

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

А.К. БЕРНЮКОВ

# ДИСКРЕТНАЯ И ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Практикум

В двух частях

Часть 2

«В печать»:

Автор –

А.К. Бернюков

Зав. кафедрой –

Редактор –

И.А. Арефьева

Корректор –

Е.В. Афанасьева

Начальник РИО –

Е.П. Викулова

Директор РИК –

Ю.К. Жулев

Владимир 2005

УДК 621.372.542: 621.396.96 (075.8)

ББК 32

Б51

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
зав. кафедрой радиотехники Муромского института (филиал ВлГУ)  
*В.В. Ромашов*

Доктор технических наук, профессор  
Владимирского государственного университета  
*Е.Н. Талицкий*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Владимирского государственного университета

**Бернюков, А. К.**

Б51 Дискретная и цифровая обработка информации : практикум: в 2 ч. /  
А. К. Бернюков ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос.  
ун-та, 2005. – Ч. 2. – 87 с. – ISBN5-89368-617-9.

Рассматриваются вопросы цифровой обработки информации: проектирование цифровых фильтров, распознавание образов, гомоморфная фильтрация, цифровой спектральный анализ и дискретные случайные процессы. В дополнение к практикуму разработан электронный учебник с программным комплексом обучения и контроля.

В 1-й части практикума, изданной в 2001 г., рассматривались общие вопросы цифровой обработки сигналов.

Предназначен для слушателей магистратуры по направлениям «Радиотехника» (552500) и «Проектирование и технология радиоэлектронных средств» (551100), а также для студентов специальностей 210302 (200700) – радиотехника, 210301 (071500) – радиофизика и электроника, 210201 (200800) – проектирование и технология радиоэлектронных средств, 210303 (201500) – бытовая радиоэлектронная аппаратура, 200402 (190600) – инженерное дело в медико-биологической практике.

Табл. 9. Ил. 45. Библиогр.: 23 назв.

УДК 621.372.542: 621.396.96 (075.8)

ББК 32

ISBN 5-89368-???-?

© Владимирский государственный  
университет, 2005

## Предисловие

Материал практикума рассчитан на слушателей магистратуры по направлению 552500 «Радиотехника», изучивших базовый курс «Дискретная и цифровая обработка информации».

Практикум содержит методические указания к шести лабораторным работам по избранным вопросам цифровой обработки информации: проектированию цифровых фильтров, распознаванию образов, гомоморфной фильтрации, цифровому спектральному анализу и дискретным случайным процессам. Данный лабораторный цикл сопровождает теоретические курсы «Теория дискретной и цифровой обработки информации», «Цифровая обработка и распознавание образов», «Устройства цифровой обработки сигналов» и «Аэрокосмические радионавигационные системы». Все лабораторные работы выполняются фронтально на персональных ЭВМ, включенных в локальную вычислительную сеть. Обучение проводится с применением программного комплекса автоматизированного обучения и контроля. Это позволяет использовать практикум в разных формах обучения (аудиторной, дистанционной, заочной). Пособие дополнено компьютерным учебником, разработанным автором в 1997 году.

В описание к каждой лабораторной работе включены фрагменты теории, домашнее задание, экспериментальная часть и содержание отчета. Выполнению работ в лаборатории предшествует самоподготовка по индивидуальным заданиям, варианты которых представлены в практикуме, и проверка преподавателем выполнения задания. Выполнение работ на персональных ЭВМ проводится самостоятельно с представлением отчета для защиты результатов эксперимента. Такой многоэтапный характер работы по соответствующей теме теоретического курса способствует эффективному усвоению материала.

Материал практикума может быть полезен аспирантам и инженерам при разработке и проектировании устройств цифровой обработки сигналов.

## Лабораторная работа 1

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ ВЗВЕШИВАНИЯ [5, 15, 19, 20]

### 1.1. Цели работы

1. Ознакомление с характеристиками цифрового фильтра с КИХ.
2. Построение цифрового фильтра с КИХ.
3. Изучение влияния типов окон и параметров фильтра на качество фильтрации.

### 1.2. Краткие теоретические сведения

#### 1.2.1. Структура метода взвешивания

Поскольку частотная характеристика любого цифрового фильтра  $H(e^{j\omega})$  является периодической функцией частоты, ее можно представить рядом Фурье:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}, \quad (1.1)$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (1.2)$$

Коэффициенты  $h(n)$  совпадают с коэффициентами импульсной характеристики цифрового фильтра с КИХ. Использование соотношения (1.2) для проектирования КИХ-фильтров связано с двумя трудностями. Во-первых, импульсная характеристика фильтра имеет бесконечную длину, поскольку суммирование в (1.1) производится в бесконечных пределах. Во-вторых, фильтр физически нереализуем, так как импульсная характеристика начинается в  $-\infty$ , т. е. никакая конечная задержка не сделает фильтр физически реализуемым. Итак, фильтр, рассчитываемый на основе представления функции  $H(e^{j\omega})$  рядом Фурье, оказывается физически нереализуемым БИХ-фильтром.

Один из возможных методов получения КИХ-фильтра, аппроксимирующего заданную функцию  $H(e^{j\omega})$ , заключается в усечении бесконечного ряда Фурье (1.1)  $n = \pm M$  составляющими. Однако простое усечение ряда приводит к хорошо известному явлению Гиббса, которое проявляется в виде выбросов и пульсаций определенного уровня до и после точки разрыва в аппроксимируемой частотной характеристике. Так, например, при аппроксимации стандартных фильтров типа идеального фильтра нижних частот или полосового фильтра максимальная амплитуда пульсаций частотной характеристики составляет около 9 % и не уменьшается с увеличением длины импульсной характеристики, т. е. учет все большего числа членов ряда Фурье не приводит к уменьшению максимальной амплитуды пульсаций. Вместо этого по мере увеличения  $N$  уменьшается ширина выброса. Поскольку простое усечение ряда (1.1) не приводит к приемлемой аппроксимации идеального фильтра нижних частот (к чему необходимо стремиться), этот метод непригоден для проектирования КИХ-фильтров.

Лучшие результаты дает метод проектирования КИХ-фильтров, основанный на использовании весовой последовательности конечной длины  $w(n)$ , называемой окном, для модификации коэффициентов Фурье  $h(n)$  в формуле (1.1) с тем, чтобы управлять сходимостью ряда Фурье. Метод взвешивания проиллюстрирован на рис. 1.1. Сверху показаны заданная периодическая частотная характеристика  $H(e^{j\omega})$  и ее коэффициенты Фурье  $h(n)$ . Ниже изображены весовая последовательность конечной длины  $w(n)$  и ее преобразование Фурье  $W(e^{j\omega})$ . Для большинства приемлемых окон функция  $W(e^{j\omega})$  имеет главный лепесток, содержащий почти всю энергию окна, и боковые лепестки, которые обычно быстро затухают. Чтобы получить КИХ-аппроксимацию функции  $H(e^{j\omega})$ , формируется последовательность  $h(n) = h(n)w(n)$ , в точности равная нулю за пределами интервала  $-M \leq n \leq M$ . Третья пара графиков на рис. 1.1 представляет последовательность  $h(n)$  и ее преобразование Фурье  $H(e^{j\omega})$ , равное, очевидно, круговой свертке функций  $H(e^{j\omega})$  и  $W(e^{j\omega})$ , поскольку  $h(n)$  является произведением  $h(n)$  и  $w(n)$ . Наконец, внизу на рис. 1.1 приведена физически реализуемая последовательность  $g(n)$ ,  $n \geq 0$ , которая равна задержанной последовательности  $h(n)$  и может быть использована в качестве искомой импульсной характеристики фильтра. На простом примере, проиллюстрированном на рис. 1.1, можно проследить влияние операции взвешивания коэффициен-

тов Фурье фильтра на его частотную характеристику. Прежде всего, по обе стороны от точек разрыва заданной функции  $H(e^{j\omega})$  появляются переходные полосы. Ясно, что поскольку результирующая частотная характеристика фильтра равна круговой свертке идеальной частотной характеристики и частотной характеристики окна, то ширина переходных полос зависит от ширины главного лепестка функции  $W(e^{j\omega})$ . Кроме того, на всех частотах возникают ошибки аппроксимации, имеющие вид пульсаций частотной характеристики, которые обусловлены боковыми лепестками функции  $W(e^{j\omega})$ .

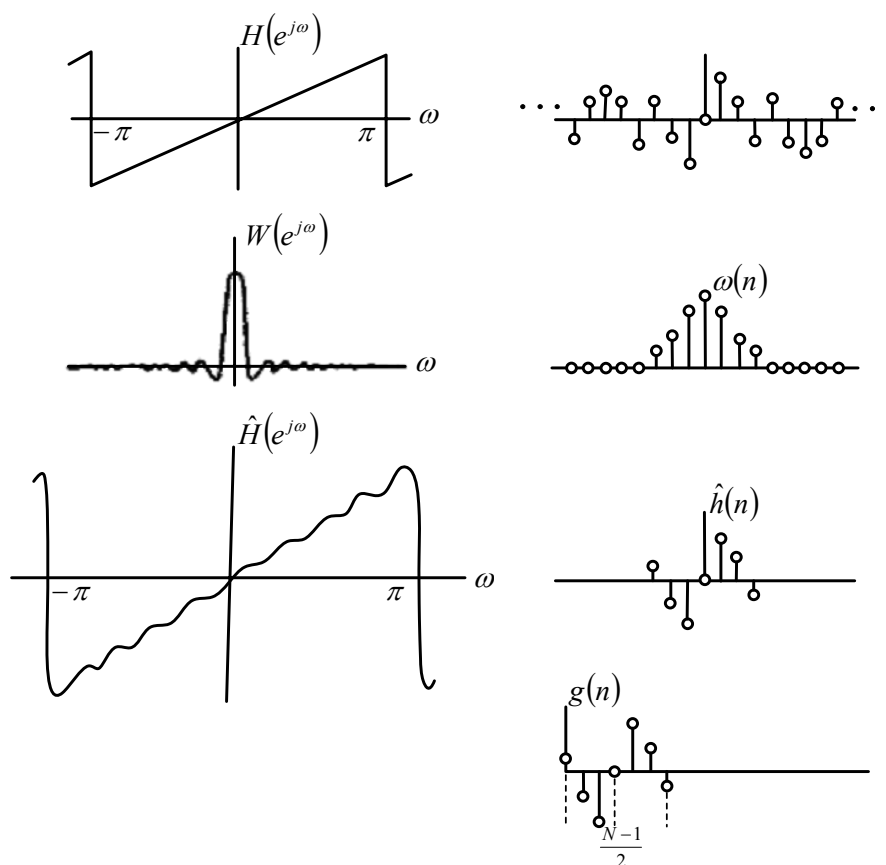


Рис. 1.1. Иллюстрация метода взвешивания

Окно должно обладать следующими свойствами:

1. Ширина главного лепестка частотной характеристики окна, содержащего по возможности большую часть общей энергии, должна быть малой.
2. Энергия в боковых лепестках частотной характеристики окна должна быстро уменьшаться при приближении  $\omega$  к  $\pi$ .
3. Временная функция окна должна плавно нарастать вначале и плавно убывать в конце.

Было предложено много окон, аппроксимирующих заданные характеристики. Далее будут рассмотрены три распространенных окна, а именно: прямоугольное окно, «обобщенное» окно Хэмминга и окно Кайзера. Эти окна обладают свойствами всех возможных видов окон и позволяют достаточно хорошо понять преимущества и недостатки метода взвешивания.

### 1.2.2. Прямоугольное окно

$N$ -точечное прямоугольное окно, соответствующее простому усечению ряда Фурье, описывается весовой функцией

$$w_R(n) = \begin{cases} 1, & 0, \quad -\left(\frac{N-1}{2}\right) \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases}$$

(Здесь и в следующих разделах, посвященных окнам, предполагается, что  $N$  — нечетное. С помощью простой модификации аналогичные результаты могут быть получены и для четного  $N$ . Предполагается также, что последовательность окна имеет нулевую задержку.) Частотная характеристика прямоугольного окна описывается соотношением

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-j\omega n} = \frac{e^{j\omega[(N-1)/2]}(1 - e^{-j\omega N})}{(1 - e^{j\omega})} = \frac{e^{j\omega(N/2)} - e^{-j\omega(N/2)}}{e^{j(\omega/2)} - e^{-j(\omega/2)}},$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}.$$

График частотной характеристики представлен на рис. 1.2.

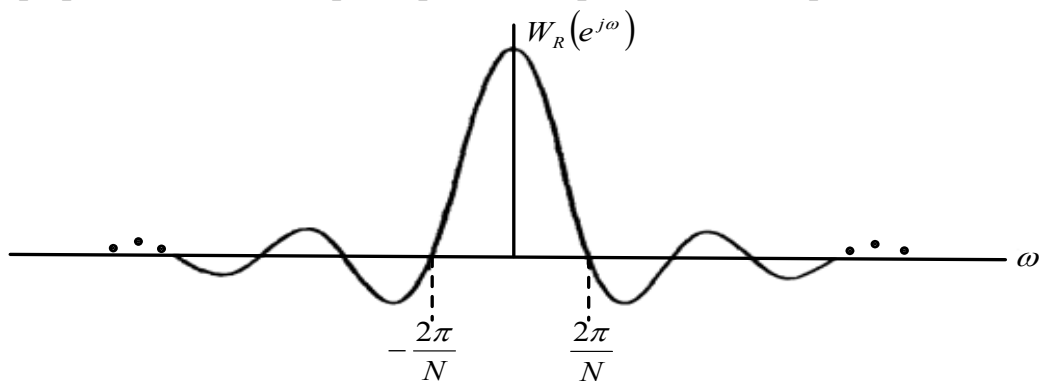


Рис. 1.2. Частотная характеристика прямоугольного окна

### 1.2.3. Обобщенное окно Хэмминга

Второе из рассматриваемых окон, называемое обобщенным окном Хэмминга, имеет вид

$$w_H(n) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & -\left(\frac{N-1}{2}\right) \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0 & \text{при других } n, \end{cases}$$

причем  $\alpha$  лежит в пределах  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Частотная характеристика может быть записана в виде

$$W_H(e^{j\omega}) = W_R(e^{j\omega}) \left[ \alpha u_0(\omega) + \frac{1-\alpha}{2} u_0\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + \frac{1-\alpha}{2} u_0\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right]$$

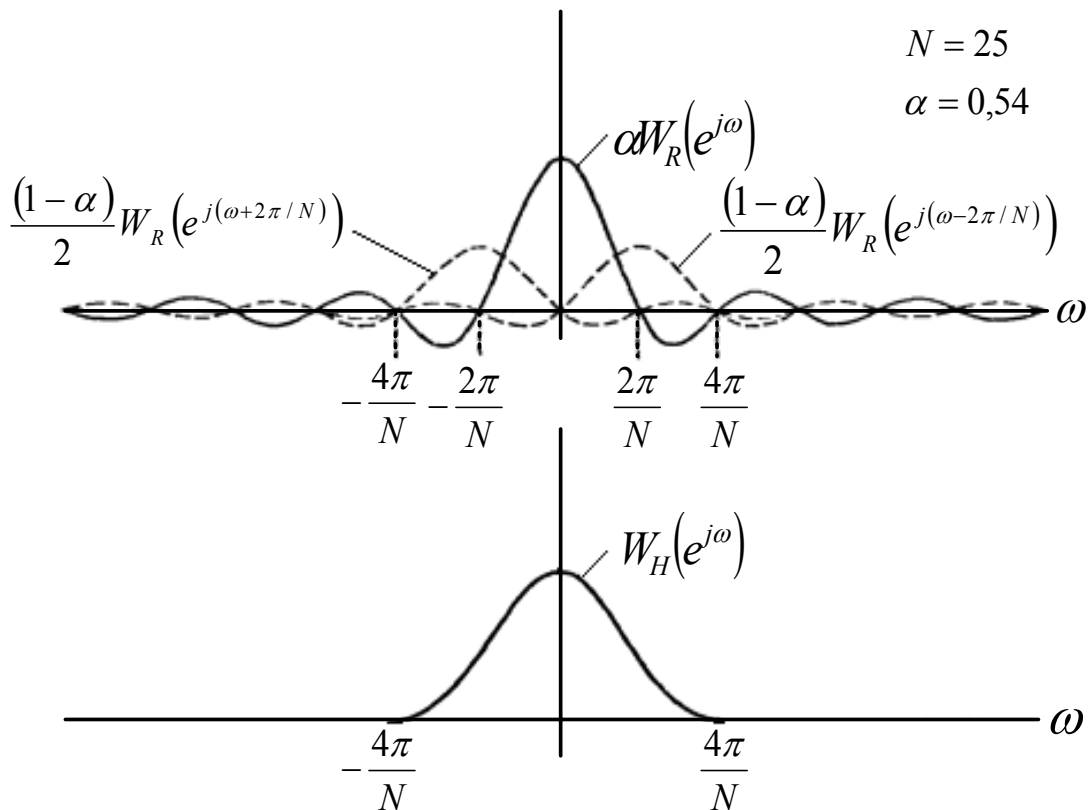


Рис. 1.3. Частотная характеристика окна Хэмминга при  $\alpha = 0,54$

$$W_H(e^{j\omega}) = \alpha W_R(e^{j\omega}) + \frac{1-\alpha}{2} W_R \left[ e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right)} \right] + \frac{1-\alpha}{2} W_R \left[ e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)} \right].$$



На рис. 1.3 вверху изображены графики трех компонент характеристики  $W(e^{j\omega})$ , а внизу – результирующая частотная характеристика (здесь принято  $\alpha = 0,54$  и  $N = 25$ ). Создается впечатление, что частотная характеристика окна Хэмминга не имеет пульсаций на частотах выше  $\omega = 4\pi/N$ , однако на самом деле это не так. Пульсации настолько малы, что при линейной шкале на рис. 1.3 они не видны. Из сравнения рис. 1.3 и 1.2 видно, что ширина главного лепестка частотной характеристики окна Хэмминга в два раза больше, чем прямоугольного окна. Однако уровень боковых лепестков в случае окна Хэмминга значительно ниже, чем у характеристики прямоугольного окна. При  $\alpha = 0,54$ , т. е. для обычного окна Хэмминга, 99,96 % общей энергии спектра содержится в главном лепестке, а максимумы боковых лепестков на 40 дБ ниже главного максимума. В отличие от окна Хэмминга максимум боковых лепестков в спектре прямоугольного окна ниже главного максимума всего на 14 дБ.

Из рис. 1.3 хорошо видно, каким образом при использовании окна Хэмминга достигается подавление боковых лепестков при одновременном расширении главного лепестка. Ниже будет показано, что при расчете фильтра нижних частот расширение главного лепестка соответствует расширению переходной полосы между полосами пропускания и непропускания, тогда как уменьшение уровня боковых лепестков соответствует меньшим пульсациям в полосе пропускания и лучшему подавлению в полосе непропускания фильтра.

#### ***1.2.4. Окно Кайзера***

Задача расчета «хороших» окон фактически сводится к математической задаче отыскания ограниченных во времени функций, преобразование Фурье которых наилучшим образом аппроксимирует функции, ограниченные по частоте, т. е. окна имеют минимальную энергию за пределами заданного интервала частот. При решении этой задачи в замкнутой форме для непрерывных функций времени был введен класс так называемых *вытянутых сфероидальных волновых функций*. Эти функции имеют достаточно сложный вид. Поэтому Кайзер в качестве наилучшего окна

предложил относительно простую аппроксимацию этих функций. Эта аппроксимация, названная окном Кайзера, записывается в виде

$$w_K(n) = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1 - \left[2n/(N-1)\right]^2}\right)}{I_0(\beta)}, \quad -\left(\frac{N-1}{2}\right) \leq n \leq \frac{N-1}{2},$$

где  $\beta$  – константа, определяющая компромисс между максимальным уровнем боковых лепестков и шириной главного лепестка (или долей общей энергии в главном лепестке) частотной характеристики окна, а  $I_0(x)$  – функция Бесселя нулевого порядка.

Кайзер показал, что для непрерывной функции окна частотная характеристика пропорциональна

$$\frac{\sin\left[\beta\sqrt{\left(\omega/\omega_\beta\right)^2 - 1}\right]}{\sqrt{\left(\omega/\omega_\beta\right)^2 - 1}},$$

где величина  $\omega_\beta$  приблизительно равна ширине главного лепестка частотной характеристики. Поскольку нельзя найти аналитическое выражение для частотной характеристики окна Кайзера, для иллюстрации его свойств будут использованы графики частотной характеристики.

Окно Кайзера является, по существу, оптимальным окном в том смысле, что оно представляет последовательность конечной длины, которая имеет минимум энергии спектра за пределами некоторой заданной частоты. Еще одним оптимальным окном является окно Дольфа – Чебышева, обеспечивающее минимальную ширину главного лепестка частотной характеристики при фиксированном уровне боковых лепестков. Все боковые лепестки в спектре этого окна имеют одинаковый уровень. Однако, как уже говорилось, ни одно из этих окон не позволяет получить оптимальную в минимаксном смысле аппроксимацию произвольной идеальной частотной характеристики, поскольку в действительности характеристика фильтра является результатом свертки частотных характеристик окна и идеального фильтра. Известны и применяются на практике «окна» Бартлетта, Блэкмена и др. Однако и они не обеспечивают оптимальных результатов.

### 1.2.5. Примеры характеристик фильтров нижних частот с различными окнами

Рассмотрим практический пример использования окон (прямоугольного, Хэмминга и Кайзера) для расчета идеального фильтра нижних частот. На рис. 1.4 – 1.9 изображены графики этих трех окон и их частотные характеристики для случая  $N = 257$  (параметр  $\beta$  для окна Кайзера равен 5,658).

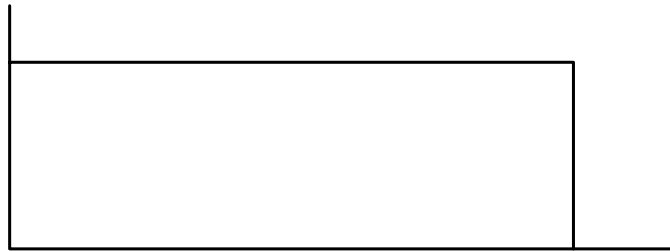
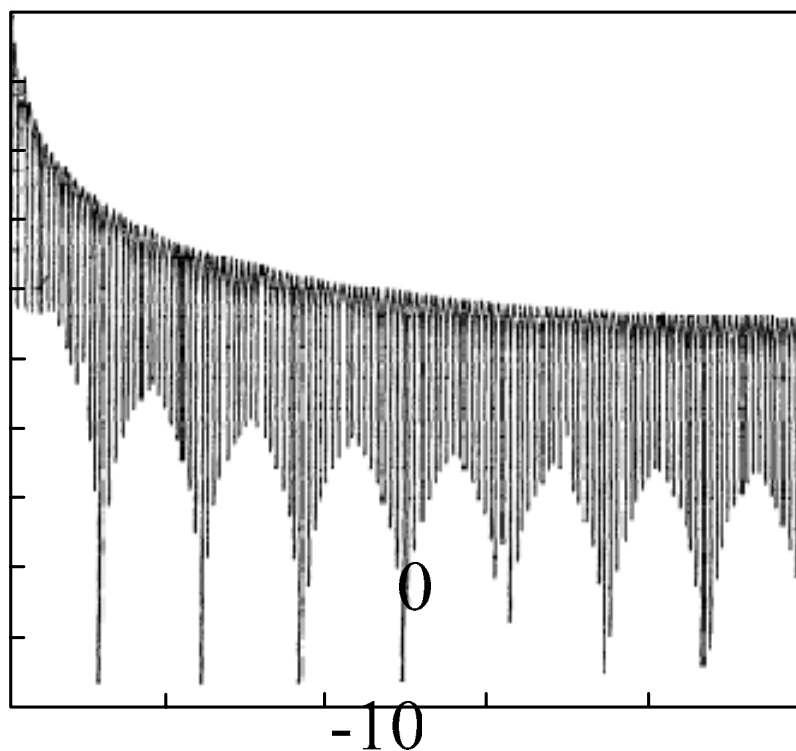


Рис. 1.4. 257-точечное прямоугольное окно

На рис. 1.4, 1.6 и 1.8 представлены импульсные характеристики, а на рис. 1.5, 1.7 и 1.9 – частотные характеристики). На рис. 1.5 видно, что в соответствии с изложенным максимальный уровень боковых лепестков частотной характеристики прямоугольного окна равен  $0,217$  (или  $-13,27$  дБ в логарифмическом масштабе), а максимумы боковых лепестков медленно понижаются до уровня  $0,004$  (или до  $-48$  дБ) на частоте, равной половине частоты дискретизации. Максимальный  $1,0$  уровень боковых лепестков частотной характеристики окна Хэмминга равен  $0,0074$  (или  $-42,7$  дБ), а огибающая максимумов боковых лепестков падает до уровня около  $0,000059$  (или  $-65$  дБ) на частоте, равной половине частоты дискретизации. Однако ширина главного лепестка частотной характеристики окна Хэмминга вдвое больше ширины главного лепестка частотной характеристики прямоугольного окна. Таким образом, при аппроксимации разрывов частотной характеристики идеального фильтра (как показано на примере фильтра нижних частот) с использованием окна Хэмминга ширина переходной полосы у точки разрыва будет вдвое больше, чем для  $0$  прямоугольного окна. Для окна Кайзера (см. рис. 1.9) уровень наибольшего бокового лепестка составляет  $0,00133$  (или  $-57$  дБ), а огибающая максимумов боковых лепестков падает до уровня около  $0,00002$  (или до  $-94$  дБ) на частоте, вдвое меньшей час-

тоты дискретизации. Однако такой низкий уровень боковых лепестков достигается за счет расширения главного лепестка частотной характеристики этого окна почти в три раза по сравнению со случаем прямоугольного окна.

