Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Владимирский государственный университет

В.Г. ЧЕРНОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

Учебное пособие

Владимир 2005

УДК 511
ББК 22.126
Ч49

Рецензенты:
Доктор технических наук, профессор
зав. кафедрой менеджмента Владимирского
государственного педагогического университета
Н.Г. Наянзин

Кандидат физико-математических наук,
зав. кафедрой высшей и прикладной математики
Владимирского института бизнеса
В.Е. Крылов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Чернов, В. Г.
Ч 49 Основы теории нечетких множеств. Решение задач многокритериального выбора альтернатив : учеб. пособие / В. Г. Чернов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2005. – 100 с. – ISBN 5-89368-612-8.

Изложены основы теории нечетких множеств, описаны операции над ними, а также методы выполнения арифметических операций над нечеткими числами. Рассматриваются методы решения задач многокритериального выбора альтернатив при нечетких оценках соответствия альтернатив требованиям критериев.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 080801 (351400) – прикладная информатика в экономике, а также может быть использовано студентами родственных специальностей.

Табл. 10. Ил. 67. Библиогр.: 24 назв.

УДК 5.11
ББК 22.126

ISBN 5-89368-612-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Управление экономикой преследует цель достижения определенного эффекта в будущем. Будущее неясно, и управление протекает в условиях неопределенности, что порождает риск неэффективного управления, при котором намеченные цели не достигаются.

Исторически первой реакцией на необходимость учета неопределенности было создание теории вероятностей. Наиболее оправданным ее применение оказалось там, где имеют место статистически однородные события массового характера, так как классическая вероятность аксиоматически определена как характеристика генеральной совокупности статистически однородных случайных событий. В том случае, если это условие не выполняется, применение методов классической теории вероятностей оказывается некорректным.

Одним из ответов на эти затруднения стало возникновение неклассических вероятностей, другим – появление теории нечетких множеств, созданной профессором Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде (L. Zade). Математическая теория нечетких множеств позволяет описывать нечеткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечеткие выводы. Наиболее серьезные результаты по применению теории нечетких множеств были достигнуты в управлении техническими объектами, где удалось расширить границу приложения систем автоматизации за пределы применимости классической теории автоматического управления. В последнее время методы теории нечетких множеств начинают широко применяться в экономике. В связи с этим в учебные планы подготовки специалистов соответствующих направлений были включены учебные дисциплины, либо непосредственно рассматривающие теорию нечетких множеств, либо изучающие ее в качестве перспективного прикладного инструментария.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 080801 (351400) «Прикладная информатика в экономике», а также может быть полезна для студентов специальностей «Менеджмент», «Маркетинг», «Антикризисное управление» и др.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

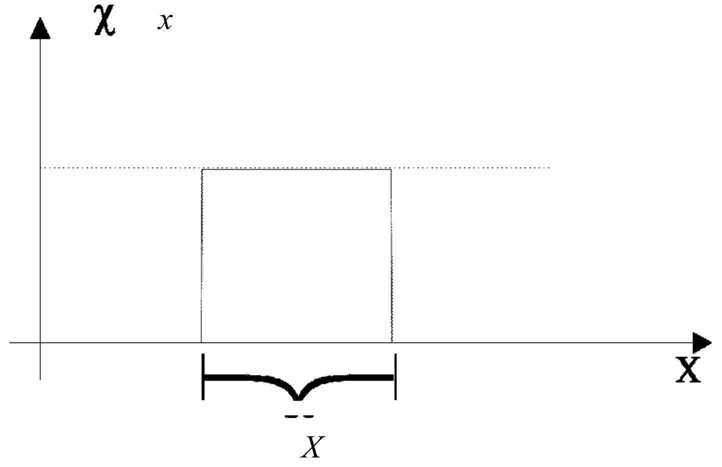
1.1. Нечеткие множества

К классической теории множеств в общем случае относятся аксиоматическая теория множеств и элементарная теория множеств. Первая - одна из фундаментальных теорий математики. В нашем случае нам достаточно некоторых положений элементарной теории, которую в дальнейшем будем называть теорией четких множеств.

Рассматривая управление в самом общем смысле этого слова, с позиции теории четких множеств можно представить процесс управления как задание правил соответствия между элементами множеств входных параметров $X = \{x_i : i = \overline{1, I}\}$ и элементами множества выходных параметров $Y = \{y_j : j = \overline{1, J}\}$, $I \neq J$. В теории множеств в этом случае считается заданным отображение

$$\Gamma : X \to Y \quad . \tag{1.1}$$

В различных приложениях отображение (1.1) может быть определено самыми различными способами: в виде таблиц, графиков, алгебраических или дифференциальных уравнений, при этом общим для них всех является то обстоятельство, что в отображении (1.1) участвуют только элементы, обязательно принадлежащие множествам *X* и *Y*. В теории четких множеств это определяется заданием характеристической функции (рис. 1.1). Пусть *U* – универсальное множество[*] и *X* – множество в пространстве *U*, тогда характеристическая функция множества *X* определится следующим образом:



$$\chi(x) = \begin{cases} 1, x \in X \\ 0, x \notin X \end{cases}$$

Рис. 1.1

---

*) Множество *U* называется универсальным, если для любого $X \subset U$ выполняется условие $X \bigcap U = X$. Универсальное множество описывается функцией принадлежности $\mu_u(x) = 1, \forall x \in U$

Пример. Для множества X чисел $2 \le x \le 4$ характеристическая функция имеет вид, представленный рис. 1.2 .

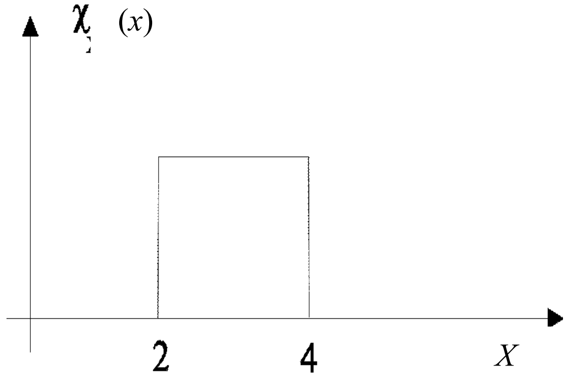


Рис. 1.2

Естественно, что при таком подходе нет места предположению, что «x находится приблизительно в пределах от 2 до 4». Для разрешения этой ситуации Л. Заде [1] расширил двузначную оценку 0 или 1 до неограниченной многозначной оценки выше 0 и ниже 1 на [0,1] и впервые ввел понятие нечеткого множества и заменил характеристическую функцию на функцию принадлежности (рис. 1.3), которая может принимать любые значения в интервале [0,1] для $x \in X$. В соответствии с этим элемент x_i множества U может не принадлежать X $(\mu_X = 0)$, может быть элементом X в небольшой степени (μ_X близко к нулю), может более или менее принадлежать X (μ_X не слишком близко к 0, не слишком близко к единице), может быть в значительной степени элементом X (μ_X близко к единице) или, наконец, может быть элементом X (μ_X=1). Таким образом, мы можем создать математическую структуру, которая позволяет оперировать с относительно неполно определенными элементами, принадлежность которой к данному подмножеству лишь в какой-то мере иерархически упорядочена. Множество значений x, на котором определена функция принадлежности, получило название нечеткого множества. Более строгое определение имеет следующую формулировку:

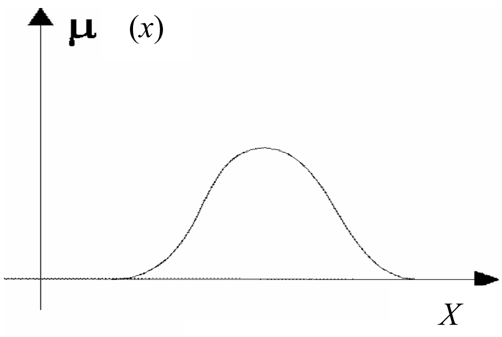


Рис. 1.3

пусть U – универсальное множество, тогда нечетким множеством $\tilde{X}$ на множестве U называется совокупность пар вида $\tilde{X} = \{\mu_X(x)/x\}$, где $\mu_x(x)$ – функция принадлежности.

Чаще всего определение нечеткого множества объясняют следующим образом: величина $\mu_X(x)$ обозначает субъективную оценку степени принадлежности x множеству X, например $\mu_X(x) =$ 0,8 означает, что x на 80 % принадлежит X.

Теперь предположение, что «x приблизительно лежит в пределах от 2 до 4» может быть представлено, например, функцией принадлежности (рис. 1.4).

Носителем нечеткого множества называется множество элементов $x \in U$ такое, что для любого $x \in U$, $\mu_X(x) > 0$

$$SuppX = \{x / \forall x \in U, \quad \mu_{\tilde{X}} > 0\}.$$

Иными словами, носителем нечеткого множества $\tilde{X}$ является подмножество универсального множества U, для элементов которого функция принадлежности строго больше нуля. Нечеткое множество называют нормальным, если

$$Sup(\mu_X(x)) = 1.$$

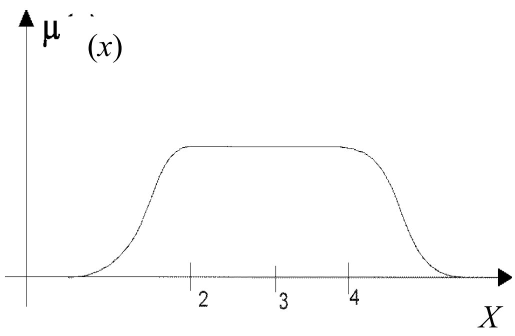


Рис. 1.4.

В противном случае нечеткое множество субнормальное.

Очень важным результатом введения функции принадлежности явилось то, что она позволила отразить субъективный взгляд на ту или иную ситуацию.

Например, разные лица могут представить приблизительное равенство x двум совершенно по-разному (рис. 1.5).

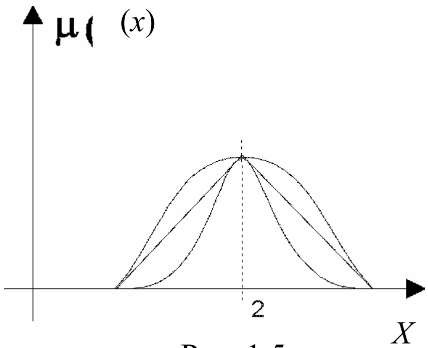


Рис. 1.5

Следовательно, могут и должны существовать «моя функция принадлежности», «твоя функция принадлежности», «функция принадлежности эксперта» и т.д.

Обратим внимание на связь четкого и нечеткого множеств. Два значения $\{0,1\}$ принадлежат замкнутому интервалу [0,1]. Следовательно, четкое множество является частным случаем нечеткого множества, а понятие нечеткого множества является расширенным понятием, охватывающим и понятие четкого множества. Таким образом, понятие принадлежности получает интересное обобщение, приводящее, как мы это увидим, к очень полезным результатам.

Нечеткое множество строго определяется с помощью функции принадлежности. Понятие функции принадлежности, по существу, является основным в теории нечетких множеств, и большинство приложений этой теории основано на различных операциях над функциями принадлежности.

Кроме функции принадлежности, к основным понятиям теории нечетких множеств относятся лингвистическая и нечеткая переменные.

1.2. Лингвистическая и нечеткая переменные

Одной из областей применения теории нечетких множеств являются человекомашинные системы управления. Осуществление диалога в таких системах немыслимо без использования языков, близких к естественному, способных описывать нечеткие категории, приближенные к человеческим понятиям и представлениям. В этой связи целесообразно использовать понятие лингвистической переменной, введенной впервые Л. Заде [2]. Подобные лингвистические переменные позволяют адекватно отразить приблизительное словесное описание предметов и явлений в том случае, когда точное детерминированное описание отсутствует. При этом следует учесть, что многие нечеткие категории, описанные лингвистически, зачастую не менее информационны, чем точное описание.

В качестве примера конкретная фраза «температура воды равна +5 ^{0}C» может быть заменена приблизительной фразой «температура воды низкая». В этом смысле слово «низкая» можно рассматривать как лингвистическое значение переменной «температура», имея в виду при этом, что лингвистическое значение играет такую же роль, как и численное значение «+5 ^{0}C». То же самое можно сказать о лингвистических значениях «очень низкая», «чуть больше чем низкая», «почти средняя» и т.д., если их сопоставить с численными значениями +3, +6.5, +12,...

Совокупность значений лингвистической переменной составляет терм-множество этой переменной. Это множество может иметь , вообще говоря, бесконечное число элементов, но на практике, естественно , оно конечно. Например, терм-множество лингвистической переменной «температура» можно записать так:

$$(\text{температура})=\{\text{очень низкая} \vee \text{ почти низкая} \vee \text{ низкая} \vee \text{ почти средняя} \vee \text{ средняя} \vee \ldots \vee \text{ высокая} \vee \text{ очень высокая}\}.$$

Отметим, что в случае лингвистической переменной «температура» числовая переменная «температура», принимающая, например, значения [+3, +5, +6.5, +12, +17,...,+50, +70], является так называемой базовой переменной лингвистической переменной «температура». Соответствующее множество значений называется множеством базовых значений, или базовым множеством. При этом такое, например, лингвистическое значение как «высокая», можно интерпретировать как название некоторого нечеткого ограничения на значение базовой переменной. Именно это ограничение будем считать смыслом лингвистического значения «высокая». Соответственно функция принадлежности представляет числовую характеристику, количественно определяющую представление субъекта относительно нечеткого ограничения.

Таким образом, нечеткую переменную определяют ее название, область определения, описание ограничений на возможные значения нечеткой переменной, которые задаются функцией принадлежности.

Формальное описание нечеткой переменной будет представлено тройкой

$$< L, D, C_L >,$$

где L – наименование нечеткой переменной;

D – область ее определения;

$C_L = \{\mu_L(x)/x\}$ – нечеткое множество на D.

П р и м е р. Пусть температура среды оценивается с помощью понятий « низкая», «средняя», «высокая», при этом минимальная температура оценивается как +3 ^{0}C , а максимальная +60 ^{0}C . Функции принадлежности, соответствующие этим понятиям, приведены на рис. 1.6. Тогда нечеткая переменная будет задана следующей совокупностью:

$$< \text{температура}, [\,3,60\,]\,,\ \mu_1(x)/x\,,\ \mu_2(x)/x\,,\ \mu_3(x)/x > .$$

Чтобы определить лингвистическую перемененную, необходимо задать ее имя, множество значений (терм-множество), представляющих собой наименование нечетких переменных областью определения, каждой из которых является множество D. Кроме этих определений, необходимо задать правила, с помощью которых из имеющихся элементов терм-множеств могут получаться новые, а также правила, со-

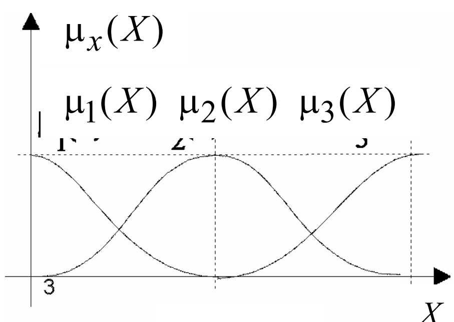


Рис. 1.6

гласно которым значениям лингвистической переменной ставятся в соответствие нечеткие множества. Формально это представляется так:

$$< L, T, D, G , M >,$$

где L – наименование лингвистической переменной;

T – множество значений лингвистической переменной (терм-множе ство), определенное на D;

G – грамматика, совокупность правил, позволяющая оперировать элементами терм-множества T, в частности генерировать новые осмысленные термы;

M – процедура, позволяющая установить соответствие между лингвистическим значением и нечетким множеством, т.е. правила вычисления функции принадлежности нового значения, определенного G.

Вернемся к примеру. Пусть определяется новое значение – «малая или средняя температура». Грамматика G определяет правило построения нового значения (рис. 1.7, утолщенная линия), а процедура М – определяет значения новой функции принадлежности $\mu'(x) = \mu_1(x) \cup \mu_2(x)$ (утолщенная кривая).

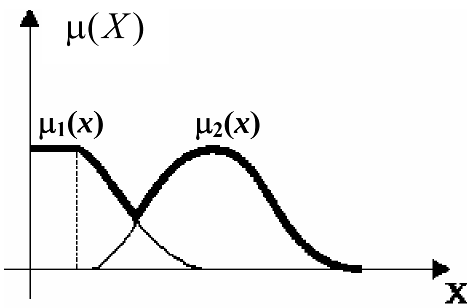


Рис. 1.7

1.3. Основные методы построения функций принадлежности

В основании теории из любой области естествознания лежит очень важное основополагающее для ее построения понятие элементарного объекта. Например, для механики – это материальная точка, для электродинамики – это вектор напряженности поля, для теории автоматического управления – передаточная функция. Для теории нечетких множеств основополагающим понятием является понятие нечеткого множества, которое характеризуется функцией принадлежности. С помощью нечетких множеств можно строго описывать присущие для языка человека расплывчатые понятия, "без формализации которых нет надежды существенно продвинуться вперед в моделировании интеллектуальных процессов" [1]. Основной трудностью, мешающей интенсивному применению теории нечетких множеств при решении практических задач, является то, что функция принадлежности должна быть задана вне самой теории и, следовательно, ее адекватность не может быть проверена непосредственно средствами теории. В каждом в настоящее время известном методе построения функции принадлежности формулируются свои требования и обоснования к выбору именно такого построения.

Фиксирование конкретных значений из интервала [0,1] , которыми оценивается степень принадлежности, имеет субъективный характер. С одной стороны, для экспертных методов существенным является характер измерений (первичный или производный) и тип шкалы [3], в которой получают информацию от эксперта и которая определяет допустимый вид операций, применяемых к экспертной информации. С другой стороны, имеется два типа свойств: те, которые можно непосредственно измерить, и те, которые являются качественными и требуют попарного сравнения объектов, обладающих рассматриваемыми свойствами, чтобы определить их относительное место по отношению к рассматриваемому понятию. Таким образом, построение функции принадлежности выполняется по экспертным оценкам. При этом можно выделить две группы методов – прямые и косвенные.

Прямые методы определяются тем, что эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности. Целесообразность прямых методов обосновывается в [1]: "По своей природе оценка является приближением. Во многих случаях достаточна весьма приближенная характеризация набора данных, поскольку в большинстве основных задач, решаемых человеком, не требуется высокая точность. Человеческий мозг использует допустимость такой неточности, кодируя информацию, достаточную для задачи (или достаточную для решения), элементами нечетких множеств, которые приближенно описывают исходные данные. Поток информации, поступающий в мозг через органы зрения, слуха, осязания и др., суживается таким образом в тонкую струйку информации, необходимой для решения поставленной задачи с минимальной степенью точности."

В косвенных методах значения функции принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворить заранее сформулированным условиям. Экспертная информация является только исходной информацией для дальнейшей обработки. Дополнительные условия могут налагаться как на вид получаемой информации, так и на процедуру обработки.

Как правило, прямые методы используются для описания понятий, которые характеризуются измеряемыми параметрами. Однако следует помнить о возможных субъективных искажениях и поэтому прямые методы должны использоваться только в том случае, когда такие ошибки незначительны или маловероятны.

Косвенные методы более трудоемкие, но они менее чувствительны относительно искажений в ответах. И, наконец, последнее замечание. Функция принадлежности может отражать мнение одного (уникального) эксперта или же мнение группы экспертов, следовательно, круг методов может быть расширен, так как возможны прямые и косвенные методы для одного эксперта, прямые и косвенные методы для группы экспертов. Подробная классификация методов построения функций принадлежности приведена в [3].

1.3.1. *Требования к функциям принадлежности*

Пусть $T=\{\tau_i\}$, $i=\overline{1,I}$ – базовое множество лингвистической переменной, α_i – соответствующая ему нечеткая переменная, S_i – носитель нечеткого множества $X_i=\{\mu_X(x)/x\}$. Договоримся о естественной упорядоченности множества T, при которой терм, имеющий носитель, расположенный левее на числовой оси, имеет меньший номер. Тогда относительно функции принадлежности можно выдвинуть следующие условия.

1. Функция принадлежности должна быть положительной, т.е.

$$(\forall x \in S_i, \quad i=\overline{1,I}, \quad \mu_{X_i}(x) \geq 0).$$

2. Если это не оговаривается дополнительно, функция принадлежности должна быть нормальной

$$Sup\,\mu_{X_i}(x)=1 \qquad (1.2)$$

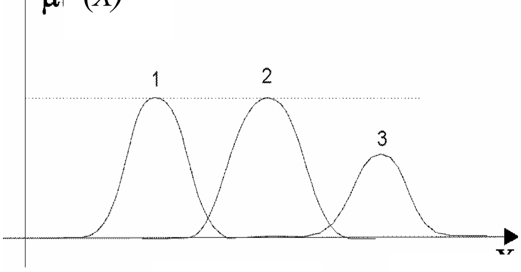


Рис. 1.8

Если условие нормальности принято, то запрещается использование функций принадлежности, не удовлетворяющих условию (1.2) (рис. 1.8). Следует отметить, что это условие относится к исходным функциям принадлежности, так как при выполнении различных операций над функциями принадлежности условие (1.2) может быть нарушено. Функция принадлежности 3 относится к запрещенным (рис. 1.8).

3. В базовом множестве термов T запрещается использование пар термов, представленных рисунками (1.9 *а*, *б*). В первом случае отсутствует естественная разграничиваемость понятий, представленных соседними термами τ_i и τ_{i+1}, во втором – участку $[c, d]$ из области определения не поставлено в соответствие какое-либо понятие.

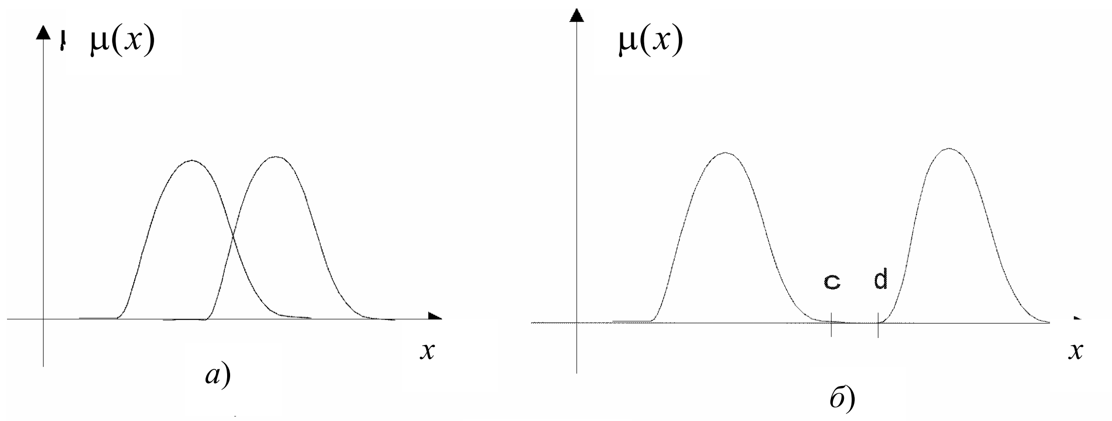


Рис. 1.9

4. Термы с минимальными и максимальными номерами не могут соответствовать колоколообразным функциям принадлежности. Для этих термов функции принадлежности имеют S-образный вид (рис. 1.10).

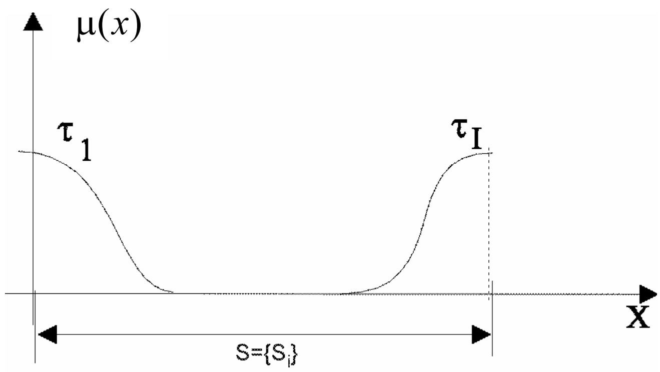


Рис. 1.10

5. Функция принадлежности может задаваться на непрерывном или дискретном носителе.

В практике нечеткого управления наиболее часто используются прямые методы построения функций управления.

Описание более сложных методов можно найти в работах [4, 5].

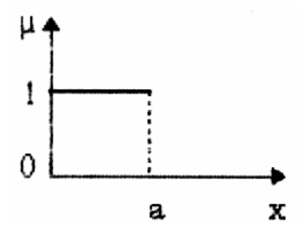
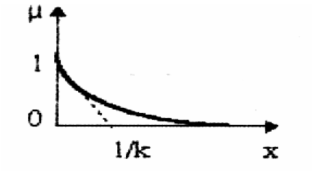
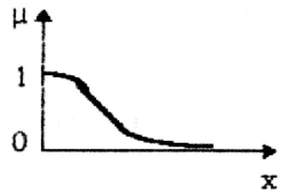
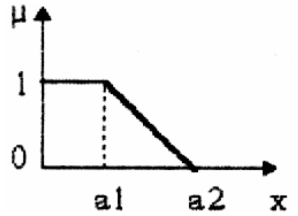
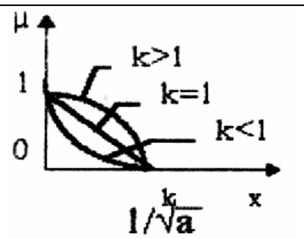
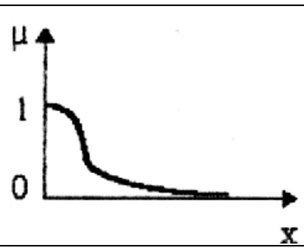
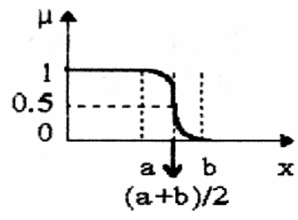
1.4. Прямые методы для одного эксперта

Прямые методы для одного (уникального) эксперта состоят в непосредственном назначении степени принадлежности для исследуемых объектов или непосредственном назначении функции (правила), позволяющей вычислить ее значения.

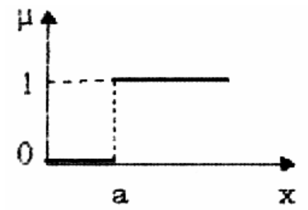
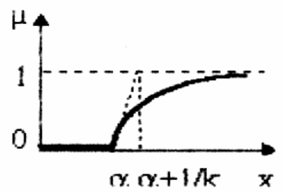
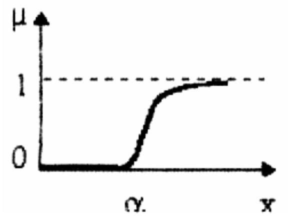
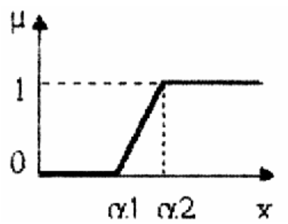
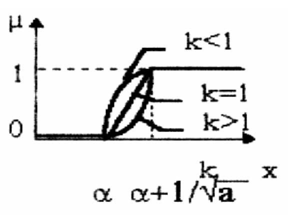
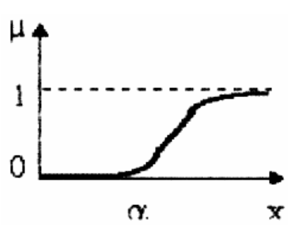
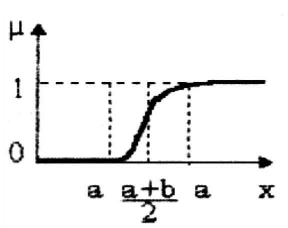
Использование типовых функций принадлежности

К настоящему времени накоплен достаточно широкий набор различных вариантов функций принадлежности для самых разнообразных нечетких утверждений [3, 4] (см. таблицу). Безусловно, выбор функции принадлежности и их параметров определяется в большой степени опытом, интуицией и другими субъективными факторами лица, принимающего решения. Именно здесь возникают новые, связанные с неоднозначностью и другого рода нечеткостью неопределенности, которые носят субъективный характер. Тем не менее, имея некоторый набор типовых функций принадлежности, можно подобрать ту, которая будет в достаточной мере отвечать представлениям лица, её выбирающего. Существенным является то, что для этих функций заранее известны их аналитические представления, что позволяет вычислить их значения в любой точке области определения. В то же время определенные трудности возникают при вычислении параметров аналитического представления функции принадлежности, соответствующих конкретным лингвистическим значениям.

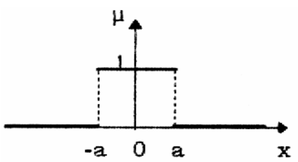
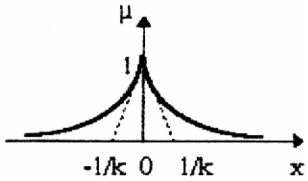
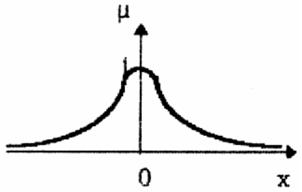
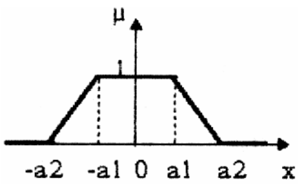
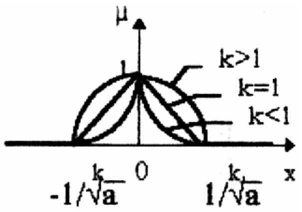
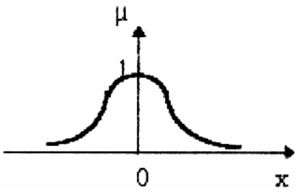
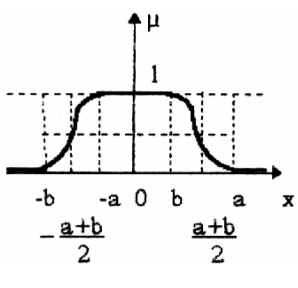
Для вычисления параметров функции принадлежности при известном аналитическом представлении в [5] предложен достаточно сложный метод расчета, отдельные моменты которого представляются слишком формализованными и даны без достаточных обоснований.

