Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет имени Александра
Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ИГР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ»

Владимир 2017

УДК 519.83
ББК 22.8
Составители: А.О. Кучерик, Д.Н. Бухаров , Новикова О.А., Самышкин В.Д.
Рецензент: Профессор, доктор технических наук, директор ИМПиБН Давыдов Н.Н.

Печатается по решению редакционного совета ВлГУ

Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Теория игр и исследование операций» / Владим. гос. уни-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых; А.О. Кучерик, Д.Н. Бухаров. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2017. – 67 с.

Рассмотрены основы разделов теории игр и исследования операций

К лабораторным работам приведена краткая теория, что упрощает их выполнение.

Предназначены для проведения лабораторных занятий для специальностей 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных сетей.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 16. Табл. 16. Библиогр.: 14 назв.

УДК 519.83

ББК 22.8

## Оглавление

Введение ... 6

1. Лабораторная работа №1. Приведение задачи линейного программирования к каноническому виду ... 7

 1.2. Цель работы ... 7

 1.3. Постановка задачи ... 7

 1.4. Краткая теоретическая часть ... 7

 1.5. Задание к лабораторной работе ... 9

 Контрольные вопросы ... 11

2. Лабораторная работа 2. Геометрический метод решения двумерных задач линейного программирования ... 12

 2.1. Цель работы ... 12

 2.2. Постановка задачи ... 12

 2.3. Краткая теоретическая часть ... 12

 2.4. Задания к лабораторной работе ... 15

 Контрольные вопросы ... 17

3. Лабораторная работа №3. Задание начальной симплекс-таблицы ... 19

 3.1. Цель работы ... 19

 3.2. Постановка задачи ... 19

 3.3. Краткая теоретическая часть ... 19

 3.4.Задания к лабораторной работе ... 22

 Контрольные вопросы ... 23

4. Лабораторная работа №4. Симплекс-метод при заданной начальной таблице ... 24

 4.1. Цель работы ... 24

4.2. Постановка задачи ... 24

4.3. Краткая теоретическая часть ... 24

4.4. Задания к лабораторной работе ... 31

Контрольные вопросы ... 33

5. Лабораторная работа 5. Поиск начальной угловой точки в задаче линейного программирования. Комплексное решение задачи линейного программирования ... 34

5.1. Цель работы ... 34

5.2. Постановка задачи ... 34

5.3. Краткая теоретическая часть ... 34

5.4. Задания к лабораторной работе ... 37

Контрольные вопросы ... 38

6. Лабораторная работа 6. Решение задач целочисленного программирования. ... 39

6.1. Цель работы ... 39

6.2. Постановка задачи ... 39

6.3. Краткая теоретическая часть ... 39

6.4. Задания к лабораторной работе ... 45

Контрольные вопросы ... 46

Лабораторная работа 7. Решение задач методом динамического программирования ... 47

7.1. Цель работы ... 47

7.2. Постановка задачи ... 47

7.3. Краткая теоретическая часть ... 47

7.4. Задания к лабораторной работе ... 51

Контрольные вопросы ........ 53
Лабораторная работа 8. Решение матричных игр в чистых стратегиях ........ 54
8.1.Цель работы ........ 54
8.2. Постановка задачи ........ 54
8.3. Краткая теоретическая часть ........ 54
8.4. Задания к лабораторной работе ........ 59
Контрольные вопросы ........ 60
Лабораторная работа 9. Решение матричных игр в смешанных стратегиях путем сведения к задачам линейного программирования ........ 61
9.1. Цель работы ........ 61
9.2. Постановка задачи ........ 61
9.3. Краткая теоретическая часть ........ 61
9.4. Задания к лабораторной работе ........ 65
Контрольные вопросы ........ 66
Лабораторная работа 10. Приближенный метод решения матричных игр . 68
10.1. Цель работы ........ 68
10.2. Постановка задачи ........ 68
10.3. Краткая теоретическая часть ........ 68
10.4. Задания к лабораторной работе ........ 70
Контрольные вопросы ........ 71
Список литературы ........ 72

## Введение

В методических указаниях приведены лабораторные работы по курсу «Теория игр и исследование операций ».

Курс знакомит с теорией игр и исследованием операций. Изучается возможность применения ее методов на практике.

Исследование операций – это конгломерат математических методов оптимизации принимаемого решения. По сути дела это способы нахождения максимального (если речь идёт о пользе) или минимального (если имеется в виду ущерб) значения целевой функции. Теория игр – это особый раздел, где целевую функцию оптимизируют не менее двух лиц принимающих решение. Интересы этих лиц не совпадают. В простейшем случае их интересы диаметрально противоположны. Такие задачи встречаются во многих отраслях человеческой деятельности от войны до экономики и устройства личной жизни. [8]

Лабораторные работы сопровождаются краткой теорией, что делает более удобным их выполнение.

Успешное решение практических задач по курсу требует владения какими-либо пакетами прикладных программ компьютерной математики и программированием на одном из языков высокого уровня. Кроме рассмотренной теоретической части также необходимо использовать литературу, которую рекомендует преподаватель на лекции.

В отчет по лабораторной работе необходимо внести:

- Номер и название работы;
- Цель работы;
- Теоретическую часть;
- Текст программы, таблицы, расчетные формулы, графики и т.д.
- Вывод.

# 1. Лабораторная работа №1. Приведение задачи линейного программирования к каноническому виду

## *1.2. Цель работы*

Освоить методику приведения общей и основной задачи линейного программирования к каноническому виду

## *1.3. Постановка задачи*

В соответствии с вариантом задания привести полученную задачу к каноническому виду

## *1.4. Краткая теоретическая часть*

Задачей линейного программирования (ЗЛП) называют детерминированную задачу исследования операций, в которой целевая функция и ограничения записаны в виде линейных соотношений (1).

$$W(x) = (c, x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \to extr$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \\ a_{m+1,1}x_1 & + & a_{m+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m+1,n}x_n & \le & b_{m+1} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m+s,1}x_1 & + & a_{m+s,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m+s,n}x_n & \le & b_{m+s} \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_k \ge 0,\ k \in I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$$

Задача линейного программирования, записанная в форме (1) называется общей ЗЛП. В основной ЗЛП присутствуют ограничения только вида неравенств и переменные (контролируемые факторы не отрицательны).

Опр. ЗЛП называется канонической, если все ограничения записаны в виде равенств, все переменные являются неотрицательными и все $b_i, i = \overline{1,m}$ неотрицательны (2).

$$W(x)=(c,x)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n\to\min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_k\ge 0,\ k\in\{1,2,\ldots,n\};\ b_i\ge 0,\ i=\overline{1,m}$$

При приведении общей или основной ЗЛП к канонической возникают следующие случаи:

1) некоторые ограничения записаны в виде неравенств;
2) в ограничениях есть одно или несколько отрицательных $b_i$;
3) для одной или нескольких переменных $x_k,\ k\in J\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ не задано условие неотрицательности, т.е. $x_k$ - произвольно;
4) критерий эффективности стремится к максимуму.

**Случай 1**

Пусть задано неравенство

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\le b_i,\ i\in\{1,2,\ldots,n\} \qquad (3)$$

Для того, чтобы получить из него равенство, вводим новую фиктивную переменную:

$$x_{n+i}=b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ ;$$

Переменная $x_{n+i}\ge 0$ в силу построения. Затем прибавляем данную переменную к левой части неравенства (3):

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+i}=b_i,\ i\in\{1,2,\ldots,n\}$$

Тем самым, получаем равенство.

Если знак неравенства противоположный, то фиктивная переменная (она задается разностью правой и левой частей неравенства соответственно), вычитается из левой части неравенства.

В целевой функции $W(x)$ фиктивная переменная добавляется с коэффициентом нуль или вообще не добавляется.

**Случай 2**

Когда встречаются отрицательные $b_i$, $i \in \overline{1, m}$, то соответствующее неравенство или равенство умножается на $-1$. Если ограничение записано в форме неравенства, то знак меняется на противоположный.

**Случай 3**

Если $x_k, k \in J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ произвольно, то выполняется замена данной переменной на разность:

$x_k = x_k^+ - x_k^-$, где

$x_k^+ = \max(x_k, 0)$; $x_k^- = \max(-x_k, 0)$.

В силу построения эти переменные неотрицательны. Такая подстановка делается во всех ограничениях, где присутствует $x_k$, а также при необходимости в целевой функции.

**Случай 4**

Если целевая функция стремится к максимуму, то она умножается на $-1$. Такая целевая функция уже стремится к минимуму. [5]

### 1.5. Задание к лабораторной работе

В соответствие с вариантом получите канонический вид ЗЛП.

**Варианты задания**

1

$$W(x) = x_1 - 3x_2 - 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + x_3 \le 1 \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0$$

2

$$W(x) = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ -x_1 + x_3 \le -2 \end{cases}$$

$$x_{1,3} \ge 0$$

3

$$W(x) = -3x_1 + x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 14 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \ge -6 \\ -x_2 \le 7 \end{cases}$$

$$x_{2,3} \ge 0$$

4

$$W(x) = 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \ge -14 \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -5 \\ x_2 + 2x_3 \le 7 \end{cases}$$

$$x_{1,3} \ge 0$$

5
$$W(x)=3x_1-5x_2+4x_3\to\min$$
$$\begin{cases}-x_1+x_2 \geq -5\\ x_1-x_2-x_3\leq 4\\ x_3\leq 4\end{cases}$$
$$x_{1,3}\geq 0$$

6
$$W(x)=x_1+2x_2-x_3\to\min$$
$$\begin{cases}2x_1-x_2-2x_3\geq -14\\ x_1+x_2+x_3\leq 6\\ x_2\leq 7\end{cases}$$
$$x_{1,2}\geq 0$$

7
$$W(x)=2x_1-3x_2-x_3\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1+8x_2-2x_3\leq 6\\ -3x_1-4x_2-2x_3=5\\ x_1-4x_2+x_3=5\end{cases}$$
$$x_1\geq 0$$

8
$$W(x)=2x_1+x_2-x_3\to\min$$
$$\begin{cases}5x_1+3x_2+x_3=10\\ -x_1+x_2+x_3\leq 1\\ 5x_1+x_2-2x_3=10\end{cases}$$
$$x_3\geq 0$$

9
$$W(x)=-x_1+x_2-5x_3\to\min$$
$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=1\\ -2x_1-x_2-x_3=-2\\ 5x_1+x_2-2x_3=10\end{cases}$$
$$x_{1,3}\geq 0$$

10
$$W(x)=-x_1-5x_2+x_3\to\max$$
$$\begin{cases}8x_1+2x_2+x_3=8\\ -x_1+x_2+5x_3\geq -5\\ 4x_1+x_2+3x_3=4\end{cases}$$
$$x_2\geq 0$$

11
$$W(x)=5x_1+2x_2-x_3\to\min$$
$$\begin{cases}2x_1+6x_2+x_3=6\\ x_1-x_2-2x_3\geq -5\\ x_1+8x_2-x_3=8\end{cases}$$
$$x_{1,2}\geq 0$$

12
$$W(x)=3x_1+5x_2+3x_3\to\min$$
$$\begin{cases}5x_1+x_2-x_3=15\\ x_1-2x_2+3x_3=6\\ 6x_1-x_2+2x_3=21\end{cases}$$
$$x_3\geq 0$$

12
$$W(x)=-2x_1-x_2+x_3\to\max$$
$$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3+x_4=2\\ -x_1+2x_2-x_3-x_4=8\\ 3x_1+5x_2+5x_3\leq 15\end{cases}$$
$$x_{1,3,4}\geq 0$$

14
$$W(x)=-x_1-2x_2+3x_3-x_4\to\max$$
$$\begin{cases}4x_1+x_2+4x_3-3x_4=10\\ x_1-2x_2-x_3-4x_4=-12\\ 2x_1+5x_2+6x_3+5x_4=-20\end{cases}$$
$$x_{2,4}\geq 0$$

15
$$W(x)=5x_1+10x_2+15x_3+x_4\to\min$$
$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+x_4=7\\ -3x_1-2x_2-x_3+x_4=-10\\ -x_1+x_2-2x_3+2x_4\geq -2\end{cases}$$
$$x_{1,2,4}\geq 0$$

**Содержание отчета**

В отчете должно содержаться:

- титульный лист установленного образца;
- цель работы;
- постановка задачи;
- краткая теоретическая часть;
- вариант задания;
- приведение ЗЛП к каноническому виду, с промежуточными вычислениями и комментариями;
- заключение.

### *Контрольные вопросы*

1. Сформулируйте определение задачи линейного программирования.
2. Какая ЗЛП называется канонической?
3. Какие действия необходимо выполнить, чтобы из неравенств в системе ограничений получить равенства?
4. Какие действия необходимо выполнить, чтобы все переменные в ЗЛП были неотрицательны?
5. Что нужно сделать, если целевая функция стремится к максимуму?

# 2. Лабораторная работа 2. Геометрический метод решения двумерных задач линейного программирования

## *2.1. Цель работы*

Освоить метод геометрического решения двумерных задач линейного программирования

## *2.2. Постановка задачи*

Решить геометрическим методом двумерную задачу линейного программирования в соответствии с выданным вариантом.

## *2.3. Краткая теоретическая часть*

В рамках лабораторной работы рассматриваем следующий вид двумерных ЗЛП (4).

$$W(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to extr$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \qquad (4)$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}$$

Если в задаче в одном или нескольких неравенствах знак противоположный, то они умножаются на $-1$.