На последующих нескольких рисунках изображены характеристики фильтров нижних частот, рассчитанных с использованием каждого из трех описанных окон.



Прямо

Рис. 1.5. Частотная характеристика 257-точечного  
прямоугольного окна

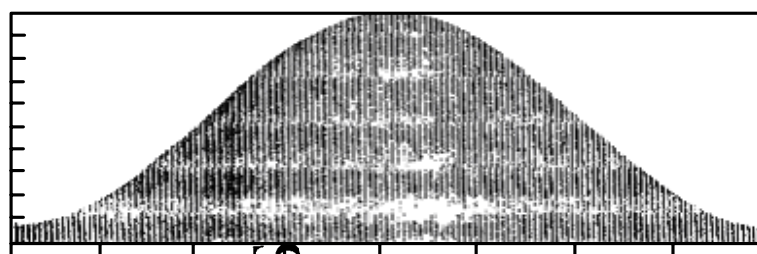


Рис. 1.6. 257-точечное окно Хемминга

Амплитуда, дБ

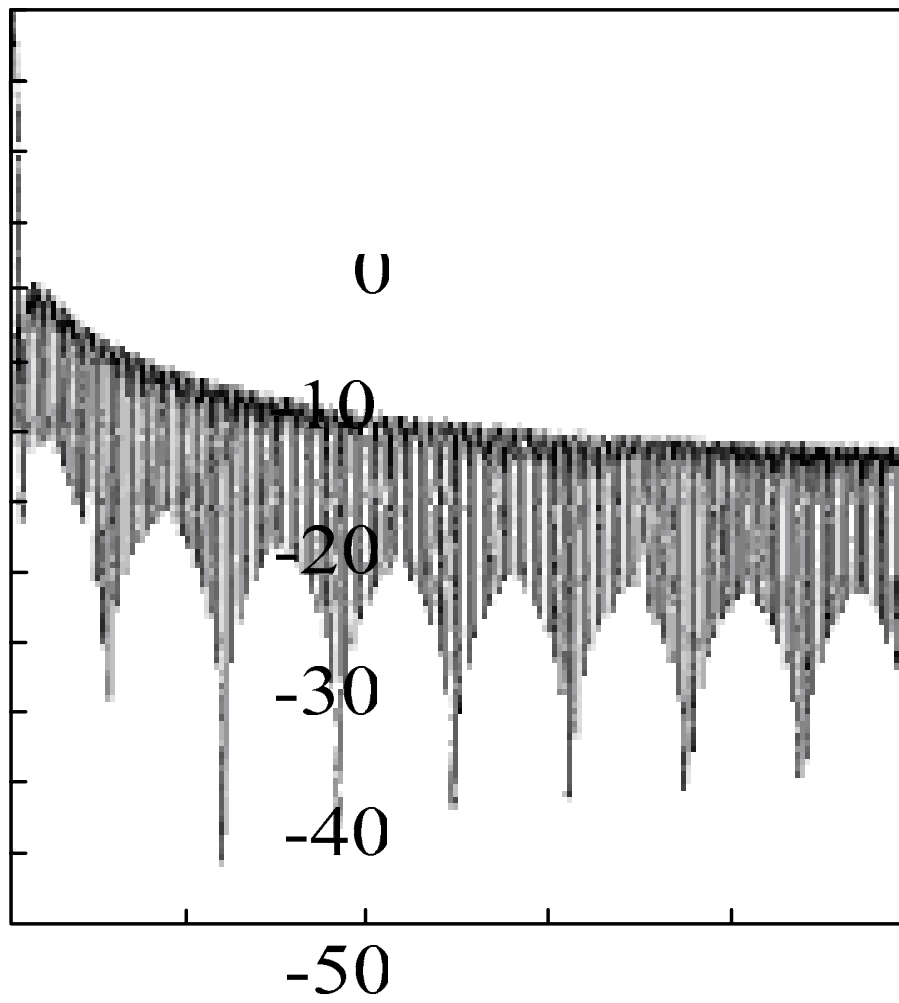


Рис. 1.7. Частотная характеристика 257-точечного окна Хемминга

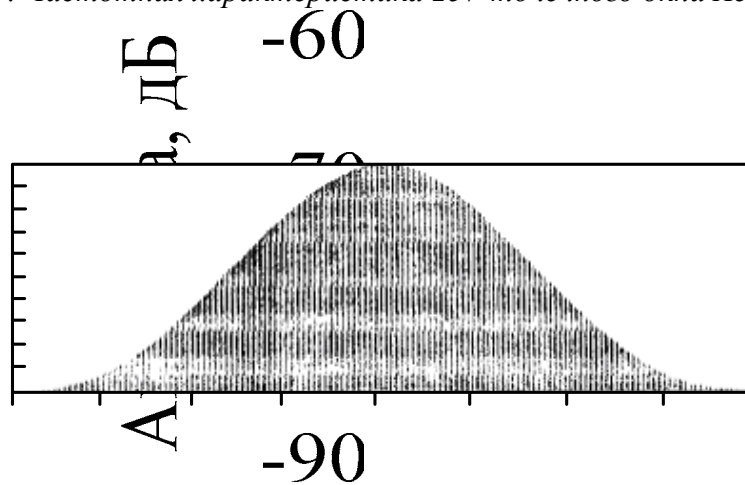


Рис. 1.8. 257-точечное окно Кайзера

-100

-110

-120

Ок

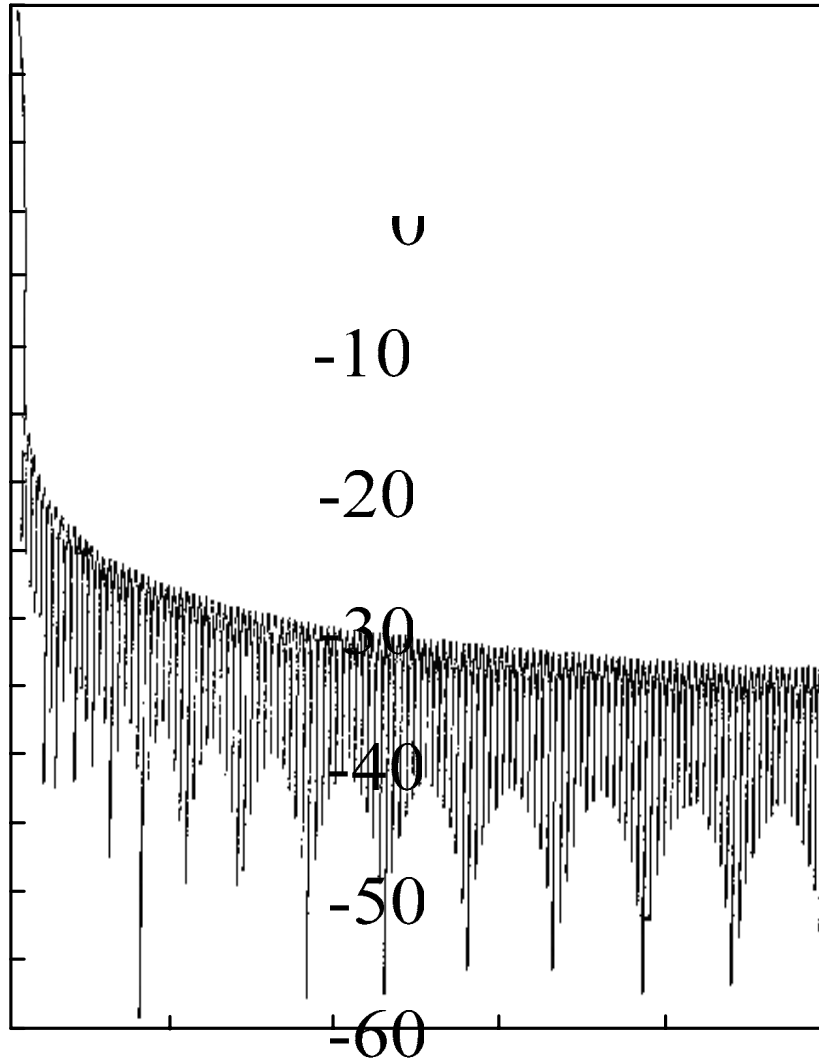


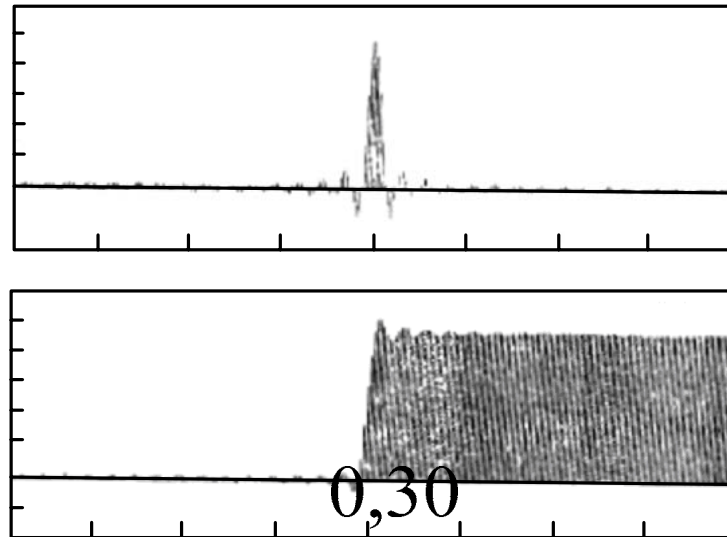
Рис. 1.9. Частотная характеристика окна Кайзера

На рис. 1.10, 1.12 и 1.14 показаны результирующие импульсные и переходные характеристики, а на рис. 1.11, 1.13 и 1.15 – полученные частотные характеристики фильтров. Проектируемый идеальный фильтр нижних частот имеет коэффициенты ряда Фурье (отсчеты импульсной характеристики) вида

$$h(n) = \frac{\sin(2\pi F_c n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (1.3)$$

(во всех трех примерах  $F_c = 0,1245$ ). На рис. 1.10 представлен результат умножения  $h(n)$  на прямоугольное окно. Видно, что характерный вид им-

пульсной характеристики фильтра (1.3) сохранился, использование окон Хэмминга и Кайзера (см. рис. 1.12 и 1.14) приводит к ослаблению далеко отстоящих членов  $h(n)$ . На рис. 1.11 показана частотная характеристика фильтра нижних частот для случая прямоугольного окна.



Импульсная

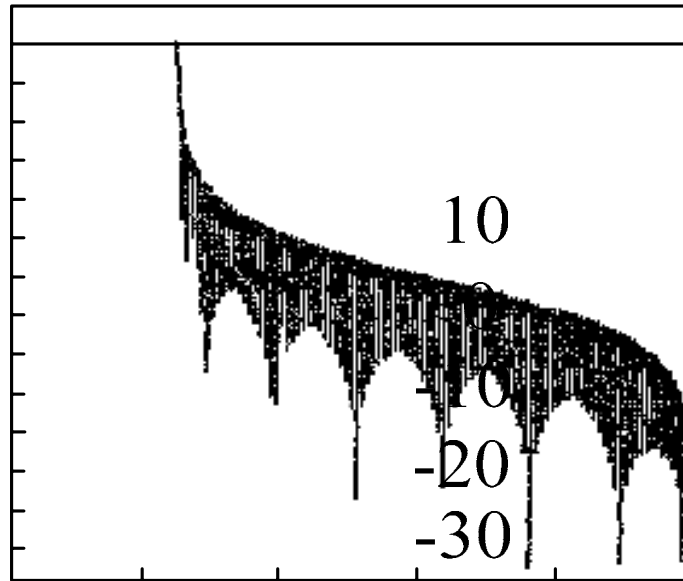
Номера отсчетов  
0,20  
0,10

Рис. 1.10. Импульсная и переходная характеристики фильтра нижних частот с прямоугольным окном

Отчетливо наблюдается эффект Гиббса, причем максимум первого бокового лепестка равен 0,09 (или -21 дБ). Переходная полоса имеет ширину  $0,9375/N$  ( $N = 257$ ) и является в данном случае весьма узкой. Однако из-за больших пульсаций, связанных с явлением Гиббса, для многих приложений этот фильтр непригоден. На рис. 1.13 показана частотная характеристика фильтра нижних частот с окном Хэмминга. Для этого фильтра максимум амплитуды пульсаций в полосе пропускания составляет около 0,0018, а в полосе непропускания – 0,002 (или -53,6 дБ). Ширина переходной полосы равна  $3,3125/N$ , т. е. она более чем в три раза больше ширины переходной полосы для прямоугольного окна. Наконец, для фильтра нижних частот с окном Кайзера (см. рис. 1.15) максимум амплитуды пульсаций в полосах пропускания и непропускания составляет 0,0001, или -80 дБ (для обеих полос), а ширина переходной полосы равна  $5,06/N$ .

Переходная

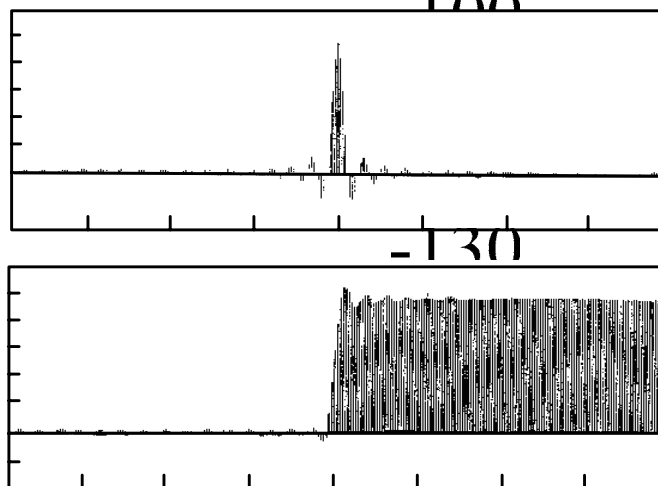
-0,40  
0



ФНЧ

Рис. 1.11. Частотная характеристика фильтра нижних частот с прямоугольным окном

Приведенные примеры показывают, что для улучшения аппроксимации идеального фильтра нижних частот приходится увеличивать ширину переходной полосы с тем, чтобы уменьшить максимальное значение ошибки аппроксимации (пульсаций).



Номера отчетов

Рис. 1.12. Импульсная и переходная характеристики фильтра нижних частот с окном Хэмминга



### 1.2.6. Особенность использования метода взвешивания

Метод взвешивания представляется весьма удобным для проектирования КИХ-фильтров, однако он обладает некоторыми особенностями, которые во многих случаях препятствуют применению окон. Прежде всего, необходимо иметь выражения для коэффициентов ряда Фурье:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (1.4)$$

Когда характеристика  $H(e^{j\omega})$  имеет сложный вид или не может быть просто преобразована в замкнутое выражение (а иногда и в случае, когда это возможно), формула (1.4) зачастую оказывается громоздкой или неудобной для интегрирования. Не имея явного выражения для вычисления невзвешенных коэффициентов, вообще трудно говорить об использовании окон.

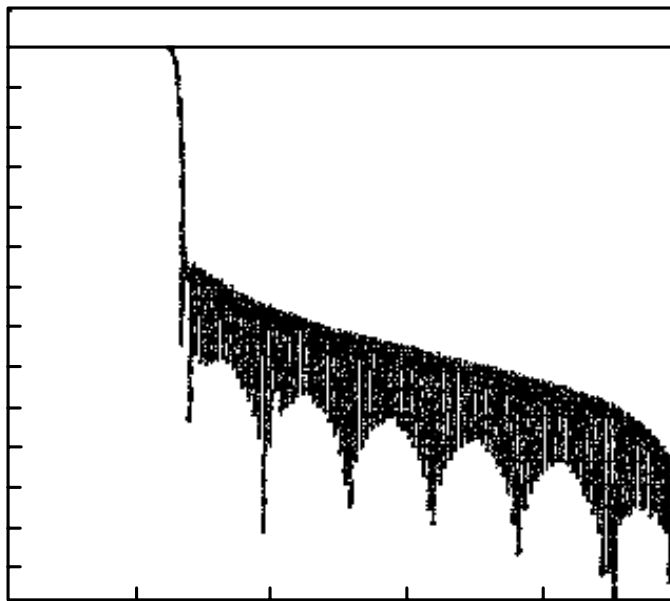


Рис. 1.13. Частотная характеристика фильтра нижних частот с окном Хэмминга

Еще одна особенность метода взвешивания заключается в отсутствии достаточной гибкости при выполнении проектирования. Например, при расчете фильтра нижних частот трудно, как правило, точно определить граничную частоту полосы пропускания, поскольку окно «размывает» раз-

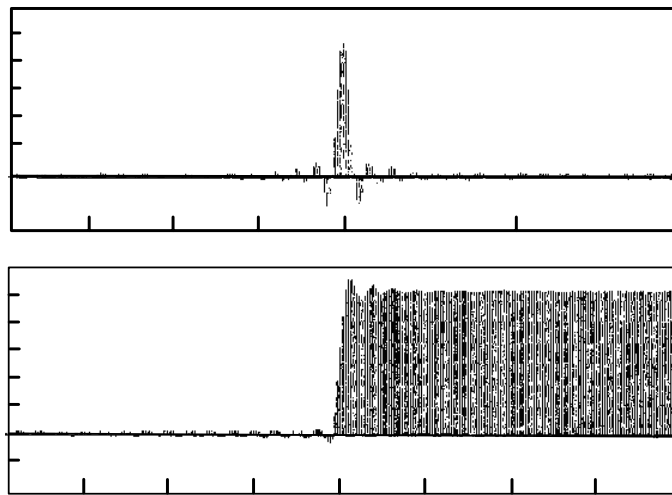
-10

-20

-30

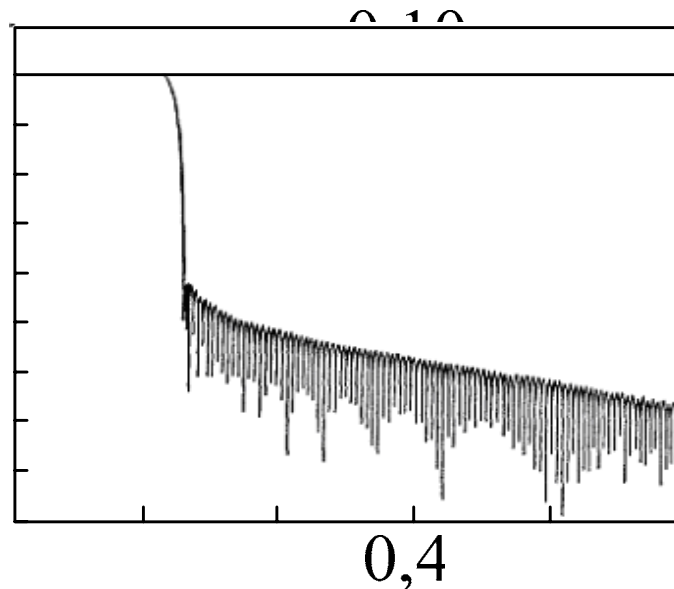
-40

рыв идеальной характеристики. На рис. 1.16 показано, каким образом окно размывает частотную характеристику идеального фильтра нижних частот  $H(e^{j\omega})$  с частотой среза  $F_c$ . Видно, что результирующая характеристика имеет две граничные частоты  $F_1$  и  $F_2$  для полос пропускания и непропускания соответственно. И хотя при разработке фильтров типа идеального фильтра нижних частот эффекты размытия удается скомпенсировать, для фильтров с более сложными характеристиками этого достичь весьма непросто.



Импульсная

Рис. 1.14. Импульсная и переходная характеристики фильтра нижних частот с окном Кайзера



Переходная

Рис. 1.15. Импульсная и переходная характеристики фильтра нижних частот с окном Кайзера

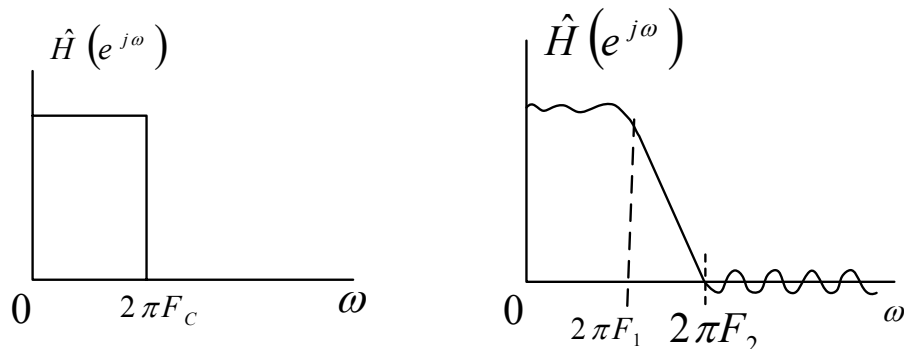


Рис. 1.16. Эффект размытия частотной характеристики за счет окна

### 1.3. Домашнее задание

Построение АЧХ КИХ-фильтра (*FilterSynthes.exe*)

В табл. 1.1 представлены данные для синтеза фильтров различного типа с различными характеристиками.

Таблица 1.1

Ва- риант	Фильтр			
	Тип	1-й	2-й	3-й
1	ПФ	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ Исх. сиг: Синус $f = 850$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,54$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 1$	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ Исх. сиг: Синус $f = 850$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,54$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 0,54$	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ Исх. сиг: Синус $f = 850$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 2$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 0,54$
2	ФВЧ	$f_H = 200$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Синус $f = 210$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 10$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 200$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Синус $f = 210$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 10$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$	$f_H = 200$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Синус $f = 210$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$

Продолжение табл. 1.1

Ва- риант	Фильтр			
	Тип	1-й	2-й	3-й
3	ФНЧ	$f_H = 0$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Синус $f = 100$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 0$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Синус $f = 100$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 0$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Синус $f = 100$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$
4	ПФ	$f_H = 40$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 50$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 40$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 50$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,55$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 40$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 50$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,55$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 40$
5	ПФ	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 900$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 5002$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,54$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 1$	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 900$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 5002$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 30$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 0,54$	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 900$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 5002$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 2$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 0,54$
6	ФВЧ	$f_H = 750$ $f_B = 1000$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 800$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 2000$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 2$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 750$ $f_B = 1000$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 800$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 2000$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 10$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$	$f_H = 750$ $f_B = 1000$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 800$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 2000$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$

Продолжение табл. 1.1

Ва- риант	Фильтр			
	Тип	1-й	2-й	3-й
7	ФНЧ	$f_H = 156$ $f_B = 1100$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 0$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 8000$ $N = 512$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 10$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 122$ $f_B = 1100$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 0$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 122$ $f_B = 1100$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 0$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 30$
8	ФНЧ	$f_H = 88$ $f_B = 800$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 0$ $f_{\text{Срез. В}} = 750$ $f_D = 9000$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 5$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 900$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,7$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 5$	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 900$ $f_{\text{Срез. В}} = 1000$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,7$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 40$
9	ФВЧ	$f_H = 1900$ $f_B = 2500$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 2000$ $f_{\text{Срез. В}} = 2500$ $f_D = 5000$ $N = 1024$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 1900$ $f_B = 2500$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 2000$ $f_{\text{Срез. В}} = 2500$ $f_D = 5000$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 1900$ $f_B = 2500$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 2000$ $f_{\text{Срез. В}} = 2500$ $f_D = 5000$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 35$
10	ФВЧ	$f_H = 1900$ $f_B = 2250$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 2000$ $f_{\text{Срез. В}} = 2250$ $f_D = 4500$ $N = 1024$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 1900$ $f_B = 2250$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 2000$ $f_{\text{Срез. В}} = 2250$ $f_D = 4500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 1900$ $f_B = 2250$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 2000$ $f_{\text{Срез. В}} = 2250$ $f_D = 4500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 40$

Окончание табл. 1.1

Ва- риант	Фильтр			
	Тип	1-й	2-й	3-й
11	ФНЧ	$f_H = 18$ $f_B = 200$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 0$ $f_{\text{Срез. В}} = 220$ $f_D = 1800$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 5$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 18$ $f_B = 200$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 0$ $f_{\text{Срез. В}} = 220$ $f_D = 1800$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 18$ $f_B = 200$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 0$ $f_{\text{Срез. В}} = 220$ $f_D = 1800$ $N = 1024$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное
12	ПФ	$f_H = 700$ $f_B = 900$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 750$ $f_{\text{Срез. В}} = 850$ $f_D = 3500$ $N = 512$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 700$ $f_B = 900$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 750$ $f_{\text{Срез. В}} = 850$ $f_D = 3500$ $N = 512$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,75$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 700$ $f_B = 900$ $\Delta f = 1$ $f_{\text{Срез. Н}} = 750$ $f_{\text{Срез. В}} = 850$ $f_D = 3500$ $N = 512$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,53$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 32$

*Пример работы КИХ-фильтра (FilterTest.exe)*

В табл. 1.2 представлены данные для испытания синтезированных фильтров.

