическим сопротивлением $R = 20$ Ом включены в цепь переменного тока. Определите амплитудное значение силы тока, если максимум напряжения на этом участке $U_m = 100$ В, а частота его изменения $\nu = 50$ Гц. Определите также сдвиг фаз между током и напряжением.

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Краткие теоретические сведения

- Уравнение гармонических колебаний

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия; t – время; A , ω , φ – соответственно амплитуда, циклическая частота, начальная фаза колебаний; $(\omega t + \varphi)$ – фаза колебаний в момент t .

- Циклическая частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu, \text{ или } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

где ν и T – частота и период колебаний.

Единица измерения частоты – герц (Гц).

- Скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

- Ускорение при гармоническом колебании

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

• Амплитуда результирующего, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих по одной прямой, определяется по формуле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где A_1 и A_2 – амплитуды составляющих колебаний, м; φ_1 и φ_2 – их начальные фазы.

- Начальная фаза результирующего колебания

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

• Частота биений, возникающих при сложении двух колебаний, происходящих по одной прямой с различными, но близкими по значению частотами ν_1 и ν_2 ,

$$\nu = \nu_1 - \nu_2.$$

• Уравнение траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты с амплитудами A_1 и A_2 и начальными фазами φ_1 и φ_2 :

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний одинаковы, то уравнение траектории примет вид

$$y = \frac{A_2}{A_1} x, \text{ или } y = -\frac{A_2}{A_1} x, \text{ т. е. точка движется по прямой.}$$

В том случае, если разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, уравнение принимает вид $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$, т. е. точка движется по эллипсу.

• Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где m – масса точки; k – коэффициент квазиупругой силы ($k = m\omega^2$).

• Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

• Период колебаний тела, подвешенного на пружине (пружинный маятник),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m – масса тела; k – жесткость пружины.

Единица измерения периода – секунда (с).

Формула справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука (при малой массе пружины в сравнении с массой тела).

• Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

• Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

где I – момент инерции колеблющегося тела относительно оси колебаний; a – расстояние центра масс маятника от оси колебаний; $L = I/ma$ – приведенная длина физического маятника.

- Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \text{ или } \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где r – коэффициент сопротивления; δ – коэффициент затухания,

$$\delta = r/2m; \omega_0 \text{ – собственная циклическая частота колебаний, } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- Уравнение затухающих колебаний

$$x = A(t) \cos(\omega t + \varphi),$$

где $A(t)$ – амплитуды затухающих колебаний в момент t ; ω – их циклическая частота.

- Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

- Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени

$$A(t) = A_0 \exp(-\delta t),$$

где A_0 – амплитуда колебаний в момент $t = 0$.

- Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T,$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период.

- Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r \cdot \dot{x} + F_0 \cos \omega t, \text{ или } \ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

где $F_0 \cos \omega t$ – внешняя периодическая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку и вызывающая вынужденные колебания; F_0 – ее амплитудное значение; $f_0 = F_0/m$.

• Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}.$$

- Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \text{ и } A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}}.$$

Примеры решения задач

Пример. Точка массой $m = 0,1$ кг совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0,1 \sin \pi t$. Определите скорость, ускорение, потенциальную и кинетическую энергию точки через $1/6$ с от начала колебаний. Определите также возвращающую силу, действующую на точку в этот момент времени.

Решение. Уравнение гармонических колебаний в общем виде $x = A \sin \omega t$,

где x – смещение точки от положения равновесия в момент времени t ; A – амплитуда колебаний; ω – круговая частота.

Сравнивая это уравнение с уравнением колебаний, заданных в условии задачи, находим, что $A = 0,1$ м, а $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$.

По определению мгновенная скорость есть первая производная от смещения по времени, т. е.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A \sin \omega t)}{dt} = A \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = A \cos \omega t \frac{d(\omega t)}{dt} = A \omega \cos \omega t. \quad (1)$$

Мгновенное ускорение есть первая производная от скорости по времени, т. е.

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d(A \omega \cos \omega t)}{dt} = A \omega \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = \\ &= -A \omega \sin \omega t \frac{d(\omega t)}{dt} = -A \omega^2 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2)$$

Кинетическая энергия колеблющейся точки

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2 \omega^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Полная механическая энергия точки равна максимальному значению её кинетической энергии: $W = W_{k \max} = mA^2 \omega^2 / 2$.

Потенциальная энергия точки

$$W_{\text{п}} = W - W_k = \frac{mA^2 \omega^2}{2} - \frac{mA^2 \omega^2}{2} \cos^2 \omega t = \frac{mA^2 \omega^2}{2} (1 - \cos^2 \omega t) = \frac{mA^2 \omega^2}{2} \sin^2 \omega t.$$

Возвращающая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку в момент времени t , $F = ma = -m\omega^2 A \sin \omega t$.

Выразим величины в единицах СИ: $m = 0,1$ кг; из уравнения колебаний видно, что $A = 0,1$ м; $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$; $t = 1/6$ с.

Проверим правильность расчётных формул (1) и (2), проанализировав единицы измерения:

$$\begin{aligned} \text{м/с} &= \text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{м/с}; \quad \text{м/с}^2 = \text{м} \cdot (\text{с}^{-1})^2 = \text{м/с}^2; \\ \text{Дж} &= \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} = \text{Дж}; \quad \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м} = \text{Н}. \end{aligned}$$

Расчётные формулы верны, так как единицы измерения левой и правой частей формул одинаковы.

Произведём вычисления:

$$\begin{aligned} v &= 0,1\pi \cos(\pi \cdot 1/6) \text{ м/с} = 0,1 \cdot 3,14 \cdot \cos(\pi/6) \text{ м/с} = 0,272 \text{ м/с}; \\ a &= -0,1\pi^2 \sin(\pi \cdot 1/6) \text{ м/с}^2 = -0,1 \cdot 3,14^2 \cdot \sin(\pi/6) \text{ м/с}^2 = -0,492 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

$$W_k = \frac{0,1 \cdot 0,272^2}{2} \text{ Дж} = 0,0037 \text{ Дж} = 3,7 \text{ мДж};$$

$$W_n = \frac{0,1 \cdot 0,1^2 \cdot 3,14^2}{2} \sin^2(\pi \cdot 1/6) \text{ Дж} = 0,0012 \text{ Дж} = 1,2 \text{ мДж};$$

$$F = 0,1(-0,492) \text{ Н} = 0,049 \text{ Н} = 49 \text{ мН}.$$

Задачи для самостоятельного решения

112. Определите возвращающую силу F в момент времени $t = 0,2$ с и полную энергию W точки массой $m = 20$ г, совершающей гармонические колебания согласно уравнению $x = A \sin \omega t$, где $A = 15$ см; $\omega = 4\pi \text{ с}^{-1}$.