Каждое неравенство в (4) на двумерном евклидовом пространстве определяет полуплоскость. Обозначим полуплоскость, соответствующую $j$ - му неравенству, через $H_i$. Очевидно, что область допустимых решений ЗЛП, точки которой удовлетворяют всем неравенствам (4), будет являться пересечением всех полуплоскостей $H_i, i = \overline{1,m}$ и первой четверти $E_2^+$: $X = \bigcap_{i=1}^{m} H_i \cap E_2^+$.

Для такого пересечения возможны следующие случаи.

**Случай 1**

$X = \varnothing$. Ни одна точка на плоскости не удовлетворяет всех неравенствам. В этом случае решений нет.

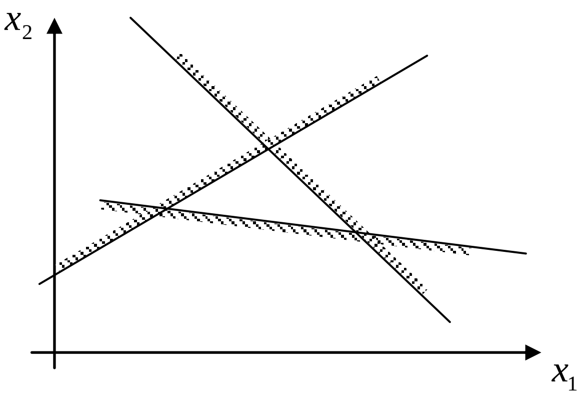


Рис. 1. Решений нет

**Случай 2**

Область допустимых значений $X$ не пуста. В этом случае исследуют целевую функцию. В первую очередь строится такая линия уровня целевой функции $W(x)=\alpha$, чтобы она пересекала множество $X$. Затем записывается градиент функции (он равен вектору $(c_1, c_2)$). От произвольной точки линии уровня строится вектор градиента, если целевая функция стремится к максимуму, вектор антиградиента, если целевая функция минимизируется. Линия уровня двигается в направлении построенного вектора до тех пор, пока она пересекает $X$. Здесь возникает одна из трех ситуаций.

Ситуация 2а.

Линия уровня уходит в бесконечность – ЗЛП не имеет решений

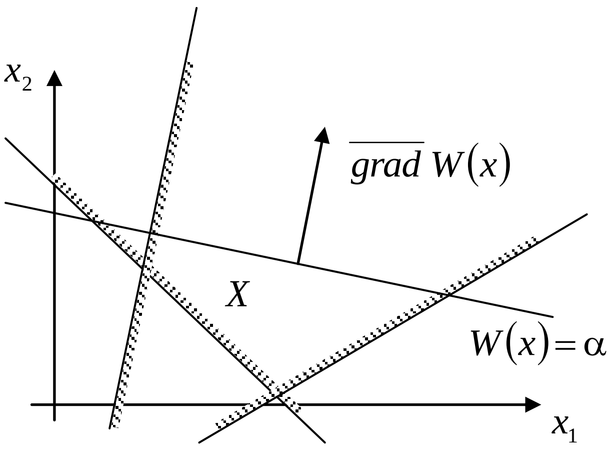


Рис. 2 ЗЛП не имеет решений

Ситуация 2б.

Минимальное (максимальное) значения критерия эффективности достигается в одной из точек множества $X$ $x^*$. Здесь точка $x^*$ является решением ЗЛП, а целевая функция равна $W(x^*)$

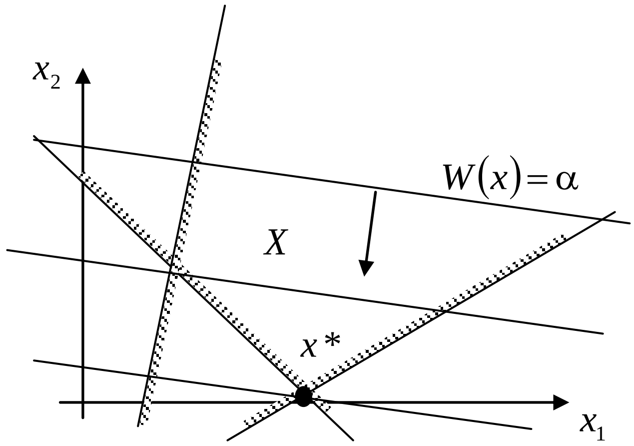


Рис. 3. Единственное решение

Такие точки, как $x^*$, называются угловыми.

Точка $x^* \in X$ называется угловой, если запись $x^* = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, где $x_1, x_2 \in X; \alpha \in (0,1)$ справедлива в том случае, когда $x_1 = x_2 = x^*$. Говоря другими словами, угловая точка $x^*$ не является внутренней точкой множества $X$ . В этом состоит ее геометрический смысл.

Ситуация 2в.

Максимальное (минимальное) значение достигается на отрезке. Здесь любая точка данного отрезка является решением ЗЛП.[6]

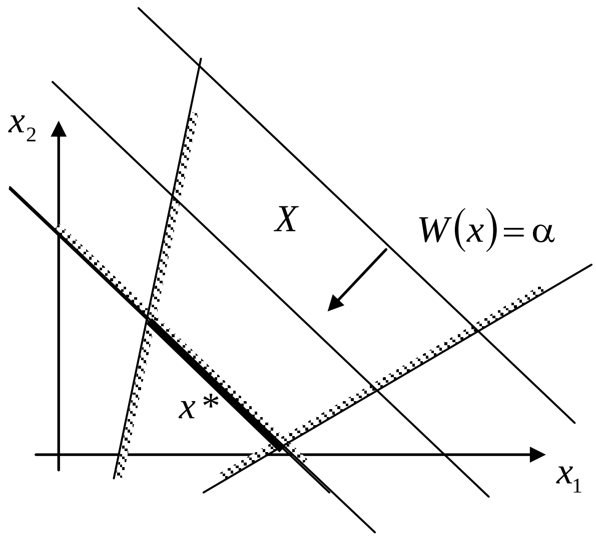


Рис. 4. Множество решений

## 2.4. *Задания к лабораторной работе*

Найдите решение двумерной ЗЛП в соответствии с вариантом.

**Указания к работе**

Для поиска решения ЗЛП разработайте компьютерную программу, которая выполняет следующие действия:

1) строит оси координат (первая четверть плоскости должна занимать бо́льшую часть экрана или окна);
2) строит прямые, соответствующие неравенствам, и определяет существование непустого $X$ (если $X \neq \varnothing$, то осуществляется заливка этого множества, в противном случае программа должна сообщить о том, что $X$ - пусто и решений нет, и завершить свою работу);
3) строит линию уровня целевой функции такую, чтобы она пересекала $X$.

4) откладывает от построенной линии уровня вектор градиента или антиградиента (в зависимости от того, куда стремится целевая функция)

На основании построенного с помощью программы графического изображения найдите решение ЗЛП. Для определения координат угловой точки (как точки пересечения прямых) при необходимости решите систему(ы) уравнений.

**Варианты задания**

1
$$W(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 4x_1 - x_2 \leq 28 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2
$$W(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 10x_1 - 4x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3
$$W(x) = -2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 7 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 17 \\ x_1 - 25x_2 \le 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

4
$$W(x) = 3x_1 + 8x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 \le 6 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

5
$$W(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 36 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 72 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 52 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

6
$$W(x) = 3x_1 - 4x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 72 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 52 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

7
$$W(x) = -5x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 72 \\ 4x_1 - 2x_2 \le 52 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 39 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

8
$$W(x) = 4x_1 - 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 36 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 39 \\ x_2 \ge 4 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

9
$$W(x) = x_1 - 4x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 15 \\ x_1 + x_2 \ge 9 \\ 4x_1 - x_2 \le 28 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

10
$$W(x) = 3x_1 + 7x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 36 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 72 \\ x_2 \ge 4 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

11
$$W(x) = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_2 \le 15 \\ 2x_1 - 6x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 8x_2 \le 52 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

12
$$W(x) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

13
$$W(x) = x_1 - x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -4 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 20 \\ x_1 \le 10 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

14
$$W(x) = -4x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

15
$$W(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 5 \\ -7x_1 + x_2 \le 14 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

16
$$W(x) = x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 - 2x_2 \le 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

**Содержание отчета**

В отчете должно содержаться:

- титульный лист установленного образца;
- цель работы;
- постановка задачи;
- краткая теоретическая часть;
- вариант задания;
- блочное описание компьютерной программы;
- исходные данные к компьютерной программе;
- результат работы программы – графическое отображение;
- решение ЗЛП - $x^*$ и $W(x^*)$
- заключение.

### *Контрольные вопросы*

1. Для каких задач линейного программирования может быть применен геометрический метод?
2. Что представляет собой неравенство в системе ограничений на плоскости?
3. Что представляет собой равенство в системе ограничений на плоскости?
4. На чём основывается геометрический метод решения ЗЛП?
5. Что такое область допустимых решений в ЗЛП?
6. Какие случаи возможны при построении области допустимых решений?
7. Что такое градиент целевой функции?
8. Какой вывод следует, если линия уровня уходит в бесконечность?

9. Дайте определение угловой точки?
10. В чем заключается геометрический смысл угловой точки?
11. Какие действия необходимо предпринять, если по чертежу не удается точно определить в какой угловой точке достигается решение ЗЛП?

# 3. Лабораторная работа №3. Задание начальной симплекс-таблицы

## *3.1. Цель работы*

Изучить алгоритм построения начальной симплекс-таблицы.

## *3.2. Постановка задачи*

Привести задачу к каноническому виду и записать для нее начальную симплекс-таблицу.

## *3.3. Краткая теоретическая часть*

Для решения задач линейного программирования используют симплекс метод, суть которого заключается в построении начальной симплекс таблицы и ее преобразовании по определенным правилам.

**Построение начальной симплекс-таблицы**

Построение начальной симплекс-таблицы (СТ) возможно в случае, когда решена вспомогательная задача (найдена начальная угловая точка) или в системе ограничений возможно выделение базисных переменных с коэффициентом единица в одном из уравнений системы ограничений, а в остальных уравнения с коэффициентом нуль. Решение вспомогательной задачи мы будем рассматривать в следующей лабораторной работе.

Пусть задана следующая задача линейного программирования.

$$W(x)=(c,x)=c_1x_1+\ldots+c_nx_n+c_{n+1}x_{n+1}+\ldots+c_{n+m}x_{n+m}\to\min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_k\ge 0,\, k\in\{1,2,\ldots,n\};\, b_i\ge 0,\, i=\overline{1,m}$$

В системе ограничений (5) есть $m$ переменных $x_k, k=\overline{n+1,n+m}$, коэффициент которых в одном из уравнений равен единице, равен единице, а в остальных уравнениях равен нулю. Очевидно, что такие переменные являются базисными (остальные переменные называют свободными), а начальная угловая точка состоит из вектора с $n$ нулями и вектора из коэффициентов $b_l,\ l=\overline{1,m}$, т.е. $x_0=\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n\ \text{øò}},b_1,b_2,\ldots,b_m\right)$. [4]

Для такой задачи начальная симплекс-таблица строится следующим образом.

В первую очередь избавляются от свободных переменных в целевой функции: вместо базисной переменной в целевую функцию подставляется выражение, которое следует из соответствующего уравнения в системе ограничений. Например, пусть $x_{n+k},\ k=\overline{1,m}$ - базисная переменная. Тогда она заменяется на следующее выражение:

$$x_{n+k}=b_k-\left(a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_n\right) \tag{6}$$

Выражение (6) непосредственно следует из $k$ - го уравнения.

После таких подстановок в целевой функции остаются только свободные переменные:

$$W(x)=\sum_{j=1}^{n}\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}a_{ij}\right)x_j+\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i \tag{7}$$

Целевая функция, записанная по формуле (7) содержит свободный коэффициент $Q=\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}b_i$. Введем следующее обозначение $\lambda_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_{n+i}a_{ij}$, тогда соотношение (7) можно переписать следующим образом:

$$W(x)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j+Q. \tag{8}$$

Исходя из ЗЛП (5) с целевой функцией (6) строится начальная симплекс таблица (рис. 5).

| | 1 | 2 | $\dots$ | $n$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n+1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $n+2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\dots$ | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $n+m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\dots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\dots$ | $\lambda_n$ | $-Q$ |

Рис. 5. Начальная симплекс-таблица

В первую колонку СТ вписываются номер базисных переменных, в первую строку – номера свободных. В нижней строке вписываются коэффициенты целевой функции от свободных переменных, в крайней правой колонке вписываются значения правых частей системы ограничений. Внутри таблицы записываются коэффициенты перед свободными переменными в системе ограничений.[5]

**Пример**

$W(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 c\min, x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 \le 13 \\ -x_2 + x_3 \le 2 \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду, перейдя от ограничений вида неравенств к равенствам:

$x_4 = 13 - x_2 - 2x_3 \ge 0,$

$x_5 = 2 + x_2 - x_3 \ge 0.$

$W(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \min, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 13 \\ -x_2 + x_3 + x_5 = 2 \end{cases}$$

Базисные переменные $x_1, x_4, x_5$. В целевой функции присутствует базисная переменная $x_1$, выразим ее через свободные переменные:

$x_1 = 5 - 5x_2 + 3x_3.$

Подставим полученное выражение в целевую функцию:

$W(x) = 5 - 3x_2 + 4x_3 \to \min$

Теперь можно записать начальную симплекс-таблицу.