Таблица 1.2

Ва- риант	Фильтр			
	Тип	1-й	2-й	3-й
1	ПФ	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ Исх. сиг: Синус $f = 850$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,54$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 1$	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ Исх. сиг: Синус $f = 850$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,54$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 0,54$	$f_H = 800$ $f_B = 1100$ Исх. сиг: Синус $f = 850$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 2$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 0,54$

Продолжение табл. 1.2

Ва- риант	Фильтр			
	Тип	1-й	2-й	3-й
2	ФВЧ	$f_H = 200$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Синус $f = 210$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 10$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 200$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Синус $f = 210$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 10$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$	$f_H = 200$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Синус $f = 210$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$
3	ФНЧ	$f_H = 0$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Синус $f = 100$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 0$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Синус $f = 100$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 0$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Синус $f = 100$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$
4	ПФ	$f_H = 40$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 50$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 40$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 50$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,55$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 40$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 50$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,55$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 40$
5	ПФ	$f_H = 50$ $f_B = 200$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 50$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,54$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 1$	$f_H = 50$ $f_B = 200$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 50$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 30$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 0,54$	$f_H = 50$ $f_B = 200$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 50$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзера, $\alpha = 2$ Окно ИХ: Хемминг, $\alpha = 0,54$

Продолжение табл. 1.2

Ва- риант	Фильтр			
	Тип	1-й	2-й	3-й
6	ФВЧ	$f_H = 90$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 4, $f = 100$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 2$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 90$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 4, $f = 100$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 10$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$	$f_H = 90$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 4, $f = 100$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 10$
7	ФНЧ	$f_H = 0$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 40$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 10$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 0$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 40$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 0$ $f_B = 100$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 40$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 30$
8	ФНЧ	$f_H = 0$ $f_B = 200$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 15, $f = 35$ $f_D = 5000$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 5$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 0$ $f_B = 200$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 15, $f = 35$ $f_D = 5000$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,7$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 5$	$f_H = 0$ $f_B = 200$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 15, $f = 35$ $f_D = 5000$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,7$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 40$
9	ФВЧ	$f_H = 20$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 35$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 20$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 35$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 20$ $f_B = 250$ Исх. сиг: Прямоуг. Длит. = 10, $f = 35$ $f_D = 500$ $N = 128$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,52$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 35$



Ва- риант	Фильтр			
	Тип	1-й	2-й	3-й
10	ФВЧ	$f_H = 300$ $f_B = 400$ Исх. сиг: Синус $f = 300$ $f_D = 800$ $N = 128$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 300$ $f_B = 400$ Исх. сиг: Синус $f = 300$ $f_D = 800$ $N = 128$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 300$ $f_B = 400$ Исх. сиг: Синус $f = 300$ $f_D = 800$ $N = 128$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 40$
11	ФНЧ	$f_H = 0$ $f_B = 200$ Исх. сиг: Синус $f = 180$ $f_D = 5000$ $N = 1024$ Окно входа: Кайзер, $\alpha = 5$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 0$ $f_B = 200$ Исх. сиг: Синус $f = 180$ $f_D = 5000$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,6$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 0$ $f_B = 200$ Исх. сиг: Синус $f = 180$ $f_D = 5000$ $N = 1024$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное
12	ПФ	$f_H = 70$ $f_B = 85$ Исх. сиг: Синус $f = 72$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Прямоугольное Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 70$ $f_B = 85$ Исх. сиг: Синус $f = 72$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,75$ Окно ИХ: Прямоугольное	$f_H = 70$ $f_B = 85$ Исх. сиг: Синус $f = 72$ $f_D = 12500$ $N = 1024$ Окно входа: Хемминг, $\alpha = 0,53$ Окно ИХ: Кайзер, $\alpha = 32$

#### 1.4. Экспериментальная часть

В ходе выполнения лабораторной работы предусматривается использование двух программных модулей:

- для синтеза фильтра и построения его АЧХ (FilterSynthes.exe);
- проведения фильтрации базовых сигналов с переменными характеристиками и исследования влияния параметров фильтра на выходной сигнал (Filter Test.exe).

После изучения теоретических сведений следует приступить к синтезированию АЧХ фильтра путем использования программы «FilterSynthes.exe». Рабочее окно программы представлено на рис. 1.17:

- 1 – нижняя частота фильтра (Гц);
- 2 – верхняя частота фильтра (Гц);
- 3 – шаг изменения частоты (Гц);
- 4 – частота среза нижняя (Гц);
- 5 – частота среза верхняя (Гц);
- 6 – частота дискретизации и количество отсчетов;
- 7 – кнопка «Обновить» инициирует обсчет характеристик фильтра после изменения параметров.

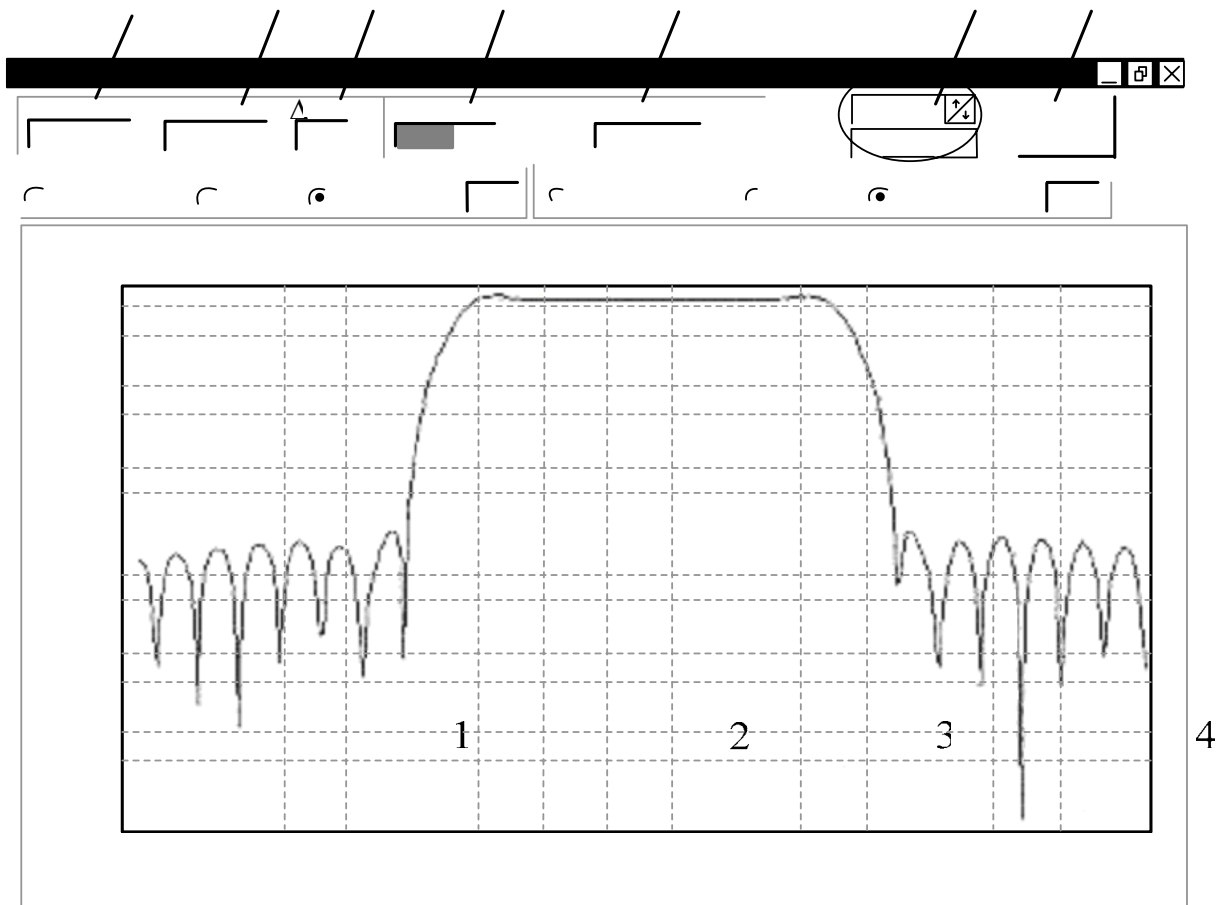


Рис. 1.17. Рабочее окно программы «FilterSynthes.exe»

Следующий этап работы – изучение влияния параметров фильтра на фильтруемый сигнал. Для этой цели служит модуль «Filter Test.exe». Рабочее окно и расшифровка основных параметров программы представлены на рис. 1.18:

- 1 – длительность сигнала (мс);

- 2 – тип тестового сигнала: гармонический сигнал заданной частоты или периодический импульс определенной длительности;
- 3 – частота синусоиды или период импульса;
- 4 – нижняя граница фильтра (Гц);
- 5 – верхняя граница фильтра (Гц);
- 6 – частота дискретизации и количество отсчетов;
- 7 – кнопка «Обновить» инициирует обсчет исходного сигнала применительно к фильтру с заданными параметрами.

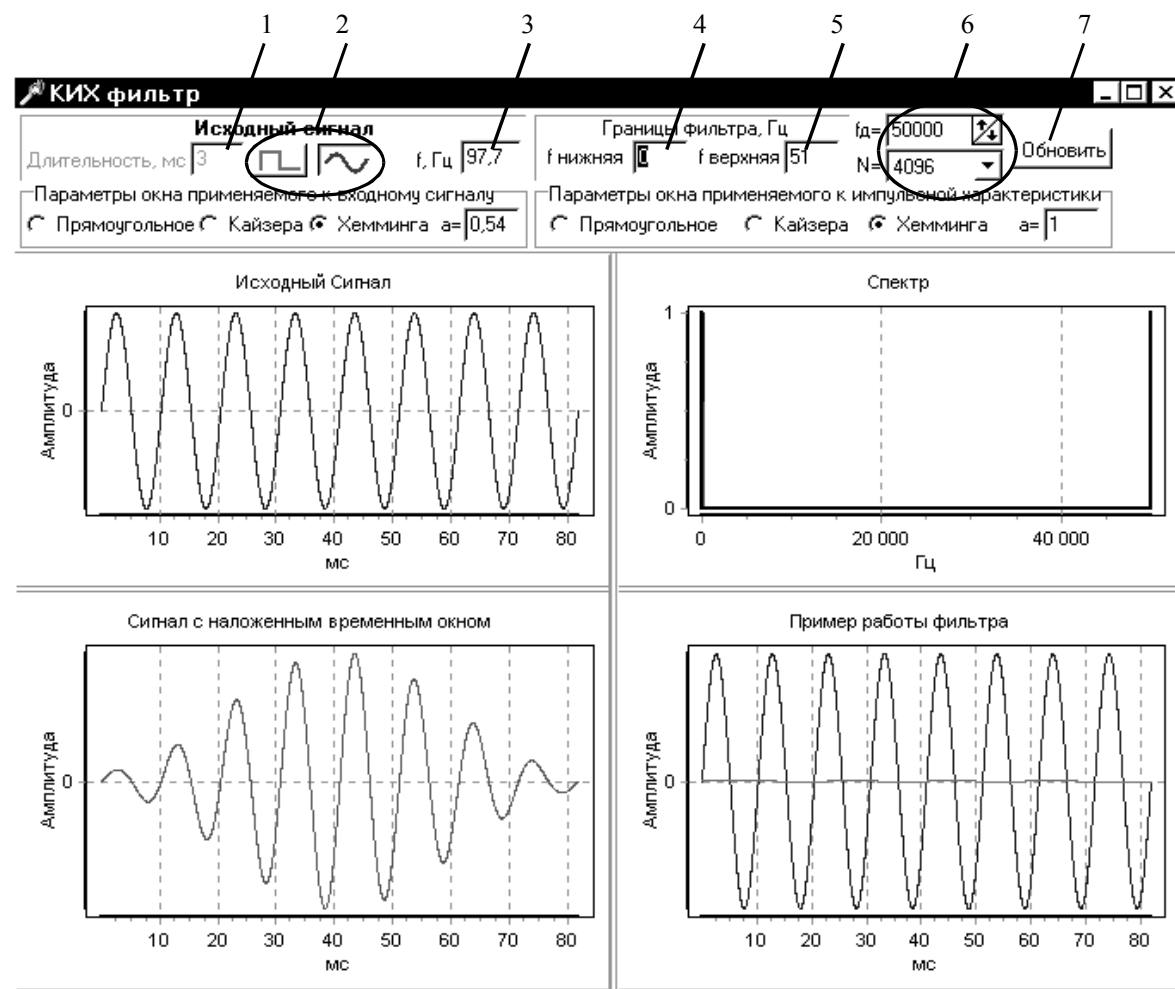


Рис. 1.18. Рабочее окно программы «Filter Test.exe»

## 1.5. Содержание отчета

1. Результаты выполнения домашнего задания.
2. Результаты машинного эксперимента.

## Лабораторная работа 2

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ БИКВАДРАТНЫХ БЛОКОВ МЕТОДОМ БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ [1, 4, 14, 17, 19, 21, 23]

### 2.1. Цели работы

1. Изучение процедуры проектирования рекурсивных цифровых фильтров (ЦФ) методом билинейного преобразования.
2. Изучение свойств биквадратных блоков.
3. Провести проектирование цифровых фильтров по индивидуальному заданию и проверить результаты с помощью программы «PROG4A.EXE».

### 2.2. Краткие теоретические сведения

Одним из наиболее простых и распространенных методов проектирования ЦФ является метод билинейного преобразования. Выбирается исходный аналоговый фильтр-прототип, так что заданной является системная функция  $H(p)$ , где  $p = \sigma + j\omega$ . Далее производится замена переменной  $p$  на  $Z$  по формуле билинейного преобразования

$$p = (1 - z^{-1})/(1 + z^{-1}). \quad (2.1)$$

Полученная после преобразований функция  $H(z) = H(p) = p(1-z^{-1})/(1 + z^{-1})$  является дискретной передаточной характеристикой ЦФ.

Преобразование (2.1) сопоставляет  $p$ -плоскость и  $Z$ -плоскость. Для получения частотных характеристик нужно установить связь между координатами точек вдоль частотной оси  $p$ -плоскости –  $\omega_A$  для аналогового фильтра и координатами точек, лежащих на единичной окружности  $Z$ -плоскости –  $\omega_C$  для ЦФ. Подставив в (2.1)  $p = j\omega_A$  и  $z = e^{j\omega_C T}$ , получим соотношение, связывающее  $\omega_A$  и  $\omega_C$ :

$$\omega_A = \operatorname{tg}(\omega_C T/2). \quad (2.2)$$

где  $\omega_A = \omega/\Omega_d$  – безразмерная частота,  $\Omega_d$  – частота дискретизации.

Рассмотрим методику расчета ЦФ, ориентированную на применение ЭВМ, которая позволяет свести к минимуму объем подготовительных опе-

28

раций и наиболее целесообразна при расчете фильтров высоких порядков. Предположим, что синтезируемый ЦФ реализуется каскадным соединением рекурсивных блоков второго порядка, построенных по канонической форме (так называемых биквадратных блоков), структура которых представлена на рис. 2.1. Системная функция биквадратного блока имеет вид

$$H(Z) = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) / (1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2}). \quad (2.3)$$

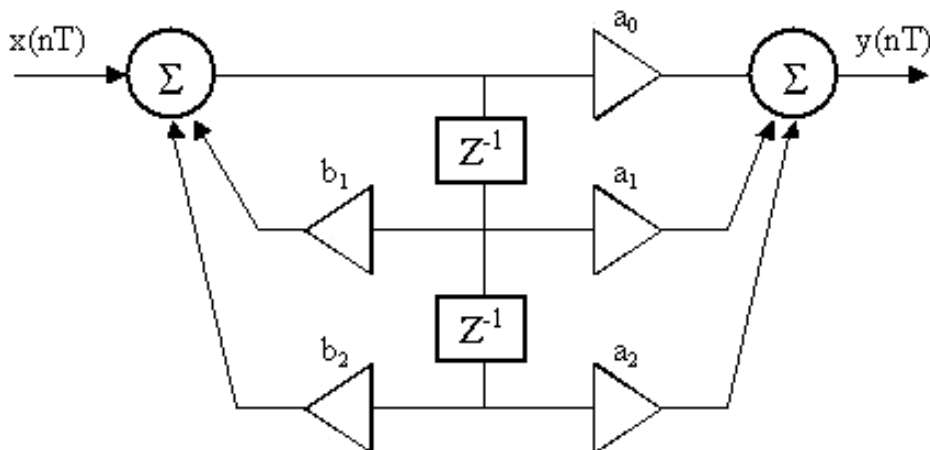


Рис. 2.1. Функциональная схема биквадратного блока

Полосовой ЦФ реализуется последовательным включением фильтров нижних и верхних частот, причем порядок их соединения может быть произвольным.

Расчет производят в следующем порядке:

1. По заданным требованиям к неравномерности АЧХ фильтра в полосе пропускания и полосе задерживания выбирается подходящий вид аппроксимации характеристики аналогового ФНЧ-прототипа (рис. 2.2).

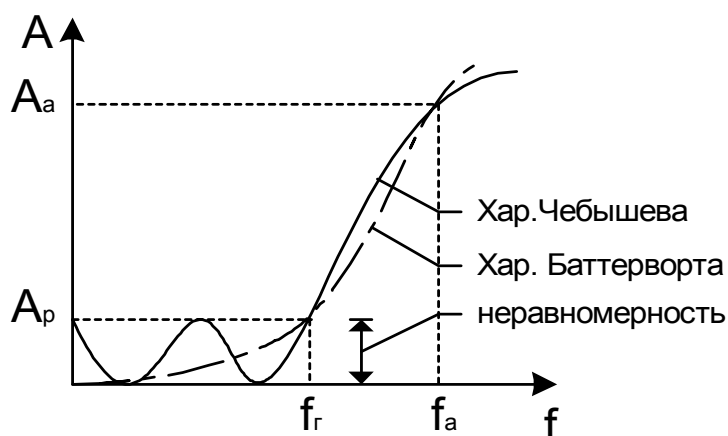


Рис. 2.2. Амплитудно-частотные характеристики фильтров

2. Определяется минимальный порядок фильтра и при необходимости дополняется до ближайшего четного. При расчете полосового фильтра с неодинаковыми требованиями к крутизне скатов АЧХ со стороны нижних и верхних частот находят отдельно порядок ФНЧ и ФВЧ.

3. По принятому виду аппроксимации и рассчитанному порядку фильтра находят значения полюсов системной функции, используя таблицы полюсов из справочника [11].

Для каждой пары комплексно-сопряженных полюсов аналогового фильтра-прототипа  $p_x$  вычисляют соответствующие координаты полюсов биквадратного блока  $Z_{\Pi}$  с помощью соотношений для билинейного преобразования:

$$Z_{\Pi} = (1 + k_{\text{НЧ}}p_x) / (1 - k_{\text{НЧ}}p_x) \text{ — для ФНЧ}; \quad (2.4)$$

$$Z_{\Pi} = (1 + p_x/k_{\text{ВЧ}}) / (p_x/k_{\text{ВЧ}} - 1) \text{ — для ФВЧ},$$

где  $p_x = \sigma_x + j\omega_x$  — нормированный полюс прототипа;  $k_{\text{НЧ}} = \text{tg}(\pi f_{\text{сНЧ}}/f_d)$ ;

$k_{\text{ВЧ}} = \text{tg}(\pi f_{\text{сВЧ}}/f_d)$  — коэффициенты деформации частотного масштаба при билинейном преобразовании;  $f_c$  и  $f_d$  — частоты среза АЧХ и дискретизации соответственно. Из (2.4) определяют коэффициенты в обратных связях:

$$b_1 = 2 \text{Re}(Z_{\Pi}), \quad b_2 = -|Z_{\Pi}|^2.$$

В прямых связях принимают: для ФНЧ  $a_1 = 2$ ; для ФВЧ  $a_1 = -2$ ;  $a_0 = a_2 = 1$  независимо от вида фильтра.

Для расчета АЧХ одного блока используют выражение, получаемое из (2.3) подстановкой  $Z = e^{j\omega T}$ .

$$|H(j\omega)|_i^2 = (2 \cos \omega T + a_{1i})^2 / [1 + b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + 2b_{1i}^2(b_{2i} - 1) \cos \omega T - 2b_{2i} \cos 2\omega T].$$

Результирующая АЧХ фильтра определяется как произведение АЧХ отдельных блоков:

$$|H(j\omega T)|^2 = \prod_{i=1}^N |H(j\omega T)|_i^2,$$

где  $N$  — общее число блоков в фильтре.

Нормировка коэффициента передачи фильтра в полосе пропускания к единице производится включением перед фильтром звена с характеристикой

$$G_0 = |H(j\omega T)|_{\max}^{-1}.$$

### 2.3. Домашнее задание

1. Изучить свойства билинейного преобразования.
2. Рассчитать порядок фильтров по индивидуальному варианту (см. табл. 2.1 раздела «Пояснения к расчету»).
3. Провести проектирование фильтров на персональной ЭВМ с помощью программы «PROG4A.EXE».

*Примечание:*  $f_a = 2f_r$  для ФНЧ и  $f_a = 0,5f_r$  для ФВЧ, полосовой фильтр (ПФ) состоит из ФВЧ и ФНЧ. Для ПФ частота среза ФВЧ –  $f_{r1}$  и среза ФНЧ –  $f_{r2}$ .

Таблица 2.1

Вариант	Фильтр		
	1-й	2-й	3-й
1	$f_d = 3000$ Гц $f_r = 700$ Гц $A_p = 3$ дБ $A_a = 50$ дБ Нерав.: 6 % Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 900$ Гц $f_r = 150$ Гц $A_p = 1$ дБ $A_a = 45$ дБ Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 3900$ Гц $f_{r1} = 400$ Гц $f_{r2} = 900$ Гц $A_p = 2$ дБ $A_a = 75$ дБ Нерав.: 4 % Тип фильтра: ПФ Харак.: Чебышева
2	$f_d = 300$ Гц $f_r = 60$ Гц $A_p = 1$ дБ $A_a = 40$ дБ Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 2000$ Гц $f_r = 300$ Гц $A_p = 3$ дБ $A_a = 60$ дБ Нерав.: 7 % Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 2600$ Гц $f_{r1} = 240$ Гц $f_{r2} = 600$ Гц $A_p = 3$ дБ $A_a = 80$ дБ Тип фильтра: ПФ Харак.: Баттерворта
3	$f_d = 2200$ Гц $f_r = 400$ Гц $A_p = 4$ дБ $A_a = 48$ дБ Нерав.: 1 % Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 600$ Гц $f_r = 40$ Гц $A_p = 6$ дБ $A_a = 50$ дБ Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 700$ Гц $f_{r1} = 90$ Гц $f_{r2} = 150$ Гц $A_p = 1$ дБ $A_a = 60$ дБ Тип фильтра: ПФ Харак.: Баттерворта

Вариант	Фильтр		
	1-й	2-й	3-й
4	$f_d = 3800$ Гц $f_r = 900$ Гц $A_p = 8$ дБ $A_a = 28$ дБ Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 3200$ Гц $f_r = 750$ Гц $A_p = 4$ дБ $A_a = 40$ дБ Нерав.: 3 % Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 3700$ Гц $f_{r1} = 350$ Гц $f_{r2} = 850$ Гц $A_p = 5$ дБ $A_a = 50$ дБ Нерав.: 5 % Тип фильтра: ПФ Харак.: Чебышева
5	$f_d = 1800$ Гц $f_r = 450$ Гц $A_p = 5$ дБ $A_a = 45$ дБ Нерав.: 7 % Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 1500$ Гц $f_r = 100$ Гц $A_p = 3$ дБ $A_a = 35$ дБ Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 2500$ Гц $f_{r1} = 170$ Гц $f_{r2} = 350$ Гц $A_p = 4$ дБ $A_a = 55$ дБ Нерав.: 4 % Тип фильтра: ПФ Харак.: Чебышева
6	$f_d = 400$ Гц $f_r = 50$ Гц $A_p = 3$ дБ $A_a = 50$ дБ Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 4000$ Гц $f_r = 950$ Гц $A_p = 4$ дБ $A_a = 70$ дБ Нерав.: 1 % Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 1900$ Гц $f_{r1} = 350$ Гц $f_{r2} = 450$ Гц $A_p = 6$ дБ $A_a = 40$ дБ Тип фильтра: ПФ Харак.: Баттерворта
7	$f_d = 2800$ Гц $f_r = 650$ Гц $A_p = 6$ дБ $A_a = 38$ дБ Нерав.: 2 % Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 1200$ Гц $f_r = 150$ Гц $A_p = 3$ дБ $A_a = 35$ дБ Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 1300$ Гц $f_{r1} = 90$ Гц $f_{r2} = 300$ Гц $A_p = 2$ дБ $A_a = 55$ дБ Тип фильтра: ПФ Харак.: Баттерворта
8	$f_d = 2600$ Гц $f_r = 850$ Гц $A_p = 5$ дБ $A_a = 46$ дБ Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 1700$ Гц $f_r = 240$ Гц $A_p = 6$ дБ $A_a = 45$ дБ Нерав.: 4 % Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 1300$ Гц $f_{r1} = 70$ Гц $f_{r2} = 110$ Гц $A_p = 4$ дБ $A_a = 65$ дБ Нерав.: 8 % Тип фильтра: ПФ Харак.: Чебышева



Вари- ант	Фильтр		
	1-й	2-й	3-й
9	$f_d = 3400$ Гц $f_r = 600$ Гц $A_p = 5$ дБ $A_a = 65$ дБ Нерав.: 7 % Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 2400$ Гц $f_r = 500$ Гц $A_p = 2$ дБ $A_a = 75$ дБ Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 1600$ Гц $f_{r1} = 140$ Гц $f_{r2} = 340$ Гц $A_p = 6$ дБ $A_a = 35$ дБ Нерав.: 1 % Тип фильтра: ПФ Харак.: Чебышева
10	$f_d = 900$ Гц $f_r = 110$ Гц $A_p = 5$ дБ $A_a = 60$ дБ Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 3200$ Гц $f_r = 750$ Гц $A_p = 4$ дБ $A_a = 40$ дБ Нерав.: 2 % Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 3600$ Гц $f_{r1} = 450$ Гц $f_{r2} = 650$ Гц $A_p = 2$ дБ $A_a = 30$ дБ Тип фильтра: ПФ Харак.: Баттерворта
11	$f_d = 2400$ Гц $f_r = 450$ Гц $A_p = 2$ дБ $A_a = 43$ дБ Нерав.: 2 % Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 1300$ Гц $f_r = 150$ Гц $A_p = 5$ дБ $A_a = 65$ дБ Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 4000$ Гц $f_{r1} = 750$ Гц $f_{r2} = 950$ Гц $A_p = 2$ дБ $A_a = 55$ дБ Тип фильтра: ПФ Харак.: Баттерворта
12	$f_d = 2300$ Гц $f_r = 460$ Гц $A_p = 4$ дБ $A_a = 65$ дБ Тип фильтра: ФНЧ Харак.: Баттерворта	$f_d = 3500$ Гц $f_r = 400$ Гц $A_p = 5$ дБ $A_a = 75$ дБ Нерав.: 10 % Тип фильтра: ФВЧ Харак.: Чебышева	$f_d = 3900$ Гц $f_{r1} = 450$ Гц $f_{r2} = 850$ Гц $A_p = 7$ дБ $A_a = 55$ дБ Нерав.: 10 % Тип фильтра: ПФ Харак.: Чебышева

## ПОЯСНЕНИЯ К РАСЧЕТУ

### Расчет порядка фильтра

Для конкретного типа фильтра значения коэффициентов берут из табл. 2.2.

