Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

О. В. ОРЕШКИНА Н. И. ЕРКОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, МАТРИЦЫ,
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2017

УДК 512.64
ББК 22.14
О-63

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры информационных технологий
Российской академии народного хозяйства и государственной
службы при Президенте Российской Федерации
(Владимирский филиал)
И. В. Сидорова

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры функционального анализа и его приложений
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Д. Я. Данченко

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

О-63 **Орешкина, О. В.** Элементы линейной алгебры. Определители, матрицы, системы линейных алгебраических уравнений : учеб.-практ. пособие / О. В. Орешкина, Н. И. Еркова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 90 с. – ISBN 978-5-9984-0780-2.

Содержит необходимый теоретический материал и индивидуальные задания по трем разделам линейной алгебры: определители, матрицы, системы линейных алгебраических уравнений. Составлено на основе программы математической подготовки для студентов-бакалавров различных направлений очной формы обучения.

Предназначено для студентов-бакалавров различных направлений обучения. Может быть полезно преподавателям математики при выборе материала для практических занятий и контрольных работ, в том числе для студентов заочной формы обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 3. Библиогр.: 5 назв.

УДК 512.64
ББК 22.14

ISBN 978-5-9984-0780-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Издание знакомит с матричной алгеброй и системами линейных уравнений – важнейшими разделами линейной алгебры. При создании пособия был сделан упор на возможность его использования как руководства в самостоятельной работе студентов при решении задач. Теоретическая часть никоим образом не является самодостаточным курсом лекций, так как доказательства теорем не приводятся, но при необходимости могут быть найдены в литературе из приведенного в конце издания библиографического списка. В параграфе четвертом содержатся индивидуальные задания к типовым расчетам, каждое из которых содержит тридцать вариантов задач. Большинство из них стандартные, и примеры их решения приводятся в пособии, что должно помочь студентам справиться с решением индивидуальных заданий.

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Основные понятия

Очень часто под понятием «определитель» имеют в виду как значение определителя, так и форму его записи. Определители позволяют удобно записывать сложные выражения, возникающие, например, при решении линейных уравнений в аналитической геометрии и математическом анализе. Определение понятия «определитель» связано с такими понятиями, как «перестановка» и «инверсия». Но вычисление значения какой-либо величины по определению вообще производится редко, так как на практике применяют правила вычисления этой величины. Далее будет нужно уметь вычислять определители по правилу (одному из нескольких). Чтобы облегчить понимание изложенного материала, строгое определение приводить не будем. В связи с тем, что употребляется выражение «определитель матрицы», сначала объясним, что такое матрица.

Матрицей A размерами $m \times n$ называется прямоугольная таблица из $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов, элементами которой могут быть числа, а также другие математические выражения.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицы обозначают большими латинскими буквами A, B, C и другими, а элементы матрицы – соответствующими маленькими латинскими буквами с указанием двойного индекса, где первое число i – это номер строки ($i = 1, 2, \ldots, m$), а второе число j – номер столбца ($j = 1, 2, \ldots, n$), на пересечении которых стоит данный элемент. Например, элемент a_{12} матрицы A расположен в 1-й строке, 2-м столбце. Более подробно о матрицах будет сказано в следующем параграфе.

Квадратная матрица n-го порядка – матрица размерами $n \times n$, т.е. у квадратной матрицы количество строк равно количеству столбцов.

Для любой квадратной матрицы A порядка n можно найти по правилам, приведенным ниже, некоторое число, которое называют ***определителем,*** или ***детерминантом,*** и обозначают $\det A$ (или $|A|$, или Δ, редко D):

$$\det A = \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Порядок определителя равен порядку матрицы. Определитель может быть только у квадратной матрицы. Для неквадратных матриц понятие определителя не вводится.

Минором $\boldsymbol{M_{ij}}$ элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель порядка на единицу меньше (т.е. $n - 1$), полученный из исходного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца, содержащих выбранный элемент.

Примеры миноров M_{11} *и* M_{23} *элементов* a_{11} *и* a_{23} *определителя* Δ *4-го порядка:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением $\boldsymbol{A_{ij}}$ элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется его минор, умноженный на $(-1)^k$, где k – это сумма номеров строки и столбца, содержащих данный элемент: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. Как видно из формулы, если номер строки и номер столбца элемента a_{ij} в сумме дают четное число, то алгебраическое дополнение будет равно минору этого элемента, а если нечетное число – минору этого элемента, взятому с противоположным знаком. Чтобы каждый раз не считать сумму для определения знака A_{ij}, можно использовать следующие таблицы:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}, \quad \begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix} \quad \text{и т.д.}$$

Примеры алгебраических дополнений A_{11} *и* A_{23} *определителя* Δ *4-го порядка:*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

1.2. Правила вычисления определителей

При $n = 1$ определитель состоит из одного элемента и отождествляется с этим элементом:

$A = (a_1)$, $\det A = |a_1| = a_1$.

Для $n = 2$ и 3 существуют правила вычисления определителя.

При $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ (рис. 1).

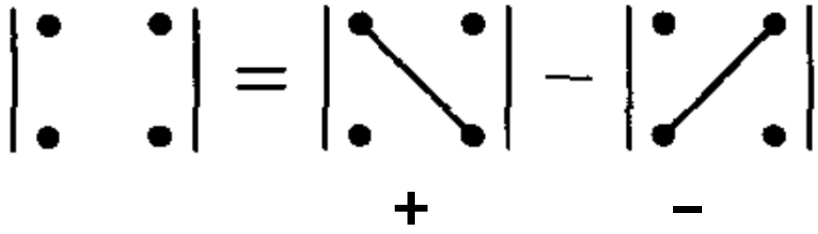


Рис. 1. Схема вычисления определителя 2-го порядка

► **Пример 1.** Вычислим определители 2-го порядка:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 1,$ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3(-2) = 11.$

Для $n = 3$ существуют несколько правил вычисления определителя, одно из которых имеет своё название, а другие позволяют вычислять определители порядков выше третьего.

***Правило Саррюса* (*«правило треугольников/звёздочки»*)**

$$\det A = \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Для запоминания правила удобнее пользоваться схемой, изображенной на рис. 2 (*а*, *б*), а для понимания лучше разобрать его на примере. Сформулировать правило можно так: первое из трех произведений, входящих в приведенную выше формулу со знаком «плюс», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье – произведения элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали (определение главной и побочной диагоналей, см. стр. 16). Три последних произведения, входящих в формулу со знаком «минус», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали.

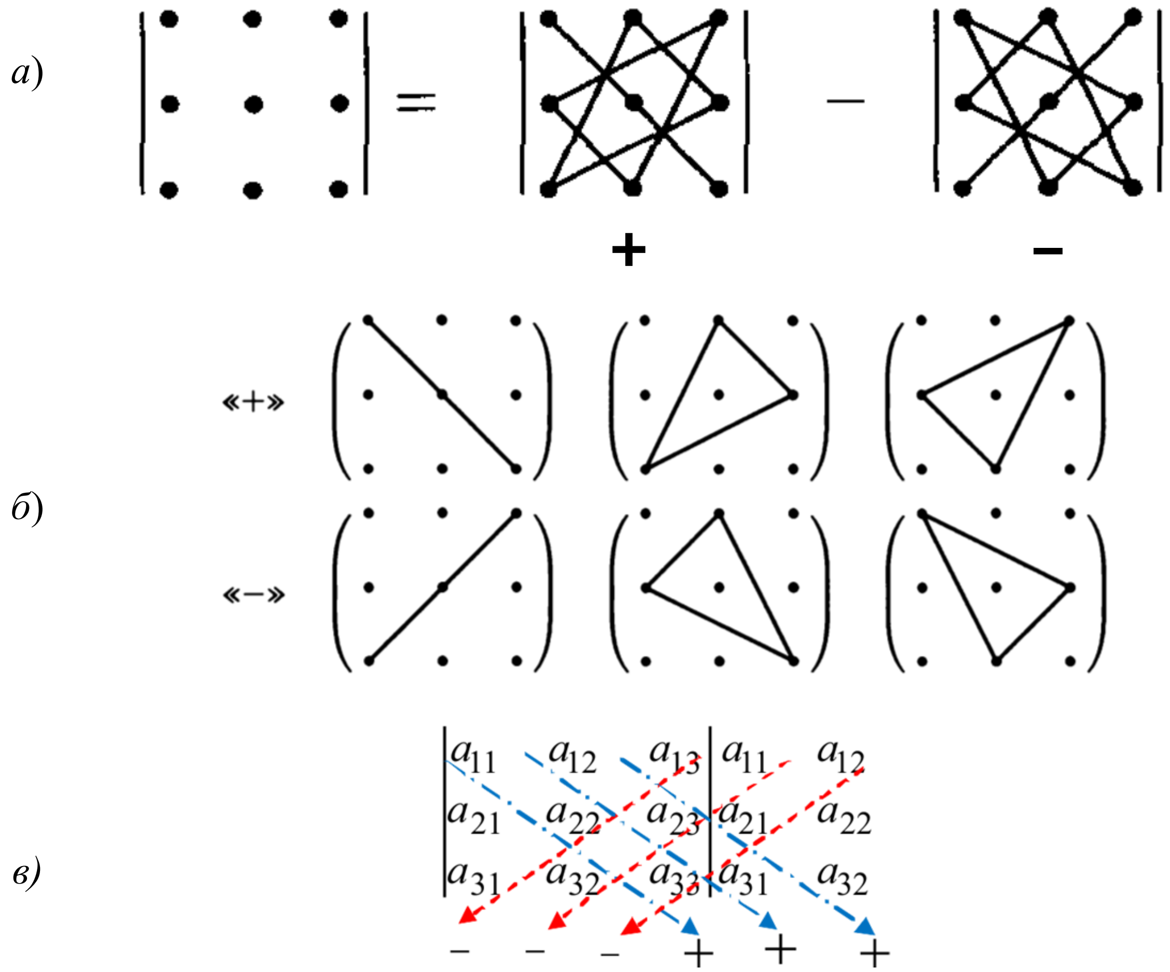


Рис. 2. Схемы вычисления определителя 3-го порядка

Можно использовать другую схему вычисления определителя 3-го порядка, но она даст в итоге аналогичную формулу. Для этого справа от определителя дописывают два первых столбца, затем берут произведения элементов на главной диагонали и произведения элементов на параллельных ей диагоналях со знаком «плюс», а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, – со знаком «минус». Схема этого способа приведена на рис. 3 (*в*).

► **Пример 2.** Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

1-й способ: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= 3 \cdot 1(-2) + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 4(-2)(-1) -$$
$$-1 \cdot 1(-1) - 4 \cdot 3(-2) - (-2\,)3 \cdot 3 =$$
$$= -6 + 9 + 8 + 1 + 24 + 18 = 54.$$

2-й способ: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} =$

$$= 3 \cdot 1(-2) + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1)\,4(-2) -$$
$$-(-1)1 \cdot 1 - 3 \cdot 3(-2\,) - 3 \cdot 4(-2) = 54.$$

Для определителей **4-го порядка и выше** существуют два способа вычисления путём сведения их к определителям на порядок ниже – разложение определителя по строке или по столбцу. Выбор строки и столбца никак не влияет на результат. Как бы мы ни считали определитель, результат будет один и тот же.

Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Разложение определителя n-го порядка по i-й строке

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in-1} \cdot A_{in-1} + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij},$$

где $i = 1, \ldots, n$; A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij}.

Разложение определителя n-го порядка по j-му столбцу

$$\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{n-1j} \cdot A_{n-1j} + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij},$$

где $j = 1, \ldots, n$; A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij}.

Обратите внимание! *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю*.

Например, $a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0$.

Для определителя 3-го порядка разложение по 1-й строке будет иметь вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}} \cdot A_{11} + \boldsymbol{a_{12}} \cdot A_{12} + \boldsymbol{a_{13}} \cdot A_{13}.$$

Правило вычисления определителя 2-го порядка есть частный случай предложенного способа (а именно разложение по 1-му столбцу).

► **Пример 3.** Вычислить определители:

а) 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по строке и по столбцу;

б) 4-го порядка с помощью разложения по строке или по столбцу.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$

Решение.

а) Выберем, например, 3-ю строку и разложим по ней определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{31}} \cdot A_{31} + \boldsymbol{a_{32}} \cdot A_{32} + \boldsymbol{a_{33}} \cdot A_{33.}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 3 - 1(-1) + 2\big(3 \cdot 3 - 4(-1)\big) - 2(3 \cdot 1 - 4 \cdot 3) =$$

$$= 9 + 1 + 2(9 + 4) - 2(3 - 12) = 10 + 26 + 18 = 54.$$

Теперь разложим определитель, например, по 1-му столбцу.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{11}} \cdot A_{11} + \boldsymbol{a_{21}} \cdot A_{21} + \boldsymbol{a_{31}} \cdot A_{31}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1(-2) - (-2)3) - 4\big(3(-2) - (-2)(-1)\big) + (3 \cdot 3 - 1(-1)) =$$

$$= 3(-2+6) - 4(-6-2) + 9 + 1 = 12 + 32 + 10 = 54.$$

б) Выберем в определителе, например 3-й столбец, и разложим по нему определитель. Получим четыре определителя 3-го порядка (их вычисление проведите самостоятельно):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} + 9(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 4(-1) - 9 \cdot 0 = 5 - 4 = 1.$$

Такой способ вычисления определителя 3-го порядка может показаться сложнее правила Саррюса, но это дело практики. К тому же, заметим, что если в строке/столбце определителя есть нулевые элементы, то по таким строкам/столбцам очень удобно производить разложение, в данном случае в разложении определителя становится меньше слагаемых (за счет умножения на 0). Если вообще в строке (или столбце) определителя все, кроме одного элемента, равны нулю, то в сумме останется одно слагаемое (остальные будут равны нулю), и определитель будет равен произведению ненулевого элемента выбранной строки (столбца) на его алгебраическое дополнение.

► **Пример 4.** Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение. Используем формулу разложения по 2-й строке, так как она содержит нулевые элементы: $a_{22} = 0$ и $a_{23} = 0$, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a_{21}} \cdot A_{21} + \boldsymbol{a_{22}} \cdot A_{22} + \boldsymbol{a_{23}} \cdot A_{23} = \boldsymbol{a_{21}} \cdot A_{21},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2(2 \cdot 7 - 4 \cdot 5) = 12.$$

Зная свойства определителя, можно с помощью элементарных преобразований привести его к такому виду, что в строке или столбце будет всего лишь один ненулевой элемент (редко, но встречается случай, когда получается целая строка или столбец, состоящие из нулей, тогда весь определитель равен нулю). Также можно преобразовать определитель к треугольному виду (когда все элементы, лежащие по одну сторону диагонали, идущей из верхнего левого угла в нижний правый, становятся нулями). В этом случае определитель будет равен произведению элементов главной диагонали.

1.3. Свойства определителей

1°. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот (это операция *транспонирования*). Поэтому все свойства, верные для строк, будут верны и для столбцов.

2°. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

3°. Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.

4°. Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Следствие из 3° и 4°. Если все элементы какой-либо строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

5°. Если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то весь определитель тоже равен нулю.

6°. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

7°. ***Элементарные преобразования определителя***

Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число k.

Последнее свойство и есть тот «инструмент», с помощью которого определитель можно привести к заданному виду (с нужным количеством нулевых элементов или к треугольному виду).

► **Пример 5.** Проверить свойства 1° – 6° на определителе $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Проверим свойство 1°:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 6, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 6.$$

Проверим свойство 2° (поменяем местами сначала столбцы, а потом строки):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = -6, \qquad \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 5 = -6.$$

Проверим свойство 4°. Вынесем из 1-го столбца общий множитель 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(1 \cdot 5 - 2 \cdot 1) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Проверим свойство 6° и по ходу вычислений проверим свойство 3°. Представим элементы второго столбца в виде суммы и воспользуемся свойством 6°:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 + (-1) \\ 4 & 4 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= (2 \cdot 4 - 4 \cdot 2) + \big(2 \cdot 1 - 4(-1)\big) = 0 + (2 + 4) = 6.$$

В данном примере при разложении определителя на сумму двух определителей первым слагаемым является определитель, у которого, с одной стороны, два одинаковых столбца, а с другой – две пропорциональные строки (элементы 2-й строки в два раза больше элементов 1-й строки). В любом случае мы проверили, что такие определители равны нулю.

Свойства определителя верны для определителя любого порядка, поэтому для быстроты вычислений проверка свойств 1°– 6° выполнялась на определителе 2-го порядка. Для определителя 3-го порядка проверьте эти свойства самостоятельно.