Таблица 1

| | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | -3 | 5 |
| 4 | 1 | 2 | 13 |
| 5 | -1 | 1 | 2 |
| | -3 | 4 | -5 |

## *3.4.Задания к лабораторной работе*

Построить начальную симплекс-таблицу для ЗЛП в соответствии с вариантом.

**Варианты задания**

$$W(x) = x_1 - 3x_2 - 3x_3 \to \max$$

$$1.\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + x_3 \le 1 \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0$$

$$W(x) = -2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$$

$$2.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ -x_1 + x_3 \le -2 \end{cases}$$

$$x_{1,3} \ge 0$$

$$W(x) = -3x_1 + x_2 - x_3 \to \max$$

$$3.\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 14 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \ge -6 \\ -x_2 \le 7 \end{cases}$$

$$x_{2,3} \ge 0$$

$$W(x) = 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 \to \max$$

$$4.\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \ge -14 \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -5 \\ x_2 + 2x_3 \le 7 \end{cases}$$

$$x_{1,3} \ge 0$$

5. $W(x) = 2x_1 - 3x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \le 6 \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$

6. $W(x) = -x_1 - 5x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 \ge -5 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$x_2 \ge 0$

7. $W(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 15 \end{cases}$$

$x_{1,3,4} \ge 0$

8. $W(x) = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -12 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = -20 \end{cases}$$

$x_{2,4} \ge 0$

**Содержание отчета**

В отчете должно содержаться:

- титульный лист установленного образца;
- цель работы;
- постановка задачи;
- краткая теоретическая часть;
- вариант задания;
- построение начальной симплекс таблицы, с промежуточными вычислениями и комментариями;
- заключение.

***Контрольные вопросы***

1. Какие переменные называются базисными?
2. Как вычисляется свободный коэффициент целевой функции?
3. Какими свойствами должна обладать задача линейного программирования, чтобы можно было применять симплекс метод для её решения?
4. Как строится начальная угловая точка?

# 4. Лабораторная работа №4. Симплекс-метод при заданной начальной таблице

## *4.1. Цель работы*

Освоить методику перебора угловых точек для уменьшения значения целевой функции в задачах линейного программирования.

## *4.2. Постановка задачи*

Для приведенной начальной симплекс-таблицы установить существование решения ЗЛП и в случае положительного результата записать его: координаты угловой точки, значение целевой функции.

## *4.3. Краткая теоретическая часть*

Основным алгоритмом решения задач линейного программирования является симплекс метод. Его можно применять в том случае, когда задача программирования задана в допустимом каноническом виде. Т.е. ЗЛП выглядит следующим образом:

$$W\left(\vec{x}\right)=\left(\vec{c},\vec{x}\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min , \qquad (9)$$

$$\left(EA^*\right)\cdot X = B\text{, где} \qquad (10)$$

$$\left(EA^*\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1j_{m+1}} & a_{1j_{m+2}} & \cdots & a_{1j_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2j_{m+1}} & a_{2j_{m+2}} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{mj_{m+1}} & a_{mj_{m+2}} & \cdots & a_{mj_n} \end{pmatrix}$$ - матрица допустимого канонического вида ЗЛП.

Если имеется каноническая ЗЛП, то целевую функцию легко можно выразить через свободные переменные.

**Симплекс таблица**

ЗЛП канонического вида с целевой функцией, выраженной через свободные переменные, может быть записана в виде специальной таблицы, которую называют симплекс таблицей.

Данная таблица имеет следующий вид:

Таблица 2

| | $j_{m+1}$ | $\ldots$ | $j_n$ | |
|---|---|---|---|---|
| $j_1$ | $a_{1j_{m+1}}$ | $\ldots$ | $a_{1j_n}$ | $b_1$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $j_m$ | $a_{mj_{m+1}}$ | $\ldots$ | $a_{mj_n}$ | $b_m$ |
| | $p_{j_{m+1}}$ | $\ldots$ | $p_{j_n}$ | $-Q_0$ |

Она строится следующим образом:

- левый крайний столбец (обозначен $j_k,\ k=\overline{1,m}$) заполняется номерами базисных переменных;
- верхняя строка (обозначена $j_k,\ k=\overline{m+1,n}$) заполняется номерами свободных переменных;
- центральная часть таблицы (обозначена $a_{ij},\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{m+1,n}$) заполняется значениями подматрицы $A^*$;
- правая крайняя строка (обозначена $b_i,\ i=\overline{1,m}$) заполняется значениями соответствующих правых частей ограничений;
- нижняя строка (обозначена $p_{j_k},\ j=\overline{m+1,n}$) заполняется соответствующими коэффициентами целевой функции;
- и, наконец, правый нижний угол (обозначен $-Q_0$) заполняется свободным членом, взятым со знаком «минус». [8]

**Симплекс метод при заданной начальной таблице**

Для более простого оперирования с симплекс-таблицей переобозначим $j_k,\ k=\overline{1,m}$ на $i,\ i=\overline{1,m}$, а $j_k,\ k=\overline{m+1,n}$ на $j,\ j=\overline{1,n-m}$.

Пусть задана начальная симплекс – таблица:

Таблица 3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | … | $j$ | … | |
| : | | : | | : |
| $i$ | … | $a_{ij}$ | … | $b_i$ |
| : | | : | | : |
| | … | $p_j$ | … | $-Q_0$ |
| | | | | |

*Симплекс-шагом* или *заменой базиса* называют переход от одного базисного решения к соседнему допустимому. В невырожденном случае этому геометрически соответствует переход от одной вершины к другой вдоль ребра допустимой области (обе вершины принадлежат одному ребру).

Рассмотрим такой шаг. Перед этим договоримся, что индексы и параметры с «крышечкой» будут являться элементами новой (пересчитанной) таблицы, без «крышечки» - старой таблицы.

Симплекс шаг можно разбить на 8 действий. Рассмотри каждое из них:

1. **Выбор разрешающего столбца.** Среди отрицательных элементов $p_j$ выбираем минимальный $p_{j*}$, фиксируем $j*$. Если отрицательных элементов нет, то ЗЛП решена: столбец $b_i, i=\overline{1,m}$ дает искомые значения координат вектора решения; остальные координаты равны нулю; целевая функция пересчитывается в свободные переменные (для вычисления ее значения).
2. **Выбор разрешающей строки.** Среди частных $\frac{b_i}{a_{ij*}}$, где $a_{ij*} > 0$ - элементы разрешающего столбца, выбираем минимальный. Фиксируем $i*$.

В итоге имеем разрешающий столбец и строку.

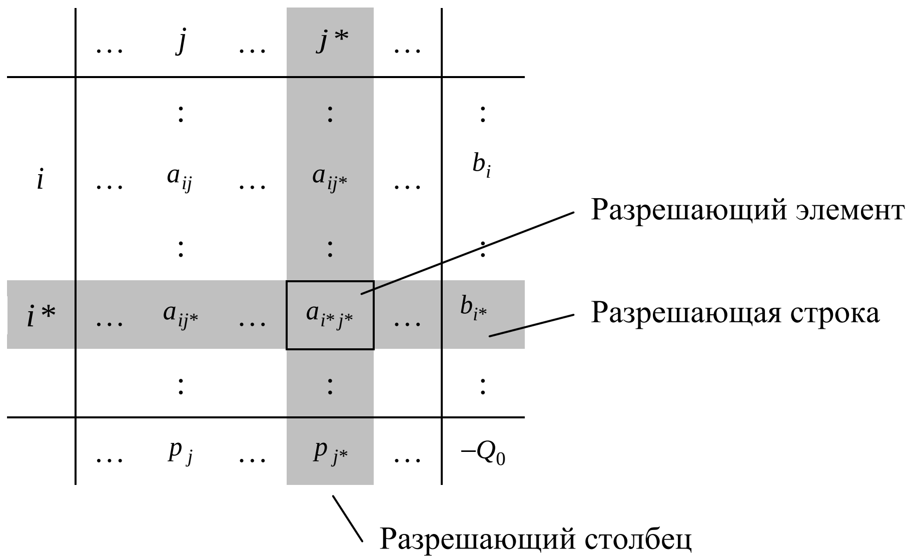


Рис. 6. Разрешающий столбец и строка

3. **Перестановка индексов.** $i*$ и $j*$ меняем местами

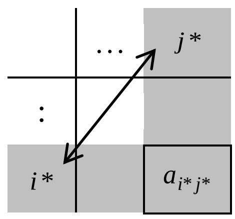

Рис. 7. Перестановка индексов

4. **Пересчет разрешающего элемента.** $\hat{a}_{i*j*} = \dfrac{1}{a_{i*j*}}$.

5. **Пересчет элементов разрешающей строки.** Все элементы разрешающей строки (кроме разрешающего элемента) перемножаются на новый разрешающий элемент:

$$\hat{a}_{i*j} = a_{i*j} \cdot \hat{a}_{i*j*}, \quad j \neq j*$$

$$\hat{b}_{i*} = b_{i*} \cdot \hat{a}_{i*j*}$$

6. **Пересчет элементов разрешающего столбца.** Все элементы разрешающего столбца (кроме разрешающего элемента)

перемножаются на новый разрешающий элемент, результат умножается на -1:

$$\hat{a}_{ij^*} = -a_{ij^*} \cdot \hat{a}_{i^*j^*}, \; i \neq i^*$$

$$p_{j^*} = -p_{j^*} \cdot \hat{a}_{i^*j^*}$$

7. **Пересчет остальных элементов центральной части таблицы.** Из элемента с индексами $i\,j$ элемента вычитается произведение **нового** соответствующего элемента разрешающей строки на соответствующий **старый** элемент разрешающего столбца:

$$\hat{a}_{ij} = a_{ij} - \hat{a}_{i^*j} a_{ij^*}, \; i \neq i^*, \; j \neq j^*$$

Для ускорения расчетов предлагается использование так – называемого «разрешающего креста». Составляется он следующим образом. Точкой пересечения креста является разрешающий элемент ($a_{i^*j^*}$).

Горизонтальная составляющая заполняется пересчитанными (новыми) элементами разрешающей ($i^*$-й) строки. Вертикальная составляющая заполняется старыми элементами разрешающего ($j^*$-го) столбца. Используется крест следующим образом. Если необходимо пересчитать элемент с индексами $i\,j$, то берем его и из него вычитаем произведение соответствующих элементов разрешающего креста.

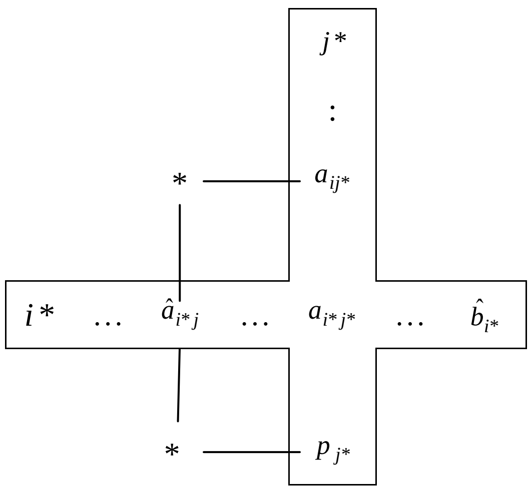


Рис.8. Разрешающий крест

8. **Пересчет оставшихся элементов.** При пересчете следует использовать разрешающий крест.

$$\hat{p}_j = p_j - \hat{a}_{i*j} \cdot p_{j*}, \;\; j \neq j*$$

$$\hat{b}_i = b_i - \hat{b}_{i*} \cdot a_{ij*}, \;\; i \neq i*$$

$$\left(-\hat{Q}_0\right) = \left(-Q_0\right) - \hat{b}_{i*} \cdot p_{j*}$$

Тем самым рассмотрение одного симплекс - шага закончено.

Остается лишь один единственный вопрос: как быть, если внизу таблицы все элементы неотрицательны (т.е. $p_j \geq 0$)? Действительно, в здесь нельзя выбрать разрешающий столбец. В данном случае нужно закончить симплекс-метод и выписать решение. Решение в симплекс-таблице представлено правым столбцом $b_i$ для базисных переменных и нулевыми значениями для свободных переменных. Оптимальное значение целевой функции представлено в правом нижнем углу ($-Q_0$ ).[2]

***Пример.*** Решить задачу

$$F(x) = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 \leq 7;$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 8;$$

$$x_2 \leq 4; \; x_{1,2} \geq 0$$

симплексным методом и дать геометрическую интерпретацию процесса решения.

Графическая интерпретация решения задачи представлена на рис. 9. Максимальное значение функции цели достигается в вершине ОДЗП с координатами [0,4]. Решим задачу с помощью симплекс-таблиц. Умножим второе ограничение на (-1) и введём дополнительные переменные, чтобы неравенства привести к виду равенств, тогда

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7;$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8;$$

$$x_2 + x5 = 4.$$

Исходные переменные $x_1$ и $x_2$ принимаем в качестве небазисных, а дополнительные $x_3$ , $x_4$ и $x_5$ считаем базисными и составляем симплекс-таблицу(симплекс-табл. 2). Решение, соответствующее симплекс-табл. 2, не является допустимым; ведущий элемент обведен контуром и выбран в соответствии с шагом 2 приведенного ранее алгоритма. Следующая симплекс-табл. 3 определяет допустимое базисное решение, ему соответствует вершина ОДЗП [0,2] на рис. 9. Ведущий элемент обозначен жирным шрифтом и выбран в соответствии с 1-2-м шагами алгоритма решения задачи. Табл. 4 соответствует оптимальному решению задачи, следовательно:

$x_1 = x_5 = 0$; $x_2 = 4$; $x_3 = 3$; $x_4 = 8$; $F_{max} = 20$.

