Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Владимирский государственный университет
Кафедра теоретической и прикладной механики

ДИНАМИКА

*Методические указания к курсовым работам
по теоретической механике*

Составители:
А.В. КРЫЛОВ
Л.Ф. МЕТЛИНА
О.В. ФЕДОТОВ

В печать:

авторы	(А.В. Крылов)
	(Л.Ф. Метлина)
	(О.В. Федотов)
зав. кафедрой	(В.В. Козырев)
редактор	(Е.В. Невская)
Начальник РИО	(Е.В. Викулова)
Директор РИК	(Ю.К. Жулев)
Проректор ВлГУ по ИТ	(В.А.Немонтов)

Владимир 2005

УДК 531.3
ББК 22.236
Д 44

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
Владимирского государственного университета
Л.М. Самсонов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Д 44 **Динамика :** метод. указания к курсовым работам по теоретической механике / сост. : А. В. Крылов, Л. Ф. Метлина, О. В. Федотов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2005. – 60 с.

Содержат указания по выполнению курсовой работы студентами заочной формы обучения по теоретической механике, раздел «Динамика».

Цель – научить студентов самостоятельно выполнять курсовые работы. В работе даны задания по основным темам динамики: дифференциальные уравнения движения материальной точки, основные теоремы динамики материальной системы, аналитическая механика.

Для каждого задания рассмотрены примеры.

Очень коротко и ясно представлена теория, которую можно использовать и при подготовке к экзамену.

В конце даны контрольные вопросы.

Предназначены для студентов заочной формы обучения специальностей 072000, 072300, 101200, 120100, 120100уск, 120700, 150200, 210200, 230100, 290300, 233100, 340100, 290700, 1502уск, 290301уск, 290300, 291000.

Табл. 7. Ил. 57. Библиогр.: 3 назв.

УДК 531.3
ББК 22.236

ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа включает в себя пояснительную записку, оформленную на одной стороне листа бумаги стандартного размера А 4. Чертежи выполняются на ватмане формата А 3.

Пояснительная записка должна содержать условие задачи, задание и решение с элементами теории по соответствующему разделу.

Работа подшивается под титульный лист, выполненный на ватмане. Надписи на титульном листе оформляют чертежным шрифтом или на компьютере.

В данных методических указаниях предлагаются варианты курсовой работы по теоретической механике, раздел «Динамика», дана краткая теория, основываясь на которой студенты смогут самостоятельно выполнить предлагаемые задания.

Курсовая работа включает в себя следующие темы раздела «Динамика»: дифференциальные уравнения движения материальной точки, основные теоремы динамики механической системы, принцип Даламбера для механической системы и уравнения Лагранжа.

Динамикой называется раздел теоретической механики, в которой изучается движение материальных точек и тел в зависимости от действующих на них сил и их инерционности.

Основоположником динамики является великий итальянский ученый Г. Галилей (1564 – 1642).

Развитие теоретической механики связано с именами многих ученых: И. Ньютоном (1643 – 1727), Х. Гюйгенсом (1629 – 1695), Ж. Даламбером (1717 – 1783), Ж. Лагранжем (1736 – 1813) и многими другими.

Большой вклад в развитие современной механики внесли русские ученые Н.В. Остроградский (1801 – 1862), Н.Е. Жуковский (1847 – 1920), С.В. Ковалевская (1850 – 1891), А.М. Ляпунов (1851 – 1918), К.Э. Циалковский (1857 – 1935) и др.

Основные законы динамики

1. Закон инерции

Если на материальную точку не действуют никакие силы, то она находится в покое или совершает прямолинейное равномерное движение.

2. Закон пропорциональности силы и ускорения

Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление

$$\overline{F} = m\overline{W}\ .$$

Этот закон в механике называют основным.

3. Закон равенства действия и противодействия

Два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль одной прямой в противоположные стороны.

4. Закон независимости действия сил

Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

Системы отсчета, в которых выполняется первый и второй законы называются **инерциальными**, в противном случае их называют **неинерциальными**.

Третий закон динамики выполняется при рассмотрении движения тел в любых системах отсчета.

1. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах

Основное уравнение динамики имеет вид

$$m\overline{W} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n, \qquad (1.1)$$

где m – масса точки,

$\overline{W}$ – ускорение точки,

$\overline{F}_1, \overline{F}_2, ...\overline{F}_n$ – силы, действующие на точку (учитываются как активные силы, так и реакции связей, если точка несвободная).

Проектируя обе части векторного равенства (1.1) на координатные оси, получим:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum x_i, \\ m\ddot{y} &= y_1 + y_2 + ... + y_n = \sum y_i, \\ m\ddot{z} &= z_1 + z_2 + ... + z_n = \sum z_i. \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Уравнения (1.2) называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки.

Здесь $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции ускорения точки на оси декартовой системы координат; $x_1, x_2, ... x_n; y_1, y_2, ... y_n; z_1, z_2, ... z_n$ – проекции сил на оси декартовой системы координат.