График	Формула
Функции степеней принадлежности утверждения «величина x малая»	
	$\mu(x)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le a;\\ 0,\ x>a.\end{cases}$
	$\mu(x)=e^{-\mathrm{kx}};k>0$.
	$\mu(x)=e^{-\mathrm{kx}^2};k>0$.
	$\mu(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le a1;\\ \dfrac{a2-x}{a2-a1}, a1\le x\le a2;\\ 0, a2<x.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}1-ax^k,\ 0\le x\le 1/\sqrt[k]{a};\\ 0,\ 1/\sqrt[k]{a}.\end{cases}$
	$\mu(x)=1/\left(1+kx^2\right);\ k>1$.
	$\mu(x)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le a;\\ 0.5-0.5\cdot\sin\left\{\pi\left[x\text{-}(a+b)/2\right]/(b-a)\right\},\\ \qquad a\le x\le b;\\ 0,\ b\le x.\end{cases}$

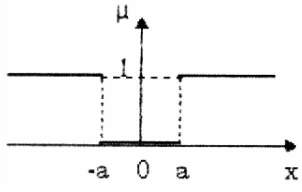
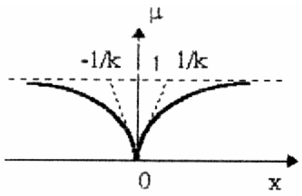
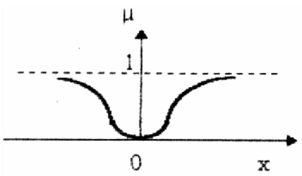
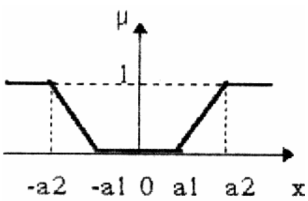
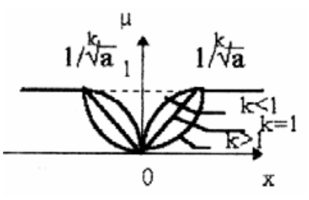
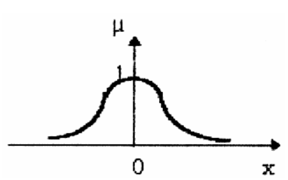
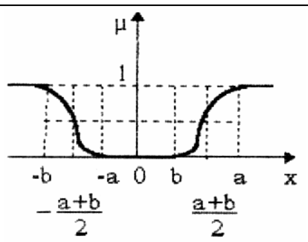
Продолжение табл. 1

График	Формула
Функции степеней принадлежности утверждения «величина *x* большая»	
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le a;\\ 1,\ x>a.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le \alpha;\\ 1-e^{-k(x-\alpha)}, \alpha\le x, k>0.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le \alpha;\\ 1-e^{-\mathrm{k}(\mathrm{x}-\alpha)^2}, \alpha\le x, k>0.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le \alpha 1;\\ (x-\alpha 1)/(\alpha 2-\alpha 1), \alpha 1\le x\le \alpha 2;\\ 1, \alpha 2<x.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le \alpha 1;\\ a(x-\alpha)^k,\ \alpha\le x\le \alpha+1\big/\sqrt[k]{a};\\ 1,\ \alpha+1\big/\sqrt[k]{a}\le x.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0, 0\le x\le \alpha;\\ \dfrac{k(x-\alpha)^2}{1+k(x-\alpha)}, \alpha\le \mathrm{x}\le\infty.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le a;\\ 0.5+0.5\cdot\sin\{\pi[x\text{-}(a+b)/2]/(b-a)\}\\ \qquad a\le x\le b;\\ 1,\ a\le x.\end{cases}$

Продолжение

График	Формула
Функции степеней принадлежности утверждения «величина $\lvert x \rvert$ малая»	
	$\mu(x)=\begin{cases}0, -\infty < x < -a;\\ 1, -a \le x \le a;\\ 0, a < x < \infty.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}e^{kx}, -\infty < x \le 0;\\ e^{-kx}, 0 \le x < \infty, k > 1.\end{cases}$
	$\mu(x)=e^{-kx^2}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0, -\infty \le x \le -a2;\\ (a2+x)/(a2-a1), -a2 \le x \le -a1;\\ 1, -a1 \le x \le a1;\\ (a2-x)/(a2-a1), a1 \le x \le a2;\\ 0, a2 \le x < \infty.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0, -\infty < x \le -1/\sqrt[k]{a};\\ 1-a(-x)^k, -1/\sqrt[k]{a} \le x \le 0;\\ 1-a(x)^k, 0 \le x \le 1/\sqrt[k]{a};\\ 0, 1/\sqrt[k]{a} \le x \le \infty\end{cases}$
	$\mu(x)=1/\left(1+kx^2\right); k>1$
	$\mu(x)=\begin{cases}0, -\infty < x \le -b;\\ 0.5+0.5\cdot\sin\left\{\pi\left[x+(a+b)/2\right]/(b-a)\right\}\\ \quad -b \le x \le -a;\\ 1, -a \le x \le a;\\ 0.5-0.5\sin\cdot\left\{\pi\left[x-(a+b)/2\right]/(b-a)\right\},\\ \quad a \le x \le b;\\ 0, b \le x < \infty.\end{cases}$

О к о н ч а н и е

График	Формула
Функции степеней принадлежности утверждения «величина $\lvert x\rvert$ большая»	
	$\mu(x)=\begin{cases}1, & -\infty \le x \le -a;\\ 0, & -a \le x \le a;\\ 1, & a \le x < \infty.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}1-e^{kx}, & -\infty < x \le 0;\\ 1-e^{-kx}, & 0 \le x < \infty, k > 1.\end{cases}$
	$\mu(x)=1-e^{-kx^2}, \; k>1$
	$\mu(x)=\begin{cases}1, -\infty < x \le -a2;\\ -(a1+x)/(a2-a1), -a2 \le x \le -a1;\\ 0, -a1 < x \le a1;\\ (x-a1)/(a2-a1), a1 \le x \le a2;\\ 1, a2 \le x < \infty.\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}1, & -\infty < x \le -1/\sqrt[k]{a};\\ a(-x)^k, & -1/\sqrt[k]{a} \le x \le 0;\\ a(x)^k, & 0 \le x \le 1/\sqrt[k]{a};\\ 1, & 1/\sqrt[k]{a} \le x < \infty.\end{cases}$
	$\mu(x)=kx^2/(1+kx^2); \; k>1.$
	$\mu(x)=\begin{cases}1, \; -\infty < x \le -b;\\ 0.5-0.5\cdot\sin\left\{\pi\left[x+(a+b)/2\right]/(b-a)\right\}\\ \qquad -b \le x \le -a;\\ 0, \; -a \le x \le a;\\ 0.5+0.5\sin\cdot\left\{\pi\left[x-(a+b)/2\right]/(b-a)\right\},\\ \qquad a \le x \le b;\\ 1, \; b \le x < \infty.\end{cases}$

Хотя этот метод и позволяет получить результат, вопрос « почему надо действовать именно так?», на наш взгляд, остается без должного ответа.

Можно предложить более простую методику, которая вытекает из рассмотрения функций принадлежности, приведенных в таблице.

Все функции могут быть разбиты на два класса:

– с конечным носителем, т.е. когда точно можно указать элемент x, при котором $\mu_X(x)=0$;

– с бесконечным носителем, для которого $\lim\limits_{|x|\to\infty}\mu_X(x)=0$.

В первом случае эксперт или лицо, принимающее решение, однозначно определяет носитель нечеткого множества, или базовое множество, соответствующее определенному лингвистическому значению.

Во втором эксперт должен ответить на вопрос типа: «Какое минимальное значение должна иметь функция принадлежности, чтобы не считать элемент x принадлежащим данному множеству?» Ответ на этот вопрос в дальнейшем определит параметры функции принадлежности.

Вторым шагом является указание координат плато функции принадлежности (c, d) (рис. 1.11).

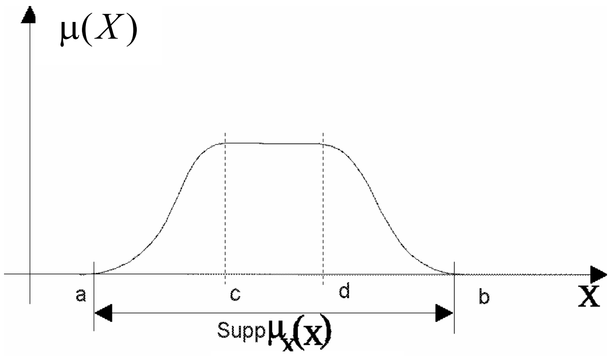


Рис.1.11

Для многих аналитических представлений (см. таблицу) этих параметров достаточно для расчета значений функций принадлежности в любой точке. Однако для экспоненциальных, параболических и гиперболических форм представления функций принадлежности этого оказывается недостаточно. Тогда эксперту можно предложить следующий вопрос: «Для какого значения x его принадлежность нечеткому множеству оценивается равной 0,5?». Пусть эксперт выбрал функцию принадлежности вида

$\mu_X(x)=e^{-kx^2}$. Тогда при $x=x_{0,5}$ $\mu_X(x)=0{,}5$ соответственно,

$$k=-\frac{\ln 0{,}5}{\left(x_{0,5}\right)^2}.$$

Если при ответе на предыдущий вопрос для функции принадлежности было указано значение ε_1, то носитель нечеткого множества будет определяться из соотношения:

$$x' = \pm\sqrt{\frac{\ln \varepsilon_1}{\ln 0,5}\left(x_{0,5}\right)^2}.$$

И, наконец, может быть использована методика, предложенная в [6], которая основана на анализе двух соседних лингвистических значений. Пусть рассматриваются два лингвистических значения $j-1, j$ и соответствующие термы (рис .1.12). Определяются носители (a_{j-1}, b_{j-1}), (a_j, b_j), плато (c_{j-1}, d_{j-1}), (c_j, d_j). Для построения нисходящей (для терма $j-1$) и восходящей (для терма j) ветвей эксперта просят указать точку, относительно которой он испытывает наибольшие трудности при соотнесении ее с термом j-1 или j. Нетрудно видеть, что в этой точке $\mu_X(x) = 0,5$ для обоих термов. Дальнейшие расчеты трудностей не представляют.

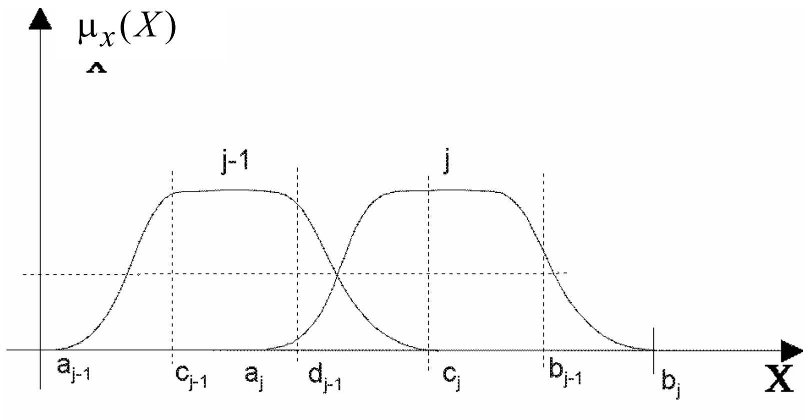


Рис. 1.12

Достаточно часто встречается задача построения функций принадлежности, соответствующей некоторому произвольному значению. Для этой цели удобно использовать представление функций принадлежности в виде стандартных S-образных функций. Не обсуждая варианты аналитического представления этих функций, покажем чисто качественно возможность их использования. S-образную функцию можно определить тремя точками (l, m, r) (рис. 1.13).

При $x = 1$ $S(x) = 0$,

при $x = m$ $S(x) = 0,5$,

при $x = r$ $S(x) = 1$.

Таким образом, $S(x) = S(x, l, m, n)$.

Функция вида $1 - S(x)$ представлена на рис. 1.14. Нетрудно видеть, что, комбинируя эти две функции, можно построить функции принадлежности, удовлетворяющие ранее сформулированным условиям.

Пусть определены функции $S(x_1)$ и $S(x_2)$, соответствующие исходному базовому множеству термов $T=\{\tau_i\}, i=\overline{1,I}$. Если произвольное значение $x' \in [x_1, x_2]$, то можно предположить, что $m' \in [m_1, m_2]$. Положим, что справедливо равенство

$$(m'-m_1)/(m'-m_2)=(x'-x_1)/(x'-x_2)$$

и, обозначая через $\lambda=(x'-x_1)/(x'-x_2), \quad \lambda \in [0,1]$, получим $m'=\lambda m_1+(1-\lambda)m_2$.

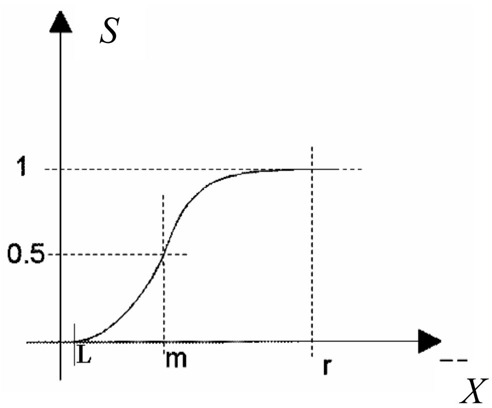


Рис. 1.13

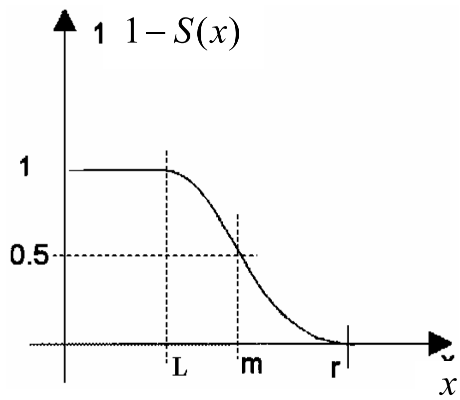


Рис. 1.14

Последнее соотношение позволяет при непрерывном носителе рассчитывать значения функции принадлежности для произвольного значения лингвистической переменной, не включенного в исходное базовое множество.

Рассмотренные выше примеры, естественно, не исчерпывают всего множества прямых методов построения функций принадлежности для одного эксперта. Целый ряд других методов этого класса рассмотрен в [4] , там же рассматриваются и прямые методы для нескольких экспертов. Описание косвенных методов построения функций принадлежности можно найти в работах [5, 22]. Здесь необходимо отметить, что эти методы дают только числовые значения функций принадлежности и не дают их аналитического представления, что не всегда удобно.

1.5. Операции над нечеткими множествами

Операции над нечеткими множествами такие, например, как объединение и пересечение, можно определить различными способами. Выбор конкретного из них зависит от специфики решаемой задачи, т.е. от конкретного смысла, вкладываемого в эти операции.

Объединением нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ из U называют нечеткое множество вида

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \int_U \left(\mu_{\overline{A}}(x) \vee \mu_{\overline{B}}(x) \right) \Big/ x, \qquad (1.3)$$

где $\left(\mu_{\overline{A}}(x) \vee \mu_{\overline{B}}(x) \right) = \max\left\{ \mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x) \right\}, \quad x \in U$.

Знак интеграла здесь и для всех последующих операций обозначает их выполнение над всеми элементами множеств $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Графическая интерпретация операции объединения приведена на рис. 1.15.

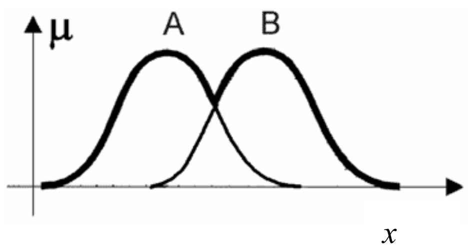


Рис.

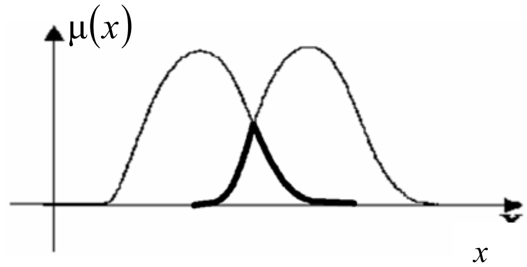


Рис.

Пересечением нечетких множеств $\overline{A}$ и $\overline{B}$ из U называют нечеткое множество вида (рис. 1.16)

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \int_U \left(\mu_{\overline{A}}(x) \wedge \mu_{\overline{B}}(x) \right) \Big/ x,$$

где $\left(\mu_{\overline{A}}(x) \wedge \mu_{\overline{B}}(x) \right) = \min\left\{ \mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x) \right\}, \quad x \in U \qquad (1.4)$

Дополнением или отрицанием нечеткого множества $\overline{A}$ называют нечеткое множество вида (рис. 1.17).

$$\overline{A} = \int_U \left(1 - \mu_{\overline{A}}(x) \right) \Big/ x, \quad x \in U. \qquad (1.5)$$

Концентрирование нечеткого множества $\overline{A} \in U$ определяют в виде (рис. 1.18)

$$CON\left(\overline{A}\right) = \int_U \left(\mu_{\overline{A}}(x) \right)^2 \Big/ x, \quad x \in U. \qquad (1.6)$$

Операцию размытия нечеткого множества $A \in U$ определяют как (рис. 1.19)

$$DIL(A) = \int_U (\mu_A(x))^{0,5} / x, \quad x \in U. \qquad (1.7)$$

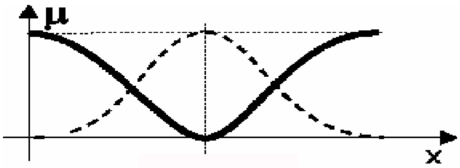


Рис. 1.17

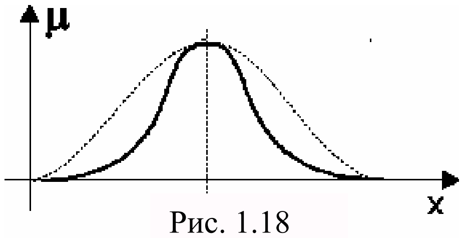


Рис. 1.18

Множество уровня α нечеткого множества (α-срезом) A называют нечеткое множество, составленное из элементов $x \in U$, степень принадлежности которых нечеткому множеству A не меньше α (рис. 1.20)

$$\forall \alpha \in [0,1],\ A_\alpha = \{x / x \in U, \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

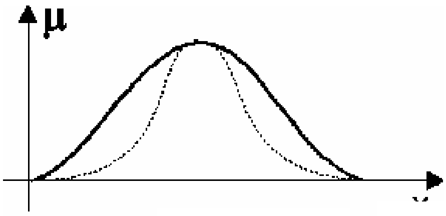


Рис. 1.19 x

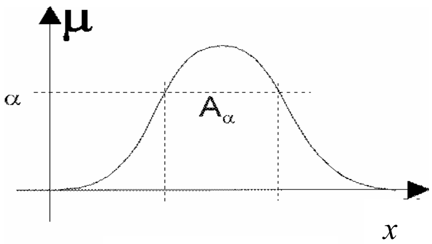


Рис. 1.20

Строгое множество уровня определяется как

$$\forall \alpha \in [0,1],\ A_\alpha^- = \{x / x \in U, \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Тогда функцию принадлежности можно определить для произвольного нечеткого множества А с помощью его α-сечения в виде

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min(\alpha, \mu_{A\alpha}(x)),$$

где $\mu_{A\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A_\alpha \\ 0, & \text{если } x \notin A_\alpha \end{cases}.$

Нечеткое множество уровня α нечеткого множества A определяется следующим образом:

$$\widetilde{A}_\alpha = (x, \mu_x(x), x \in A_\alpha).$$

Преимуществом такого определения является то, что в прикладных задачах целесообразно использовать не сами нечеткие множества, а их множества уровня, что позволяет экономить время вычислений и память ЭВМ.

Пусть A и B – произвольные нечеткие множества из U. Говорят, что A включает в себя B $(B \subseteq A)$, если

$$\forall x \in U, \quad \mu_B(x) \le \mu_A(x).$$

Когда последнее неравенство строгое, тогда говорят, что включение строгое. Очевидно, что $A = B$, если $(A \subseteq B)$, $(B \subseteq A)$.

Если функции принадлежности двух нечетких множеств A и B из U равны, то A и B – равные нечеткие множества, т.е., если

$$\mu_B(x) = \mu_A(x), \quad \forall x \in U \text{ , то } A=B.$$

Нетрудно убедиться, что введенные операции над нечеткими множествами являются более общими, чем аналогичные операции над обычными множествами.

Известно определение функции принадлежности объединения нечетких множеств через их алгебраическую сумму

$$\mu_{A\cup B}(X) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \mu_A(x) + \mu_B(x) \ge 1 \\ \mu_A(x) + \mu_B(x) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а функции принадлежности пересечения нечетких множеств через алгебраическое произведение

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x), \quad \forall x \in U .$$

Нечеткие подмножества некоторого универсального множества относительно операций объединения, пересечения и дополнения, определенных соотношениями (1.3) – (1.6), удовлетворяют следующим свойствам:

1. Идемпотентность: $\mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A} \cap \mathrm{A} \ne 0$ при $\mathrm{A} \ne 0$. Отметим, что нечеткое подмножество универсального множества U называется пустым при условии $\mu_0(\mathrm{x}) = 0$ для $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{U}$;

2. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$;

Данные свойства с очевидностью вытекают из приведенных выше определений операций над нечеткими множествами.

3. Ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

4. Дистрибутивность:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

5. Поглощаемость: $A\cup(B\cap A)=A$. Это свойство можно записать в другой форме, а именно

$$\max\left(\mu_A,\min\left(\mu_A,\mu_B\right)\right)=\mu_A;$$

6. Единственность обратного: $\left(\overline{\overline{A}}\right)=A$;

7. Правила Моргана:

$$\left(\overline{A\cup B}\right)=\overline{A}\cap\overline{B},$$
$$\left(\overline{A\cap B}\right)=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

Перейдем к рассмотрению следующих операций над нечеткими множествами.

Пусть A_1 и A_2 – нечеткие подмножества универсальных множеств U_1 и U_2 соответственно. Тогда декартово произведение нечетких подмножеств A_1 и A_2 обозначается $A_1\times A_2$ и определяется как нечеткое подмножество множества U. Последнее определяется декартовым произведением

$$U=U_1\times U_2.$$

При этом функция степеней принадлежности декартова произведения $A_1\times A_2$ определяется выражением

$$\mu_{A_1\times A_2}\left(x_1,x_2\right)=\min\left\{\mu_{A_1}\left(x_1\right)\ \mu_{A_2}\left(x_2\right)\right\},\qquad x_1\in U_1,\quad x_2\in U_2.$$

Например, пусть имеем универсальные множества U_1=U_2=(3, 5, 7) и нечеткие подмножества

A_1= (0,5/3, 1/5, 0,6/7) и A_2 = (1/3, 0,6/5).

В этом случае декартово произведение нечетких подмножеств A_1 и A_2 будет равно $A_1\times A_2$ ={0,5/(3,3), 1/(5,3), 0,6/(7,3), 0,5/(3,5), 0,6/(5,5), 0,6/(7,5)}.

Декартово произведение нечетких множеств тесно связано с понятием нечеткого отношения, которое будет рассмотрено ниже.

В ряде приложений теории нечетких множеств требуется проводить их сравнение. Формализацией сравнения нечетких подмножеств A и B универсального множества U с конечным числом элементов может быть вычисление расстояния Хэмминга, которое определяется выражением

$$d\left(A,B\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_A\left(x_i\right)-\mu_B\left(x_i\right)\right|.$$

Знак « $\sum$ » обозначает арифметическое сложение.

Отметим, что

$$\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right| = \max\left\{\mu_A(x_i),\mu_B(x_i)\right\} - \min\left\{\mu_A(x_i),\mu_B(x_i)\right\},$$

$0 \le d(A,B) \le n.$

Например, A = (0/0, 0,1/1, 0,2/2, 0,5/3, 0,8/4, 1/5),

B = (1/0, 1/1, 0,8/2, 0,6/3, 0,4/4, 0,2/5).

Найдем расстояние Хэмминга

$d(A, B)$ =/1-0/+/1-0,1/+/0,8-0,2/+/0,6-0,5/+/0,8-0,4/+/10,2/=

=1+0,9+0,6+0,1+0,4+0,8=3,8.

Кроме линейных форм расстояние между нечеткими подмножествами рассматривают как квадратичные формы, а именно:

$$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right]^2}, \quad \text{для которых } 0 \le e(A,B) \le \sqrt{n}.$$

1.6. Формализованное представление отношений

Параметры различных систем могут быть связаны между собой различного рода отношениями. Выделение отношений производят по заранее выбранному признаку. Если нас интересует влияние параметра системы на ее производительность или качество выпускаемой продукции, то данная связь может быть описана различного вида отношениями: “влияет”, “ не влияет”, “сильно влияет”, “ слабо влияет” и т.д. Наиболее распространенной формой задания отношений является словесное описание. Общепринятая формализация отношений осуществляется в соответствии со следующим определением.

Отношением R на множестве *U* называется подмножество *R* множества, определяемого декартовым произведением $U \times U$.

Существует несколько форм задания отношений. Задание отношения *R* на множестве *U* может быть выполнено перечислением всех пар $(u_i, u_j) \in U \quad (i, j = \overline{1,n})$, для которых выполняется отношение *R*. Кроме того, отношения задаются в виде матриц и графов. Простейшими отношениями являются такие, для которых можно четко указать, выполняются они или нет для параметров X_1 и X_2.

В тех случаях, когда связи между параметрами системы выражены нечетко, целесообразно формализовать отношения в соответствии со следующим определением.

Пусть U_1 и U_2 – универсальные множества. Если U является декартовым произведением $U = U_1 \times U_2$, то нечеткое отношение R определяется как нечеткое подмножество универсального множества U

$$\mu_R : u_1 \times u_2 \to [0,1].$$

Значение $\mu_R(u_i, u_j)$ для конкретной пары $(u_i, u_j) \in u_1 \times u_2$ характеризует субъективную степень выполнения отношения $u_i \tilde{R} u_j$.

Если множество U конечно и невелико, нечеткое отношение R удобно задавать в матричном виде. В этом случае матрица $M(\tilde{R})$ отношения $\tilde{R}$ представляет собой квадратную матрицу, строки и столбцы которой помечены элементами $u \in U$, и на пересечении строки u_i и столбца u_j записано значение $r_{i\,j} = \mu_R(u_i, u_j)$.

П р и м е р. Пусть $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Определим на множестве U нечеткое отношение $\tilde{R}$ “намного больше”. Матрица такого отношения может иметь следующий вид:

	1	3	5	7	9
1	0	0	0	0	0
3	0,2	0	0	0	0
5	0,1	0	0	0	0
7	0,8	0,4	0	0	0
9	1	0,8	0,5	0	0

Наглядностью обладает задание нечеткого отношения в виде нечеткого графа $\tilde{G} = (\tilde{U}, \tilde{V})$, где $\tilde{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ – множество вершин; $\tilde{V} = \{\rangle \mu_R(u_i, u_j)/(u_i, u_j)\langle, \mu_R(u_i, u_j > 0\}$ $(u_i, u_j) \in U$ (рис. 1.16) – множество нечетких дуг. Очевидно, что, как и в случае нечетких множеств, обычное четкое отношение можно рассматривать как частный случай нечеткого отношения, функция принадлежности которого принимает два значения 0 и 1.

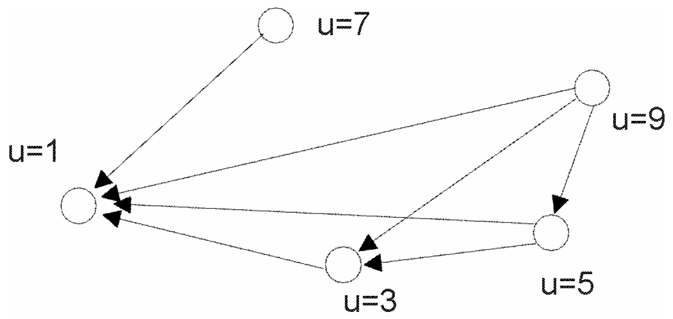


Рис. 1.21

Дадим некоторые определения, характеризующие нечеткие отношения. Носителем нечеткого отношения R на множестве U называют подмножество декартова произведения $U{\times}U$ вида

$$Supp\ \tilde{R} = \left\{ (u_1, u_2)/(u_i, u_j) \in U \times U, \quad \mu_R(u_i, u_j > 0 \right\}.$$

Носитель нечеткого отношения следует понимать как отношение на множестве U, связывающее все пары $\left(u_i, u_j\right)$, для которых степень выполнения данного нечеткого отношения не равна нулю.

Для нашего примера

$$(u_1,u_3),(u_1,u_5),(u_1,u_7),(u_1,u_9),(u_3,u_5),(u_3,u_7),(u_3,u_9),(u_5,u_9).$$

По аналогии с нечеткими множествами определяется и множество α-уровня нечеткого отношения ,т.е.

$$R_\alpha = \left\{ (u_i, u_j)/(u_i, u_j) \in U \times U, \quad \mu_R\left(u_i, u_j\right) \ge \alpha \right\}.$$

Перейдем к рассмотрению операций над нечеткими отношениями, некоторые из которых являются аналогами операций над нечеткими множествами, а некоторые присущи только нечетким отношениям.

Пересечением нечетких отношений P и Q на $U{\times}U$ называют нечеткое отношение $P \cap Q$, определяемое функцией принадлежности:

$$\mu_{P\cap Q}\left(u_i, u_j\right) = \mu_P\left(u_i, u_j\right) \wedge \mu_Q\left(u_i, u_j\right) = \min_{u_i, u_j \in U} \left\{ \mu_P\left(u_i, u_j\right), \mu_Q\left(u_i, u_j\right) \right\}.$$

Объединением нечетких отношений P и Q на $X{\times}X$ называют нечеткое бинарное отношение $P \cup Q$, определяемое функцией принадлежности:

$$\mu_{P\cup Q}\left(x_i, x_j\right) = \mu_P\left(x_i, x_j\right) \vee \mu_Q\left(x_i, x_j\right) = \max \left\{ \mu_P\left(x_i, x_j\right), \mu_Q\left(x_i, x_j\right) \right\}.$$

Дополнением нечеткого отношения $R \subseteq X \times X$ называют отношение $\overline{R}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\overline{R}}\left(x_i, x_j\right) = 1 - \mu_R\left(x_i, x_j\right),$$
$$\forall x_i, x_j \in X \times X.$$

Обратным отношением к отношению R называют отношение R^{-1} с функцией принадлежности

$$\mu_{R^{-1}}\left(x_i, x_j\right) = \mu_R\left(x_i, x_j\right),$$
$$\forall x_i, x_j \in X \times X.$$

Очевидно, что матрица $M^{-1}(R)$ является транспонированной $M(R)$.

Говорят, что отношение R_1 включено в отношение R, если множество пар, для которых выполняется отношение R_1 находится в множестве пар, для которых выполняется отношение R. Так, например, отношение между параметрами Z_1 и Z_2, характеризуемое термином “много меньше”, включено в отношение, характеризуемое понятием “меньше”. Отметим, что обратное утверждение может не выполняться. Тот факт, что отношение R_1 включено в отношение R, обозначают следующим образом: $R_1 \subseteq R$.

На этапе формализации качественной информации важную роль играют отношения эквивалентности, порядка и доминирования. С помощью отношения эквивалентности могут выделяться классы свойств исследуемых объектов или систем, которые являются в некотором смысле равноценными. Это отношение оказывается полезным для выявления в множестве первичных терминов подмножества терминов-синонимов.

Отношение эквивалентности обладает свойствами рефлективности, симметричности и транзитивности. Рефлективность отношения R обозначает выполнение условия $U \subseteq R$, U – диагональное отношение. Данное отношение используется для формализации понятий типа “похоже на”, “подобен” и т.п. На главной диагонали матрицы рефлексивного отношения стоят единицы. В понятиях типа “похоже на”, “подобен” выделяют свойства симметричности.

Отношение R симметрично, если выполняется $R \subseteq R^{-1}$, т.е. если выполняется связь $z_1 R z_2$, то должно выполняться $z_2 R z_1$.

Транзитивность подразумевает то, что если параметры z_1 и z_2 связаны отношением R, а также этим же отношением связаны z_2 и z_3, то параметры z_1 и z_3 связаны этим же отношением. Формально данное свойство записывается следующим образом: если $z_1 R z_2$ и $z_2 R z_3$, то $z_1 R z_3$.

Наряду с рассмотренными свойствами отношений выполняются свойства антирефлексивности и асимметричности. Первое выполняется, если пересечение $R \bigcap U = 0$, а второе – при $R \bigcap R^{-1} = 0$. По своему смысловому содержанию свойства антирефлексивности и асимметричности противоположны рефлективности и симметричности соответственно.

Отношение доминирования характеризуется свойствами антирефлексивности и асимметричности. Это отношение используется для формализации связей между z_1 и z_2 в случаях, когда z_1 превосходит или предпочтительнее в некотором смысле z_2.

Частным случаем отношения доминирования является отношение порядка, для которого дополнительно выполняется свойство транзитивности. Примером отношения порядка является понятие “ больше”.

В теории нечетких множеств имеется ряд операций над нечеткими отношениями, которые не имеют аналогов для нечетких множеств, рассмотренных в предыдущем разделе.

Максиминное произведение нечетких отношений R_1 и R_2, которые определены на множестве *U*, обозначается $R_1 \circ R_2$ и задается функцией принадлежности $\mu_{R_1 \circ R_2}(u_1, u_2)$,вычисляемой следующим образом:

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u_1, u_2) = \mathrm{Sup}\left\{\min\left(\mu_{R_1}(u_1, z),\, \mu_{R_1}(z, u_2)\right)\right\},$$

где μ_{R1}, μ_{R2} – функции принадлежности нечетких отношений R_1 и R_2 соответственно.

Например, пусть заданы два универсальных множества $U_1 = U_2 = (1, 2, 3)$. На множестве $U_1 \times U_2$ определены нечеткие отношения

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.4 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}; \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как нечеткие отношения заданы в матричном виде, то максиминное произведение в данном случае представляет собой операцию, аналогичную умножению матриц, но вместо арифметических операций умножения и сложения используют операции нахождения минимального (/\—

пересечение) и максимального ($\vee$ — объединение) элементов соответственно. Поэтому максиминное произведение имеет вид

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Минимаксное произведение нечетких отношений R_1 и R_2 на множестве U определяется функцией принадлежности, вычисляемой по соотношению

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u_1, u_2) = \inf\left\{\max\left(\mu_{R_1}(u_1, z),\ \mu_{R_1}(z, u_2)\right)\right\}.$$

Если нечеткие отношения R_1 и R_2 заданы в виде матриц, то минимаксное произведение представляет собой операцию, аналогичную операции умножения матриц, но вместо арифметических операций умножения и сложения используются операции $\wedge$ и $\vee$.

Например, для предыдущего примера минимаксное произведение в матричном виде равно

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Максимультипликативное произведение нечетких отношений R_1 и R_2 заданных на множестве U, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u_1, u_2) = \sup\left\{\left(\mu_{R_1}(u_1, z) \times \mu_{R_1}(z, u_2)\right)\right\}.$$

Для исходных данных примера максимультипликативное произведение нечетких отношений равно

$$\begin{bmatrix} 0,28 & 0,3 & 0,7 \\ 0,56 & 0,24 & 0,56 \\ 0,7 & 0,3 & 0,28 \end{bmatrix}.$$

Выбор той или иной композиции при решении практических задач определяется требованиями, которым должно удовлетворять решение задачи. Поэтому в каждом конкретном случае данный вопрос требует особого рассмотрения.

1.1. Нечеткая логика

В сочетании слов “ нечеткая “ и “ логика” есть что-то необычное. Логика в обычном смысле слова есть представление механизмов мышления, то, что никогда не может быть нечетким, но всегда строгим и формальным. Однако математики, исследовавшие эти механизмы мышления, заметили, что в действительности существует не одна логика (например булева), а столько логик, сколько мы пожелаем, потому что все определяется выбором соответствующей системы аксиом. Конечно, как только аксиомы выбраны, все утверждения, построенные на их основе, должны быть строго, без противоречий увязаны друг с другом согласно правилам, установленным в этой системе аксиом.

Булева логика – это логика, связанная с булевой теорией множеств, аналогично нечеткая логика связана с теорией нечетких множеств.

В бинарной булевой алгебре определены следующие основные логические операции:

$$a \wedge b - \text{операция “ И”} \quad a = [0,1],\ b = [0,1] \ , \tag{1.7}$$

$$a \vee b - \text{операция “ИЛИ”} \ , \tag{1.8}$$

$$\overline{a} - \text{операция “ НЕ”} \ , \tag{1.9}$$

$$a \oplus b = \overline{a}b \vee a\overline{b} - \text{исключающее “ИЛИ”} \ . \tag{1.10}$$

Соотношения (1.8) – (1.10) будут справедливы и для нечетких переменных. Путь $x \in U$, A и B – нечеткие подмножества U .