Проверим свойство 7° на определителе 3-го порядка.

► **Пример 6.** Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, используя элементарные преобразования и разложение по строке/столбцу.

Решение. Сначала вычислим определитель с помощью дописывания справа от определителя первых двух столбцов (см. рис. 2, *в*):

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 1 + (-1)4(-2) -$$

$$-(-1)1 \cdot 1 - 3 \cdot 5(-2\,) - 5 \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$= 12 + 25 + 8 + 1 + 30 - 80 = -4.$$

Попробуем способ вычисления с применением свойства 7°. Используя элементарные преобразования, получим в какой-нибудь строке/столбце определителя как можно больше нулевых элементов. Для этого нужно выбрать самую «удобную» строку/столбец и подобрать числа k. Выберем 3-ю строку, так как линейную комбинацию элементов этой строки $a_{3j} + a_{3p} \cdot k$ ($j, p = 1, 2, 3, j \neq p$) легко сделать равной нулю. Прибавим ко *второму элементу* 3-й строки ($a_{32} = -2$) *первый элемент* 3-й строки ($a_{31} = 1$), умноженный на число $k = 2$, получим 0. Точно также прибавим к *третьему элементу* 3-й строки ($a_{33} = 4$) *первый элемент* 3-й строки ($a_{31} = 1$), умноженный на число $k = -4$, получим 0. То есть $a_{32} + a_{31} \cdot 2 = -2 + 1 \cdot \mathbf{2} = 0$ и $a_{33} + a_{31}(-4) = 4 + 1 \cdot \mathbf{(-4)} = 0$.

Так как мы выбрали «удобную» *строку*, то все действия будут производиться со всеми элементами *столбца* и, наоборот, если бы мы выбрали «удобный» столбец, то все действия производились бы со всеми элементами строки.

Прибавим к элементам *второго столбца* соответственные элементы *первого столбца*, умноженные на $k = 2$: $\underline{\mathbf{II}} + \mathrm{I} \cdot 2$.

Прибавим к элементам *третьего столбца* соответственные элементы *первого столбца*, умноженные на $k = -4$: $\underline{\mathbf{III}} + \mathrm{I}\,(-4)$. А затем разложим определитель по 3-й строке.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 + 3 \cdot 2 & -1 + 3 \cdot (-4) \\ 4 & 1 + 4 \cdot 2 & 5 + 4 \cdot (-4) \\ 1 & -2 + 1 \cdot 2 & 4 + 1 \cdot (-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 11 & -13 \\ 4 & 9 & -11 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 11 & -13 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} = 11(-11) - 9(-13) = -121 + 117 = -4.$$

Здесь особенно важно обращать внимание, куда записывать результат. Когда мы *прибавляли к элементам второго столбца, результат записывали вместо второго столбца*, когда прибавляли к элементам третьего столбца – результат записывали вместо третьего. То есть *результат действий записывается* *<u>на место того</u>* *столбца* (*или строки*), *<u>к которому прибавляется</u>*. Вычитание можно рассматривать, как прибавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на –1.

Если строки (столбцы) складываются, то результат записывается вместо любой из этих двух строк (столбцов).

► **Пример 7.** Преобразовать определитель к треугольному виду и вычислить его $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Чтобы вычислить определитель после преобразования его к треугольному виду, нужно перемножить элементы главной диагонали (идущая из верхнего левого угла в нижний правый).

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{стр.}\boxed{\text{II}} - \text{I} \\ \text{стр.}\boxed{\text{III}} + \text{I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-6)\,1 = -12.$$

Заметим, что при сложении 1-й и 3-й строки в определителе получается строка с двумя нулевыми элементами. Поэтому его также не сложно было бы вычислить разложением по 3-й строке.

► **Пример 8.** Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 9 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Чтобы вычислить определитель 4-го порядка, нужно использовать разложение по строке или столбцу. Если не использовать элементарных преобразований, то придется считать четыре определителя 3-го порядка. Можно заметить, что в данном определителе есть «удобный» для элементарных преобразований *4-й столбец*, значит будем действовать *со строками*. Результат записываем вместо строк, к которым прибавляем измененные другие строки и которые для удобства всегда будем выделять и указывать первыми в краткой записи преобразований.

$$\begin{vmatrix}2&3&5&1\\5&7&1&2\\2&3&4&1\\6&4&9&-1\end{vmatrix}=\begin{matrix}\text{стр.}\boxed{\mathbf{II}}+\mathrm{I}\,(-2)\\\text{стр.}\boxed{\mathbf{III}}+\ \mathrm{I}V\\\text{стр.}\boxed{\mathbf{I}V}+\mathrm{I}\end{matrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2&3&5&1\\5+2(-2)&7+3(-2)&1+5(-2)&2+1(-2)\\2+6&3+4&4+9&1+(-1)\\6+2&4+3&9+5&-1+1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2&3&5&1\\1&1&-9&0\\8&7&13&0\\8&7&14&0\end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 4-му столбцу, а затем по 3-й строке:

$$\begin{vmatrix}2&3&5&1\\1&1&-9&0\\8&7&13&0\\8&7&14&0\end{vmatrix}=1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&1&-9\\8&7&13\\8&7&14\end{vmatrix}=\text{стр.}\boxed{\mathbf{III}}-\mathrm{II}=$$

$$=-\begin{vmatrix}1&1&-9\\8&7&13\\8-8&7-7&14-13\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-9\\8&7&13\\0&0&1\end{vmatrix}=$$

$$=-1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1\\8&7\end{vmatrix}=-(7-8)=1.$$

Таким образом, выше было приведено четыре способа вычисления определителя 3-го порядка:

– правило Саррюса («правило треугольников/звёздочки»);

– дописывание первых двух столбцов справа от определителя (далее вычисляют шесть произведений: три с «+», три с «–»);

– разложение определителя по строке или столбцу;

– преобразование определителя к треугольному виду и перемножение элементов главной диагонали.

§ 2. МАТРИЦЫ

2.1. Основные понятия

Матрицей А размерами m x n называется прямоугольная таблица из ***m*** строк и ***n*** столбцов, элементами которой могут быть числа, а также другие математические выражения.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицы обозначают большими латинскими буквами A, B, C и другими, а элементы матрицы – соответствующими маленькими латинскими буквами с указанием двойного индекса, где первое число i – это номер строки (i = 1, 2, …, m), а второе число j – номер столбца (j = 1, 2, …, n), на пересечении которых стоит данный элемент. Например, элемент a_{32} – матрицы A расположен в 3-й строке, 2-м столбце. Встречается обозначение $A_{m\times n} = (a_{ij})$.

Матрица может состоять из одной строки (*вектор-строка*), из одного столбца (*вектор-столбец*) и даже из одного элемента:

$$B = (b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13} \quad b_{14}), \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, \quad W = (w_{11}) = w_{11}.$$

Матрица, состоящая из одного числа (т.е. размерами 1 x 1), отождествляется с этим числом.

Квадратная матрица n-го порядка – матрица размерами n x n, т.е. у квадратной матрицы количество строк равно количеству столбцов.

Главная диагональ квадратной матрицы n-го порядка – диагональ, идущая из верхнего левого угла в нижний правый (слева направо и сверху вниз), т.е. от элемента a_{11} к элементу a_{nn}.

Диагональная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т.е. с индексами $i \neq j$) равны нулю.

Треугольная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы выше или ниже главной диагонали (т.е. с индексами $i < j$ или $i > j$) равны нулю. Соответственно их называют нижнетреугольная и верхнетреугольная матрицы (по расположению ненулевых элементов).

Единичная матрица (обозначается E) – диагональная матрица, у которой на главной диагонали все элементы равны единице.

Нулевая матрица (обозначается O) – матрица любого размера, у которой все элементы равны нулю.

В матричном исчислении матрицы O и E играют соответственно роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица вида $C = (A \mid B)$, составленная из двух матриц (с одинаковым количеством строк), разделенных вертикальной чертой, называется ***расширенной***.

Примеры матриц: M – квадратная, N – нижнетреугольная, V – верхнетреугольная, D – диагональная, E – единичная, G – нулевая, R – расширенная:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R = \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 6 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Матрицы одинакового размера *равны* между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

Симметрическая матрица – матрица, у которой $a_{ij} = a_{ji}$ (элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны):

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & y \\ 7 & y & x \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы назовём ***крайним***, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю.

Матрица называется ***ступенчатой***, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

Матрицы A и B – ступенчатые, C – неступенчатая матрица (подчеркиванием отмечены крайние элементы каждой строки):

$$A=\begin{pmatrix}\underline{2}&3&0&2\\0&\underline{2}&1&6\\0&0&\underline{5}&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\underline{2}&1&0&9\\0&\underline{4}&6&1\\0&0&0&\underline{8}\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}\underline{2}&3&8&2\\0&0&0&\underline{6}\\0&\underline{5}&4&1\end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если $\det A \neq 0$ и, наоборот, если $\det A = 0$, матрица называется ***вырожденной***.

2.2. Операции над матрицами

Сложение, вычитание

Складывать и вычитать можно матрицы только одинакового размера.

Суммой матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для $\forall\, i,j$.

Запись: $C = A + B$.

Разностью матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ назовем матрицу $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такую, что $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ для $\forall\, i,j$.

Запись: $C = A - B$.

($\forall$ – математическое обозначение – квантор всеобщности. Читается: «для любого…», «для каждого…», «для всех…», или «любой…», «каждый…», «все…»).

► **Пример 9.** Вычислим сумму и разность матриц:

$$\begin{pmatrix}2&0&-3\\5&-1&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&1&3\\1&7&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\6&6&2\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2&0&-3\\5&-1&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&1&3\\1&7&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&-6\\4&-8&6\end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения матриц

1°. $A + B = B + A$ (коммутативность);

2°. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность);

3°. $A + O = A$;

4°. $A - A = O$.

Умножение матрицы на число

Произведение матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ ***на число*** k есть матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}=k\cdot a_{ij}$ для $\forall\, i,j$.

Запись: $B = k\cdot A$.

► **Пример 10.** Вычислим произведение матрицы на число:
$$3\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 12 & -6\\ 0 & -3 & 15\end{pmatrix}.$$
Чтобы вынести общий множитель элементов матрицы за скобки, нужно каждый элемент матрицы разделить на это число, то есть это обратное действие к умножению матрицы на число.

Матрица $-A = (-1)\,A$ называется ***противоположной*** матрице A. Разность матриц можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

Свойства операции умножения матрицы на число

1°. $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$;

2°. $\alpha(\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta)\,A$ (ассоциативность);

3°. $\alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

4°. $(\alpha + \beta)\,A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Здесь A, B – матрицы, α, β – числа.

Линейная комбинация матриц

Линейной комбинацией матриц A и B одинакового размера называется выражение вида $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α, β – числа.

Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка местами двух любых строк (столбцов).
2. Умножение элементов строки (столбца) на число $k \neq 0$.
3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Запись: $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют ***канонической***, например
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
► **Пример 11.** Привести к каноническому виду матрицу
$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним следующие элементарные преобразования:
1-й шаг. Поменяем местами 1-й и 3-й столбец (стлб) матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{стлб I} \ \leftrightarrow \ \text{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-й шаг. В полученной матрице

ко 2-й строке (стр) прибавим 1-ю строку;

к 3-й строке прибавим 1-ю строку, умноженную на –5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{стр II} + \text{I} \\ \text{стр III} + \text{I}(-5) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1+1 & 2+3 & 0+2 & 1+2 \\ 5+1(-5) & 0+3(-5) & 4+2(-5) & 1+2(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

3-й шаг. В полученной матрице

ко 2-му столбцу прибавим 1-й столбец, умноженный на –3;

к 3-му столбцу прибавим 1-й столбец, умноженный на –2;

к 4-му столбцу прибавим 1-й столбец, умноженный на –2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \text{стлб II} + \text{I}(-3) \\ \text{стлб III} + \text{I}(-2) \\ \text{стлб IV} + \text{I}(-2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3+1(-3) & 2+1(-2) & 2+1(-2) \\ 0 & 5+0(-3) & 2+0(-2) & 3+0(-2) \\ 0 & -15+0(-3) & -6+0(-2) & -9+0(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

4-й шаг. В полученной матрице

2-й столбец умножим на 1/5, т.е. разделим на 5;

3-й столбец умножим на 1/2, т.е. разделим на 2;

4-й столбец умножим на 1/3, т.е. разделим на 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \text{стлб II} : 5 \\ \text{стлб III} : 2 \\ \text{стлб IV} : 3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0:5 & 0:2 & 0:3 \\ 0 & 5:5 & 2:2 & 3:3 \\ 0 & -15:5 & -6:2 & -9:3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

5-й шаг. В полученной матрице

к 3-й строке прибавим 2-ю строку, умноженную на 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \overset{\text{стр III} + \text{II} \cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0+0\cdot 3 & -3+1\cdot 3 & -3+1\cdot 3 & -3+1\cdot 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6-й шаг. В полученной матрице

к 3-му столбцу прибавим 2-й столбец, умноженный на –1;

к 4-му столбцу прибавим 2-й столбец, умноженный на –1.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \underset{\text{стлб IV} + \text{II}(-1)}{\overset{\text{стлб III} + \text{II}(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0+0(-1) & 0+0(-1)\\ 0 & 1 & 1+1(-1) & 1+1(-1)\\ 0 & 0 & 0+0(-1) & 0+0(-1)\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

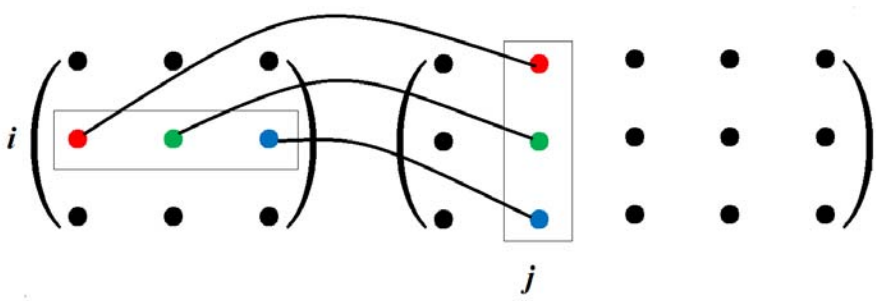
Произведение матриц

Произведением матриц $A_{m\times n} = \left(a_{ip}\right)$ и $B_{n\times k} = \left(b_{qj}\right)$ называется матрица $C_{m\times k} = \left(c_{ij}\right)$ такая, что

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{it} \cdot b_{tj} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj},$$

где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$. То есть элемент новой матрицы C, находящийся в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B – правило «строка на столбец». На рис. 3 схематически изображено вычисление элемента в произведении матриц и расположение элемента в новой матрице.

а)



б)

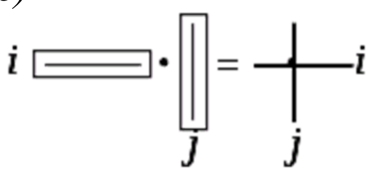


Рис. 3: а – вычисление элемента в произведении,
б – расположение элемента в новой матрице

У матрицы $C_{\boldsymbol{m}\times \boldsymbol{k}} = A_{\boldsymbol{m}\times n} \cdot B_{n\times \boldsymbol{k}}$ количество строк равно числу строк матрицы A, а количество столбцов равно числу столбцов матрицы B.

Операция умножения $C_{m\times k} = A_{m\times \boldsymbol{n}} \cdot B_{\boldsymbol{n}\times k}$ двух матриц возможна только, если *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы*. Эту важную особенность легче проверять, если записать рядом размеры матриц в том порядке, в котором они умножаются:

матрицу 3x $\boxed{\textbf{3 на 3}}$ x 4 умножить можно, результат – матрица 3 x 4;
матрицу 4x $\boxed{\textbf{2 на 2}}$ x 2 умножить можно, результат – матрица 4 x 2;
матрицу 2x $\boxed{\textbf{4 на 4}}$ x 1 умножить можно, результат – матрица 2 x 1;
матрицу 2x $\boxed{\textbf{2 на 3}}$ x 4 умножить нельзя,
матрицу 3x $\boxed{\textbf{3 на 4}}$ x 3 умножить нельзя,
матрицу 1x $\boxed{\textbf{4 на 3}}$ x 4 умножить нельзя.

Умножение $A \cdot B$ и $B \cdot A$ квадратных матриц A и B одинаковых размеров возможно всегда.