Задачи динамики точки

В динамике точки рассматриваются две основные задачи. Их решение рассмотрим на примере использования декартовой системы координат.

Первая задача динамики

Заданы масса точки m и уравнения ее движения $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$, а требуется определить модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.

Из дифференциальных уравнений (1.2) проекции равнодействующей сил на координатные оси определяются равенствами:

$$R_x = \sum_i^n x_i = m\ddot{x},\ R_y = \sum_i^n y_i = m\ddot{y},\ R_z = \sum_i^n z_i = m\ddot{z}. \tag{1.3}$$

Масса точки m задана, надо знать $\ddot{x}$; $\ddot{y}$; $\ddot{z}$. Для их определения следует взять дважды производные по времени от заданных уравнений движения точки, т.е. решение первой задачи сводится к дифференцированию соответствующих уравнений движения точки.

Затем, зная R_x, R_y, R_z, определяют модуль равнодействующей по формуле $R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2}$ и направление по направляющим косинусам:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R}; \cos\beta = \frac{R_y}{R}; \cos\gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Вторая задача динамики

Зная силы, действующие на материальную точку, ее массу m, а также начальное положение точки и ее начальную скорость, получить уравнение движения точки.

Для решения этой задачи необходимо в левую часть дифференциальных уравнений (1.3) подставить значение массы m, а в правую часть – суммы проекций приложенных сил и полученные уравнения дважды проинтегрировать по времени, а затем, по начальным условиям, определить постоянные интегрирования.

Задание 1

Дано:

Груз D массой m, получив в т. A начальную скорость $\overline{V_A}$ движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; (рис. 1.1…1.10).

На участке AB на груз кроме силы тяжести действует постоянная сила $\overline{Q}$ и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости $\overline{\mathrm{v}}$ груза (направлена против движения).

В т. B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действует сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f = 0{,}1$) и переменная сила $\overline{F}$, проекция которой F_x на ось задана в табл. 1.1.

Принимая груз за материальную точку и зная расстояние $AB = l$ или время t движения груза от точки A до точки B, требуется найти закон движения груза на участке BC, т.е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

Вариант задания выдается преподавателем.

Таблица 1.1

Номер условия	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	R, Н	l, м	t_1, с	F_x, Н	α, град.
0	2	20	6	$0{,}4\mathrm{v}$	-	2,5	$2\sin(4t)$	30
1	2,4	12	6	$0{,}8\mathrm{v}^2$	1,5	-	$6t$	60
2	4,5	24	9	$0{,}5\mathrm{v}$	-	3	$3\sin(2t)$	30
3	6	14	22	$0{,}6\mathrm{v}^2$	5	-	$-3\cos(2t)$	60
4	1,6	18	4	$0{,}4\mathrm{v}$	-	2	$-4\cos(4t)$	30
5	8	10	16	$0{,}5\mathrm{v}^2$	4	-	$-6\sin(2t)$	45
6	1,8	24	5	$0{,}3\mathrm{v}$	-	2	$9t^2$	60
7	4	12	12	$0{,}8\mathrm{v}^2$	2,5	-	$-8\cos(4t)$	60
8	3	22	9	$0{,}5\mathrm{v}$	-	3	$2\cos(2t)$	30
9	48	10	12	$0{,}2\mathrm{v}^2$	4	-	$-6\sin(4t)$	45