Обозначим $\tilde{a} = \mu_a(x), \tilde{b} = \mu_b(x)$.

Тогда, $\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \min(\tilde{a}, \tilde{b})$ – нечеткий аналог операции “ И”;

$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \max(\tilde{a}, \tilde{b})$ – нечеткий аналог операции “ ИЛИ”;

$\overline{\tilde{a}} = 1 - \tilde{a}$ – нечеткий аналог операции “ НЕ “;

$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b}) \vee (\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}})$ – нечеткий аналог операции ”исключающее ИЛИ”.

Можно доказать, что эти операции удовлетворяют следующим свойствам:

$$\left.\begin{aligned}\tilde a \wedge \tilde b = \tilde b \wedge \tilde a\\ \tilde a \vee \tilde b = \tilde b \vee \tilde a\end{aligned}\right\}\ \text{– коммутативность;}$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\tilde a \wedge \tilde b\right) \wedge \tilde c = \tilde a \wedge \left(\tilde b \wedge \tilde c\right)\\ \left(\tilde a \vee \tilde b\right) \vee \tilde c = \tilde a \vee \left(\tilde b \vee \tilde c\right)\end{aligned}\right\}\ \text{– ассоциативность;}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde a \wedge \tilde a = \tilde a\\ \tilde a \vee \tilde a = \tilde a\end{aligned}\right\}\ \text{– идемпотентность;}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde a \wedge \left(\tilde b \vee \tilde c\right) = \left(\tilde a \wedge \tilde b\right) \vee \left(\tilde a \wedge \tilde c\right)\\ \tilde a \vee \left(\tilde b \wedge \tilde c\right) = \left(\tilde a \vee \tilde b\right) \wedge \left(\tilde a \vee \tilde c\right)\end{aligned}\right\}\ \text{– дистрибутивность;} \qquad (1.11), (1.12)$$

$\tilde a \wedge 0 = 0;$

$\tilde a \vee 0 = \tilde a;$

$\tilde a \wedge 1 = \tilde a;$

$\tilde a \vee 1 = 1;$

$$\overline{\overline{\tilde a}} = \tilde a; \qquad (1.13)$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\tilde a \wedge \tilde b} = \overline{\tilde a} \vee \overline{\tilde b}\\ \overline{\tilde a \vee \tilde b} = \overline{\tilde a} \wedge \overline{\tilde b}\end{aligned}\right.$$ – обобщение теорем де Моргана на случай нечетких множеств. (1.14)

Доказательства всех этих формул тривиальны, за исключением, может быть, формул (1.11) – (1.14).

На рис. 1.17, 1.18 приведены графические построения, доказывающие соотношения (1.11) и (1.12), соответствующие результаты представлены заштрихованными областями.

За исключением двух свойств

$$a \wedge \overline{a} = 0,$$

$$a \vee \overline{a} = 1,$$

для которых, кроме случая $\tilde a = 0$ или $\tilde a = 1$, соответствующие соотношения для нечетких множеств не выполняются

$$\tilde a \wedge \overline{\tilde a} \neq 0,$$

$$\tilde a \vee \overline{\tilde a} \neq 1.$$

Перечисленные выше соотношения составляют все свойства биполярной булевой алгебры. Читателю, желающему более подробно изучить этот вопрос, рекомендуем обратиться к работе [3].

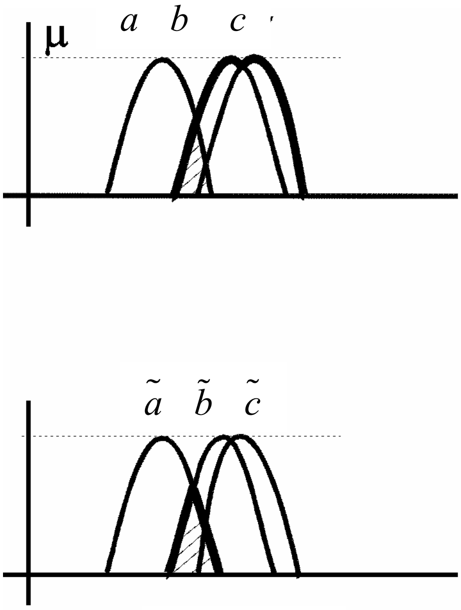


Рис. 1.17

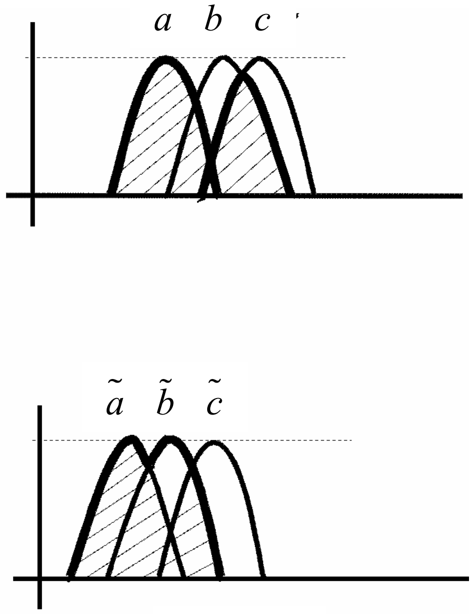


Рис. 1.18

Основные понятия

1. Нечеткое множество.
2. Функция принадлежности.
3. Нечеткая и лингвистическая переменные.
4. Операции над нечеткими множествами.
5. Нечеткие отношения.
6. Нечеткие графы.
7. Нечеткая логика.

Контрольные вопросы

1. Что характеризует функция принадлежности?
2. В чем состоит отличие характеристической функции от функции принадлежности?
3. Дайте определение нечеткой и лингвистической переменным?
4. Какие варианты определения операций пересечения и объединения существуют?
5. Чем различаются операции концентрации и размытия?
6. Как определяются нечеткие отношения?
7. Какие операции классической алгебры логики не выполняются в нечеткой логике?

2. МАТЕМАТИКА НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

2.1. Нечеткие числа

Нечеткие числа широко используются в повседневной жизни. Когда мы говорим: “приблизительно три”, “приблизительно двадцать пять” и т.п., то тем самым предполагаем использование нечеткого числа.

Формально определение нечеткого числа строится аналогично определению нечеткой переменной. Действительно, если считать, что универсальное множество – это множество действительных чисел, то нечеткое подмножество $X \in U$, определяемое функцией принадлежности $\mu_X(x) \in [0,1]$, можно рассматривать как нечеткое число.

Нечеткое число $\tilde{X}$ на действительной прямой выпукло, если для каких-либо чисел x_i, x_j, x_k, $x_i \le x_j \le x_k$

$$\mu_{\tilde{x}}(x_j) \ge \min(\mu_{\tilde{x}}(x_i), \mu_{\tilde{x}}(x_k)).$$

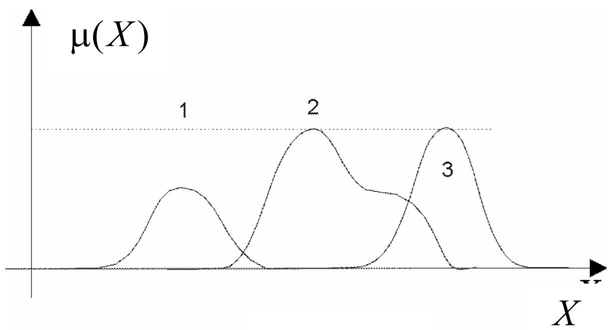


Рис. 2.1

Нечеткое число $\tilde{X}$ на действительной прямой называется нормальным, если $\max \mu_{\tilde{x}}(x) = 1$. На рис. 2.1 приведены $\tilde{X}_1$ – нечеткое выпуклое число, $\tilde{X}_2$ – нечеткое нормальное число, $\tilde{X}_3$ – нечеткое нормальное выпуклое число.

Вводя понятие нечеткого числа (нечетких чисел), мы, естественно, должны определить некоторые, хотя бы простейшие, математические операции над этими числами. Сразу же следует указать, что это далеко не тривиальная задача, которая, к тому же, в некоторых аспектах еще не решена.

Математические операции, вводимые для нечетких чисел, впрочем, как и для четких, должны решать по крайней мере две задачи:

– первая – это находить результат применения некоторой комбинации математических операций к заранее известной совокупности чисел, т.е. находить значение соотношения

$$y = \varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_3\right),$$

где φ – некоторый функционал;

– вторая – это находить значение некоторой переменной по известным значениям других, т.е. решения различного рода уравнений, например для простейшего случая

$$A = X + B \text{ или } A = X / B,$$

где A, B – известные значения, X – неизвестная переменная. При этом очевидно, что должно выполняться условие, если $X = A - B$ или $X = AB$, то

$$A = (A - B) + B = A,\ A = (AB) / B = A. \qquad (2.1)$$

Для четких чисел выполнение условий (2.1) и соответственно решение указанных уравнений каких-либо проблем не составляет. Кроме того, две перечисленные задачи в этом случае как бы объединяются. В какой-то мере это можно объяснить тем, что для четких чисел определены противоположное число $\overline{A}$, такое что $A + \overline{A} = 0$ или $\overline{A} = 0 - A$ и обратное число A^*

$$A \cdot A^* = 1, \qquad A^* = \frac{1}{A},$$

т. е. эти числа могут быть вычислены с помощью стандартных операций вычитания и деления.

Для нечетких чисел все обстоит значительно сложнее. Сразу же укажем, что согласно исследованиям, проведенным в [80], нечеткое число не имеет противоположного и обратного чисел, а арифметические операции умножения и сложения для нечетких чисел коммутативны:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \tilde{B} \times \tilde{A}, \qquad \tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A},$$

ассоциативны:

$$\tilde{A} \times (\tilde{B} \times \tilde{C}) = \left(\tilde{A} \times \tilde{B}\right) \times \tilde{C},$$

$$\tilde{A} + \left(\tilde{B} + \tilde{C}\right) = \left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) + \tilde{C},$$

в общем виде недистрибутивны: $\tilde{A} \times \left(\tilde{B} + \tilde{C}\right) \neq \tilde{A} \times \tilde{B} + \tilde{A} \times \tilde{C}$.

В связи с этим первая и вторая задачи для нечетких чисел приобретают определенную несвязанность. Проблема заключается в том, что методы, относящиеся к первой задаче, не дают точного решения второй, в то же время методы, используемые при решении второй задачи, могут применяться в первой с весьма существенными ограничениями.

Для решения первой задачи нам нужно определить алгоритмы выполнения арифметических операций над нечеткими числами, для решения второй – алгоритмы решения нечетких уравнений.

2.2. Алгоритмы выполнения арифметических операций над нечеткими числами

Конечной целью любого алгоритма для выполнения арифметических операций над нечеткими числами является вычисление функции принадлежности для любой точки носителя результата выполнения заданной арифметической операции над исходными нечеткими числами. Если $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ нечеткие числа с областью определения в виде интервала действительной оси и их носители соответственно определены как $S_A=(a_2,a_1)$, $S_b=(b_2,b_1)$, $a_2>a_1, b_2>b_1$ и $g(a,b)$ – некоторая функция, определяющая одну из четырех арифметических операций "+", "–", ":", "×" , то в общем виде справедливо соотношение

$$\mu_D(x)=\sup\min\{\mu_A(a),\mu_B(b)\}, \tag{2.2}$$
$$g(a,b)=x,$$
$$a\in S_A, b\in S_b,$$

которое отражает принцип обобщения, впервые сформулированный Л. Заде. Если функция g является функцией большего числа аргументов, то принцип обобщения записывается аналогично.

Соотношение (2.2) в той или иной мере является основой различных арифметических алгоритмов для нечетких чисел. Значительное их количество может быть объяснено различной точностью вычисления функции принадлежности и вычислительными затратами. Ниже будут рассмотрены несколько наиболее простых, но в то же время имеющих наибольшее практическое применение алгоритмов. Желающим познакомиться с более сложными можно рекомендовать работы [4, 5] и другие.

2.2.1. *Арифметические операции над нечеткими числами при L-R аппроксимации*

Одним из вариантов представления нечетких чисел является так называемая L-R-аппроксимация, при которой нечеткое число $\tilde{X}$ определяется его левой x_L и правой x_R границами, а также центральным значением x^*. Наиболее просто L-R аппроксимация выполняется для нечетких чисел, функции принадлежности которых за пределами носителя тождественно равны нулю, например треугольные, трапецеидальные.

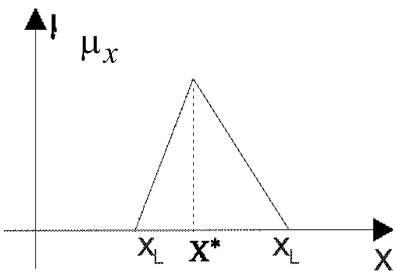


Рис. 2.2

Для треугольной функции принадлежности нечеткое число $x \approx x^*$ представляется следующим соотношением

$$\tilde{x}^* = \int\limits_{x_L}^{x^*} \left(x - x_L\right)/x + \int\limits_{x^*}^{x_R} \left(x_R - x\right)/x \ ,$$

где знак $\int$ означает объединение по всем $x \in \left[x_L, x^*\right]$ и $x \in \left[x^*, x_R\right]$ соответственно.

Пусть имеются два нечетких числа

$$\tilde{x}_1^* = \int\limits_{x_{L1}}^{x_1^*} \left(x - x_{L1}\right)/x + \int\limits_{x_1^*}^{x_{R1}} \left(x_{R1} - x\right)/x \ \text{ и } \ \tilde{x}_2^* = \int\limits_{x_{L2}}^{x_2^*} \left(x - x_{L2}\right)/x + \int\limits_{x_2^*}^{x_{R2}} \left(x_{R2} - x\right)/x.$$

Суммой чисел $\tilde{x}_1^*$ и $\tilde{x}_2^*$ назовем число $\tilde{x}_3^*$ такое, что

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \mu_{x_3}\left(x\right)/x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \mu_{x_3}\left(x\right)/x,$$

где $x_{L3} = x_{L1} + x_{L2}$;

$x_{R3} = x_{R1} + x_{R2}$;

$x_3^* = x_1^* + x_2^*$.

Для треугольных функций принадлежности слагаемых функция принадлежности суммы также будет треугольной и представится уравнением $\mu\left(x\right) = a_0 + kx$. Для определения значений a_0 и k необходимо для $x_{L3} \le x \le x_3^*$ решить систему уравнений

$$a_0 + kx = 1 \quad \text{при} \quad x = x_3^* = x_1^* + x_2^*,$$

$$a_0 + kx = 0 \ \text{ при } \quad x = x_{L3} = x_{L1} + x_{L2},$$

откуда $a_0 = -\dfrac{x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}}$, $\quad k = \dfrac{1}{x_3^* - x_{L3}}$ и соответственно $\mu_{x_3}(x) = \dfrac{x - x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}}$.

Для $x^*{}_3 \le x \le x_{R3}^*$ $\quad a_0 + kx = 1$ при $x = x_3^*$,

$$a_0 + kx = 0 \ \text{ при } \quad x = x_{R3}.$$

Тогда $\quad a_0 = -\dfrac{x_{R3}}{x_3^* - x_{R3}}$, $\quad k = \dfrac{1}{x_3^* - x_{R3}}$ $\quad$ и $\quad \mu_{x_3}(x) = \dfrac{x - x_{R3}}{x_3^* - x_{R3}}$.

Таким образом,

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{x - x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}} \Big/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{x_{R3} - x}{x_{R3} - x_3} \Big/ x.$$

Аналогично для операции вычитания

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{x - x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}} \Big/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{x_{R3} - x}{x_{R3} - x_3} \Big/ x,$$

$$x_{L3} = x_{L1} - x_{R2}, \quad x_{R3} = x_{R1} - x_{L2}, \quad x_3^* = x_1^* - x_2^*.$$

Для операций умножения и деления, предполагая сохраняемость треугольной функции принадлежности, в работе [5] получены следующие соотношения:

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_{L3}}}{\sqrt{x_3^*} - \sqrt{x_{L3}}} \Big/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{\sqrt{x_{R3}} - \sqrt{x}}{\sqrt{x_{R3}} - \sqrt{x_3}} \Big/ x,$$

$$x_{L3} = x_{L1} x_{L2}, \qquad x_{R3} = x_{R1} x_{R2}, \qquad x_3^* = x_1^* x_2^*,$$

результирующая функция принадлежности $\mu_{x_3}(x) = a_0 + k_1\sqrt{x}$

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{(x - x_{L3})x_3^*}{(x_3 - x_{L3})x} \Big/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{(x_{R3} - x)x_3^*}{\left(x_{R3} - x_3^*\right)x} \Big/ x \ ,$$

где $x_{L3} = \dfrac{x_{L1}}{x_{R2}}, x_{R3} = \dfrac{x_{R1}}{x_{L2}}, x_3^* = \dfrac{x_1^*}{x_2^*}$,

результирующая функция принадлежности $\mu_{x_3}(x) = a_0 + \dfrac{k_1}{x}$.

В отношении двух последних операций целесообразно сделать следующее замечание. Операции умножения и деления являются операциями нелинейными, поэтому предположение о сохранении вида функции принадлежности представляются достаточно искусственными.

Отметим еще одну особенность нормальных выпуклых непрерывных нечетких чисел: найти нечеткое число и его правую и левую границу можно, не проводя лингвистического анализа, поскольку точно известно, при каком x функция принадлежности равна 1, а при каких x она равна нулю.

2.2.2. Операции над нечеткими числами с использованием уровневых множеств

В основу данного подхода к выполнению операций над нечеткими числами положено то, что нечеткое число может быть дискретизировано по конечному числу α -уровней, когда каждому уровню α_i ставится в соответствие множество

$$X_{\alpha_i} = \left\{x_{\alpha_i 1}, x_{\alpha_i 2}, \ldots x_{\alpha_i n}\right\},$$
$$\mu\left(x_{\alpha_i j}\right) \ge \alpha_i\ ,\ j = \overline{1,n},$$

а также разложено на выпуклые, возможно ненормализованные нечеткие подмножества (рис. 2.3). На операции с использованием уровневых множеств накладывается дополнительное ограничение, что эти нечеткие подмножества должны иметь функции принадлежности либо строго убывающие, либо строго возрастающие, либо постоянные (рис. 2.4). Эти ограничения объясняются тем, что если рассматривать только монотонные (только возрастающие или только убывающие) операции*), то для этих операций на участках одинаковой монотонности функций принадлежности результат может быть получен без дополнительного лингвистического анализа.

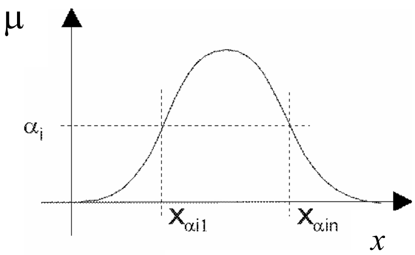


Рис. 2.3

*) Бинарная операция * называется возрастающей, если для любых $x_1 > y_1$ и $x_2 > y_2 \Rightarrow x_1 * x_2 > y_1 * y_2$ и убывающей, если для $x_1 > y_1$ и $x_2 > y_2 \Rightarrow x_1 * x_2 < y_1 * y_2$

Пусть нечеткие числа $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ представлены в виде α-уровневых подмножеств, для которых функции принадлежности имеют одинаковый характер монотонности:

$$\tilde{X}=\left\{X_{\alpha_i}\right\},\quad \tilde{Y}=\left\{Y_{\alpha_i}\right\}$$

$$\tilde{X}=\left\{\left(x_{\alpha_i 1},\dots x_{\alpha_i n_i}\right)\right\}\qquad i=1,\overline{I},$$

$$\tilde{Y}=\left\{\left(y_{\alpha_j 1},\dots y_{\alpha_j m_j}\right)\right\}\qquad j=1,J,$$

$$\mu\left(x_{\alpha_i k}\right)\ge\alpha_i\qquad i=1,\overline{J}\quad k=1,n_i,$$

$$\mu\left(y_{\alpha_{ji}q}\right)\ge\alpha_j\qquad i=\overline{1,J}\quad q=1,m_j.$$

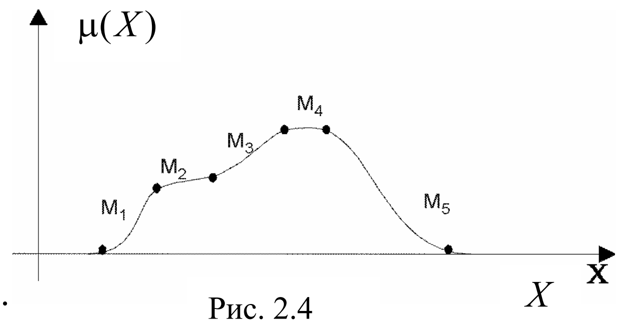


Рис. 2.4

Операции выполняются над абсциссами точек, находящихся на одинаковых α-уровнях и имеющих одинаковые участки монотонности функций принадлежности.

Рассмотрим для простоты один α-уровень α_i и три значения аргумента (рис. 2.5):

$$x_{\alpha_{ij}}\text{ и }y_{\alpha_{ij}}\ j=1,2,3,$$

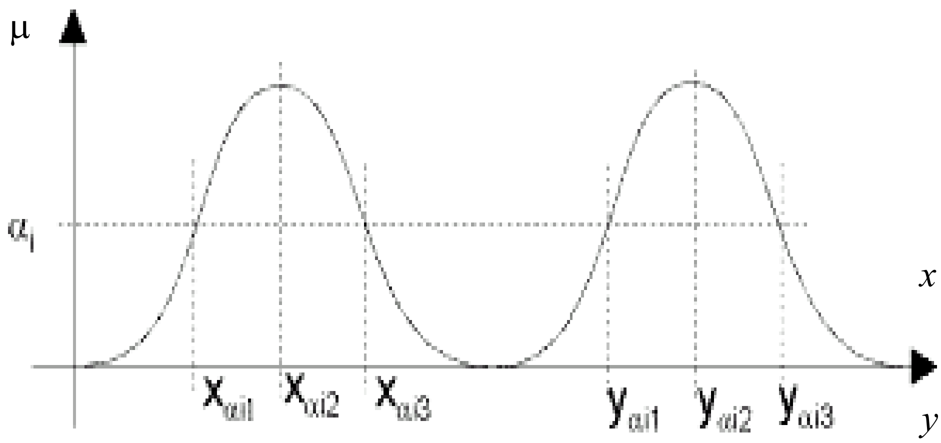


Рис. 2.5

$$\tilde{X}_{\alpha_i}=\left\{\mu_{\alpha_i 1}(x_{\alpha_i 1})/x_{\alpha_i 1},\mu_{\alpha_i 2}(x_{\alpha_i 2})/x_{\alpha_i 2},\mu_{\alpha_i 3}(x_{\alpha_i 3})/x_{\alpha_i 3}\right\},$$

$$\tilde{Y}_{\alpha_i}=\left\{\mu_{\alpha_i 1}(y_{\alpha_i 1})/y_{\alpha_i 1},\mu_{\alpha_i 2}(y_{\alpha_i 2})/y_{\alpha_i 2},\mu_{\alpha_i 3}(y_{\alpha_i 3})/y_{\alpha_i 3}\right\}.$$

Тогда для строго возрастающих или строго убывающих операций, какими являются сложение и умножение, справедливы соотношения:

$$\tilde{Z}_{\alpha_i} = \tilde{X}_{\alpha_i}\tilde{Y}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1}/(x_{\alpha_i 1}y_{\alpha_i 1}), \mu_{\alpha_i 2}/(x_{\alpha_i 2}y_{\alpha_i 2}), \mu_{\alpha_i 3}/(x_{\alpha_i 3}y_{\alpha_i 3}) \right\} \quad (2.3)$$

$$\tilde{Z}_{\alpha_i} = \tilde{X}_{\alpha_i}\tilde{Y}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1}/(x_{\alpha_i 1}+y_{\alpha_i 1}), \mu_{\alpha_i 2}/(x_{\alpha_i 2}+y_{\alpha_i 2}), \mu_{\alpha_i 3}/(x_{\alpha_i 3}+y_{\alpha_i 3}) \right\} \quad (2.4)$$

Операции вычитания и деления не являются строго возрастающими или строго убывающими, поэтому их вначале надо представить в виде

$$\tilde{X} - \tilde{Y} = \tilde{X} + (-\tilde{Y}),$$
$$\tilde{X}/\tilde{Y} = \tilde{X} \times \left(1/\tilde{Y} \right).$$

а затем может использоваться соотношение (2.3) или (2.4).

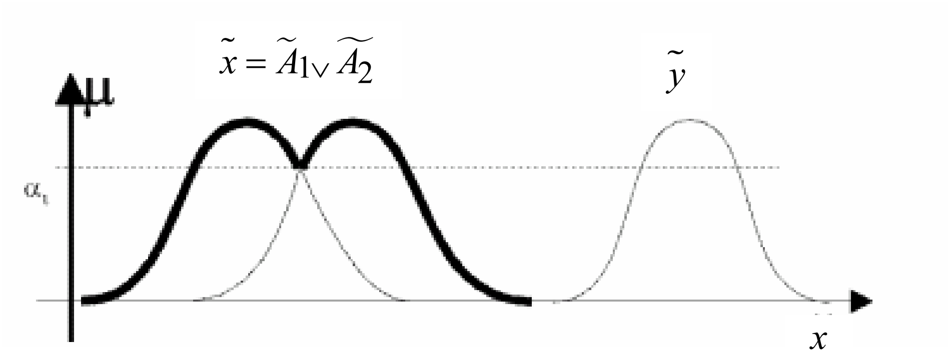


Рис. 2.6

Основным ограничением при использовании данного метода реализации нечетких множеств является требование участков одинаковой монотонности функций принадлежности для участков операций. На рис. 2.6 представлен случай, когда это условие не выполняется.

2.2.3. *Алгоритм использования принципа обобщения при выполнении арифметических операций над нечеткими числами*

Арифметические операции над нечеткими числами можно рассматривать как функциональное преобразование возможных значений вектора $\vec{X} = \{x_i\} \quad i = \overline{1,n}$:

$$y = \varphi(x_1, \ldots x_n), \quad (2.5)$$

например, $y = x_1 + x_2, \quad y = x_1 \times x_2, \quad y = x_1 / x_2, \quad y = x_1 - x_2.$

Считая известным значение функции принадлежности $\mu_X(x_i)$, необходимо найти функцию принадлежности $\mu_Y(y)$, которая будет определять результат функционального преобразования (2.5). В литературе, излагающей основные операции над нечеткими множествами (числами), ограничиваются преимущественно лишь заданием основного правила для определения функции принадлежности

$$\mu_Y\left(y\right) = \max_{\vec{X}:\varphi\left(\vec{X}\right)=y} \min\left\{\mu_x(x_i)\right\} \quad . \tag{2.6}$$

При непосредственном использовании такого правила для решения практических задач возникают трудности в разработке методов и алгоритмов определения результирующей функции принадлежности, вызванной математической сложностью описания и определения множества X.

В работе [8] предложены два варианта алгоритмов определения функции принадлежности (2.6): алгоритм перебора и рекуррентный алгоритм. В нашем случае мы остановимся только на алгоритме перебора, который, несмотря на громоздкость, позволяет получить результаты в большинстве случаев, которые могут представлять практический интерес.

Рекуррентный алгоритм предполагает решение нелинейного уравнения, которое только в отдельных случаях имеет аналитическое решение [7].

При использовании метода перебора на множестве возможных значений нечетких переменных формируется множество различных их комбинаций

$\left\{x_i\right\}_l \ l = \overline{1,L}$, где l – номер комбинации.

Для каждой комбинации рассчитываются значение функции $y_l = \varphi\left(\left\{x_i\right\}_l\right)$ и функции принадлежности $\mu_{Y_l}\left(Y_l\right) = \min\limits_i\left\{\mu_x\left(x_i\right)\right\}$.

В общем случае для различных комбинаций l_i, l_j, l_k возможно, что $y_{l_i} = y_{l_j} = y_{l_k}$ при этом $\mu_Y\left(Y_{l_i}\right) \neq \mu_Y\left(Y_{l_j}\right) \neq \mu_Y\left(Y_{l_k}\right)$.

Тогда результирующее значение $\mu_Y\left(Y_l\right) = \max\limits_{i,j,k}\left\{\mu_Y\left(y_l\right)\right\}$.

В заключение полученные значения y_l упорядочивают и затем разбивают на некоторое количество k групп, с постоянным числом членов n_k. Для каждой группы определяют $\mu_k\,(Y_e)$=max $\left\{\mu_Y\left(y_e\right)\right\}$. Значения $\mu_k\,(y_e)$ рассматриваются как n_k значения функции принадлежности результата. Очевидно, что точность расчета $\mu_Y\left(y\right)$ определяется дискретностью разбиения множеств исходных значений x_i. После получения дискретного множества значений $\mu_Y\left(y\right)$ имеет смысл воспользоваться интерполяционными процедурами.

Выбор количества дискретных отсчетов исходных значений x_i можно осуществить, задаваясь точностью представления функций принадлежности.

Отметим, что данный алгоритм может применяться и для многоместных арифметических операций, однако вычислительные трудности в этом случае существенно возрастают.

Основные понятия

1. Нечеткая математика.
2. Нечеткое число.
3. L-R представление нечеткого числа.
4. Нечеткое выпуклое число.
5. Строго возрастающие и строго убывающие операции.
6. α-разбиение нечетких чисел.
7. Двуместные арифметические операции.

Контрольные вопросы

1. Как определяется нечеткое число?
2. Какое нечеткое число считается выпуклым?
3. Какое нечеткое число считается нормальным, какое - субнормальным?
4. Какие особенности имеют место в нечеткой математике?
5. Как определяется L-R представление нечеткого числа?
6. Какие ограничения имеют место при выполнении арифметических операций с использованием α-разбиений нечетких чисел?
7. В чем состоят недостатки метода перебора при реализации арифметических операций над нечеткими числами?

3. НЕЧЕТКИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

3.1. Нечеткий логический вывод

Нечетким высказыванием называется предложение, относительно которого можно судить о степени его истинности или сложности в настоящее время. Степень истинности или степень сложности каждого нечеткого высказывания принимает значения из замкнутого интервала [0,1], причем 0 и 1 являются предельными значениями степени истинности и совпадают с понятиями «ложь» и «истина» для четких высказываний. Истинность нечеткого высказывания, вообще говоря, является субъективной характеристикой и зависит от многих факторов, в частности от использования нечеткого высказывания. В теории нечетких множеств широкое распространение получили нечеткие условные высказывания и правила нечеткого логического вывода. Это обстоятельство связано с тем, что в семантике обычного языка присутствует определенное число нечетких понятий и условных правил, в которых предпосылки и следствия включают такие понятия. Практика показывает, что формализация правил для нечетких условных выводов может быть чрезвычайно разнообразной и должна основываться на использовании многозначных логических схем. Исследования правил условного логического вывода охватывают в основном три вида условных предложений:

P_1: если x есть A, то y есть B;

P_2: если x есть A, то y есть B, иначе y есть C;

P_3: если x_1 есть A_1 и x_2 есть A_2 и $\ldots x_n$ есть A_n, то y есть B.

Концептуальной основой формализации правил условного логического вывода является правило отделения (modus = ponens), утверждающее:

если $(\alpha\to\beta)$ истинно и α истинно, то β истинно.

В свою очередь, методологической основой такой формализации является композиционное правило, предложенное Л. Заде. Используя это правило, он сформулировал некоторые правила вывода, в которых логические предпосылки и следствия являются условными предложениями, включающими нечеткую концепцию. В дальнейшем Е. Мамдани предложил свое правило вывода, которое как и правило Л. Заде было разработано для логического предложения вида P_1, для обработки которых на практике наибольшее распространение получили следующие преобразования:

1) $\mu(x, y) = \min\,[\mu_A(x),\mu_B(y)]=\mu_A(x)\cap\mu_B(y)$;
2) $\mu(x, y) = \min\,[\mu_A(x),\mu_B(y)]\cup\min((1-\mu_A(x),1)$;
3) $\mu(x, y) = \min\,[1,(1-\mu_A(x)+\mu_B(y)]$;
4) $\mu(x, y) = \max\,[(1-\mu_A(x)),\mu_B(y)]$.

Первая формула удобна тем, что сохраняет ширину значений функций принадлежности и позволяет выделить каждое правило и процесс его изменения даже из информации в табличной форме. Среди недостатков этой формулы можно отметить коммутативность, отсутствие разницы между выражениями типа $(A\cap B)\to C$ и $A\to(B\to C)$ и невозможностью использовать связку ИЛИ вместо И для интерпретации связки ИНАЧЕ для получения протокола применения правил:

ПРАВИЛО 1, ИНАЧЕ ПРАВИЛО 2, ИНАЧЕ ….

Другие соотношения лишены этого недостатка за счет того, что каждому правилу нельзя сопоставить его область влияния. Например, арифметические связки в третьей формуле приводят к получению новых значений функций принадлежности и требуют некоторой аппроксимации. Отметим, что это соотношение соответствует операции импликации для многозначной логики Лукасевича. Формула четыре лишена всех указанных недостатков и является наиболее «человеческой» по природе, так как если условие *A* дает следствие *B*, то условие *A*', близкое к *A*, дает следствие *B*', близкое к *B*. Это свойство особенно важно для систем с участием «человеческого фактора», где все ситуации не могут быть заданы с помощью набора правил.