► **Пример 12.** Найти произведение матриц $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$, если это возможно, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A имеет размеры 3 x **2**, матрица B имеет размеры **2** x 2. Матрицу 3x $\boxed{\textbf{2 на 2}}$ x 2 умножить можно, т.е. $A \cdot B$ можно вычислить, результатом будет матрица размерами 3 x 2, а матрицу 2 x $\boxed{\textbf{2 на 3}}$ x 2 умножить нельзя, т.е. $B \cdot A$ вычислить нельзя.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{7} & 9 \\ \mathbf{8} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1 \cdot 7} + \mathbf{4 \cdot 8} & 1 \cdot 9 + 4 \cdot 0 \\ 2 \cdot 7 + 5 \cdot 8 & 2 \cdot 9 + 5 \cdot 0 \\ 3 \cdot 7 + 6 \cdot 8 & 3 \cdot 9 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 39 & 9 \\ 54 & 18 \\ 69 & 27 \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет размеры 3 x **2**, матрица C имеет размеры **2** x 3. Матрицу 3 x $\boxed{\textbf{2 на 2}}$ x 3 умножить можно, т.е. $A \cdot C$ можно вычислить, результатом будет матрица размерами 3 x 3. Матрицу 2 x $\boxed{\textbf{3 на 3}}$ x 2 тоже можно умножить, т.е. $C \cdot A$ можно вычислить, результатом будет матрица размерами 2 x 2.

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ \mathbf{-4} & -5 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1(-1)+4(-4) & 1(-2)+4(-5) & 1(-3)+4(-6) \\ 2(-1)+5(-4) & 2(-2)+5(-5) & 2(-3)+5(-6) \\ 3(-1)+6(-4) & 3(-2)+6(-5) & 3(-3)+6(-6) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -17 & -22 & -27 \\ -22 & -29 & -36 \\ -27 & -36 & -45 \end{pmatrix}.$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)1+(-2)2+(-3)3 & (-1)4+(-2)5+(-3)6 \\ (-4)1+(-5)2+(-6)3 & (-4)4+(-5)5+(-6)6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -32 \\ -32 & -77 \end{pmatrix}.$$

Можно увидеть, что $A \cdot C$ и $C \cdot A$ получились симметрическими, но не равными матрицами.

Произведение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е. в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если же $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются ***перестановочными*** или ***коммутирующими*** (в этом случае A и B обязательно должны быть квадратными матрицами одинакового размера).

Свойства операции умножения матриц

1°. $A\,(B \cdot C) = (A \cdot B)\,C = A \cdot B \cdot C$ (ассоциативность);

2°. $A\,(B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность);

3°. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

4°. $\alpha\,(A \cdot B) = A\,(\alpha \cdot B) = (\alpha \cdot A)\,B$;

5°. $D \cdot E = E \cdot D = D$,

где A, B, C – матрицы, E – единичная матрица такого же размера, что и квадратная матрица D, α – число.

Эти свойства верны при условии, что данные произведения матриц существуют.

Транспонирование

Транспонированной к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^{\mathrm{T}} = (a_{ij})^{\mathrm{T}} = (a_{ji})$, полученная из исходной матрицы заменой строк на столбцы (или столбцов на строки, результат будет такой же). В новой матрице элемент i-й строки j-го столбца будет уже в j-й строке i-м столбце, элементы главной диагонали при этом остаются на своих местах. Данная операция называется ***транспонированием***.

Свойства операции транспонирования

1°. Симметрическая матрица совпадает со своей транспонированной матрицей.

2°. Если транспонировать матрицу два раза, то получится исходная матрица $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

3°. $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.

4°. $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

► **Пример 13.** Транспонировать матрицы A, B, C:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Решение. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$

Возведение матрицы в степень

Возведение матрицы A в целую положительную степень n сводится к произведению n одинаковых матриц:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

Дополнительно определим $A^0 = E$, $A^1 = A$.

Возведение матрицы A в степень может привести к нулевой матрице:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операция возведения в степень определена только для квадратных матриц.

Матричный многочлен

Если задан многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, то ***матричным многочленом*** $f(A)$ называется выражение

$$f(A) = a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot E.$$

Значением матричного многочлена $f(A)$ будет матрица при заданной матрице A.

► **Пример 14.** Найти значение матричного многочлена:

а) $f(A)$, где $f(x) = -2x^2 + 5x + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

б) $f(B)$, где $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

а) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 0 & 0\cdot 2 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$,

$$f(A) = -2A^2 + 5A + 4E = -2\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -16 \\ 0 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) $B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 - 1\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 - 1\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 - 1\cdot 5 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 3 + 1\cdot(-2) & 3\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 1\cdot 5 \\ -2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 5\cdot(-2) & -2\cdot 2 + 1\cdot 0 + 5\cdot 1 & -2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 1 & -4 \\ 1 & 7 & 2 \\ -9 & 1 & 28 \end{pmatrix}, \quad 3\cdot B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

$f(B) = B^2 - 3B + E =$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 1 & -4 \\ 1 & 7 & 2 \\ -9 & 1 & 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -1 \\ -8 & 8 & -1 \\ -3 & -2 & 14 \end{pmatrix}.$$

2.3. Обратная матрица

Операции деления в матричном исчислении нет, но для некоторых матриц существует обратная матрица к матрице A, такая, что при умножении на матрицу A в произведении получится единичная матрица.

Обратной к квадратной матрице A называется матрица A^{-1}, для которой выполнено равенство $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица. Матрицы E и A^{-1} имеют те же размеры, что и матрица A.

Обратная матрица *существует и единственна* (∃!) *только у невырожденных матриц*, т.е. у которых $\det A \neq 0$.

Запись: $A^{-1}\ \exists!\ \det A \neq 0$.

Рассмотрим два способа нахождения обратной матрицы: метод присоединенной матрицы и метод элементарных преобразований (метод Гаусса).

Метод присоединенной матрицы

Для невырожденной матрицы A 3-го порядка A^{-1} находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \frac{A_{31}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \frac{A_{32}}{\det A} \\ \frac{A_{13}}{\det A} & \frac{A_{23}}{\det A} & \frac{A_{33}}{\det A} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения, а матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \det A$$

называется *присоединенной матрицей*.

Для матриц других порядков обратная матрица находится аналогично. В частности, для матриц 2-го порядка формула имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

► **Пример 15.** Найти A^{-1} методом присоединенной матрицы для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Решение. Обратная матрица существует и единственна (∃!) только у невырожденных матриц, у которых $\det A \neq 0$.

$$\det A = 1\,(-5) - 4\,(-2) = 3 \neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы (по столбцам):

$A_{11} = (-1)^{1+1}|-5| = 1(-5) = -5$; $A_{21} = (-1)^{2+1}|-2| = -1(-2) = 2$;
$A_{12} = (-1)^{1+2}|4| = -1 \cdot 4 = -4$; $A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1 \cdot 1 = 1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы убедились, что для матриц 2-го порядка верна формула

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

► **Пример 16.** Найти A^{-1} методом присоединенной матрицы для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ и сделать проверку.

Решение. Обратная матрица существует и единственна (∃!) только у невырожденных матриц, у которых $\det A \neq 0$. Для данной матрицы определитель был посчитан в примере 6, $\det A = -4$.

Вычислим алгебраические дополнения к каждому элементу матрицы (по столбцам):

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1(1 \cdot 4 - (-2)5) = 14;$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -1(5 \cdot 4 - (-2)(-1)) = -18;$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(5 \cdot 5 - 1(-1)) = 26;$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1(4 \cdot 4 - 1 \cdot 5) = -11;$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1(3 \cdot 4 - 1(-1)) = 13;$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1(3 \cdot 5 - 4(-1)) = -19;$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(4(-2) - 1 \cdot 1) = -9;$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1(3(-2) - 1 \cdot 5) = 11;$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(3 \cdot 1 - 4 \cdot 5) = -17.$$

Подставим найденные значения в формулу (не забываем про операцию транспонирования в этой формуле):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 14 & -11 & -9 \\ -18 & 13 & 11 \\ 26 & -19 & -17 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 14 & -18 & 26 \\ -11 & 13 & -19 \\ -9 & 11 & -17 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}.$$

Чтобы умножить матрицу на число, отличное от нуля, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число. Но так как элементы матрицы не кратны 4, то элементы обратной матрицы будут дробными:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 14 & -18 & 26 \\ -11 & 13 & -19 \\ -9 & 11 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {-14}/_4 & {18}/_4 & {-26}/_4 \\ {11}/_4 & {-13}/_4 & {19}/_4 \\ {9}/_4 & {-11}/_4 & {17}/_4 \end{pmatrix},$$

поэтому для удобства проверки и краткости записи не будем вносить число (– ¼) в присоединенную матрицу, внесём только знак «–»:

$$\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 14 & -18 & 26 \\ -11 & 13 & -19 \\ -9 & 11 & -17 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14 & 18 & -26 \\ 11 & -13 & 19 \\ 9 & -11 & 17 \end{pmatrix}.$$

Проверка заключается в том, что при умножении найденной обратной матрицы на исходную матрицу должна получиться единичная матрица $A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = E$:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14 & 18 & -26 \\ 11 & -13 & 19 \\ 9 & -11 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14\cdot 3 + 18\cdot 4 - 26\cdot 1 & -14\cdot 5 + 18\cdot 1 - 26(-2) & -14(-1) + 18\cdot 5 - 26\cdot 4 \\ 11\cdot 3 - 13\cdot 4 + 19\cdot 1 & 11\cdot 5 - 13\cdot 1 + 19(-2) & 11(-1) - 13\cdot 5 + 19\cdot 4 \\ 9\cdot 3 - 11\cdot 4 + 17\cdot 1 & 9\cdot 5 - 11\cdot 1 + 17(-2) & 9(-1) - 11\cdot 5 + 17\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Проверка выполнена, обратная матрица найдена верно.

Метод элементарных преобразований (метод Гаусса)

Припишем справа к матрице A размерами $n \times n$ единичную матрицу такими же размерами $n \times n$, разделяя их вертикальной чертой. Получится прямоугольная матрица $\boldsymbol{G} = (\,A \mid E\,)$ размерами $n \times 2n$. Умножим справа обе части этой «сдвоенной» матрицы $\boldsymbol{G}$ на A^{-1}, получим

$\breve{\boldsymbol{G}} = (A \cdot A^{-1} \mid E \cdot A^{-1}) = (E \mid A^{-1})$.

Таким образом, если элементарными преобразованиями *над строками* матрицы $\boldsymbol{G}$ привести ее к виду $\breve{\boldsymbol{G}} = (E \mid A^{-1})$, где в левой части единичная матрица E, то в правой части окажется искомая обратная матрица A^{-1}.

Вычисляя обратную матрицу предыдущим методом присоединенной матрицы, можно заметить, что элементы матрицы A^{-1} чаще всего дробные (так как происходит деление на $\det A$). То есть чаще всего правая часть матрицы $\breve{\boldsymbol{G}} = (E \mid A^{-1})$ дробная, а это значит, что при элементарных преобразованиях над строками матрицы $\boldsymbol{G}$ придется работать с дробями, чтобы этого избежать, умножим справа обе части матрицы $\boldsymbol{G} = (A \mid E)$ на $A^{-1} \cdot \det A$:

$$(A \cdot A^{-1} \cdot \det A \mid E \cdot A^{-1} \cdot \det A) = (E \cdot \det A \mid A^{-1} \cdot \det A) = (E \cdot \det A \mid \tilde{A}) =$$

$$= \left(\begin{matrix} \mathrm{detA} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{detA} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{detA} \end{matrix}\middle| \tilde{A}\right),$$

где в правой части получим присоединенную матрицу $\tilde{A}$. После приведения матрицы $\boldsymbol{G} = (A \mid E)$ к виду $\hat{\boldsymbol{G}} = (E \cdot \det A \mid \tilde{A})$ достаточно будет последним действием разделить все элементы матрицы $\hat{\boldsymbol{G}}$ на $\det A$, таким образом, справа будет получена обратная матрица A^{-1}.

► **Пример 17.** Найти методом Гаусса обратную матрицу A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. В примере 16 мы выяснили, что для данной матрицы A^{-1} существует, так как $\det A = -4$. Запишем матрицу $\boldsymbol{G} = (A \mid E)$. Приведем ее к виду $\hat{\boldsymbol{G}} = (\mathrm{E} \cdot \det A \mid \tilde{A})$, т.е. диагональной матрице с элементами на главной диагонали, равными –4.

Обратим внимание на следующие особенности. В методе Гаусса элементарные преобразования производятся *над строками* матрицы $\boldsymbol{G}$ и ими являются:

1) перестановка местами двух любых строк;

2) умножение элементов строки на число $k \neq 0$;

3) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Преобразования 2 и 3 можно делать одновременно, т.е. например, умножить первую строку на 5 и прибавить к ней вторую строку, умноженную на (–3).

У матриц в отличие от определителя результат действий после элементарных преобразований можно записывать вместо любой строки. Заметим, что у определителей умножение элементов строки на число $k \neq 0$ не является элементарным преобразованием.

Выполняя элементарные преобразования над матрицами, удобнее от вычитания переходить к сложению с противоположными элементами, т.е. описанное выше действие: стр $\mathrm{I} \cdot 5$ + стр $\mathrm{II} \cdot (-3)$ на самом деле является вычитанием стр $\mathrm{I} \cdot 5$ – стр $\mathrm{II} \cdot 3$, но для удобства вычислений используют такой прием. Так как преобразования можно выполнять только со строками, то в будущем будем опускать в краткой записи преобразований уточнение «стр».

Делать нулевыми все, кроме стоящих на главной диагонали, элементы правой части матрицы $\hat{\boldsymbol{G}} = (\mathrm{E} \cdot \det A \mid \tilde{A})$ нужно по столбцам – один под другим. Например, сначала зануляем элемент a_{21}, а затем стоящий под ним a_{31}, причем получить это можно за один раз, не переписывая постоянно матрицу после каждого преобразования. Можно начать делать нулевыми элементы третьего столбца, т.е. a_{13} и a_{23} или второго, т.е. a_{12} и a_{32}. А элементы на главной диагонали следует преобразовать так, чтобы они стали кратными определителю матрицы.

Все преобразования будем записывать кратко. Номер строки, вместо которой записываем результат, – выделен. Зануляем сначала элементы первого столбца и одновременно делаем элемент a_{11} кратным определителю, который равен –4.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{I}} + \mathrm{III} \\ \boxed{\mathrm{II}} - \mathrm{I} - \mathrm{III} \\ \boxed{\mathrm{III}} \cdot 3 - \mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3+1 & 5-2 & -1+4 & 1+0 & 0+0 & 0+1 \\ 4-3-1 & 1-5-(-2) & 5-(-1)-4 & 0-1-0 & 1-0-0 & 0-0-1 \\ 1\cdot 3-3 & -2\cdot 3-5 & 4\cdot 3-(-1) & 0\cdot 3-1 & 0\cdot 3-0 & 1\cdot 3-0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -11 & 13 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{I}} \cdot 2 + \mathrm{II} \cdot 3 \\ \boxed{\mathrm{II}} \cdot 2 \\ \boxed{\mathrm{III}} \cdot (-2) + \mathrm{II} \cdot 11 \end{array} \sim$$

(теперь зануляем элементы второго столбца, а элемент a_{22} уже можно сделать равным –4. Так как вычисления расписаны подробно, то матрицу приходится писать на двух строках (на первой строке – левая часть матрицы, на нижней – правая часть).

$$\sim\left(\begin{array}{ccc} 4\cdot 2+0\cdot 3 & 3\cdot 2+(-2)3 & 3\cdot 2+2\cdot 3 \\ 0\cdot 2 & -2\cdot 2 & 2\cdot 2 \\ 0(-2)+0\cdot 11 & -11(-2)+(-2)11 & 13(-2)+2\cdot 11 \end{array}\right\Vert$$

$$\left\Vert\begin{array}{ccc} 1\cdot 2+(-1)3 & 0\cdot 2+1\cdot 3 & 1\cdot 2+(-1)3 \\ -1\cdot 2 & 1\cdot 2 & -1\cdot 2 \\ -1(-2)+(-1)11 & 0(-2)+1\cdot 11 & 3(-2)+(-1)11 \end{array}\right) =$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 12 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -9 & 11 & -17 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{I}}+\mathrm{III}\cdot 3 \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{II}}+\mathrm{III} \end{array} =$$

(Осталось сделать нулевыми элементы третьего столбца).