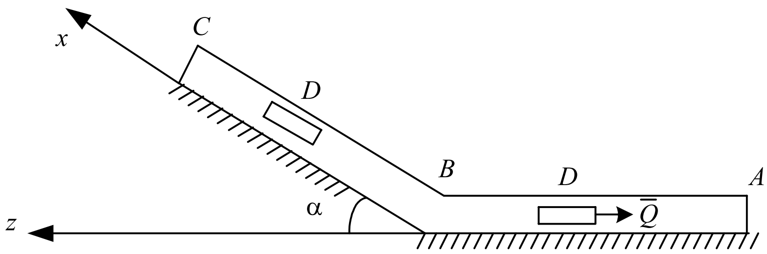


Рис. 1.1. Схема 0

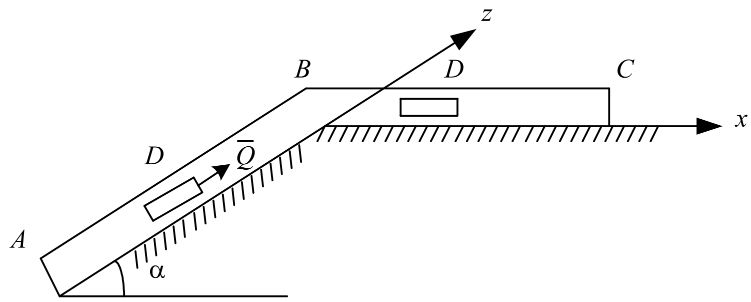


Рис. 1.2. Схема 1

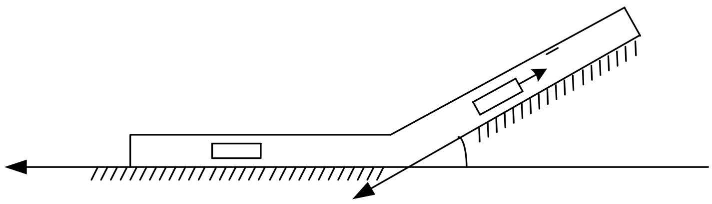


Рис. 1.3. Схема 2

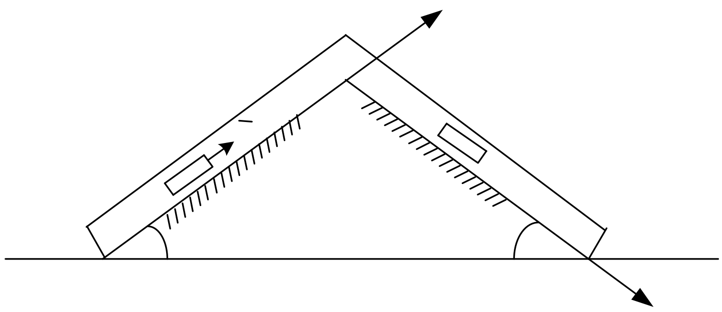


Рис. 1.4. Схема 3

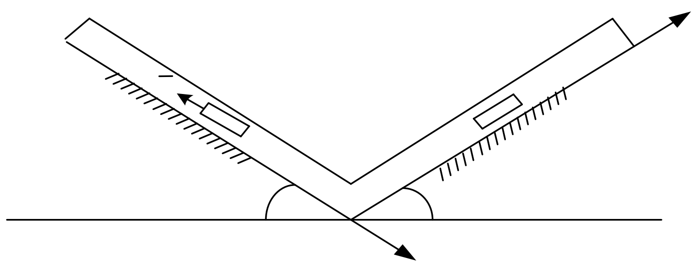


Рис. 1.5. Схема 4

C D B

x

z

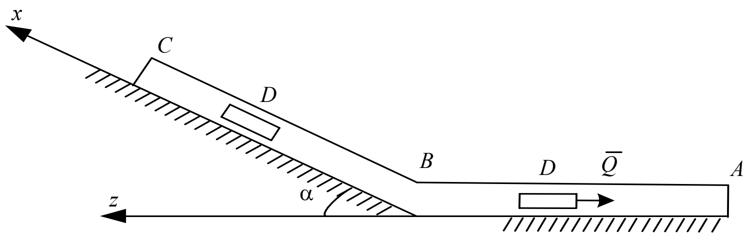


Рис. 1.6. Схема 5

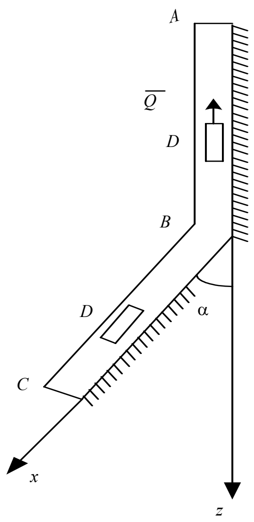


Рис. 1.7. Схема 6

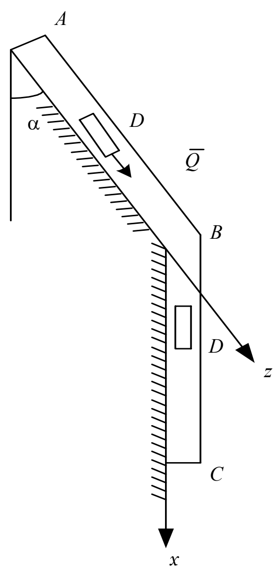


Рис. 1.8. Схема 7

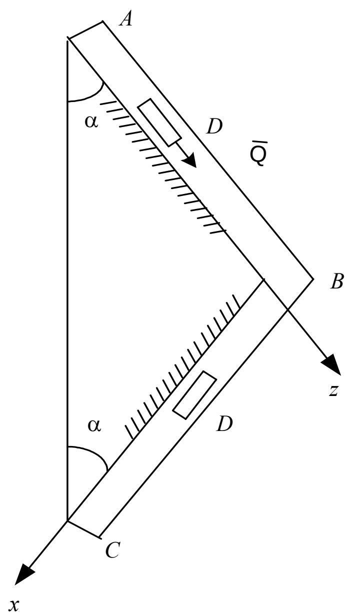


Рис. 1.9. Схема 8

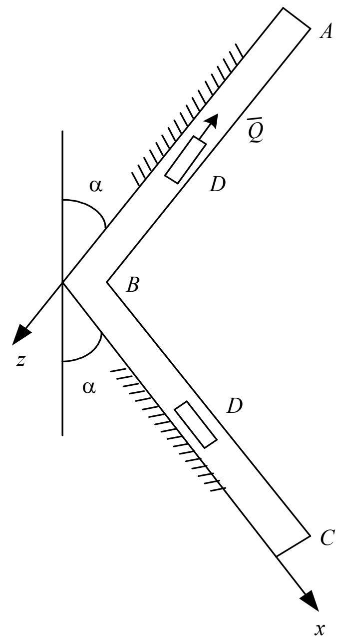


Рис. 1.10. Схема 9

Пример выполнения задания 1

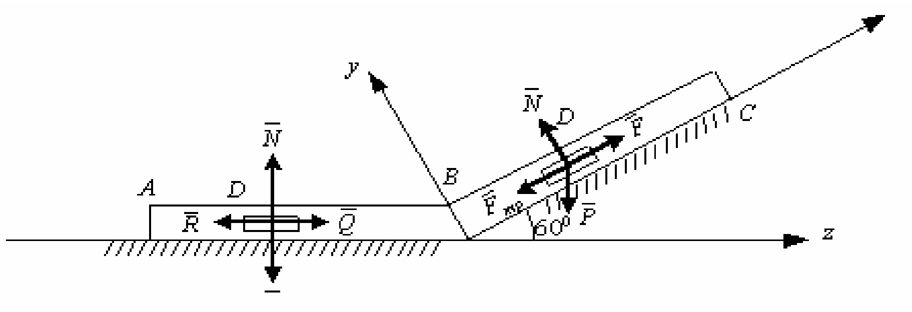


Рис. 1.11.

На участке AB трубы (рис. 1.11) на груз D массой m действует сила тяжести и сила сопротивления $\overline{R}$; время движения точки на участке AB равно t. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в Ньютонах.

Дано: m = 2 кг, Q=10 Н $R = \mu v$, μ = 0,4 кг/м, v_0 = 5 м/с, l = 2,5 м, $F_x = 6t^2$, f = 0,1.

Определить: Закон движения груза D на участке BC $x = f(t)$.

Решение.

Рассмотрим движение груза на участке AB с целью определения скорости груза в точке B, которая будет начальной для участка BC.

Строим расчетную схему. Для этого на рисунке показываем ось z, направленную вдоль отрезка AB. Начало оси совмещаем с начальным положением точки, т.е. с точкой A. Материальную точку (груз) изображаем в промежуточном положении так, чтобы координаты ее положения были положительными.