Таблица 4

| БП | Св.чл | НП | |
|---|---|---|---|
| | | $X_1$ | $X_2$ |
| $x_3$ | 7 | 2 | 1 |
| $x_4$ | -8 | -1 | **-4** |
| $X_5$ | 4 | 0 | 1 |
| F | 0 | 2 | -5 |

Таблица 5

| БП | Св.чл | НП | |
|---|---|---|---|
| | | $X_1$ | $X_4$ |
| $x_3$ | 5 | 7/4 | 1/4 |
| $X_2$ | 2 | ¼ | -1/4 |
| $X_5$ | 2 | -1/4 | **1/4** |
| F | 10 | 13/4 | -5/4 |

Таблица 6

| БП | Св.чл | НП | |
|---|---|---|---|
| | | $X_1$ | $X_4$ |
| $x_3$ | 3 | 2 | -1 |
| $X_2$ | 4 | 0 | 1 |
| $X_4$ | 8 | -1 | 4 |
| F | 20 | 2 | 5 |

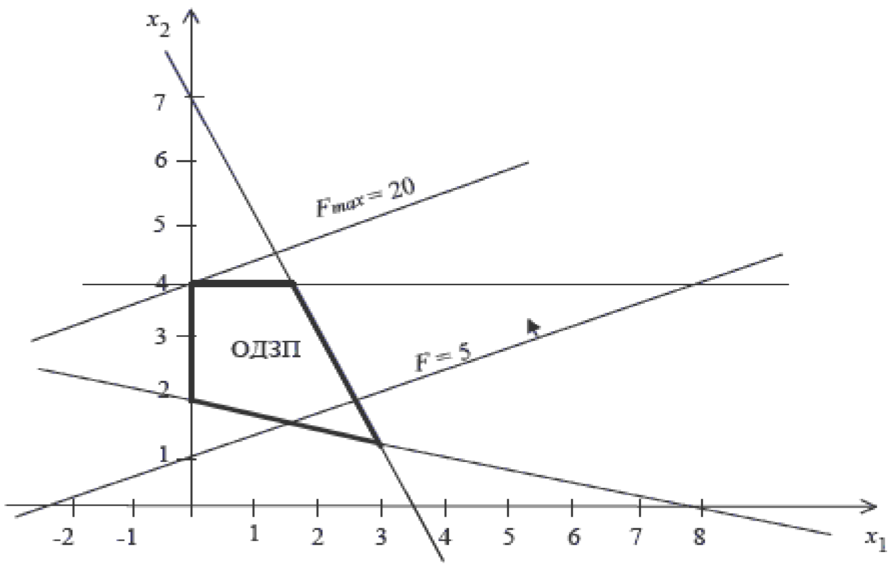


Рис. 9. Графическое решение задачи

## *4.4. Задания к лабораторной работе*

Для приведенной в варианте начальной таблицы с помощью симплекс-метода вручную получите решение ЗЛП.

Разработайте компьютерную программу для поиска решения ЗЛП с помощью симплекс-метода при заданной начальной таблице. Введите задачу в разработанную компьютерную программу и сравните с результатом ручного решения.

**Варианты задания**

1)

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | -1 | 1 | -0,5 |
| 5 | 4 | -2 | 1 | -2 |
| 6 | 3 | 0 | 1 | 1 |
| | 1 | -3 | -3 | 7,5 |

2)

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 1 | 0 | 4 |
| 5 | 2 | -1 | 1 | -4 |
| 6 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| | -2 | -2 | 1 | 8 |

3)

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | -1 | 2 | 0 | -5 |
| 5 | 1 | 2 | -3 | 4 |
| 6 | 0 | 0 | 2 | 8 |
| | -3 | 1 | -1 | 32,75 |

4)

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | -2 | 1 | 2 | 6 |
| 5 | -1 | -1 | -1 | -6 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| | 2 | -4 | -4 | 24 |

5)

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | -2 | -7 | 3 | -14 |
| 5 | 1 | -1 | -1 | -2 |
| 6 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| | 3 | -5 | 4 | 10 |

**Содержание отчета**

В отчете должно содержаться:

- титульный лист установленного образца;
- цель работы;
- постановка задачи;
- краткая теоретическая часть;
- вариант задания;

- решение задачи симплекс-методом, результат: $x*$ и $W(x*)$;
- блочное описание компьютерной программы;
- исходные данные к компьютерной программе;
- результат работы программы: $x*$ и $W(x*)$;
- заключение.

### *Контрольные вопросы*

1. В какой форме должна быть представлена задача линейного программирования (ЗЛП) для решения ее симплекс-методом? Если одно из условий не выполняется, как решать задачу?
2. Дайте определение симплекс-метода. Поясните основные идеи симплекс-процесса.
3. Дайте определение симплекс-таблицы. Приведите алгоритм, используемый для отыскания оптимального решения симплекс-методом.
4. Когда заканчивает работу алгоритм симплекс-метода?
5. Как называется элемент матрицы коэффициентов, стоящий на пересечении ведущей строки и ведущего столбца в симплекс-таблице?
6. Что содержит левая и верхняя части симплекс-таблицы?
7. Что содержит центральная часть симплекс-таблицы?
8. Что содержит нижняя часть симплекс-таблицы?
9. Что содержит правая часть симплекс-таблицы?
10. Каким образом определяется свободная переменная как кандидат на перевод в базисные переменные?
11. Каким образом определяется базисная переменная, которая в дальнейшем переводится в свободные?

# 5. Лабораторная работа 5. Поиск начальной угловой точки в задаче линейного программирования. Комплексное решение задачи линейного программирования

## 5.1. Цель работы

Освоить методику получения начальной угловой точки в задачах линейного программирования.

## 5.2. Постановка задачи

Идентифицировать существования непустой области допустимых решений и найти начальную угловую точку задачи линейного программирования.

## 5.3. Краткая теоретическая часть

До сих пор мы рассматривали канонические задачи линейного программирования. Однако в общей ЗЛП, составлять симплекс-таблицу вышеприведенным способом нельзя, т.к. в ней еще не обозначена начальная вершина (допустимое базисное решение). Для поиска последней используют так называемый метод **искусственных переменных**.[8]

Пусть имеется общая задача линейного программирования. В ней имеет место $n$ переменных и $m$ ограничений. Введем $m$ переменных $(x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})$, которые будем называть **искусственными**. Добавим каждую из них к соответствующему ограничению. Записываем новую целевую функцию как сумма искусственных переменных: $G(x) = \sum_{i=n+1}^{m} x_i$ . В итоге получаем вспомогательную задачу:

$$G(x) = \sum_{i=n+1}^{m} x_i \qquad (11)$$

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ ... \\ a_{1m}x_1 + ... + a_{1m}x_n + x_{n+m} = b_n \end{matrix} \qquad (12)$$

Очевидно, что все искусственные переменные становятся базисными, а остальные свободными. Как уже упоминалось выше, для составления нижней части симплекс-таблицы необходимо пересчитать целевую функцию в свободные переменные. После выполнения этих действий получаем:

$$G(x)=\left(-\sum_{i=1}^{m}a_{i1}\right)x_1+\ldots+\left(-\sum_{i=1}^{m}a_{in}\right)x_n+\left(\sum_{i=1}^{m}b_i\right) \qquad (13)$$

Следовательно, симплекс-таблица для вспомогательной задачи будет следующей:

| | $1$ | $\cdots$ | $n$ | |
|---|---|---|---|---|
| $n+1$ | $a_{11}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $\vdots$ | | | | $\vdots$ |
| $n+m$ | $a_{m1}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| | $-\sum_{i=1}^{m}a_{i1}$ | $\cdots$ | $-\sum_{i=1}^{m}a_{in}$ | $-\sum_{i=1}^{m}b_i$ |

Рис. 10. Симплекс-таблица для вспомогательной задачи

Здесь искусственные переменные являются базисными, а остальные свободные.

Выбор разрешающего элемента и расчеты (замена базиса) выполняются аналогичным образом, как в основной задаче, кроме небольших изменений. Если в свободные переменные попадает искусственная, то соответствующий столбец вычеркивается. Если в правом нижнем углу значение $\left(-\sum_{i=1}^{m}b_i\right)$ стало положительным, то делаем вывод, что ЗЛП не имеет решений. Это связано с тем, что значение целевой функции (20) отрицательно, что невозможно при неотрицательных искусственных переменных. Если значение $-\sum_{i=1}^{m}b_i$ стало равным нулю, то необходимо проверить, есть ли среди базисных переменных искусственные. Если таковые имеются, то все нулевые строки ($a_{ij}=0,\ j=\overline{1,n}, b_i=0$, $i$ - номер искусственной переменной), соответствующие им вычеркиваются. При наличии в данных строках ненулевого элемента последний принимается за разрешающий и относительно него выполняется перерасчет. Если среди базисных переменный нет искусственных, то полученная симплекс-таблица (за исключением нижней строки) является начальной таблицей основной задачи.

Чтобы заполнить нижнюю строку симплекс-таблицы, необходимо пересчитать целевую функцию в свободные переменные. На первый взгляд это очень сложная процедура, но если расписать симплекс-таблицу в уравнения, то данная процедура окажется «прозрачной».

Запишем начальную симплекс таблицу основной задачи, полученную после решения вспомогательной задачи.

| | $j_1$ | $\cdots$ | $j_{n-m}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i_1$ | $a_{1j_1}$ | $\cdots$ | $a_{1j_{n-m}}$ | $b_1$ |
| $\vdots$ | | | | $\vdots$ |
| $i_m$ | $a_{mj_1}$ | $\cdots$ | $a_{mj_{n-m}}$ | $b_m$ |
| | | | | |

Рис.11. Начальная симплекс таблица основной задачи

Здесь количество базисных переменных равно $m$, свободных $n-m$.

Очевидно $i_k$-ю строку данной таблицы можно представить в виде следующего уравнения:

$$a_{i_k j_1} x_{j_1} + \ldots + a_{i_k j_{n-m}} x_{j_{n-m}} + x_{i_k} = b_{i_k},\ k = \overline{1,m}, \text{ где} \tag{14}$$

$x_{i_k},\ k = \overline{1,m}$ - базисная переменная, остальные – свободные.

Выразим базисные переменные $x_{i_k}$:

$$x_{i_k} = b_{i_k} - a_{i_k j_1} x_{j_1} + \ldots + a_{i_k j_{n-m}} x_{j_{n-m}} \tag{15}$$

и подставим их в целевую функцию (13):

$$W(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{n-m} c_{j_l} x_{j_l} + \sum_{k=1}^{m} c_{i_k} \left( b_{i_k} - \sum_{l=1}^{n-m} a_{i_k j_l} x_{j_l} \right). \tag{16}$$

Выполнив арифметические операции, получаем:

$$W(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{n-m} \left( c_{j_l} - \sum_{k=1}^{m} c_{i_k} a_{i_k j_l} \right) x_{j_l} + \sum_{k=1}^{m} c_{i_k} b_{i_k} \tag{17}$$

Тем самым мы имеем формулу расчета целевой функции через свободные переменные. Ее запоминать не обязательно. Здесь достаточно знать метод получения необходимой целевой функции:

- запись симплекс-таблицы в виде соответствующей системы уравнений;
- выражение из системы базисных переменных по формуле (15);
- подстановка правых частей из (15) в целевую функцию вместо базисных переменных;
- преобразование подобных в целевой функции.[14]

Коэффициенты и свободный член целевой функции (17) вписываем в нижнюю часть конечной таблицы вспомогательной задачи. В итоге получаем начальную симплекс-таблицу основной задачи:

| | $j_1$ | $\cdots$ | $j_{n-m}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i_1$ | $a_{1j_1}$ | $\cdots$ | $a_{1j_{n-m}}$ | $b_1$ |
| $\vdots$ | | | | $\vdots$ |
| $i_m$ | $a_{mj_1}$ | $\cdots$ | $a_{mj_{n-m}}$ | $b_m$ |
| | $c_{j_1} - \sum_{k=1}^{m} c_{i_k} a_{i_k j_1}$ | $\cdots$ | $c_{j_{n-m}} - \sum_{k=1}^{m} c_{i_k} a_{i_k j_{n-m}}$ | $-\sum_{k=1}^{m} c_{i_k} b_{i_k}$ |

Рис. 12. Начальная симплекс-таблицу основной задачи

### 5.4. Задания к лабораторной работе

Для приведенной в варианте ЗЛП выполнить переход к вспомогательной задаче и построение начальной симплекс-таблицы. Используя симплекс-метод получить решение задачи вручную. Проверить результат ручного решения с помощью программы составленной в предыдущей лабораторной работе.

**Варианты задания**

1) $$W(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 8 \end{cases}$$

2) $$W(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 12 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 20 \end{cases}$$

**Содержание отчета**

В отчете должно содержаться:

- титульный лист установленного образца;
- цель работы;
- постановка задачи;
- краткая теоретическая часть;
- вариант задания;
- решение задачи: $x*$ и $W(x*)$;
- исходные данные к компьютерной программе;
- результат работы программы: $x*$ и $W(x*)$;
- заключение.