113. Маятник Фуко имеет длину $l = 50$ м и представляет собой железный шар диаметром $d = 20$ см. Амплитуда колебания маятника $A = 2$ м. Определите потенциальную W_n , кинетическую W_k и полную W энергию маятника при фазе $\varphi = 5\pi/8$ и соответствующий этому условию момент времени t , считая начало отсчёта времени в середине траекторий качаний.

114. Точка совершает гармонические колебания, уравнение которых $x = A \sin \omega t$, где $A = 5$ см; $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$. В момент времени, когда точка обладала потенциальной энергией $W_n = 0,1$ мДж, на неё действовала возвращающаяся сила $F = 5$ мН. Найдите этот момент времени t и соответствующую ему фазу φ колебаний.

115. Определите частоту ν гармонических колебаний диска радиусом $R = 20$ см около горизонтальной оси, проходящей через середину радиуса диска перпендикулярно его плоскости.

116. Определите скорость v распространения волн в упругой среде, если разность фаз $\Delta\phi$ колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 15$ см, равна $\pi/2$. Частота колебаний $\nu = 25$ Гц.

117. Какую индуктивность надо включить в колебательный контур, чтобы при емкости в 2 мкФ получить звуковую частоту 1000 Гц?

118. Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре дано в виде $U = 50 \cdot \cos(10^4 \pi t)$ В. Емкость конденсатора равна $9 \cdot 10^{-7}$ Ф. Найдите закон изменения со временем силы тока в цепи.

119. Чему равно отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента времени $T/8$ с?

120. Колебательный контур состоит из индуктивности в 0,01 Гн, емкости в 0,405 мкФ и сопротивления в 2 Ом. Найдите, во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за время одного периода.

121. Обмотка катушки состоит из 500 витков медного провода площадью поперечного сечения 1 мм^2 . Длина катушки 50 см, ее диаметр 5 см. При какой частоте переменного тока полное сопротивление этой катушки вдвое больше ее активного сопротивления?

5. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Краткие теоретические сведения

Геометрическая оптика

- Скорость света в среде

$$v = \frac{c}{n},$$

где c – скорость света в вакууме; n – показатель преломления среды.

- Фокусное расстояние сферического зеркала

$$f = \frac{R}{2},$$

где R – радиус кривизны зеркала.

- Оптическая сила сферического зеркала

$$D = \frac{1}{f}.$$

Единица измерения оптической силы – диоптрия (Дпт).

- Формула сферического зеркала

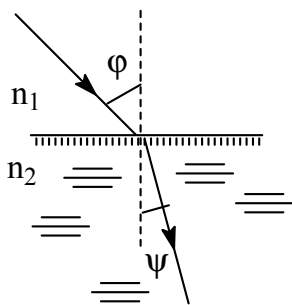
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a и b – расстояния от полюса зеркала до предмета и изображения соответственно.

Если изображение предмета мнимое, то величина b берется со знаком минус.

Если фокус сферического зеркала мнимый (зеркало выпуклое), то величина f берется со знаком минус.

- Закон преломления света $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n_{21}$, где φ – угол падения; ψ –



угол преломления; n_{21} – относительный коэффициент преломления, или коэффициент преломления второй среды относительно первой (рис. 35).

- Оптическая сила тонкой линзы

$$D = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{л}}}{n_{\text{сп}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

Рис. 35. Закон преломления света

где f – фокусное расстояние линзы; $n_{л}$ – абсолютный показатель преломления вещества линзы; $n_{ср}$ – абсолютный показатель преломления окружающей среды. Радиусы R_1 и R_2 выпуклых поверхностей берутся со знаком плюс, вогнутых – со знаком минус.

Оптическая сила двух тонких сложенных вплотную линз

$$D = D_1 + D_2.$$

- Формула тонкой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a – расстояние от оптического центра линзы до предмета; b – расстояние от оптического центра линзы до изображения.

Если фокус мнимый (линза рассеивающая, рис. 36), то величина f отрицательна. Если изображение мнимое, то величина b отрицательна.

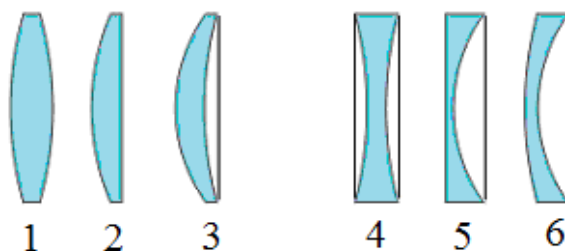


Рис. 36. Виды линз. Собирающие: 1 – двояковыпуклая, 2 – плоско-выпуклая, 3 – вогнуто-выпуклая; рассеивающие: 4 – двояковогнутая, 5 – плоско-вогнутая, 6 – выпукло-вогнутая

- Угловое увеличение лупы

$$\Gamma = \frac{D}{f}, \text{ где } D \text{ – расстояние наилучшего зрения } (D = 25 \text{ см}).$$

Интерференция и дифракция света

- Оптическая длина пути световой волны $L = nl$, где l – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n .

- Оптическая разность хода двух световых волн $\Delta = L_1 - L_2$.

- Зависимость разности фаз от оптической разности хода световых волн $\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{\Delta}{\lambda}\right)$, где λ – длина световой волны.

- Условие максимального усиления света при интерференции: $\Delta = \pm k\lambda$ ($k = 0, 1, 2, 3\dots$), где k – номер максимума.

- Условие максимального ослабления света при интерференции: $\Delta = \pm(2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, где k – номер минимума.

- Оптическая разность хода световых волн, возникающая при отражении монохроматического света от тонкой пленки,

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} \pm \frac{\lambda}{2}, \text{ или } \Delta = 2dn \cos \psi \pm \frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина пленки; n – показатель преломления пленки; φ – угол падения; ψ – угол преломления света в пленке.