Показываем силы, действующие на точку: активные (заданные), силы $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$ и нормальную составляющую реакцию трубки $\overline{N}$ (трение отсутствует).

Проектируем основной закон динамики на ось z, получаем дифференциальное уравнение движения точки вдоль этой оси.

$$m\ddot{z} = \sum z_i = Q - R = Q - \mu\dot{z},$$

$$\text{или} \quad \ddot{z} = \frac{Q}{m} - \frac{\mu}{m}\dot{z} = a - b\dot{z},. \qquad (1.4)$$

$$\text{где } a = \frac{Q}{m} = 5, \; b = \frac{\mu}{m} = 0{,}2.$$

Заменив в уравнении (1.4) $\ddot{z}$ на $\dfrac{d\dot{z}}{dt}$ и разделив переменные, получим $\dfrac{d\dot{z}}{a - b\dot{z}} = dt$.

После интегрирования имеем

$$-\frac{1}{b}\ln\left|a-b\dot{z}\right|=t+c_1 \qquad (1.5)$$

При t=0 $\dot{z}=V_0$ и постоянная интегрирования $C_1=-\frac{1}{b}\ln\left|a-bV_0\right|$

После подстановки c_1 в уравнение (1.5), получаем

$$t=-\frac{1}{b}\ln\left|\frac{a-b\dot{z}}{a-bV_0}\right| .$$

Откуда $\dot{z}=\frac{a}{b}-\frac{a-bV_0}{b}e^{-bt}$.

Подставив числовые значения, получаем $\dot{z}=25-20e^{-0,2t}$. При t=0 $\dot{z}=V_B=25-20e^{-0,2}=8,62$ м/с.

Теперь рассмотрим движение груза на участке *BC*.

Составим дифференциальные уравнения в проекциях на оси *x* и *y*.

$$m\ddot{x}=F_x;\quad m\ddot{x}=F-F_{\text{тр}}-P\cos 30^0; \qquad (1.6)$$

$$m\ddot{y}=F_y;\quad m\ddot{y}=N-P\cos 60^0. \qquad (1.7)$$

Учитывая, что вектор ускорения на ось *y* проектируется в точку, то $\ddot{y}=0$ и тогда из уравнения (1.7) получим

$0=N-P\cos 60$, $N=P\cos 60=9,8$ Н;

и сила трения $F_{\text{тр}}=fN$; $F_{\text{тр}}=0,1\cdot 0,98=0,98$ Н.