*Таблица 2.2*

ФНЧ	ФВЧ	ПФ
$K = K_0$	$K = 1 / K_0$	$K_{\text{пф}} = \begin{cases} K_1, & \text{если } K_C \geq K_B \\ K_2, & \text{если } K_C < K_B \end{cases}$ для ФНЧ, $K = K_{\text{пф}}$ ФВЧ, $K = 1 / K_{\text{пф}}$

*Фильтры Баттерворта:*

$$n \geq \log D / [2 \log(1/K)],$$

где  $D = (10^{0,1A_a} - 1) / (10^{0,1A_p} - 1)$ ,  $n$  – порядок фильтра,  $A_p$  – затухание при граничной частоте  $f_r$ ,  $A_a$  – затухание при расстройке на частоту  $f_a$ .

$$K_0 = \text{tg}(\Omega_r T/2) / \text{tg}(\Omega_a T/2);$$

$$\Omega = 2\pi f;$$

$$T = 1 / f_d,$$

где  $\Omega_a$  – угловая частота вне полосы пропускания фильтра, при которой затухание равно  $A_a$ ;  $\Omega_r$  – граничная угловая частота фильтра, при которой затухание равно  $A_r$ .

$$K_A = \text{tg}(\Omega_{r2} T/2) - \text{tg}(\Omega_{r1} T/2);$$

$$K_B = \text{tg}(\Omega_{r1} T/2) \text{tg}(\Omega_{r2} T/2);$$

$$K_C = \text{tg}(\Omega_{a1} T/2) \text{tg}(\Omega_{a2} T/2);$$

$$K_1 = [K_A \text{tg}(\Omega_{a1} T/2)] / [K_B - \text{tg}^2(\Omega_{a1} T/2)];$$

$$K_2 = [K_A \text{tg}(\Omega_{a1} T/2)] / [\text{tg}^2(\Omega_{a1} T/2) - K_B],$$

где  $\Omega_{a1}$ ,  $\Omega_{a2}$  – нижняя и верхняя угловые частоты вне полосы пропускания фильтра, при котором затухание равно  $A_a$ ;  $\Omega_{r1}$ ,  $\Omega_{r2}$  – нижняя и верхняя угловые граничные частоты фильтра при котором затухание равно  $A_r$ .

*Фильтры Чебышева:*

$$n \geq \text{Arch}(D^{1/2}) / \text{Arch}(1/K),$$

где  $\text{Arch } x = \ln[x + (x^2 - 1)^{1/2}]$ .

$$K_A = \text{tg}(\Omega_{r2}T/2) - \text{tg}(\Omega_{r1}T/2);$$

$$K_B = \text{tg}(\Omega_{r1}T/2) \text{tg}(\Omega_{r2}T/2);$$

$$K_C = \text{tg}(\Omega_{a1}T/2) \text{tg}(\Omega_{a2}T/2);$$

$$K_1 = [K_A \text{tg}(\Omega_{a1}T/2)] / [K_B - \text{tg}^2(\Omega_{a1}T/2)];$$

$$K_2 = [K_A \text{tg}(\Omega_{a1}T/2)] / [\text{tg}^2(\Omega_{a1}T/2) - K_B].$$

## ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

*Пример № 1*

**Исходные данные:**

$$f_d = 2000 \text{ Гц}; f_r = 400 \text{ Гц};$$

$$A_p = 4 \text{ дБ}; A_a = 40 \text{ дБ}.$$

Тип фильтра: ФВЧ; харак.: Баттерворта.

**Расчет:**

$$\Omega_r = 2\pi f_r = 2 \cdot 3,141 \cdot 400 = 2,5133e + 003,$$

$$f_a = 2f_r = 2 \cdot 400 = 800,$$

$$\Omega_a = 2\pi f_a = 2 \cdot 3,141 \cdot 800 = 5,0265e + 003,$$

$$T = 1 / f_d = 1/2000 = 5,0000e - 004 \text{ с},$$

$$K_0 = \text{tg}(\Omega_r T/2) / \text{tg}(\Omega_a T/2) = 0,4641,$$

$$D = (10^{0,1A_a} - 1) / (10^{0,1A_p} - 1) = 6613,59,$$

$$n = \log D / [2 \log(1/K)] = 5,7279.$$

Округляем  $n$  до ближайшего четного числа, тогда  $n = 6$ , число необходимых биквадратных блоков  $m = n/2 = 3$ .

*Пример № 2*

**Исходные данные:**

$$f_d = 1000 \text{ Гц}; f_{r1} = 100 \text{ Гц}; f_{r2} = 240 \text{ Гц};$$

$$A_p = 6 \text{ дБ}; A_a = 60 \text{ дБ}.$$

Нерав.: 8 %.

Тип фильтра: ПФ; харак.: Чебышева.

**Расчет:**

$$f_{a1} = 0,5f_{r1} = 50 \text{ Гц},$$

$$f_{a2} = 2f_{r2} = 480 \text{ Гц},$$

$$\Omega_{r1} = 2\pi f_{r1} = 2 \cdot 3,141 \cdot 100 = 628,20,$$

$$\Omega_{r2} = 2\pi f_{r2} = 2 \cdot 3,141 \cdot 240 = 1507,68,$$

$$\Omega_{a1} = 2\pi f_{a1} = 2 \cdot 3,141 \cdot 50 = 314,10,$$

$$\Omega_{a2} = 2\pi f_{a2} = 2 \cdot 3,141 \cdot 480 = 3015,36,$$

$$D = (10^{0,1A_a} - 1) / (10^{0,1A_p} - 1) = 335449,50,$$

$$K_A = \operatorname{tg}(\Omega_{r2}T/2) - \operatorname{tg}(\Omega_{r1}T/2) = 0,6141,$$

$$K_B = \operatorname{tg}(\Omega_{r1}T/2) \operatorname{tg}(\Omega_{r2}T/2) = 0,305,$$

$$K_C = \operatorname{tg}(\Omega_{a1}T/2) \operatorname{tg}(\Omega_{a2}T/2) = 2,517,$$

$$K_1 = [K_A \operatorname{tg}(\Omega_{a1}T/2)] / [K_B - \operatorname{tg}^2(\Omega_{a1}T/2)] = 0,347,$$

$$K_2 = [K_A \operatorname{tg}(\Omega_{a1}T/2)] / [\operatorname{tg}^2(\Omega_{a1}T/2) - K_B] = 0,0386.$$

Округляем  $n$  до ближайшего четного числа, тогда  $n = 6$ , число необходимых биквадратных блоков  $m = n/2 = 3$  для каждого типа фильтра (ФНЧ и ФВЧ).

## 2.4. Экспериментальная часть

*Пример проектирования фильтра с помощью программы  
«PROG4A.EXE»*

**Задача:** спроектировать цифровой рекурсивный фильтр и определить число необходимых биквадратных блоков для его реализации и их параметры.

**Исходные данные:**

Тип фильтра: ПФ.

Тип характеристики АЧХ: Чебышева.

Частота дискретизаций:  $f_d = 1200$  Гц.

Граничные частоты:  $f_{r1} = 100$  Гц,  $f_{r2} = 250$  Гц.

Затухание в полосе пропускания:  $A_p = 3$  дБ.

Затухание при расстройке на октаву:  $A_a = 60$  дБ.

Неравномерность в полосе пропускания:  $P_r = 8$  %.

## Выполнение эксперимента:

### 1. Ввод данных (рис. 2.3).

The screenshot shows the 'Проектирование дискретных фильтров' (Designing discrete filters) software window. It is divided into several sections:

- Functional Diagram:** A block diagram of a biquadratic filter with input  $x(nT)$  and output  $y(nT)$ . It features two summation nodes ( $\Sigma$ ), two delay elements ( $Z^{-1}$ ), and gain blocks  $b_1, b_2, a_1, a_2, a_0$ .
- Filter Type:** Radio buttons for 'ФНЧ' (LPF), 'ФВЧ' (HPF), and 'ПФ' (BPF). 'ПФ' is selected.
- Filter Parameters:** Frequency sliders for 'Частота среза ФНЧ' (250 Гц), 'Частота среза ФВЧ' (100 Гц), and 'Частота дискр.' (1200 Гц).
- Filter Characteristics:** Radio buttons for 'Баттерворта' and 'Чебышева'. 'Чебышева' is selected. Sliders for 'Затухание в полосе частот' (3 дБ), 'Затухание при расстройке на октаву' (60 дБ), and 'Неравномерность в полосе частот' (8 %).
- Design Results:** A field for 'Число необходимых биквадратных блоков' (Number of required biquadratic blocks) is currently empty.
- Block Parameters:** A list box for 'Параметры биквадратных блоков' (Parameters of biquadratic blocks) is empty.
- Buttons:** 'Расчет' (Calculate) and 'Выход' (Exit).

Рис. 2.3. Исходные данные для проектирования

### 2. Результаты машинного эксперимента (рис. 2.4).

This screenshot shows the same software window after the design process is complete. The results are displayed in the 'Результаты проектирования' section:

- Block Count:** 'Число необходимых биквадратных блоков' is now set to 6.
- Block Parameters:** The list box contains the following parameters:

```
b1=1,26292840928471
b2=-0,473129975116467
Блок НЧ - 2
a1=2
b1=0,855153085917333
b2=-0,647243166459603
Блок НЧ - 3
a1=2
b1=0,534834244356269
b2=-0,875625740154494
```
- LAЧХ Plot:** The 'ЛАЧХ' (LA) plot shows a magnitude response with a passband ripple and a sharp roll-off at the cutoff frequencies.
- Buttons:** 'Расчет' (Calculate) and 'Выход' (Exit).

Рис. 2.4. Результат проектирования

Тип фильтра: ПФ.

Число биквадратных блоков  $N = 6$ .

В любом биквадратном блоке  $a_0 = a_2 = 0$ .

Блок ВЧ – 1

$$a_1 = -2$$

$$b_1 = 0,348521179836894$$

$$b_2 = -0,201301969585169$$

Блок ВЧ – 2

$$a_1 = -2$$

$$b_1 = 1,31610876375826$$

$$b_2 = -0,721828526216762$$

Блок ВЧ – 3

$$a_1 = -2$$

$$b_1 = 1,65867691670413$$

$$b_2 = -0,931526698517341$$

Блок НЧ – 1

$$a_1 = 2$$

$$b_1 = 1,26292840928471$$

$$b_2 = -0,473129975116467$$

Блок НЧ – 2

$$a_1 = 2$$

$$b_1 = 0,855153085917333$$

$$b_2 = -0,647243166459603$$

Блок НЧ – 3

$$a_1 = 2$$

$$b_1 = 0,534834244356269$$

$$b_2 = -0,875625740154494$$

## 2.5. Содержание отчета

1. Результаты выполнения домашнего задания.
2. Результаты машинного эксперимента.

## Лабораторная работа 3

### ЦИФРОВОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ [4, 5, 7 – 9, 14, 18]

#### 3.1. Цели работы

1. Изучение методологии распознавания образов.
2. Обучение классификатора: задание классов, вычисление средних образов классов, вычисление дискриминантных функций, определение принадлежности образа классу.
3. Решение задачи распознавания двумерных образов по индивидуальному заданию.

#### 3.2. Краткие теоретические сведения

Образ любого объекта характеризуется совокупностью  $d$  признаков: человек – рост, масса, одежда, пол, автомобиль – цвет, марка, габаритные размеры, РЛ отражения – полоса частот, положение максимума спектра.

Таким образом,  $Z = [z_1, z_2, \dots, z_d]$  – вектор образа, компоненты которого  $z_j$ ,  $j \in [1, d]$ , характеризуют  $d$  признаков объекта.

*Распознавание образа* – причисление его к одному из  $l$  классов  $Z \in C_i, i = \overline{1, l}$ , на основе сравнения с усредненными опытными данными  $[\bar{Z}_i, i = \overline{1, l}]$  из “словаря” распознаваемых образов.

*Критерий распознавания* – минимум евклидова расстояния между классифицируемым образом  $Z$  и эталоном – средним образом  $\bar{Z}_i$   $i$ -го класса, определенным по опытными данным:

$$D_i^2 = \|Z - \bar{Z}_i\|^2 = (Z - \bar{Z}_i)^T (Z - \bar{Z}_i) = \|Z\|^2 - 2 \left\{ \bar{Z}_i^T Z - \frac{1}{2} \|\bar{Z}_i\|^2 \right\} = \min,$$





некоторым нелинейным отображением, задаваемым системой функций  $\tilde{Z}_k = F_k(z_1 \dots z_d), k = \overline{1, d}$ ;  $\sigma_i^2 = (M - 1)^{-1} \sum_{j=1}^M \left\| F(z_{i1} \dots z_{id})_j - \bar{m}_i \right\|^2$  – внутриклассовая дисперсия;  $M$  – объем обучающей выборки.

В практических приложениях часто встречается задача распознавания двумерных образов ( $Z = [z_1, z_2]$ ), чему и посвящена данная лабораторная работа.

### 3.3. Домашнее задание

1. Изучить методологию распознавания двумерных образов.
2. Выполнить процедуру распознавания двумерных образов согласно заданию по номеру варианта. Задания приведены в табл. 3.1 и 3.2.

В табл. 3.1 приведены номера классов и номера зон, в которых расположены классы. Образы для распознавания размещены в табл. 3.2.

В качестве двумерных образов условно приняты совокупности из двух чисел – координат по оси абсцисс  $X$  и координат по оси ординат  $Y$ . Таким образом, двумерный образ это есть набор двух чисел  $Z = [X, Y]$ .

Область задания классов представляет прямоугольник размером  $16 \times 16$  дискретов, разбитый на 16 зон размером  $4 \times 4$  дискрета. Нумерация зон приведена на рис. 3.1.

Начало координат области задания классов находится в левом нижнем углу. Координаты  $X, Y \in [0, 16]$ .

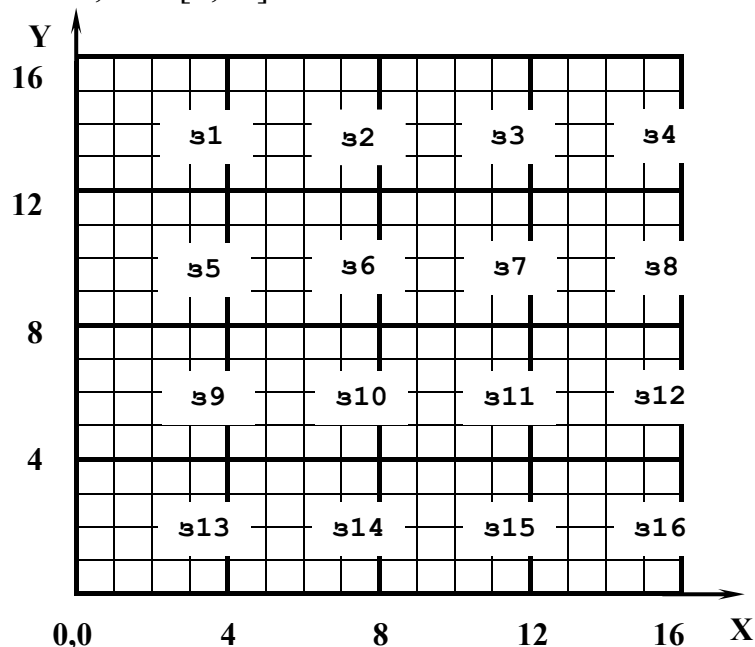


Рис. 3.1. Область задания двумерных образов, разбитая на зоны

Номер класса в табл. 3.1 соответствует одному из 125 классов, схематично приведенных в приложении к лабораторной работе 3. Так, например, класс № 98 имеет следующий вид (рис. 3.2).

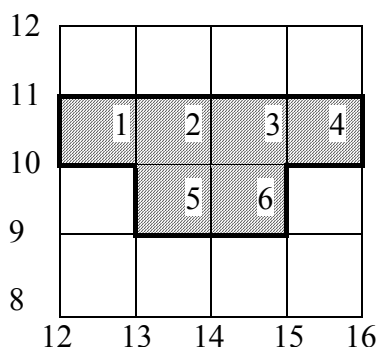


Рис. 3.2. Класс № 98 в зоне 8

Этот класс задается шестью точками. И для его размещения в зоне 8 необходимо задать шесть пар координат  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

Номер точки	1	2	3	4	5	6
$X$	12.5	13.5	14.5	15.5	13.5	14.5
$Y$	10.5	10.5	10.5	10.5	9.5	9.5

В результате класс будет размещен в зоне 8, как это показано на рис. 3.3.

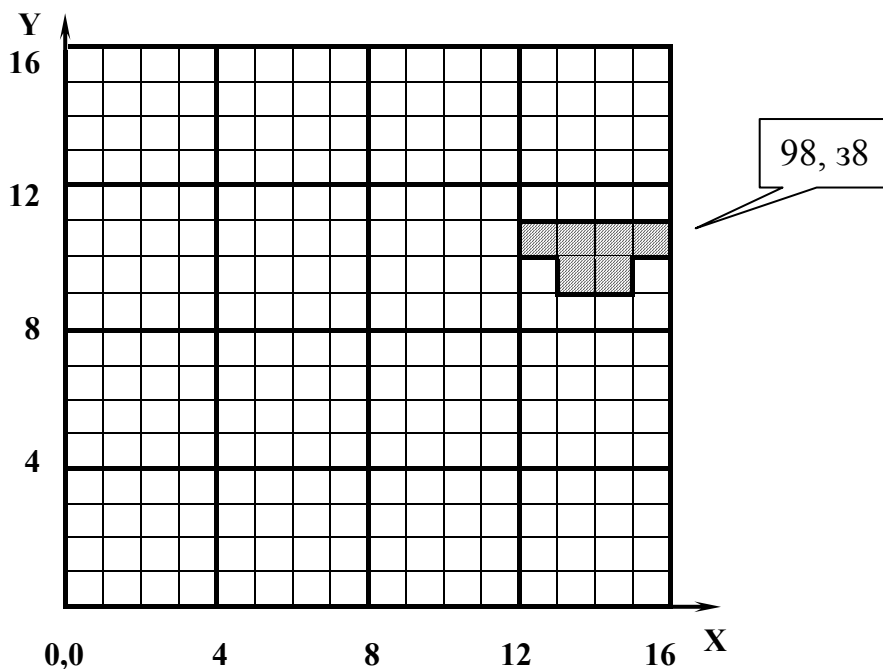


Рис. 3.3. Пример задания класса № 98 в зоне 8

Таблица 3.1

$C_i$	Вариант								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	50, з1	51, з1	52, з2	53, з1	54, з1	55, з1	56, з1	57, з2	58, з1
2	38, з4	39, з3	40, з4	41, з8	94, з4	95, з4	96, з3	97, з4	98, з8
3	42, з10	43, з10	44, з9	45, з9	13, з6	46, з10	47, з10	48, з9	49, з9
4	105, з13	106, з12	107, з11	108, з14	109, з12	110, з13	124, з12	125, з11	111, з14
5	70, з16	71, з13	72, з16	73, з16	82, з13	83, з16	84, з13	85, з16	101, з16

$C_i$	Вариант								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	59, з1	60, з1	61, з1	5, з2	6, з1	11, з1	62, з1	12, з1	30, з2
2	99, з4	100, з4	123, з3	115, з4	116, з8	117, з4	118, з4	119, з3	120, з4
3	86, з6	88, з10	91, з10	93, з9	87, з9	89, з6	90, з10	92, з10	1, з9
4	112, з12	113, з13	114, з12	65, з11	22, з14	25, з12	27, з13	28, з12	23, з11
5	102, з13	103, з16	104, з13	3, з16	4, з16	9, з13	10, з16	14, з13	15, з16

$C_i$	Вариант						
	19	20	21	22	23	24	25
1	31, з1	32, з1	33, з1	34, з1	35, з2	36, з1	37, з1
2	121, з8	122, з4	18, з4	63, з3	19, з4	20, з8	21, з4
3	2, з9	7, з6	8, з10	74, з10	75, з9	76, з9	77, з6
4	24, з14	26, з12	29, з13	66, з12	67, з11	68, з14	69, з12
5	16, з16	17, з13	78, з16	79, з13	80, з16	81, з16	64, з13

Таблица 3.2

$Z_i$	Вариант															
	1		2		3		4		5		6		7		8	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	0.5	3.5	7.5	7.5	13.5	0.5	0.5	4.5	12.5	15.5	0.5	2.5	7.5	5.5	8.5	5.5
2	6.5	7.5	3.5	1.5	8.5	5.5	5.5	1.5	15.5	6.5	7.5	6.5	0.5	3.5	15.5	3.5
3	15.5	1.5	10.5	15.5	15.5	14.5	14.5	0.5	3.5	3.5	15.5	0.5	14.5	4.5	15.5	12.5
4	13.5	14.5	2.5	12.5	7.5	12.5	12.5	9.5	7.5	9.5	2.5	13.5	9.5	13.5	3.5	4.5
5	0.5	13.5	15.5	4.5	1.5	7.5	3.5	15.5	2.5	14.5	14.5	13.5	3.5	14.5	5.5	13.5

$Z_i$	Вариант															
	9		10		11		12		13		14		15		16	
	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$
1	7.5	1.5	3.5	2.5	7.5	7.5	14.5	5.5	8.5	7.5	14.5	2.5	7.5	8.5	14.5	3.5
2	0.5	5.5	6.5	9.5	13.5	1.5	2.5	14.5	6.5	15.5	0.5	7.5	1.5	2.5	7.5	7.5
3	14.5	9.5	13.5	14.5	1.5	12.5	1.5	0.5	15.5	1.5	3.5	12.5	0.5	15.5	3.5	14.5
4	14.5	1.5	14.5	5.5	14.5	13.5	9.5	13.5	13.5	14.5	14.5	9.5	12.5	6.5	1.5	0.5
5	1.5	15.5	2.5	15.5	0.5	1.5	6.5	7.5	3.5	4.5	7.5	3.5	14.5	12.5	15.5	12.5

$Z_i$	Вариант											
	17		18		19		20		21			
	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$		
1	9.5	14.5	15.5	0.5	7.5	0.5	5.5	8.5	6.5	7.5		
2	15.5	4.5	2.5	6.5	15.5	14.5	1.5	2.5	13.5	1.5		
3	3.5	13.5	5.5	6.5	14.5	2.5	15.5	15.5	3.5	12.5		
4	0.5	0.5	12.5	13.5	3.5	14.5	14.5	6.5	0.5	1.5		
5	6.5	6.5	8.5	7.5	0.5	5.5	0.5	13.5	12.5	14.5		

$Z_i$	Вариант									
	22		23		24		25			
	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$		
1	7.5	7.5	2.5	5.5	12.5	8.5	12.5	13.5		
2	0.5	0.5	15.5	1.5	7.5	0.5	2.5	1.5		
3	11.5	14.5	6.5	13.5	1.5	15.5	1.5	13.5		
4	1.5	13.5	13.5	15.5	14.5	3.5	7.5	8.5		
5	14.5	6.5	8.5	7.5	0.5	7.5	12.5	5.5		

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Задание классов

Образы для распознавания

$C_i$	Класс	Зона
$C_1$	52	39
$C_2$	40	32
$C_3$	44	311
$C_4$	107	34
$C_5$	72	316

$Z_i$	$X_i$	$Y_i$
$Z_1$	3.5	4.5
$Z_2$	7.5	14.5
$Z_3$	10.5	4.5
$Z_4$	14.5	15.5
$Z_5$	13.5	0.5

**Задание:** выполнить по индивидуальному заданию следующие процедуры:

1. Обучить классификатор – составить “словарь” образов.
2. Вычислить средние образы (веса  $W_i$ ) и пороги  $\Theta_i$  для каждого класса.
3. Провести распознавание заданных образов путем вычисления дискриминантных функций и поиска максимального значения.

**Решение:**

1. Проведем процедуру обучения классификатора: составим “словарь” образов. Для этого зададим классы по точкам в соответствии с заданием (рис. 3.4, табл. 3.3).