### *Контрольные вопросы*

1. Когда применяется метод искусственного базиса?
2. В чём состоит процедура получения записи базисных переменных через свободные?
3. Каким образом преобразуются исходная целевая функция ЗЛП в целевую функцию, записанную от свободных переменных?
4. Каким образом определяется свободная переменная как кандидат на перевод в базисные переменные?
5. Каким образом определяется базисная переменная, которая в дальнейшем переводится в свободные?

# 6. Лабораторная работа 6. Решение задач целочисленного программирования.

## 6.1. *Цель работы*

Находить  решение задачи целочисленного программирование методом Гомори.

## 6.2. *Постановка задачи*

Решить задачу целочисленного программирование методом Гомори.

## 6.3. *Краткая теоретическая часть*

Рассмотрим задачи целочисленного программирования, в которых как целевая функция, так и функции в системе ограничений являются линейными. В связи с этим сформулируем основную задачу линейного программирования, в которой переменные могут принимать только целые значения. В общем виде эту задачу можно записать так: найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \quad (18)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i, \;\; i = 1,..m \;\; (19)$$

$$x_j \geq 0 \; (j=1,..,n) \;\; (20)$$

$$x_j \text{ – целые } (21)$$

Если найти решение задачи (18) – (21) симплексным методом, то оно может оказаться как целочисленным, так и нет (примером задачи линейного программирования, решение которой всегда является целочисленным, служит транспортная задача). В общем же случае для определения оптимального плана задачи (18) – (21) требуются специальные методы. В настоящее время существует несколько таких методов, из которых наиболее известным является *метод Гомори*, в основе которого лежит описанный выше симплексный метод. [14]

**Метод Гомори.** Нахождение решения задачи целочисленного программирования методом Гомори начинают с определения симплексным методом оптимального плана задачи (18) – (21) без учета целочисленности переменных. После того как этот план найден, просматривают его компоненты. Если среди компонент нет дробных чисел, то найденный план является оптимальным планом задачи целочисленного программирования Если же в оптимальном плане задачи (18) – (21) переменная $x_j$ принимает дробное значение, то к системе уравнений (21) добавляют неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} f({a_{ij}}^{*})\, x_j \geq f({b_i}^{*}). \quad (22)$$

и находят решение задачи (18) – (21), (22).

В неравенстве (22) ${a_{ij}}^{*}$ и ${b_i}^{*}$– преобразованные исходные величины $a_{ij}$ и $b_i$ значения которых взяты из последней симплекс–таблицы, а $f({a_{ij}}^{*})$ и $f({b_i}^{*})$– дробные части чисел (под дробной частью некоторого числа a понимается наименьшее неотрицательное число $b$ такое, что разность между $a$ и $b$ есть целое). Если в оптимальном плане задачи (18) – (21) дробные значения принимают несколько переменных, то дополнительное неравенство (22) определяется наибольшей дробной частью.

Если в найденном плане задачи (18) – (21), (22) переменные принимают дробные значения, то снова добавляют одно дополнительное ограничение и процесс вычислений повторяют. Проводя конечное число итераций, либо получают оптимальный план задачи целочисленного программирования, либо устанавливают ее неразрешимость.

Если требование целочисленности относится лишь к некоторым переменным, то такие задачи называются *частично целочисленными.* Их решение также находят последовательным решением задач, каждая из которых получается из предыдущей с помощью введения дополнительного ограничения. В этом случае такое ограничение имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} k_j\, x_j \ge f(b_i^{\ *}). \quad (23)$$

Где $k_j$ определяются из следующих соотношений:

1) для $x_j$ , которые могут принимать нецелочисленные значения,

$$k_j = \begin{cases} a_{ij}^{\ *} \ , a_{ij}^{\ *} \ge 0 \\ \frac{f(b_i^{\ *})}{1-f(b_i^{\ *})} \left| a_{ij}^{\ *} \right|, a_{ij}^{\ *} < 0 \end{cases} \quad (24)$$

2) для $x_j$ , которые могут принимать только целочисленные значения,

$$k_j = \begin{cases} f(a_{ij}^{\ *}) \ , f\left(a_{ij}^{\ *}\right) \le ff(b_i^{\ *}) \\ \frac{f(b_i^{\ *})}{1-f(b_i^{\ *})}\left(1 - f\left(a_{ij}^{\ *}\right)\right) , a_{ij}^{\ *} < 0 \end{cases} \quad (25)$$

Из изложенного выше следует, что процесс определения оптимального плана задачи целочисленного программирования методом Гомори включает следующие *основные этапы*:

1. Используя симплексный метод, находят решение задачи (18) – (21) без учета требования целочисленности переменных.

2. Составляют дополнительное ограничение для переменной, которая в оптимальном плане задачи (18) – (21) имеет максимальное дробное значение, а в оптимальном плане задачи (18) – (22) должна быть целочисленной.

3. Используя двойственный симплекс-метод, находят решение задачи, получающейся из задачи (18) – (21) в результате присоединения дополнительного ограничения.

4. В случае необходимости составляют еще одно дополнительное ограничение и продолжают итерационный процесс до получения оптимального плана задачи (18) – (22) или установления ее неразрешимости. [9]

**Пример.** Методом Гомори найти максимальное значение функции

$$F=3x_1+2x_2 \quad (26)$$

при условии

$$x_1+x_2+x_3=13$$

$$x_1-x_2+x_4=6$$

$$-3x_1+x_2+x_5=9 \qquad (27)$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,..,5) \quad (28)$$

$$x_j \text{ – целые } (29)$$

Дать геометрическую интерпретацию решения задачи.

**Решение.** Для определения оптимального плана задачи (26) – (29) сначала находим оптимальный план задачи (26) – (28) (табл. 7).

Таблица 7

| *i* | Базис | $C_б$ | $P_0$ | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $p_4$ | $p_5$ |
| 1 | $p_3$ | 0 | 13 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | $P_4$ | 0 | 6 | 1 | –1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | $p_5$ | 0 | 9 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | $p_3$ | 0 | 0 | –3 | –2 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $P_1$ | 3 | 7 | 0 | 2 | 1 | –1 | 0 |
| 2 | $p_5$ | 0 | 6 | 1 | –1 | 0 | 1 | 0 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | $p_2$ | 2 | 27 | 0 | –2 | 0 | 3 | 1 |
| 4 | $P_1$ | 3 | 18 | 0 | –5 | 0 | 3 | 0 |
| 1 | $p_5$ | 0 | 7/2 | 0 | 1 | 1/2 | –1/2 | 0 |
| 2 | | | 19/2 | 1 | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 |
| 3 | | | 34 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 4 | | | 71/2 | 0 | 0 | 5/2 | 1/2 | 0 |

Как видно из табл. 7, найденный оптимальный план X=(19/2;7/2;0;0;10) задачи (26) – (28) не является оптимальным планом задачи (26) – (29), поскольку две компоненты $x_1$ и $x_2$ имеют нецелочисленные значения. При этом дробные части этих чисел равны между собой. Поэтому для одной из этих переменных составляется дополнительное ограничение. Составим, например, такое ограничение для переменной $x_2$ Из последней симплекс–таблицы (табл. 7) имеем

$$x_2+(1/2)x_3-(1/2)x_4=7/2.$$

Таким образом, к системе ограничений задачи (26) – (29) добавляем неравенство $f(1)x_2+f(1/2)x_3+f(-1/2)x_4\geq f(7/2)$ или $(1/2)x_3+(1/2)x_4\geq 1/2$, т.е. $x_3+x_4\geq 1$. (30)

Таблица 8

| $i$ | Базис | $C_б$ | $P_0$ | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $P_6$ |
| 1 | $p_2$ | 2 | 7/2 | 0 | 1 | 1/2 | – 1/2 | 0 | 0 |
| 2 | $P_1$ | 3 | 19/2 | 1 | 0 | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| 3 | $p_5$ | 0 | 34 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| 4 | $p_6$ | 0 | –1 | 0 | 0 | –1 | –1 | 0 | 1 |
| 5 | $p_2$ | 2 | 71/2 | 0 | 0 | 5/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| 1 | $P_1$ | 3 | 4 | 0 | 1 | 1 | | 0 | – |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $p_5$ | 0 | 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1/2 |
| 3 | $p_4$ | 0 | 32 | 0 | 0 | –1 | 0 | 1 | 1/2 |
| 4 | | | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| 5 | | | 35 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | –1 |
| | | | | | | | 0 | | 1/2 |

Находим теперь максимальное значение функции (26) при выполнении условий (27), (28) и (30) (табл.8).

Из таблицы 8 видно, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план X*=(9;4;0;1;32). При этом плане значение целевой функции равно $F_{max}$=35. Дадим геометрическую интерпретацию решения задачи. Областью допустимых решений задачи (26) – (28) является многоугольник *OABCD* (рис. 13). Из рис. 13 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в точке *C* (19/2; 7/2), т. е. что *X* = (19/2; 7/2; 0; 0; 34) является оптимальным планом. Это непосредственно видно и из таблицы 8. Так как *X* = (19/2; 7/2; 0; 0; 34) не является оптимальным планом задачи (26) – (29) (числа 19/2 и 7/2– дробные), то вводится дополнительное ограничение $x_3+x_4\geq 1$. Исключая из него $x_3$ и $x_4$ подстановкой вместо них соответствующих значений из уравнений системы ограничений (27), получим $x_1\leq 9$, отсекающий от многоугольника *OABCD* треугольник *EFC*.

Как видно из рис. 13, областью допустимых решений полученной задачи является многоугольник *OABEFD*. В точке *E*(9; 4) этого многоугольника целевая функция данной задачи принимает максимальное значение. Так как координаты точки *E* – целые числа и неизвестные $x_3$, $x_4$ и $x_5$ принимают целочисленные значения при подстановке в уравнение (27) значений $x_1$=9 и $x_2$=4, то X*=(9;4;0;1;32) является оптимальным планом задачи (26) – (29). Это следует и из таблицы 8.

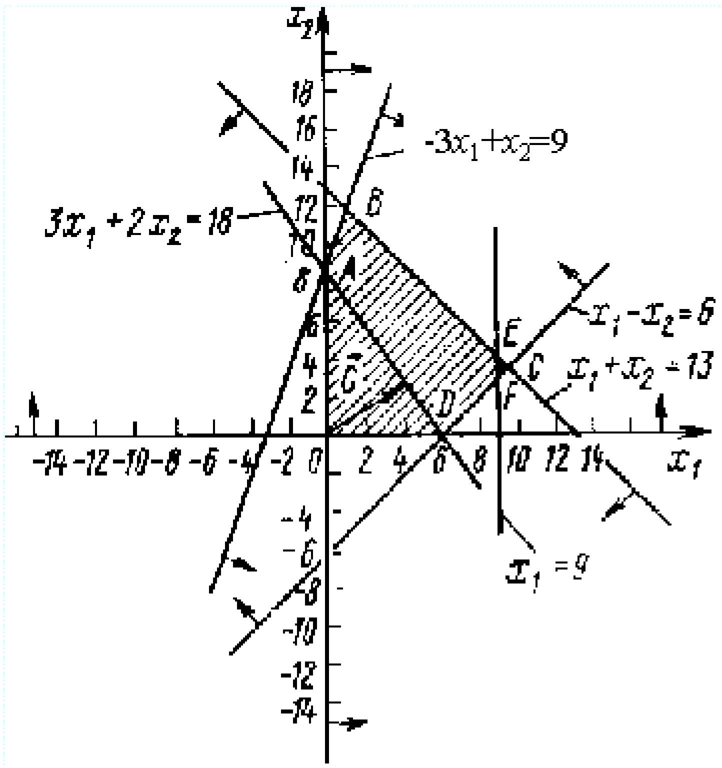

Рис. 13. Геометрическая интерпретация

### 6.4. Задания к лабораторной работе

Разработайте компьютерную программу для поиска решения задачи целочисленного программирования с помощью метода Гомори. Введите задачу в разработанную компьютерную программу и сравните с результатом ручного решения, проиллюстрировав его графически.

**Варианты задания**

1

$$W(x) = x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 35 \\ 3x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2

$$W(x) = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \le 14 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

3

$$W(x) = 3x_1 + 6x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 \le 42 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

4

$$W(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \le 49 \\ 2x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

5
$$W(x)=3x_1+x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1+3x_2 \le 21 \\ 5x_1+x_2 \le 40 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

6
$$W(x)=3x_1+3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1+7x_2 \le 49 \\ 5x_1+2x_2 \le 40 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

7
$$W(x)=4x_1+3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 16 \\ 3x_1+2x_2 \le 27 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

8
$$W(x)=x_1+3x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1+5x_2 \le 35 \\ 3x_1+x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

**Содержание отчета**

В отчете должно содержаться:

- титульный лист установленного образца;
- цель работы;
- постановка задачи;
- краткая теоретическая часть;
- вариант задания;
- решение задачи: $x*$ и $W(x*)$;
- исходные данные к компьютерной программе;
- результат работы программы: $x*$ и $W(x*)$;
- заключение.

## *Контрольные вопросы*

1. Каковы особенности задачи целочисленного линейного программирования?
2. Сформулируйте математическую модель задачи целочисленного линейного программирования.
3. В чем состоит метод Гомори?
4. Представьте схему алгоритма метода Гомори.

# Лабораторная работа 7. Решение задач методом динамического программирования

## *7.1. Цель работы*

Приобретение навыков решения стандартных задач методом динамического программирования и составление программы решения задач.

## *7.2. Постановка задачи*

Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи; решить задачу методом динамического программирования аналитически; составить программу решения задачи в среде программирования.