- Радиус светлых колец Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{(2k - 1)R\frac{\lambda}{2}}, \quad (k = 1, 2, 3\dots),$$

где k – номер кольца; R – радиус кривизны.

- Радиус темных колец Ньютона в отраженном свете

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}.$$

- Дифракция света на одной щели при нормальном падении лучей:

1) условие минимумов интенсивности света

$$a \sin \varphi = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \quad (k = 1, 2, 3\dots),$$

где a – ширина щели; φ – угол дифракции; k – номер минимума; λ – длина волны.

2) условие максимумов интенсивности света

$$a \sin \varphi = \pm(2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (k = 1, 2, 3\dots).$$

- Дифракция света на дифракционной решетке при нормальном падении лучей.

Условие главных максимумов интенсивности:

$$d \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (k = 0, 1, 2, 3\dots),$$

где d – период решетки; k – номер главного максимума; φ – угол между нормалью к поверхности решетки и направлением дифрагированных волн.

Разрешающая сила дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN,$$

где $\Delta\lambda$ – наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda + \Delta\lambda$), при которой эти линии могут быть видны отдельно в спектре, полученном посредством данной решетки; N – число штрихов решетки; k – порядковый номер дифракционного максимума.

• Формула Вульфа – Брэггов $2d \sin \theta = k\lambda$,

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ – угол скольжения, определяющий направление, в котором имеет место зеркальное отражение лучей.

Примеры решения задач

Пример 1. Плоско-выпуклая стеклянная линза с фокусным расстоянием $f = 1$ м лежит выпуклой стороной на стеклянной пластинке. Радиус пятого темного кольца Ньютона в отраженном свете $r_5 = 1,1$ мм. Определите длину световой волны λ , падающей на линзу.

Решение. При освещении нормально падающим светом установки, состоящей из плоско-выпуклой линзы, лежащей выпуклой стороной на стеклянной пластинке, наблюдается интерференционная картина в виде кривых равной толщины. Места равной толщины прослойки, заключенной между линзой и стеклянной пластинкой, представляют собой окружности радиусом r и центром в точке O , в которой линза касается поверхности стеклянной пластинки (рис. 37).

Световые волны, отражённые от верхней (точка A) и нижней (точка B) границ прослойки, интерферируют

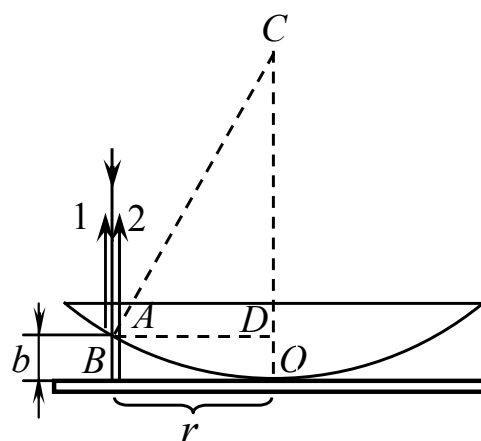


Рис. 37. Схема для решения примера 1

между собой. При этом интерференционная картина представляет собой темное пятно (в точке соприкосновения линзы и пластинки), окружённое рядом концентрических темных и светлых колец.

Между отражёнными волнами 1 и 2 возникает оптическая разность хода

$$\Delta = 2bn + \frac{\lambda_0}{2}, \quad (1)$$

если показатель преломления n вещества прослойки меньше показателя преломления $n_{\text{ст}}$ стекла. В этом случае луч 2 отражается от среды оптически более плотной ($n_{\text{ст}} > n$), поэтому фаза колебания световой волны в луче 2 изменяется на π , что соответствует добавлению половины длины волны ($\lambda_0 / 2$) к оптической длине пути этого луча.

Если показатель преломления вещества прослойки больше показателя преломления стекла ($n > n_{\text{ст}}$), то от оптически более плотной среды отражается луч 1 , и при этом фаза колебаний у него изменяется на π . Изменение фазы колебания на противоположную можно учесть, если к оптической длине пути луча 1 прибавить полволны ($\lambda_0 / 2$). В

этом случае оптическая разность хода лучей 1 и 2 $\Delta = 2bn - \frac{\lambda_0}{2}$, где Δ – оптическая разность хода отраженных световых волн; b – толщина прослойки между линзой и пластинкой в месте, где наблюдается кольцо; n – показатель преломления этой прослойки; λ – длина световой волны, падающей на установку.

Так как в условии задачи о веществе прослойки ничего не сказано, предположим, что вещество прослойки – воздух ($n = 1$). Поэтому для рассматриваемого случая справедлива формула (1).

Условием образования темных интерференционных колец в отраженном свете (или светлых колец в проходящем свете) будет соотношение

$$\Delta = 2bn + \frac{\lambda_0}{2} = (2\pi + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \quad (2)$$

где k – номер кольца ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Из рис. 37 имеем

$$OD = OC - DC, \quad \text{т. е.} \quad b = R - \sqrt{R^2 - r_k^2}.$$

Отсюда $2bR - b = r_k^2$ или, приближенно,

$$b = r_k^2 / (2R). \quad (3)$$

(Здесь мы пренебрегаем значением b^2 вследствие малости, $r_k \ll R$).

В формуле (3) r_k – радиус k -го интерференционного кольца; R – радиус кривизны поверхности линзы.

Подставив выражение для b из (3) в формулу (2), получим

$$2 \frac{r_k^2}{2r} n + \frac{\lambda_0}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \text{ или } r_k^2 = kR\lambda_0 / n.$$

Отсюда

$$\lambda_0 = nr_k^2 / (kR). \quad (4)$$

Радиус выпуклой поверхности линзы найдём из формулы тонкой линзы

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{ст}}}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где f – главное фокусное расстояние линзы; $n_{\text{ст}}/n$ – относительный показатель преломления вещества линзы (стекла) относительно окружающей среды (воздуха); R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхностей линзы.