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8+0\cdot 3 & 0+0\cdot 3 & 12+(-4)3 & -1+(-9)3 & 3+11\cdot 3 & -1+(-17)3 \\ 0+0 & -4+0 & 4+(-4) & -2+(-9) & 2+11 & -2+(-17) \\ 0 & 0 & -4 & -9 & 11 & -17 \end{array}\right) =$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & -28 & 36 & -52 \\ 0 & -4 & 0 & -11 & 13 & -19 \\ 0 & 0 & -4 & -9 & 11 & -17 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{I}}:(-2) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & 14 & -18 & 26 \\ 0 & -4 & 0 & -11 & 13 & -19 \\ 0 & 0 & -4 & -9 & 11 & -17 \end{array}\right).$$

Полученная матрица и есть матрица

$$\hat{\boldsymbol{G}} = (\,E\cdot\det A \mid \tilde{A}\,) = \left(\begin{array}{ccc|c} \det A & 0 & 0 & \\ 0 & \det A & 0 & \tilde{A} \\ 0 & 0 & \det \mathrm{A} & \end{array}\right).$$

Разделим все ее элементы на $\det A = -4$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -14/4 & 18/4 & -26/4 \\ 11/4 & -13/4 & 19/4 \\ 9/4 & -11/4 & 17/4 \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу, как и в примере 16.

Свойства обратной матрицы

1°. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$; 3°. $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

2°. $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$; 4°. $(A^{-1})^{-1} = A$.

2.4. Матричные уравнения

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записывают следующим образом:

$$A\cdot X=B,\qquad X\cdot A=B,\qquad A\cdot X\cdot C=B.$$

В этих уравнениях A, B, C, X – матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения возможны, и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров.

Если в приведенных выше уравнениях матрицы A и C невырожденные (т.е. их определители не равны нулю), то решения этих уравнений записываются соответственно:

$$X=A^{-1}\cdot B,\qquad X=B\cdot A^{-1},\qquad X=A^{-1}\cdot B\cdot C^{-1}.$$

► **Пример 18.** Решить матричное уравнение
$\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}6 & -10\\ 1 & -9\end{pmatrix}.$

Решение. Запишем данное матричное уравнение в виде $A\cdot X=B$, где $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -10\\ 1 & -9\end{pmatrix}$.

Решением является матрица $X=A^{-1}\cdot B$ (если существует матрица A^{-1}).

1. Найдем определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Значит, обратная матрица A^{-1} существует, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

2. Найдем обратную матрицу по формуле (см. вычисление обратных матриц):

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Найдем матрицу

$$X=A^{-1}\cdot B=\tfrac{1}{-4}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -10\\ 1 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

► **Пример 19.** Найти матрицу X, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 15\\ -14 & -27\end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем матричное уравнение в виде $A\cdot X\cdot C=B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 15\\ -14 & -27\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Его решением является матрица $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$ (если матрицы A^{-1} и C^{-1} существуют).

1. Найдем определители матриц A и C:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \quad \det C = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Матрицы A и C невырожденные, значит, существуют обратные матрицы A^{-1} и C^{-1}, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

2. Найдем обратные матрицы A^{-1} и C^{-1}. Опять используем формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем матрицу

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -14 & -27 \end{pmatrix}\frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-15}\begin{pmatrix} 15 & 45 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 0 & -25 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.5. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размерами $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Минором k-го порядка $\boldsymbol{M_k}$ произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов ($k \leq \min(m; n)$, где $\min(m; n)$ – меньшее из чисел m и n). (Заметим, что количество таких миноров равно $C_m^k \cdot C_n^k$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n элементов по k). Понятия «минор элемента матрицы» и «минор матрицы» имеют различный смысл, и их не следует путать.

Например, в матрице A можно указать такие миноры 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{in} \\ a_{mj} & a_{mn} \end{vmatrix} \text{ и другие,}$$

миноры 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{23} & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{i3} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{m3} & a_{mj} & a_{mn} \end{vmatrix} \text{ и др.}$$

Рангом матрицы называется наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля. Обозначается r, $r(A)$, или $\mathrm{rang}(A)$.

Очевидно, что $0 \leq \mathrm{rang}(A) \leq \min(m; n)$.

Ранг нулевой матрицы равен нулю. Ранг квадратной матрицы n-го порядка равен n тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю.

Базисным минором называется минор, порядок которого определяет ранг матрицы. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Свойства ранга матрицы

1°. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2°. Если вычеркнуть из матрицы нулевой столбец/строку, то ранг матрицы не изменится.

3°. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

4°. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали.

Определить ранг матрицы можно следующими способами:

– по определению;

– используя метод элементарных преобразований;

– используя метод окаймляющих миноров.

Вычисление ранга матрицы по определению

► **Пример 20.** Найти ранги матриц:

$$а)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \ б)\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \ в)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) Любой из миноров 2-го порядка матрицы A равен нулю, и существует хотя бы один минор 1-го порядка, не равный нулю, например $|8| = 8$. Базисным минором матрицы A является каждый из ненулевых миноров 1-го порядка: $|\,1\,| = 1$, $|\,-3\,| = -3$, $|\,8\,| = 8$. Следовательно, $\mathrm{rang}(A) = 1$.

б) Так как существует минор 2-го порядка $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$, не равный нулю, а миноров 3-го порядка у матрицы B нет, то $\mathrm{rang}(B) = 2$. Единственный базисный минор матрицы B – минор $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

в) Все миноры 3-го порядка равны нулю. Есть минор 2-го порядка, отличный от нуля $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$. Значит, $\mathrm{rang}(C) = 2$. Базисный минор стоит на пересечении 1-й и 2-й строк с 1-м и 3-м столбцами.

Метод элементарных преобразований

На свойстве 4° основан *метод элементарных преобразований* нахождения ранга матрицы. То есть матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы A.

► **Пример 21.** Найти ранги матриц методом элементарных преобразований:

$$а)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \qquad б)\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

а) В примере 11 показано, что $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

То есть $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, $\mathrm{rang}(A) = 2$.

б) Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2\cdot\boxed{\text{II}} - \text{I} \\ \sim \\ 2\cdot\boxed{\text{III}} - \text{I} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \sim \\ \boxed{\text{III}} + 3\cdot\text{II} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит, ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы тоже равен 2, $\mathrm{rang}(B) = 2$.

Метод окаймляющих миноров

Данный метод нахождения ранга матрицы A состоит в следующем. Необходимо:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (т.е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $\mathrm{rang}(A) = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (*окаймляющие* M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $\mathrm{rang}(A) = 1$, если есть, то $\mathrm{rang}(A) \geq 2$. И так далее

…

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $\mathrm{rang}(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $\mathrm{rang}(A) \geq k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой минор k-го порядка, причем искать его только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

► **Пример 22.** Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r(A) \geq 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит, $\text{rang}(A) \geq 2$.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$\text{M}_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Разложение} \\ \text{по 2-й строке} \end{bmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Разложение} \\ \text{по 1-му столбцу} \end{bmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2-2) + 6(6-4) = -12 + 12 = 0.$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2, равны нулю, следовательно, $\text{rang}(A) < 3$. Итак, $\text{rang}(A) = 2$.

Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

§ 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

где числа a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) называются ***коэффициентами системы***, а числа $b_1, \ldots, b_m$ – ***свободными членами***.

В общем случае количество уравнений m может не совпадать с числом неизвестных n. На практике встречаются все ситуации: $m = n$, $m < n$ и $m > n$.

Решением системы (*) называется такой набор чисел ($c_1, c_2, \ldots, c_n$), что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, ..., c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Совместная система – система, имеющая хотя бы одно решение.

Несовместная система – система, не имеющая ни одного решения.

Определенная система – система, имеющая единственное решение.

Неопределенная система – система, имеющая более одного решения. Каждое решение неопределенной системы называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением***.

Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются ***эквивалентными*** (***равносильными***), если множества всех решений этих систем совпадают. Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками.

Однородная система – система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

в противном случае она называется ***неоднородной***. Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется ***нулевым*** или ***тривиальным***.

Систему (*) можно записать в матричной форме

$$A \cdot X = B,$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots\ \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots\ \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – ***матрица системы***,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – соответственно ***столбец неизвестных,*** или вектор-столбец, и ***столбец свободных членов.***

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Решение системы можно записать в виде столбца $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$\bar{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

3.2. Теорема Кронекера – Капелли

Система линейных алгебраических уравнений* (*) *совместная тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\bar{A}).$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместная она или нет, а для совместной системы – выяснить, определенная она или нет. При этом возможны три варианта:

1. Если $\mathrm{rang}(A) < \mathrm{rang}(\bar{A})$, то система несовместная (решений нет).

2. Если $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\bar{A}) = n$ (где n – число неизвестных), то система совместная и определенная (решение есть и оно единственное).

3. Если $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\bar{A}) < n$, то система совместная и неопределенная (решение есть, но оно не единственное, решений бесконечно много).

Примечание. Более подробно можно эти случаи расписать в зависимости от количества уравнений и неизвестных в системе:

$\mathrm{rang}(A) < \mathrm{rang}(\bar{A})$ система несовместная

$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\bar{A}) = r$ система совместная
$n > m > r$ бесконечно много решений (кол-во неизв. > кол-ва ур-й > ранга)
$n > m = r$ бесконечно много решений (кол-во неизв. > кол-ва ур-й = рангу)
$n = m > r$ бесконечно много решений (кол-во неизв. = кол-ву ур-й > ранга)
$m > n > r$ бесконечно много решений (кол-во ур-й > кол-ва неизв. > ранга)

$m = n = r$ единственное решение	(кол-во неизв. = кол-ву ур-й = рангу)
$m > n = r$ единственное решение	(кол-во ур-й > кол-ва неизв. = рангу, переопределенная система, есть лишние уравнения, которые можно получить из других уравнений системы).

Правило решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $\operatorname{rang}(A) \neq \operatorname{rang}(\bar{A})$, то система несовместная (решений нет).

2. Если $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = r$, то система совместная. Найти какой-либо базисный минор порядка r (напоминание: минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным). Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор, называют *главными* и оставляют слева, а остальные $n - r$ неизвестных называют *свободными* и переносят в правые части уравнений.

3. Найти выражения главных неизвестных через свободные. Получить общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получим соответствующие значения главных неизвестных. Таким образом, можно найти частные решения исходной системы уравнений.

► **Пример 23.** Исследовать систему линейных уравнений; если она совместная, решить ее:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{\boxed{\text{II}} - \text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк ступенчатой матрицы. Значит, ранг матрицы системы равен 2 (в эквивалентной A матрице, которая записана в левой части расширенной матрицы, две ненулевые строки) и ранг $\bar{A}$ тоже равен 2 (в эквивалентной $\bar{A}$ матрице тоже две ненулевые строки): $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 2$, следовательно, *система совместная*. Количество неизвестных также равно 2:

$$n = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\bar{A}) = 2,$$

значит, система *определенная*, т.е. имеет единственное решение. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице (в 1-м столбце находятся коэффициенты при x, а во 2-м – при y, 1-я строка соответствует 1-му уравнению, 2-я – 2-му уравнению):

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y = 6 \end{cases}.$$

Из второго уравнения $y = 3$, подставляя это значение в первое уравнение, получим $x = 2$.

Итак, решение (2; 3).

Ответ: система совместная и определенная; решение (2; 3).

► **Пример 24.** Исследовать на совместность системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 6; \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -6x + 4y = -8. \end{cases}$

Решение. Даже без вычисления рангов матриц можно сделать вывод о совместности этих систем.

а) Разделим второе уравнение системы на 3:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 6 \;\; | : 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Очевидно, что такая система не имеет решений, т.е. несовместная. Убедимся в этом также с помощью теоремы Кронекера – Капелли. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \underset{\boxed{\text{II}} : 3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\boxed{\text{II}} - \text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк ступенчатой матрицы. В эквивалентной A матрице (записана в левой части) только одна ненулевая строка. Значит, ранг матрицы системы равен 1. А в эквивалентной $\bar{A}$ матрице две ненулевые строки, т.е. ранг расширенной матрицы системы равен 2.

Так как $\mathrm{rang}(A) = 1 < 2 = \mathrm{rang}(\bar{A})$, то система несовместная (решений нет).

б) Разделим второе уравнение системы на –2:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ -6x + 4y = -8 \;|: (-2), \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$$

Очевидно, что такая система имеет бесконечно много решений, т.е. система совместная и неопределенная (решение есть, но оно не единственное). Убедимся в этом также с помощью теоремы Кронекера – Капелли. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 4 \\ -6 & 4 & -8 \end{array}\right) \underset{\boxed{\text{II}}\,:\,(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \underset{\boxed{\text{II}}\,-\,\text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк ступенчатой матрицы. В эквивалентной A матрице (записана в левой части) только одна ненулевая строка, значит, ранг матрицы системы равен 1. В эквивалентной $\bar{A}$ матрице также одна ненулевая строка, т.е. ранг расширенной матрицы системы тоже равен 1. Число неизвестных в системе равно $n = 2$.

Так как $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 1 < 2 = n$, то система совместная и неопределенная.

Ответ: *а*) система несовместная;

б) система совместная и неопределенная.

► **Пример 25.** Исследовать систему линейных уравнений; если она совместная, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x + 9y - 7z = 5 \end{cases}.$$

Решение. Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 9 & -7 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\text{II}} - \text{I} \\ \sim \\ \boxed{\text{III}} - \text{I} \cdot 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ \boxed{\text{III}} + \text{II} \cdot 3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк ступенчатой матрицы. Так как $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\bar{A}) = 2 < 3 = n$, то система совместная и неопределенная (т.е. имеет бесконечно много решений).

Количество главных переменных равно $r = \operatorname{rang}(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r = 3 - 2 = 1$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы A

(базисный минор), например минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Его столбцы – 1-й и 2-й столбцы матрицы A – соответствуют переменным x и y – это будут главные переменные, а z – свободная переменная. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ \quad -y + z = 1. \end{cases}$$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде (слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases} x + 3y = 2z + 4 \\ \quad y = z - 1. \end{cases}$$

Подставляя выражение для y в первое уравнение, получим $x = 7 - z$. Обозначая свободную переменную z через t, получим общее решение системы $(7 - t;\ t - 1;\ t)$. Частное решение системы получим, например, при $t = 0$: $(7; -1; 0)$.

Ответ: система совместна и неопределенная;
общее решение $(7 - t;\ t - 1;\ t)$, где t – любое действительное число;
частное решение $(7; -1; 0)$.

► **Пример 26.** Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \quad x - 2y = 9 \\ x - 4y - 2z = -13 \\ 3x - 5y + z = -4. \end{cases}$$

Решение. Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 1 & -4 & -2 & -13 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \boxed{\mathrm{II}} - \mathrm{I} \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} - \mathrm{I} \cdot 3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & -31 \end{array}\right) \begin{matrix} \boxed{\mathrm{II}} : (-2) \\ \sim \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -31 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} - \mathrm{II} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -42 \end{array}\right).$$

Так как $\mathrm{rang}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{rang}(\bar{A})$, то система несовместная (не имеет решений). В самом деле, последней строке полученной расширенной матрицы соответствует уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -42$, не имеющее решений.

Ответ: система несовместная.

► **Пример 27.** Исследовать систему линейных уравнений; если она совместная, то найти ее общее и одно частное решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 1 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\text{II}} - 6\cdot\text{I} \\ \sim \\ \boxed{\text{III}} + 7\cdot\text{I} \\ \boxed{IV} + 3\cdot\text{I} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 10 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\text{III}} + \text{II} \\ \boxed{\text{IV}} + \text{II} \\ \sim \\ \text{II}(-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк ступенчатой матрицы. Так как $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3 < 4 = n$, то система совместная и неопределенная (т.е. имеет бесконечно много решений).

Количество главных переменных равно $r = \text{rang}(A) = 3$, количество свободных переменных равно $n - r = 4 - 3 = 1$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 3-го порядка полученной матрицы A (базисный минор), например минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 19 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 1\cdot 15(-9) = -135.$ Его столбцы – 1-й, 2-й и 4-й столбцы матрицы A – соответствуют переменным x_1, x_2 и x_4 – это будут главные переменные, а x_3 – свободная переменная.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15 \\ \qquad -9x_4 = 0. \end{cases}$$

Перенесем в каждом уравнении направо свободную переменную x_3 и найденную из третьего уравнения переменную $x_4 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - 2x_3 \\ 15x_2 = 15 - 15x_3. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2 через x_3 и подставим в первое уравнение

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_3 \\ x_1 = 1 - 2x_3 - 2x_2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_3 \\ x_1 = 1 - 2x_3 - 2(1 - x_3) = -1. \end{cases}$$

Обозначим свободную переменную x_3 через u. Тогда общее решение системы: $x_1 = -1$, $x_2 = 1 - u$, $x_3 = u$, $x_4 = 0$ или $(-1; 1 - u; u; 0)$. Частное решение получим, например при $u = 1$: $(-1; 0; 1; 0)$.