Подставляя числовые значения в дифференциальное уравнение (1.6), получаем

$$m\ddot{x}=6t^2-0,98-mg\cos 30^0;$$

$$\ddot{x}=\frac{6t^2}{m}-\frac{0,98}{m}-\frac{mg\cos 30^0}{m};$$

$$\ddot{x}=3t^2-8,98. \qquad (1.8)$$

Интегрируя дважды уравнение (1.8) получим

$$\dot{x}=t^3-8,98t+C_1; \qquad (1.9)$$

$$x=\frac{t^4}{4}-\frac{8,98t^2}{2}+C_1t+C_2. \qquad (1.10)$$

Найдем постоянные интегрирования. Начальные условия при движении груза на участке *BC*: $\dot{x}_0=\text{v}_B=8,62$ м/с, $x_0=0$. $C_1=\text{v}_B=8,62$; $C_2=0$. Подставив значения этих постоянных в уравнение (1.10) получим закон движения груза *D* на участке *BC*.

$$x=0,25t^4-4,49t^2+8,62t.$$

2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

1. Теорема о движении центра масс механической системы

Под **механической системой** понимается совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны.

Например, движение коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания зависит от движения его поршней; движение планет солнечной системы обусловлено силами их взаимного притяжения и т.д.

При изучении движения механических систем силы разделяют на внешние – F^e и внутренние – F^i.

Внешними называются **силы**, действующие на точки системы со стороны точек, не входящих в состав данной системы. **Внутренними** называются **силы**, с которыми точки рассматриваемой системы действуют друг на друга.

Положение центра масс системы, точки C, определяется равенством

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{M}, \tag{2.1}$$

где m_i – масса отдельной точки системы;

$\bar{r}_i$ – радиус-вектор, определяющий положение этой точки системы;

$\bar{r}_c$ – радиус-вектор, определяющий положение центра масс системы;

$M = \sum m_i$ – масса системы.

Уравнения движения точек системы имеют вид

$$m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^i, \tag{2.2}$$

где нижний индекс $i = 1, 2, \ldots n$;

$\bar{F}_i^e$ – равнодействующая приложенных к точке внешних сил;

$\bar{F}_i^i$ – равнодействующая приложенных к точке внутренних сил.

Суммируя уравнения (2.2), получим

$$\sum m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \sum \bar{F}_i^e + \sum \bar{F}_i^i . \tag{2.3}$$

Геометрическая сумма внутренних сил равна нулю $\sum \bar{F}_i^i = 0$ (свойство внутренних сил), и тогда уравнение (2.3) приобретает вид

$$M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum \bar{F}_i^e = \bar{R}^e .$$

Учитывая, что $\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = \overline{W}_c$, получаем

$$M\overline{W}_c = \overline{R}^e. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) выражает теорему о движении центра масс.

Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил или главному вектору этих сил.

Проецируя (2.4) на оси координат, получим дифференциальные уравнения движения центра масс

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= x^e; \\ M\ddot{y}_c &= y^e; \\ M\ddot{z}_c &= z^e, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где x^e, y^e, z^e – проекции главного вектора сил $\overline{R}^e$ на оси координат.

Следствия из теоремы:

1) если $\overline{R}^e = 0$, то $\overline{W}_c = 0$ и $\bar{\text{v}}_c = \text{const}$;

2) если $x^e = 0$, то $\ddot{x}_c = 0$ и $\dot{x}_c = \text{const}$.

Следствия из теоремы о движении центра масс выражают закон сохранения движения центра масс системы.

2. Теорема об изменении количества движения механической системы

Количеством движения механической системы называется вектор, равный геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех материальных точек системы.

$$\overline{K} = \sum m_i \bar{\text{v}}_i, \text{ или } \overline{K} = M\,\bar{\text{v}}_c.$$

Вектор количества движения тела имеет направление вектора скорости центра масс этого тела. Согласно (2.4) имеем

$$M\overline{W}_c = \overline{R}^e;\ \overline{W}_c = \frac{d\bar{\text{v}}_c}{dt};\ M\frac{d\bar{\text{v}}_c}{dt} = \overline{R}^e;\ \frac{d\left(M\,\bar{\text{v}}_c\right)}{dt} = \overline{R}^e;\ M\,\bar{\text{v}}_c = \overline{K};$$

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{R}^e. \tag{2.6}$$

Производная по времени от вектора количества движения системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на эту систему.

Уравнение (2.6) представляет собой дифференциальную форму записи теоремы об изменении количества движения системы.

Интегрируя равенство (2.6), получим

$$\int_{\overline{K}_1}^{\overline{K}_2} d\overline{K} = R^e \int_0^t dt; \ \overline{K}_2 - \overline{K}_1 = \int_0^t \overline{R}^e dt;$$

где $\overline{K}_1$ – количество движения системы в начальный момент времени;

$\overline{K}_2$ – количество движения системы в конечный момент времени;

$\int_0^t \overline{R}^e dt = \sum \overline{S}^e$ – геометрическая сумма импульсов внешних сил, приложенных к системе. В окончательном виде уравнение запишется следующим образом:

$$\overline{K}_2 - \overline{K}_1 = \sum \overline{S}^e. \tag{2.7}$$

Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов внешних сил, приложенных к системе за этот промежуток времени.

Уравнение (2.7) называется интегральной формой записи теоремы об изменении количества движения системы.