У плоско-выпуклой линзы $R_1 = R$, а $R_2 = \infty$ (радиус кривизны у плоской поверхности).

$$\text{Поэтому } \frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{ст}}}{n} - 1 \right) \frac{1}{R}, \text{ откуда } R = \left(\frac{n_{\text{ст}}}{n} - 1 \right) f.$$

Подставив полученное выражение для радиуса кривизны выпуклой поверхности линзы в формулу (4), получим

$$\lambda_0 = \frac{nr_k^2}{k(n_{\text{ст}}/n - 1)f}. \quad (5)$$

Выпишем численные значения величин в СИ и, подставив их в формулу (5), произведём вычисления: $n = 1$; $n_{\text{ст}} = 1,5$; $r_k = 1,1 \text{ мм} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $k = 5$; $f = 1 \text{ м}$:

$$\lambda_0 = \frac{1(1,1 \cdot 10^{-3})^2}{5(1,5/1 - 1)1} \text{ м} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,5 \text{ мкм}.$$

Пример 2. Определите число штрихов на 1 мм дифракционной решётки, если при нормальном падении света длиной волны $\lambda = 600 \text{ нм}$ решётка дает первый максимум на расстоянии $l = 3,3 \text{ см}$ от центрального. Расстояние от решётки до экрана $L = 110 \text{ см}$.

Решение. Число штрихов N на 1 мм решётки определим по формуле $N = 1/d$, где d – период решётки, который найдем из условия главных максимумов: $d \sin \varphi = k\lambda$, где φ – угол, под которым наблюдается k -й максимум; k – номер (порядок) максимума; λ – длина волны света.

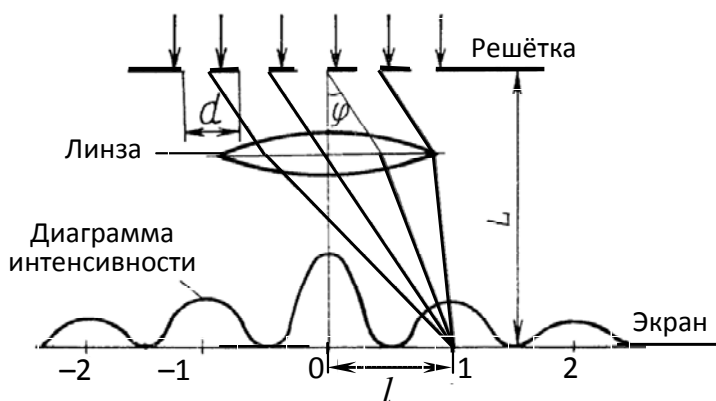


Рис. 38. Схема для решения примера 2

Поскольку для максимума 1-го порядка угол φ мал, можно принять (рис. 38) $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{L}$, где l – расстояние от центрального до k -го максимума; L – расстояние от дифракционной решётки до

экрана.

Тогда постоянная решётки $d = k\lambda L / l$, откуда $N = \frac{l}{k\lambda L}$.

Выпишем численные значения величин, выразив их в СИ, и, подставив их в расчётную формулу, произведем вычисления: $l = 3,3 \cdot 10^{-2}$ м; $L = 1,1$ м; $k = 1$; $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м; $N = \frac{3,3 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 6 \cdot 10^{-7} \cdot 1,1} = 50000 \text{ м}^{-1} = 50 \text{ мм}^{-1}$.

Пример 3. Определите концентрацию C сахарного раствора, если при прохождении света через трубку с этим раствором длиной $l = 20$ см плоскость поляризации света поворачивается на угол $\varphi = 10^\circ$. Удельное вращение раствора сахара $[\alpha] = 0,6$ град/(дм · проц).

Решение. Угол поворота плоскости поляризации при прохождении света через раствор оптически активного вещества $\varphi = [\alpha]Cl$.

Отсюда концентрация раствора $C = \frac{\varphi}{[\alpha]l}$,

где $[\alpha]$ – удельное вращение сахара в растворе; l – толщина раствора (длина трубки).

Выпишем численные значения величин: $l = 20 \text{ см} = 2 \text{ дм}$; $\varphi = 10^\circ$;
 $[\alpha] = 0,6 \text{ град}/(\text{дм} \cdot \text{проц.})$.

Проверим правильность расчетной формулы, проанализировав единицы измерения:

$$\% = \frac{\text{град}}{\text{град}/(\text{дм} \cdot \text{проц.}) \cdot \text{дм}} = \% .$$

$$\text{Произведём вычисления: } C = \frac{10}{0,6 \cdot 2} \% = 8,33 \% .$$

Задачи для самостоятельного решения

122. В опыте с бипризмой Френеля расстояние между мнимыми источниками света $d = 0,6 \text{ мм}$, длина волны монохроматического света, падающего на бипризму, $\lambda = 560 \text{ нм}$. Расстояние между интерференционными максимумами на экране $\Delta x = 1,5 \text{ мм}$. Определите расстояние L от мнимых источников до экрана.

123. На стеклянную пластину положена выпуклой стороной плоско-выпуклая линза с радиусом кривизны $R = 6 \text{ м}$. Расстояние между пятым и десятым светлыми кольцами Ньютона в отраженном свет $r_{10} - r_5 = 1,8 \text{ мм}$. Определите длину волны λ монохроматического света, падающего нормально на установку.

124. На мыльную плёнку толщиной $d = 0,6 \text{ мкм}$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,56 \text{ мкм}$. Показатель преломления плёнки $n = 1,33$. При каком наименьшем угле падения лучей отражённый свет максимально усилен?

125. На пластину со щелью падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 400 \text{ нм}$. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном на расстоянии $L = 1,5 \text{ м}$ от пластины. Найдите ширину щели, если второй дифракционный максимум смещен от центрального на расстояние $l = 3 \text{ см}$.

126. На дифракционную решетку, содержащую $N = 250$ штрихов на миллиметр, падает нормально белый свет, а затем проецируется помещенной вблизи решетки линзой на экран. Расстояние от линзы до экрана $L = 1,2 \text{ м}$. Границы видимого спектра: $\lambda_{\text{кр}} = 0,780 \text{ мкм}$ и $\lambda_{\text{ф}} = 0,400 \text{ мкм}$. Определите ширину спектра первого порядка на экране.

127. Угол преломления луча в жидкости $i_2 = 41^\circ$. Определите пока-

затель преломления n жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.

128. Предельный угол полного внутреннего отражения в бензоле $A = 42^\circ$. Определите угол максимальной поляризации i_B света при отражении от этого вещества.

129. Пучок естественного света, последовательно проходя через два николя, ослабляется в 6 раз. Принимая, что коэффициент поглощения каждого николя $k = 0,1$, найдите угол φ между плоскостями пропускания николей.