Ответ: система совместная и неопределенная;
общее решение $(-1; 1 - u; u; 0)$, где u – любое действительное число;
частное решение $(-1; 0; 1; 0)$.

► **Пример 28.** Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от параметра λ. В случае, когда система совместная, найти общее и одно частное решение

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = \lambda\,. \end{cases}$$

Решение. Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{matrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 4 \\ \lambda \end{matrix}\right) \underset{\sim}{\boxed{\mathbf{II}} - \mathrm{I} \cdot 3} \left(\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 4 \\ \lambda - 12 \end{matrix}\right).$$

Запишем полученную матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ее ранг равен $\mathrm{rang}(A) = 1$.

а) При $\lambda \neq 12$ получим расширенную матрицу системы

$$\bar{A} = \left(\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 4 \\ \lambda - 12 \end{matrix}\right),$$

ее ранг $\mathrm{rang}(\bar{A}) = 2$. Получаем, что $\mathrm{rang}(A) = 1 \neq 2 = \mathrm{rang}(\bar{A})$, система несовместная.

б) При $\lambda = 12$ получим расширенную матрицу системы

$$\bar{A} = \left(\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}\right),$$

ее ранг $\mathrm{rang}(\bar{A}) = 1$. Получаем, что $\mathrm{rang}(A) = 1 = \mathrm{rang}(\bar{A}) < 2 = n$, система совместная и неопределенная. Полученной расширенной матрице системы соответствует уравнение $x - 2y = 4$. В качестве главной переменной можно взять, например $x = 2y + 4$. Обозначая свободную переменную y через t, получим общее решение системы $(2t + 4; t)$. Частное решение системы получим, например при $t = 0$: $(4; 0)$.

Ответ: при λ ≠ 12 система несовместна; при λ = 12 система совместная и неопределенная, общее решение $(2t + 4;\ t)$, частное решение (4; 0).

3.3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

3.3.1. Матричный метод

Напомним, что систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (*) можно записать в матричной форме $A \cdot X = B$.

Это уравнение – частный случай матричных уравнений, рассмотренных в п. 2.4 (здесь X и B всегда являются вектор-столбцами, т.е. матрицами размерами $n \times 1$). Если матрица A невырожденная (т.е. ее определитель не равен нулю), то решение этого матричного уравнения записывается так же, как и для всех матричных уравнений подобного вида: $X = A^{-1} \cdot B$.

► **Пример 29.** Решить систему уравнений матричным способом (с помощью обратной матрицы):

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = 11 \\ 4x + y + 5z = 9 \\ x - 2y + 4z = 0. \end{cases}$$

Решение. Матрица системы A, столбец неизвестных X и столбец свободных членов B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из примера 6 следует, что матрица невырожденная (так как $\det A =$ $= -4$), а в примерах 16 и 17 найдена обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14 & 18 & -26 \\ 11 & -13 & 19 \\ 9 & -11 & 17 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение матричного уравнения и соответствующей ему системы уравнений по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14 & 18 & -26 \\ 11 & -13 & 19 \\ 9 & -11 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14\cdot 11 + 18\cdot 9 - 26\cdot 0 \\ 11\cdot 11 - 13\cdot 9 + 19\cdot 0 \\ 9\cdot 11 - 11\cdot 9 + 17\cdot 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решением матричного уравнения будет столбец $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а решением системы является набор чисел: $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$.

Ответ: $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$ (можно записать ответ в виде $\{2; 1; 0\}$).

3.3.2. Метод Крамера

Рассмотрим систему из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$

Исключим из нее y. С этой целью умножим первое уравнение на a_{22}, и из того, что получится, вычтем второе уравнение, умноженное на a_{12}:

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x + a_{22}a_{12}y = a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = a_{12}b_2, \end{cases}$$

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Коэффициент, стоящий при x, есть не что иное как определитель Δ матрицы системы A (см. п. 1.2), а в правой части равенства можно увидеть определитель, обозначаемый Δ_x, полученный заменой в Δ первого столбца на столбец свободных членов:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Получаем $\Delta \cdot x = \Delta_x$, откуда, если $\Delta \neq 0$, получим $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$.

Теперь исключим из начальной системы x. С этой целью умножим второе уравнение на a_{11}, и из того, что получится, вычтем первое уравнение, умноженное на a_{21}:

$$\begin{cases} a_{21}a_{11}x + a_{21}a_{12}y = a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2, \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Коэффициент, стоящий при y, – определитель матрицы системы A, а в правой части равенства определитель, полученный заменой в Δ второго столбца на столбец свободных членов, обозначаемый Δ_y:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Получаем, $\Delta \cdot y = \Delta_y$, откуда, если $\Delta \neq 0$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Геометрически систему из двух уравнений и двух неизвестных можно интерпретировать как две прямые на плоскости. Из уравнений системы можно выразить y и, сделав переобозначения, получить уравнения прямых линий (известные из школьного курса алгебры):

$$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}} = k_1 x + m_1, \;\; y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}} = k_2 x + m_2.$$

Две прямые на плоскости могут располагаться следующим образом: *пересекаться в одной точке* (система имеет одно решение – совместная и определенная система), $[\Delta \neq 0]$;
быть параллельными (система не имеет решений – система несовместная), $[\Delta = 0, \Delta_x = 0$ и/или $\Delta y = 0]$;
совпадать (система имеет бесконечно много решений – совместная и неопределенная система), $[\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0]$.

Какой именно реализуется случай – зависит от определителя системы Δ. Он присутствует в формулах $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ в знаменателе, поэтому если две прямые пересекаются в одной точке с координатами (x_0, y_0), т.е. система имеет единственное решение, то Δ не может быть равен нулю. Если же определитель равен нулю, то возможен один из двух оставшихся вариантов – система не имеет решений или их бесконечно много.

Рассмотрим систему $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 5x + 3y = 8. \end{cases}$

Даже без вычисления определителя системы ясно, что система не имеет решений, так как левые части уравнений совпадают, а правые – нет. У этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Геометрически это параллельные прямые.

Рассмотрим систему $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$

Также без вычисления определителя системы ясно, что система имеет бесконечно много решений: все точки, у которых $x = y$, представляют решение системы. Здесь также $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Геометрически это совпадающие прямые.

Рассмотрим теперь систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Исключим из нее y. С этой целью умножим первое уравнение на a_{22}, и из того, что получится, вычтем второе уравнение, умноженное на a_{12}:

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x + a_{22}a_{12}y + a_{22}a_{13}z = a_{22} \cdot b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y + a_{12}a_{23}z = a_{12} \cdot b_2 \\ \qquad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

В результате получим уравнение, не содержащее y:

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x + (a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})z = a_{22}b_1 - a_{12}b_2. \qquad (2)$$

Проделаем такую же операцию исключения, заменив в нашем рассуждении первое уравнение вторым, а второе третьим, т.е. умножим второе уравнение на a_{32}, и из того, что получится, вычтем третье уравнение, умноженное на a_{22}:

$$\begin{cases} \qquad a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{32}a_{21}x + a_{32}a_{22}y + a_{32}a_{23}z = a_{32}b_2 \\ a_{22}a_{31}x + a_{22}a_{32}y + a_{22}a_{33}z = a_{22}b_3. \end{cases}$$

Получим

$$(a_{32}a_{21} - a_{22}a_{31})x + (a_{32}a_{23} - a_{22}a_{33})z = a_{32}b_2 - a_{22}b_3. \qquad (3)$$

Аналогично умножим третье уравнение на a_{12}, и из того, что получится, вычтем первое уравнение, умноженное на a_{32}:

$$\begin{cases} a_{32}a_{11}x + a_{32}a_{12}y + a_{32}a_{13}z = a_{32}b_1 \\ \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{12}a_{31}x + a_{12}a_{32}y + a_{12}a_{33}z = a_{12}b_3. \end{cases}$$

Получим

$$(a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11})x + (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})z = a_{12}b_3 - a_{32}b_1. \qquad (4)$$

Теперь умножим уравнения (2), (3), (4) соответственно на a_{33}, a_{13}, a_{23}:

$$(a_{33}a_{22}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21})x + (a_{33}a_{22}a_{13} - a_{33}a_{12}a_{23})z =$$
$$= a_{33}a_{22}b_1 - a_{33}a_{12}b_2,$$
$$(a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31})x + (a_{13}a_{32}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{33})z =$$
$$= a_{13}a_{32}b_2 - a_{13}a_{22}b_3,$$

$$(a_{23}a_{12}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11})x + (a_{23}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{13})z =$$
$$= a_{23}a_{12}b_3 - a_{23}a_{32}b_1$$

и все сложим

$$(a_{33}a_{22}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} + a_{13}a_{32}a_{21} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{12}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11})x =$$
$$= a_{33}a_{22}b_1 - a_{33}a_{12}b_2 + a_{13}a_{32}b_2 - a_{13}a_{22}b_3 + a_{23}a_{12}b_3 - a_{23}a_{32}b_1.$$

От перестановки мест слагаемых сумма не изменится, и от перестановки мест множителей произведение не изменится, поэтому последнее равенство равносильно следующему:

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11})x =$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + b_2a_{32}a_{13} -$$
$$- b_3a_{22}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}b_1. \qquad (5)$$

Коэффициент, стоящий при x, есть не что иное как определитель матрицы системы A (см. п. 1.2):

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В правой части равенства можно увидеть другой определитель (полученный заменой в Δ первого столбца на столбец свободных членов), обозначаемый Δ_x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, уравнение (5) можно записать в виде $\Delta \cdot x = \Delta_x$.

Аналогичными действиями, исключая переменные x и z, а затем таким же образом переменные y и x, получим уравнения

$$\Delta \cdot y = \Delta_y, \quad \Delta \cdot z = \Delta_z,$$

где $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$

То есть Δ_y получен заменой на столбец свободных членов в Δ второго столбца, а Δ_z – заменой третьего столбца.

Таким образом, выражая из этих уравнений неизвестные, получим, если $\Delta \neq 0$, формулы для нахождения решения системы:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Приведенный метод решения системы называется ***«метод (правило) Крамера»***.

Эти формулы будут верны и для системы n уравнений с n неизвестными, но выводить их проще с помощью матричного представления решения системы $X = A^{-1} \cdot B$ и используя разложения определителя по столбцам. Здесь приведем теорему без доказательства.

Теорема Крамера. *Если определитель* системы n линейных уравнений с n неизвестными *отличен от нуля*, то *система имеет единственное решение*, причем каждое неизвестное равно дроби, знаменателем которой служит определитель системы, а числителем – определитель, получаемый из определителя системы заменой столбца коэффициентов при определяемом неизвестном столбцом свободных членов.

Замечание. Условие $\Delta \neq 0$ в теореме Крамера гарантирует два вывода: 1) система имеет решение (т.е. она совместна),

2) это решение единственно (т.е. система определенная).

Если $\Delta = 0$ возможны два варианта: *система не имеет решений или их бесконечно много*. Выше это было показано на примере системы двух уравнений с двумя неизвестными. Для системы трех уравнений с тремя неизвестными уточнить, какой именно вариант реализуется, без дополнительных приемов не всегда легко. Это можно выяснить с помощью исследования рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы или с помощью метода Гаусса, который будет рассмотрен ниже.

► **Пример 30.** Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = \mathbf{1} \\ x + y + 2z = \mathbf{1} \\ 2x - y + z = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы (с помощью элементарных преобразований над столбцами и разложением по 3-й строке):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{стлб.}\boxed{\text{I}} + \text{II} \cdot 2 \\ = \\ \text{стлб.}\boxed{\textbf{III}} + \text{II} \end{matrix} \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+2}(\mathbf{-1}) \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 = 18 \neq 0 =>$$

система имеет единственное решение.

Вычислим Δ_x (полученный заменой в Δ первого столбца на столбец свободных членов):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 3 & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{стлб.}\boxed{\text{I}} + \text{II} \\ = \\ \text{стлб.}\boxed{\textbf{III}} + \text{II} \end{matrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+2}(\mathbf{-1}) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Здесь определитель вычисляли разложением по 3-й строке.

Вычислим Δ_y (полученный заменой в Δ второго столбца на столбец свободных членов):

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & -1 \\ 1 & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & \mathbf{1} & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{стр.}\boxed{\text{I}} - \text{II} \cdot 2 \\ = \\ \text{стр.}\boxed{\textbf{III}} - \text{II} \cdot 2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Здесь определитель вычисляли разложением по 1-му столбцу, используя элементарные преобразования над строками, а в конце использовали свойство определителя 4° (вынесли одновременно (–1) из 1-й строки и (–1) из 2-й строки за знак определителя).

Наконец,

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 2 & -1 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{стлб.}\boxed{\text{I}} + \text{II} \cdot 2 \\ = \\ \text{стлб.}\boxed{\textbf{III}} + \text{II} \end{matrix} \begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+2}(\mathbf{-1}) \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 = 4.$$

Находим неизвестные переменные по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Самостоятельно можете убедиться в правильности решения путем подстановки найденных значений в исходную систему.

Ответ: $x = \frac{4}{9}$, $y = \frac{1}{9}$, $z = \frac{2}{9}$.

► **Пример 31.** Решить систему

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ -2x \quad - 2z = 16. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{стлб.}\boxed{\text{III}}+\text{I}}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{3+1}1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, возможны два варианта: система не имеет решений или их бесконечно много. Используя пример 25, самостоятельно убедитесь в том, что система совместная, неопределенная и ее общее решение имеет вид (– t – 8; 2t + 4; t), где t – любое действительное число.

► **Пример 32.** Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. Так как число неизвестных больше числа переменных, то запишем матрицу системы A и расширенную матрицу системы $\bar{A}$, и исследуем систему на совместность с помощью теоремы Кронекера – Капелли.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то rang(A) ≥ 1. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит, rang($A$) ≥ 2.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

При вычислении этих миноров мы использовали свойства определителей 3° и 4° (определитель, имеющий два одинаковых столбца, равен нулю; общий множитель столбца можно выносить за знак определителя). Так как все окаймляющие миноры 3-го порядка равны 0, то rang(A) = 2.

Чтобы найти ранг расширенной матрицы системы $\bar{A}$, найдем еще один минор 3-го порядка, окаймляющий M_2 (так как $\bar{A}$ отличается от A всего лишь одним столбцом), $M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (содержит два одинаковых столбца). Значит, $\mathrm{rang}(\bar{A}) = 2$. Так как $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(\bar{A}) = 2 < 4 = n$, то система совместная и неопределенная (т.е. имеет бесконечно много решений).

Количество главных переменных равно $r = \mathrm{rang}(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r = 4 - 2 = 2$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы A (базисный минор), например минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$. Его столбцы – 3-й и 4-й столбцы матрицы A – соответствуют переменным x_3 и x_4 – это будут главные переменные, а x_1 и x_2 – свободные переменные. Выразим x_3 и x_4 через x_1 и x_2 из *последних двух* уравнений (так как мы выбрали ненулевой минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ из элементов *последних двух* строк матрицы A):

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 - x_1 + 2x_2 \\ x_3 + 4x_4 = 4 - x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Крамера, определитель этой системы равен $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 - x_1 + 2x_2 & 1 \\ 4 - x_1 + 2x_2 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= 4(1 - x_1 + 2x_2) - 1(4 - x_1 + 2x_2) = -3x_1 + 6x_2;$$
$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_1 + 2x_2 \\ 1 & 4 - x_1 + 2x_2 \end{vmatrix} = 4 - x_1 + 2x_2 - (1 - x_1 + 2x_2) = 3.$$

Таким образом,

$$x_3 = \frac{-3x_1 + 6x_2}{3} = -x_1 + 2x_2, \quad x_4 = \frac{3}{3} = 1.$$

Пусть $x_1 = u$, $x_2 = v$. Тогда общее решение системы имеет вид $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = -u + 2v$, $x_4 = 1$.

Частное решение можно получить, придавая различные значения u и v, например, при $u = 2$, $v = 1$ имеем одно из частных решений $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

Ответ: $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = -u + 2v$, $x_4 = 1$, где u, v – любые действительные числа.