## *7.3. Краткая теоретическая часть*

Под динамическим программированием понимают некоторый специальный метод оптимизации, суть которого состоит в отыскании оптимального решения путем выполнения вычислений в несколько шагов

(этапов). Вся задача оптимизации разделяется на несколько шагов, причем все шаги могут быть уникальными или одинаковыми и чередоваться друг с другом.[13]

При использовании динамического программирования многошаговая

задача решается дважды: от конца к началу (определение условно-оптимального решения) и от начала к концу (определение безусловно-оптимального решения).

Первый этап длительный и трудоемкий, второй - короткий и уточняет решение первого этапа.

Основное функциональное уравнение динамического программирования

$$F_i(x_{i-1},U_i)=\text{extr}_{Ui}(Z_i(x_{i-1},U_i)+F_{i+1}(x_i)) \quad i=1,N \quad (30)$$

где:

$x_{i-1}$ - множество состояний, в которых система находится перед i-м шагом;

$x_i$ - множество состояний системы в конце i-го шага;

$U_i$ – множество управлений на i-ом шаге, под воздействием которых система переходит в одно из состояний множества $x_i$;

$F(x_i, U_i)$ - условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от i-го до n-го шага включительно;

$Z_i(x_{i-1} U_i)$ - значение целевой функции на i-ом шаге для всех управлений из множества $U_i$;

$F_{i+1}(x_i)$ - условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от (i+1)-го шага до N-го включительно.

На последнем N шаге справедлива следующая формула:

$$F_N(x_N,U_N)=\text{extr}_{UN}(Z_N(x_{N-1},U_N)). [1]$$

**Пример.** На данной сети дорог (рисунок 12) указаны стоимости доставки единицы груза из пункта в пункт. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из пункта 1 в пункт 10.

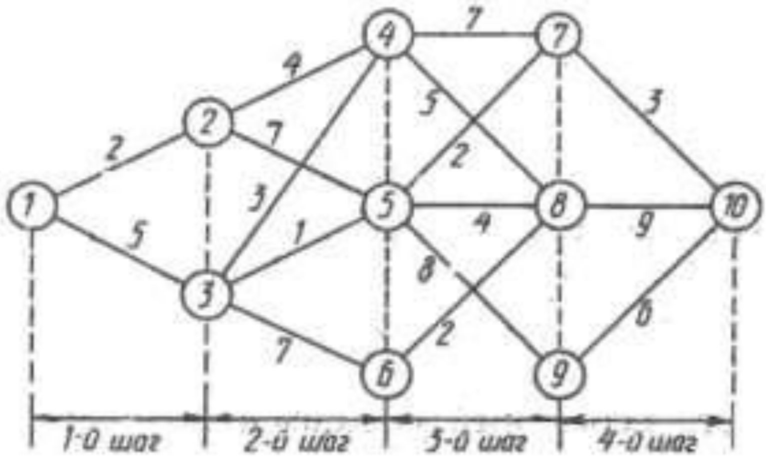


Рис. 14. Сеть дорог

**Решение.** Разобьем все пункты сети на группы (таблица 5). К группе I отнесем пункт 1, к группе II – пункты, в которые можно попасть непосредственно из пункта 1 (пункты 2 и 3), к группе III отнесем пункты, в

которые можно попасть непосредственно из любого пункта группы II (4,5 и 6) и т.д. В результате движения транспорта с грузом из пункта 1 в пункт 10 можно рассматривать как четырехшаговый процесс.

Таблица 9. Разбиение сети дорог на группы

| I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 7 | |
| 1 | 3 | 5 | 8 | 10 |
| | | 6 | 9 | |

В качестве физической системы выступает транспорт с грузом, перемещающий из начального состояния $c_1$ (пункта 1) в конечное состояние $c_{10}$ (пункт 10), и сеть дорог. Множество $x_i$ – множество пунктов назначения на i-м шаге.

Управление $U_i$ на i – м шаге состоит в выборе дороги (i,j), по которой следует направлять груз из данного пункта в соседний в общем направлении к пункту 10.

Значение $z_i$ целевой функции на i – м шаге – это затраты на перевозку единицы груза из данного пункта в выбранный соседний пункт.

1) Первый этап условной оптимизации начнем с анализа четвертого шага.

N=4, функциональное уравнение имеет вид (формула 30):

$$F_4(x3,u4)=\min_{u4} z_4(x_3,u_4), \quad (30)$$

$x_4=\{c_{10}\}$; $x_3=\{c_7,c_8,c_9\}$; $u_4=\{(7,10),(8,10),(9,10)\}$; $z_4=\{3,9,6\}$.

Анализ четвертого шага оформим в таблице 10.

Таблица 10. Первый этап условной оптимизации

| $x_3$ | $U_4$ | $x_4$ | $F_4$ |
|---|---|---|---|
| **$C_7$** | **(7,10)** | **$C_{10}$** | **3** |
| $C_8$ | (8,10) | $C_{10}$ | 9 |
| $C_9$ | (9,10) | $C_{10}$ | 6 |

2) Переходя ко второму этапу условной оптимизации – анализу третьего шага, запишем функциональное уравнение при i=3 (формула 31):

$$F_3(x_2,u_3)=\min_{u_3} \left(z_3(x_2,u_3)+F4(x_3)\right). \quad (31)$$

Анализ третьего шага рассмотрим в таблице 11.

Таблица 11. Второй этап условной оптимизации

| $x_2$ | $U_3$ | $x_3$ | $Z_3$ | $F_4$ | $Z_3+F_4$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_4$ | (4,7) | $C_7$ | 7 | 3 | 10 | 10 |
| | (4,8) | $C_8$ | 5 | 9 | 14 | |
| **$C_5$** | **(5,7)** | $C_7$ | 2 | 3 | 5 | **5** |
| | (5,8) | $C_8$ | 4 | 9 | 13 | |
| | (5,9) | $C_9$ | 8 | 6 | 14 | |
| $C_6$ | (6,8) | $C_8$ | 2 | 9 | 11 | 11 |

3) Третий этап условной оптимизации – анализ второго шага – осуществляется совершенно аналогично второму этапу. Функциональное уравнение для второго шага запишется в следующей форме (формула 32), i=2.

$$F_2(x_1,u_2)=\min_{u_2} \left(z2(x_1,u_2)+F_3(x_2)\right) \quad (32)$$

Анализ второго шага рассмотрим в таблице 12

Таблица 12 – Третий этап условной оптимизации

| $x_1$ | $U_2$ | $x_2$ | $Z_2$ | $F_3$ | $Z_2+F_3$ | $F_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_2$ | (2,4) | $C_4$ | 4 | 10 | 14 | 12 |
| | (2,5) | $C_5$ | 7 | 5 | 12 | |
| **$C_3$** | (3,4) | $C_4$ | 3 | 10 | 13 | **6** |
| | **(3,5)** | $C_5$ | 1 | 5 | 6 | |
| | (3,6) | $C_6$ | 7 | 11 | 18 | |

4) Заключительным этапом процедуры условной оптимизации является анализ первого шага. Функциональное уравнение для этого шага имеет вид

(формула 33), i=1

$$F_1(x_{0,u1})=\min_{u_1} (z_1(x_0,u_1)+F_2(x_1)), (33)$$

Результаты вычислений приведены в таблице 13.

Таблица 13. Четвертый этап условной оптимизации

| $x_0$ | $U_1$ | $x_1$ | $Z_1$ | $F_2$ | $Z_1+F_2$ | $F_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **$C_1$** | (1,2) | $C_2$ | 2 | 12 | 14 | **11** |
| | **(1,3)** | **$C_3$** | 5 | 6 | 12 | |

При безусловной оптимизации остается пройти еще раз весь оптимизируемый процесс, но уже в прямом направлении, начиная с первого и кончая четвертым шагом, и «прочитать» искомое оптимальное управление,

которое будет составлено из найденных ранее шаговых условно-оптимальных управлений. Таким образом, рассматривая таблицы решения с последней по первую, получаем наиболее экономный маршрут перевозки, который проходит через пункты 1, 3, 5, 7, 10 при этом транспортные расходы составляют 11 ден. ед. на единицу груза.

### *7.4. Задания к лабораторной работе*

На данной сети дорог (рис. 15) имеется несколько маршрутов, по которым можно доставлять груз из пункта 1 в пункт 10. Известны стоимости $c_{ij}$

перевозки единицы груза между пунктами сети. Требуется:

1) методом динамического программирования найти на сети наиболее

экономный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10 и соответствующие ему затраты;

2) выписать оптимальные маршруты перевозки груза из всех остальных

пунктов сети в пункт 10 и указать отвечающие им минимальные затраты на

доставку.

Составить программу решения задачи в среде программирования

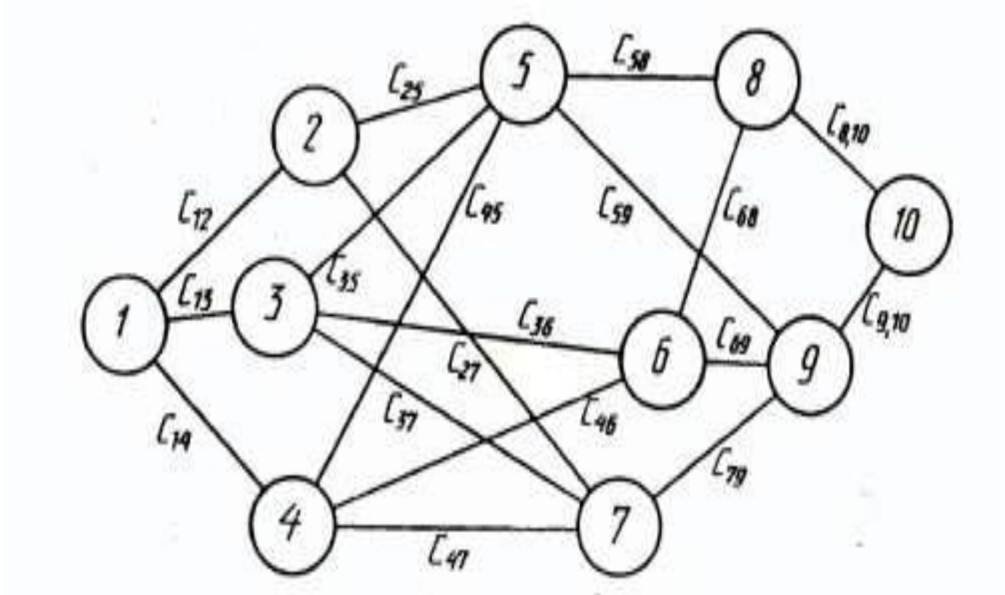

Рис. 15. Сеть дорог с указанными стоимостями перевозки груза

Все необходимые числовые данные вариантов №1 - №6 приведены в таблице 14.

Таблица 14. Стоимости перевозки груза

| Тариф | Номер варианта | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $C_{12}$ | 7 | 4 | 9 | 1 | 5 | 3 |
| $C_{13}$ | 3 | 8 | 2 | 6 | 3 | 5 |
| $C_{14}$ | 5 | 4 | 5 | 2 | 8 | 4 |
| $C_{25}$ | 2 | 6 | 3 | 5 | 2 | 1 |
| $C_{27}$ | 7 | 1 | 7 | 3 | 5 | 6 |
| $C_{35}$ | 9 | 9 | 4 | 6 | 8 | 2 |
| $C_{36}$ | 3 | 3 | 6 | 8 | 1 | 7 |
| $C_{37}$ | 1 | 5 | 8 | 4 | 7 | 4 |
| $C_{45}$ | 8 | 4 | 1 | 7 | 5 | 6 |
| $C_{46}$ | 4 | 8 | 3 | 2 | 9 | 8 |
| $C_{47}$ | 5 | 2 | 5 | 9 | 1 | 3 |
| $C_{58}$ | 2 | 7 | 8 | 5 | 3 | 7 |
| $C_{59}$ | 6 | 9 | 7 | 3 | 5 | 2 |
| $C_{68}$ | 1 | 6 | 1 | 6 | 8 | 9 |
| $C_{69}$ | 9 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 |
| $C_{79}$ | 4 | 7 | 5 | 4 | 9 | 8 |
| $C_{8,10}$ | 3 | 2 | 9 | 6 | 2 | 1 |
| $C_{9,11}$ | 8 | 2 | 5 | 1 | 7 | 3 |

## Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) формулировку задания;

4) аналитическое решение задачи своего варианта;

5) электронный отчет решения задачи;

7) программный код решения задачи;

8) вывод о проделанной работе.

## *Контрольные вопросы*

1) Что понимается под динамическим программированием?

2) Какие задачи можно решать методом динамического программирования?

3) Объяснить алгоритм решения задач динамического программирования.

4) Основное функциональное уравнение динамического программирования.

5) На какие 2 этапа распадается вычислительная процедура метода динамического программирования? В чем заключаются эти этапы?

## Лабораторная работа 8. Решение матричных игр в чистых стратегиях

### *8.1.Цель работы*

Освоить метод нахождения решения матричной игры в чистых стратегиях.

### *8.2. Постановка задачи*

Разработать программу решения матричной игры в чистых стратегиях.

### *8.3. Краткая теоретическая часть*

***Игра*** – это математическая модель реальной конфликтной ситуации. Стороны, участвующие в конфликте, называются ***игроками***. Исход конфликта называется выигрышем. Правила игры – это система условий, определяющая варианты действий игроков; объем информации каждого игрока о поведении партнеров; выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

***Стратегия игрока*** – это совокупность правил, определяющих поведение игрока при каждом личном ходе. Обычно в процессе игры на каждом этапе игрок выбирает ход в зависимости от конкретной ситуации. Совокупность стратегий $x=x_1,x_2,\ldots,x_n$, которые выбрали участники игры, называется ***игровой ситуацией***.