130. Два николя, плоскости пропускания которых образуют между собой угол $\varphi = 45^\circ$, ослабляют проходящий через них пучок естественного света в $n = 10$ раз. Определите коэффициент k поглощения света в николях (потерей света при отражении пренебечь).

131. При прохождении поляризованного света через слой 5 %-го сахарного раствора толщиной $l_1 = 10$ см плоскость поляризации повернулась на угол $\varphi_1 = 3^\circ$. Найдите концентрацию C_2 другого раствора сахара толщиной $l_2 = 15$ см, если плоскость поляризации повернулась при этом на угол $\varphi_2 = 5,4^\circ$.

132. Плоская монохроматическая световая волна распространяется в некоторой среде. Коэффициент поглощения среды для данной волны $\alpha = 1,2 \text{ м}^{-1}$. Определите, на сколько процентов уменьшилась интенсивность света при прохождении данной волной пути $x = 0,5$ м в этом веществе.

133. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 0,6$ мкм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $0,1 c$ (c – скорость света в вакууме). Определите доплеровское смещение $\Delta\lambda$ длины волны, регистрируемое приёмником наблюдателя.

ВОПРОСЫ, ВХОДЯЩИЕ В ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ

1. Механическое движение как простейшая форма движения материи. Система отсчета. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Радиус-вектор.

2. Материальная точка (частица). Траектория. Радиус кривизны траектории. Линейная скорость и линейное ускорение. Поступательное движение твердого тела.

3. Тангенциальное и нормальное ускорения. Связь между линейными и угловыми кинематическими величинами.

4. Первый закон Ньютона и понятие инерциальной системы отсчета. Второй закон Ньютона и понятие силы, массы и импульса. Уравнение движения. Третий закон Ньютона и пределы его применимости.

5. Неинерциальные системы отсчета. Абсолютные и относительные скорости и ускорение. Силы инерции.

6. Система материальных точек. Центр инерции (центр масс). Теорема о движении центра инерции.

7. Понятие абсолютно твердого тела. Момент инерции тела.

8. Теорема Штейнера.

9. Момент силы. Момент импульса. Уравнение моментов. Уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

10. Закон сохранения импульса и третий закон Ньютона.

11. Закон сохранения момента импульса.

12. Работа и энергия в механике. Энергия кинетическая и потенциальная.

13. Закон сохранения механической энергии.

14. Ламинарный и турбулентный режимы течения.

15. Течение вязкой жидкости. Формула Пуазейля.

16. Понятие идеального газа. Молекулярно-кинетическое толкование температуры. Макроскопические параметры системы.

17. Внутренняя энергия идеального газа. Число степеней свободы. Закон равнораспределения энергии.

18. Давление газа с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории.

19. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона – Менделеева).

20. Распределение Максвелла. Средние скорости молекул.

21. Барометрическая формула. Распределение Больцмана.

22. Распределение Максвелла – Больцмана.
23. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы реальных газов.
24. Внутренняя энергия реального газа.
25. Характеристика жидкого состояния. Ближний порядок.
26. Поверхностное натяжение. Силы, возникающие на кривой поверхности жидкости. Формула Лапласа. Смачивание и капиллярные явления.
27. Кристаллическая решетка. Дальний порядок. Упругая и пластическая деформация твердых тел. Закон Гука.
28. Понятие столкновения. Упругое и неупругое столкновения.
29. Прицельное расстояние. Эффективное сечение рассеяния. Средняя длина свободного пробега.
30. Основные термодинамические понятия: внутренняя энергия, работа, теплота. Уравнение первого начала термодинамики.
31. Зависимость теплоемкости идеального газа от вида процесса. Работа, совершаемая газом при изопроцессах.
32. Адиабатический процесс.
33. Обратимые и необратимые процессы. Круговой процесс (цикл).
34. Цикл Карно и его КПД для идеального газа.
35. Энтропия. Закон возрастания энтропии.
36. Закон Кулона. Напряженность электростатического поля. Понятие электростатического поля. Принцип суперпозиции электрических полей.
37. Поток напряженности. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.
38. Применение теоремы Гаусса для расчета полей.
39. Работа сил электростатического поля. Циркуляция напряженности электростатического поля.
40. Потенциал. Разность потенциалов. Связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля.
41. Граничные условия для электрического поля на границе раздела «диэлектрик – диэлектрик».
42. Электроемкость уединенного проводника, системы проводников и конденсатора.
43. Энергия заряженных уединенного проводника, системы проводников и конденсатора. Энергия электрического поля. Объемная плотность энергии электрического поля.
44. Характеристики электрического поля и условия его существования. Разность потенциалов, электродвижущая сила, напряжение.

45. Закон Ампера. Магнитная индукция. Закон Био – Савара. Понятие магнитного поля. Принцип суперпозиции магнитных полей. Магнитный момент.

46. Магнитное поле прямолинейного и кругового токов.

47. Циркуляция вектора магнитной индукции. Закон полного тока. Магнитное поле длинного соленоида и тороида.

48. Магнитное взаимодействие токов и единица силы тока – ампер.

49. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях.

50. Закон полного тока для магнитного поля в веществе. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость среды. Индукция магнитного поля в веществе.

51. Граничные условия для магнитного поля на границе раздела двух сред.

52. Опыт Фарадея. Магнитный поток. ЭДС индукции. Основной закон электромагнитной индукции. Правило Ленца.

53. Самоиндукция и взаимоиנדукция. Индуктивность и взаимная индуктивность. Токи размыкания и замыкания.

54. Энергия магнитного поля. Объемная плотность энергии магнитного поля.

55. Свободные и вынужденные колебания. Гармонические механические колебания и их характеристики.

56. Энергия гармонических механических колебаний. Понятие о гармоническом и ангармоническом осцилляторе.

57. Сложение одинаково направленных гармонических колебаний. Биения.

58. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу.

59. Затухающие механические колебания. Частота, коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания механических колебаний.

60. Вынужденные механические колебания. Амплитуда и фаза при вынужденных механических колебаниях.

61. Механический резонанс. Резонансные кривые. Соотношения между фазами вынуждающей силы и скорости при механическом резонансе.

62. Механизм образования механических волн в упругой среде. Продольные и поперечные волны. Волновое уравнение и его решение. Гармонические волны и их характеристики.