3.3.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения *любой* системы линейных уравнений. Как мы помним, если определитель матрицы равен нулю, то обратной матрицы не существует, соответственно найти решение системы матричным методом невозможно. Правило Крамера при $\Delta = 0$ однозначного ответа не дает (система имеет бесконечно много решений или несовместная). Метод Гаусса основан на известном из обычного школьного курса алгебры последовательном исключении неизвестных переменных, и в любом случае приведет нас к ответу. Единственное ограничение в этом методе – ни один элемент главной диагонали не должен быть нулевым, но почти всегда можно поменять уравнения (а в матрице системы – строки) местами так, чтобы это условие выполнялось.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (*прямой ход*) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Сразу скажем, что на практике удобнее работать не с самой системой (*), а с ее расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками таким образом, чтобы привести ее к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} & \cdots & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_{k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad (**)$$

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0$, $i = 1, \ldots, k$. Коэффициенты a_{ii} назовем *главными* элементами матрицы.

Также удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (для этого можно переставить местами уравнения либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \ne 1$).

На втором этапе (*обратный ход*) идет последовательное определение неизвестных из ступенчатой системы, соответствующей ступенчатой расширенной матрице (**):

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots a'_{1k}x_k + \cdots + a'_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a'_{kk}x_k + \cdots + a'_{kn}x_n = b_k, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{k+1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Если в процессе приведения системы (*) к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т. е. равенства вида 0 = 0, то их отбрасывают. Далее возможны три варианта:

1. Если *ступенчатая система – треугольная*, т.е. $k = n$, то исходная *система имеет единственное решение*. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения находим x_{n-1}, далее, поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $x_{n-2}, \dots, x_1$.

2. Если появится *уравнение вида* $0 = b_i$, а число $b_i \neq 0$ (т.е. в системе получено уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля), то это свидетельствует о том, что *система несовместная*.

3. Если *число неизвестных n больше числа уравнений k*, то ступенчатая *система уравнений имеет бесчисленное множество решений*. В полученной системе последнее уравнение будет содержать более одного неизвестного. Из него выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные ($x_{k+1}, \dots, x_n$). Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через ($x_{k+1}, \dots, x_n$); затем находим $x_{k-2}, \dots, x_1$. Придавая свободным неизвестным ($x_{k+1}, \dots, x_n$) произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Рассмотрим метод Гаусса подробнее на примере.

► **Пример 33.** Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. С помощью элементарных преобразований *над строками* расширенной матрицы системы приведем ее к ступенчатому виду. Для начала поменяем 1-ю и 2-ю строки местами, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \boxed{\mathrm{II}} - \mathrm{I}\cdot 2 \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} - \mathrm{I} \\ \boxed{\mathrm{IV}} - \mathrm{I}\cdot 5 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2-1\cdot 2 & 7-3\cdot 2 & 3-5\cdot 2 & 1+2\cdot 2 & 5-3\cdot 2 \\ 1-1 & 5-3 & -9-5 & 8+2 & 1-3 \\ 5-1\cdot 5 & 18-3\cdot 5 & 4-5\cdot 5 & 5+2\cdot 5 & 12-3\cdot 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} - \mathrm{II}\cdot 2 \\ \boxed{\mathrm{IV}} - \mathrm{II}\cdot 3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишем систему, которая соответствует полученной расширенной ступенчатой матрице

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ \qquad x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2 через x_3 и x_4, а затем подставим в первое уравнение и выразим x_1 через x_3 и x_4. В итоге получим общее решение системы: $x_2 = 7x_3 - 5x_4 - 1$, $x_1 = -26x_3 + 17x_4 + 6$ или $x_1 = -26u + 17v + 6$, $x_2 = 7u - 5v - 1$, $x_3 = u$, $x_4 = v$, где u, v – любые числа.

Если положить, например, $u = 0$, $v = 0$, то найдем одно из частных решений этой системы: $x_1 = 6$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Ответ: общее решение системы: $x_1 = -26u + 17v + 6$, $x_2 = 7u - 5v - 1$, $x_3 = u$, $x_4 = v$, где u, v – любые числа.

► **Пример 34.** Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Так как коэффициент a_{11} равен 1, то менять строки местами не будем. Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{II}} - \mathrm{I}\cdot 2 \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} - \mathrm{I} \\ \boxed{\mathrm{IV}} - \mathrm{I}\cdot 4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right).$$

Поменяем местами 2-ю и 3-ю строки

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{II}} : (-1) \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} + \mathrm{II} \cdot 3 \\ \boxed{\mathrm{IV}} + \mathrm{II} \cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{III}} : (-5) \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{IV}} - \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ \qquad x_2 \quad = 2 \\ \qquad x_3 = -1. \end{cases}$$

Осуществляем обратный ход. Из 3-го уравнения $x_3 = -1$, из 2-го уравнения $x_2 = 2$. Подставляем найденные значения $x_3 = -1$ и $x_2 = 2$ в первое уравнение и находим $x_1 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

3.3.4. Однородные и неоднородные СЛАУ

Рассмотрим отдельно однородные системы линейных уравнений. Напомним, что ***однородная система*** – это система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$): $A \cdot X = O$,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (***)$$

в противном случае она называется ***неоднородной***. Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется ***нулевым***, ***тривиальным,*** или ***очевидным***.

При каких условиях однородная система имеет и ненулевые решения?

Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю, т. е. $\Delta = 0$.

Если определитель системы не равен нулю ($\Delta \neq 0$), то у однородной системы (***) только нулевое решение (нет решений, кроме нулевого). Другими словами, если однородная система имеет ненулевое решение, то ее определитель обязательно равен нулю ($\Delta = 0$).

Для того чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы rang(A) был меньше числа n неизвестных, т. е. rang(A) $< n$.

Если $\Delta = 0$, то решением системы (***) является набор алгебраических дополнений элементов любой строки определителя ($m = n$).

Если $\Delta = 0$, но минор какого-нибудь элемента определителя отличен от нуля, то набор алгебраических дополнений элементов строки, содержащей упомянутый элемент, представляет ненулевое решение системы ($m = n$).

Если числа $x_1, \ldots x_n$ представляют решение системы (***), то числа $qx_1, \ldots qx_n$ также представляют собой ее решение.

Пусть rang(A) = r, а общее решение однородной системы записано в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \ldots, t_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(t_1, \ldots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-r} \end{pmatrix},$$

где $x_1, \ldots, x_r$ – главные переменные, $t_1, \ldots, t_{n-r}$ – значения свободных переменных $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Выберем $n - r$ решений однородной системы (***), полученных из общего решения следующим образом: одно из значений свободных переменных полагается равным 1, а остальные – равными 0:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ x_r(1, 0, \ldots, 0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0, 1, \ldots, 0) \\ \vdots \\ x_r(0, 1, \ldots, 0) \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\quad X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0, 0, \ldots, 1) \\ \vdots \\ x_r(0, 0, \ldots, 1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти решения образуют *нормальную фундаментальную систему решений исходной однородной системы*. Любое решение системы (***) может быть выражено через них следующим образом:

$X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_{n-r} X_{n-r}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ – некоторые числа.

Любой набор из $n - r$ решений однородной системы (***), обладающий указанным свойством, называется *фундаментальной системой решений системы* (***).

Набор из $n - r$ произвольных решений системы (***) –

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, \ldots , \qquad X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \vdots \\ x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

образует фундаментальную систему решений тогда и только тогда, когда матрица, составленная из их компонентов

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(n-r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(n-r)} \end{pmatrix},$$ имеет ранг $n - r$.

Пусть дана некоторая неоднородная система линейных уравнений $A \cdot X = B$, а $A \cdot X = O$ – соответствующая ей однородная система.

Общее решение неоднородной системы $A \cdot X = B$ может быть представлено в виде суммы общего решения однородной системы $A \cdot X = O$ и какого-то одного (частного) решения неоднородной системы $A \cdot X = B$.

► **Пример 35.** Установить, при каком λ система

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ \lambda x - y - 5z = 0 \\ 5x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное (ненулевое) решение. Найти такие решения.

Решение. Прежде всего вычисляем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \lambda & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{стр.}\boxed{\text{III}} + \text{II} \\ = \\ \text{стр.}\boxed{\text{I}} - \text{II} \cdot 2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & 0 & 13 \\ \lambda & -1 & -5 \\ 5 + \lambda & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & 13 \\ 5 + \lambda & -1 \end{vmatrix} = -\big(-1 + 2\lambda - (65 + 13\lambda)\big) = 11\lambda + 66.$$

Так как для существования нетривиального решения надо, чтобы $\Delta = 0$, то из условия $11\lambda + 66 = 0$ находим $\lambda = -6$.

Если $\lambda \neq -6$, то $\Delta \neq 0$, и система имеет единственное – нулевое решение.

Если $\lambda = -6$, то имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Выше было сказано, что если при $\Delta = 0$ минор какого-нибудь элемента определителя отличен от нуля, то набор алгебраических дополнений элементов строки, содержащей упомянутый элемент, представляет ненулевое решение системы.

Минор M_{11} элемента a_{11} равен алгебраическому дополнению этого же элемента $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Далее вычислим $A_{12} =$ $= -\begin{vmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

Итак, числа $x = 1, \quad y = -1, \quad z = -1$ представляют собой ненулевое решение системы.

Решение будут образовывать и любые другие тройки чисел, кратные данным, например, $x = -2, \quad y = 2, \ z = 2$.

Также $\lambda = -6$ можно подставить в исходную систему и решить ее методом Гаусса.

► **Пример 36.** Решить систему $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

Решение. Запишем матрицу системы

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$

Так как $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, то $\mathrm{rang}(A) = 2 < 3 = n$. Значит, система имеет бесконечно много решений. Главными переменными выберем x_1 и x_2:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3x_3 \\ 4x_1 + x_2 = 5x_3. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера ($\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$):

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3x_3 & 1 \\ 5x_3 & 1 \end{vmatrix} = -2x_3, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 3x_3 \\ 4 & 5x_3 \end{vmatrix} = 3x_3.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-2x_3}{-1} = 2x_3, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{3x_3}{-1} = -3x_3.$$

Тогда общее решение системы имеет вид $x_1 = 2x_3$, $x_2 = -3x_3$, $x_3 = x_3$. Пусть $x_3 = t$, тогда общее решение системы $(2t; -3t; t)$.

Частное решение можно получить, придавая различные значения t. При $t = 0$ имеем одно частное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. При $t = 1$ имеем другое частное решение $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$.

Ответ: общее решение системы $(2t; -3t; t)$, где t – любое число; частное решение системы $(2; -3; 1)$.

§ 4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. **Решить уравнение**

1.1. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = 1$

1.2. $\begin{vmatrix} x+8 & -x \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = -15$

1.3. $\begin{vmatrix} 4x-1 & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = 1$

1.4. $\begin{vmatrix} 5x+2 & -2 \\ x & x \end{vmatrix} = 1$

1.5. $\begin{vmatrix} 1-2x & 2 \\ x & -x \end{vmatrix} = 5$

1.6. $\begin{vmatrix} 3-x & x \\ -3 & -2x \end{vmatrix} = 2$

1.7. $\begin{vmatrix} 3x-4 & 3 \\ x & x \end{vmatrix} = -4$

1.8. $\begin{vmatrix} 2-3x & 2x \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 7$

1.9. $\begin{vmatrix} 5-x & 2x \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 8$

1.10. $\begin{vmatrix} 3-4x & -4 \\ x & x \end{vmatrix} = 3$

1.11. $\begin{vmatrix} x-4 & -2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 3$

1.12. $\begin{vmatrix} 4x+3 & 2 \\ -x & x \end{vmatrix} = 9$

1.13. $\begin{vmatrix} 2x-7 & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = -7$

1.14. $\begin{vmatrix} x+3 & x \\ 2 & 4x \end{vmatrix} = -6$

1.15. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 3 \\ -x & 2x \end{vmatrix} = 1$

1.16. $\begin{vmatrix} 2x-1 & 1 \\ 2x & 3x+1 \end{vmatrix} = 2$

1.17. $\begin{vmatrix} 5x-2 & -5 \\ x & -x \end{vmatrix} = 2$

1.18. $\begin{vmatrix} 2-4x & 5 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 5$

1.19. $\begin{vmatrix} 2x+6 & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = 6$

1.20. $\begin{vmatrix} 3x+6 & 1 \\ x & x-2 \end{vmatrix} = 2$

1.21. $\begin{vmatrix} 7x+1 & 7 \\ x & x \end{vmatrix} = 1$

1.22. $\begin{vmatrix} 2x+10 & -3 \\ x & x-5 \end{vmatrix} = 5$

1.23. $\begin{vmatrix} 4x+5 & x \\ 4 & x \end{vmatrix} = 5$

1.24. $\begin{vmatrix} 3x-12 & 3 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = 6$

1.25. $\begin{vmatrix} x & x \\ 8 & 8x-3 \end{vmatrix} = -3$

1.26. $\begin{vmatrix} 2x+9 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = 9$

1.27. $\begin{vmatrix} 2x+5 & -4 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} = 8$

1.28. $\begin{vmatrix} 9x+1 & 9 \\ x & x \end{vmatrix} = 1$

1.29. $\begin{vmatrix} 3-4x & -1 \\ 4x & x \end{vmatrix} = 3$

1.30. $\begin{vmatrix} 4x-5 & 1 \\ -4 & x+2 \end{vmatrix} = 4$

Задание 2. **Решить неравенство**

2.1. $\begin{vmatrix} 2 & 2x-1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2x & 3x+1 \end{vmatrix} \le 2$

2.2. $\begin{vmatrix} 5x-2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4 & -x \end{vmatrix} > 2$

2.3. $\begin{vmatrix} 2-4x & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & x-1 & 5 \end{vmatrix} < 5$

2.4. $\begin{vmatrix} 4 & 2x+6 & 2 \\ -3 & x & x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \ge 6$

2.5. $\begin{vmatrix} 3x+6 & -5 & 1 \\ x & 2 & x-2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \le 2$

2.6. $\begin{vmatrix} 7x+1 & 7 & 1 \\ x & x & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} < 1$

2.7. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2x+10 & 5 & -3 \\ x & 4 & x-5 \end{vmatrix} > 5$

2.8. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4x+5 & x & -2 \\ 4 & x & -7 \end{vmatrix} \ge 5$

2.9. $\begin{vmatrix} 5 & 3x-12 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & x+1 \end{vmatrix} \le 6$

2.10. $\begin{vmatrix} x & 5 & x \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 8x-3 \end{vmatrix} > 3$

2.11. $\begin{vmatrix} 2x+9 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & x & 3 \end{vmatrix} < 9$

2.12. $\begin{vmatrix} 2 & 2x+5 & -4 \\ -1 & 2 & x-2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \ge 6$

2.13. $\begin{vmatrix} 9x+1 & 10 & 9 \\ x & 7 & x \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \le 1$

2.14. $\begin{vmatrix} 3-4x & -1 & 2 \\ 4x & x & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 3$

2.15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4x-5 & 1 \\ 0 & -4 & x+2 \end{vmatrix} < 4$

2.16. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 2x+1 & 0 & 2 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} \ge 1$

2.17. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ x+8 & -x & 0 \\ 1 & 2x & 0 \end{vmatrix} \le 15$

2.18. $\begin{vmatrix} 0 & 4x-1 & 2 \\ -1 & 3 & -6 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} > 1$

2.19. $\begin{vmatrix} 5x+2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} < 1$

2.20. $\begin{vmatrix} 1-2x & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ x & -x & 0 \end{vmatrix} \ge 5$

2.21. $\begin{vmatrix} 0 & 3-x & x \\ 0 & -3 & -2x \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \le 2$

2.22. $\begin{vmatrix} 3x-4 & 0 & 3 \\ x & 0 & x \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix} > 4$

2.23. $\begin{vmatrix} 2-3x & 2x & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} < 7$

2.24. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5-x & 2x & 0 \\ 1 & -x & 0 \end{vmatrix} \ge 8$

2.25. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3-4x & 0 & -4 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} \le 3$

2.26. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & x-4 & -2x \\ 0 & 3 & x \end{vmatrix} > 3$

2.27. $\begin{vmatrix} -1 & 4x+3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & x & -x \end{vmatrix} < 9$

2.28. $\begin{vmatrix} 2x-7 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ x & -6x & x \end{vmatrix} \ge 7$

2.29. $\begin{vmatrix} x+3 & x & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4x & 7 \end{vmatrix} \le 6$

2.30. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 3 & 3 \\ -x & -2 & 2x \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} > 1$

Задание 3. **Вычислить определитель матрицы *B* 3-го порядка:**

а) по правилу Саррюса; *б*) разложением по строке или столбцу.