Условное предложение P_2 задает отношение

$$R = (A\times B)\vee\neg(B\times C) \text{ или}$$

$$\mu_к = \max\{\min(\mu_A, \mu_B),[1\text{-}\min(\mu_B, \mu_C)]\}.$$

Условное предложение P_3 можно свести к P_1, если выполнить свертку условий, находящихся в левой части предложения P_3, используя для этого соответствующие операции над нечеткими множествами, содержащимися в этой части.

В системах, основанных на обработке нечетких условных предложений, обычно выделяют три этапа:

- фаззификация;
- поиск подходящего условного предложения и его обработка;
- принятие окончательного решения – дефаззификация.

На этапе фаззификации определяются лингвистические значения переменных процесса. При этом в зависимости от характера решаемой задачи лингвистические значения могут определяться экспертом(ами) либо путем сопоставления конкретного значения переменной с возможными лингвистическими (рис. 3.1).

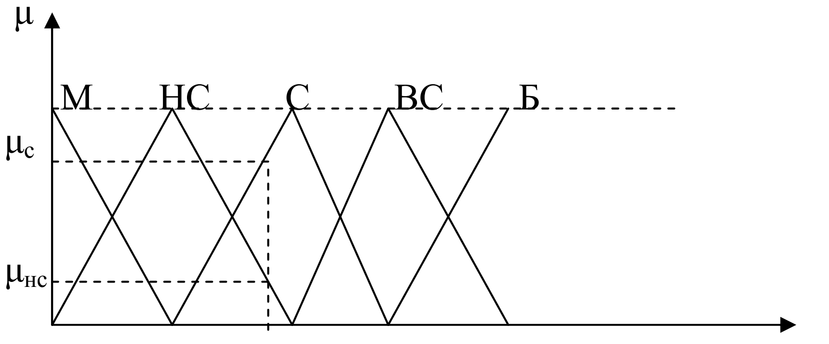


Рис. 3.1

В связи с тем, что

$$\mu_с(x_t) > \mu_{нс}(x_t)\ , \qquad (3.1\ )$$

может быть принято решение, что конкретное значение x_t соответствует лингвистическому значению « среднее». В то же время может оказаться необходимым учет и второго лингвистического значения. Фаззификация выполняется для всех переменных процесса, участвующих в условной части нечетких предложений. На втором этапе подходящее правило либо формируется экспертом(ами), либо по полученным при фаззификации лингвистическим значениям извлекается из базы знаний, которая содержит различные варианты условных предложений. Подбор подходящего предложения выполняется по содержанию условной части нечеткого предложения. Здесь также имеется два варианта. Первый состоит в том, что, основываясь на неравенстве (3.1), пренебрегают вторым лингвистическим значением и выбирают одно условное предложение из базы знаний, затем переходят к его обработке, т.е. вычисляют свертку логических условий в левой части и выполняют одно из преобразований 1 – 4. Если принято решение о необходимости учета обоих лингвистических значений, то как минимум в базе знаний может оказаться два подходящих условных предложения. В более сложных ситуациях число таких предложений может оказаться больше. При учете нескольких подходящих правил могут использоваться алгоритмы Мамдани (Mamdani), Сукамото (Tsukamoto), Ларсена (Larsen) и др.

Для упрощения рассмотрения предположим, что базу знаний организуют два нечетких правила вывода:

П1: если X есть A_1 и Y есть B_1, тогда Z есть C_1;

П2: если X есть A_2 и Y есть B_2, тогда Z есть C_2,

где X и Y – имена входных переменных,

Z – имя переменной вывода,

$A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ – некоторые лингвистические значения соответствующих переменных, для которых определены функции принадлежности $\mu_{A1}(x), \mu_{B1}(y), \mu_{C1}(z), \mu_{A2}(x), \mu_{B2}(y), \mu_{C2}(z)$.

Алгоритм Мамдани. Данный алгоритм состоит из нескольких этапов:

1. Для значений X_0 и Y_0 определяется степень истинности для предпосылок каждого правила: $\mu_{A1}(x_0), \mu_{B1}(y_0), \mu_{A2}(x_0), \mu_{B2}(y_0)$.

2. Находятся уровни ”отсечения” для предпосылок каждого из правил (используется операция min):

$$\alpha_1 = A_1(x_0) \wedge B_1(y_0);$$
$$\alpha_2 = A_2(x_0) \wedge B_2(y_0).$$

Затем находятся "усеченные" функции принадлежности

$$c_1'(z) = \alpha_1 \wedge c_1(z);$$
$$c_2'(z) = \alpha_2 \wedge c_2(z).$$

3. Объединяют усеченные функции с использованием операции MAX, что дает итоговое нечеткое подмножество для переменной выхода с функцией принадлежности (рис.3.2)

$$\mu_{\Sigma}(z) = \max\left\{\min\left[\mu_{A_1}(x_0), \mu_{B_1}(y_0)\right], \min\left[\mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_2}(y_0)\right]\right\}.$$

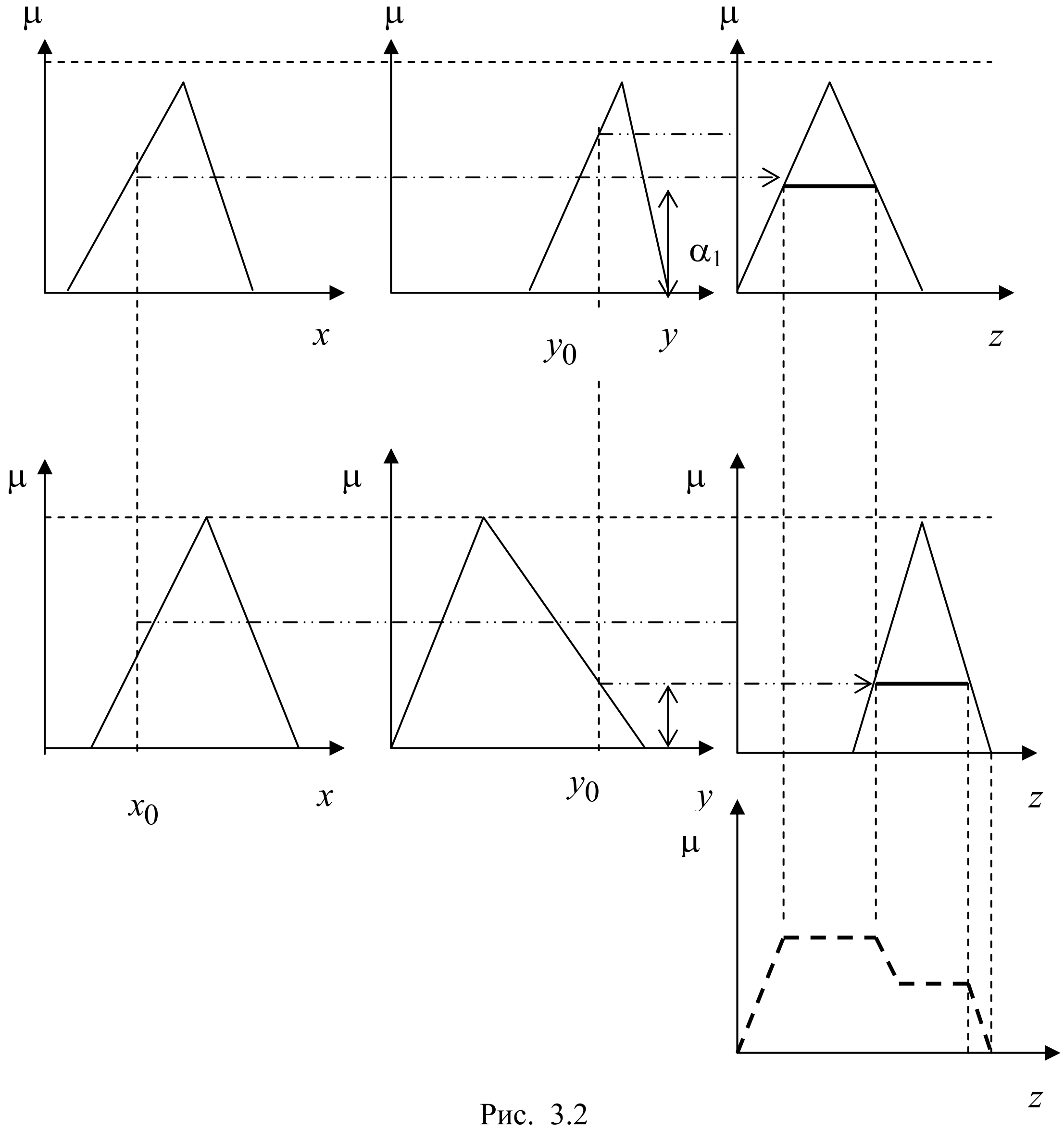


Рис. 3.2

<u>Алгоритм Сукамото</u>. Пункты 1 и 2 выполняются аналогично соответствующим этапам алгоритма Мамдани.

4. Определяется решение z_1 для нечеткого множества $C_1'(z)$ и z_2 для $C_2'(z)$.

5. Определяется интегральное решение $z = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Алгоритм Ларсена. Пункты 1 и 2 выполняются аналогично соответствующим этапам предыдущих алгоритмов.

6. Итоговое нечеткое множество определяется как сумма $C(z) = C_1^{'}(z) + C_2^{'}(z)$ (рис. 3.3).

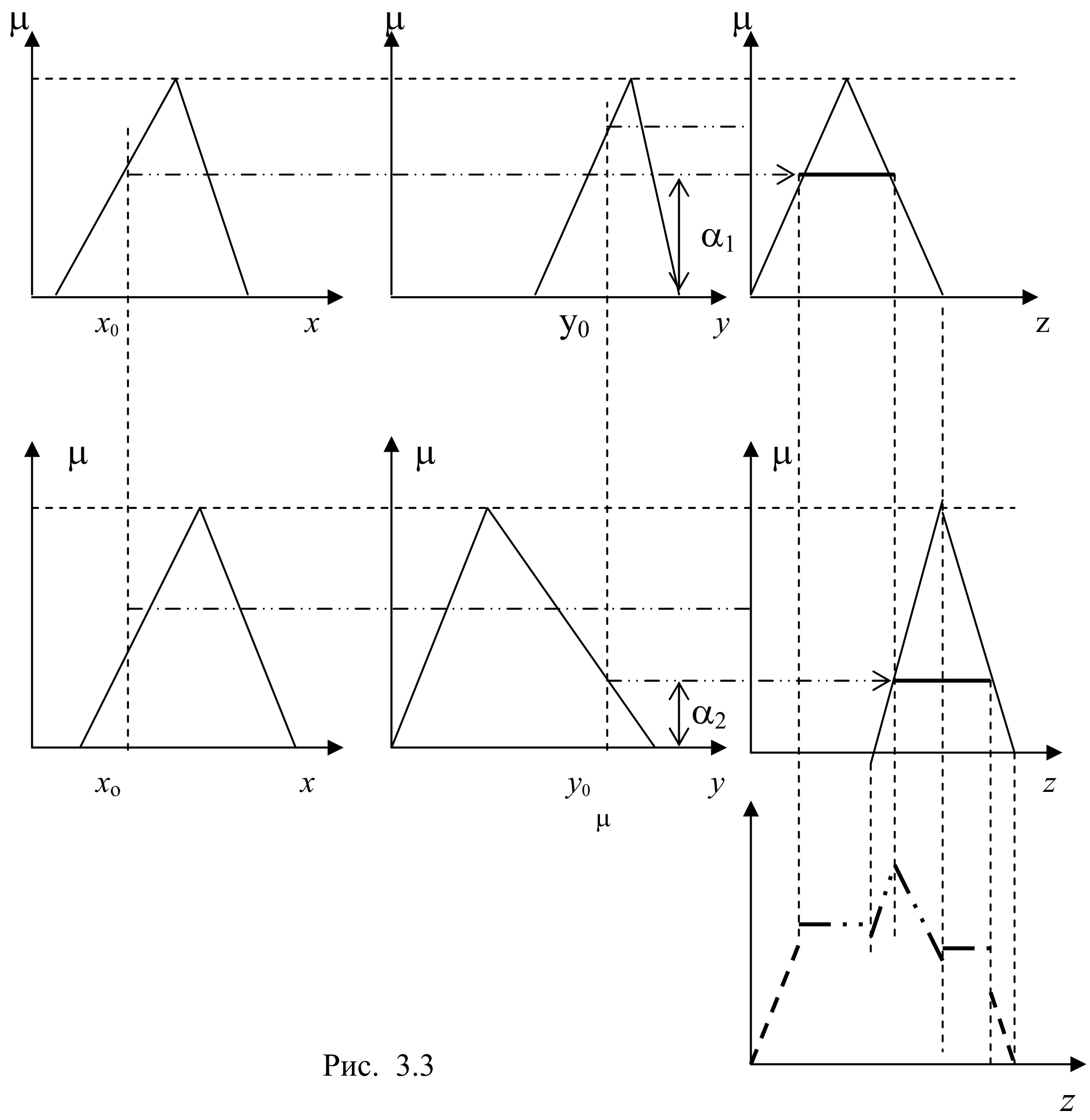


Рис. 3.3

На этапе дефаззификации на основе итогового нечеткого множества находится возможное решение, соответствующее используемым нечетким предложениям. Это решение определяется по итоговой функции, полученной после обработки правил условного логического вывода. Одним из применяемых способов является выбор такого значения, для которого функция принадлежности имеет наибольшее значение (рис. 3.4, *а*). При наличии нескольких экстремумов на функции принадлежности (рис. 3.4, *б*) выбирается среднее значение для этих точек. В последнем случае имеет место так называемый метод mean of maxima (среднего по максимуму) (рис. 3.4, *а*, *б*).

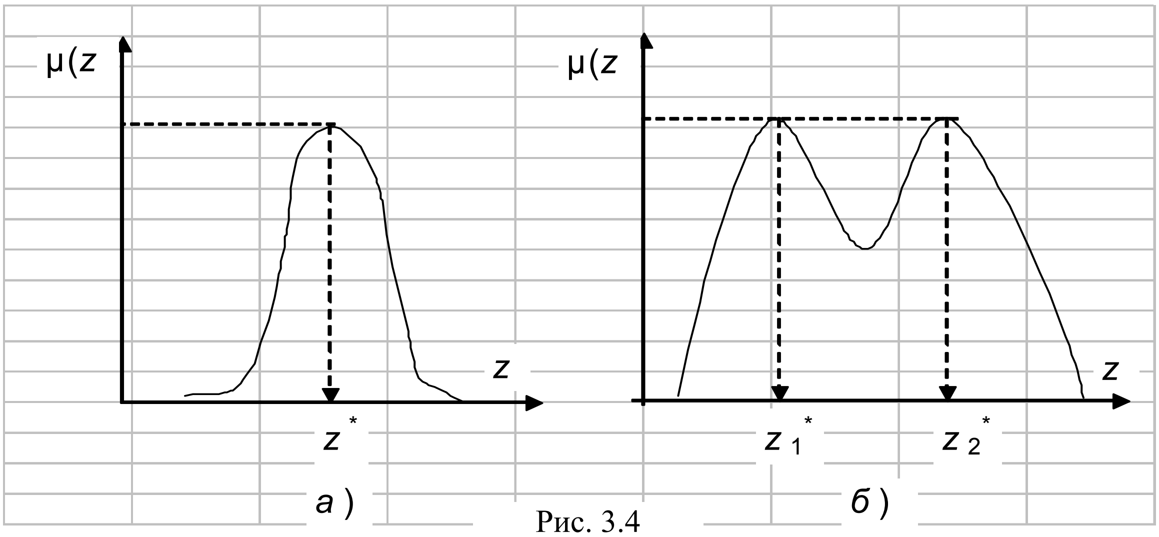


Рис. 3.4

Разновидностью метода среднего по максимуму является метод средневзвешенного по максимуму, так как могут возникнуть ситуации, когда экстремумы функции принадлежности выходного нечеткого подмножества не равны. Но это неравенство не столь значительно, чтобы можно было одним из экстремумов пренебречь (рис. 3.5).

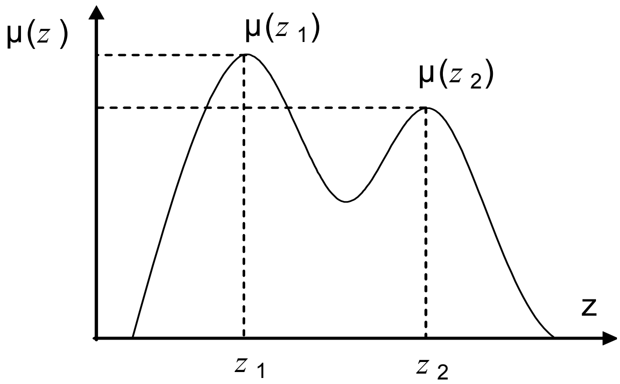


Рис. 3.5

В этом случае управляющее воздействие можно определить по соотношению

$$z^* = \frac{\mu(z_1)z_2 + \mu(z_2)z_2}{\mu(z_1) + \mu(z_2)} .$$

Широкое применение при выборе решения получил метод центра тяжести, когда множество значений результирующей функции принадлежности рассматривается как множество материальных точек, массы которых равны значениям функции принадлежности с соответствующими координатами:

$$z^* = \frac{\sum \mu(z_i) \cdot z_i}{\sum \mu(z_i)} .$$

Применение этого наиболее целесообразно, когда нет достаточных оснований применять метод максимума или метод центра площадей.

При выборе решения следует контролировать уровень функций принадлежности, т.е. необходимо установить некоторый порог решения, ниже которого принимать решение не следует: на рис. 3.6, *а* – выбор решения можно выполнять, на рис. 3.6, *б* – выбор решения производить не следует.

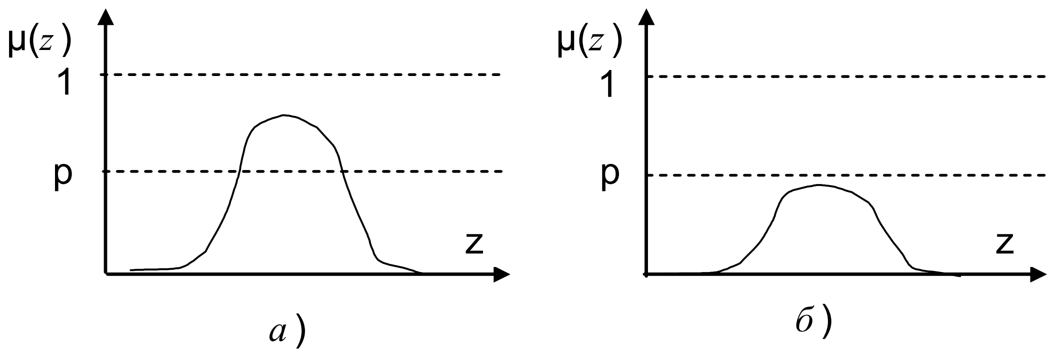


Рис. 3.6

Основные понятия

1. Нечеткое высказывание.
2. Нечеткое правило вывода.
3. Фаззификация.
4. Дефаззификация.
5. Импликация.
6. Формула Заде для обработки правил нечеткого вывода.
7. Формула Лукасевича-Мамдани.
8. Алгоритм Мамдани.
9. Алгоритм Сукамото.
10. Алгоритм Ларсена. .

Контрольные вопросы

1. Как можно определить нечеткое высказывание?
2. Как определяется правило отделения (modus = ponens)?
3. Какими недостатками обладает формула Л. Заде для обработки правил нечеткого вывода?
4. Чем отличаются алгоритмы Мамдани и Сукамото?
5. В каких случаях для дефаззификации является оправданным применение правила максимума?
6. Когда для дефаззификации целесообразно применять правило центра тяжести?

4. НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПРОГРАММ В ПРОДУКТОВОМ И ПРОИЗВОДСТВЕННОМ ПЛАНИРОВАНИИ

При продуктовом планировании в рамках стратегического планирования должны решаться следующие основные задачи.

Следует определить, рассматривать ли в качестве альтернативных (будущих продуктовых программ) существующие или новые продукты на действующих или новых рынках. Здесь необходимо заметить, что, говоря о существующих продуктах, имеем в виду, что эти продукты будут иметь другие потребительские свойства. Например, автомобильная шина – это существующий продукт, но новый тип шин будет иметь большую мягкость хода и будет менее шумным.

Альтернативные решения рассматриваются на двух уровнях: на уровне полей бизнеса и на уровне предприятия.

На уровне полей бизнеса альтернативные программы формируются по отдельным продуктам и продуктовым группам; на уровне предприятия в целом – из комбинаций полей бизнеса.

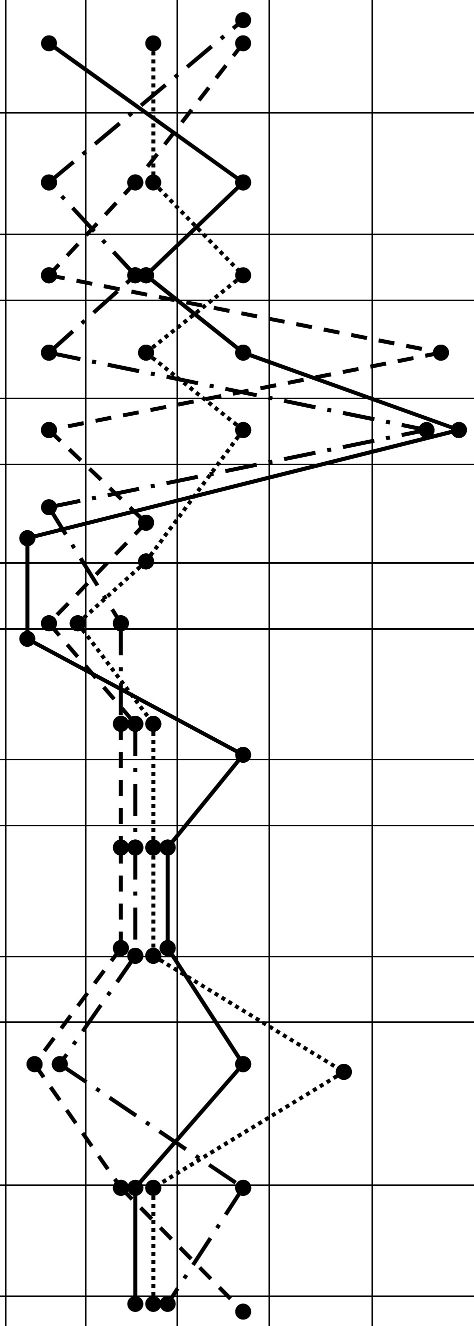
В общем виде альтернативные решения являются различным образом сформированными возможными комбинациями будущих продуктовых программ, дифференцированных по ряду показателей (критериев) и по времени. Выбранная альтернатива включает в себя также и решение о рыночной стратегии, то есть расширение старых рынков или открытие новых.

Для оценки возможных продуктовых и производственных альтернатив очень важен анализ полезности и целевых издержек продуктов и производства. Для такого анализа разрабатывают так называемые профили оценок продуктов и производства [9]: сначала грубых, а затем для представляющих интерес продуктов детальных. В табл. 4.1 представлен вариант профиля оценки нового продукта и возможный перечень критериев [9]. Система, используемая Дженерал Электрик [10], представлена в табл. 4.2. Пример сетки предварительных оценок, разработанный консалтинговой группой МДА (США) [11], представлен в табл. 4.3. Известна модель Р.Г. Купера, содержащая 30 вопросов, задаваемых различным экспертам и оцениваемых по 10-балльной шкале. Несмотря на некоторые различия, все эти модели имеют достаточно много общего.

Таблица 4.1

Оценка в баллах / взвешенная оценка

Экономический критерий	Очень хорошо (6)	Хорошо (4)	Среднее (2)	Плохо (0)	Очень плохо (-2)	Вес критерия	Программа P_1	Программа P_2	Программа P_3	Программа P_4
Вклад в покрытие постоянных затрат и прибыль						2	6/12	4/8	2/4	2/4
Затраты капитал: в основные средства						0,5	2/1	4/2	6/3	4/2
в оборотные средства						0,5	4/2	2/1	4/2	6/3
Пригодность для НИОКР ноу-хау						1	2/2	4/4	6/6	-2/-2
Техническое исполнение						1	-2/-2	2/2	-2/-2	6/6
Пригодность для сбыта система маркетинга						2	6/12	4/8	6/12	4/8
Система распределения						2	6/12	6/12	4/8	6/12
Пригодность для производства наличие технологий						2	2/4	4/8	4/8	4/8
Наличие мощностей						1,5	4/6	4/6	4/6	4/6
Пригодность для снабжения доступность сырья (материалов)						1,5	4/6	4/6	4/6	4/6
Зависимость от поставщиков						1	2/2	0/0	6/6	6/6
Пригодность для утилизации повторное (дальнейшее) использование						1	4/4	4/4	4/4	2/2
Повторная (дальнейшая) утилизация						1	4/4	4/4	2/2	4/4
Общая оценка пригодности							3,38/5	3,53/5	3,84/5	3,84/5



Примечание:

P_1

P_2

P_3

P_4

Таблица 4.2

Факторы привлекательности рынка для мультифакторной модели бизнес-портфеля

Экономический критерий	Вес (0-1)	Продукт P_1		Продукт P_2		Продукт P_3	
		Оценка (0-5)	Ценность вес. оценка	Оценка (0-5)	Ценность вес. оценка	Оценка (0-5)	Ценность вес. оценка
Привлекательность рынка							
С1 – общий объем рынка	0,2	4	0,8	3	0,6	4	0,8
С2 – показатель темпов							
роста в год	0,2	5	1,0	4	0,8	4	0,8
С3 – маржа прибыли							
С4 – интенсивность	0,15	4	0,6	3	0,6	4	0,6
конкуренции	0,15	2	0,3	4	0,6	3	0,45
С5 – технологические							
требования	0,15	3	0,6	4	0,6	3	0,45
С6 – влияние инфляции							
С7 – энергоемкость	0,05	4	0,15	5	0,25	4	0,45
С8 – воздействие	0,05	2	0,1	4	0,2	2	0,1
окружающей среды	0,05	3	0,15	4	0,2	1	0,05
С9 – социальный / поли-							
тический/ юридический	***						
аспекты							
Итого	1,0	27	3,7	31	3,7	24	3,7
С1 – доля рынка	0,1	4	0,4	4	0,4	3	0,3
С2 – темпы роста доли рынка	0,15	2	0,3	3	0,45	4	0,6
С3 – качество продукции	0,1	4	0,4	5	0,5	4	0,4
С4 – репутация марки	0,1	5	0,5	4	0,4	4	0,4
С5 – распределение продукции	0,05	4	0,2	3	0,15	4	0,2
С6 – эффективность продвижения	0,05	3	0,15	4	0,2	3	0,15
С7 – возможности производства	0,05	3	0,15	2	0,1	3	0,15
С8 – эффективность производства	0,05	2	0,1	3	0,15	2	0,1
С9 – расходы подразделения	0,15	3	0,45	2	0,3	3	0,45
С10 – поставки материалов	0,05	5	0,25	4	0,2	3	0,15
С11 – эффективность научных исследований	0,1	3	0,3	4	0,4	4	0,4
С12– управленческий аппарат	0,05	4	0,2	3	0,15	2	0,1
Итого	1,0	42	3,4	41	3,4	39	3,4

*** - должны быть приемлемыми.

Таблица 4.3

Пример сетки предварительных оценок

Критерий оценки	Оценка			
	очень высокая	высокая	низкая	очень низкая
Рынок	Возникающий	Растущий	Стабильный	В стадии упадка
Срок жизни товара	10 лет и более	5 – 10 лет	3 – 5 лет	1 – 3 года
Скорость распространения	Очень высокая	Довольно высокая	Низкая	Очень низкая
Потенциал рынка (физический)	Св. 10 000 тыс. у.е.	10000 – 5000 тыс. у.е.	500 – 1000 тыс. у.е.	До 100 тыс. у.е.
Потенциал рынка (денежный)	1 млрд. у.е.	1 млрд. – 500 млн. у.е.	500-100 млн. у.е.	До 100 млн. у.е.
Потребность покупателей	Не удовлетворяется	Удовлетворяется. Плохо	Удовлетворяется. Хорошо	Удовлетворяется. Очень хорошо
Отношение торговцев	Восторженное	Позитивное	Нейтральное	Сдержанное
Потребность в рекламной поддержке	Низкая, 0 – 2 %	Малозначимая, 2 – 5%	Высокая, 5%	Очень высокая, св. 5 %
Доступность рынка	Очень легкая	Легкая	Плохая	Очень плохая
«Притягательность» товара	Очень высокая	Высокая	Средняя	Слабая
Отличительные качества	Эксклюзивность	Значительные	Слабые	Простое копирование («как все»)
Степень конкуренции	Очень слабая	Слабая	Сильная	Очень сильная
Продолжительность эксклюзивности	Св. 3 лет	1 – 3 года	До 1 года	До 6 месяцев
Соответствие фирме	Укрепляет фирму	Хорошо сочетается	Слабая связь	Никакой связи
Цена	Намного ниже	Немного ниже	Равна	Выше
Совместимость клиент-торговец	Полная	Легко совмещаются	Совмещаются с трудом конверсия	Новый канал сбыта
Адекватность торгового персонала	Высокая	Легко адаптируется	Возможна, но сложно	Новый торговый персонал
Уровень качества	Значительно превосходит	Слегка превосходит	Такой же	Уступает

Это позволяет предложить формализованную модель этих систем.

Введем в рассмотрение множества:

$$P = \left\{ p_i : i = \overline{1, I} \right\}$$

– множество возможных продуктовых программ;

$$A = \left\{ a_j : j = \overline{1, J} \right\}$$

– множество альтернатив, элементами которого являются различные комбинации продуктовых программ, при этом комбинации образуются как по множеству, так и по времени, то есть a_j – это некоторое подмножество *P*. В частном случае $a_j = p_i$, то есть альтернатива содержит только одну продуктовую программу;

$$S = \left\{ s_k : k = 1, k \right\}$$

– множество рыночных стратегий, которые могут рассматриваться как для конкретной продуктовой программы, так и для их совокупности. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что некоторая альтернатива включает в себя элементы множеств *P* и *S*;

$$C = \left\{ c_l : l = \overline{1, L} \right\}$$

– множество критериев, по которым осуществляется оценка продуктовых программ и альтернатив. В качестве таких критериев можно, например, рассматривать влияние на показатели оборота, размеры денежных потоков, а также капитала и имущества в будущих периодах, уровень риска, очевидно, могут использоваться и немонетарные показатели (критерии).

Каждая из представленных систем оценок – это, по существу, отношение вида

$$\boldsymbol{R}:\mathrm{P}\to\mathrm{C},\ \mathbf{P}\boldsymbol{R}\mathbf{C}, \quad \text{или} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{Г}:\mathrm{A}\to\mathrm{C},\ \mathrm{A}\mathbf{Г}\mathrm{C} \tag{4.2}$$

Принципиальных различий между сооотношениями (4.1) и (4.2) нет, но поэтому из соображений простоты изложения ограничимся рассмотрением отношения (4.1), которое определяется на прямом произведеним $P \times C$ и задается матрицей

$$R = \| r_{il} \|,$$

где $r_{i,l}$ – оценка в некоторой шкале, отражающая уровень соответствия между элементами $p_j \in P$ и $c_l \in C$.

Кроме этого в различных системах оценок используются весовые коэффициенты

$$W = \left\{ w_l : l = \overline{1, L} \right\},$$

учитывающие различную важность критериев $c_l \in C$.

Подавляющее большинство моделей оценки альтернативных продуктов используют числовые представления значений, и конечный результат получается методом среднего балла. Этот подход имеет много достаточно серьезных недостатков, которые будут рассмотрены в нижеследующих разделах, где будут также предложены и альтернативные решения.

4.1. Нечеткая модель многокритериального выбора однопродуктовой альтернативы при числовой матрице соответствия

Этот простейший случай предполагает, что каждая альтернатива содержит только однопродуктовую программу. Помимо перечисленных выше множеств для решения задачи необходимо построить отношение между множествами P и C:

$$\boldsymbol{R}: P \to C \text{ или } P\boldsymbol{R}C, \tag{4.3}$$

которое определяет, с какой степенью та или иная программа соответствует критериям $c_l \in C$.

Поскольку речь идет о новых продуктах, то попытки точных расчетов вовсе не гарантируют, что их результаты будут реализованы. Более того, вполне уместен вопрос: ”Какова вероятность реализации этих расчетов?” Для строгого ответа на этот вопрос мы должны принять решение относительно вида закона распределения плотности вероятности. В случае новых продуктов для этого нет или недостаточно соответствующих статистических данных. Поэтому, задавая вопрос о вероятности, нам придется смириться с тем, что это субъективная вероятность, которая базируется на экспертных оценках.

Таким образом, мы неминуемо приходим к проблеме обработки экспертных оценок, которые и будут определять характер отношений (4.3). Наиболее распространен метод балльных оценок, когда отношение (4.3) задается матрицей

$$R = \left\| r_{il} \right\|,$$

где $r_{i,l}$ – числа в некоторой шкале. В литературе известны методы решения задач подобного класса. Одним из наиболее мощных и хорошо обоснованных является метод анализа иерархий (МАИ). На наш взгляд, основным недостатком этого метода является его громоздкость.