Таблица 3.3

Класс $C_1$		Класс $C_2$		Класс $C_3$		Класс $C_4$		Класс $C_5$	
$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$
3.5	6.5	4.5	14.5	8.5	4.5	12.5	14.5	12.5	3.5
3.5	5.5	5.5	14.5	9.5	7.5	12.5	13.5	12.5	2.5
3.5	4.5	6.5	14.5	9.5	6.5	12.5	12.5	13.5	3.5
		7.5	14.5	9.5	5.5	13.5	13.5	13.5	2.5
				9.5	4.5	13.5	12.5	13.5	1.5
				10.5	4.5	14.5	13.5	13.5	0.5
				11.5	4.5	14.5	12.5	14.5	3.5
						15.5	13.5	14.5	2.5
						15.5	12.5	15.5	3.5
								15.5	2.5

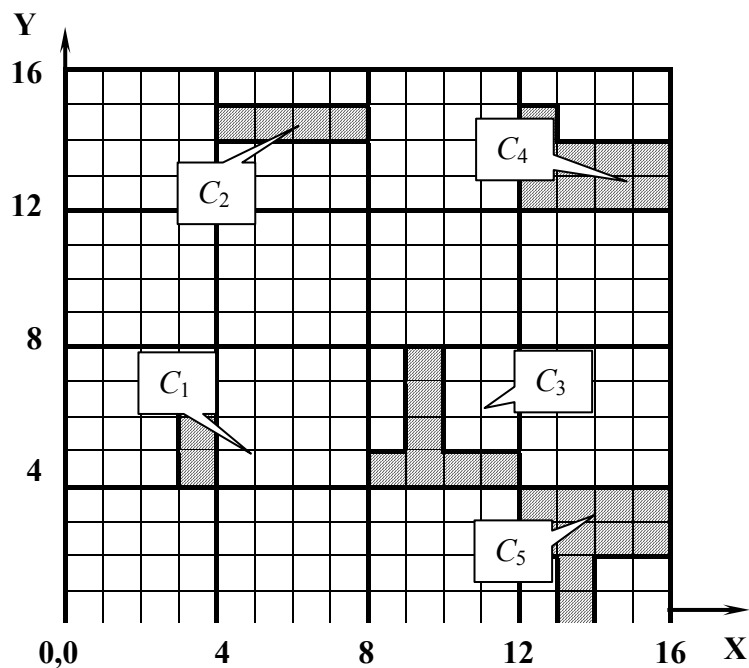


Рис. 3.4. Задание классов – обучение классификатора

2. Вычисление средних образов (весов  $W_i$ ) для каждого класса:

$$\text{Первый класс } C_1: W_1 = \left| \frac{\frac{3.5+3.5+3.5}{3}}{\frac{6.5+5.5+4.5}{3}} \right| = \left| \frac{3.5}{5.5} \right|.$$

$$\text{Второй класс } C_2: W_2 = \left| \frac{\frac{4.5+5.5+6.5+7.5}{4}}{14.5+14.5+14.5+14.5} \right| = \left| \frac{7.5}{14.5} \right|.$$

$$\text{Третий класс } C_3: W_3 = \left| \frac{\frac{8.5+9.5+9.5+9.5+9.5+10.5+11.5}{7}}{4.5+7.5+6.5+5.5+4.5+4.5+4.5} \right| = \left| \frac{9.79}{5.36} \right|.$$

Четвертый класс  $C_4$ :

$$W_4 = \left| \frac{\frac{12.5+12.5+12.5+13.5+13.5+14.5+14.5+15.5+15.5}{9}}{14.5+13.5+12.5+13.5+12.5+13.5+12.5+13.5+12.5} \right| = \left| \frac{13.83}{13.17} \right|.$$

Пятый класс  $C_5$ :

$$W_5 = \left| \frac{\frac{12.5+12.5+13.5+13.5+13.5+13.5+14.5+14.5+15.5+15.5}{10}}{3.5+2.5+3.5+2.5+1.5+0.5+3.5+2.5+3.5+2.5} \right| = \left| \frac{13.9}{2.6} \right|.$$

Вычисление порогов  $\Theta_i$  для каждого класса:

$$\text{Первый класс } C_1: \Theta_1 = \frac{1}{2} \|W_1\|^2 = \frac{(3.5)^2 + (5.5)^2}{2} = 21.25.$$

$$\text{Второй класс } C_2: \Theta_2 = \frac{1}{2} \|W_2\|^2 = \frac{(6.0)^2 + (14.5)^2}{2} = 123.12.$$

$$\text{Третий класс } C_3: \Theta_3 = \frac{1}{2} \|W_3\|^2 = \frac{(9.79)^2 + (5.36)^2}{2} = 62.23.$$

$$\text{Четвертый класс } C_4: \Theta_4 = \frac{1}{2} \|W_4\|^2 = \frac{(13.83)^2 + (13.17)^2}{2} = 182.36.$$

$$\text{Пятый класс } C_5: \Theta_5 = \frac{1}{2} \|W_5\|^2 = \frac{(13.9)^2 + (2.6)^2}{2} = 99.98.$$

3. Распознавание заданных образов – вычисление дискриминантных функций, поиск максимального значения:

Распознавание первого образа  $Z_1$ :

$$Z_1[3.5, 4.5] \Rightarrow \begin{cases} g_1(Z_1) = w_{11}x_1 + w_{12}y_1 - \Theta_1 = 15.75 \\ g_2(Z_1) = w_{21}x_1 + w_{22}y_1 - \Theta_2 = -36.87 \\ g_3(Z_1) = w_{31}x_1 + w_{32}y_1 - \Theta_3 = -3.87 \\ g_4(Z_1) = w_{41}x_1 + w_{42}y_1 - \Theta_4 = -74.69 \\ g_5(Z_1) = w_{51}x_1 + w_{52}y_1 - \Theta_5 = -39.63 \end{cases} \Rightarrow g_1(Z_1) = 15.75 \Rightarrow Z_1 \in C_1.$$

Распознавание второго образа  $Z_2$ :

$$Z_2[7.5, 14.5] \Rightarrow \begin{cases} g_1(Z_2) = w_{11}x_2 + w_{12}y_2 - \Theta_1 = 84.75 \\ g_2(Z_2) = w_{21}x_2 + w_{22}y_2 - \Theta_2 = 132.13 \\ g_3(Z_2) = w_{31}x_2 + w_{32}y_2 - \Theta_3 = 88.84 \\ g_4(Z_2) = w_{41}x_2 + w_{42}y_2 - \Theta_4 = 112.3 \\ g_5(Z_2) = w_{51}x_2 + w_{52}y_2 - \Theta_5 = 41.96 \end{cases} \Rightarrow g_2(Z_2) = 132.13 \Rightarrow Z_2 \in C_2.$$

Распознавание третьего образа  $Z_3$ :

$$Z_3[10.5, 4.5] \Rightarrow \begin{cases} g_1(Z_3) = w_{11}x_3 + w_{12}y_3 - \Theta_1 = 40.25 \\ g_2(Z_3) = w_{21}x_3 + w_{22}y_3 - \Theta_2 = 5.12 \\ g_3(Z_3) = w_{31}x_3 + w_{32}y_3 - \Theta_3 = 64.63 \\ g_4(Z_3) = w_{41}x_3 + w_{42}y_3 - \Theta_4 = 22.14 \\ g_5(Z_3) = w_{51}x_3 + w_{52}y_3 - \Theta_5 = 57.66 \end{cases} \Rightarrow g_3(Z_3) = 64.63 \Rightarrow Z_3 \in C_3.$$

Распознавание четвертого образа  $Z_4$ :

$$Z_4[14.5, 15.5] \Rightarrow \begin{cases} g_1(Z_4) = w_{11}x_4 + w_{12}y_4 - \Theta_1 = 114.75 \\ g_2(Z_4) = w_{21}x_4 + w_{22}y_4 - \Theta_2 = 188.62 \\ g_3(Z_4) = w_{31}x_4 + w_{32}y_4 - \Theta_3 = 162.7 \\ g_4(Z_4) = w_{41}x_4 + w_{42}y_4 - \Theta_4 = 222.3 \\ g_5(Z_4) = w_{51}x_4 + w_{52}y_4 - \Theta_5 = 141.86 \end{cases} \Rightarrow g_4(Z_4) = 222.3 \Rightarrow Z_4 \in C_4.$$

Распознавание пятого образа  $Z_5$ :

$$Z_5[13.5, 0.5] \Rightarrow \begin{cases} g_1(Z_5) = w_{11}x_5 + w_{12}y_5 - \Theta_1 = 28.75 \\ g_2(Z_5) = w_{21}x_5 + w_{22}y_5 - \Theta_2 = -34.87 \\ g_3(Z_5) = w_{31}x_5 + w_{32}y_5 - \Theta_3 = 72.56 \\ g_4(Z_5) = w_{41}x_5 + w_{42}y_5 - \Theta_4 = 10.97 \\ g_5(Z_5) = w_{51}x_5 + w_{52}y_5 - \Theta_5 = 88.96 \end{cases} \Rightarrow g_5(Z_5) = 88.96 \stackrel{\max}{\Rightarrow} Z_5 \in C_5.$$

Таким образом, проведена процедура распознавания двумерных образов. Доказано, что первый образ  $Z_1$  принадлежит первому классу  $C_1$ ,  $Z_2 \in C_2$ ,  $Z_3 \in C_3$ ,  $Z_4 \in C_4$ ,  $Z_5 \in C_5$ .

### 3.4. Экспериментальная часть

1. Загрузить в ПЭВМ программу «гесогн.exe» и провести распознавание двумерных образов, выполненное по домашнему заданию (вариант  $N$ ), с помощью программы. Для этого выполнить обучение классификатора и провести распознавание образа. Результаты распознавания зафиксировать в отчете.

2. Выполнить распознавание с помощью программы «гесогн.exe» (вариант  $N + 1$ ), результаты зафиксировать в отчете.

#### ПОЯСНЕНИЯ К РАБОТЕ С ПРОГРАММОЙ «RECOGN.EXE»

##### *О программе*

Программа разработана для лабораторного практикума по курсу "Дискретная и цифровая обработка информации". Программа осуществляет распознавание образов по методу минимума евклидова расстояния.

##### *Область задания классов*

Область задания классов – это визуальное средство представления распознаваемых образов и классов словаря (рис. 3.5).

На экране компьютера распознаваемые образы будут помечены красными звездочками. Над ними в зеленом квадрате – результат распознавания (номер класса, к которому принадлежит образ). Координаты



распознаваемого образа определяются в инспекторе распознаваемых образов.

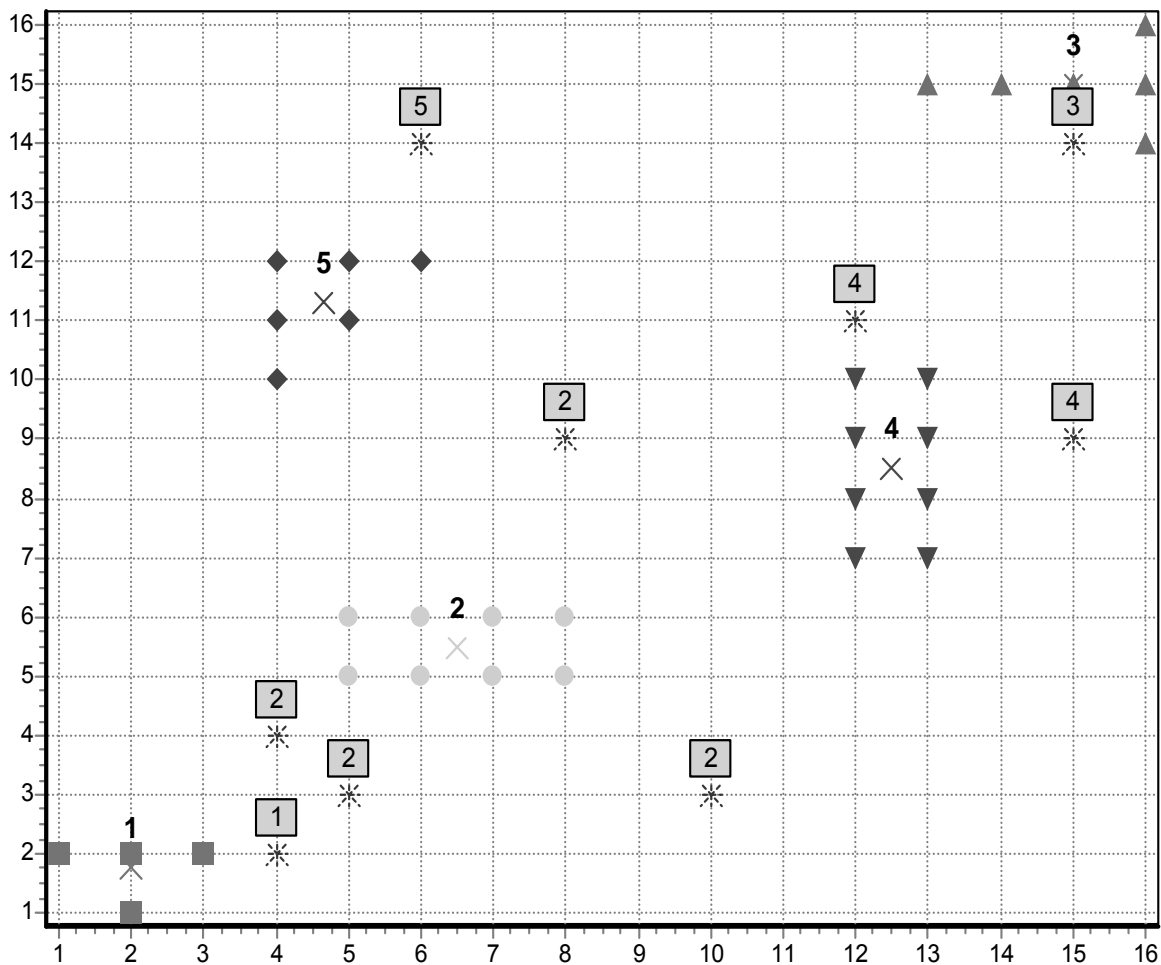


Рис. 3.5. Вид области задания классов после обучения и распознавания

Образы объектов, входящих в словарь распознаваемых образов, представлены в виде различных геометрических фигур (квадраты, треугольники, ромбы, ...). Представители одного класса имеют одинаковую форму и цвет (пользователь может изменить их в инспекторе словаря распознаваемых образов). Средняя точка класса представлена в виде креста, сверху находится номер класса, к которому она принадлежит.

Масштаб отображения графика автоматический. Кроме того, присутствует возможность его увеличения. Для этого правой кнопкой мыши нажать на правый верхний угол, кнопку отпустить в левом нижнем углу прямоугольной области, требующей увеличения.

Предусмотрена возможность сохранения изображения в виде файла формата Emf и копирования в другие приложения через буфер обмена (на пример, в Microsoft Word).

#### *Инспектор словаря распознаваемых образов и классов*

Инспектор классов предназначен для составления словаря распознаваемых образов. Число классов управляется кнопками «Добавить» и «Удалить». Переход между классами осуществляется нажатием левой клавиши мыши на соответствующую закладку. Содержимое класса представляется в виде таблицы, добавление и удаление представителей классов осуществляется нажатием клавиш «Alt» + «Insert» и «Alt» + «Delete». Навигация возможна с помощью как клавиатуры, так и мыши. Для редактирования ячейки достаточно воздействовать на нее мышью или с помощью клавиатуры. Для выхода из режима редактирования достаточно нажать клавишу «Enter».

Под таблицей находится кнопка «Цвет», с помощью которой можно поменять цвет образов в области задания классов. В выпадающем списке можно изменить форму представителя класса.

#### *Инспектор распознаваемых образов*

Располагается в верхней части рабочей области, служит для задания координат распознаваемых образов. Работа с инспектором распознаваемых образов возможна, если в инспекторе словаря распознаваемых образов больше двух классов.

#### *Сохранение результатов*

Для сохранения результатов работы («Область задания классов и отчет») необходимо войти в меню «Файл», затем в подменю. Сохранить и выбрать требуемый пункт.

Изображение области задания классов сохраняется в виде графического файла векторного формата Emf.

Содержание отчета сохраняется в виде текстового файла с расширением txt.

### Отчет

В отчете содержится информация о проделанной работе. Обучаемая выборка представлена в виде таблицы. Обновление ее происходит каждый раз после изменений в инспекторе классов. Значения дискриминантных функций записываются в столбик, значение максимальной отмечается двумя звездочками. Результат распознавания записывается в виде:

Точка с координатами  $(X, Y)$  принадлежит классу  $C_j$ :

Класс 1		Класс 2 ...		Класс N	
X	Y	X	Y	X	Y
1.000	2.000	5.000	5.000	16.000	16.000
2.000	2.000	5.000	6.000	16.000	15.000
3.000	2.000			16.000	14.000

$$G1 = 7.968750$$

$$G2 = 0.750000$$

$$G3 = -135.000000$$

$$G4 = -50.625000$$

$$GN = -33.777778$$

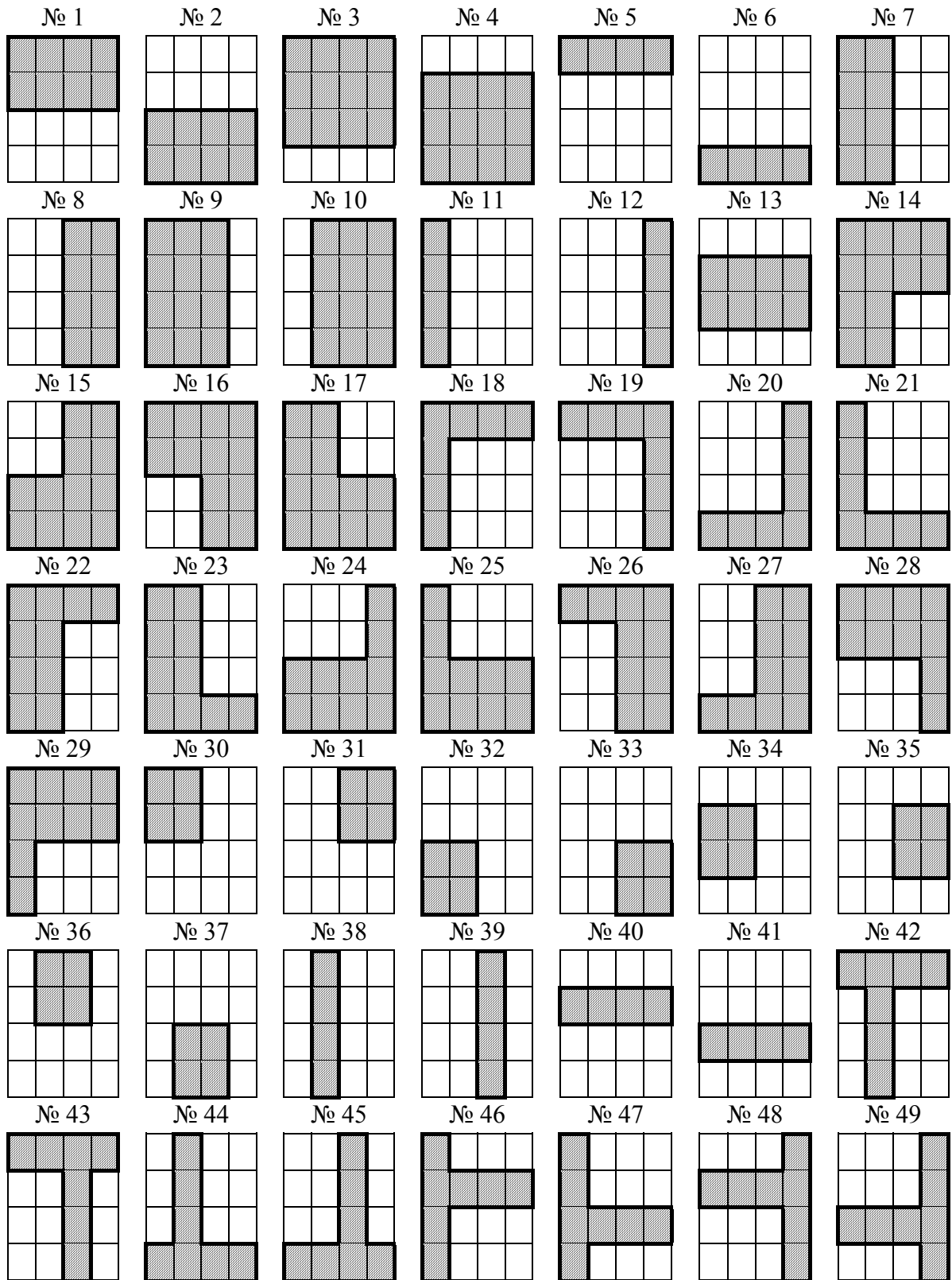
Точка с координатами  $(4.000, 2.000)$  принадлежит классу 1.

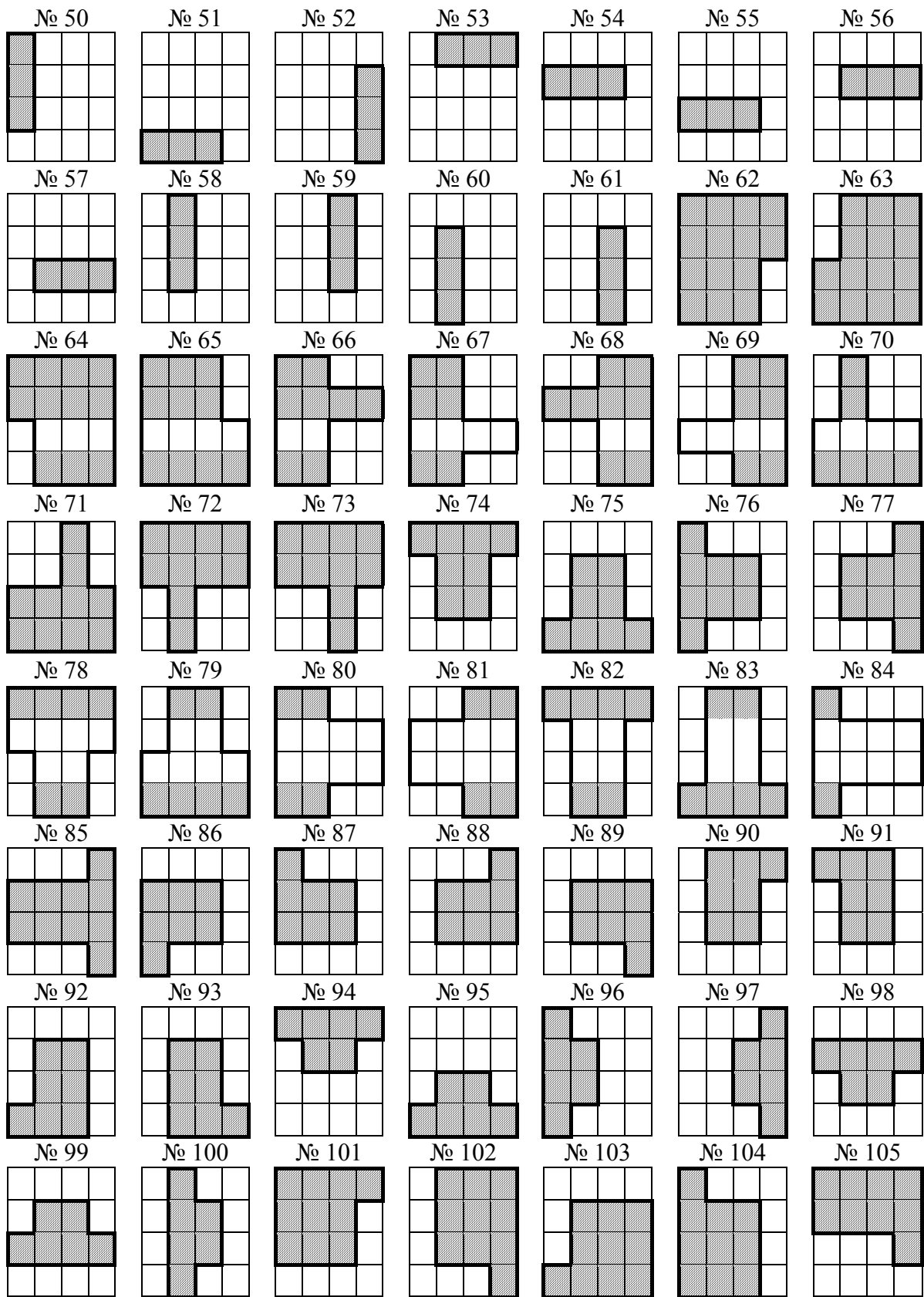
Отчет не предоставляет возможность редактирования, но есть возможность сохранения в виде текстового файла и копирования в другие приложения через буфер обмена (например, в Microsoft Word).