3.1. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.2. $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.3. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.4. $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

3.5. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.6. $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3.7. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.8. $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

3.9. $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.10. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

3.11. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3.12. $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.13. $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

3.14. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.15. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3.16. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

3.17. $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.18. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.19. $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

3.20. $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3.21. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.22. $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

3.23. $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

3.24. $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

3.25. $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & 2\\ -1 & 4 & -5\end{pmatrix}$ **3.26.** $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ -3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

3.27. $B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$ **3.28.** $B=\begin{pmatrix}9 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & -7 & -5\end{pmatrix}$

3.29. $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 6 & -4 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$ **3.30.** $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 2 & -2 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Задание 4. **Вычислить определитель 4-го порядка**

4.1. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 3\\ 4 & 4 & 5 & 1\end{vmatrix}$ **4.2.** $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 3\\ 3 & 2 & 5 & 1\end{vmatrix}$

4.3. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 3 & 3\\ 3 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 5 & 3 & 1\end{vmatrix}$ **4.4.** $\begin{vmatrix}1 & 5 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$

4.5. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5 & 1\end{vmatrix}$ **4.6.** $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 5 & 1\end{vmatrix}$

4.7. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 5 & 5 & 1\end{vmatrix}$ **4.8.** $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 5 & 2\end{vmatrix}$

4.9. $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$ **4.10.** $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 7 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$

4.11. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **4.12.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

4.13. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **4.14.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4.15. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **4.16.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4.17. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.18.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

4.19. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.20.** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

4.21. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.22.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4.23. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.24.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4.25. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **4.26.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4.27. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ **4.28.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

4.29. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **4.30.** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Задание 5. **Вычислить $\boldsymbol{AB-3C}$**

5.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

5.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

5.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

5.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

5.5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

5.6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

5.7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

5.8. $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&2&-2\\3&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&1\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&1\\2&0\\4&-3\end{pmatrix}$

5.9. $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\0&4&-2\\3&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&2\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$

5.10. $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\0&6&-2\\3&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&3\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&3\\2&0\\6&-3\end{pmatrix}$

5.11. $A=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&8&-2\\3&1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-1&4\\2&0\\7&-3\end{pmatrix}$

5.12. $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&2&-2\\3&1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&2\\-1&1\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\\5&-4\end{pmatrix}$

5.13. $A=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&4&-2\\3&1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&2\\-1&2\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&2\\2&0\\6&-4\end{pmatrix}$

5.14. $A=\begin{pmatrix}1&4&4\\0&6&-2\\3&1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&2\\-1&3\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\7&-4\end{pmatrix}$

5.15. $A=\begin{pmatrix}1&5&3\\0&4&-2\\3&1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&2\\-1&2\\3&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&2\\2&0\\7&-5\end{pmatrix}$

5.16. $A=\begin{pmatrix}-1&3&-2\\2&-4&0\\0&-1&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&-1\\1&-2\\-4&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}6&1\\-2&-3\\2&-2\end{pmatrix}$

5.17. $A=\begin{pmatrix}-1&-2&3\\2&5&0\\0&-1&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&-3\\-4&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-4&1\\3&2\\2&3\end{pmatrix}$

5.18. $A=\begin{pmatrix}-1&4&-3\\2&-6&0\\0&-1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&-1\\1&-3\\-4&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}8&1\\-3&-4\\2&-3\end{pmatrix}$

5.19. $A=\begin{pmatrix}-1&-4&5\\2&10&0\\0&-1&-4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-4&-1\\1&5\\-4&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-8&1\\5&4\\2&5\end{pmatrix}$

5.20. $A=\begin{pmatrix}-1&5&-4\\2&-8&0\\0&-1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&-1\\1&-4\\-4&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}10&1\\-4&-5\\2&-4\end{pmatrix}$

5.21. $A=\begin{pmatrix}-1&-5&6\\2&12&0\\0&-1&-5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-5&-1\\1&6\\-4&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-10&1\\6&5\\2&6\end{pmatrix}$

5.22. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 6 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

5.23. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 6\\ 0 & 10 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 5\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 1 & 0\\ 6 & -1\end{pmatrix}$

5.24. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 0 & 8 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 0\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

5.25. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -2\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

5.26. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

5.27. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 4\\ -1 & 6 & -2\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 0\\ 8 & -5\end{pmatrix}$

5.28. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -1 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ 6 & -5\end{pmatrix}$

5.29. $A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\\ 7 & -5\end{pmatrix}$

5.30. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 6\\ 0 & 10 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 2 & 0\\ 8 & -3\end{pmatrix}$

Задание 6. **Вычислить:** *а*) $A\cdot B$; *б*) $A\cdot B+B\cdot A$

6.1. $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -11 & 7 & -1\\ 19 & -11 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 3 & 2\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$

6.2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 39 & -9 & -36\\ -23 & 8 & 22\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ -2 & 3 & 5\\ 7 & 1 & 2\end{pmatrix}$

6.3. $A=\begin{pmatrix}-7 & 14 & -7\\ 14 & -22 & 6\\ -7 & 6 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 4\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$

6.4. $A=\begin{pmatrix}13 & 22 & -23\\ 1 & -2 & 1\\ -11 & -14 & 13\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 7 & 3\\ 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$

6.5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 14 & -24 & 11 \\ -5 & 10 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

6.6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & 14 & -27 \\ -3 & -2 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6.7. $A = \begin{pmatrix} -10 & 11 & 2 \\ 17 & -19 & -3 \\ -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

6.8. $A = \begin{pmatrix} -10 & -22 & 29 \\ 14 & 25 & -29 \\ -13 & -17 & 29 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

6.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -6 & -9 & 7 \\ 8 & 13 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

6.10. $A = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 10 \\ -1 & 11 & -7 \\ -2 & -11 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

6.11. $A = \begin{pmatrix} -13 & 11 & -3 \\ 6 & -5 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

6.12. $A = \begin{pmatrix} -1 & -11 & 19 \\ -1 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 39 & -23 \\ -1 & -9 & 8 \\ 1 & -36 & 22 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

6.14. $A = \begin{pmatrix} -7 & 14 & -7 \\ 14 & -22 & 6 \\ -7 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

6.15. $A = \begin{pmatrix} 13 & 1 & -11 \\ 22 & -2 & -14 \\ -23 & 1 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

6.16. $A = \begin{pmatrix} -1 & 14 & -5 \\ 1 & -24 & 10 \\ 1 & 11 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

6.17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -4 & 14 & -2 \\ 2 & -27 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

6.18. $A = \begin{pmatrix} -10 & 17 & -6 \\ 11 & -19 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

6.19. $A=\begin{pmatrix}-10 & 14 & -13\\ -22 & 25 & -17\\ 29 & -29 & 29\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & -1 & 3\\ 5 & 3 & 4\\ -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$

6.20. $A=\begin{pmatrix}1 & -6 & 8\\ 1 & -9 & 13\\ -1 & 7 & -10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 3 & 2 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

6.21. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ -11 & 11 & -11\\ 10 & -7 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 5\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

6.22. $A=\begin{pmatrix}18 & 39 & 22\\ -10 & -24 & -13\\ 7 & 14 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ -3 & -4 & 2\\ 4 & 3 & -6\end{pmatrix}$

6.23. $A=\begin{pmatrix}1 & -17 & 14\\ -6 & 17 & -16\\ -5 & 17 & -19\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ 2 & -3 & 4\\ 1 & -4 & 5\end{pmatrix}$

6.24. $A=\begin{pmatrix}-22 & 16 & 23\\ 11 & -10 & -13\\ 11 & -11 & -11\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 6 & -4\end{pmatrix}$

6.25. $A=\begin{pmatrix}7 & -7 & -7\\ 18 & -13 & -16\\ 13 & -9 & -10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 4 & -3 & 2\\ -1 & 4 & -5\end{pmatrix}$

6.26. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 7 & 1 & -11\\ -14 & -3 & 19\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ -3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$

6.27. $A=\begin{pmatrix}2 & 24 & -17\\ 0 & -15 & 10\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$

6.28. $A=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 4\\ 13 & -46 & -25\\ -19 & 66 & 39\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & -7 & -5\end{pmatrix}$

6.29. $A=\begin{pmatrix}1 & -17 & 23\\ 0 & -14 & 21\\ -2 & 13 & -18\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 6 & -4 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$

6.30. $A=\begin{pmatrix}4 & 7 & 9\\ -11 & -7 & 12\\ 10 & -7 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 2 & -2 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Задание 7. **Найти значение матричного многочлена $\boldsymbol{f(A)}$**

7.1. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}$

7.2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

7.3. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2,$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

7.4. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1,$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

7.5. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1,$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

7.6. $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 3,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

7.7. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 4,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

7.8. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3,$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

7.9. $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x + 1,$ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7.10. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2,$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

7.11. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1,$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

7.12. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x + 3,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

7.13. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 4,$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

7.14. $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 3x + 1,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

7.15. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 3,$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

7.16. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2,$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

7.17. $f(x) = -3x^3 + x^2 - 2x + 1,$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

7.18. $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 5x + 10,$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

7.19. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 3,$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

7.20. $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 7,$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

7.21. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 2,$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

7.22. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 3,$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

7.23. $f(x) = 2x^3 - 10x + 5,$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

7.24. $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - x - 2,$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

7.25. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 3,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

7.26. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 2,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7.27. $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 1,\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

7.28. $f(x) = x^3 - 9x + 4,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

7.29. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3,\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.30. $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - x - 4,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Задание 8. **Найти обратную матрицу и сделать подробную проверку:**

а) методом присоединенной матрицы;

б) методом элементарных преобразований (методом Гаусса).

8.1. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **8.2.** $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

8.3. $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ **8.4.** $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

8.5. $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ **8.6.** $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

8.7. $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ **8.8.** $B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}$

8.9. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ **8.10.** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

8.11. $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ **8.12.** $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

8.13. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **8.14.** $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

8.15. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **8.16.** $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

8.17. $B=\begin{pmatrix}2&3&5\\1&2&4\\5&4&3\end{pmatrix}$

8.18. $B=\begin{pmatrix}8&5&-3\\-1&3&4\\3&4&2\end{pmatrix}$

8.19. $B=\begin{pmatrix}1&3&2\\4&2&1\\6&5&3\end{pmatrix}$

8.20. $B=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\2&4&1\\3&5&3\end{pmatrix}$

8.21. $B=\begin{pmatrix}3&1&4\\4&2&5\\2&3&1\end{pmatrix}$

8.22. $B=\begin{pmatrix}3&5&2\\2&3&5\\1&2&3\end{pmatrix}$

8.23. $B=\begin{pmatrix}6&-2&7\\2&3&1\\3&5&2\end{pmatrix}$

8.24. $B=\begin{pmatrix}1&2&5\\2&3&4\\5&4&3\end{pmatrix}$

8.25. $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&7&5\\2&3&4\end{pmatrix}$

8.26. $B=\begin{pmatrix}2&3&4\\3&2&1\\5&4&3\end{pmatrix}$

8.27. $B=\begin{pmatrix}8&1&2\\3&2&1\\5&4&3\end{pmatrix}$

8.28. $B=\begin{pmatrix}2&1&5\\3&2&4\\5&4&3\end{pmatrix}$

8.29. $B=\begin{pmatrix}8&-1&3\\5&3&4\\-3&4&2\end{pmatrix}$

8.30. $B=\begin{pmatrix}1&4&6\\3&2&5\\2&1&3\end{pmatrix}$

Задание 9. **Найти, при каком значении *c* матрица *A* не имеет обратной**

9.1. $A=\begin{pmatrix}c&4&1\\2&5&-1\\0&c&1\end{pmatrix}$

9.2. $A=\begin{pmatrix}c&-4&1\\7&-c&2\\2&-1&0\end{pmatrix}$

9.3. $A=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\-c&3&-1\\1&c&3\end{pmatrix}$

9.4. $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&\mathrm{c}&-2\\c&-2&3\end{pmatrix}$

9.5. $A=\begin{pmatrix}5&4&1\\-c&3&-4\\c&-2&3\end{pmatrix}$

9.6. $A=\begin{pmatrix}1&-2&c\\5&\mathrm{c}&2\\-2&1&-3\end{pmatrix}$

9.7. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\c&3&-2\\c&-2&3\end{pmatrix}$

9.8. $A=\begin{pmatrix}2&c&-1\\1&4&-3\\1&-2&c\end{pmatrix}$

9.9. $A=\begin{pmatrix}1&-1&c\\-2&-3&1\\1&-c&3\end{pmatrix}$

9.10. $A=\begin{pmatrix}7&2&5\\-5&-3&c\\1&c&3\end{pmatrix}$

9.11. $A=\begin{pmatrix}1 & c & -2\\ 2 & 5 & -3\\ 1 & -2 & c\end{pmatrix}$ **9.12.** $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & c\\ -2 & 2 & -4\\ 1 & -c & 3\end{pmatrix}$

9.13. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & c\\ 2 & 6 & -4\\ 1 & c & 3\end{pmatrix}$ **9.14.** $A=\begin{pmatrix}4 & c & 3\\ -3 & -2 & -1\\ c & -2 & 3\end{pmatrix}$

9.15. $A=\begin{pmatrix}-2 & c & -3\\ 3 & 4 & -1\\ c & -2 & 3\end{pmatrix}$ **9.16.** $A=\begin{pmatrix}5 & c & 4\\ c & -2 & 3\\ -4 & -3 & -1\end{pmatrix}$

9.17. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -c\\ c & 2 & -1\\ c & -2 & 3\end{pmatrix}$ **9.18.** $A=\begin{pmatrix}1 & c & 3\\ -3 & -1 & c\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}$

9.19. $A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & c\\ 1 & c & 3\\ 6 & 2 & 4\end{pmatrix}$ **9.20.** $A=\begin{pmatrix}1 & c & 3\\ -2 & 2 & -4\\ 4 & 6 & c\end{pmatrix}$

9.21. $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 5\\ -5 & -3 & c\\ 1 & c & 3\end{pmatrix}$ **9.22.** $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & c\\ 1 & c & 3\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}$

9.23. $A=\begin{pmatrix}2 & c & c\\ c & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ **9.24.** $A=\begin{pmatrix}3 & c & 0\\ 0 & c & -3\\ 1 & -2 & c\end{pmatrix}$

9.25. $A=\begin{pmatrix}2c & 3 & c\\ 1 & -2 & c\\ -3 & 0 & -3\end{pmatrix}$ **9.26.** $A=\begin{pmatrix}7 & c & 4\\ 1 & -2 & c\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$

9.27. $A=\begin{pmatrix}-2 & -3 & c\\ c & -2 & 3c\\ -1 & -4 & 3\end{pmatrix}$ **9.28.** $A=\begin{pmatrix}1 & c & 3\\ 2 & -1 & 3\\ -5 & -3 & c\end{pmatrix}$

9.29. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & c\\ -c & -2 & 3\\ -c & 5 & -4\end{pmatrix}$ **9.30.** $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & c\\ 2 & 7 & -5\\ 1 & c & 3\end{pmatrix}$

Задание 10. **Вычислить ранг матрицы**

10.1. $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 5 & 0\\ -5 & -3 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$ **10.2.** $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ -3 & 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$

10.3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 4\\ 1 & -2 & 3 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$ **10.4.** $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 2\\ 1 & -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

10.5. $A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 0\\ -3 & 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$ **10. 6.** $A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 4 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$

10.7. $A=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 2\\ -1 & -4 & 3 & 1\end{pmatrix}$ **10.8.** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3 & -1\\ -5 & -3 & -2 & 0\end{pmatrix}$

10.9. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 3 & 1\\ -1 & 5 & -4 & 1\end{pmatrix}$ **10.10.** $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2 & 0\\ 2 & 7 & -5 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$

10.11. $A=\begin{pmatrix}-8 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 5 & -1 & 0\\ 0 & -8 & 1 & 5\end{pmatrix}$ **10.12.** $A=\begin{pmatrix}6 & -4 & 1 & 2\\ 8 & -6 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

10.13. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ **10.14.** $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 6\\ -1 & 4 & -2 & -1\\ 4 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$

10.15. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1 & 4\\ -1 & 3 & -4 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ **10.16.** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4 & 0\\ 5 & -4 & 2 & 7\\ -2 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$

10.17. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -2 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$ **10.18.** $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 6\\ 1 & 4 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$

10.19. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -4 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 5\\ 1 & 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$ **10.20.** $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & 5 & 0\\ -5 & -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3 & 6\end{pmatrix}$