В основе МАИ лежит построение матриц парных сравнений. Так, для приведенного примера придется построить тринадцать матриц размером 4×4 и для каждой матрицы реализовать процедуру вычисления координат собственного вектора. В качестве еще одного замечания укажем на то, что МАИ не гарантирует высокой степени различимости альтернатив. В качестве доказательства приведем сравнение результатов применения

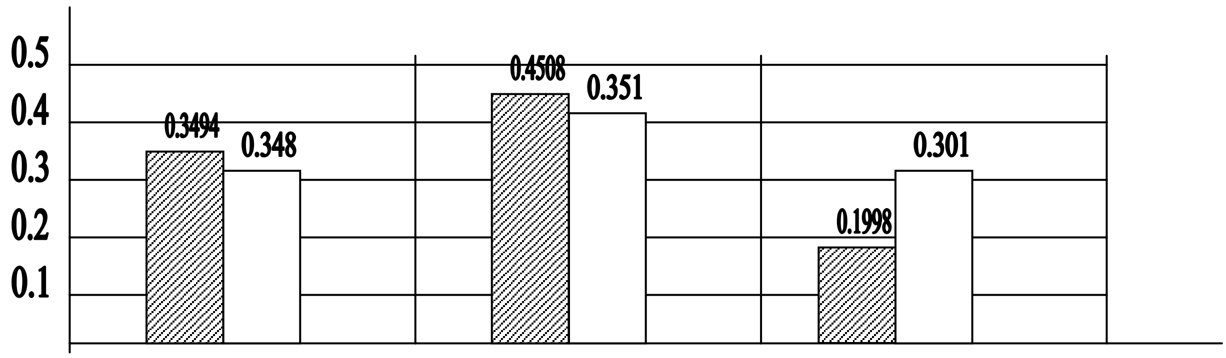


Рис. 4.1

метода МАИ и метода, разработанного в работе [12], на примере, описанном в книге Т. Саати [13].

Оценку эффективности разделения альтернатив можно выполнить по формуле

$$\delta = \frac{S(a_i) - S_{\max}}{S_{\max}} 100\%,$$

где $S(a_i)$ – оценка альтернативы a_i,

$S_{\max}$ – максимальная оценка, полученная некоторой альтернативой.

Оба метода указали в качестве наилучшей альтернативу a_2. Соответственно, для метода МАИ $\delta_{1,2}$=0.8%, $\delta_{2,3}$=14%. Для предлагаемого метода $\delta_{1,2}$ = 22 %, $\delta_{2,3}$ = 55 % (рис. 4.1).

Наконец, следует отметить еще одно обстоятельство. Для руководителя-практика очень важна прозрачность метода анализа на всех стадиях его выполнения. Если построение матриц парных сравнений каких-либо вопросов не вызывает, то принятие решения по оценкам координат собственных векторов предполагает наличие соответствующих знаний по теории матриц.

В практике выбора альтернативных продуктовых программ широко применяется балльный метод с вычислением среднего балла [10], при этом могут использоваться или не использоваться весовые коэффициенты критериев. Для примера, представленного табл. 4.1, без учета весовых коэффициентов были получены следующие оценки: программа P_1 – 3,38, P_2 – 3,53, P_3 – 3,84, P_4 – 3,84. По поводу этих результатов можно отметить следующее:

– вычисление среднего значения дает необходимую точность оценок, если длина усредняемого ряда значений большая, т.е. количество критериев должно быть достаточно большим, что не всегда просто обеспечить на практике;

– усреднение – это один из методов сглаживания и поэтому “ провальные” оценки могут быть сглажены, что и имеет место в рассматриваемом примере, по крайней мере, в отношении альтернатив P_3 и P_4.

Применение весовых коэффициентов требует известной осторожности, поскольку некорректное их определение может существенно сказаться на результатах. Для устранения этого эффекта рекомендуется определять значения весовых коэффициентов на основе матриц парных сравнений[5].

Отметим и другую возможность. Если для рассматриваемого примера использовать мультипликативную формулу введения весовых коэффициентов

$$S(p_i)=1/N_c \sum_j r_{ij} w_j ,$$

где N_c – количество критериев;

r_{ij} – оценка i-й альтернативы по j-му критерию;

w_j – вес j-го критерия,

то все четыре программы получают одинаковые оценки $S(p)$ = 5, т.е. ситуация становится тупиковой.

Если использовать степенную формулу $S(p_i) = 1/N_c \sum r_{ij}^{w_j}$, то для программы P_1 – $S(P_1)$ =10,87, P_2 – $S(P_2)$ = 9,03, т.е. кардинально иные результаты. В связи с этим весьма обоснованным представляется высказывание Е. С. Вентцель: “Здесь мы встречаемся с очень типичным для подобных ситуаций приёмом – переносом произвола из одной инстанции в другую. Простой выбор компромиссного решения на основе мысленного сопоставления всех “за” и “против” каждого решения кажется слишком произвольным, недостаточно научным. А вот маневрирование с формулой, включающей (пусть столь же произвольно назначенные) коэффициенты – совсем другое дело. Это уже наука. По существу никакой науки тут нет, и нечего себя обманывать”.

Наиболее часто для выбора наилучшей по множеству критериев альтернативы используется максиминный подход [5], когда наилучшей признается альтернатива

$$a_{i_0} \to \max_i \min_l \{r_{i,l}\}.$$

Матрица R для программ, представленных в табл. 4.1, без учета весов критериев имеет вид:

$$R = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 2 & -2 & 6 & 6 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & -2 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & -2 & 6 & 4 & 6 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (4.4)$$

Для устранения отрицательных оценок прибавим ко всем элементам матрицы два.

$$R = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 4 & 6 & 4 & 0 & 8 & 8 & 4 & 6 & 6 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 6 & 4 & 6 & 8 & 6 & 6 & 6 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 6 & 8 & 0 & 8 & 6 & 6 & 6 & 6 & 8 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 0 & 8 & 6 & 8 & 6 & 6 & 6 & 8 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \min r_{ij} \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \qquad (4.5)$$

$$\max_i \min_j r_{ij} = 2\,.$$

Таким образом, продуктовая программа P_2 имеет очевидное преимущество перед всеми остальными.

В случае выбора одной продуктовой программы задачу можно было бы считать решенной. В то же время необходимо сделать некоторые оговорки. Максиминный метод ориентируется на наихудший вариант (метод осторожного наблюдателя) со всеми вытекающими отсюда последствиями. Чисто визуальный анализ матрицы (4.3) не подтверждает абсолютного превосходства альтернативной программы P_2 над всеми остальными. Как правило, при планировании продуктовых программ нужно выстроить их в некоторую последовательность так, чтобы в случае необходимости можно было перейти на ближайшую к наилучшей продуктовую программу. Максиминный метод при имеющейся структуре оценок не дает требуемого ответа. Это объясняется определенной однобокостью этого метода, так как в нем оцениваются только реализуемые шансы альтернатив и остаются без анализа упущенные шансы. По этой причине максиминный метод не позволяет надежно различать достаточно близкие альтернативы. Применение весовых коэффициентов в данном примере вообще не имеет смысла. Аналогичная ситуация может иметь место, если максиминный подход просто дает одинаковые оценки для альтернативных продуктовых программ. Для решения сформулированной задачи применим метод, предложенный в [14]. Введем в рассмотрение матрицу $\overline{R_i}$,которую определим следующим образом. Оставим без изменения элементы i-й строки, а элементы всех остальных строк определим как разность $\overline{r_{ij}} = r_{\max} - r_{ij}$ для всех $l \neq i$, где $r_{\max}$ – максимальная возможная оценка альтернативы в выбранной шкале.

Матрицу $\overline{R_i}$ можно рассматривать как матрицу шансов i-й альтернативы. Действительно, строка i отражает ее возможности, а все остальные – это уступки в ее пользу со стороны других альтернатив.

Обобщенную степень соответствия альтернативных продуктовых программ выбранной системе критериев определим как

$$S(p_i) = m_i / (I \times J)$$

$$m_i = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} r_{ij} \times w_i \ ,$$

где w_j – вес j-го критерия. Возможно, что окажется полезной непрерывная функция обобщенной степени соответствия, например, в виде функции

$$\eta(s(p_i)) = \frac{s(p_i)}{e^{-[1-s(p_i)]}}.$$

Для иллюстрации возможностей этого метода проанализируем ситуацию, которая возникла, когда с помощью весовых коэффициентов и использования мультипликативной формы была предпринята попытка уточнить решение относительно альтернатив P_3 и P_4. Для последующих преобразований все элементы матрицы (4.5) приведем к диапазону [0,1].

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.75 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & 0.5 & 0.75 & 0.75 & 0.5 & 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.75 & 0.5 & 0.75 & 0.5 & 0.75 & 1 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 0.25 & 0.75 & 0.75 \\ 0.5 & 1 & 0.75 & 1 & 0 & 1 & 0.75 & 0\ 75 & 0.75 & 0.75 & 1 & 0.75 & 0.5 \\ 0.5 & 0.75 & 1 & 0 & 1 & 0.75 & 1 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 1 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} \qquad (4.6)$$

С учетом весовых коэффициентов табл. 4.1

$$R_w = \begin{bmatrix} 2 & 0.25 & 0.375 & 0.5 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1.125 & 1.125 & 1 & 0.75 & 0.75 \\ 1.5 & 0.375 & 0.25 & 0.75 & 0.5 & 1.5 & 2 & 1.5 & 1.125 & 1.125 & 0.25 & 0.75 & 0.75 \\ 1 & 0.5 & 0.375 & 1 & 0 & 2 & 1.5 & 1\ 125 & 1.125 & 1.125 & 1 & 0.75 & 0.5 \\ 1 & 0.375 & 0.5 & 0 & 1 & 1.5 & 2 & 1.5 & 1.125 & 1.125 & 1 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Определим матрицы $\overline{R}_w^{\,i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Верхний индекс указывает номер соответствующей альтернативной программы.

$$\overline{R}_w^{\,1} = \begin{bmatrix} 2 & 0.25 & 0.375 & 0.5 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1.125 & 1.125 & 0.5 & 0.75 & 0.75 \\ 0.5 & 1.625 & 1.75 & 1.25 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.875 & 0.875 & 1.75 & 1.25 & 1.25 \\ 1 & 1.5 & 1.625 & 1 & 2 & 0 & 0.5 & 0\ 5 & 0.875 & 0.875 & 1 & 1.125 & 1.5 \\ 1.0 & 1.625 & 1.5 & 2 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.875 & 0.875 & 1 & 1.5 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}^{\,2}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1.75 & 1.625 & 1.5 & 2 & 0 & 0 & 1.0 & 0.75 & 0.75 & 1.5 & 1.25 & 1.25 \\ 1.5 & 0.375 & 0.25 & 0.75 & 0.5 & 1.5 & 2 & 1.5 & 1.125 & 1.125 & 0.25 & 0.75 & 0.75 \\ 1 & 1.5 & 1.625 & 1 & 2 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0\ 875 & 0.875 & 1 & 1.25 & 1.5 \\ 1 & 1.625 & 1.5 & 2 & 1 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.875 & 0.875 & 1 & 1.5 & 1.25 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}^{\,3}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1.75 & 1.625 & 1.5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0.75 & 0.75 & 1.5 & 1.25 & 1.25 \\ 0.5 & 1.625 & 1.75 & 1.25 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0.875 & 0.875 & 1.75 & 1.25 \\ 1 & 0.5 & 0.375 & 1 & 0 & 1 & 0.75 & 0\ 75 & 0.75 & 0.75 & 1 & 0.75 & 0.5 \\ 0.5 & 0.75 & 1 & 0 & 1 & 0.75 & 1 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 1 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}_w^{\,4} = \begin{bmatrix} 0 & 1.75 & 1.625 & 1.5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.75 & 0.75 & 1.5 & 1.25 & 1.25 \\ 0.5 & 1.625 & 1.75 & 1.25 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.875 & 0.875 & 1.75 & 1.25 \\ 1 & 1.5 & 1.625 & 1 & 2 & 0 & 0.5 & 0\ 5 & 0.5 & 0.875 & 0.875 & 1 & 1.25 & 1.5 \\ 1 & 0.375 & 0.5 & 0 & 1 & 1.5 & 2 & 2 & 1.5 & 1.125 & 1.125 & 1 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Оценки по альтернативам $S(P_1) = 1{,}024$, $S(P_2) = 1{,}019$, $S(P_3) = 1{,}0216$, $S(P_4) = 1{,}019$. Хотя были получены различные оценки по альтернативам P_3 и P_4, степень их расхождения весьма незначительна. Тем не менее, удалось отранжировать альтернативы, которые изначально имели одинаковые оценки.

Рассмотрим еще одну возможность углубления выбора альтернатив, основанную на построении матрицы уступок. Вернемся к исходной матрице R (4.6). По методу среднего балла и максиминному методу альтернативные программы P_3 и P_4 получили одинаковые оценки. Допустим, что необходимо среди этой пары найти наилучшую альтернативу.

Построим для этих программ матрицы

$$\overline{R}^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0.75 & 1 & 0 & 1 & 0.75 & 0\ 75 & 0.75 & 0.75 & 1 & 0.75 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0 & 1 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

$$\overline{R}^{4} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.25 & 0 & 1 & 0 & 0.25 & 0\ 25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.75 & 1 & 0 & 1 & 0.75 & 1 & 0.75 & 0.75 & 0.75 & 1 & 0.5 & 0.75 \end{bmatrix} \qquad (4.8)$$

Соответственно $S(P_3) = 0{,}408$, $S(P_4) = 0{,}408$, т.е. задача пока не решена.

Преобразуем матрицы (2.7), (2.8) в матрицы R, R путем удаления соответственно 3-й и 4-й строк.

$$\overline{R}^{-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 0 & 1 & 0 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\overline{R}^{-4} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.5 & 0 & 0.25 & 0 & 1 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

В отличие от матриц (4.7) и (4.8) матрицы $\overline{R}^{-3}, \overline{R}^{-4}$ можно рассматривать как матрицы уступок. Для каждой альтернативы наихудшей ситуацией будет минимальный уровень уступок, для определения которого надо найти минимальное значение по каждому из критериев. Тогда

$$\underset{i}{\mathrm{Min}}\left\{\overline{R}^{-3}\right\} = \{0,\ 0.25,\ 0,\ 0.25,\ 0,\ 0\ ,0\ ,\ 0.25,\ 0.25,\ 0.25,\ 0\ ,\ 0.25,\ 0.25\ \},$$

$$(4.9)$$

$$\underset{i}{\mathrm{Min}}\left\{\overline{R}^{-4}\right\} = \{\ 0,\ 0,\ 0.25,\ 0\ ,\ 0.5,\ 0\ ,\ 0.25,\ 0.25,\ 0.25,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.25,\ 0.25\}.$$

Очевидно, что в лучшей ситуации будет альтернатива, у которой уровень уступок по критериям будет больше. Тогда

$$\underset{j}{\mathrm{Max}}\ \underset{i}{\mathrm{Min}}\ \{\ \overline{R}^{-3}\ \} = 0{,}25,$$

$$\underset{j}{\mathrm{Max}}\ \underset{i}{\mathrm{Min}}\ \{\ \overline{R}^{-4}\ \} = 0{,}5\ , \tag{4.10}$$

что позволяет сделать вывод о предпочтительности программы P_4 по отношению к программе P_3 . Таким образом, для рассматриваемого варианта задачи окончательное ранжирование альтернативных программ имеет вид

$$P_4\,,\ P_3\,,\ P_2,\ P_1.$$

В табл. 4.4 приведены результаты применения рассмотренного метода к данным табл. 4.2, что позволило выявить наилучший продукт P_2.

Таблица 4.4

Матрицы уступок

$R^{-1}_{пб}$	Min $R^{-1}_{пб}$	$R^{-2}_{пб}$	Min $R^{-2}_{пб}$	$R^{-3}_{пб}$	Min $R^{-3}_{пб}$
Привлекательность рынка					
0,4 0,2	0,2	0,2 0,2	0,2	0,2 0,4	0,2
0,2 0,2	0,2	0 0,2	0	0 0,2	0
0,55 0,4	0,4	0,4 0,4	0,4	0,55 0,4	0,4
0,4 0,55	0,4	0,7 0,4	0,4	0,4 0,7	0,4
0,4 0,55	0,4	0,4 0,4	0,4	0,4 0,4	0,4
0,85 0,75	0,75	0,75 0,85	0,75	0,75 0,55	0,55
0,8 0,9	0,8	0,9 0,9	0,9	0,8 0,9	0,8
0,8 0,95	0,8	0,85 0,8	0,8	0,8 0,85	0,8
max (min $R^{-1}_{пб}$) = 0,8		max (min $R^{-2}_{пб}$) = 0,9		max (min $R^{-3}_{пб}$) = 0,8	
Σ min ($R^{-1}_{пб}$)= 3,75		Σ min ($R^{-2}_{пб}$) = 3,95		Σmin ($R^{-3}_{пб}$) = 3,75	
Эффективность бизнеса					
0,6 0,7	0,6	0,6 0,7	0,6	0,6 0,6	0,6
0,55 0,4	0,4	0,7 0,4	0,4	0,7 0,55	0,55
0,5 0,6	0,5	0,6 0,6	0,6	0,6 0,5	0,5
0,6 0,6	0,6	0,5 0,6	0,5	0,5 0,6	0,5
0,85 0,8	0,8	0,8 0,8	0,8	0,8 0,85	0,8
0,8 0,85	0,8	0,85 0,85	0,85	0,85 0,8	0,8
0,9 0,85	0,85	0,85 0,85	0,85	0,85 0,9	0,85
0,85 0,9	0,85	0,7 0,9	0,9	0,9 0,85	0,85
0,8 0,55	0,55	0,55 0,55	0,55	0,55 0,7	0,55
0,8 0,85	0,8	0,75 0,85	0,75	0,75 0,8	0,75
0,6 0,6	0,6	0,6 0,6	0,6	0,7 0,6	0,6
0,85	0,85	0,8 0,9	0,8	0,8 0,85	0,8
max (min $R^{-1}_{эф}$) = 0,85		max (min $R^{-2}_{эф}$) = 0,9		max (min $\mathrm{R}^{-3}_{эф}$) = 0,85	
Σ min ($R^{-1}_{эф}$) = 8,3		Σ min($R^{-2}_{эф}$) = 8,3		Σmin ($\mathrm{R}^{-3}_{эф}$) = 8,15	

Полученные результаты позволяют предложить следующую последовательность анализа продуктовых профилей.

1. Исходные профили анализируются по методу среднего балла или максиминному.

2. Если не найдено удовлетворительное решение, строятся матрицы собственных шансов альтернатив и вычисляются оценки (4.4).

3. Если не найдено удовлетворительное решение, строятся матрицы уступок и вычисляются максиминные оценки (4.9), (4.10).

Возможны и тупиковые ситуации, когда решение не будет найдено. В этом случае целесообразно проанализировать корректность построения продуктовых профилей.

В рассмотренных примерах оценки соответствия альтернатив критериям имеют точечный характер и их нечеткость (расплывчатость) связана с тем, что они имеют экспертный характер. Более полным отражением нечеткости был бы переход к представлению критериальных оценок в виде нечетких чисел [24]. В качестве иллюстрации рассмотрим процедуру обработки данных табл. 4.2

Оценки и весовые коэффициенты из табл. 4.2 представим в виде нечетких чисел (рис. 4.2, 4.3).

Оценки

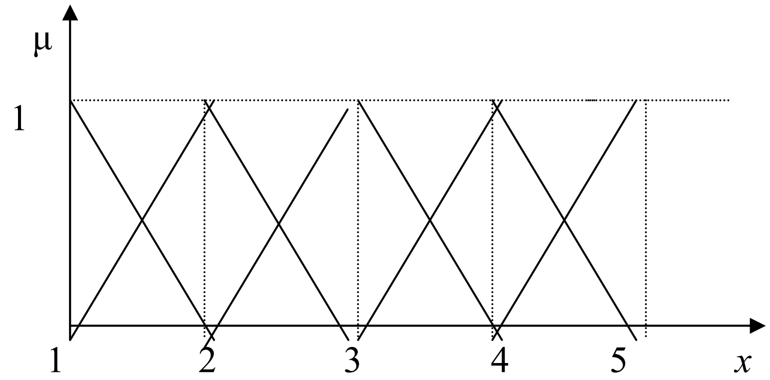


Рис. 4.2

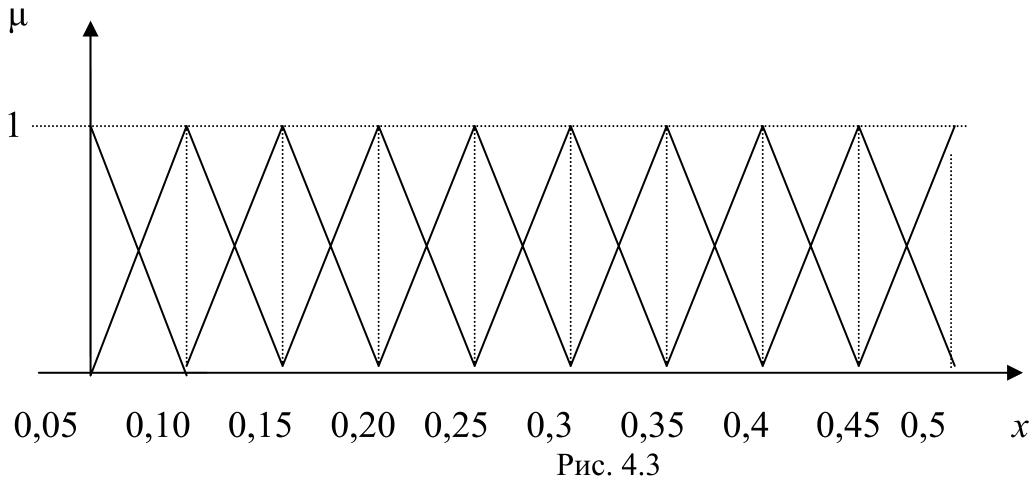


Рис. 4.3

При построении функций принадлежности нечетких чисел будем придерживаться одного главного условия: для двух соседних нечетких чисел минимумы и максимумы соответствующих функций принадлежности должны совпадать. При симметричных функциях принадлежности требование пересечения двух соседних функций на уровне 0,5 будут выполняться автоматически. Следует отметить, что для нечетких чисел указанные выше условия не являются строго обязательными. Однако их выполнение упрощает построение нечетких чисел. Наиболее просто операции над такими числами выполняются в среде электронной таблицы *Fuzzy Calc* [15], которую можно считать нечетким аналогом популярной электронной таблицы *Excel*.

В табл. 4.5 представлены результаты расчетов, выполненных в среде нечеткой электронной таблицы *Fuzzi Calc* .

Табл. 4.5 содержит нечеткие числа, представляющие соответствующие оценки анализируемых продуктов.

На рис. 4.4 и 4.5 приведены соответствующие функции принадлежности. Для каждого продукта были вычислены суммарные ценности. Полученные результаты имеют противоречивый характер, так как по «привлекательности рынка» продукты распределялись следующим образом:

P_1 – 3,81775; P_2 – 3,89087; P_3 – 3,5037;

по эффективности бизнеса: P_1 – 3,8971; P_2 – 3,89721; P_3 – 3,91197, т.е. явное преимущество какой-либо программы не установлено.

Для разрешения этой ситуации были рассчитаны нечеткие матрицы уступок R^{-1}, R^{-2}, R^{-3} для обеих оценок. Элементы этих матриц рассчитывают по формуле

$$\mu^{-i}{}_{lk}(x)=1-\mu_{j,r}(x),$$

где i =1, 2, 3 $j\neq i$

k – определяется количеством критериев;

l =1,….n-1, в нашем примере n = 3.

Как уже отмечалось, наихудшей ситуацией для каждой альтернативы является минимум уступок со стороны других альтернатив. Этот минимум находится как операция пересечения элементов каждой строки матриц уступок, т.е. находим $\mu'_k = \min\{\mu_{lk}^{-i}(x)\}$.

Наилучшая ситуация будет в случае максимальных уступок:

$$\mu'(x) = \max\{\mu'_k(x)\}.$$

Таблица 4.5

	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Привлекательность рынка							
2	Вес	Продукт P1		Продукт P2		ПродуктP3		
3		Оценка	Ценность	Оценка	Ценность	Оценка	Ценность	
4								
5	0.2	4	0.829289	3	0.629289	4	0.829289	
6	0.185496	4.70711	0.883546	4	0.756769	4	0.756769	
7	0.15	4	0.629289	3	0.479289	4	0.629289	
8	0.15	2	0.329289	4	0.629289	3	0.479289	
9	0.15	4	0.629289	4	0.629289	3	0.479289	
10	0.0645904	3	0.20847	4.70711	0.308361	3	0.20847	
11	0.05	2	0.129289	4	0.229289	2	0.129289	
12	0.05	3	0.179289	4	0.229289	1.29289	0.0792893	
13	Суммарная ценность		3.81775		3.89087		3.59097	
14								
15								

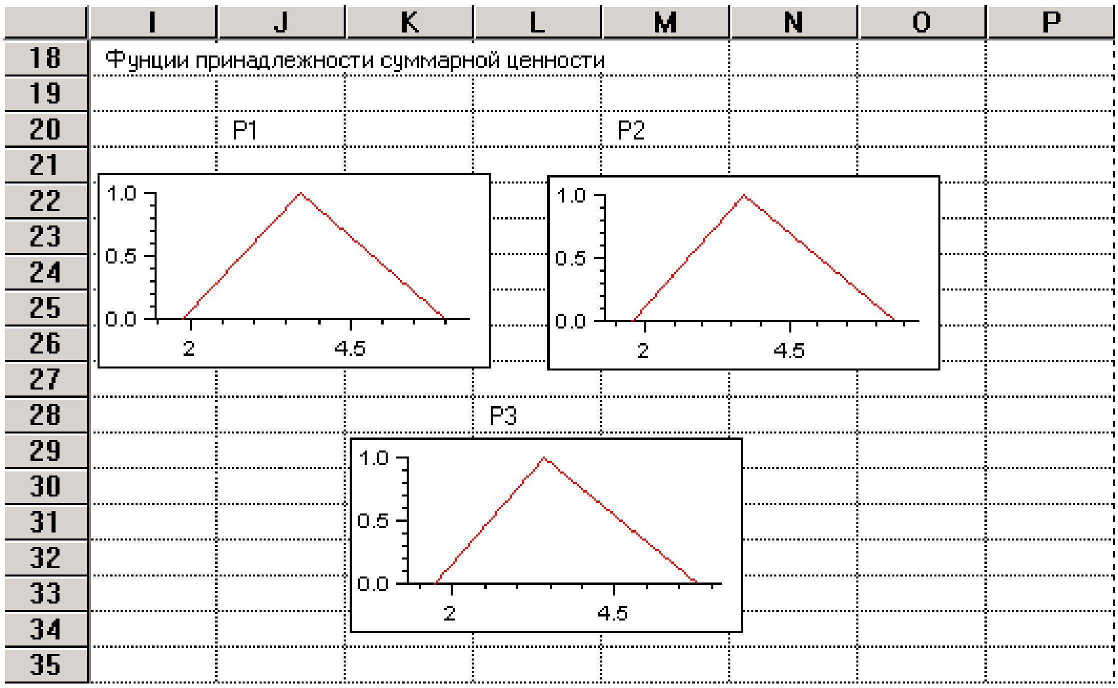


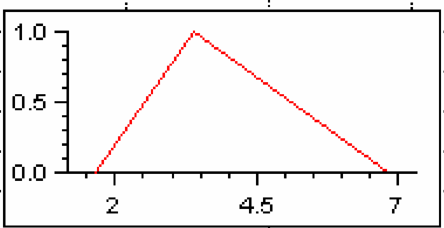
Рис. 4.4

Окончание табл. 4.5

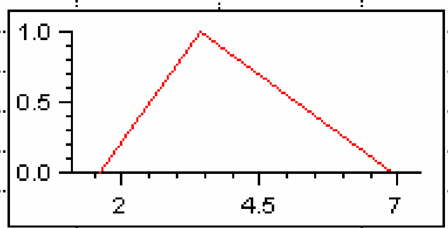
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Эффективность бизнеса						
2		Продукт P1		Продукт P2		Продукт P3		
3	Вес	Оценка	Ценность	Оценка	Ценность	Оценка	Ценность	
4	0.1	4	0.429289	4	0.429289	3	0.329289	
5	0.15	2	0.329289	3	0.479289	4	0.629289	
6	0.1	4	0.429289	4.70711	0.485355	4	0.429289	
7	0.1	4.70711	0.485355	4	0.429289	4	0.429289	
8	0.0645904	4	0.27306	3	0.20847	4	0.27306	
9	0.0645904	3	0.20847	4	0.27306	3	0.20847	
10	0.0645904	3	0.20847	2	0.14388	3	0.20847	
11	0.0645904	2	0.14388	3	0.20847	2	0.14388	
12	0.15	3	0.479289	2	0.329289	3	0.479289	
13	0.0645904	4.70711	0.308361	4	0.27306	3	0.20847	
14	0.1	3	0.329289	4	0.429289	4	0.429289	
15	0.0645904	4	0.27306	3	0.20847	2	0.14388	
16	Суммарная ценность		3.8971		3.89721		3.91197	
17								

Функции принадлежности суммарной ценности

P1



P2



P3

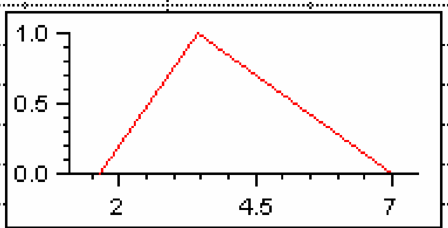


Рис. 4.5

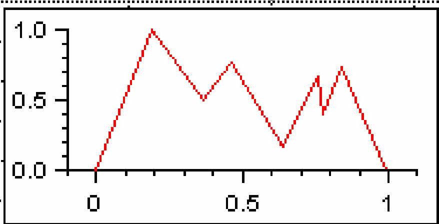
Соответствующие результаты обозначены MAX(MIN) в табл. 4.6. Функции принадлежности приведены на рис. 4.6, 4.7.

Таблица 4.6

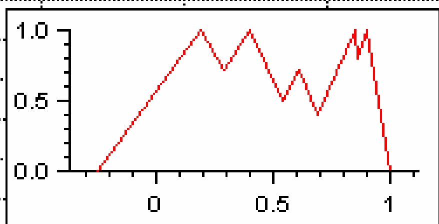
	I	J	K	L	M	N	O	P
52	Матрицы уступок (привлекательность рынка)							
53	R-1		MIN		R-2		MIN	
54	0.370711	0.170711	0.282594		0.170711	0.170711	0.170711	
55	0.243231	0.243231	0.243231		0.116454	0.243231	0.171463	
56	0.520711	0.370711	0.457966		0.370711	0.370711	0.370711	
57	0.370711	0.520711	0.457966		0.670711	0.520711	0.607531	
58	0.370711	0.520711	0.457966		0.370711	0.520711	0.457966	
59	0.691639	0.79153	0.727917		0.79153	0.79153	0.79153	
60	0.770711	0.870711	0.85		0.870711	0.870711	0.870711	
61	0.770711	0.920711	0.894083		0.820711	0.920711	0.9	
62		MAX(MIN)	0.463604			MAX(MIN)	0.429485	
63								

	I	J	K
67	R-3		MIN
68	0.370711	0.170711	0.282594
69	0.243231	0.116454	0.171463
70	0.520711	0.370711	0.457966
71	0.370711	0.670711	0.55
72	0.370711	0.370711	0.370711
73	0.691639	0.79153	0.727917
74	0.770711	0.870711	0.85
75	0.770711	0.820711	0.809205
76		MAX(MIN)	0.485283
77			

MAX(MIN) R-1



MAX(MIN)R-2



MAX(MIN)R-3

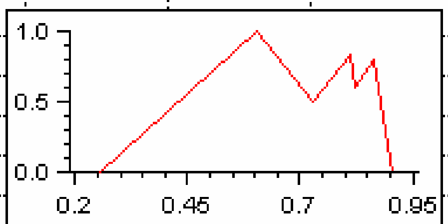
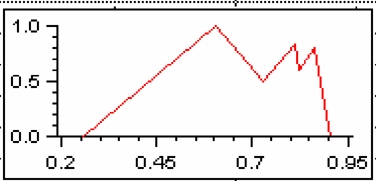


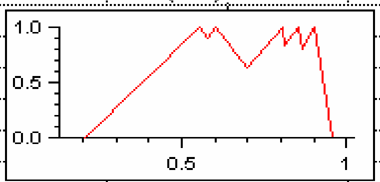
Рис. 4.6

Окончание табл. 4.6

	A	B	C	D	E	F	G	H
52	Нечеткие матрицы уступок(эффективность бизнеса)							
53	R-1		MIN		R-2		MIN	
54	0.570711	0.670711	0.633473		0.570711	0.670711	0.633473	
55	0.520711	0.670711	0.607531		0.670711	0.370711	0.55	
56	0.514645	0.570711	0.533762		0.570711	0.570711	0.570711	
57	0.570711	0.570711	0.570711		0.514645	0.570711	0.533762	
58	0.79153	0.72694	0.759713		0.72694	0.72694	0.72694	
59	0.72694	0.79153	0.759713		0.79153	0.79153	0.79153	
60	0.85612	0.79153	0.824986		0.79153	0.79153	0.79153	
61	0.79153	0.85612	0.824986		0.85612	0.85612	0.85612	
62	0.670711	0.520711	0.607531		0.520711	0.520711	0.520711	
63	0.72694	0.79153	0.759713		0.691639	0.79153	0.727917	
64	0.570711	0.570711	0.570711		0.670711	0.570711	0.633473	
65	0.79153	0.85612	0.824986		0.72694	0.85612	0.793876	
66		MAX(MIN)	0.625115	0.376881		MAX(MIN)	0.638415	
67								
77	R-3		MIN					
78	0.570711	0.570711	0.570711					
79	0.670711	0.520711	0.607531					
80	0.570711	0.514645	0.533762					
81	0.514645	0.570711	0.533762					
82	0.72694	0.79153	0.759713					
83	0.79153	0.72694	0.759713					
84	0.79153	0.85612	0.824986					
85	0.85612	0.79153	0.824986					
86	0.520711	0.670711	0.607531					
87	0.691639	0.72694	0.694635					
88	0.670711	0.570711	0.633473					
89	0.72694	0.79153	0.759713					
90		MAX(MIN)	0.625115					
91								

	A	B	C	D	E	F	G	H
68								
69	MAX(MIN) R-1					MAX(MIN) R-2		





MAX(MIN) R-3

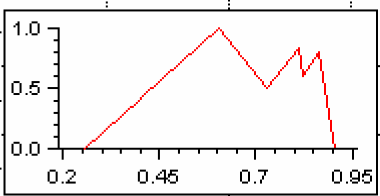


Рис. 4.7

Точечные оценки получаются по методу центра тяжести

$$MIN(MAX)=\Sigma\mu'(x)*x/\Sigma\mu'(x).$$

Здесь также имеет место неоднозначная ситуация:

по привлекательности рынка

P_1:MAX(MIN) = 0,463604;
P_2:MAX(MIN) = 0,429485;
P_3:MAX(MIN) = 0,485283.