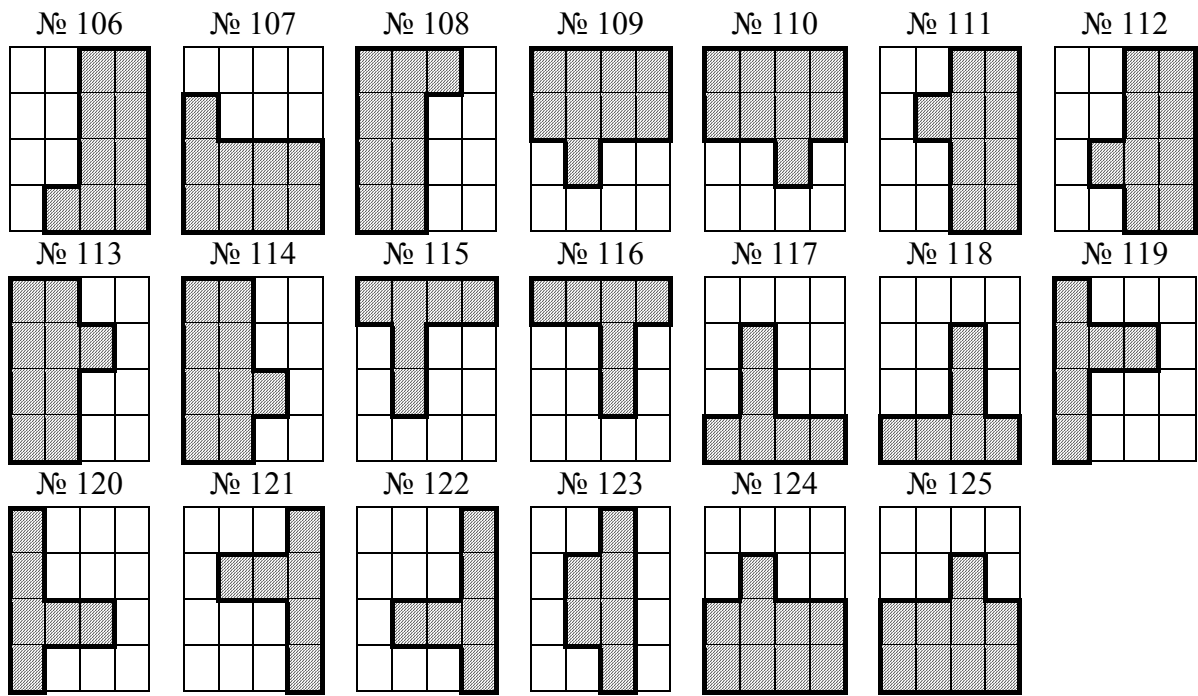
### 3.5. Содержание отчета

1. Результаты выполнения домашнего задания.
2. Результаты распознавания образов в лаборатории.

Варианты классов







## Лабораторная работа 4

# ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ [2 – 4, 8 – 10, 18 – 20]

### 4.1. Цель работы

Изучение нелинейной (гомоморфной) процедуры обработки многоуровневых сигналов.

### 4.2. Краткие теоретические сведения

#### 4.2.1. Природа и описание многолучевого сигнала

Многолучевой сигнал  $x(t) = S(t) + \sum_{i=1}^M c_i(t) = S(t) + \sum_{i=1}^M p_i S(t - t_i)$ .

Аддитивная смесь сигнала  $S(t)$  с его задержанными копиями  $p_i S(t - t_i)$ , где  $p_i$  – коэффициент отражения сигнала радиомаяка (РМ) от  $i$ -го местного предмета МП $_i$ , возникает при распространении сигнала радиопередатчика (например, радиомаяка систем навигации) по разным путям из-за отражений на трассе распространения от каких-либо объектов – местных предметов (МП) (в радионавигации, связи на УКВ и т.п.) (рис. 4.1).

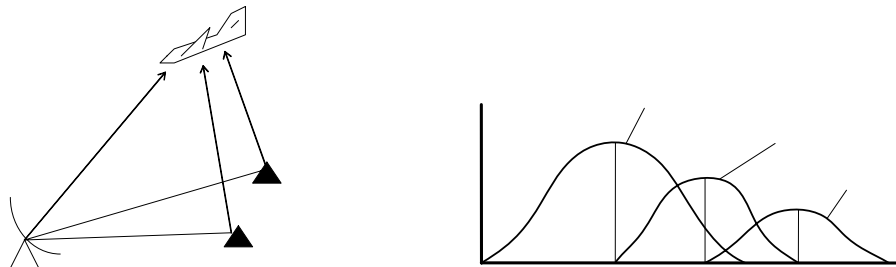


Рис. 4.1. Происхождение и структура многолучевого сигнала

Зеркальные отражения вызывает радиоканал с импульсным откликом (ИО):

$$h(t) = \delta(t) + p_1\delta(t - t_1) + p_2\delta(t - t_2) + \dots + p_M\delta(t - t_M) =$$

$$= \sum_{i=0}^M p_i\delta(t - t_i), p_0 = 1, t_0 = 0.$$

С учетом фильтрующего свойства  $\delta$ -функции  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$  можно считать, что многолучевой сигнал  $x(t) = S(t) \otimes h(t)$  является сверткой основного сигнала  $S(t)$  и импульсного отклика  $h(t)$  канала распространения.

При цифровой обработке в дискретном времени  $n = t / T = 0, 1, 2, \dots$

$$\overset{\text{ЦОС}}{x(t)} \rightarrow x(n) = S(n) + \sum_{i=1}^M p_i S(n - n_i) = S(n) \otimes h(n),$$

$$\overset{\text{ЦОС}}{h(t)} \rightarrow h(n) = \delta(n) + p_1\delta(n - n_1) + p_2\delta(n - n_2) + \dots + p_M\delta(n - n_M) =$$

$$= \sum_{i=0}^M p_i\delta(n - n_i), p_0 = 1, n_0 = 0.$$

Частотная характеристика многолучевого канала находится по спектру ДПФ:

$$H(j\omega) \xrightarrow{\text{ЦОС}} H(k) = F_{+1}\{h(n)\} =$$

$$= 1 + p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_1k} + p_2 e^{-j\frac{2\pi}{N}n_2k} + \dots + p_M e^{-j\frac{2\pi}{N}n_Mk} =$$

$$= \sum_{i=0}^M p_i e^{-j\frac{2\pi}{N}n_ik}, \text{ где } k = \frac{\omega}{\Delta\omega} = 0, 1, 2, \dots - \text{дискретная частота.}$$

Следует заметить, что рассмотренные модели не учитывают влияния шумов, что правомерно для ряда приложений ЦОС.



#### 4.2.2. Разделение сигнала и отражений нелинейной (гомоморфной) фильтрацией

Последовательность процедур

$$x(n) = S(n) \otimes h(n) \xrightarrow{F_{+1}} X(k) = S(k) \cdot H(k) \xrightarrow{\log} \ln |X(k)| = \ln |S(k)| + \ln |H(k)| \rightarrow \xrightarrow{F_{-1}} \mathfrak{K}(m) = \mathfrak{S}(m) + \mathfrak{H}(m),$$

что является *кепстром* – некоторым отображением многолучевого сигнала в новом дискретном времени  $m = \frac{t'}{T} = 0, 1, 2, \dots$ .

Соответственно *кепстры* основного сигнала и импульсного отклика канала (ИОК)

$$\mathfrak{S}(m) = F_{-1} \{ \ln |S(k)| \} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\ln |S(k)|] W_N^{-mk},$$

$$\mathfrak{H}(m) = F_{-1} \{ \ln |H(k)| \} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\ln |H(k)|] W_N^{-mk}.$$

**Пример:** Сигнал двухлучевой с одним ( $M = 1$ ) “несильным” ( $p < 1$ ) отражением

$$x(t) = S(t) + p_1 S(t - t_1) \xrightarrow{\text{ЦОС}} x(n) = S(n) + p_1 S(n - n_1) = S(n) \otimes h(n),$$

$$h(t) = \delta(t) + p_1 \delta(t - t_1) \xrightarrow{\text{ЦОС}} h(n) = \delta(n) + p_1 \delta(n - n_1),$$

$$H(\omega) = 1 + p_1 e^{-j\omega t_1} \xrightarrow{\text{ЦОС}} H(k) = 1 + p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N} n_1 k},$$

$$\ln H(k) = \ln(1 + p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N} n_1 k}) \approx p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N} n_1 k} - \frac{1}{2} p_1^2 e^{-j\frac{2\pi}{N} 2n_1 k} + \frac{1}{3} p_1^3 e^{-j\frac{2\pi}{N} 3n_1 k} - \dots$$

Кепстр видеосмеси  $x(n) = S(n) + p_1 S(n - n_1) = S(n) \otimes h(n)$  со спектром

$$X(k) = S(k) \cdot H(k) = S(k) (1 + p_1 e^{-j\frac{2\pi}{N} n_1 k})$$

определяется как

$$\mathfrak{K}(m) = F_{-1} [\ln |X(k)|] = F_{-1} [\ln |S(k)| + \ln |H(k)|] = \mathfrak{S}(m) + F_{-1} [\ln |H(k)|] \approx \mathfrak{S}(m) + p_1 \delta(m - n_1) - \frac{1}{2} p_1^2 \delta(m - 2n_1) + \frac{1}{3} p_1^3 \delta(m - 3n_1) - \dots \quad (\text{рис. 4.2}).$$

Видно, что кепстр двухлучевого сигнала содержит кепстр основного сигнала  $\hat{S}(m)$  (определяется формой  $S(n)$ ) и  $\delta$ -образные “пики” в точках дискретного времени  $m = n_1, 2n_1, 3n_1$ , и т.д., соответствующие кепстру отражения (или кепстру импульсного отклика двухлучевого канала  $\hat{h}(m)$ ).

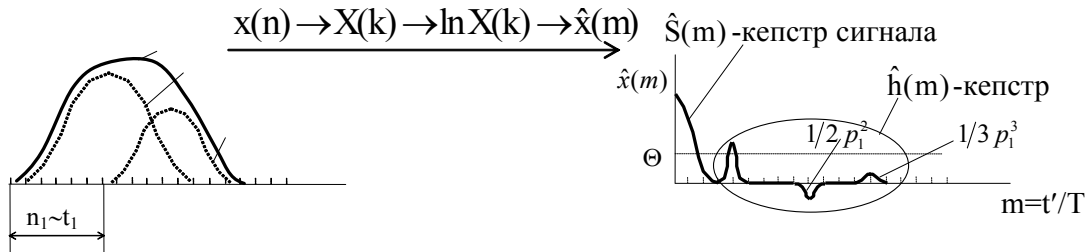


Рис. 4.2. Образование кепстра многолучевого сигнала

### 4.2.3. Структура и возможности обработки на основе анализа кепстров

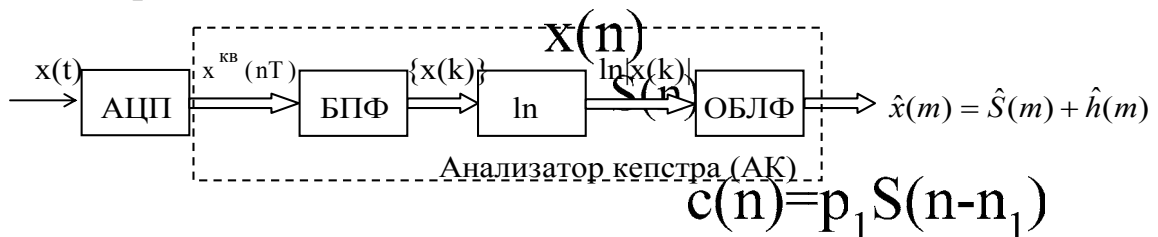


Рис. 4.3. Система гомоморфной обработки

Задачи, решаемые на основе анализа кепстра (рис. 4.4):

1. Обнаружение отражения в смеси (по критерию: более одного пересечения порога  $\Theta$  функцией кепстра  $\hat{x}(m)$ ).

2. Разрешение сигнала и отражения (по глубине провала  $\Delta$ ).

3. Оценка параметров отражения (уровня  $p_1$  и задержки  $t_3 \sim n_1$ ).

4. Компенсация отражения по схеме:

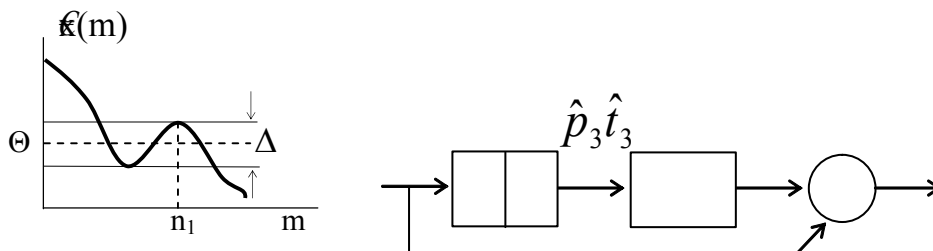


Рис. 4.4. Задачи, решаемые гомоморфной обработкой

Достоинства гомоморфной обработки:

1. Инвариантность к форме сигнала (с точки зрения задачи разрешения).
2. Цифровая реализация (в частности, на ЭВМ программным методом).

Недостатки:

1. Сильная зависимость кепстра от шумов.
2. Реализация на видеочастотах.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ПРОГРАММЫ «СЕРSTRUM»

Программа «СЕРSTRUM» предназначена для изучения методов гомоморфной обработки сигналов и свойств кепстров. Она позволяет наглядно увидеть все этапы обработки сигналов: исходный сигнал, модуль спектра сигнала, натуральный логарифм модуля спектра сигнала и кепстр сигнала. Программа может работать в средах MS-DOS и Windows.

Главное меню программы (рис. 4.5 – 4.7) состоит из шести кнопок:

“Сигнал” – вызов изображения исследуемого сигнала;

“Спектр” – вызов изображения модуля спектра сигнала;

“ $\text{Log}\{X\}$ ” – вызов изображения логарифма модуля спектра;

“Кепстр” – вызов изображения кепстра сигнала;

“Параметры” – вызов окна ввода параметров сигнала и отражения;

“Выход” – завершение работы.

Изображенные на экране кнопки активируются нажатием левой кнопки мыши в момент нахождения указателя мыши в определенной области экрана. Каждой кнопке меню соответствует клавиша на клавиатуре. Сверху вниз кнопкам соответствуют клавиши от “F1” до “F5”. Кнопке “Выход” соответствует клавиша “Esc”.

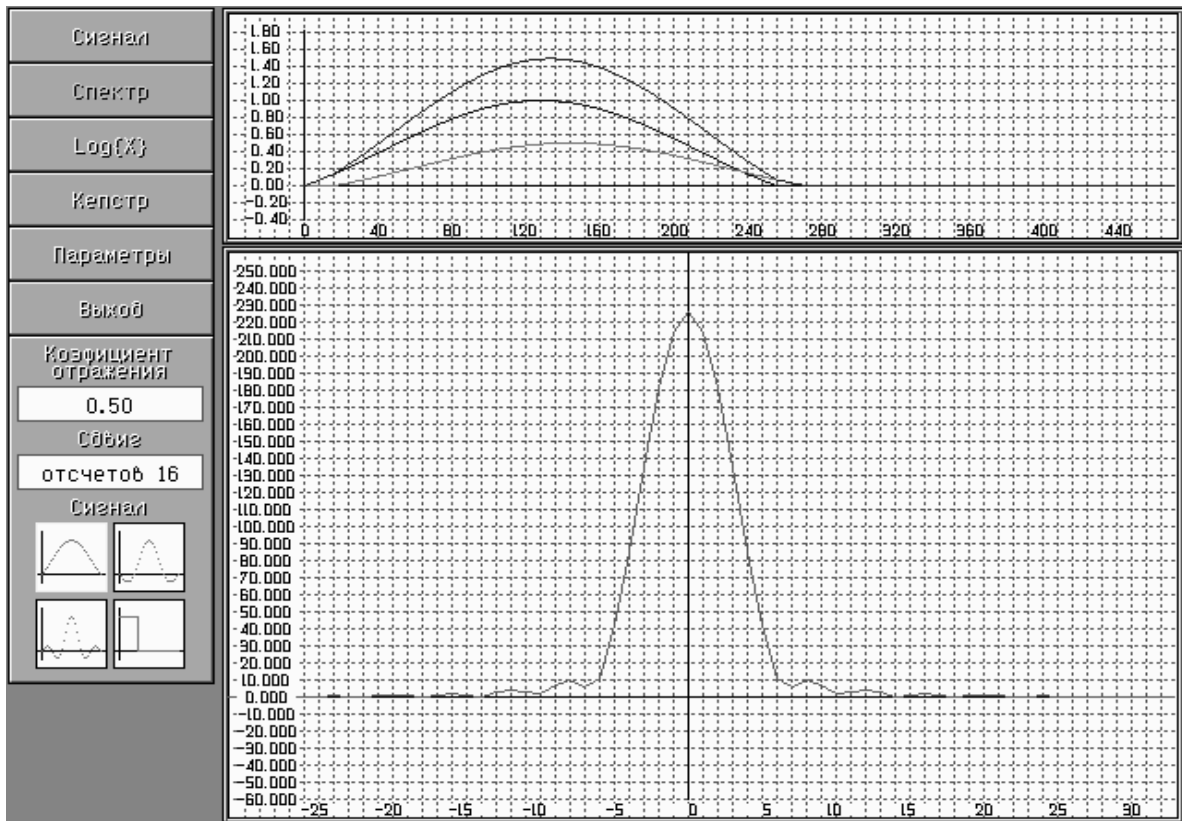


Рис. 4.5. Общий вид экрана. В верхнем окне – сигнал, в нижнем – модуль спектра сигнала

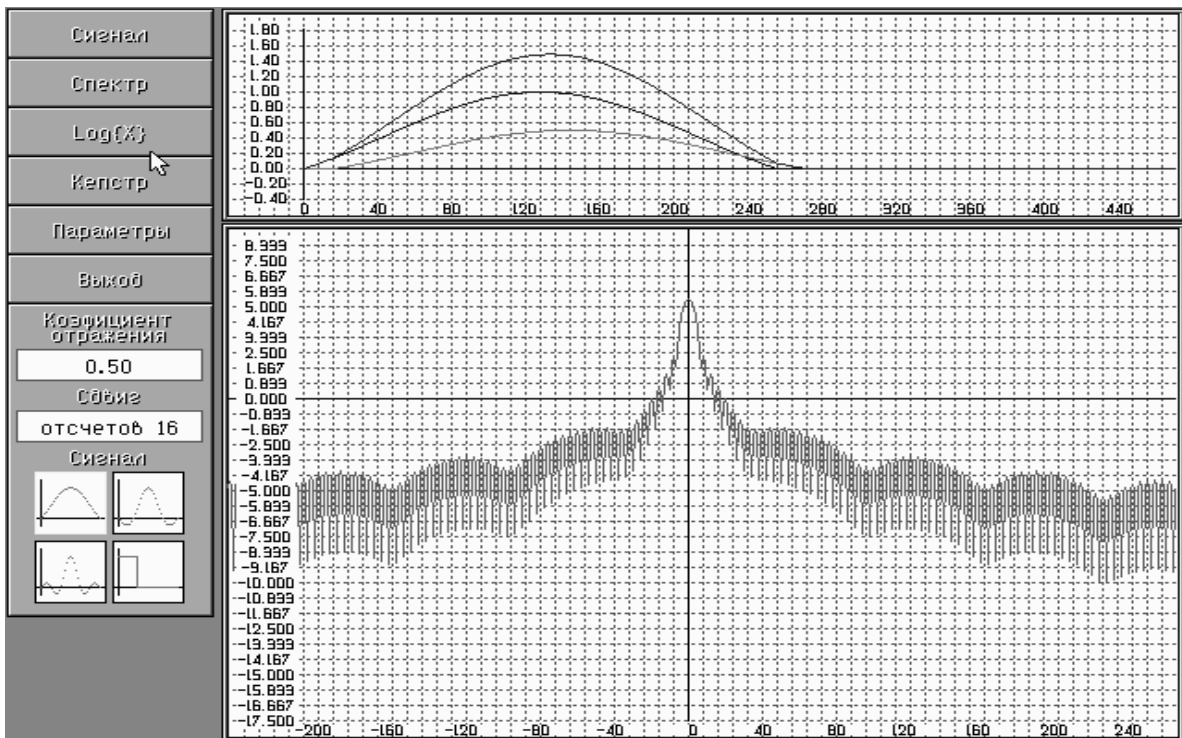


Рис. 4.6. Общий вид экрана. В нижнем окне – логарифм модуля спектра

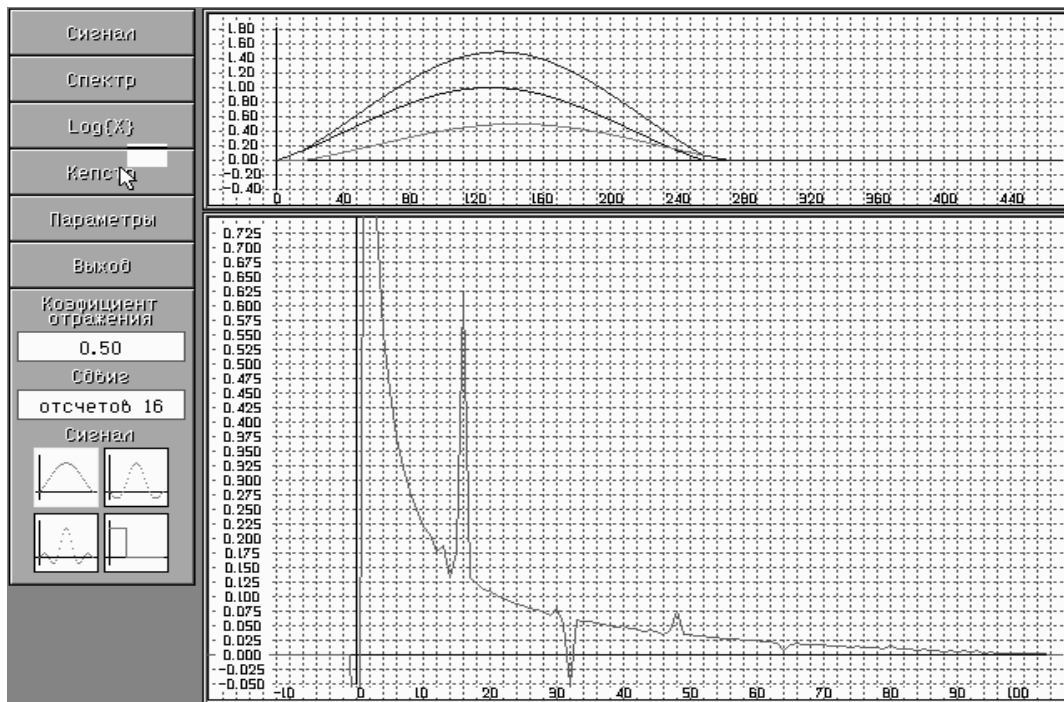


Рис. 4.7. Общий вид экрана. В нижнем окне – кепстр сигнала

Пользователь может моделировать сигнал, подлежащий гомоморфной обработке (рис. 4.8 – 4.10). Вид сигнала моделируется путем выбора из имеющихся в меню “Параметры” сигналов. Выбор осуществляется клавишами “Home”, “End”, “PgUp”, “PgDn”. Выбранный вид сигнала выделяется желтым прямоугольником .