В проекциях на оси координат уравнение (2.7) имеет вид.

$$K_{2x} - K_{1x} = \sum S_x^e;$$

$$K_{2y} - K_{1y} = \sum S_y^e;$$

$$K_{2z} - K_{1z} = \sum S_z^e.$$

Следствия из теоремы:

1. Если $\overline{R}^e = 0$, то $\overline{K} = \text{const}$;

2. Если $R_x^e = 0$, то $K_x = \text{const}$.

Эти следствия выражают закон сохранения количества движения систем.

3. <u>Теорема об изменении кинетического момента механической системы</u>

Момент количества движения материальной точки относительно центра *O* (рис. 2.1.):

$$\bar{l}_0 = \bar{r} \times m\bar{\text{v}}. \tag{2.8}$$

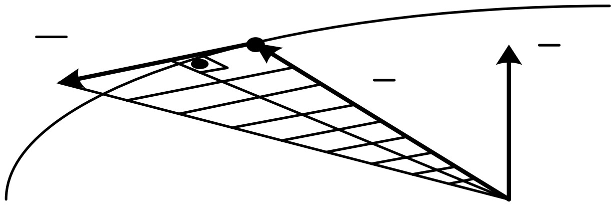


Рис. 2.1

Модуль вектора l_0 равен:

$$l_0 = m\text{v}h,$$

где m – масса точки;

v – скорость точки;

$\bar{r}$ – радиус-вектор, определяющий положение точки M относительно центра O.

$m\text{v}$

h

Момент количества движения точки относительно оси z (рис. 2.2.):

$$l_z = \pm m\text{v}_1 h_1, \tag{2.9}$$

где $(m\text{v}_1)$ – проекция вектора количества движения на плоскость I, перпендикулярно оси z;

h_1 – кратчайшее расстояние от вектора $(m\bar{\text{v}}_1)$ до оси z.

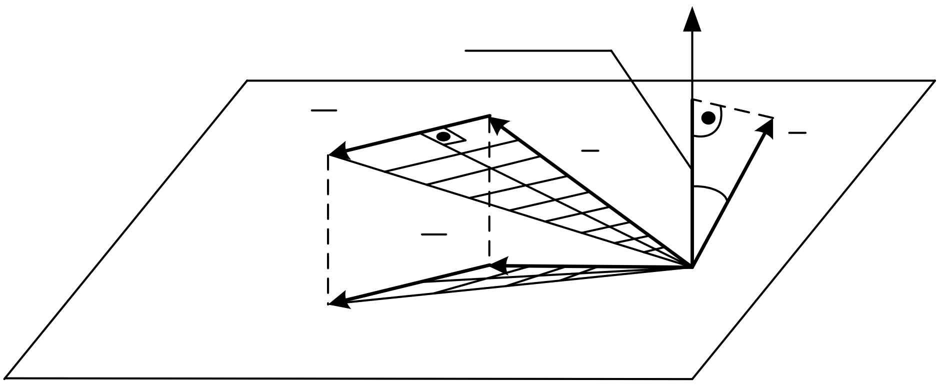


Рис. 2.2

Кинетическим моментом, или главным моментом количеств движения механической системы относительно данного центра называют вектор, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех материальных точек системы относительно этого центра.

$$\bar{L}_0 = \sum \bar{l}_{0i} = \sum \bar{r}_i \times m_i \bar{\text{v}}_i. \tag{2.10}$$

Кинетическим моментом, или главным моментом количеств движения механической системы относительно некоторой оси называется алгебраическая сумма моментов количества движения всех материальных точек системы относительно оси

$$L_z = \sum l_{zi}.$$

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из n материальных точек. Выделим из системы i -ю точку и запишем дифференциальное уравнение ее движения:

$$m_i \frac{d\bar{\mathrm{v}}_i}{dt} = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^i, \text{ или } \frac{d(m_i \bar{\mathrm{v}}_i)}{dt} = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^i, \tag{2.11}$$

где $\bar{F}_i^e$ и $\bar{F}_i^i$ – равнодействующие соответственно внешних и внутренних сил, действующих на i -ю точку.

Положение i-й точки относительно некоторого центра O зададим радиусом-вектором $\bar{r}_i$.

Левую и правую части уравнений (2.11) векторно умножим на $\bar{r}_i$

$$\bar{r}_i \times \frac{d(m_i \bar{\mathrm{v}}_i)}{dt} = \bar{r}_i \times \bar{F}_i^e + \bar{r}_i \times \bar{F}_i^i. \tag{2.12}$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i \bar{\mathrm{v}}_i) = \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i \bar{\mathrm{v}}_i + \bar{r}_i \times \frac{d(m_i \bar{\mathrm{v}}_i)}{dt}, \text{ т.к.}$$

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i \bar{\mathrm{v}}_i = \bar{\mathrm{v}}_i \times m_i \bar{\mathrm{v}}_i = 0 \qquad (\bar{\mathrm{v}}_i \| m_i \bar{\mathrm{v}}_i),$$

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_i^e = \bar{m}_0 \left(F_i^e\right),$$

$$\bar{r}_i \times \bar{F}_i^i = \bar{m}_0 \left(F_i^i\right),$$

где $\bar{m}_0\left(F_i^e\right)$ и $\bar{m}_0\left(F_i^i\right)$ – моменты сил $\bar{F}_i^e$ и $\bar{F}_i^i$ относительно центра O.