Стратегия игрока называется ***оптимальной***, если она обеспечивает этому игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш (или минимально возможный средний проигрыш независимо от поведения противника).

Оценить ситуацию x с точки зрения преследуемых ЛПР целей можно, построив целевые функции (или критерии качества), ставящие в соответствие каждой ситуации x числовые оценки $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)$

В конце игры игроки получают какой-либо *выигрыш*, который зависит от протекания игры и окончательной позиции.

По характеру выигрышей игры можно разделить на игры с нулевой и ненулевой суммой. В играх с нулевой суммой сумма выигрышей в каждой игровой ситуации равна нулю. Игры двух игроков с нулевой суммой называются антагонистическими. В этих играх выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

В играх с ненулевой суммой в выигрыше или проигрыше могут оказаться все участники игры. [3]

***Матричными играми*** называются конечные игры двух игроков с нулевой суммой. В этом случае номер строки матрицы соответствует номеру стратегии $A_i$ игрока 1, а номер столбца – номеру стратегии $B_j$ игрока 2.

Элементами матрицы $a_{ij}$ является выигрыш игрока 1 для ситуации (реализации стратегий) $A_iB_j$. В силу того, что рассматривается матричная игра с нулевой суммой, выигрыш игрока 1 равен проигрышу игрока 2.

Пусть первый игрок имеет m стратегий, второй n стратегий. Обозначим через $A_i$ – i-ую стратегию игрока 1 (i =1,...,m) , через $B_j$ – j-ую стратегию игрока 2 ( j =1,..., n) . Паре стратегий ( i, j ) поставим в соответствие число $a_{ij}$ - выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою стратегию i, а второй – j.

В общем виде матричная игра может быть записана следующей матрицей, которая называется **платёжной** или матрицей выигрышей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & - & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & - & a_{2m} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & - & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Каждая стратегия i, j называется **чистой стратегией**. В каждой партии делается ход: игрок 1 выбирает стратегию i, игрок 2 стратегию j. После чего игрок 1 получает выигрыш $a_{ij}$ (за счёт игрока 2). Если $a_{ij} < 0$, значит игрок 1 платит игроку 2 сумму $a_{ij}$ и игра заканчивается.

Важным приёмом, позволяющем уменьшить размеры платёжной матрицы, является так называемое **правило доминирования**. Оно основано на отбрасывании тех чистых стратегий, которые не вносят никакого вклада в искомые оптимальные стратегии. Один из приёмов снижения размеров матрицы заключается в сравнении её строк и столбцов.

Стратегия $A_i$ называется **доминируемой** стратегией $A_j$, а стратегия $A_j$ - **доминирующей**, если при любом варианте поведения противодействующего игрока выполняются неравенства: $a_{i1} \leq a_{j1}$; $a_{i2} \leq a_{j2}$; $a_{i3} \leq a_{j3}$; … $a_{im} \leq a_{jm}$. Считают, что игрок поступает разумно, если будет избегать доминируемых стратегий.

В случае, если выполняется соотношение $a_{i1}=a_{j1}$; $a_{i2}=a_{j2}$; $a_{i3}=a_{j3}$; … $a_{im}=a_{jm}$, то говорят, что стратегии $A_i$ и $A_j$ дублируют друг друга.

Если в матрице игры одна из строк (столбцов) доминирует другую строку (другой столбец) или две строки (два столбца) дублируют друг друга, то можно уменьшить размеры матрицы путём исключения доминируемых строк (столбцов) и одной (одного) из дублирующих. [12]

**Пример 1**. Заменить исходную матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Решение:**

Стратегия $A_1$ является доминируемой стратегией $A_3$, стратегия $B_1$ является дублирующей по отношению к стратегии $B_4$. Данные стратегии не будут выбраны игроками, так как являются заведомо проигрышными. Получим платёжную матрицу

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$B_5$ – доминирующая над $B_2$ и $B_4$.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

С платежной матрицей A = ($a_{ij}$) связано несколько основных понятий теории игр (игровых моделей).

**Нижней ценой игры** $V_н$ называется величина, являющаяся максиминным значением платежной матрицы:

$$V_н = \max_i(\min_j a_{ij})$$

(сначала находится минимум в каждой строке, а затем из полученных минимумов находят максимум). Нижняя цена игры - это гарантированный выигрыш первого игрока A при любой стратегии игрока B.

**Верхней ценой игры** $V_в$ называется величина, являющаяся минимаксным значением платѐжной матрицы:

$$V_в = \min_j(\max_i a_{ij})$$

(сначала находится максимум в каждом столбце, а затем из полученных максимумов находят минимум). Верхняя цена игры - это гарантированный проигрыш второго игрока B при любой стратегии игрока A.

В силу того, что игра антагонистическая, всегда $V_н \le V_в$. Если $V_в = V_н = V$, то просто говорят о цене игры, такая игра называется **вполне определѐнной, игрой с седловой точкой**, поскольку значение элемента платѐжной матрицы, равное $V = V_в = V_н$ является минимальным в своей строке и максимальным в своѐм столбце. Соответствующие этой цене игры стратегии называются **оптимальными**, поскольку второй игрок не может понизить нижнюю цену игры, а первый игрок не может повысить верхнюю цены игры.

## Решение матричных игр в чистых стратегиях

В случае, если значения $V_в$ и $V_н$ не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов $a_{ij}$ ) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $V= V_в =V_н$ . В этом случае говорят, что игра имеет **решение в чистых стратегиях**, а стратегии $a_{i0,j0}$ , в которых достигается V – **оптимальными чистыми стратегиями**. Пара чистых стратегий i0 , j0 называется седловой точкой. Седловой элемент $a_{i0j0}$ является минимальным в i - ой строке и максимальным в j - ом столбце платёжной матрицы. Значение V называется **чистой ценой игры**.

Таким образом, игра с седловой точкой решается в **чистых стратегиях**.

**Пример 2.** Найти решение игры, заданной платёжной матрицей А в чистых стратегиях.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Решение:**

Найдём минимальные элементы в каждой строке и максимальные элементы в каждом столбце. Затем найдём максимальный элемент среди минимальных и минимальный среди максимальных. Занесём всё в следующую таблицу 15.

Таблица 15

| | **$B_1$** | **$B_2$** | **$B_3$** | **min j** |
|---|---|---|---|---|
| **$A_1$** | **7** | **5** | **4** | **4** |
| **$A_2$** | **1** | **8** | **3** | **1** |
| **$A_3$** | **8** | **1** | **2** | **1** |
| **max i** | **8** | **8** | **4** | |

$\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij} = V_н = 4$

$\min\limits_{j}\max\limits_{i} a_{ij} = V_в = 4$

В нашей задаче $V_н = V_в = V = 4$. Пара ( 1, 3) образует седловую точку. Таким образом, оптимальной стратегией для игрока 1 будет стратегия $A_1$, а для игрока 2 – стратегия $B_3$. Цена игры V =4.

**Пример 3**. Задана платежная матрица игры A, необходимо найти решение игры

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

В данной игре: $V_н = \max (\min a_{ij}) = 3$, $V_в = \min (\max a_{ij}) = 4$

Поскольку $V_н < V_в$ - выполняется соотношение строгого неравенства, следовательно, седловая точка в игре отсутствует, ситуации равновесия не существует. Очевидно, что для данной игры рассмотренный выше подход к нахождению оптимального решения неприменим, а максиминная и минимаксная стратегия игроков не являются решением игры. [10]

### *8.4. Задания к лабораторной работе*

Разработайте компьютерную программу, выполняющую следующие действия:

- Ввод платёжной матрицы (по вариантам, предложенным преподавателем);
- Определение нижней и верхней цены игры и вывод их значений, а также названий стратегий, в которых достигаются эти значения.
- Определение наличия или отсутствия оптимальной чистой стратегии в игре. В случае существования оптимальной чистой стратегии вывод информации о названиях стратегий игроков, в которых она достигается. В случае отсутствия оптимальной чистой стратегии вывод соответствующего сообщения.
- исключение доминируемых и дублирующих стратегий.

### *Варианты заданий*

| | | |
|---|---|---|
| ***1.*** $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 9 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ | ***2.*** $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ | ***3.*** $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 9 & 0 & 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ |
| ***4.*** $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ | ***5.*** $\begin{bmatrix} 4 & 7 & 7 & 9 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 6 & 7 \\ 5 & 8 & 9 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ | ***6.*** $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 4 \\ 10 & 10 & 8 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ |

**Содержание отчета**

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- титульный лист,
- цель работы,
- листинг программы,
- результаты выполнения программы, содержащие платежную матрицу, нижнюю и верхнюю цены игры, названия стратегий игроков, в которых она достигается, матрицу с исключенными доминируемыми и дублирующими стратегиями,
- выводы.

### *Контрольные вопросы*

1. Дайте определение основных понятий теории игр.
2. Платежная матрица. Нижняя и верхняя цена игры.
3. Поясните основные приемы упрощение игр.
4. Дайте определение понятию "Платёжная матрица игры".
5. Дайте определение понятию "Цена игры".
6. В каком случае конечная матричная игра имеет седловую точку?

# Лабораторная работа 9. Решение матричных игр в смешанных стратегиях путем сведения к задачам линейного программирования

### *9.1. Цель работы*

Освоить метод нахождения решения матричной игры путем сведения к задачам линейного программирования.

### *9.2. Постановка задачи*

Разработать программу решения матричной игры путем сведения к ЗЛП и апробировать ее на варианте задания

### *9.3. Краткая теоретическая часть*

Если матричная игра не имеет решения в чистых стратегиях, то для нахождения её решения используются так называемые смешанные стратегии, а найденные ранее нижняя и верхняя цены игры указывают на то, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. В этом случае оптимальный результат игры достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

**Смешанной стратегией** игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Стратегии, применённые с вероятностью, отличной от нуля, называются **активными стратегиями**.

Пусть игрок 1 имеет m чистых стратегий $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ ,..., $A_m$ . Обозначим через $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ ,..., $x_m$ вероятности, с которыми игрок 1 использует свои соответствующие чистые стратегии. Тогда смешанная стратегия игрока 1 – это набор чисел x=( $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ ,..., $x_m$), удовлетворяющих соотношениям $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Аналогично для игрока 2. Обозначим через

$y_1$ , $y_2$ , $y_3$ ,..., $y_n$ вероятности, с которыми он использует свои чистые стратегии $B_1$ , $B_2$ ,...,$B_n$ . Смешанная стратегия для игрока 2 – набор чисел y=( $y_1$ , $y_2$ , $y_3$ ,..., $y_n$), удовлетворяющих соотношениям $y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Для соблюдения секретности, каждый игрок применяет свои смешанные стратегии независимо от выбора другого игрока. Доказано, что для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры: $V_в \leq V \leq V_н$

При этом условии величина V называется ценой игры.

Если x* – оптимальная стратегия первого игрока, а y* – оптимальная стратегия второго игрока, то число

$$V = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, x_i^* y_j^*$$

является ценой игры.

Определение оптимальных стратегий для обоих игроков и цены игры и составляет *процесс нахождения решения игры*.

Доказано, что всякая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

И для того чтобы число V было ценой игры, а $x^*$ и $y^*$ – оптимальными стратегиями необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq V, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j^* \leq V.$$

Для игр порядка 2* 2, 2* n, m* 2 справедливо следующее утверждение: если один из игроков применяет свою оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры v вне зависимости от того, с какими вероятностями будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальные (в том числе и чистые стратегии). И для достижения наибольшего гарантированного выигрыша второму игроку также необходимо придерживаться своей оптимальной смешанной стратегии.

Для игры с платежной матрицей $A_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, можно получить две задачи линейного программирования: *прямую* и *двойственную*.

Они составляются следующим образом:

**Прямая задача:**

критерий эффективности $W_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \max$;

ограничения: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1,\ i = \overline{1, m};\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n}$

**Двойственная задача:**

критерий эффективности $W_2 = \sum_{i=1}^{m} y_i \to \min$;

ограничения: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge 1,\ j = \overline{1, n};\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1, m}$

Пусть $x^* = \left(x_1^*, \dots, x_n^*\right);\ y^* = \left(y_1^*, \dots, y_m^*\right)$ - решения прямой и двойственной задач соответственно. Тогда решение игры находится следующим образом:

$q_j = \dfrac{x_j^*}{\sum_{k=1}^{n} x_k^*},\ j = \overline{1, n}$; $p_i = \dfrac{y_i^*}{\sum_{k=1}^{m} y_k^*},\ i = \overline{1, m}$ - смешанные стратегии второго и первого игрока соответственно;

$I = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} x_k^*} = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{m} y_k^*}$ - цена игры.

Если в матрице присутствуют отрицательные значения, то необходимо добиться их отсутствия путем добавления ко всем ее элементам константы.[11]

**Пример 1.** Найти решение игры, определяемой следующей платёжной матрицей.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Решение**

Данная матричная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Решим задачу в смешанных стратегиях. Составим двойственную пару задач линейного

программирования. В качестве прямой задачи рассмотрим задачу нахождения максимума функции $F = y_1 + y_2 + y_3$ при условиях

$$\begin{gathered} y_1 + 2y_2 \le 1 \\ y_1 + y_3 \le 1 \\ 2y_1 + y_2 \le 1 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{gathered}$$

Двойственная задача: найти минимум функции $F = x_1 + x_2 + x_3$ при условиях

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ 2x_1 + x_3 \ge 1 \\ x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{gathered}$$

Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать какое-либо одно из них. Так как система ограничений первой задачи содержит лишь

неравенства вида «$\le$ », то лучше сначала найти решение этой задачи. Решение проводится изученным симплекс-методом. Оно приведено в следующей симплекс-таблице (таблица 16).