63. Фазовая скорость и дисперсия волн. Волновой пакет и групповая скорость.
64. Понятие о когерентности. Интерференция волн. Стоячие волны.
65. Колебательный контур. Гармонические электромагнитные колебания и их характеристики.
66. Затухающие электромагнитные колебания. Частота, коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания электромагнитных колебаний. Добротность колебательного контура.
67. Вынужденные электромагнитные колебания. Амплитуда и фаза вынужденных электромагнитных колебаний.
68. Фарадеевская и максвелловская трактовки явления электромагнитной индукции. Ток смещения.
69. Система уравнений Максвелла. Электромагнитное поле.
70. Волновое уравнение для электромагнитного поля и его решение. Скорость распространения электромагнитных волн в средах.
71. Основные свойства электромагнитных волн. Энергия и поток энергии электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга. Импульс электромагнитного поля.
72. Электромагнитная природа света. Принцип Гюйгенса. Законы отражения и преломления. Абсолютный и относительный показатели преломления. Полное внутреннее отражение. Световоды.
73. Когерентность и монохроматичность световых волн. Временная когерентность. Время и длина когерентности.
74. Оптическая длина пути. Оптическая разность хода. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников.
75. Полосы равной толщины и равного наклона.
76. Пространственная когерентность. Радиус когерентности.
77. Принцип Гюйгенса – Френеля. Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске.
78. Дифракция Фраунгофера от бесконечно длинной прямой щели.
79. Дифракция Фраунгофера на одномерной дифракционной решетке.
80. Естественный и поляризованный свет. Поляризация при отражении и преломлении. Закон Брюстера.
81. Поляризация при двойном лучепреломлении. Обыкновенный и необыкновенный лучи. Оптическая ось кристалла. Поляризационные призмы. Закон Малюса.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Методические указания по выполнению

Номера задач выбираются по соответствующим таблицам вариантов. Номер варианта определяется по порядковому номеру студента в списке группы.

Работа должна быть выполнена в отдельной ученической тетради, на обложке которой следует указать наименование вуза, факультета, специализации, фамилию и инициалы студента, дисциплину, по которой выполнена работа.

Работа выполняется чернилами или шариковой ручкой только синего или черного цвета; не допускаются записи красными чернилами. Задачи должны иметь те номера, под которыми они стоят в задании. Условие задач необходимо переписывать полностью, каждую задачу следует начинать с новой страницы, а для замечаний рецензента оставлять поля шириной 3 см.

Решение задачи должно содержать краткое описание явления, о котором говорится в условии задачи, и быть обосновано с использованием законов и положений физики. Следует пояснять формулы, используемые при решении задач, и входящие в них величины. При необходимости решение поясняют чертежом (рисунком, графиком, схемой). Например, следует изобразить тело с приложенными к нему силами, график газового процесса, схему электрической цепи, схему электрического и магнитного полей с указанием направлений векторов \vec{E} и \vec{B} , показать ход лучей в оптических системах и т. д. Обозначения на чертеже и в решении задачи должны соответствовать друг другу. Не следует обозначать одну и ту же величину разными символами, а также различные величины одинаковыми символами. Решение задач должно быть пояснено так, как это сделано в примерах, приведенных ранее.

Как правило, задачи решаются в общем виде, т. е. в буквенном виде без вычисления промежуточных величин. При таком способе решения ответ получается в виде расчётной формулы. Если расчётная формула не является прямым следствием какого-либо закона, надо дать её вывод.

Получив расчётную формулу, следует:

- выписать в единицах СИ численные значения величин, входящих в формулу;
- проверить правильность расчётной формулы, проанализировав единицы измерения; для этого необходимо подставить в формулу обозначения единиц входящих в нее величин и выполнить преобразования, чтобы убедиться, что единицы правой и левой частей формулы совпадают;
- вычислить искомую величину, подставив в расчётную формулу числовые значения входящих в нее величин.

При выполнении вычислений следует пользоваться микрокалькулятором. После получения результата (в единицах СИ) его можно преобразовать, переведя в единицы, кратные или дольные от единиц СИ.

Получив проверенную работу, студент обязан тщательно изучить все замечания рецензента, уяснив свои ошибки, и внести исправления. Если работа не допущена к собеседованию, её необходимо выполнить снова с учетом указаний и замечаний рецензента и сдать вторично на рецензирование.

Таблицы вариантов

*Таблица вариантов задач к разделам
«Физические основы механики»,
«Молекулярная физика и термодинамика»*

Вариант	Номера задач				
1	1	16	26	36	56
2	2	17	27	37	57
3	3	18	28	38	58
4	4	19	29	39	59
5	5	20	30	40	60
6	6	21	31	41	61
7	7	22	32	42	62
8	8	23	33	43	63
9	9	24	34	44	64
10	10	25	35	45	65
11	11	20	26	46	56
12	12	21	27	47	57
13	13	22	28	48	58
14	14	23	29	49	59
15	15	24	30	50	60
16	1	25	31	51	61
17	2	16	32	52	62
18	3	17	33	53	63
19	4	18	34	54	64
20	5	19	35	55	65

Таблица вариантов задач к разделу «Электричество и магнетизм»

Вариант	Номера задач			
1	66	81	91	99
2	67	82	92	100
3	68	83	93	101
4	69	84	94	102
5	70	85	95	103
6	71	86	96	104
7	72	87	97	105
8	73	88	98	106
9	74	89	91	107

Окончание

Вариант	Номера задач			
10	75	90	92	108
11	76	81	93	109
12	77	82	94	110
13	78	83	95	111
14	79	84	96	99
15	80	85	97	100
16	66	86	98	101
17	67	87	91	102
18	68	88	92	103
19	69	89	93	104
20	70	90	94	105

***Таблица вариантов задач к разделам «Колебания и волны»,
«Волновая оптика»***

Вариант	Номера задач			
1	112	117	122	128
2	113	118	123	129
3	114	119	124	130
4	115	120	125	131
5	116	121	126	132
6	116	117	127	133
7	115	118	122	128
8	114	119	123	129
9	113	120	124	130
10	112	121	125	131
11	112	117	126	132
12	113	118	127	133
13	114	119	122	128
14	115	120	123	129
15	116	121	124	130
16	112	117	125	131
17	113	118	126	132
18	114	119	127	133
19	115	120	122	128
20	116	121	123	129

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Физика – это фундаментальная база для теоретической подготовки специалиста. Изучение основных физических явлений, овладение законами современной физики формируют у будущих специалистов умение выделять физическое содержание в прикладных задачах.