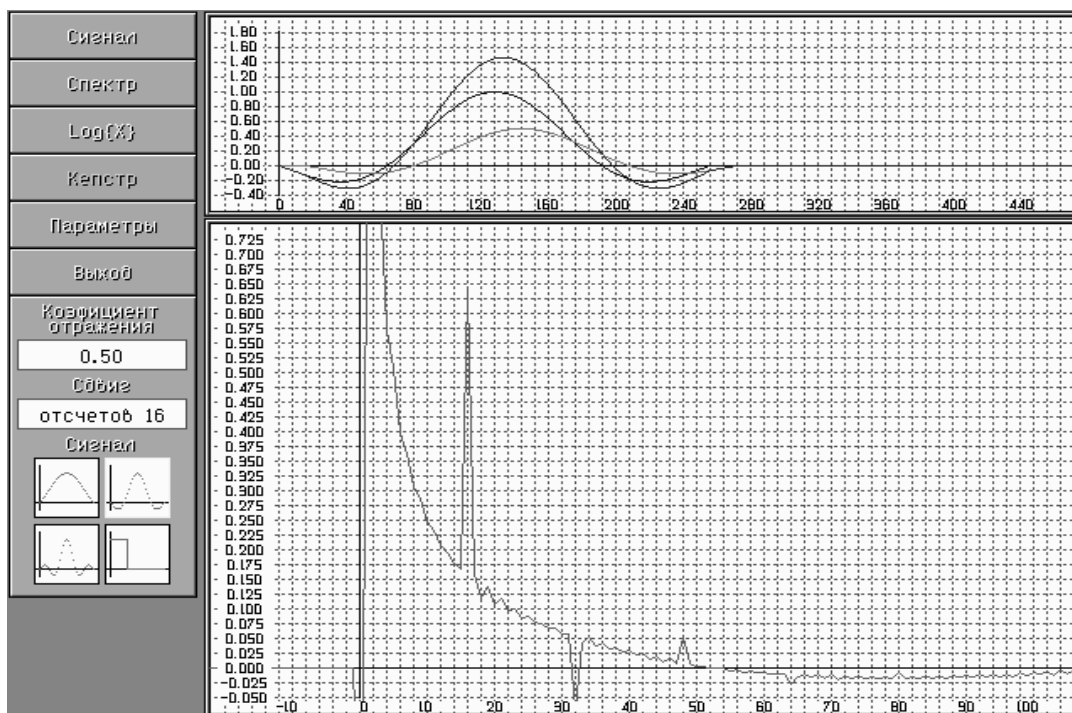


Рис. 4.8. Сигнал  $\sin(x)/x$  с одним боковым лепестком и его кепстр

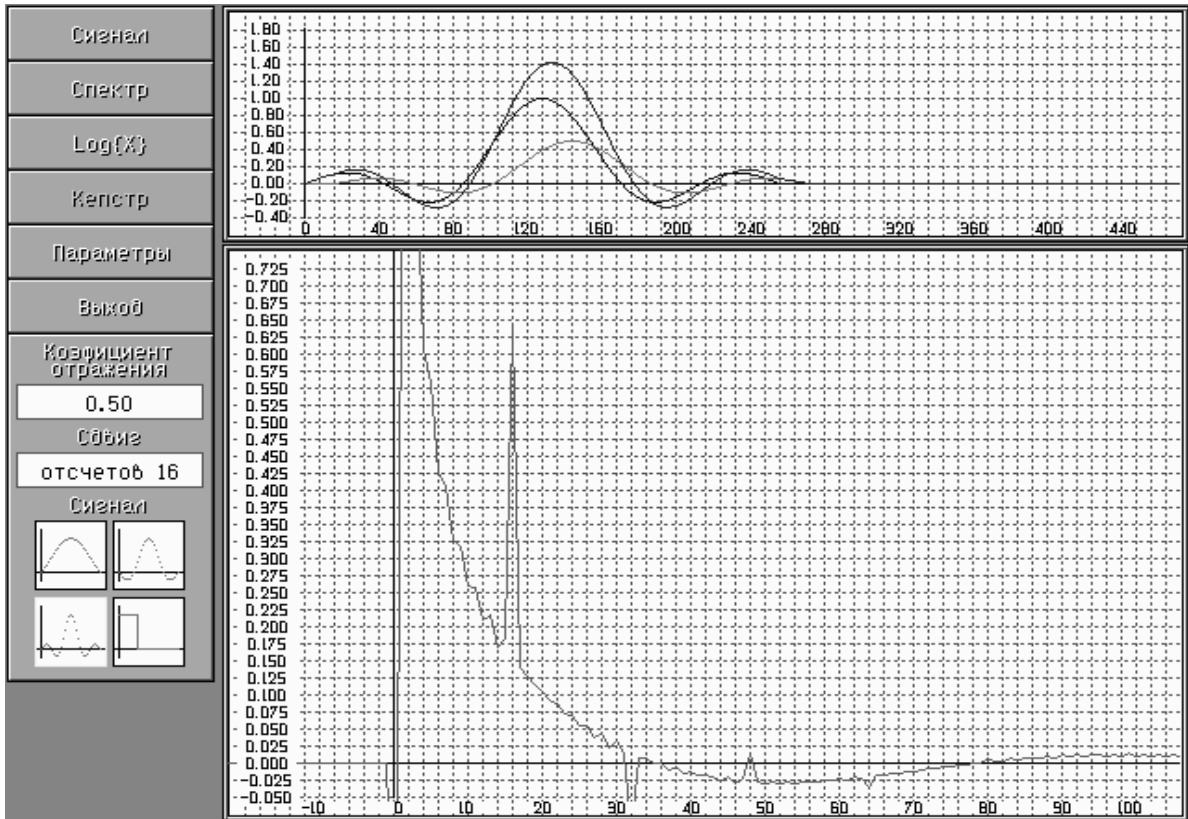


Рис. 4.9. Сигнал  $\text{sinc}(x)/x$  с двумя боковыми лепестками и его кепстр

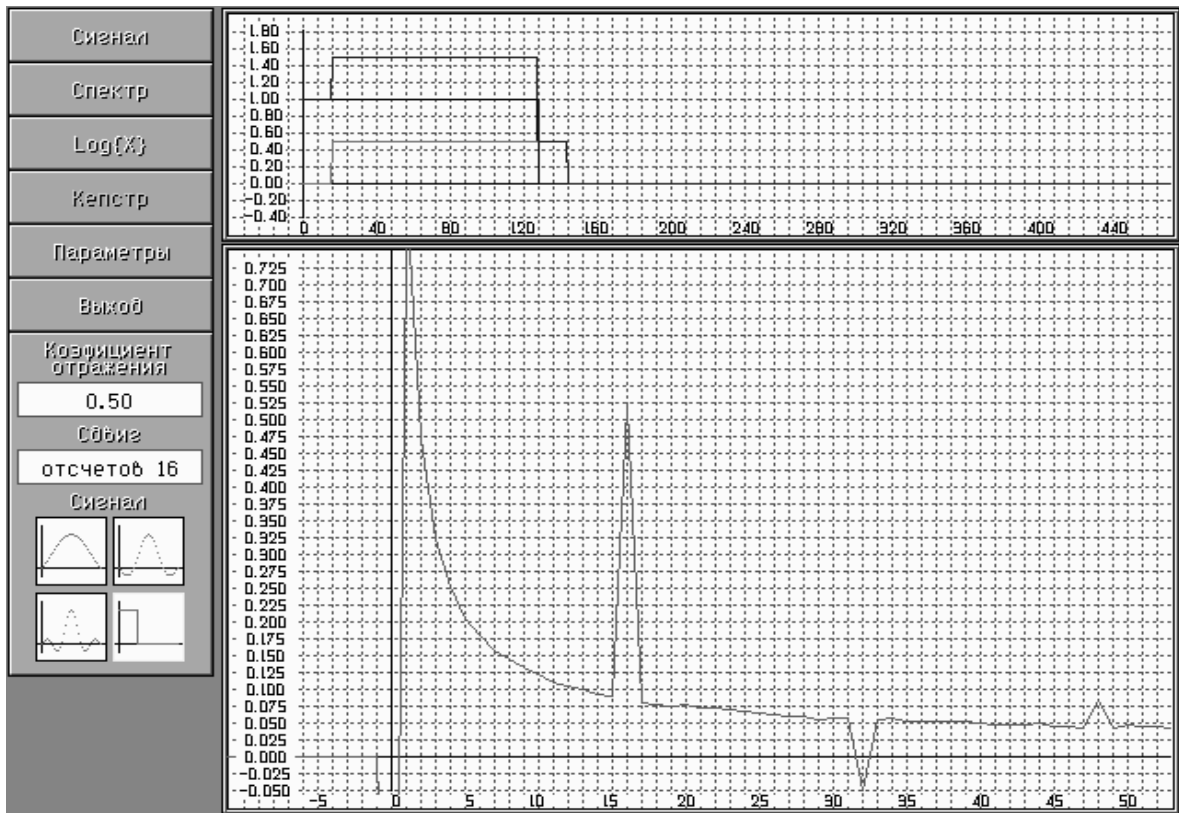


Рис. 4.10. Прямоугольный импульс и его кепстр

Затем можно задавать параметры отражения с помощью клавиш управления курсором. Коэффициент отражения задается клавишами “Вверх”, “Вниз”, а задержка отражения – клавишами “Влево”, “Вправо” (рис. 4.11, 4.12). Длительность всего сигнала 256 отсчетов.

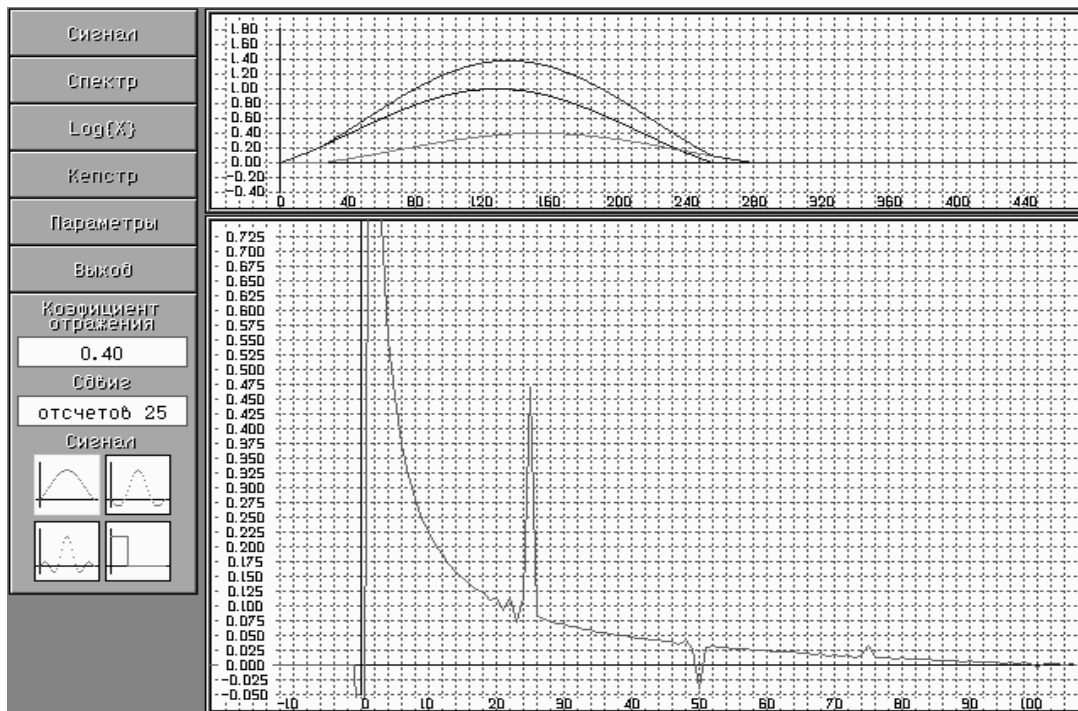


Рис. 4.11. Сигнал с отражением: коэффициент отражения 0.4, сдвиг 25 отсчетов.

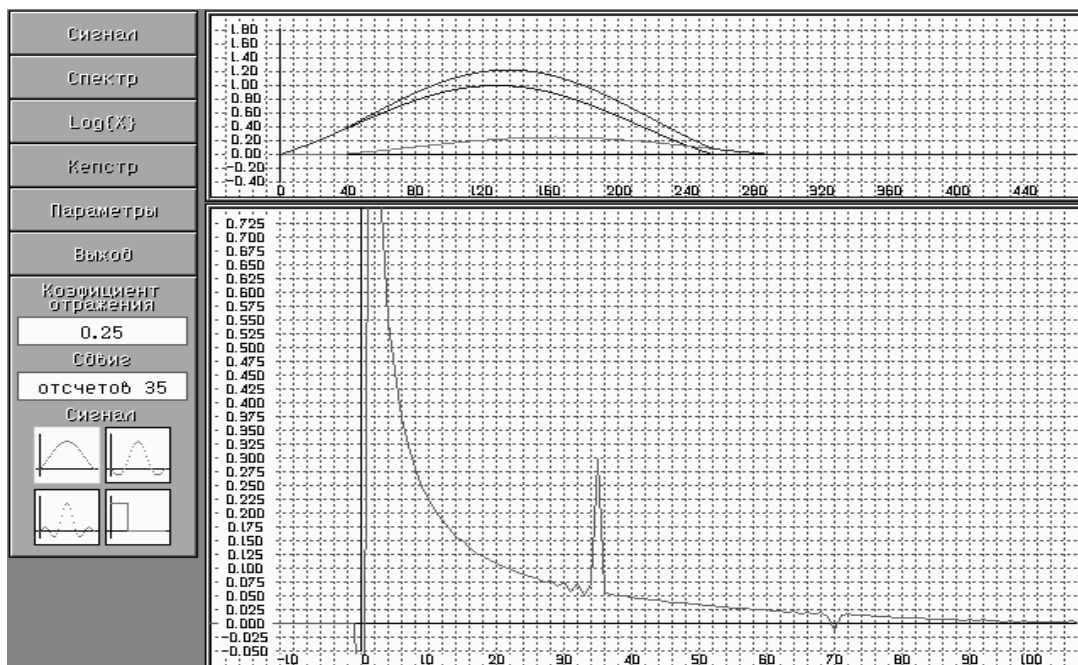


Рис. 4.12. Сигнал с отражением: коэффициент отражения 0.25, сдвиг 35 отсчетов

Для выхода из процедуры установки параметров необходимо нажать клавишу “Enter”. При этом активируется процесс вычисления и появляется сообщение об этом в левом нижнем углу экрана. Исчезновение сообщения означает завершение расчета. После этого можно посмотреть конечный и промежуточные результаты, вызывая нужные графики через меню.

Управление окнами отображения графиков осуществляется с клавиатуры. Для нижнего и верхнего окна одинаково при нажатии клавиши “P” происходит копирование содержимого окна в графический файл формата .IBM, выход осуществляется клавишами «Enter» (без закрытия окна) и «Esc» (с закрытием).

Если после нажатия клавиши «P» не создается графический файл, то можно при запуске программы в среде Windows создать этот файл вручную. Для этого необходимо нажать клавишу «Print Screen», прервать работу программы («Alt» + «Tab»), запустить редактор «Paintbrush», создать файл и вставить в него изображение из буфера. Затем через «Alt» + «Tab» вернуться в программу «Cepstrum.exe» и продолжить работу.

Кроме того, нижнее окно управляется следующими клавишами:

«Home», «End» – передвижение по графику влево, вправо;

«PgUp», «PgDn» – передвижение вверх, вниз;

«Вверх», «Вниз» – изменение вертикального масштаба;

«Влево», «Вправо» – изменение горизонтального масштаба.

### 4.3. Домашнее задание

Нарисовать графики сигналов  $x_1(n) = A \sin c(n) + pA \sin c(n - n_1)$  и  $x_2(n) = A \exp(-bn^2) + pA \exp(-b(n - n_1)^2)$  и ожидаемые графики кепстров для параметров  $A, b, p, n_1$ , задаваемых преподавателем.

### 4.4. Экспериментальная часть

1. Загрузить в ПЭВМ программу «CEPSTRUM».
2. Провести моделирование на ЭВМ заданного сигнала с отраженной копией.



3. Вычислить кепстр двухкомпонентного сигнала и определить параметры отражения. Распечатать графики сигналов кепстров на принтере.
4. Изменить параметры отражения и повторить эксперимент по п. 3.

#### **4.5. Содержание отчета**

1. Структура и описание гомоморфной системы и ее звеньев.
2. Графики сигналов с отражениями и их кепстры.
3. Вывод о свойствах спектров исследуемых сигналов.

## Лабораторная работа 5

### ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ ДПФ (БПФ) [4 – 6, 8 – 10, 14, 17, 19, 20, 22]

#### 5.1. Цели работы

1. Исследование спектров ДПФ (БПФ) типовых радиосигналов.
2. Изучение способов вычисления периодической и линейной сверток.
3. Исследование избирательных свойств ДПФ (БПФ).

#### 5.2. Краткие теоретические сведения

##### *Спектральный анализ на основе процедуры ДПФ*

Процедура ДПФ  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ,

соответствует многоканальному фильтру с выходами  $X(k)$ . Импульсная характеристика  $k$ -го канала

$$h(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

соответствует дискретной передаточной характеристике

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_k(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k}}. \quad (5.1)$$

Из (5.1) видно, что спектроанализатор на основе ДПФ является "гребенкой" из  $N$  фильтров, настроенных на частоты  $\omega_k = 2\pi k / N, k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Для выяснения частотных свойств "гребенки" подадим на вход сигнал в виде ДП  $x(n) = \exp(j\omega n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда ДПФ в точке  $k_1$  из множества  $k = 0, 1, \dots, N-1$  имеет вид

$$X(k_1) = X_{K_1}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nK_1} = \frac{1 - e^{j\omega N}}{1 - e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N}K_1\right)}}$$

откуда находим АЧХ одного "зубца гребенки" в районе частоты  $\omega_{K_1} = \frac{2\pi}{N}k_1$ :

$$\left|H_{K_1}(e^{j\omega})\right| = \left|X_{K_1}(e^{j\omega})\right| = \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k_1}{N}\right)}.$$

Алгоритм ДПФ, позволяя вычислить сразу  $N$  спектральных составляющих, эквивалентен АЧХ многоканального фильтра, каналы которого настроены на частоты  $\omega_k = (2\pi/N)k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Боковые лепестки характеристик фильтра ДПФ и конечная ширина основных лепестков приводят к нежелательным эффектам "растекания (утечки)" спектра по соседним каналам и маскировки спектральных составляющих шумом. Это связано с усечением ДП интервалом  $[0, N-1]$ . Уменьшение лепестковости АЧХ гребенчатого фильтра ДПФ достигается взвешиванием входной ДП временным "окном" длины  $N$

$$\omega(n) = \begin{cases} \omega(n), & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & |n| > \frac{N}{2} \end{cases}$$

со спектром

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \omega(n) e^{-j\omega n}.$$

Известно, что преобразование Фурье взвешенной ДП

$$X_{\omega}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\omega}^{\omega} \omega(n)x(n)e^{-j\omega n}$$

эквивалентно свертке спектров ДП и "окна" в частотной области

$$X_{\omega}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta})W[e^{-j(\omega-\vartheta)}]d\vartheta. \quad (5.2)$$

По (5.2) находится оценка спектра  $X(e^{j\omega})$  взвешенной ДП  $x(n)$  на всех частотах.

Для обеспечения высокого качества спектрального анализа к временному "окну" предъявляются следующие требования:

1. Частотная характеристика "окна"  $W(e^{j\omega})$  должна иметь как можно более узкий главный лепесток ( $\Delta\omega_{\text{гл}} \rightarrow 0$ ), что достигается увеличением длины "окна"  $w(n)$  в пределах длины ДП, т.е.  $n \in [0, N-1]$ .

2. Уровень боковых лепестков  $\gamma_{\text{б.л}} = W_{\text{б.л}}/W_{\text{max}}$  функции  $W(e^{j\omega})$  должен быть минимальным, для чего функция "окна"  $w(n)$  должна плавно нарастать в начале и плавно спадать к концу. Указанным требованиям удовлетворяет ряд "окон":

– треугольное "окно" Бартлета ( $\Delta\omega_{\text{гл}} = 8\pi / N$ ,  $\gamma_{\text{б.л}} = -25$  дБ)

$$\omega_1(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2}; \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1; \end{cases} \quad (5.3)$$

– "окно" Хэмминга ( $\Delta\omega_{\text{гл}} = 8\pi / N$ ,  $\gamma_{\text{б.л}} = 41$  дБ)

$$\omega_2 = 0,54 - 0,46\cos[2\pi n/(N-1)], \quad 0 \leq n \leq N-1; \quad (5.4)$$

– "окно" Блэкмана ( $\Delta\omega_{\text{гл}} = 12\pi / N$ ,  $\gamma_{\text{б.л}} = -57$  дБ)

$$\omega_3 = 0,42 - 0,5\cos[2\pi n / (N-1)] + 0,08\cos[4\pi n / (N-1)]. \quad (5.5)$$

Из (5.3) – (5.5) видно, что глубокое подавление боковых лепестков сопровождается расширением главного лепестка ЧХ "окна", что снижает разрешающую способность спектрального анализа.

Оптимальным (в смысле обладания наибольшей энергией в главном лепестке при заданной амплитуде боковых) является семейство "окон" Кайзера

$$\omega_4(n) = \frac{I_0 \left\{ \omega_a \sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left[n - \left(\frac{N-1}{2}\right)\right]^2} \right\}}{I_0 \left[ \omega_a \left(\frac{N-1}{2}\right) \right]},$$

где  $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (x/2)^k / k! \right]$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Параметр  $\omega_a$  подбирается так, чтобы обеспечить компромисс между шириной главного лепестка и амплитудой бокового лепестка. Обычно  $4 < \omega_a \frac{N-1}{2} < 9$ .

Спектральный анализ случайных процессов на основе ДПФ (БПФ) проводится поэтапно:

1. По заданной разрешающей способности по частоте  $\Delta f$  выбирается интервал наблюдения  $q = k_0 / \Delta f$ ,  $k_0$  – коэффициент, определяемый видом окна.

2. Находится число отсчетов реализации  $x(n)$  длины  $\theta$  с шагом  $T$  на интервале наблюдения  $N = \lceil \theta / T \rceil$  и дополняется нулями до  $N = 2^i$ .

3. Вычисляется спектр ДПФ взвешенной реализации  $x_r(n)w(n)$  на  $r$ -м интервале наблюдения:

$$X_r(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_r(n) \omega(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; r = 1, \dots, M.$$

4. В качестве характеристики спектральной плотности реализации определяется периодограмма:

$$I_r(k) = \frac{|X_r(k)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \omega^2(n)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

5. Находится спектральная плотность ДП  $x(n)$  усреднением периодограмм по множеству  $M$  реализаций:

$$\mathfrak{S}_x(f_k) = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M I_r(k), \quad f_k = k/N.$$

Дисперсия оценки  $\mathfrak{S}_x$  уменьшается с ростом количества  $M$  усредняемых периодограмм.

### 5.3. Домашнее задание

1. Нарисовать (см. [24]) амплитудный и фазовый спектры идеального прямоугольного радиоимпульса с длительностью  $t_n$ , несущей частотой  $f_n$ . Обозначить координаты характерных точек спектра (центра, нулей и т.п.).

2. Изучить процедуры ДПФ (БПФ). Рассчитать параметры спектра ДПФ дискретизированных радиосигналов  $x_1(n) = \cos(2\pi nk/N)$ ,  $x_2(n) = \cos(2\pi nk/N) + j \sin(2\pi nk/N)$  и  $x_3(n) = \cos(2\pi nk/N) - j \sin(2\pi nk/N)$ ;  $n = 0, 1, \dots, N-1$ :

- шаг дискретизации по времени  $T \leq 112 F_{\max}$ ;
- ширину спектра  $\Delta f_n$ ,
- шаг дискретизации по частоте  $F = \Delta f_n / (5 - 10)$ ;
- размерность ДПФ:  $N = 1 / FT$ ,  $M = \lceil \log_2 N \rceil$ ,
- нормированные длительность импульса  $N_D = \lceil t_n / T \rceil$  и частоты  $F_T = \lceil f_n T \rceil$ ,  $k = F_T N$ . Исходные данные для расчета брать согласно варианту задания в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
$t_n, \text{C}$	$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	0,4
$f_n, \text{Гц}$	$10^3$	$10^4$	$3 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^6$	60
$F_{\max}, \text{Гц}$	$2.5 \cdot 10^3$	$2.5 \cdot 10^4$	$10^4$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$	$10^4$	$5 \cdot 10^6$	$10^2$

Вариант	9	10	11	12	13	14	15	16
$t_n, \text{C}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-2}$	0.5
$f_n, \text{Гц}$	450	$6 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^3$	50
$F_{\max}, \text{Гц}$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^6$	$10^7$	$5 \cdot 10^3$	10

3. Рассчитать вручную линейную свертку  $g(n) = \sum_{m=0}^n x(n)h(n-m) = \sum_{m=0}^n x(n-m)h(m)$

двух дискретных последовательностей  $x(n), n \in [0, N_1 - 1]$ , и  $h(n), n \in [0, N_2 - 1]$ , согласно варианту задания (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
$x(n)$	$N-n$	$N-n$	$N-n$	$n$	$n$	$n$	$1(n)$	$1(n)$
$h(n)$	$n$	$N-n$	$1(n)$	$n$	$N-n$	$1(n)$	$n$	$N-n$
$N_1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$N_2$	14	13	12	11	10	9	8	7

Вариант	9	10	11	12	13	14	15	16
$x(n)$	$1(n)$	$n$	$n$	$n$	$N-n$	$n$	$1(n)$	$n$
$h(n)$	$1(n)$	$n$	$N-1$	$1(n)$	$n$	$n$	$n$	$n$
$N_1$	10	11	12	13	14	15	16	3
$N_2$	6	5	4	3	2	8	7	4

Построить графики  $x(n)$ ,  $h(n)$  и  $g(n)$  в едином масштабе дискретного времени.

4. Изучить по рекомендованной литературе избирательные свойства ДПФ (частотные характеристики гребенчатого фильтра, роль взвешивающих "окон" и т.п.).

#### 5.4. Экспериментальная часть

1. Загрузить в ПЭВМ IBM-PC программу «Fourier». Нажатием клавиши "Enter" вызвать на экран меню заданий:

- "ДПФ и его свойства",
- "Вычисление линейной свертки",
- "Избирательные свойства ДПФ".

2. Клавишами перемещения курсора выбрать из меню программу задания "ДПФ и его свойства". Ввести исходные данные  $2 \leq M = \log_2 N \leq 10, ND, F_T, K$  и параметры сигнала  $t_n, f_n, F_{\max}$  согласно домашним расчетам. Рассчитать на ЭВМ амплитудный и фазовый спектры действительного  $x_1(n)$ , комплексного (аналитического)  $x_2(n)$  и комплексно-сопряженного  $x_3(n)$  сигналов. Распечатать графики спектров. Сравнить спектры идеального прямоугольного импульса и  $x_1(n)$ . Объяснить различия спектров с учетом свойств ДПФ. Сравнить между собой спектры сигналов  $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ .

*Примечания:*

а) на экран монитора выводится фрагмент спектра исследуемого сигнала в пределах дискретных частот от  $k_1 = (f_n - 3\Delta f_n) / F$  до  $k_2 = (f_n + 3\Delta f_n) / F$ , что и определяет масштаб шкалы частот. Кроме того, на экране отображается еще один фрагмент спектра от  $N - k_2$  до  $N - k_1$ ;

б) В процессе эксперимента пользуйтесь информацией строки-меню внизу экрана с зарезервированной клавишей «F10», нажатие которой отменяет предыдущую команду. Клавиша «Tab» включает/выключает визирную линию, «←, →» – перемещает визир вдоль графика, «F4» включает/выключает видеоаппроксимацию, «F6» изменяет характер визирной линии, «ctrl-P» выполняет печать графика, «Esc» прерывает печать графика в любой момент времени. Возврат к предыдущим процедурам внутри задания через клавишу «Esc».

3. Выбрать из меню задание «Вычисление линейной свертки». Ввести значения  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $x(n)$ ,  $h(n)$  согласно домашнему заданию. В качестве отрицательного ответа на вопрос о повторе ввода исходных данных вывести окно-меню «Линейная свертка» с одним лишь выбором «Расчет». Нажатием клавиши «Enter» вывести подменю:

- 1) свертываемые последовательности,
- 2) свертка.

Распечатать графики  $x(n)$ ,  $h(n)$ ,  $g(n)$  на принтере. Сравнить результаты домашнего расчета и эксперимента.