Таблица 16

| Базис | $C_б$ | $P_0$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
| $P_4$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $P_5$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $P_6$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | | | |
| $P_4$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $P_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $P_6$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | | | | | | | |
| $P_2$ | 1 | ½ | ½ | 1 | 0 | ½ | 0 | 0 |
| $P_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $P_6$ | 0 | ½ | ½ | 0 | 0 | -1/2 | 0 | 1 |
| | | 3/2 | 1/2 | 0 | 0 | 1/2 | 1 | 0 |

Исходная задача имеет оптимальный опорный план $Y$ =(0; 1/ 2; 1). Из последней строки также видно, что решением двойственной задачи является

$X$ = (1/ 2; 1; 0) .

Следовательно, цена игры $v = \frac{1}{x_1+x_2+x_3} = \frac{2}{3}$, а оптимальные смешанные стратегии игроков $X^* = v \cdot X$= (1 /3; 2/ 3; 0) , $y^* = v \cdot Y$= (0; 1 /3; 2/ 3).

## *9.4. Задания к лабораторной работе*

Фирма, с учетом трех возможных вариантов поведения партнера (стратегий $B_1$, $B_2$ и $B_3$) разработала две стратегии своей деятельности: $A_1$ и $A_2$.

Прибыль фирмы $a_{ij}$ в ситуации, когда она выбирает свою стратегию $A_i$, а партнер – стратегию $B_j$, приведена в заданной платежной матрице: $A$ Показать, что эта матрица не имеет седловой точки и найти оптимальное решение задачи в смешанных стратегиях сведением решения игры к задаче линейного программирования. Решение задачи реализовать в виде программы.

**Варианты задания**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ | 5 | $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ |
| 2 | $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ | 6 | $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| 3 | $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ | 7 | $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ |
| 4 | $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ | 8 | $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ |

**Содержание отчета**

В отчете должно содержаться:

- титульный лист установленного образца;
- цель работы;
- постановка задачи;
- краткая теоретическая часть;
- вариант задания;
- блочное описание компьютерной программы;
- исходные данные к компьютерной программе;
- результат работы программы;
- решение игры (смешанные стратегии)
- заключение.

### *Контрольные вопросы*

1. Чем отличаются чистые стратегии от смешанных?
2. Поясните основные принципы приведения матричной игры к задаче линейного программирования.
3. Поясните основные принципы симплекс метода

4. Поясните основные принципы получения решения двойственной задачи из симплекс таблицы для прямой.
5. Как решается задача, если в матрице присутствуют отрицательные значения?

## *Лабораторная работа 10. Приближенный метод решения матричных игр*

### *10.1. Цель работы*

Изучить приближенный метод решения матричной игры.

### *10.2. Постановка задачи*

Разработать программу решения матричной игры методом фиктивного розыгрыша Брауна–Робинсона и апробировать ее на варианте задания

### *10.3. Краткая теоретическая часть*

Идея метода заключается в поочередном выборе каждой стороной наилучшей чистой стратегии против наблюдаемого эмпирического распределения чистых стратегий противника.

На первом шаге противники выбирают произвольные чистые стратегии и соответственно. Пусть противниками на первых $N$ шагах последовательно выбирались стратегии ($i_1, i_2,\ldots,i_N$) и ($j_1, j_2,\ldots,j_N$) и $x_i^N$, $y_i^N$ - количество шагов, на которых первым и вторым игроками выбирались стратегии i и j соответственно. Очевидно, $\sum_{i=1}^{m} x_i^N = \sum_{j=1}^{n} y_j^N = N$. Обозначим относительные частоты применения стратегий i и j через $p_i^N= x_i^N/N$, $q_j^N= y_j^N/N$. Таким образом, на каждом шаге $N$ имеем наблюдаемые смешанные стратегии $p^N=( p_1^N,\ldots, p_m^N)$ и $q^N=( q_1^N,\ldots, q_n^N)$. Эти векторы определяют эмпирическое распределение стратегий после первых $N$ шагов. На шаге ($N$ + 1) выбираются такие чистые стратегии $i_{N+1}$ и $j_{N+1}$, что

$$\alpha^N = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^N = \sum_{j=1}^{n} a_{i_{N+1}j} q_j^N$$

$\beta^N = \min_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i^N = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_{N+1}} p_i^N$.

Частоты стратегий пересчитываются по следующим формулам:

$$p_i^{N+1} = \begin{cases} \frac{Np_i^N}{N+1}, \ i \neq i_{N+1} \\ \frac{Np_i^N+1}{N+1}, \ i = i_{N+1} \end{cases}, \ q_j^{N+1} = \begin{cases} \frac{Nq_j^N}{N+1}, \ j \neq j_{N+1} \\ \frac{Nq_j^N+1}{N+1}, \ j = j_{N+1} \end{cases}.$$

Авторами метода доказано, что с ростом N эмпирические распределения сходятся к оптимальным смешанным стратегиям:

$p^N \rightarrow p^*$, $q^N \rightarrow q^*$, $v^N=(\alpha^N+\beta^N)/2 \rightarrow v$.

Метод прост в описании и реализации, сложность одной итерации составляет O(n+m). Недостатком метода является его медленная немонотонная сходимость. На практике остановка алгоритма происходит после выполнения достаточно большого числа итераций.

**Пример.** Выполнить 12 итераций метода Брауна−Робинсона для решения матричной игры с платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Решение.** Запишем изменение эмпирических распределений на каждом шаге алгоритма.

**Шаг 1.** $i_1=1$, $j_1=1 \rightarrow p^1=(1, 0, 0)$, $q^1=(1, 0, 0)$.

**Шаг 2.** $\alpha^1=3$, $i_2=1$, $p^2=(1/2, 0, 1/2)$, $\beta^1=1$, $j_2=3$, $q^2=(1, 0, 0)$, $v^1=(\alpha^1+\beta^1)/2=2$

**Шаг 3.** $\alpha^2=3$, $i_3=3$, $p^3=(1/3, 0, 2/3)$, $\beta^2=3/2$, $j_2=3$, $q^3=(2/3, 0, 1/3)$, $v^2=(\alpha^2+\beta^2)/2=9/4$

**Шаг 4.** $\alpha^3=7/3$, $i_4=3$, $p^4=(1/4, 0, 3/4)$, $\beta^3=4/3$, $j_4=3$, $q^4=(1/2, 0, 1/2)$, $v^3=(\alpha^3+\beta^3)/2=11/6$

**Шаг 5.** $\alpha^4=5/2$, $i_5=2$, $p^5=(1/5, 1/5, 3/5)$, $\beta^4=5/4$, $j_5=3$, $q^5=(1/3, 0, 2/3)$, $v^4=(\alpha^4+\beta^4)/2=1{,}875$

**Шаг 6.** $\alpha^5=8/3$, $i_6=2$, $p^6=(1/6, 2/6, 1/2)$, $\beta^5=8/5$, $j_6=3$, $q^6=(1/4, 0, 3/4)$, $v^5=(\alpha^5+\beta^5)/2=2{,}133$

**Шаг 7.** $\alpha^6=11/4$, $i_7=2$, $p^7=(1/7, 3/7, 3/7)$, $\beta^6=11/6$, $j_7=3$, $q^6=(1/5, 0, 4/5)$, $v^6=(\alpha^6+\beta^6)/2=2{,}291$

**Шаг 8.** $\alpha^7$=14/5, $i_8$=2, $p^8$=(1/8, 1/2, 3/8), $\beta^7$=12/7, $j_8$=2, $q^8$=(1/6, 1/6, 2/3), $v^7$=( $\alpha^7$+ $\beta^7$)/2=2,257.

На дальнейших шагах получаем следующие значения:
$v_8$≈2,02, $v_9$≈1,98,$v_{10}$≈1,875,$v_{11}$≈1,948, $v_{12}$≈2,208.

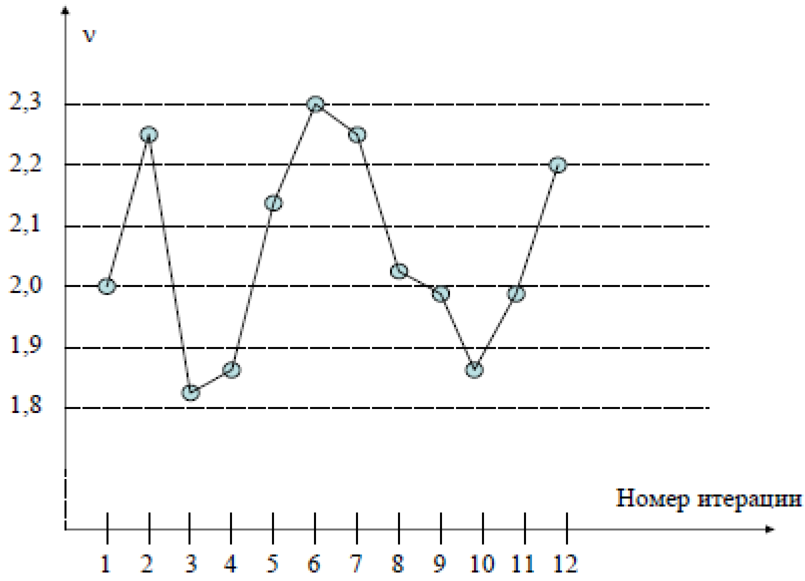


Рис.16. Итерационный процесс

Из рис.16 видно, что процесс не монотонен, поэтому его остановка по критерию $|v^N-v^{N-1}|\le\varepsilon$ не корректна.[6]

## *10.4. Задания к лабораторной работе*

В матричной игре получить приближения цены игры и оптимальных смешанных стратегий, выполнив 20 итераций. Построить график зависимости цены игры от номера итерации. Решение реализовать программно.

**Варианты задания**

| | |
|---|---|
| Вариант 1 $$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$ | Вариант 5 $$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$ |
| Вариант 2 | Вариант 6 |

| | |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ |
| Вариант 3 $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ | Вариант 7 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ |
| Вариант 4 $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 & 11 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ | Вариант 8 $\begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 & -5 \\ 3 & 0 & 6 & -1 \\ 9 & 5 & 10 & -2 \end{bmatrix}$ |

### *Контрольные вопросы*

1. Пояснить основные принципы метода фиктивного розыгрыша Брауна–Робинсона

2. Каковы недостатки метода фиктивного розыгрыша?

3. Какова сложность одной итерации метода?

4. Как рассчитываются частоты стратегий?

## Список литературы

1. Атяскина Т.В. Математические методы: методические указания к лабораторным работам. В 2 ч. /Т.В.Атяскина, Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2015. - Ч.2– 94 с..

2.Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Учеб, пособие для студ. втузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2007.— 208 с. ISBN 5-06-003993-5

3. Г.А. Гадельшина Введение в теорию игр : учебное пособие / Г.А. Гадельшина, А.Е. Упшинская, И.С. Владимирова; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. - Казань : Изд-во КНИТУ, 2014. - 112 с.

4. В. А. Горелик, Т. П. Фомина «Основы исследования операций: Учебное пособие» Москва, МПГУ, 2004 Режим доступа: http://tidm.ru/sites/default/files/gorelik-osnovy-io.pdf (10.02.2017)

5. Демидов, К.В. Теория игр и исследование операций : курс лекций / К. В. Демидов, А. В. Духанов; Федеральное агентство по образованию, Гос. образовательное учреждение высшего проф. образования Владимирский гос. ун-т. - Владимир : Изд-во Владимирского гос. ун-та, 2006.
ISBN 5-89368-677-2

6. Еремина И.И. Исследование операций: Лабораторный практикум. Учебно-методическое пособие для вузов. – Елабуга: ЕГПУ, 2007. – 88 с.: ил.

7. С.М. Окулов, О.А. Пестов. Динамическое программирование. - М. : БИНОМ, 2015. - 299 с

8. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений : учебник / А.И. Орлов. — М. : КНОРУС, 2010. — 568 с.
ISBN 978-5-406-00275-9

9. Писарук Н.Н. Исследование операций – Минск: БГУ, 2015. – 304 с.

10. Л. Н. Посицельская, “Лабораторные работы по дисциплине "Теория игр и исследование операций"”, *Матем. обр.*, 2010, № 2(54), 56–61

11. Поттосина С.А. Экономико-математические модели и методы: Учеб. пособие для студ. экон. спец. БГУИР всех форм обуч. / С.А. Поттосина,
В.А. Журавлев. – Мн.: БГУИР, 2003. – 94 с.
ISBN 985-444-484-8.
12.Л. В. Колобашкина. Основы теории игр: учебное пособие . -М. : БИНОМ, 2014. - 198 с.
13. А.А. Мицель Исследование операций и методы оптимизации в экономике
Методические указания по выполнению лабораторных работ для студентов направления 230700.62 «Прикладная информатика» (бакалавр). – Томск: ТУСУР, 2014 (электр. ресурс). – 62 с.
14. Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. – Нижний новгород :Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2004.- 154с. ISBN 5-85746-761-6