Одна из важнейших целей курса физики состоит в формировании у студентов представлений о физической картине мира.

Курс физики изучается в течение первого и второго семестров первого года обучения. Он охватывает теоретические основы классической и современной физики и направления ее дальнейшего развития с учетом специализации университета.

Авторы учебного пособия рекомендуют использовать его для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов инженерно-технических специальностей ВлГУ.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волькенштейн, В. С.* Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. – М. : Наука, 1979. – 351 с.
2. *Галкин, А. Ф.* Лекции по физике : учеб. пособие : в 4 ч. / А. Ф. Галкин. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2004 – 2007. – ISBN 5-89368-473-7 (ч. 1). – ISBN 5-89368-543-1 (ч. 2). – ISBN 5-89368-658-6 (ч. 3). – ISBN 5-89368-710-8 (ч. 4). – 348 с.
3. *Детлаф, А. А.* Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высш. шк., 1989. – 607 с.
4. Методические указания, программа, вопросы и задачи по физике / сост.: В. Н. Кунин, А. Ф. Галкин. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2007. – 124 с.
5. *Савельев, И. В.* Курс общей физики : в 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1987. – Т. 1. – 432 с.
6. *Савельев, И. В.* Курс общей физики : в 3 т. / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1988. – Т. 2. – 496 с.
7. *Савельев, И. В.* Сборник вопросов и задач по общей физике / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1982. – 271 с.
8. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики : в 4 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1974 – 1980. – 2508 с.
9. *Трофимова, Т. И.* Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1990. – 470 с.
10. *Чертов, А. Г.* Задачник по физике / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – М. : Высш. шк., 1981. – 496 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦЫ СПРАВОЧНЫХ ДАННЫХ

1. Основные физические величины (значения округленные)

Физическая величина	Обозначение	Численное значение
Ускорение свободного падения	g	9,81 м/с ²
Гравитационная постоянная	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг · с ²)
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Универсальная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль · К)
Постоянная Больцмана	k	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Заряд электрона, протона	e	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Фарадея	F	$9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль
Скорость света в вакууме	c	$3 \cdot 10^8$ м/с
Постоянная Стефана – Больцмана	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² · К ⁴)
Постоянная Вина	b	$2,9 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Планка	h	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Ридберга	R	$1,1 \cdot 10^7$ м ⁻¹
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

2. Некоторые астрономические величины

Наименование	Численное значение	Наименование	Численное значение
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30}$ кг	Среднее расстояние между центрами Солнца и Земли	$1,5 \cdot 10^{11}$ м
Масса Земли	$5,96 \cdot 10^{24}$ кг		
Масса Луны	$7,35 \cdot 10^{22}$ кг		
Период обращения Луны вокруг Земли	27 сут 7 ч 43 мин	Среднее расстояние между центрами Земли и Луны	$3,84 \cdot 10^8$ м

3. Молярная масса и относительная молекулярная масса газов

Газ	Молярная масса M , кг/моль	Относительная молекулярная масса M_r
Азот	$28 \cdot 10^{-3}$	28
Водород	$2 \cdot 10^{-3}$	2
Водяной пар	$18 \cdot 10^{-3}$	18
Воздух	$29 \cdot 10^{-3}$	29
Гелий	$4 \cdot 10^{-3}$	4
Кислород	$32 \cdot 10^{-3}$	32
Неон	$20 \cdot 10^{-3}$	20
Углекислый газ	$44 \cdot 10^{-3}$	44

4. Зависимость плотности сухого воздуха от температуры

Температура, °С	Плотность, кг/м ³	Температура, °С	Плотность, кг/м ³
-20	1,418	10	1,247
-20	1,342	20	1,208
0	1,293	30	1,165

5. Коэффициенты поверхностного натяжения жидкостей (КПН)

Жидкость	КПН, мН/м	Жидкость	КПН, мН/м
Вода	72	Ртуть	500
Мыльная пена	40	Спирт	22

6. Эффективный диаметр молекулы

Газ	Диаметр, м	Газ	Диаметр, м
Азот	$3,0 \cdot 10^{-10}$	Гелий	$1,9 \cdot 10^{-10}$
Водород	$2,3 \cdot 10^{-10}$	Кислород	$2,7 \cdot 10^{-10}$
		Углекислый газ	$3,5 \cdot 10^{-10}$

7. Коэффициенты теплопроводности (Дж/(м · с · К))

Вещество	Коэффициент	Вещество	Коэффициент
Песок	0,671	Кирпич	0,71
Почва (суглинистая)	1,01	Бетон	0,817
		Лёд	2,10

8. Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Вода	81	Парафин	2,0
Масло трансформаторное	2,2	Стекло	7,0

9. Показатель преломления

Вещество	Показатель	Вещество	Показатель
Алмаз	2,42	Глицерин	1,47
Стекло	1,33	Стекло	1,50

10. Масса и энергия покоя некоторых частиц

Частица	m_0		E_0	
	кг	а. е. м.	Дж	МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,672 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733

11. Массы нейтральных атомов некоторых изотопов, а. е. м.

Водород ${}^1_1\text{H}$	1,00783	Бор ${}^{10}_5\text{B}$	10,01294
Водород ${}^2_1\text{H}$	2,01410	Углерод ${}^{12}_6\text{C}$	12,00000
Водород ${}^3_1\text{H}$	3,01605	Углерод ${}^{13}_6\text{C}$	13,00335
Гелий ${}^3_2\text{He}$	3,01603	Углерод ${}^{14}_6\text{C}$	14,00324
Гелий ${}^4_2\text{He}$	4,00260	Азот ${}^{13}_7\text{N}$	13,00574
Литий ${}^6_3\text{Li}$	6,01513	Азот ${}^{14}_7\text{N}$	14,00307
Литий ${}^7_3\text{Li}$	7,01601	Полоний ${}^{210}_{84}\text{Po}$	209,88297

12. Основные, дополнительные и производные единицы Международной системы единиц (СИ)