4. Выбрать из меню заданий «Избирательные свойства ДПФ». Ввести исходные данные  $N$  и  $K$ . Провести расчеты по этапам:

- 1) «окно» Кайзера,
- 2) входной сигнал (без и при взвешивании),
- 3) амплитудный спектр невзвешенного и взвешенного сигналов,
- 4) АЧХ  $k$ -го канала (без и при взвешивании сигнала).

Распечатать сигналы на принтере. Сравнить результаты домашнего расчета и эксперимента. Объяснить различия.

## 5.5. Содержание отчета

1. Результаты выполнения домашнего задания.
2. Результаты эксперимента (распечатки графиков, сигналов, спектров, сверток, частотных характеристик).



## Лабораторная работа 6

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЭВМ [5, 6, 11 – 13]

### 6.1. Цели работы

1. Изучение способов генерирования квазибелого, гауссова и рэлеевского случайных процессов на ЭВМ.
2. Исследование законов распределения и числовых характеристик шумов.
3. Исследование влияния на параметры шумов дифференцирующей и интегрирующей цепей.

### 6.2. Краткие теоретические сведения

#### 6.2.1. Дискретные случайные процессы

##### 1. Статистические описания дискретных случайных процессов (ДСП)

Дискретный случайный процесс (случайный временной ряд, случайная решетчатая функция) – индексированное семейство случайных величин  $\{x_n\}$  или  $\{x(nT)\}$ . ДСП является выборкой из непрерывного случайного процесса  $x(t)$ . Случайность  $x_n$  проявляется и по времени  $n$ , и по ансамблю  $x$ .

Отрезок ДСП конечной длины  $N$  (длительности  $T_c$ ) называется *реализацией* случайного процесса  $x(t) \sim x(n)$  (рис. 6.1).

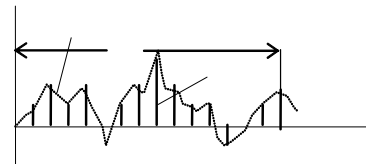


Рис. 6.1. Реализация ДСП

## Законы распределения вероятностей ДСП (рис. 6.2)

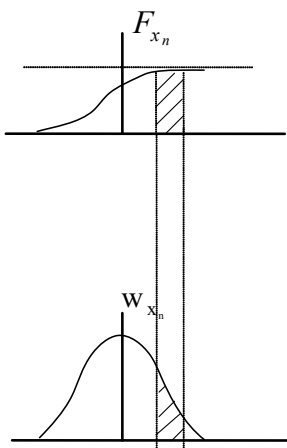


Рис. 6.2. Законы распределения ДСП

*Интегральный закон* распределения вероятностей (функция распределения)  $F_{x_n}(X_n, n) = P[x_n \leq X_n]$  – вероятность того, что случайная величина  $x_n$  не превосходит значения  $X_n$ .

*Дифференциальный закон* распределения (плотность вероятностей)

$$w_{x_n}(X_n, n) = \left[ \frac{\partial F_{x_n}(X_n, n)}{\partial X_n} \right].$$

Очевидно, что

$$F_{x_n}(X_n, n) = \int_{-\infty}^{X_n} w_{x_n}(x_n, n) dx_n.$$

Функции распределения вероятностей *дискретных* случайных процессов *непрерывны*.

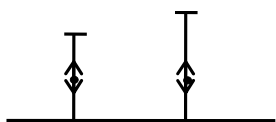
### Основные свойства функций распределения

1.  $\lim_{X_n \rightarrow -\infty} F_{x_n}(X_n, n) = P_{x_n}(-\infty, n) = P[X_n \leq -\infty] = 0$  (невозможное событие).
2.  $\lim_{X_n \rightarrow \infty} F_{x_n}(X_n, n) = P_{x_n}(\infty, n) = P[X_n \leq \infty] = 1$  (достоверное событие).
3.  $P_{x_n}[X_{n1} \leq x_n \leq X_{n2}] = F_{x_n}[X_{n2}] - F_{x_n}[X_{n1}]$  – вероятность того, что величина  $x_n$  не выходит за пределы интервала  $[X_{n2}, X_{n1}]$ .
4. Если  $F_{x_{n+k}}(X_{n+k}, n+k) = F_{x_n}(X_n, n)$  – ДСП является *стационарным*. В общем случае  $F_{x_n}(X_n, n)$  и  $w_{x_n}(X_n, n)$  зависят от времени и ДСП *нестационарны*.

5. ДСП, для которых статистические характеристики совпадают при усреднении по времени и ансамблю, называются *эргодическими*.

*Двумерный закон* распределения, характеризующий взаимную зависимость двух случайных величин  $x_n$  и  $x_m$ , описывается функцией *совместного распределения вероятностей*:

$$F_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = \text{вер.}[x_n \leq X_n, x_m \leq X_m].$$



Совместная плотность вероятностей двух непрерывных величин  $x_n, x_m$

$$w_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = [\partial^2 F_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m)] / \partial X_n \partial X_m.$$

Для статистически независимых величин

$$F_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) = F_{x_n}(X_n, n)F(X_m, m).$$

Для стационарного случайного процесса все функции вероятностей не зависят от сдвига начала отсчета по времени, и двумерное распределение:

$$F_{x_{n+k}, x_{m+k}}(X_{n+k}, n+k, X_{m+k}, m+k) = F_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m).$$

## 2. Числовые характеристики дискретных случайных процессов

Начальные моменты характеризуют положение кривой распределения  $w_{x_n}$  относительно координатной оси (рис. 6.3).

Центральные моменты характеризуют отклонение кривой  $w_{x_n}$  от среднего значения (центра тяжести).

Определим некоторые моменты для стационарных и эргодических процессов (для которых статистические характеристики совпадают при усреднении по времени и ансамблю).

Математическое ожидание (МО) (среднее) – первый начальный момент

$$m_{1x_n} = E[x_n] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n w_{x_n}(x_n, n) dx_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{m}_{1x_n}, \quad (6.1)$$

где  $\hat{m}_{1x_n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$  – выборочное среднее – оценка МО по реализации случайной ДП из  $N$  отсчетов.

Средний квадрат – второй начальный момент  $m_{2x_n} = E[x_n^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n^2 w_{x_n}(x_n, n) dx_n$

эквивалентен средней мощности ДП.

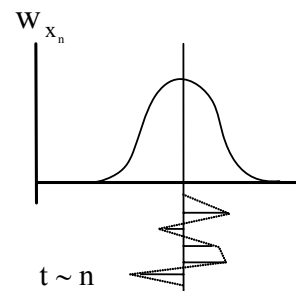


Рис. 6.3. Плотность вероятности ДСП

Дисперсия (средний квадрат отклонений) – второй центральный момент.

$$D_{x_n} = M_{2x_n} = \sigma_{x_n}^2 = E[(x_n - m_{1x_n})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x_n - m_{1x_n})^2 w_{x_n}(x_n, n) dx_n. \quad (6.2)$$

Из (6.1) и (6.2), а также из того, что среднее значение равно сумме средних и среднее от средних равно ему же, следует:

$$D_{x_n} = \sigma_{x_n}^2 = E[x_n^2] - m_{1x_n}^2 = m_{2x_n} - m_{1x_n}^2.$$

Оценкой дисперсии реализации ДП из  $N$  отсчетов является *выборочная дисперсия*:

$$\hat{D}_{x_n} = \hat{\sigma}_{x_n}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \hat{m}_{1x_n}]^2,$$

где  $\hat{m}_{1x_n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$  – выборочное среднее.

Величина  $\hat{\sigma}_{x_n} = \sqrt{\hat{D}_{x_n}}$  называется среднеквадратическим отклонением (СКО) и является оценкой величины  $\sigma_{x_n}$ .

В общем случае  $m_{1x_n}, m_{2x_n}, M_{2x_n}$  являются функциями времени и постоянны только для стационарных процессов.

*Автокорреляционная функция (АКФ)* дискретного случайного процесса

$$R_{xx}(n, m) = E[x_n \cdot x_m^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* w_{x_n, x_m}(X_n, n, X_m, m) dX_n dX_m$$

является мерой зависимости между соседними отсчетами  $(n, m)$  случайной дискретной последовательности. Так, например, АКФ статистически независимого “белого” шума описывается  $\delta$ -функцией нулевой длительности. АКФ – в общем случае двумерная ДП.

*Взаимно корреляционная функция (ВКФ)*

$$R_{xy}(n, m) = E[x_n \cdot y_m^*] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n y_m^* w_{x_n, y_m}(X_n, n, Y_m, m) dX_n dY_m.$$

Функции *авто- и взаимной ковариации* соответственно определяются как

$$r_{xx}(n, m) = E[(x_n - m_{1x_n})(x_m - m_{1x_m})^*] = R_{xx}(n, m) - m_{1x_n} m_{1x_m},$$

$$r_{xy}(n, m) = [(x_n - m_{1x_n})(y - m_{1ym})^*] = R_{xy}(n, m) - m_{1x_n} m_{1y_n}.$$

**ПРИМЕРЫ:**

1. *Нормальное* распределение ДСП (*гауссово*) характерно для многих реальных случайных процессов (в том числе шума в радиотракте) (рис. 6.4):

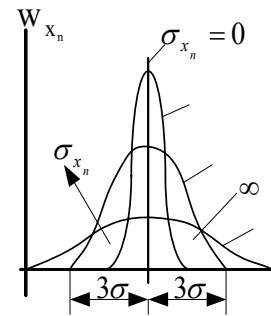


Рис. 6.4. Плотность вероятности нормального распределения

$$w_{x_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_n}}} e^{-\frac{(x_n - a)^2}{2\sigma_{x_n}^2}}, m_{1x_n} = a,$$

$$M_{2x_n} = D_{x_n} = \sigma_{x_n}^2.$$

На расстоянии  $3\sigma$  от моды  $x = a$  плотность вероятности составит 0.004, а площадь под кривой  $w_{x_n}$  в полосе  $a \pm 3\sigma$  составит 99,7 % от общей площади.

$$w_{x_{n\max}} = w(x_n = m_{1x_n} = a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_n}}}, F_{x_n} = \frac{1}{\sigma_{x_n} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{(X_n - a)^2}{2\sigma_{x_n}^2}} dX_n = \Phi\left(\frac{x_n - a}{\sigma_{x_n}}\right),$$

$\Phi(\cdot)$  – интегральная функция Лапласа (интеграл вероятностей):

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \Phi(\infty) = 1, \Phi(-\infty) = 0, \Phi(0) = 1/2;$$

$$F_{x_n} = 1 - e^{-\frac{x_n^2}{2\sigma_{x_n}^2}}, x_n \geq 0$$

2. Рэлеевское распределение (рис. 6.5)

$$w_{x_n} = \frac{dF_{x_n}}{dx_n} = \frac{x_n}{\sigma_{x_n}^2} e^{-\frac{x_n^2}{2\sigma_{x_n}^2}}, x_n \geq 0.$$

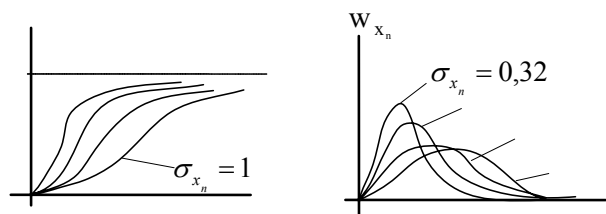
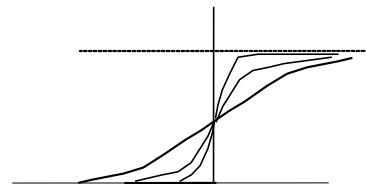
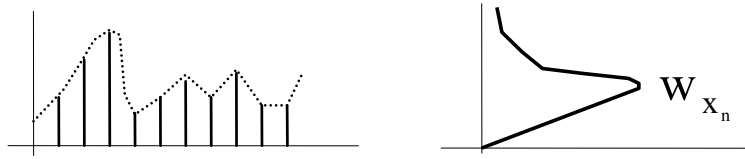
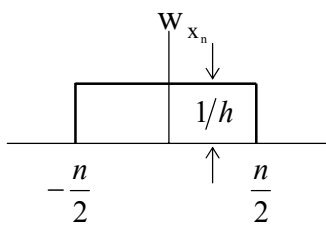


Рис. 6.5. Плотность вероятностей рэлеевского распределения

По закону Рэлея распределен случайный процесс на выходе детектора радиоприемного устройства.



### 3. Равномерное распределение (рис. 6.6)



$$w_{x_n} = \begin{cases} \frac{1}{h}, & |x_n| \leq \frac{h}{2}, \\ 0, & |x_n| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Рис. 6.6. Плотность вероятностей равномерного распределения

$$m_{1x_n} = 0, \quad D_{x_n} = \sigma_{x_n}^2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_n^2 w_{x_n} dx_n =$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{h}{h} x_n^2 dx_n = \frac{x_n^3}{3} \cdot \frac{1}{h} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h^2}{12}, \quad \sigma_{x_n} = \frac{h}{2\sqrt{3}}.$$

Равномерное распределение описывает случайную ошибку квантования по уровню дискретных сигналов.

#### 6.2.2. Моделирование случайных процессов на ЭВМ

В программном обеспечении ЭВМ, как правило, есть датчик случайных чисел с *равномерным* распределением вероятностей  $w(x) = 1$  на интервале  $x \in [0, 1]$ . Статистические характеристики этих чисел соответственно:

$$m_1(x) = \int_0^1 x w(x) dx = 0,5, \quad m_2(x) = \int_0^1 x^2 w(x) dx = \frac{1}{3};$$

$$M_2(x) = D(x) = \sigma_x^2 = m_1 \{ [x - m_1(x)]^2 \} dx = \frac{1}{12}.$$

Числа с равномерным распределением используются как исходные при моделировании случайных чисел с различными плотностями распределения вероятностей.

**ЗАКОН 1.** Случайные числа с *нормальным* распределением генерируются из последовательности, имеющей равномерное распределение  $w(x) = 1$ ,  $x \in [0, 1]$ , на основе центральной предельной теоремы

$$x_H(n) = \sum_{i=1}^n x_i, n \rightarrow \infty.$$

Практически уже при  $n \geq 8$  распределение чисел  $x_H$  не отличается от нормального [9]. При этом плотность вероятностей

$$w_1(x_H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x_H - m_1(x_H))^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (6.3)$$

Математическое ожидание и дисперсия суммы  $n$  случайных независимых чисел с равномерным распределением равны соответственно

$$m_1(x_H) = E \left[ \sum_{i=1}^n x_i \right] = nm_1(x) = n/2, \quad (6.4)$$

$$D(x_H) = \sum_{i=1}^n D(x_i) = nD(x) = n/12.$$

С учетом (6.3) и значений из (6.4) окончательное выражение для плотности имеет вид

$$w_1(x_H) = \sqrt{\frac{6}{\pi n}} e^{-\frac{6(x_H - 0,5n)^2}{n}}.$$

Для нормально распределенных чисел со стандартными параметрами ( $m_1(x) = 0$ ,  $D(x) = 1$ ) каждое число центрируется (уменьшается в  $\sqrt{D}$  раз). Тогда алгоритм формирования случайных чисел с нормальным распределением приводится к виду

$$x_k = \sqrt{\frac{12}{n}} \left[ \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \right\}_k - \frac{n}{2} \right].$$

**ЗАКОН 2.** Случайные числа с плотностью распределения Рэля получаются на основе преобразования случайных чисел  $x$  и  $y$  с нормальным законом распределения согласно выражениям

$$x_p = \sqrt{x_n^2 + y_n^2},$$

$$w_2(x_p) = \frac{x_p}{\sigma^2} e^{-\frac{x_p^2}{2\sigma^2}}.$$

**ЗАКОН 3.** Смещение одного из исходных нормально распределенных чисел  $x$  или  $y$  на величину  $a$  позволяет реализовать алгоритм формирования случайных чисел  $x_{pc}$  с плотностью распределения по закону Райса:

$$x_{pc} = \sqrt{(x_n + a)^2 + y_n^2},$$

$$w_3(x_{pc}) = \frac{x_{pc}}{\sigma^2} e^{-\frac{x_{pc}^2 + a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{ax_{pc}}{\sigma^2}\right).$$

**ЗАКОН 4.** Преобразование  $x_э = x_n^2 + y_n^2$  позволяет получить случайные числа с экспоненциальным законом распределения

$$w_4(x_э) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x_э}{2\sigma^2}}.$$

**ЗАКОН 5.** Сумма квадратов из  $m$  случайных чисел с нормальным законом распределения определяет числа с распределением  $\chi^2$  и  $m$  степенями

свободы  $x_\chi = \sum_{i=1}^m x_{ni}^2$ :

$$w_5(x_\chi) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \sigma^2} \left(\frac{x_\chi}{\sigma^2}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x_\chi}{2\sigma^2}}.$$

Случайные числа  $\{x(k)\}$  с заданными законами распределения преобразуются во временную ДП согласно соотношению

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k).$$



### 6.3. Домашнее задание

1. Изучить вопросы, касающиеся описания и моделирования случайных ДП по рекомендованной литературе.
2. Ответить письменно на контрольные вопросы.
3. Изучить способы генерирования шумов с различными функциями распределения.
4. Изучить влияние на параметры шумов дифференцирующей и интегрирующей цепей. Нарисовать эффекты, вызванные дифференцированием и интегрированием шумов.
5. Изучить порядок работы с программой «NOISE».
6. Провести ручное моделирование выборок шумов малой размерности ( $N = 16 - 128$  для равномерного, гауссова и рэлеевского распределений). Выборку можно сгенерировать с помощью программы «NOISE».

#### *Контрольные вопросы*

1. Чем отличается функция распределения вероятностей случайной величины от плотности вероятностей? Объяснить на примере нормального распределения. Дать определение характеристикам случайных процессов.
2. Что такое совместная плотность распределения вероятностей?
3. Как описывается распределение вероятностей квантованной случайной величины?
4. Дать определение стационарному случайному процессу.
5. Рассчитать и построить графики плотностей вероятностей случайных чисел  $x \in [0,1]$ , распределенных по законам 1 – 5, при  $m_{1x} = N_{\text{вар}}/32$ ,  $M_{2x} = N_{\text{вар}}/64$ ,  $a = N_{\text{вар}}/128$ ,  $m = 256$ .
6. Как определить математическое ожидание и дисперсию случайной ДП конечной длины  $N = 100N_{\text{вар}}$ ?
7. Что характеризует АКФ случайного процесса? Сравнить АКФ "белого" шума и узкополосного случайного процесса.
8. Чем отличаются АКФ и АКВФ? Что позволяет оценить АКВФ?
9. Изобразить реализацию дискретного случайного процесса Бернулли и функцию распределения вероятностей.
10. Составить блок-схему программы генерирования на ЭВМ случайных чисел с распределением по законам Гаусса, Рэля, Райса и экспоненты.

#### **6.4. Экспериментальная часть**

1. Запустить программу «NOISE» и провести исследования по программе диалогового режима.
2. Распечатать на принтере результаты исследований.
3. Проанализировать результаты эксперимента, сравнить их с теоретическими и сделать выводы.

#### **6.5. Содержание отчета**

1. Результаты выполнения домашнего задания.
2. Результаты выполнения эксперимента (графики плотностей вероятностей, спектральных и корреляционных функций на входах и выходах цепей обработки шумов).

## Заключение

Во 2-й части практикума «Дискретная и цифровая обработка информации» рассмотрены перспективные вопросы цифровой обработки сигнала, не включенные в практикум, изданный в 2001 году: методы инженерного проектирования цифровых фильтров, распознавание образов сигналов и помех радиосистем, нелинейная (гомоморфная) обработка многолучевых сигналов на основе вычисления кепстров, цифровой спектральный анализ и дискретные случайные процессы.

Теоретический материал, необходимый для выполнения лабораторных работ, опубликован автором в учебных пособиях [5, 6], а также представлен в электронном учебнике «Дискретная и цифровая обработка информации», внедренном в учебный процесс на факультете радиофизики, электроники и медицинской техники ВлГУ в 1996 г.

Дополнительную информацию по интересующим вопросам можно найти в литературе, приведенной в конце данного практикума. Данные источники позволяют удовлетворить интересы по широкому кругу вопросов цифровой обработки сигналов и использования ее в радиотехнических применениях.

## Библиографический список

1. **Антонью, А.** Цифровые фильтры: анализ и проектирование : перевод с англ. / А. Антонью. – М. : Радио и связь, 1983. – 323 с.
2. **Архипов, Е. А.** Анализ возможностей кепстральной обработки многолучевых сигналов при наличии ограничений / Е. А. Архипов, А.К. Бернюков // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ОВР. – 1983. – Вып. 3. – С. 110 – 113.
3. **Архипов, Е. А.** Гомоморфная фильтрация для разрешения радионавигационных сигналов и переотражений / Е. А. Архипов, А. К. Бернюков // Радиотехника. – 1986. – № 11. – С. 83 – 86.
4. **Ахмед, Н.** Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов : пер. с англ. / Н. Ахмед, К. Р. Рао ; под ред. И. Б. Фоменко. – М. : Связь, 1980. – 240 с.
5. **Бернюков, А. К.** Дискретная и цифровая обработка информации. Введение в теорию и некоторые приложения : учеб. пособие / Владим. гос. ун-т. – Владимир : Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2002. – 159 с. – ISBN 5-89368-142-8.
6. **Бернюков, А. К.** Дискретная и цифровая обработка информации : практикум / А. К. Бернюков ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2001. – 84 с. – ISBN 5-89368-291-2.
7. **Бернюков, А. К.** Микропроцессорная функционально-адаптивная обработка сигналов систем радионавигации и посадки самолетов в бортовой подсистеме / А. К. Бернюков // Радиотехника. – 1988. – № 9. – С. 78 – 83.
8. **Бернюков, А. К.** Цифровая обработка биоэлектрических сигналов / А. К. Бернюков, Л. Т. Сушкова // Физика и радиоэлектроника в медицине и биотехнологии : материалы 2-й Междунар. науч.-техн. конф. / Владим. гос. ун-т. – Владимир. – 1996. – С. 16 – 39.
9. **Бернюков, А. К.** Функционально-адаптивная обработка информации в бортовых устройствах радиосистем навигации и посадки самолетов / А. К. Бернюков // Электронное моделирование. – 1991. – Т. 13. – № 2. – С. 8 – 13.
10. **Бернюков, А. К.** Цифровая обработка сигнала международной системы посадки самолетов / А. К. Бернюков // Радиотехника. – 1981. – Т. 36. – № 9. – С. 26 – 29.

11. **Бобнев, М. П.** Генерирование случайных процессов / М. П. Бобнев. – М. : Энергия, 1970. – 240 с.
12. **Богуславчик, Е. Н.** Проектирование и моделирование бортовых радиолокационных систем : метод. указания / Е. Н. Богуславчик, Н. П. Поспелова ; МАИ. – М., 1985. – 18 с.
13. **Быков, В. В.** Цифровое моделирование в статической радиотехнике / В. В. Быков. – М. : Сов. радио, 1971. – 38 с.
14. **Гольденберг, Л. М.** Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие для вузов / Л. М. Гольденберг, Б. Д. Матюшкин, М. Н. Поляк. – М. : Радио и связь, 1990. – 256 с. – ISBN 5-256-00-678-9.
15. **Зааль, Р.** Справочник по расчету фильтров: пер. с нем. / Р. Зааль. – М. : Радио и связь, 1983. – 752 с.
16. **Кузенков, В. Д.** Дискретное преобразование Фурье : метод. указания / В. Д. Кузенков ; КУАИ. – Куйбышев, 1986. – 36 с.
17. **Кузенков, В. Д.** Методы и устройства цифровой обработки сигналов / В. Д. Кузенков ; КУАИ. – Куйбышев, 1988. – 96 с.
18. **Бернюков, А. К.** Обоснование цифровых структур радиотехнических систем : учеб. пособие / А. К. Бернюков, А. П. Галкин ; Владим. политехн. ин-т. – Владимир, 1985. – 80 с.
19. **Оппенгейм, А. В.** Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. / А. В. Оппенгейм, Р. Ф. Шафер ; под ред. С. Я. Шаца – М. : Связь, 1979. – 416 с.
20. **Рабинер, Л.** Теория и применение цифровой обработки сигналов : пер. с англ. / Л. Рабинер, Б. Гоулд ; под ред. Ю. Н. Александрова. – М. : Мир, 1978. – 848 с.
21. Справочник по учебному проектированию приёмо-усилительных устройств / М. К. Белкин, В. Т. Белинский, Ю. Л. Мазор, Р. М. Терещук ; под ред. М. К. Белкина. – Киев : Выща шк. Головное изд-во, 1982. – 447 с.
22. Цифровая обработка сигналов / сост. : А. К. Бернюков, Е. А. Архипов; Владим. политехн. ин-т. – Владимир, 1990. – 40 с.
23. **Гоноровский, И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / И. С. Гоноровский. – 4-е изд. перераб. и доп. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
Лабораторная работа 1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ КИХ-ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ ВЗВЕШИВАНИЯ .....	4
Лабораторная работа 2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ БИКВАДРАТНЫХ БЛОКОВ МЕТОДОМ БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ .....	28
Лабораторная работа 3. ЦИФРОВОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ .....	39
Лабораторная работа 4. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ .....	55
Лабораторная работа 5. ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ ДПФ (БПФ).....	66
Лабораторная работа 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЭВМ.....	73
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	83
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	84

Учебное издание

БЕРНЮКОВ Арнольд Константинович

ДИСКРЕТНАЯ И ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Практикум

Часть 2

Редактор И.А. Арефьева

Корректор Е.В. Афанасьев

Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 25.11.05.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.

Печать на ризографе. Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 5,31. Тираж 200 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.