Уравнение (2.12) запишем в виде

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i \bar{\mathrm{v}}_i) = \bar{m}_0 \left(F_i^e\right) + \bar{m}_0 \left(F_i^i\right).$$

Запишем аналогичные уравнения для всех других точек системы и просуммируем их

$$\sum_1^n \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i \bar{\mathrm{v}}_i) = \sum_1^n \bar{m}_0\left(F_i^e\right) + \sum_1^n \bar{m}_0\left(F_i^i\right). \tag{2.13}$$

В полученном уравнении:

$$\sum_1^n \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i \bar{\mathrm{v}}_i) = \frac{d}{dt}\sum(\bar{r}_i \times m_i \bar{\mathrm{v}}_i) = \frac{d\bar{L}_0}{dt},$$

$\sum_{1}^{n} m_0\left(F^i\right) = 0,$ т.к. главный момент внутренних сил относительно любого центра и любой оси равен нулю (свойство внутренних сил).

С учетом отмеченных условий уравнение (2.13) запишется в виде

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \sum_{1}^{n} \overline{m}_0\left(\overline{F}_i^e\right) = \overline{M}_0^e. \tag{2.14}$$

Уравнение (2.14) выражает <u>теорему об изменении кинетического момента механической системы.</u>

Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов внешних сил, действующих на эту систему относительно того же центра.

Записывая равенство (2.14) в проекциях на оси координат, получаем

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e; \ \frac{dL_y}{dt} = M_y^e; \ \frac{dL_z}{dt} = M_z^e, \tag{2.15}$$

где L_x, L_y, L_z – кинетические моменты механической системы относительно осей координат;

M_x^e, M_y^e, M_z^e – главные моменты внешних сил относительно этих осей.

Следствия из теоремы:

1) если $\overline{M}_0^e = 0,$ то $\frac{d\overline{L}_0}{dt} = 0$ и $\overline{L}_0 = \text{const}.$

2) если $M_x^e = 0,$ то $\frac{dL_x}{dt} = 0$ и $L_x = \text{const}.$

Следствия из теоремы об изменении кинетического момента механической системы выражают закон сохранения кинетического момента механической системы.

4. <u>Теорема об изменении кинетической энергии механической системы</u>

Кинетическая энергия механической системы определяется как сумма кинетической энергии всех входящих в эту систему материальных точек.

$$T = \sum T_i = \sum \frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2}. \tag{2.16}$$

<u>Кинетическая энергия твердого тела</u>

Формулы, определяющие кинетическую энергию тела при различных видах движения:

1. Поступательное движение.

$$T = \frac{1}{2} M \mathrm{v}^2, \tag{2.17}$$

где M – масса тела; v – его скорость.

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \tag{2.18}$$

где J_z – момент инерции относительно оси вращения;

ω – угловая скорость тела.

3. Плоскопараллельное движение.

$$T = \frac{1}{2} M \mathrm{v}_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \tag{2.19}$$

где v_c – скорость центра масс тела;

J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

В общем случае движения твердого тела кинетическая энергия определяется по формуле

$$T = \frac{1}{2} M \mathrm{v}_c^2 + \frac{1}{2} J_p \omega^2.,$$

где T – кинетическая энергия тела;

v_c – скорость его центра масс;

M – масса тела;

J_p – момент инерции тела относительно мгновенной оси, проходящей через центр масс;

ω – угловая скорость вращения тела относительно мгновенной оси.

Значит: ***кинетическая энергия в общем случае движения твердого тела равна сумме кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс*** (теорема С. Кенига).

Вывод теоремы об изменении кинетической энергии механической системы проводят, используя уравнение теоремы для точки, т.к. она справедлива для любой из точек системы. Если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой m_i, имеющую скорость v_i, то для этой точки имеем

$$d\left(\frac{m_i \mathrm{v}_i^2}{2}\right) = dA_i^e + dA_i^i \ .$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\frac{m_i \mathrm{v}_{i(2)}^2}{2} - \frac{m_i \mathrm{v}_{i(1)}^2}{2} = A_i^e + A_i^i, \qquad (2.20)$$

где нижний индекс $i = 1, 2..., n$;

$\frac{m_i \mathrm{v}_{i(1)}^2}{2}$ – кинетическая энергия точки в начальный момент времени;

$\frac{m_i \mathrm{v}_{i(2)}^2}{2}$ – кинетическая энергия точки в конечный момент времени;

A_i^e – алгебраическая сумма работ внешних сил, действующих на точку на заданном перемещении;

A_i^i – алгебраическая сумма работ внутренних сил на том же перемещении.