по эффективности бизнеса

P_1:MAX(MIN) = 0,625115;
P_2:MAX(MIN) = 0,638415;
P_3:MAX(MIN) = 0,485283.

Если просуммировать все полученные оценки, то ситуация разрешается в пользу продукта P_2
P_1:8,803569, P_2:8,85595, P_3:8,392236.

Более убедительные результаты получаются, если для получения итоговых значений воспользоваться операцией пересечения оценок. Суммарные ценности по «эффективности бизнеса» и «привлекательности рынка» получаются в виде нечетких чисел с соответствующими функциями $\mu_{эб}$, $\mu_{пр}$, тогда итоговая оценка определяется как $\mu_1 = \min\{\mu_{эб}, \mu_{пр}\}$, аналогично определяется

$$\mu_2 = \min\{MAX(MIN)_{эб}, MAX(MIN)_{пр}\}$$ (табл. 4.7, рис. 4.8).

Таблица 4.7

	A	B	C	D	E	F	G	H
103	Минимум суммарной ценности							
104		{min[MAX(MIN)эб,MAX(MIN)пр]}						
105	P1			P2			P3	
106	3.83935			3.92264			3.59097	

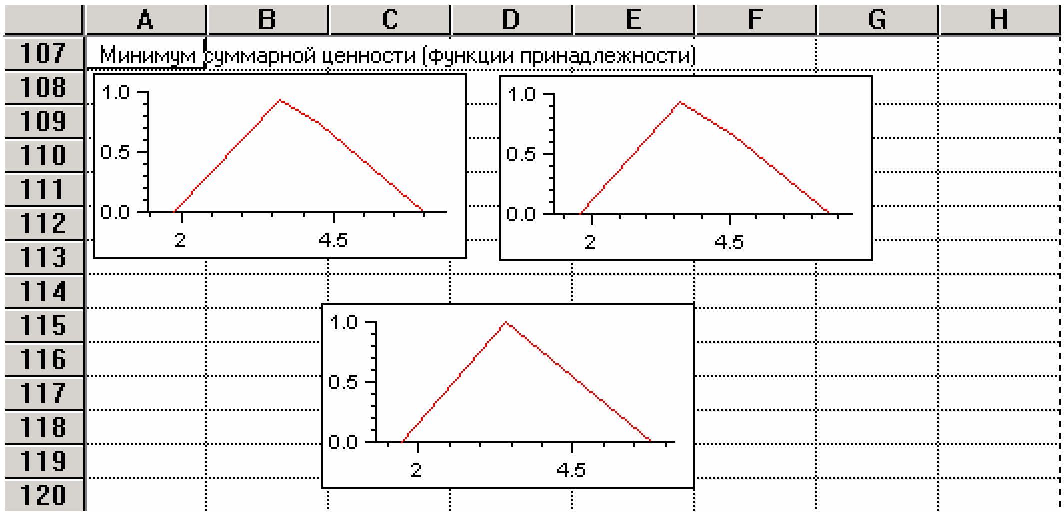


Рис. 4.8

Аналогичные расчеты выполняются и для соответствующих матриц уступок $\mu_j = \min\{[MAX(MIN)/R^{j}_{пр}],[MAX(MIN)/R^{j}_{эф.б}]\}$, $j = 1, 2, 3$ (табл. 4.8, рис. 4.9).

Таблица 4.8

	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
103	Миниммум уступок		min{[Max(MIN)/R-j пр],[Max(MIN)/R-j эф.б]}						
104	P1			P2				P3	
105	0.579545			0.637495				0.585718	
106	0.41847	0.650371		0.417862		0.750185		0.48076	0.650371
107									

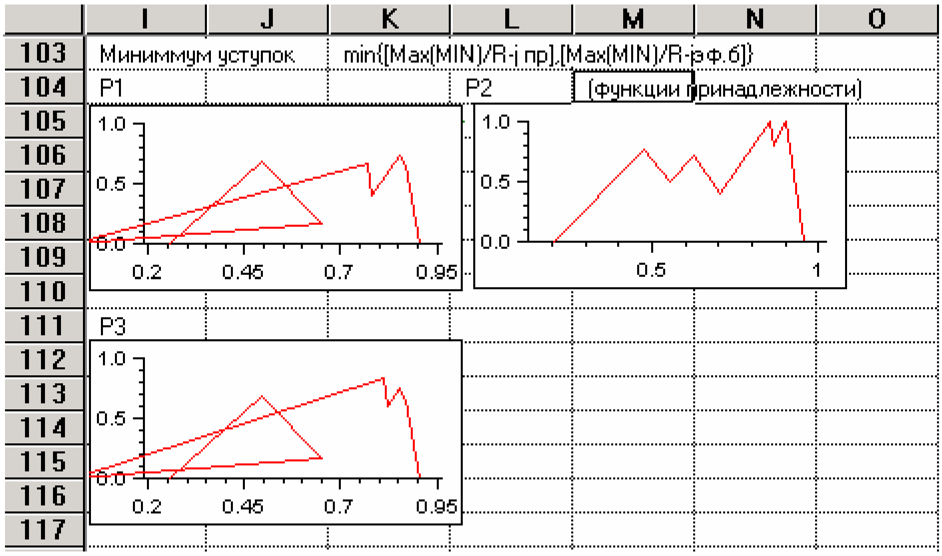


Рис. 4.9

При таком подходе продукт $P2$ однозначно получает достаточно заметное преимущество. Окончательное решение может быть получено, если вычислить сумму

$$\mu(P_J) = \mu_2 + \mu_{-j} \text{ (рис. 4.10).}$$

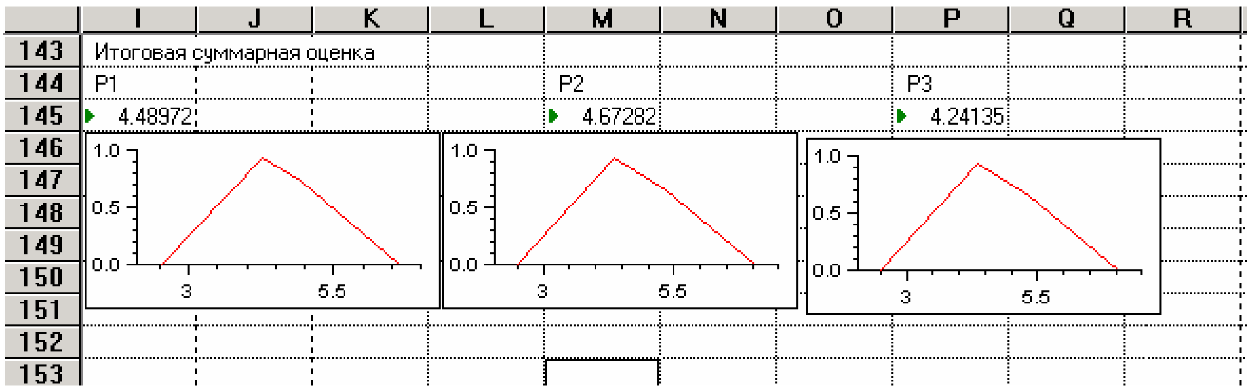


Рис. 4.10

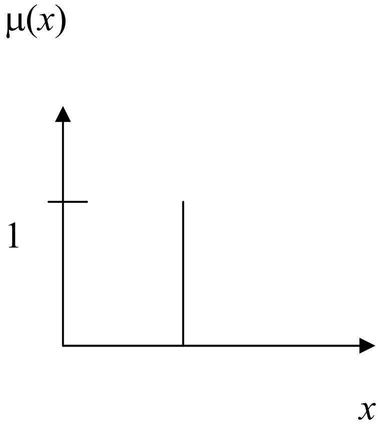
Использование нечетких чисел позволяет сопоставлять продукты с учетом неопределенности полученных оценок. Строго определенное число можно представить функцией принадлежности (см. рис. 4.10), полностью неопределенное число функций принадлежности (рис. 4.11), промежуточное положение занимает нечеткое число с произвольной функцией принадлежности (рис. 4.12) .

Введем коэффициент ненадежности оценки

$$\gamma = FzArea/Area\ ,$$

где *FzArea* – площадь под кривой произвольной функции принадлежности (рис. 4.13);

Area-площадь под прямоугольной функцией принадлежности (см. рис. 4.12) $0 < \gamma < 1$. Коэффициент надежности оценки $\bar{\gamma} = 1 - \gamma$.



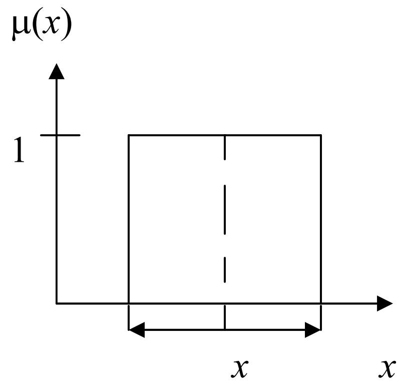


Рис. 4.11 Рис. 4.12

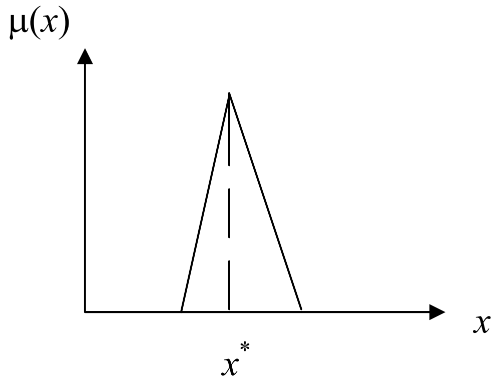


Рис. 4.13

Модифицированные оценки продуктов получаются умножением их значений на γ. Соответствующие результаты приведены в табл. 4.9 и на рис. 4.14, которые опять же указывают на предпочтительность продукта P_2.

Таблица 4.9

	A	B	C	D	E	F	G	H
121	Расчет минимума суммарной ценности с учетом коэффициента надежности							
122	P1			P2				
123	2.0223	4.10277		2.23469	4.55314			
124	gamma=	0.492911		gamma=	0.490802			
125	коэф.надежн.=		1-gamma					
126								
127	коэф.надежн.=		0.507089	коэф.надежн.=		0.509198		
128								
129	итоговая оценка=		{min[MAX(MIN)эб,MAX(MIN)пр]}			*коэф.надежн.		
130								
131	итоговая оценка=		1.94689	итоговая оценка=		1.9974		
140	P3							
141	2.02639	4.05277						
142	gamma=	0.5						
143	коэф.надежн.=		0.5					
144	Итоговая оценка=		1.79549					
145								

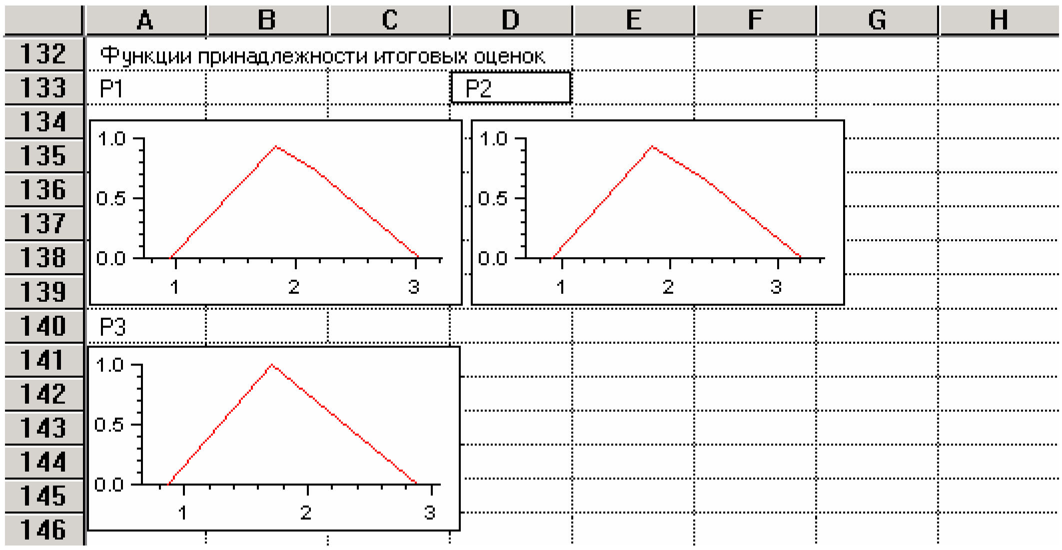


Рис. 4.14

Кроме этого в табл. 4.7 – 4.9 приведены результирующие оценки альтернативных продуктов, которые рассчитывались как суммы оценок с учетом коэффициента надежности по «привлекательности рынка/эффективности бизнеса» и минимуму уступок. Эти оценки также подтвердили преимущество продукта $P2$ (рис. 4.15, 4.16).

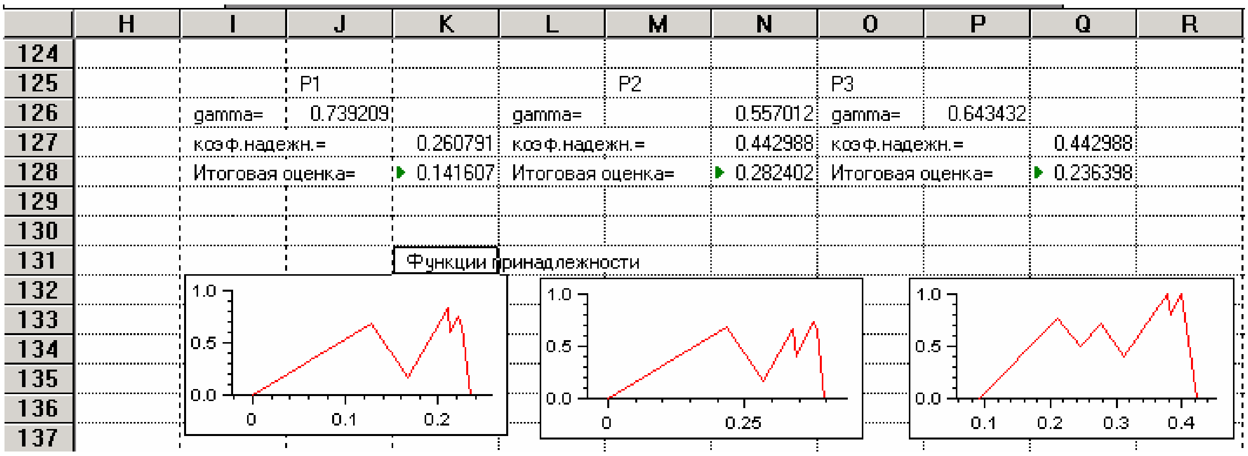


Рис. 4.15

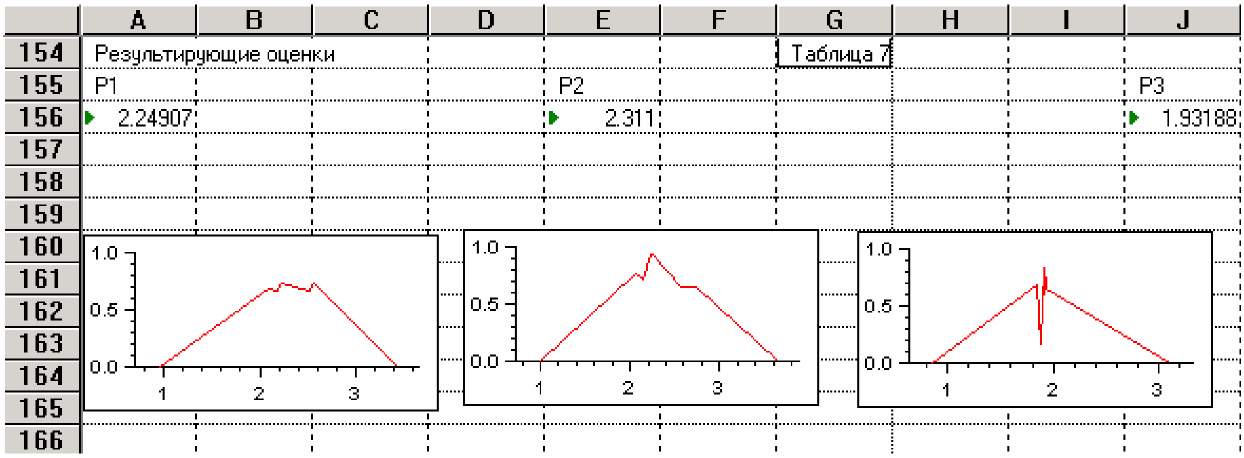


Рис. 4.16

Таким образом, применение нечетких чисел дает не только возможность различными способами провести многокритериальный выбор альтернативных продуктов, но и учесть фактор неопределенности, присутствующий при выборе оценок. Следует отметить, что продукт *P*2 имеет также и наибольшие значения коэффициента надежности по всем оценкам.

В работе [10] для сравнения альтернативных продуктов предлагается позиционирование их в матрице "Привлекательность рынка Эффективность бизнеса". Эту процедуру можно также выполнить с использованием нечетких оценок.

Рассмотрим задачу в общем виде.

Пусть необходимо позиционировать некоторый продукт в матрице "Привлекательность рынка / Эффективность бизнеса". Оценки, веса и сама матрица заданы в нечеткой форме. На рис. 4.17 представлена матрица

"Привлекательность рынка / Эффективность бизнеса" в нечеткой форме с соответствующими функциями принадлежности по осям и здесь же представлены функции принадлежности оценок:

$\bar{S}_э$ – оценка эффективности бизнеса;

$\bar{S}_{пр}$ – оценка привлекательности рынка.

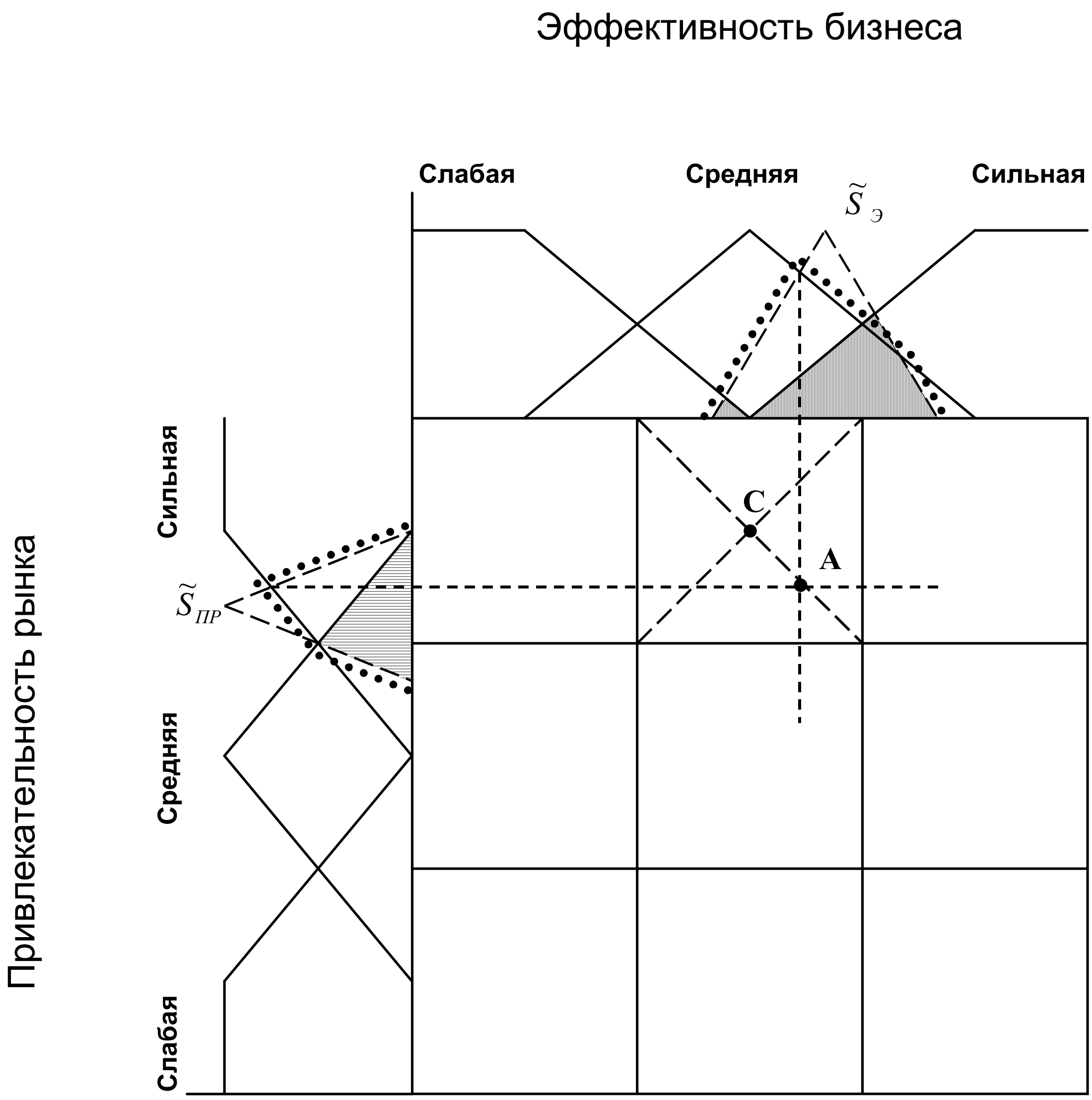


Рис. 4.17

Для позиционирования продукта построим пересечения соответствующих функций принадлежности, обозначенные разными видами штриховки. Из рисунка видно, что по эффективности бизнеса для данного продукта наиболее близкой является оценка "средняя", по привлекательности рынка "сильная". Положение продукта в квадранте "Сильная – Средняя" можно определить по точке, определяемой координатами максимумов соответствующих пересечений (точка А).

Окончательная оценка продукта:

"Средняя эффективность бизнеса с тенденцией к сильной";

"Сильная привлекательность рынка с тенденцией к средней".

Отметим, что более глубокий анализ, который требует привлечения дополнительных сведений из теории нечетких множеств, позволит оценить и степени выраженности соответствующих тенденций.

Чисто качественно эти тенденции можно определить по отклонению точки А от центра тяжести (точка *C*) соответствующей ячейки матрицы "Привлекательность рынка / Эффективность бизнеса".

Таким образом, задача позиционирования продукта в матрице может быть решена в условиях, когда указание точных оценок для продукта проблематично.

4.2. Выбор альтернативных продуктовых программ при лингвистических оценках соответствия критериям

Продуктовые профили являются достаточно распространённым средством при выборе альтернативных программ в продуктовом и производственном планировании. Как правило, оценки соответствия альтернатив выбранным критериям представляются в числовой форме [9]. Если речь идёт, например, о принципиально новой продукции, то числовые оценки могут быть недостаточно достоверными, или же для экспертов более предпочтительными будут качественные оценки в виде словесных утверждений. В табл. 4.10 приведён вариант вербального представления продуктовых профилей для четырёх альтернативных программ P_i $i = 1, 2, 3, 4$.

Пусть $P = \{p_i : i = \overline{1, N}\}$ – множество альтернативных продуктовых программ,

$C = \{c_j : j = \overline{1, N}\}$ – множество критериев, по которым выносятся оценки,

$Q = \{q_n : n = \overline{1, N}\}$ – терм-множество лингвистических оценок соответствия продуктовых программ $p_i \in P$ для всех i критериям $c_j \in C$ для всех j.

Отношение $R: P \to C'$ в этом случае становится нечётким, т.е. каждый элемент $r_{ij} \in R$ рассматривается как нечёткое множество. Для продуктовых профилей, представленных табл. 4.10, матрица R имеет вид

$$R = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 & C_9 & C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccccc} B & M & MM & M & S & B & B & M & MM & MM & M & MM & MM \\ MM & MM & M & MM & M & MM & B & MM & MM & MM & LM & MM & MM \\ M & MM & B & S & B & MM & B & MM & MM & MM & B & MM & M \\ M & B & MM & B & S & B & MM & MM & MM & MM & B & M & MM \end{array} \right] \end{array}$$

Выбор наилучшей альтернативы в такой постановке задачи будет заключаться в сравнении соответствующих нечётких множеств.

На рис. 4.18, *а* представлены функции принадлежности лингвистических значений, используемых в матрице R и табл. 4.10 для описания продуктовых профилей анализируемых программ. Треугольные функции принадлежности выбраны лишь из соображений простоты графического представления. Выбор вида функций принадлежности не имеет принципиального значения для конечных результатов.

В качестве первого шага анализа альтернатив выполняется операция нахождения пересечений нечётких множеств, являющихся элементами строк матрицы R. Для упрощения рисунков рассмотрим задачу меньшей размерности. На рис. 4.18, *б*, *в* для простоты представлены две произвольные строки матрицы оценок с номерами h и $h + V$.

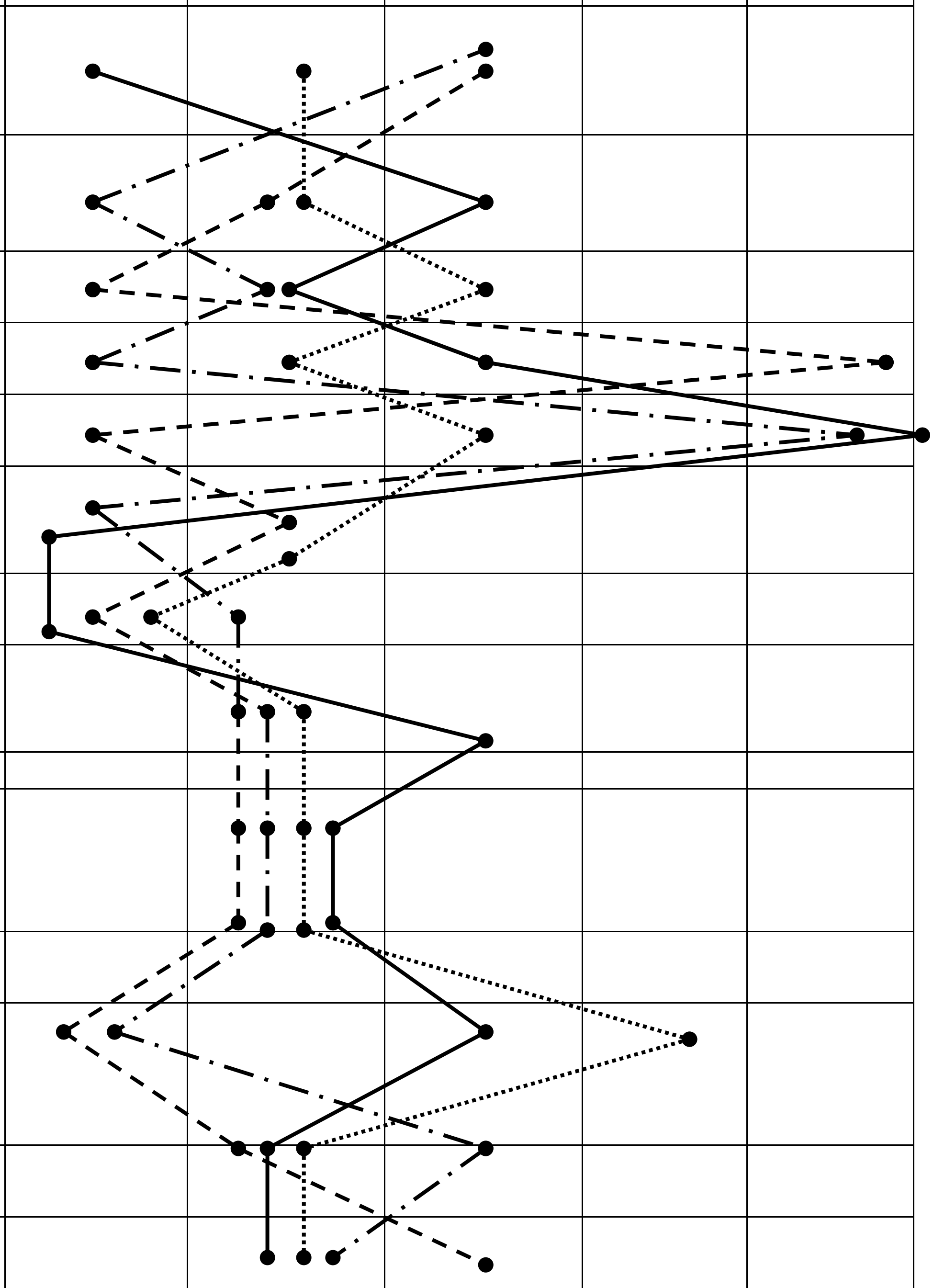
Пусть, как это показано на рисунке 4.18, *б*, строка r_h содержит лингвистические оценки < малое, среднее, выше среднего, большое >=< S, M, MM, B > с соответствующими функциями принадлежности

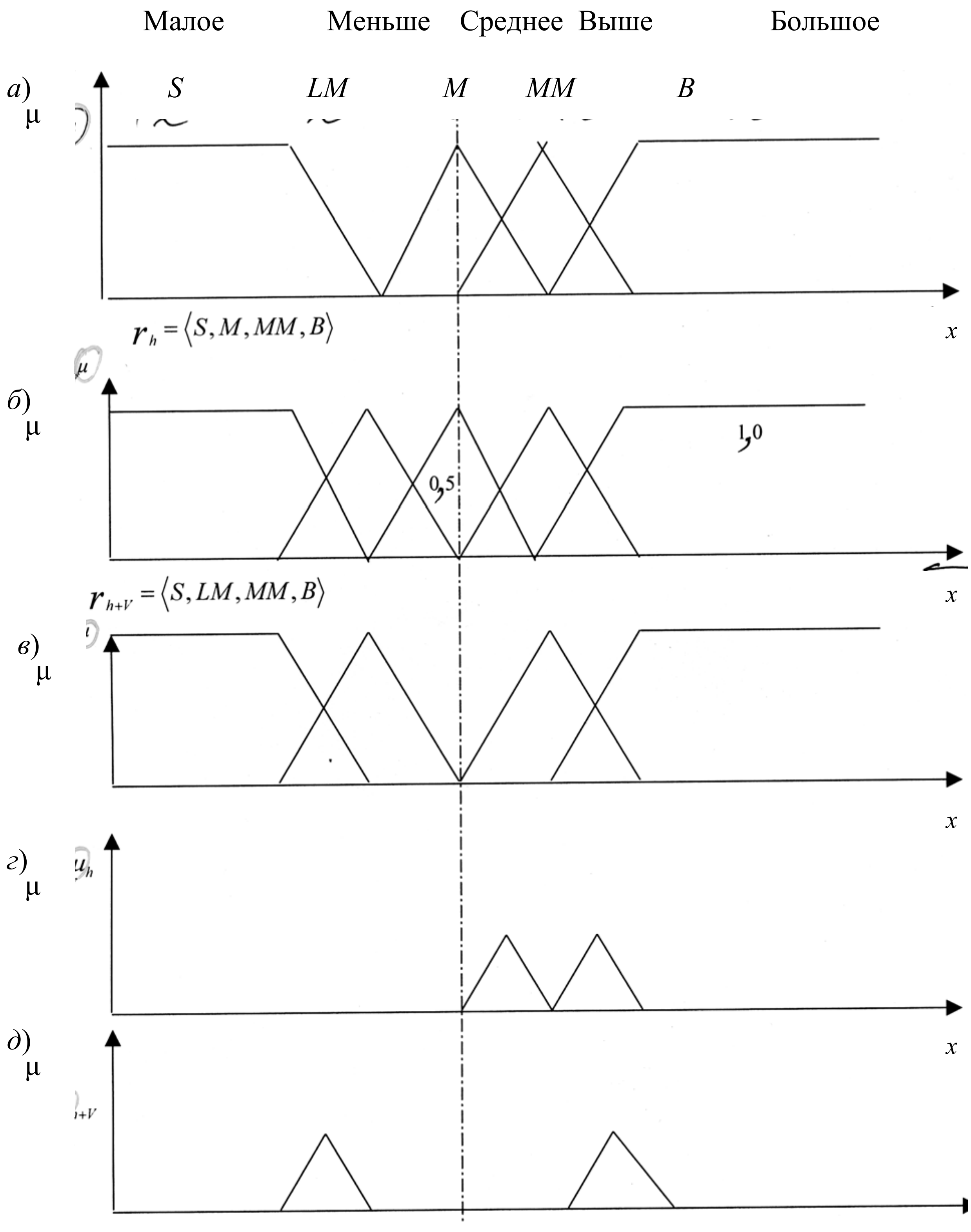
$\{\mu_s(x), \mu_m(x), \mu_{mm}(x), \mu_b(x)\}$.