10.21. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & 4\\ 2 & 5 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 3 & -3\end{pmatrix}$ **10.22.** $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 11 & 1\\ -2 & 2 & -4 & 0\\ 1 & -11 & 3 & -1\end{pmatrix}$

10.23. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 6 & -4 & 3\\ 1 & 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$ **10.24.** $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3 & 0\\ -3 & -2 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

10.25. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3 & 2\\ 3 & 4 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 3 & -3\end{pmatrix}$ **10.26.** $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 0\\ -4 & -3 & -1 & 8\end{pmatrix}$

10.27. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 2\end{pmatrix}$ **10.28.** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ -3 & -1 & -2 & 1\\ 5 & 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$

10.29. $A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 0\\ 6 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$ **10.30.** $A=\begin{pmatrix}1 & 9 & 3 & -1\\ -2 & 2 & -4 & 0\\ 4 & 6 & 9 & 0\end{pmatrix}$

Задание 11. **Решить матричное уравнение**

11.1. $X\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-8 & 1\\ -4 & 8\end{pmatrix}$

11.2. $X\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}7 & 1\\ -10 & -5\end{pmatrix}$

11.3. $X\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}17 & 8\\ -20 & -15\end{pmatrix}$

11.4. $X\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}17 & 2\\ -15 & -5\end{pmatrix}$

11.5. $X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}11 & 16\\ -6 & -9\end{pmatrix}$

11.6. $X\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 5\\ 2 & 1\\ -3 & -14\end{pmatrix}$

11.7. $X\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & -2\\ 12 & 1\end{pmatrix}$

11.8. $X\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -2\\ 22 & -21\end{pmatrix}$

11.9. $X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\\ -6 & -7\end{pmatrix}$

11.10. $X\begin{pmatrix}6 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 6 & -2\\ 51 & -20\end{pmatrix}$

11.11. $X\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -5\\ 4 & -3\\ 43 & -31\end{pmatrix}$

11.12. $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}^T X = \begin{pmatrix}10 & -5\\ 48 & -20\end{pmatrix}$

11.13. $\begin{pmatrix}5 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}^T X = \begin{pmatrix}18 & -5\\ -43 & 15\end{pmatrix}$

11.14. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^T X = \begin{pmatrix}16 & -1\\ 41 & -3\end{pmatrix}$

11.15. $\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}^T X = \begin{pmatrix}35 & -2\\ -12 & 1\end{pmatrix}$

11.16. $\begin{pmatrix}6 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}^T X = \begin{pmatrix}22 & -1\\ -36 & 2\end{pmatrix}$

11.17. $\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}-4 & -2 & -36\\ -1 & 4 & 63\end{pmatrix}$

11.18. $\begin{pmatrix}7 & 3\\ -4 & -1\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}-4 & 7 & 47\\ 3 & -4 & -14\end{pmatrix}$

11.19. $\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -57\\ 5 & -1 & 76\end{pmatrix}$

11.20. $\begin{pmatrix}-5 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & -5 & -60\\ -3 & 2 & -20\end{pmatrix}$

11.21. $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 3 & 84\\ -3 & 1 & -42\end{pmatrix}$

11.22. $\begin{pmatrix}7 & 4\\ -3 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-3 & 7 & 88\\ 4 & -3 & 22\end{pmatrix}$

11.23. $X\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 67 & 18\end{pmatrix}$

11.24. $X\begin{pmatrix}7 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}10 & 5\\ -72 & -24\end{pmatrix}$

11.25. $X\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 50 & -25\end{pmatrix}$

11.26. $X\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-1 & -7\\ -26 & 104\end{pmatrix}$

11.27. $X\begin{pmatrix}7 & -4\\ 3 & 0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}11 & 3\\ -108 & 0\end{pmatrix}$

11.28. $X\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -5\\ 84 & -56\end{pmatrix}$

11.29. $X\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\\ 116 & -29\end{pmatrix}$

11.30. $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -90\\ -4 & 2 & -60\end{pmatrix}$

Задание 12. **Решить матричное уравнение**

12.1. $ABX-AX=A$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

12.2. $B-2X=BAX$, где $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}$

12.3. $3X=(X-A)B$, где $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 2 & 7\end{pmatrix}$

12.4. $X-B=AX+B$, где $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

12.5. $ABX - 3X = 2A$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12.6. $XB + 2X = AB$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

12.7. $4X = A + ABX$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

12.8. $2A + X = ABX$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

12.9. $2X - AB = 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

12.10. $ABX + A = B + BAX$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

12.11. $2X - B = AX + AB$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

12.12. $XB = A - 3X$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12.13. $(X - A)B = 4X$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

12.14. $2X = 2A + XB$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

12.15. $XA + 3X = B$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12.16. $B - X = XA$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

12.17. $A + X = 2BX$, где $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12.18. $X - 2A = (X + B)A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

12.19. $2X = (X - A)B$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

12.20. $X + B = AX - B$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

12.21. $ABX - 3X = 5A$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12.22. $XB = X - 2AB$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

12.23. $3X - A = ABX$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

12.24. $2B - X = BAX$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

12.25. $X + 3AB = 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

12.26. $A + ABX = B + BAX$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

12.27. $X - B = AX + 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

12.28. $2X - XB = A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12.29. $(X + A)B = 3X$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

12.30. $XA - 2X = B$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 13. **Решить систему уравнений:**

а) методом Крамера; *б*) матричным методом

13.1. $\begin{cases} y - 2x = 5 \\ 3x + 4y = 9 \end{cases}$ **13.2.** $\begin{cases} 3y - 2x = 17 \\ 8x + 2y = 2 \end{cases}$

13.3. $\begin{cases} 2y - x = -7 \\ 3x - y = 16 \end{cases}$ **13.4.** $\begin{cases} 2y - 5x = 4 \\ 7x - 5y = 1 \end{cases}$

13.5. $\begin{cases} 5y - 3x = 1 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ **13.6.** $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 12y - 5x = 4 \end{cases}$

13.7. $\begin{cases} y-7x=10 \\ 5x-3y=2 \end{cases}$ **13.8.** $\begin{cases} 3x+4y=9 \\ y-2x=5 \end{cases}$

13.9. $\begin{cases} 4x+y=1 \\ 3y-2x=17 \end{cases}$ **13.10.** $\begin{cases} 7x-3y=-1 \\ 2y-3x=4 \end{cases}$

13.11. $\begin{cases} 3x-y=16 \\ 2y-x=-7 \end{cases}$ **13.12.** $\begin{cases} 7x-5y=1 \\ 2y-5x=4 \end{cases}$

13.13. $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 5y-3x=1 \end{cases}$ **13.14.** $\begin{cases} x+2y=8 \\ 12y-5x=4 \end{cases}$

13.15. $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ y-7x=10 \end{cases}$ **13.16.** $\begin{cases} 7x-3y=-1 \\ 2y-3x=4 \end{cases}$

13.17. $\begin{cases} x+3y=6 \\ y-2x=-5 \end{cases}$ **13.18.** $\begin{cases} 3y+2x=12 \\ 5x-y=13 \end{cases}$

13.19. $\begin{cases} 4y-3x=-24 \\ x-7y=25 \end{cases}$ **13.20.** $\begin{cases} 4x-y=-8 \\ 5y+3x=17 \end{cases}$

13.21. $\begin{cases} y+7x=25 \\ 4x+3y=24 \end{cases}$ **13.22.** $\begin{cases} 2y+5x=20 \\ 7x+3y=29 \end{cases}$

13.23. $\begin{cases} x-3y=-6 \\ 4y-2y=10 \end{cases}$ **13.24.** $\begin{cases} y+6x=12 \\ 7x+5y=37 \end{cases}$

13.25. $\begin{cases} 5y+3x=30 \\ 4x-y=17 \end{cases}$ **13.26.** $\begin{cases} y+5x=10 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$

13.27. $\begin{cases} 5x-2y=-20 \\ 7y+3x=29 \end{cases}$ **13.28.** $\begin{cases} 6x-y=-12 \\ 7y+5x=37 \end{cases}$

13.29. $\begin{cases} 7y-x=-14 \\ 3x-4y=25 \end{cases}$ **13.30.** $\begin{cases} 7y-2x=-28 \\ 5x-9y=53 \end{cases}$

Задание 14. **Решить систему уравнений:**

а) методом Крамера; *б*) матричным методом; *в*) методом Гаусса

14.1. $\begin{cases} 3x+4y+2z=7 \\ x+2y+3z=6 \\ 4x+5y+z=6 \end{cases}$ **14.2.** $\begin{cases} 3x+2y+z=3 \\ 5x+3y+2z=7 \\ 2x+5y+3z=-8 \end{cases}$

14.3. $\begin{cases} 6x+2y+3z=-7 \\ -2x+3y+5z=1 \\ 7x+y+2z=-7 \end{cases}$ **14.4.** $\begin{cases} x+2y+5z=8 \\ 2x+3y+4z=8 \\ 5x+4y+3z=6 \end{cases}$

14.5. $\begin{cases} x-3y+2z=-4 \\ 2x+7y+3z=7 \\ 3x+5y+4z=6 \end{cases}$ **14.6.** $\begin{cases} 2x+3y+7z=-1 \\ 3x+2y+5z=3 \\ 4x+y+2z=6 \end{cases}$

14.7. $\begin{cases} 8x + 3y + 5z = 1 \\ x + 2y + 4z = 7 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$

14.8. $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = -2 \\ x + 2y + 4z = -3 \\ 5x + 4y + 3z = 7 \end{cases}$

14.9. $\begin{cases} 8x + 5y - 3z = 5 \\ -x + 3y + 4z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 6 \end{cases}$

14.10. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + z = 6 \\ 6x + 5y + 3z = 9 \end{cases}$

14.11. $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ 2x + 4y + z = 6 \\ 3x + 5y + 2z = 4 \end{cases}$

14.12. $\begin{cases} 3x + y + 4z = 6 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$

14.13. $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = -4 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \\ x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$

14.14. $\begin{cases} 6x - 2y + 7z = -3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 9 \end{cases}$

14.15. $\begin{cases} x + 2y + 5z = 8 \\ 2x + 3y + 4z = 8 \\ 5x + 4y + 3z = 6 \end{cases}$

14.16. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ -3x + 7y + 5z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$

14.17. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 7x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$

14.18. $\begin{cases} 8x + y + 2z = -2 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ 5x + 4y + 3z = 9 \end{cases}$

14.19. $\begin{cases} 2x + y + 5z = 9 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \\ 5x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$

14.20. $\begin{cases} 8x - y + 3z = 3 \\ 5x + 3y + 4z = 7 \\ -3x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$

14.21. $\begin{cases} x + 4y + 6z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 9 \\ 2x + y + 3z = 6 \end{cases}$

14.22. $\begin{cases} x + 2y + 3z = -8 \\ -2x + 4y + 5z = 2 \\ -3x + y + 2z = 9 \end{cases}$

14.23. $\begin{cases} 2x + 5y + 3z = -7 \\ -3x - 4y + 2z = 1 \\ 4x + 3y - 6z = 3 \end{cases}$

14.24. $\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 6 \\ x - 4y + 5z = 6 \end{cases}$

14.25. $\begin{cases} 3x + 7y - 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ x + 6y - 4z = 5 \end{cases}$

14.26. $\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \\ -x + 4y - 5z = -8 \end{cases}$

14.27. $\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 1 \\ -3x + 2y + z = -3 \\ x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$

14.28. $\begin{cases} -x - 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 8 \end{cases}$

14.29. $\begin{cases} 9x + 3y + z = 8 \\ 2x + 5y + 3z = 3 \\ x - 7y - 5z = -2 \end{cases}$

14.30. $\begin{cases} 3x + y + 5z = -4 \\ 6x - 4y + 3z = 8 \\ 4x - 3y + 2z = 7 \end{cases}$

Задание 15. **Дана система линейных уравнений**

а) с помощью теоремы Кронекера – Капелли установить совместность системы;

б) решить систему методом Гаусса

15.1. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -6 \\ 4x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 24 \end{cases}$$

15.2. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 23 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -11 \\ 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 12 \end{cases}$$

15.3. $$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 47 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -29 \\ 6x_1 + 13x_2 + 7x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 18 \end{cases}$$

15.4. $$\begin{cases} 5x_1 + 16x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 29 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_5 = 25 \\ 4x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases}$$

15.5. $$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 37 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 36 \end{cases}$$

15.6. $$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 6 \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 9 \\ x_1 + 17 + 6x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 15 \end{cases}$$

15.7. $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 19 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -7 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 18 \end{cases}$$

15.8. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_5 = -5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 9 \end{cases}$$

15.9. $$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 29 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 7 \\ 3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 36 \end{cases}$$

15.10. $$\begin{cases} 5x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 51 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 9 \\ 4x_1 + 13x_2 + 9x_3 + 7x_4 - 7x_5 = 60 \end{cases}$$

15.11. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -8 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 = -9 \end{cases}$$

15.12. $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 + x_5 = 9 \end{cases}$$

15.13. $$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 34 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -19 \\ 5x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 15 \end{cases}$$

15.14. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 3x_5 = -1 \\ 5x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 6x_4 - 8x_5 = 60 \\ 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 61 \end{cases}$$

15.15. $$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 18 \end{cases}$$

15.16. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$$

15.17. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

15.18. $$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 12 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$$

15.19. $$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 15 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 6 \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 9 \end{cases}$$

15.20. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 9 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_5 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

15.21. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 6 \end{cases}$$

15.22. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 6x_5 = 9 \end{cases}$$

15.23. $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 23 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -11 \\ 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 12 \end{cases}$$

15.24. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_5 = 2 \\ 5x_1 + 11x_2 + 6x_3 + x_4 - x_5 = 16 \end{cases}$

15.25. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 34 \\ 5x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 15 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -19 \end{cases}$

15.26. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 6x_5 = 18 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 19 \end{cases}$

15.27. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \end{cases}$

15.28. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_5 = -5 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 13 \end{cases}$

15.29. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 3x_5 = -1 \\ 5x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 6x_4 - 8x_5 = 60 \\ 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 61 \end{cases}$

15.30. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 5 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 7 \end{cases}$

Задание 16. **Решить систему для любого λ**

16.1. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ \lambda x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

16.2. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

16.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

16.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 2x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$

16.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$

16.6. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$

16.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \lambda x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

16.8. $\begin{cases} x_1 - 11x_2 + 8x_3 = 0 \\ 5x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

16.9. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

16.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

16.11. $\begin{cases} x_1 - 9x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 7x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

16.12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$

16.13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

16.14. $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

16.15. $\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ \lambda x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

16.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

16.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

16.18. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

16.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

16.20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$

16.21. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

16.22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

16.23. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + \lambda x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

16.24. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

16.25. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

16.26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$

16.27. $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

16.28. $\begin{cases} x_1 + \lambda x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

16.29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 9x_3 = 0 \\ \lambda x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

16.30. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + \lambda x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

«Высшее назначение математики – находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает», – сказал Норберт Винер, выдающийся математик и философ, основоположник кибернетики и теории искусственного интеллекта. Действительно, математика занимает важное место в системе высшего образования, необходима при изучении специальных дисциплин, является языком общения специалистов различных профилей.

Авторы надеются, что пособие поможет студентам разобраться в приведенных разделах нелегкой науки, как математика.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2009. – 608 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-8112-3775-3.

2. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – 7-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2008. – 576 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-8112-3019-8.

3. Натансон, И. П. Краткий курс высшей математики / И. П. Натансон. – СПб. : Лань, 1999. – 736 с. – (Серия «Учебники для вузов. Специальная литература»). – ISBN 5-8114-0123-X.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко [и др.]. – 6-е изд., испр. и доп. – М. : Оникс : Мир и образование, 2007. – 304 с. – ISBN 978-5-488-01070-3 (Оникс). – ISBN 978-5-488-01071-0 (ч. 1). – ISBN 978-5-94666-366-3 (Мир и образование). – ISBN 978-5-94666-367-0 (ч. 1).

5. Барашков, А. С. Математика. Высшее образование / А. С. Барашков. – М. : СЛОВО : Эксмо, 2005. – 480 с. – ISBN 5-8123-0297-9 (Слово). – ISBN 5-699-1179-1 (Эксмо).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ОРЕШКИНА Ольга Владимировна
ЕРКОВА Нина Ивановна

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, МАТРИЦЫ,
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-практическое пособие

Редактор А. А. Амирсейидова
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева
Корректор Т. В. Евстюничева
Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой

Подписано в печать 20.06.17.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 5,35. Тираж 70 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.