Величина	Единица	Обозначение единицы	Выражение через основные и дополнитель- ные единицы
<i>Основные единицы</i>			
Длина	метр	м	—
Масса	килограмм	кг	—
Время	секунда	с	—
Сила электрического тока	ампер	А	—
Термодинамическая температура	кельвин	К	—
Количество вещества	моль	моль	—
Сила света	кандела	кд	—
<i>Дополнительные единицы</i>			
Плоский угол	радиан	рад	—
Телесный угол	стерадиан	ср	—
<i>Производные единицы</i>			
Частота	герц	Гц	с^{-1}
Частота вращения	секунда в минус первой степени	с^{-1}	с^{-1}
Угловая скорость	радиан в секунду	рад/с	$\text{с}^{-1} \cdot \text{рад}$

Продолжение

Величина	Единица	Обозначение единицы	Выражение через основные и дополнительные единицы
Угловое ускорение	радиан в секунду в квадрате	рад/с ²	с ⁻² · рад
Сила, вес	ньютон	Н	м · кг · с ⁻²
Момент инерции	килограмм-метр в квадрате	кг · м ²	м ² · кг
Импульс (количество движения)	килограмм-метр в секунду	кг · м/с	м · кг · с ⁻¹
Момент импульса (момент количества движения)	килограмм-метр в квадрате на секунду	кг · м ² /с	м ² · кг · с ⁻¹
Момент силы, момент пары сил	ньютон-метр	Н · м	м ² · кг · с ⁻²
Импульс силы	ньютон-секунда	Н · с	м · кг · с ⁻¹
Давление, механическое напряжение	паскаль	Па	м ⁻¹ · кг ² · с ⁻²
Энергия, работа, количество теплоты	джоуль	Дж	м ² · кг · с ⁻²
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	м ² · кг · с ⁻³
Удельная теплоёмкость	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)	м ² · с ⁻² · К ⁻¹
Вязкость (динамическая)	Паскаль-секунда	Па · с	м ⁻¹ · кг · с ⁻¹
Количество электричества (электрический заряд)	кулон	Кл	с · А
Электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электрическое напряжение, электродвижущая сила	вольт	В	м ² · кг · с ⁻³ · А ⁻¹
Напряжённость электрического поля	вольт на метр	В/м	м · кг · с ⁻³ · А ⁻¹
Электрическая ёмкость	фарад	Ф	м ⁻² · кг ⁻¹ · с ⁴ · А ²
Электрическое сопротивление	ом	Ом	м ² · кг · с ⁻³ · А ⁻²

Величина	Единица	Обозначение единицы	Выражение через основные и дополнительные единицы
Удельное сопротивление	Ом-метр	Ом · м	$\text{м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$
Удельная проводимость	сименс на метр	См/м	$\text{м}^{-3} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Магнитная индукция	тесла	Тл	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Магнитный поток	вебер	Вб	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Напряжённость магнитного поля	ампер на метр	А/м	$\text{м}^{-1} \cdot \text{А}$
Индуктивность	генри	Гн	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Магнитная постоянная	генри на метр	Гн/м	$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Световой поток	люмен	лм	кд · ср
Освещённость	люкс	лк	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кд} \cdot \text{ср}$
Энергетическая светимость (излучательность)	ватт на квадратный метр	Вт/м ²	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Спектральная плотность энергетической светимости (излучательности)	ватт на кубический метр	Вт/м ³	$\text{м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Активность изотопа	беккерель	Бк	с^{-1}
Поглощенная доза излуче-	грей	Гр	$\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$

Примечания:

1. Кроме температуры Кельвина (обозначение T) допускается применять также температуру Цельсия (обозначение t), определяемую выражением $t = T - T_0$, где $T_0 = 273,15$ К. Температура кельвина выражается в кельвинах, температура Цельсия – в градусах Цельсия (обозначение международное и русское °С). По размеру градус Цельсия равен Кельвину.

2. Интервал, или разность, температур Кельвина выражают в кельвинах. Интервал, или разность, температур Цельсия допускается выражать как в кельвинах, так и в градусах Цельсия.

13. Приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Приставка		Отношение к основной единице	Приставка		Отношение к основной единице
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санتي	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^9	микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^6	нано	н	10^{-9}
кило	к	10^3	пико	п	10^{-12}
гекто	г	10^2	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^1	атто	а	10^{-18}

14. Греческий и латинский алфавиты

Алфавит	
греческий	латинский
Α, α – альфа	<i>A, a</i> – а
Β, β – бета	<i>B, b</i> – бэ
Γ, γ – гамма	<i>C, c</i> – цэ
Δ, δ – дельта	<i>D, d</i> – дэ
Ε, ε – эпсилон	<i>E, e</i> – э
Ζ, ζ – дзета	<i>F, f</i> – эф
Η, η – эта	<i>G, g</i> – же (гэ)
Θ, θ, ϑ – тета	<i>H, h</i> – ха
Ι, ι – иота	<i>I, i</i> – и
Κ, κ – каппа	<i>J, j</i> – йот
Λ, λ – ламбда	<i>K, k</i> – ка
Μ, μ – ми (мю)	<i>L, l</i> – эль
Ν, ν – ни (ню)	<i>M, m</i> – эм
Ξ, ξ – кси	<i>N, n</i> – эн
Ο, ο – омикрон	<i>O, o</i> – о
Π, π – пи	<i>P, p</i> – пэ
Ρ, ρ – ро	<i>Q, q</i> – ку
Σ, σ, ς – сигма	<i>R, r</i> – эр
Τ, τ – тау	<i>S, s</i> – эс
Υ, υ – ипсилон	<i>T, t</i> – тэ
Φ, φ – фи	<i>U, u</i> – у
Χ, χ – хи	<i>V, v</i> – вэ
Ψ, ψ – пси	<i>W, w</i> – дубль-вэ
Ω, ω – омега	<i>X, x</i> – икс
	<i>Y, y</i> – игрек
	<i>Z, z</i> – зэт

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ПРОГРАММА КУРСА	5
1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ.....	13
2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА.....	35
3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ	56
4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.....	90
5. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА.....	96
ВОПРОСЫ, ВХОДЯЩИЕ В ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ БИЛЕТЫ	105
ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.....	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	113
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	114
ПРИЛОЖЕНИЕ	115

Учебное издание

АНТОНОВА Мария Александровна
КОКУРИНА Юлия Камильевна

ФИЗИКА

Механика. Молекулярная физика. Термодинамика. Электричество. Магнетизм.
Механические колебания и волны. Волновая оптика

Учебное пособие

Редактор Е. А. Лебедева
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева
Корректор А. П. Володина
Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой

Подписано в печать 27.06.17.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 7,21. Тираж 230 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.