Строка $r_{h+V} - \langle S, LM, MM, B \rangle$ (рис. 4.18, *в*) и $\{\mu_s(x), \mu_{lm}(x), \mu_{mm}(x), \mu_b(x)\}$ соответственно.

Таблица 4.10

Оценки					
Экономический критерий	Большое *B*	Выше среднего *MM*	Среднее *M*	Меньше среднего *LM*	Малое *S*
Вклад в покрытие остонних затрат и прибыль					
Затраты капитала в основные средства					
в оборотные средства					
Пригодность для НИОКР ноу-хау					
Техническое исполнение					
Пригодность для сбыта система маркетинга					
система распределения					
Пригодность для производства наличие технологий					
наличие мощностей					
Пригодность для снабжения доступность сырья (материалов)					
Зависимость от поставщиков					
Пригодность для утилизации повторное (дальнейшее) использование					
повторная (дальнейшая) утилизация					
Общая оценка пригодности					
Примечание: P_1 программа 1 P_2 программа 2 P_3 программа 3 P_4 программа 4					





Малое
Меньше
Среднее
Выше
Большое
а)
μ
S
LM
M
MM
B
x
r_h = ⟨S, M, MM, B⟩
б)
μ
0,5
1,0
x
r_{h+V} = ⟨S, LM, MM, B⟩
в)
μ
x
г)
μ
x
д)
μ

Рис. 4.18

Тогда $\mu_h(x) = \min\{\mu_s(x), \mu_m(x), \mu_{mm}(x), \mu_b(x)\}$ (рис. 4.18, *г*),

$\mu_{h+V}(x) = \min\{\mu_s(x), \mu_{lm}(x), \mu_{mm}(x), \mu_b(x)\}$ (рис.4.18, *д*).

Для сравнения нечётких множеств $H_h = \{\mu_h(x)/x\}$ и (4.11)

$$H_{h+V} = \{\mu_{h+V}(x)/x\} \qquad (4.12)$$

используем взвешенную мощность этих множеств, вычисляемую на основе α -разбиений [5] по формуле

$$U_i = \sum_j \frac{x_{ij}}{n_j} d\alpha_i \ , \qquad (4.13)$$

где α_i – i-й α -уровень, $d\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$,

x_{ij} – аргумент функций принадлежности (1) и (2) такой, что $\mu_h(x_{ij}) \geq \alpha_i$ или $\mu_{h+V}(x_{ij}) \geq \alpha_\mathrm{i}$

n_j – число значений x_{ij}.

Полная мощность $U = \sum_i U_i$.

Если какая-то строка матрицы оценок содержит непересекающиеся множества, то определяются группы множеств с непустым пересечением (рис. 4.18 *г, д*) и значение мощности рассчитывается для каждой группы отдельно, а затем они суммируются. Из рис. 4.18 *г, д* видно, что $U_h > U_{h+V}$, соответственно альтернатива *h* предпочтительней *h+V.*

До настоящего момента предполагалось, что оценки соответствия альтернатив критериям различны. Вполне реально, что некоторые оценки могут повторяться и это обстоятельство должно найти своё отражение при анализе.

Для учёта кратности совпадения оценок введём весовую функцию кратности *w(r, x)*, которую определяем следующим образом :

W(r, x)=1 при $r = 1$ и любом *x*, где *r* – кратность оценок;

W(r, x) – монотонно возрастает с увеличением *x* при $r > 1$.

Этим требованиям, например, удовлетворяют функции

$$w(r,x) = 2 - e^{-a(r-1)x},$$

$$w(r,x) = 1 + a(r-1)x^2, \text{ где } a = \mathrm{const}. \qquad (4.14)$$

Значения $W(r, x)$ будут изменяться не только при переходе от одного нечёткого множества к другому, но и внутри самого нечёткого множества. Если же значения $W\ (r,x)$ необходимо зафиксировать внутри нечёткого множества, то можно использовать один из следующих вариантов:

$$1)\ \overline{W(r,x)} = \frac{1}{x_R - x_L} \int\limits_{X_L}^{X_R} W(r,x)dx\ ,$$

где x_R, x_L – соответственно левая и правая границы соответствующего нечёткого множества;

$$2)\ \overline{W(r,x)} = W(r, x_{\max})\ ,$$

где $x_{\max}$ – координата максимума функции принадлежности нечёткого множества;

$$3)\ \overline{W(r,x)} = W(r, x_C),$$

где x_C – координата центра тяжести функции принадлежности нечёткого множества.

Функции (4.14) представляют мнение, что кратности высоких оценок более важные, чем кратности низких. Обратное мнение может быть представлено, например, такими функциями:

$$W(r,x) = a(r-1) + e^{-b(r-1)x}\ ;$$

$$w(r,x) = a(r-1) + \frac{b}{b + x(r-1)}\ ,$$

где $a,\ b$ = const и определяются из граничных условий, обусловленных конкретной задачей.

В любом случае соотношение (4.13) приобретает вид

$$U_i = \sum_j \frac{x_{ij}}{n_j} W(r_i, x_{ij}) d\alpha_i\ .$$

Выбирая различные варианты весовых функций кратности, можно задать различные значения важности кратности появления тех или иных оценок.

На рис. 4.19 *а, б, в* представлены результаты анализа без учёта кратности оценок по критериям, в результате которого было установлено, что программа P_2 имеет явное преимущество, а программы P_1, P_3, P_4 получили одинаковые оценки $U_1 = U_2 = U_3 = 1{,}11$.

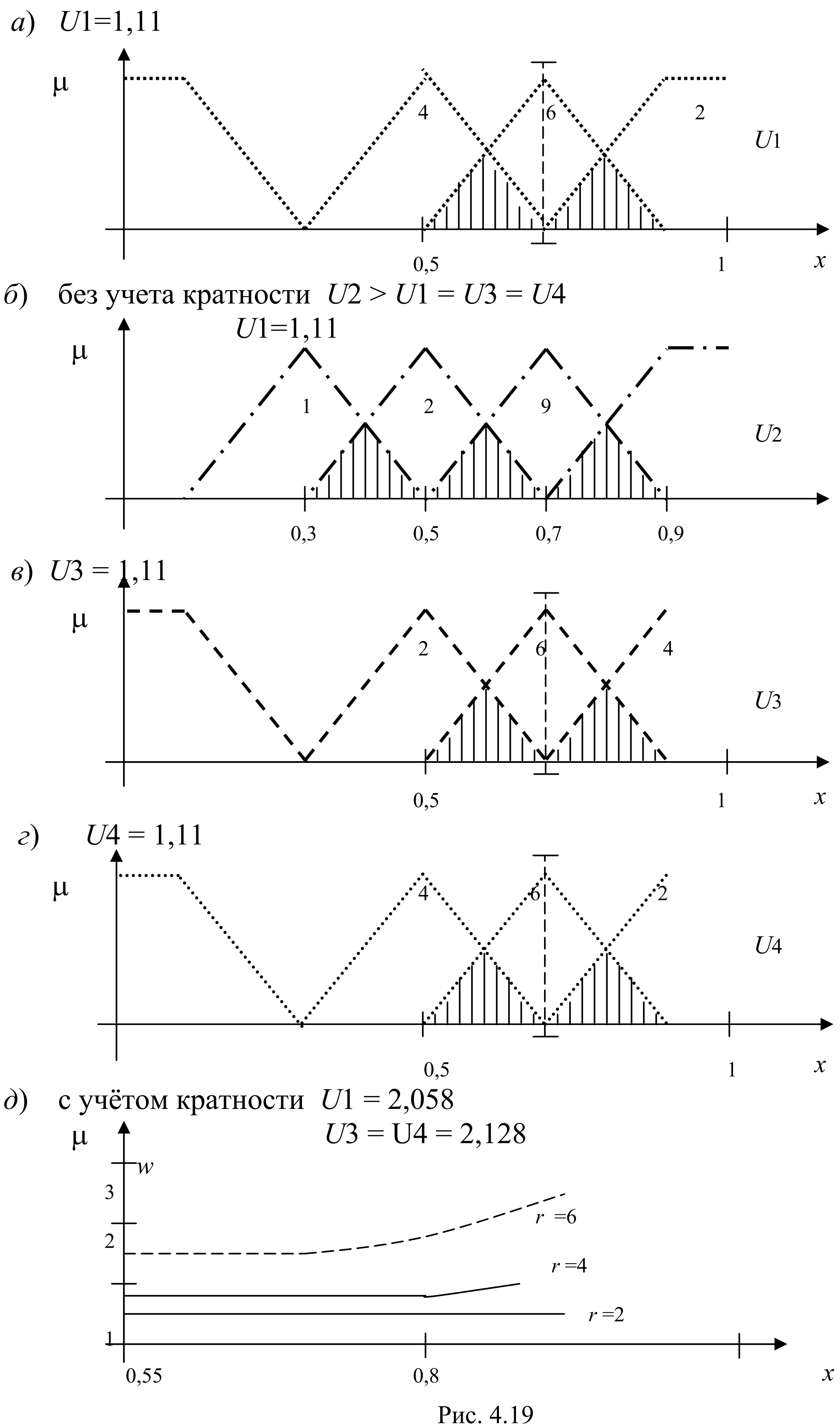

а) U1=1,11
μ
4
6
2
U1
0,5
1
x
б) без учета кратности U2 > U1 = U3 = U4
U1=1,11
μ
1
2
9
U2
0,3
0,5
0,7
0,9
в) U3 = 1,11
μ
2
6
4
U3
0,5
1
x
г) U4 = 1,11
μ
4
6
2
U4
0,5
1
x
д) с учётом кратности U1 = 2,058
U3 = U4 = 2,128
μ
w
3
2
1
r =6
r =4
r =2
0,55
0,8
x

Рис. 4.19

Рассмотрим, как будет влиять кратность оценок для этих программ. Значения кратностей на рис. 4.19, *а – г* указаны цифрами в вершинах соответствующих функций принадлежности.

Учёт кратности оценок предполагает соотнесение этих кратностей с элементами нечётких множеств, образованных пересечениями соответствующих оценок. Из рис. 4.19 видно, что разные кратности связаны с одними и теми же множествами. Можно предложить следующее решение. Для заштрихованных площадей определяется центр тяжести, через него и вершину, точку максимума соответствующей функции принадлежности, проводится разграничивающая прямая. Элементам слева от неё присваивается кратность, указанная слева, элементам справа – кратность, указанная справа. Для ситуации, представленной рис. 4.19, *а, в, г, д*, разграничительная линия пройдёт через вершину треугольника и середину основания, что объясняется выбором треугольных функций принадлежности. При *S*-образных функциях картина будет иной.

На первом этапе анализа было установлено явное преимущество программы P_2. Программы P_1, P_3 и P_4 получили одинаковые оценки.

Введение функции кратности позволило получить следующие оценки $U_1 = 2{,}058$, $U_3 = U_4 = 2{,}128$, т.е. уточнить анализ. В рассмотренном примере даже при выполнении уточняющих расчётов две альтернативные программы P_3 и P_4 получили одинаковые оценки. На более ранних стадиях анализа одинаковые оценки были получены для программ P_1, P_3, P_4. В общем случае может оказаться необходимым уточнить результаты анализа, если на предшествующих этапах или с самого начала альтернативные программы получили одинаковые оценки.

Предположим, что на первом этапе были выделены альтернативные программы P_q и P_h с наилучшими значениями U_q и U_h, $\left|U_q U_h\right| \to 0$, что не даёт оснований для окончательного решения. Выбираем одну из программ, например P_q. В исходной матрице *R* оставляем без изменения соответствующую строку.

Для всех остальных строк вычисляем объединения

$$S_i = \underset{j}{V} r_{ij} = \max\left\{\mu_{ij}\right\}, i \neq q \,. \qquad (4.15)$$

Нечёткие множества S_i можно рассматривать как наиболее благоприятную оценку соответствующей альтернативной программы.

Дополнение этого множества до универсального $\overline{S_i} = 1 - S_i$ можно рассматривать как множество, характеризующее уровень упущенных i-й альтернативой шансов. Интегральную оценку этих шансов можно получить, вычислив взвешенную мощность соответствующего множества по соотношениям (4.15), учитывая или не учитывая кратность оценок.

В качестве окончательной оценки альтернативной программы принимаем

$$U_q' = U_q + U(\overline{S})$$

Очевидно, что для наилучшей альтернативы $U_q' \to \max$, так как здесь учитываются не только собственные шансы альтернативы q, но и уступки ей всех других альтернатив. Аналогичные расчёты можно проделать и для продуктовой программы с номером h.

Окончательное решение будет приниматься в зависимости от соотношения между величинами U_q' и U_h'. Эти расчёты для рассматриваемого примера позволили получить следующую ранжировку альтернативных продуктовых программ:

$$P_2, P_4, P_3, P_1.$$

Таким образом установлена наилучшая программа, а также программы, к которым можно перейти впоследствии или которые могут рассматриваться как резервные.

Как отмечалось ранее, полезно построить некоторую цепочку продуктовых программ так, чтобы в случае необходимости осуществить переход на другие программы. В этом случае возможны два подхода: первый – альтернативы (продуктовые программы) ранжируются по интегральной оценке относительно всей совокупности критериев, при этом полагают, что критерии равноценны; второй – когда предполагают, что критерии имеют различный уровень значимости и альтернативы ранжируются с учетом этого обстоятельства. В первом случае для всех $i \neq q$ по ранее описанному алгоритму рассчитываются значения $U(\overline{S_i})$ и все альтернативы выстраиваются в порядке возрастания значений $U(\overline{S_i})$. Так как $U(\overline{S_i})$ характеризует снижение качества альтернатив, то можно выстроить определенную последовательность перехода к реализации некоторых продуктовых программ.

Уровень значимости критерия во втором случае может задавать эксперт, либо он может быть определен из матрицы R.

Рассчитав $S_j = \underset{i}{V} r_{ij} = \max\{\mu_{ij}\}$ по всем $i \neq q$, определяем $S_j = 1 - S_j$. Это значение характеризует уровень проигрыша всех оставшихся альтернатив по критерию j альтернативе q. Затем вычисляем $U(\overline{S_j})$. Вполне логично предположить, что проигрыш альтернатив по наиболее важному критерию должен стремиться к минимуму, следовательно, выбрав минимальное $U(\overline{S_j})$, определим наиболее существенный по значимости критерий. Естественно, что затем нужно выбрать из оставшихся такую альтернативу, которая имеет наилучшую оценку по этому критерию. Таким образом будет определена возможная цепочка продуктовых программ.

4.3. Выбор альтернативных продуктов программ на основе правил условного логического вывода

Рассмотренные в предыдущих разделах методы выбора альтернативных продуктовых программ основываются на наличии матрицы оценок уровня соответствия альтернативных продуктовых программ критериям, по которым они оцениваются. Не исключено, что построение этих матриц будет по тем или иным причинам затруднено. И, например, для экспертов оценку альтернативных продуктовых программ будет удобно проводить в форме правил условного логического вывода (продукционных правил).

Используя данные табл. 4.1, сформулируем упрощенное правило логического вывода, например:

если <вклад в покрытие постоянных затрат и прибыль оцениваются как хороший> и <затраты капитала в основные средства достаточно низкие> и <пригодность для сбыта хорошая>, то <программа 1 весьма подходящая> (4.16).

Полный набор подобных правил образует базу знаний системы. Для дальнейшей обработки производится свертка условий в левой части и правила вида (4.16) преобразуются к виду:

если <свертка условий (критериев)>, то <вывод>. (4.17)

При известных выводах обработка правил (4.17) описана в [15]. В то же время следует отметить, что создание правил вида (4.16) особенно при достаточно большом наборе критериев и альтернативных программ оказывается сложным.

Возможна другая формулировка, при которой для определенной свертки критериев нужно найти наиболее подходящее значение вывода. При этом априорно известен только допустимый набор значений выводов.

В такой постановке правила (4.16), (4.17) представляются в виде:

если <свертка критериев>, то < ? >. (4.18)

Пусть имеется множество продуктовых программ, для которых нужно произвести оценку:

$P = \left\{ P_i : i = \overline{1, N} \right\}$

$C = \left\{ c_j \cdot j = \overline{1, M} \right\}$ – *множество критериев, используемых для оценки;*

$L_j = \left\{ l_{jk} : k = \overline{1, K} \right\}$ – *множество лингвистических значений j-го критерия;*

$L = \left\{ L_j : j = \overline{1, M} \right\}$.

Для лингвистических значений l_{jk} известна функция принадлежности:

$$\mu_{ljk}(z). \tag{4.19}$$

Для определенности положим, что $z \in [0,1]$.

Предположим, что оценка программ проводится в форме лингвистических высказываний.

$$R = \left\{ r_q : q = \overline{1, Q} \right\}, \tag{4.20}$$

для которых известны соответствующие функции принадлежности $\mu_{rq}(y)$, $y \in [0,1]$.

При известных функциях принадлежности (4.19) для свертки критериев в соответствии с используемыми логическими связками и модификаторами вычисляется результирующая функция принадлежности

$$\mu_{ch}(z) = F_h\left[\mu_{ljk}(z)\right], \quad k \in [1, K], \quad j \in [1, M], \quad h = \overline{1, H}, \qquad (4.21)$$

где F_h – функциональное преобразование, определенное видом левой части правил типа (4.18);

H – количество использованных комбинаций критериев или правил вида (4.18).

При вычислении свертки критериев (4.21) возможны два варианта:

1) пересечение всех множеств, соответствующих оценкам удовлетворения альтернативой выбранным критериям, образует непустое нечеткое множество. В этом случае следует непосредственно переходить к ответу на вопрос, сформулированный в соотношении (4.18);

2) пересечение всех нечетких множеств образует пустое нечеткое множество.

В последнем случае можно предложить следующее решение: нечеткие множества, входящие в левую часть правила (4.18), комбинируются в группы так, чтобы их пересечения образовывали непустые множества. Каждая из этих групп рассматривается как частная свертка, которые анализируется отдельно, а затем выводится общий результат. Для иллюстрации положений, рассматриваемых в данном разделе, используем данные табл. 4.1. С целью сокращения объема расчетов ограничимся рассмотрением одной программы P_2.

В табл. 4.1 используется тринадцать критериев $C = \{Ci, i = 1, B\}$, оценки соответствия альтернатив по критериям определены:

- очень плохо (*VB*);
- плохо (*B*);
- среднее (*M*);
- хорошо (*W*);
- очень хорошо (*VW*).

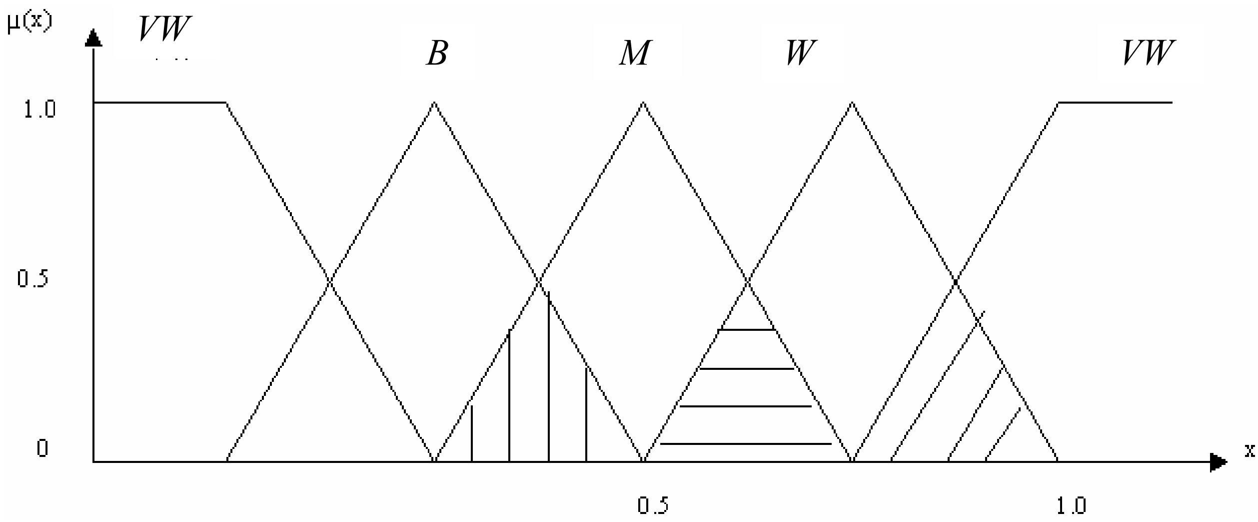
Соответствующие нечеткие множества могут быть представлены, например, рис. 4.20.

Соотношение (4.18) для программы P_2 записывается в виде

если $<C_1 = W>$ и $<C_2 = W>$ и $<C_3 = M>$ и $<C_4 = W>$ и $<C_5 = M>$ и $<C_6 = W>$ и $<C_7 = VW>$ и $<C_8 = W>$ и $<C_9 = W>$ и $<C_{10} = W>$ и $<C_{11} = B>$ и $<C_{12} = W>$ и $<C_{13} = W>$,
то $<P_2$ оценивается как $?>$.

Ненулевые пересечения, например, могут быть образованы критериями

$$A_1 = (C_3, C_{11}), \; A_2 = (C_5, C_1, C_2, C_4, C_6, C_8, C_9, C_{10}, C_{12}),$$
$$A_3 = (C_7, C_{13}).$$



$$A_1 = (C_3 \wedge C_{11})$$

$$A_2 = (C_5 \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge C_4 \wedge C_6 \wedge C_8 \wedge C_9 \wedge C_{10} \wedge C_{12})$$

$$A_3 = (C_7 \wedge C_{13})$$

Рис. 4.20

Эти пересечения на рис. 4.21 представлены соответствующими заштрихованными областями. Предположим для простоты, что качество программы оценивается тремя лингвистическими оценками:

- низкое качество;
- среднее качество;
- высокое качество.

Графики соответствующих функций принадлежности представлены на рис. 4.22. Отметим еще раз, что выбор треугольных функций принадлежности объясняется лишь простотой графических представлений и принципиального значения не имеет. На этом же рисунке нанесены и функции принадлежности, соответствующие пересечениям A_1, A_2, A_3.

Получение интересующего нас вывода требует вычисления импликации. Самым простым является вычисление по формуле

$$\mu_q(Z, y) = \min\{\mu_{ch}(Z),\ \mu_{e_{r_q}}(y)\},\ \text{для всех}\ q \in [1, Q]. \qquad (4.22)$$

Для примера, представленного рисунком, $Q = 3$.

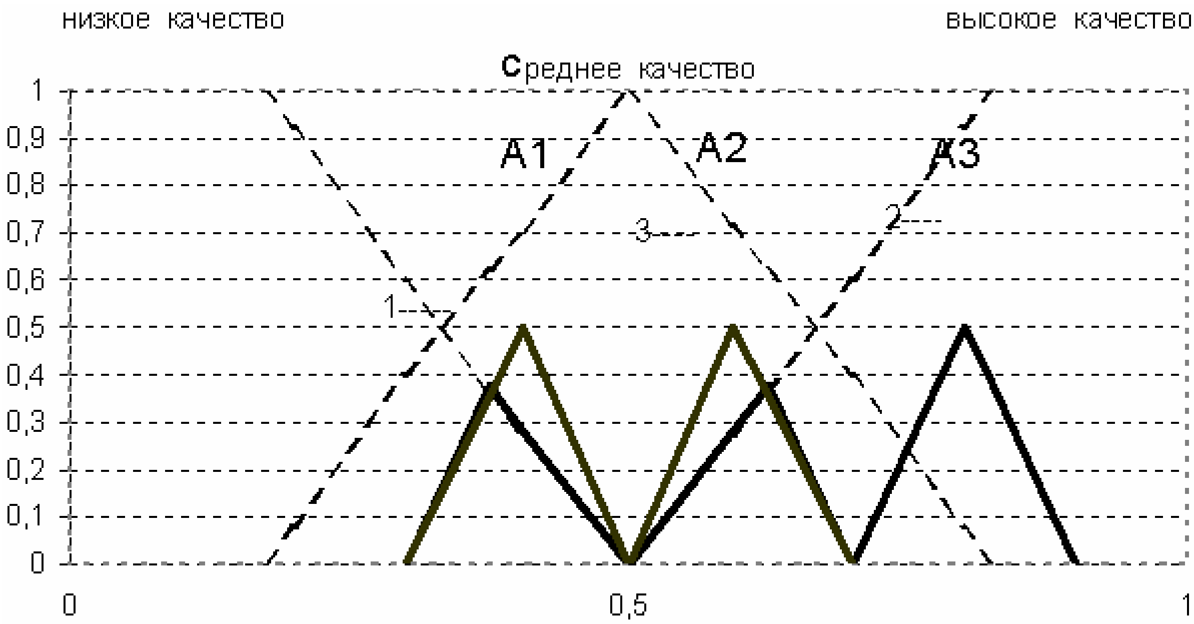


Рис. 4.21

Выполнения преобразований по соотношению (4.22) для оценки "низкое качество" представлено нечетким множеством 1, для оценки "среднее качество" – нечетким множеством 2, для оценки "высокое качество" – множество 3. Для выбора наиболее достоверной оценки качества программы необходимо сравнить нечеткие множества 1, 2, 3. Эту процедуру можно выполнить с помощью уже используемой взвешенной мощности нечетких множеств:

$$\text{M} = \sum \frac{x_i}{n_i} d\alpha_i .$$

Для примера, представленного на рис. 4.21, 4.22, были получены следующие результаты:

M (низкое качество) = 0,195;
M (среднее качество) = 0,25;
M (высокое качество) = 0,37.

Таким образом, качество программы P_2 оценивается как высокое, следовательно, данная продуктовая программа может быть принята для дальнейшей проработки.

Возможен иной подход к расчету мощности нечеткого множества. Согласно [15] мощность нечеткого множества

$$\mathrm{M}_q = \sum_{z,y \in U} \mu_q(z,y). \tag{4.23}$$

Однако использование соотношения (4.23) связано с определенными вычислительными неудобствами, главным образом из-за того, что точность расчета мощности существенно зависит от шага вычислений (см. рис. 4.22).

Более удобным является подход, основанный на классическом определении мощности множества [16], поскольку при выполнении расчетов происходит переход от счетных множеств к конечным множествам, для которых понятие мощности совпадает с привычным понятием числа элементов множества.

Для расчетов используем α – разбиение нечетких множеств, и мощность нечеткого множества определим как

$$\mathrm{M}_q = \sum_i n_i d\alpha_i, \tag{4.24}$$

где n_i – количество элементов множества, таких, что $\mu(x) \geq \alpha_i$;

$d\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$.

Нетрудно видеть, что результат не зависит (слабо зависит) от шага вычислений, так как увеличение шага приводит к уменьшению n_i, но и одновременно к увеличению $d\alpha_i$ и, наоборот, уменьшение шага вычислений, увеличивая n_i, уменьшает $d\alpha_i$ (см. рис. 4.23).

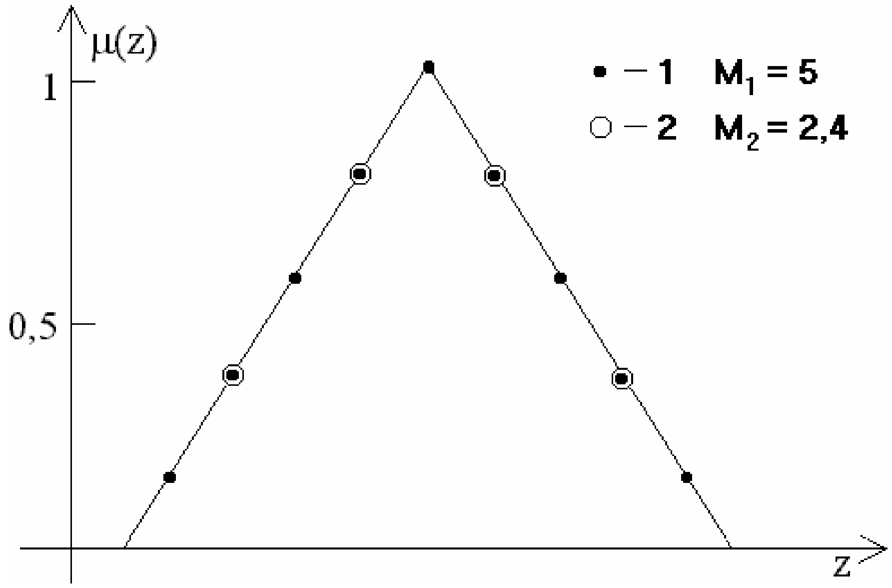


Рис. 4.22

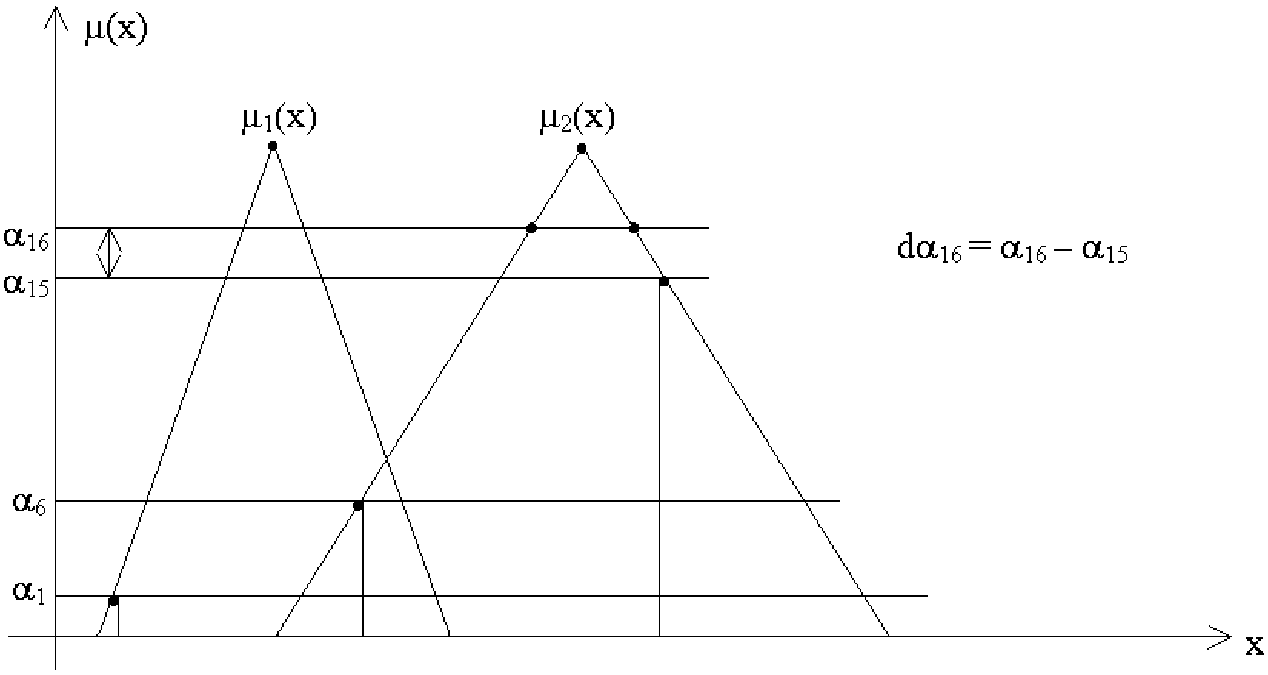


Рис. 4.23

Расчеты по соотношению 4.24 дали следующие результаты:

M' (низкое качество) = 0,7;

M' (среднее качество) = 2,4;

M' (высокое качество) = 1,5.

Таким образом, в данном случае качество программы P_2 оценивается как среднее. Эту оценку можно интерпретировать как оценку осторожного наблюдателя (эксперта). Чисто визуальный анализ (см. рис. 4. 21) дает основания согласиться с этой оценкой.

На рис. 4. 24 представлен вариант анализа, когда используется большее количество оценок качества программ:

- очень плохо (*VB*);
- ниже среднего (*LM*);
- среднее (*M*);
- выше среднего (*MM*);
- высокое (*W*).

Результаты расчетов для данного случая следующие:

М (ниже среднего) = 0,2, М' (ниже среднего) = 0,9,
М (среднее) = 0,15, М' (среднее) = 1,0 ,
М (выше среднего) = 0,3, М' (выше среднего) = 1,1
М (высокое) = 0,4, М' (высокое) = 0,9 .

Результаты практически совпадают.

В исследовании [21] рассматривается несколько вариантов вычисления импликаций и при этом указывается на существенные недостатки соотношения (4.22). Кроме того, отмечается, что импликация

$$\mu_q(z,y) = \max\left((1-\mu_{ch}(Z)), \mu_{e_{r_q}}(y)\right) \qquad (4.25)$$

свободна от недостатков соотношения (4.22) и является наиболее "человеческой" по своей природе.

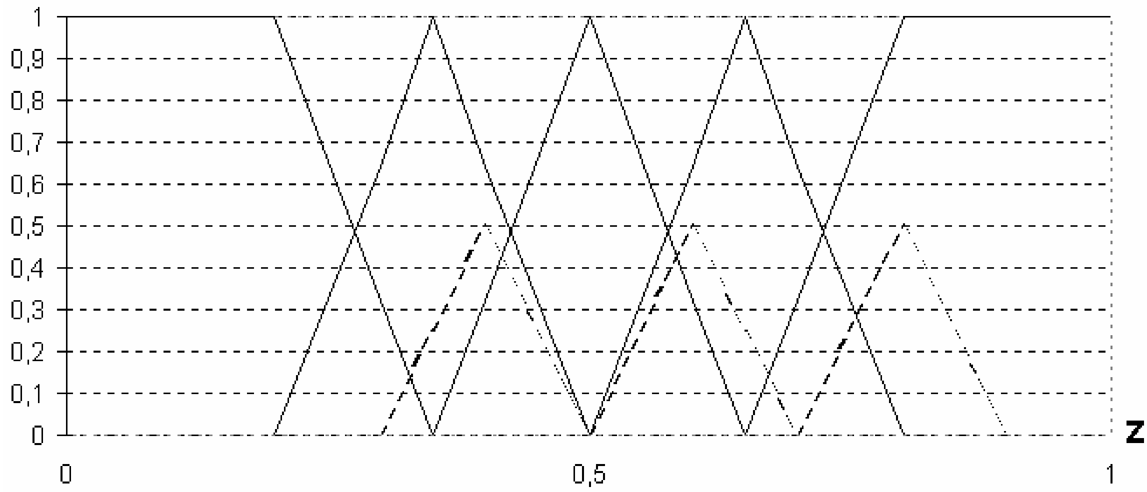


Рис. 4.24

Рис. 4.25 представляет вычисления по соотношению (4.29) в графической форме. Результаты расчетов:

М (среднее) = 0,25; М' (среднее) = 6,7;
М (высокое) = 0,26; М' (высокое) = 8,2.

Отметим полное совпадение результатов при расчете по соотношению (4.25). Качество программы P_2 оценивается как высокое.

Следует отметить, что проведенное выше рассмотрение не учитывало кратность оценок. Этот вопрос обсуждался ранее в разд. 4.1. Соответствующие соотношения, приведенные в нем, могут использоваться и в данном случае.

Вычисление свертки критериев по формуле (4.21) предполагает равноценность критериев c_j. Однако во многих задачах они имеют различные веса w_j, которые, в свою очередь, могут быть четкими или нечеткими.

Рассмотрим случай, когда веса w_j заданы четкими числами. В работе [18] учет веса критерия предполагается осуществлять возведением в степень w_j соответствующей функции принадлежности:

$$C_j\left(w_j\right)=\left\{\mu_{ljk}^{wj}\left(z\right)/z\right\}.$$

У этого предложения можно отметить следующие недостатки:

- оно не сохраняет вида функции принадлежности, что затрудняет контроль процесса вывода;

- требуется возведение вещественных чисел в дробную степень, что является не слишком удобной вычислительной процедурой;

- возможно уменьшение максимального значения результирующей функции принадлежности.

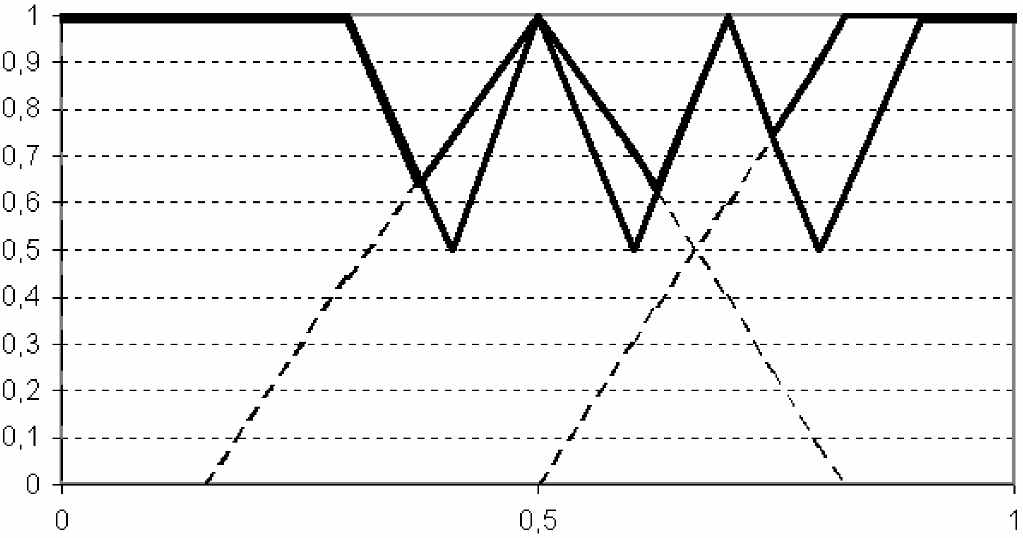


Рис. 4.25

На рис. 4.26 приведен пример, когда комбинируются два критерия А и *B* при одинаковых весах критериев $w_1 = w_2$ (кривая 1) и при $w_1=1$, $w_2=2$ (кривая 2), значение максимума $M_1 > M_2$. В задачах с использованием порогов различения этот факт может сыграть отрицательную роль.

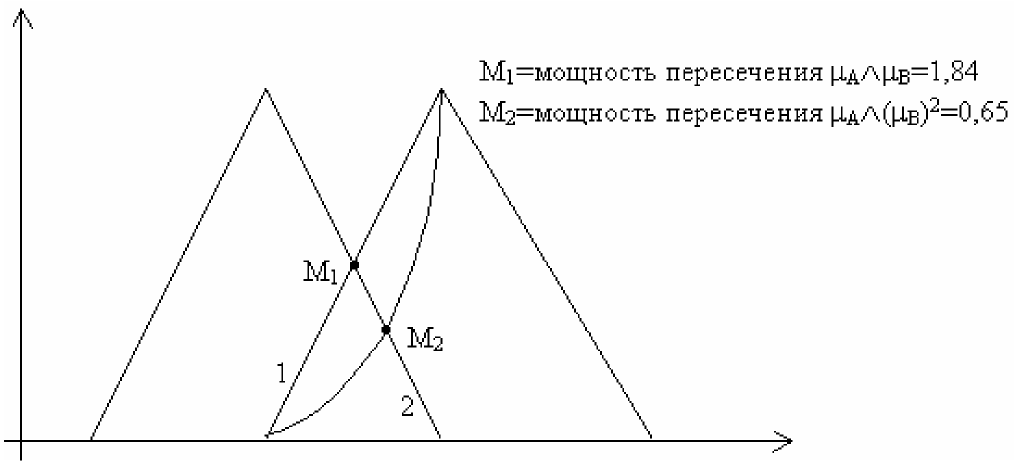


Рис. 4.26

В случае комбинирования критериев от указанных недостатков свободна следующая процедура.

Пусть C_{j1} и C_{j2} пара комбинируемых критериев с различными уровнями важности w_{j1} и w_{j2} и соответствующими функциями принадлежности $\mu_{lj1k1}(z)$ и $\mu_{lj2k2}(z)$, тогда первоначально вычисляется $\mu_{c'}(z)=\min\{\mu_{l1k1}(z), \mu_{l2k2}(z)\}$, $c'=c_{j1} \cap c_{j2}$, определяется носитель $z = \mathrm{supp}\{c'\}$ и координата центра тяжести:

$$z^* = \frac{\sum\limits_z \mu_{c'}(z) z}{\sum\limits_z \mu_{c'}(z)}.$$

Вводится функция ценности (важности) критериев (рис. 4.27).

Очевидно, что линия 1 на этом рисунке представляет ситуацию равноценности критериев, смещение этой линии, изменение угла наклона или переход на нелинейные функции ценности отражают изменение важности того или иного критерия. Простым графическим построением можно определить смещение центра тяжести z^*, то есть получить новое значение $z^*_{\text{см}}$. Тогда в качестве комбинации критериев будет принято нечеткое множество, имеющее носитель z и смещенный в сторону более значительного критерия центр тяжести.

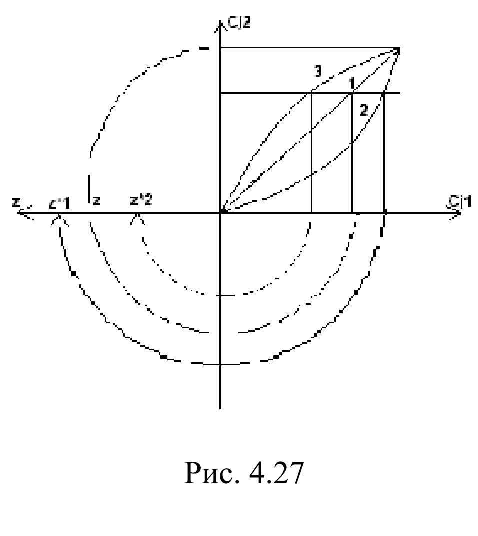


Рис. 4.27

Выполняемые в данном случае вычисления не вызывают никаких затруднений, в то же время сохраняется вид функции принадлежности и значение максимума результирующей функции принадлежности. Определенным недостатком рассмотренной процедуры является то, что она просто реализуется для какой-то пары критериев. При произвольном количестве комбинируемых с различными весами критериев возникает целый ряд трудностей, связанных с определением весов частичных комбинаций, построения функций ценности частичных комбинаций.

Можно предложить другую процедуру расчета смещенного центра тяжести (рис. 4.28).

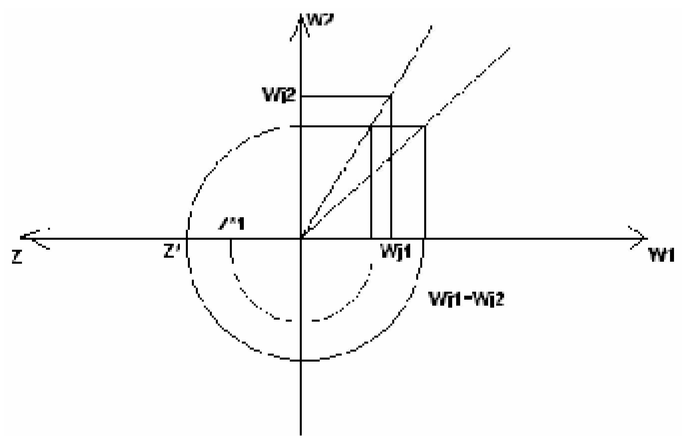


Рис. 4.28

При условии, что $0 < w_j \le 1$, в пространстве (w_1, w_2), строится точка с координатами (w_{j1}, w_{j2}), через начало координат и эту точку проводится прямая. Нетрудно видеть, что при $w_{j1} =$ $= w_{j2}$ эта прямая будет иметь наклон 45 град. и отражать равноценность критериев. Определение координаты смещения центра тяжести выполняется с помощью простых геометрических построений. Результирующий вес комбинации критериев определим

$$w' = \frac{w_{j1} + w_{j2}}{2}.$$

В последующих расчетах комбинация критериев c_{j1}, c_{j2} рассматривается как новый критерий c' с весом w'.

Если веса рассматриваются как нечеткие, то есть

$$\tilde{w}_j = \left\{ \mu_{wj}(y)/y \right\}, \qquad y \in [0,1] ,$$

то задача построения свертки критериев заметно усложняется, в частности приходится вычислять цилиндрические продолжения соответствующих нечетких множеств.

В определенной мере методика, представленная на рис. 4.27 позволяет решить эту задачу, поскольку функции ценности критериев, имеющие, вообще говоря, субъективный характер, могут рассматриваться и как форма представления нечеткости.

Приведенное выше рассмотрение относится к случаю, когда для комбинирования критериев используется логическая связка "И". Нельзя исключать и возможность применения связки "ИЛИ". Комбинация критериев c_{j1} и c_{j2} в этом случае определяется по формуле (см. рис. 4.28):

$$\mu_{c'}(z) = w_{j1}\mu_{cj1}(z) \vee w_{j2}\mu_{cj2}(z),$$

$$w_{c'} = \frac{w_{j1} + w_{j2}}{2} \quad .$$

Комбинация критериев с различными весами в этом случае даст нечеткое множество, мощность которого $P_{c'}$ будет меньше мощности множества полученного при $w_{j1} = w_{j2} = 1$ (рис. 4. 29).

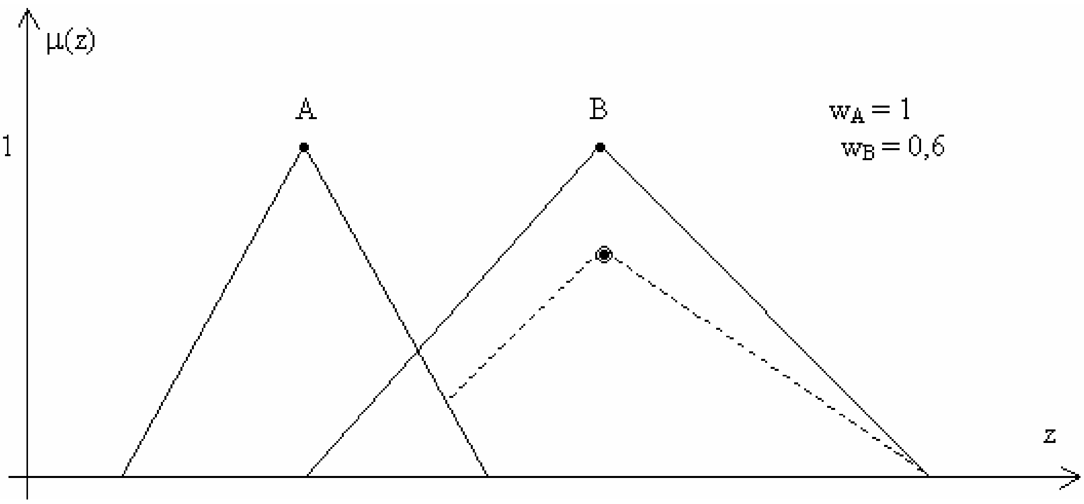


Рис. 4.29

Если непустое подмножество нечетких оценок по критериям содержит несколько оценок с кратностью большей единицы, то результирующая кратность определяется как произведение соответствующих кратностей

$$r = \prod_{i} r_i .$$

Проиллюстрируем изложенное простым примером. Пусть условная часть правила вывода имеет вид:

если <C_1=LM>и<C_2=LM>и<C_3=MM>и<C_4=H>и<C_5=MM>и<C_6=H>, то… (4.26)

Функции принадлежности соответствующих оценок по критериям C_i, i =1, 2…6 приведены на рис. 4.30 по формуле (4.25), где также указаны области действия соответствующих кратностей, которые определяются как непустые пересечения нечетких множеств оценок по критериям и нечетких множеств выводов.

Из рис. 4.30 можно предположить, что наиболее подходящим выводом будет “средний”. На рис 4.31 представлены результаты обработки правила (4.30) по формуле Лукасевича. Предполагаемый результат, видимо, будет тем же самым.

До сих пор полагалось, что критерии имеют одинаковую значимость, некоторые варианты учета различной значимости критериев были рассмотрены ранее. Достаточно простое решение может быть, если положить, что при равной значимости весовые показатели $\alpha_i = 1$ для всех *i,* где *i* – номер критерия.

Критерии разной значимости имеют веса, не равные единице $0 < \omega_i \neq 1$

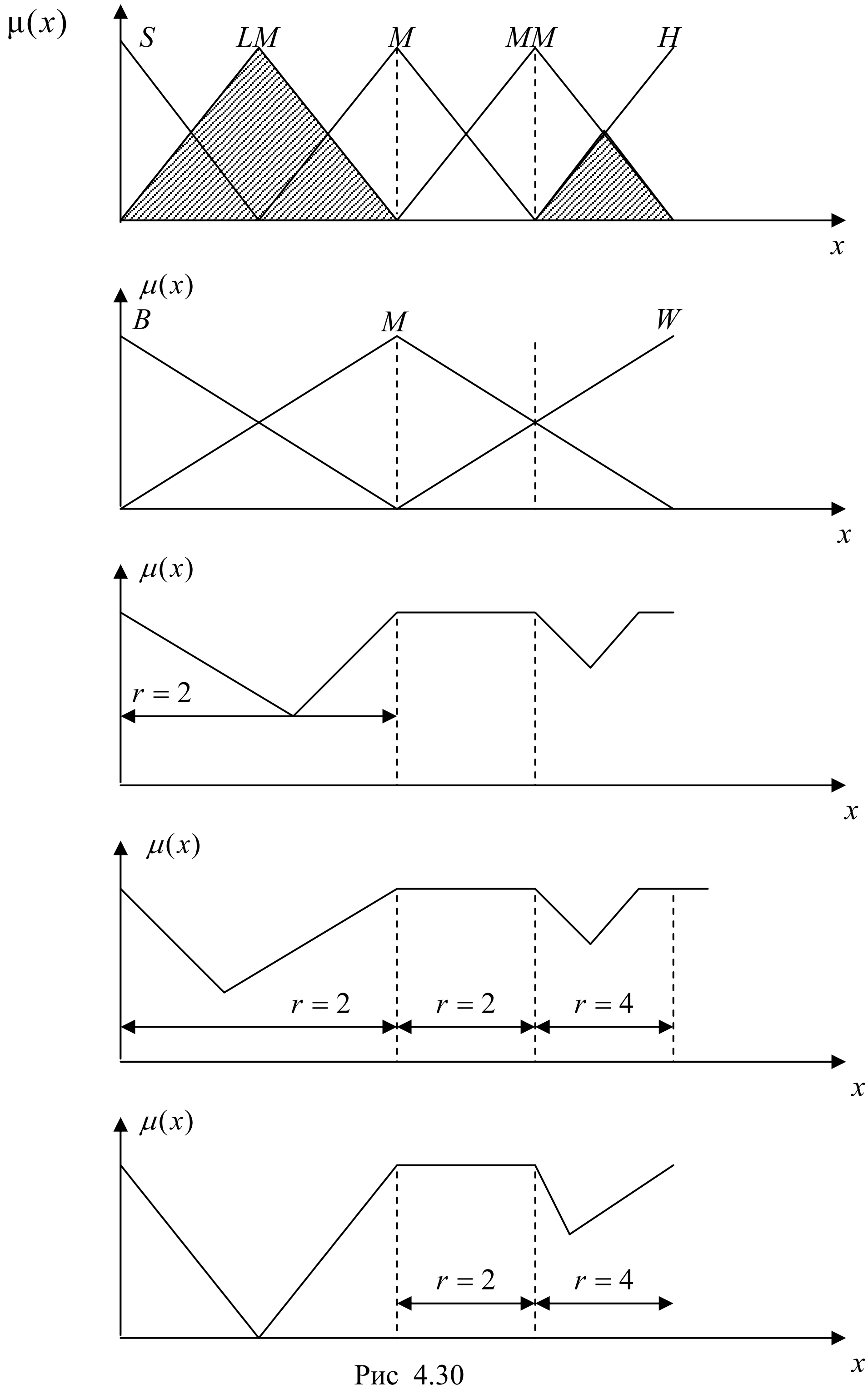


Рис 4.30

В этом случае можно использовать обобщенный коэффициент – вес, умноженный на кратность

$$\rho = \omega_i \cdot r_i ,$$

эффект влияния которого и область действия определяются аналогично кратности оценок.

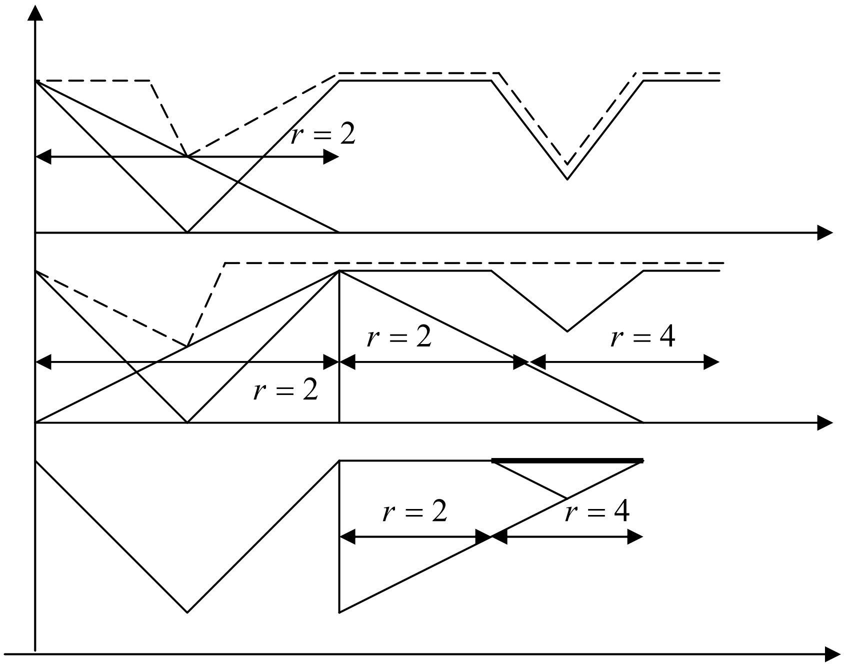
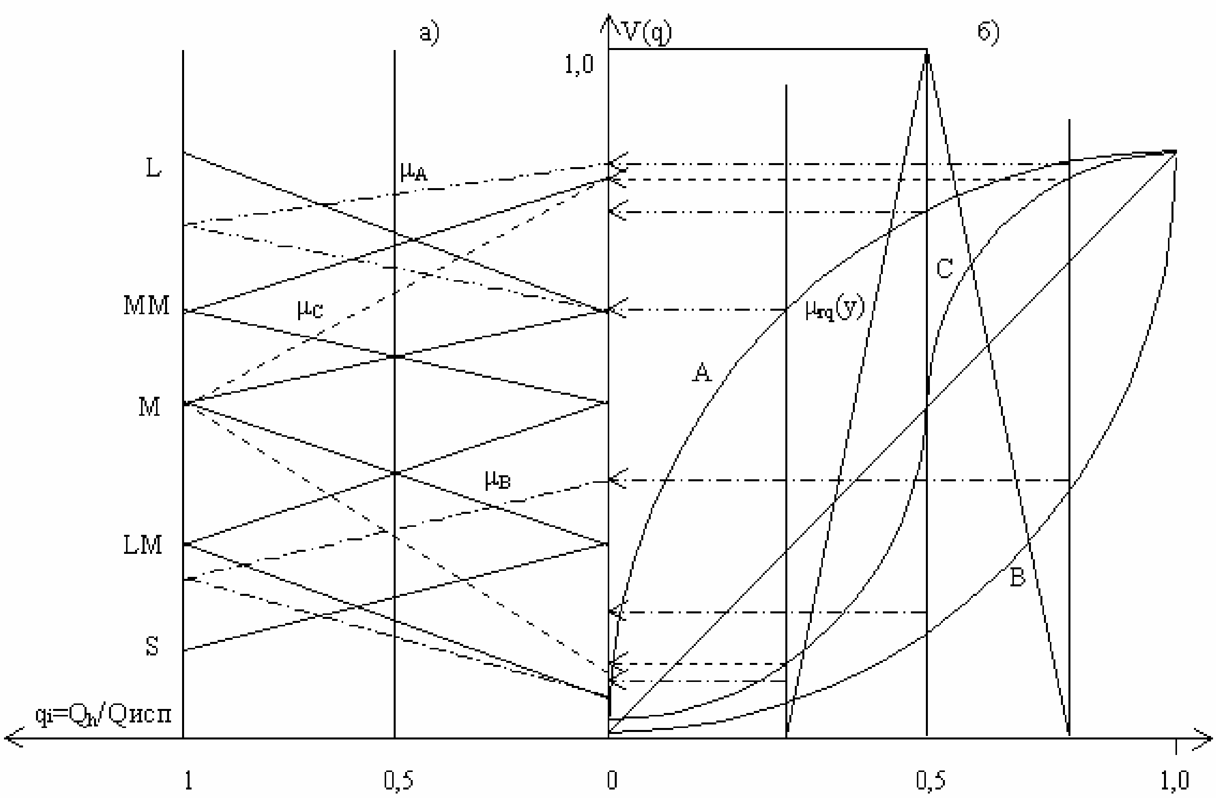


Рис 4.31

При решении рассматриваемых задач следует учитывать то, что для оцениваемых объектов мы можем не получить информацию по всем критериям. Причем, нельзя исключать варианты, когда для разных сравниваемых объектов это будут и различные критерии. Естественно, что возникает вопрос и об оценке качества получаемых в этом случае выводов. Одним из возможных решений здесь является задание связи между количеством используемых критериев и качеством результата.

Можно предположить, что количество критериев однозначно определяет качество результата, с другой стороны, могут быть ситуации, когда рост количества критериев лишь до некоторого порогового значения имеет значение, а последующее увеличение этого количества не дает ощутимых результатов, но усложняет вычислительные процедуры. Для решения этой задачи вводится функция ценности количества критериев $V(q)$ как неубывающая функция аргумента $q = Q_h / Q_{исп}$, Q_h – количество используемых критериев в h-м правиле вида (4.18), $Q_{исп}$ – общее количество используемых критериев. Характер функции ценности критериев отражает, вообще говоря, субъективные представления о значимости их используемого количества. Линейная функция отражает мнение о равномерном влиянии количества используемых критериев. Кривая *A* отражает мнение, что рост количества критериев существенно улучшает качество вывода. Кривая *B*, наоборот, отражает противоположную точку зрения.



а) *б*)

Рис. 4.32

Фрагмент *а* рис. 4.32 представляет функции принадлежности нечетких оценок влияния количества критериев на качество выводов. Методика оценки этого качества заключается в следующем. Пусть в результате расчетов была найдена некоторая оценка r_n и соответствующая функция принадлежности $\mu_{rq}(y)$. Эта функция строится в системе координат функции ценности количества критериев, при этом координата максимума $\mu_{rq}(y)$ совмещается с точкой $Q_{h,}$ то есть с точкой, указывающей на количество критериев, используемых в *h*-м правиле вида (4.18, *б*). Затем с помощью функции ценности количества критериев $\mu_{rq}(y)$ проецируется на сегмент а), на котором в нашем случае представлены соответствующие функции принадлежности пяти оценок качества вывода в зависимости от количества используемых критериев:

S – низкое качество;
LM – ниже среднего;
M – среднее;
MM – выше среднего;
L – высокое.

Проекция полученного вывода для кривой A представлена в сегменте а) функцией μ_a, для кривой B – функцией $\mu_в$, для C – μ_c.

Предположим для определенности, что была выбрана функция ценности количества критерия вида A. Для принятия решения относительно качества вывода r_q рассчитаем степень включения нечеткого множества, определенного функцией принадлежности μ_a в нечеткие множества M и MM по соотношению [20]:

$$\nu\left(\tilde{A}_{rq}, M\right) = \oint\limits_{y \in Y} \mu_A(y) \rightarrow \mu_M(y).$$

Расчеты для приведенного примера дали

$$\nu\left(A_{rq}, M\right) = 0,24, \quad \nu\left(A_{rq}, MM\right) = 0,66.$$

Следовательно, качество вывода r_n, полученного на основе некоторого h-го продукционного правила вида (4.18), оценивается выше среднего.

Таким образом, предлагаемая методика позволит не только произвести выбор наилучшей продуктовой программы, но и в случае необходимости оценить качество сделанного вывода.

Рассмотренная методика может найти и еще одно применение. Известна модель ведущей консалтинговой компании США (Бостонской консультационной группы (БКГ)), в которой стратегические бизнес-единицы делятся в зависимости от их предполагаемого положения на рынке на четыре группы [10]:

– вопросительные знаки;
– звезды;
– денежные дойные коровы;
– собаки.

Применение правил условного логического вывода позволяет провести подобную классификацию.

Основные понятия

1. Матрица соответствия альтернатива – критерий.
2. Средний балл альтернативы.
3. Максиминная оценка альтернативы.
4. Матрица уступок.
5. Мощность множества.
6. Мощность нечеткого множества.
7. Кратность лингвистических оценок.
8. Функция кратности лингвистических оценок.

Контрольные вопросы

1. Как можно сравнивать нечеткие множества?
2. Как может определяться мощность нечеткого множества?
3. Какими недостатками обладает метод оценки альтернатив на основе среднего балла?
4. Какие проблемы возникают при использовании весовых коэффициентов для критериев, по которым сравниваются альтернативы?
5. Следует ли при сравнении альтернатив учитывать кратности одинаковых оценок по различным критериям?
6. В чем состоят недостатки максиминного метода сравнения альтернатив?
7. Как определяются элементы матрицы уступок?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рыночный характер современной экономики характеризуется тем, что экономические решения приходится принимать в условиях неопределенности, поскольку именно это обстоятельство является принципиальной особенностью рынка. Поэтому одного только интуитивного опыта руководителя уже недостаточно для достижения успеха. Для принятия грамотного управленческого решения в условиях рыночной неопределенности совершенно необходимо использовать математические методы и модели. Одним из таких методов является теория нечетких множеств, которая уже доказала свою эффективность при принятии экономических решений.

Приведенные в учебном пособии основы теории нечетких множеств, а также методы многокритериального выбора альтернатив, построенные на ее основе, будут полезными для будущих информатиков-экономистов не только в процессе обучения, но и, вполне возможно, в их будущей практической деятельности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Заде, Л. А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений / Л. А. Заде. // Математика сегодня / сост. В. П. Шилейко. – М. : Знание,1974 – С. 5 – 48.
2. Заде, Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений: пер. с англ. – М. : Мир, 1976. – 165 с.
3. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1983. – 432с.
4. Кафаров, В. В. Системный анализ процессов химической технологии. Применение метода нечетких множеств / В. В. Кафаров, И. Н. Дорохов, Е. П. Марков. – М. : Наука,1985. – 531 с.
5. Борисов, А. Н. Принятие решений на основе нечетких моделей: Примеры использования / А. Н. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров. – Рига : Зинатне, 1990. – 184 с.
6. Белкин, А. Р. Нечеткая классификация на основе лингвистических переменных и задачи дифференциальной диагностики / А. Р. Белкин // Вопросы кибернетики. Принятие решений и анализ экспертной информации – М. : Наука, 1989. – С. 129 –133.
7. Анисимов, В. Ю. Нечеткие модели в САПР радиоэлектронных устройств / В. Ю. Анисимов // Изв. вузов. Сер. Радиотехника. – 1984. – № 1. – С. 23 – 26 .
8. Анисимов, В. Ю. Методы и устройства преобразования нечетко определенных параметров при проектировании радиоэлектронных систем / В. Ю. Анисимов, Э. В. Борисов // Изв. вузов Сер. Радиоэлектроника. – 1985. – № 4. – С. 12 – 16.
9. Хан, Д. Планирование и контроль: концепция контроллинга / Д. Хан: пер с нем. – М.: Финансы и статистика,1997. – 80 с. – ISBN 5-279-02106-07.
10. Котлер, Ф. Стратегическое планирование / Ф. Котлер // Top-Manager, 2000, ноябрь – С.126 – 134.
11. Колтынюк, Б. А. Инвестиционные проекты // Б. А. Колтынюк. – СПб.: Изд-во В. А. Михайлова, 2000. – 422 с. – ISBN 5-238-00292-0.
12. Аракелян, С. М. Развитие методов многокритериального выбора альтернатив / С. М. Аракелян, Р. А. Вапота, В. Г. Чернов. – Деп. в ВИНИТИ 09.01 01. 21-В2001.
13. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати: пер. с англ. – М.: Радио и связь,1989. – 316 с.

14. Чернов, В. Г. Задача идентификации при нечетких критериях классификации / В. Г. Чернов [и др.]. // Актуальные проблемы информатики: VII Междунар. науч.-техн. конф. – Минск, 1998 – С. 645 – 648.
15. Чернов, В. Г. Решение бизнес задач средствами нечеткой алгебры : в 2 кн. Кн. 2. Электронная таблица Fuzzy Calc / В. Г. Чернов [и др.]. – М. : Тора-Центр, 1998. – 120 с.
16. Дюбуа, Д. Теория возможностей. Приложение к управлению знаниями в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад ; пер. с фр. В. А.Тарасова – М. : Радио и связь, 1990. – 312 с.
17. Mamdani E.N., Sembi B.S. On the nature of implication in fuzzy logic.- In: Proc. 9^{th} int. Symp. Multiple – Valued Logics Bath new York, 1979. p. 143 – 151.
18. Алиев, Р. А. Производственные системы с искусственным интеллектом / Р. А. Алиев, Н. М. Абдинеев, М. М. Шахназаров. – М.: Радио и связь,1990. – 264 с.
19. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Физматгиз,1968. – 494 с.
20. Мелихов, А. Н. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / А. Н, Мелихов, Л. С. Бернштейн, С. Я. Коровин. – М. : Наука, 1990. – 272 с.
21. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. / под ред. Д. А. Поспелова – М. : Наука, 1986. – 312 с.
22. Чернов, В. Г. Нечеткие множества в задачах управления и принятия решений: текст лекций / В. Г. Чернов; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1999. – 88 с. – ISBN 5-89368-138-4.
23. Чернов, В. Г. Нечеткие контроллеры. Основы теории и построения : учеб. пособие по курсу «Интеллектуальные системы управления» / В. Г. Чернов; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2003. – 148 с. – ISBN 5-89368-384-6.
24. Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy TECH / А. В. Леоненков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 736 с. – ISBN 5-94157-087-2.

Учебное издание

Чернов Владимир Георгиевич

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВ

Учебное пособие

Редактор А.П. Володина
Корректор В.В. Гурова
Компьютерная верстка С.В. Павлухиной

ЛР № 020275. Подписано в печать 12.12.05.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 6,32. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.