Просуммируем левые и правые части уравнений (2.20)

$$\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2}\right)_2 - \left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2}\right)_1 = \sum A_i^e + \sum A_i^i. \qquad (2.21)$$

Введем обозначения

$\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2}\right)_1 = T_1$ – кинетическая энергия системы в начальный момент времени.

$\left(\sum \frac{m_i v_i^2}{2}\right)_2 = T_2$ – кинетическая энергия системы в конечный момент времени.

Тогда равенство (2.21) будет иметь вид

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^e + \sum A_i^i. \qquad (2.22)$$

Изменение кинетической энергии механической системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на материальные точки системы на этом перемещении.

Если $\sum A^i = 0$, то такая система называется неизменяемой. Тогда уравнение (2.22) примет вид

$$T_2 - T_1 = \sum A_i^e.$$

Изменение кинетической энергии твердого тела на некотором перемещении равно сумме работ внешних сил, действующих на тело на этом перемещении.

Работа сил

1. Работа постоянной силы

$$A = \overline{F}\overline{S} = FS\cos\alpha, \tag{2.23}$$

где $\overline{F}$ – постоянная сила;

$\overline{S}$ – вектор перемещения точки приложения силы;

$\alpha = \mathrm{const}$ – угол между векторами $\overline{F}$ и $\overline{S}$ (рис. 2.3).

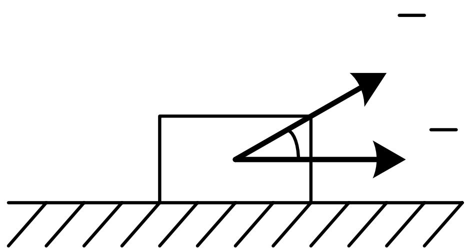


Рис. 2.3

Работа силы есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на перемещение точки приложения силы и на косинус угла между векторами $\overline{F}$ и $\overline{S}$.

2. Если сила не постоянна или угол между силой и перемещением точки приложения силы изменяется, то сначала определяется элементарная работа

$$dA = \overline{F}d\overline{S} = FdS\cos\alpha, \tag{2.24}$$

а затем работа силы на конечном перемещении определяется по формуле

$$A = \int\limits_S dA = \int\limits_S \overline{F}d\overline{S} = \int\limits_S F\cos\alpha dS. \tag{2.25}$$

3. Элементарная работа силы через проекции векторов $\overline{F}$ и $d\overline{S}$ на координатные оси может быть записана в виде

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \tag{2.26}$$

где F_x, F_y, F_z – проекции вектора силы $\overline{F}$ на координатные оси;

dx, dy, dz – проекции вектора $d\overline{S}$ на те же оси.

При определении работы силы на конечном перемещении с помощью формулы (2.26) получим

$$A=\int\limits_S\left(F_x dx+F_y dy+F_z dz\right). \tag{2.27}$$

4. Работа силы при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

$$A=\int\limits_0^{\varphi} M_z d\varphi. \tag{2.28}$$

Если $M_z\left(\overline{F}\right)=\text{const}$, то $A=M_z\varphi$, где M_z – момент силы относительно оси; φ – угол поворота тела. Работа положительна, если направление момента совпадает с направлением углового перемещения тела.

5. Работа силы тяжести:

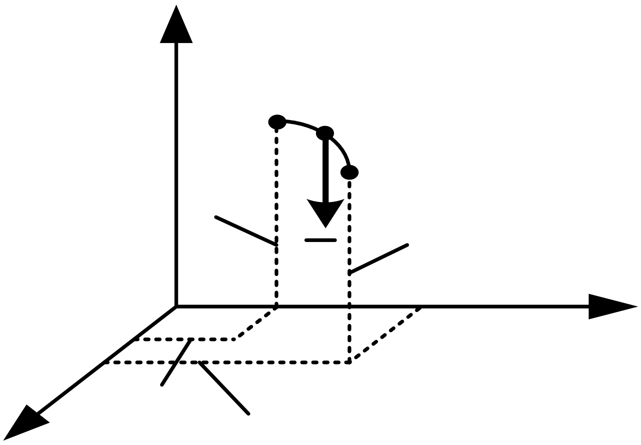


Рис. 2.4

При перемещении т. M на неё действует сила тяжести $\overline{P}$. Вычислим работу этой силы на перемещении M_1M_2 (рис. 2.4).

$$\delta A = xdx + ydy + zdz. \tag{2.29}$$

Проекции силы $\overline{P}$ на оси координат будут $x=0,\; y=0,\; z=-P$, тогда уравнение (2.29) примет вид $\delta A=-Pdz$ и

$$A_{1,2}=-\int\limits_{z_1}^{z_2} Pdz=P(z_1-z_2);\; z_1-z_2=h;\; A_{1,2}=Ph, \tag{2.30}$$

где h – высота, на которую опускается (поднимается) точка приложения силы.

Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, а зависит лишь от высоты, на которую опускается или поднимается точка приложения силы тяжести.

6. Работа силы упругости:

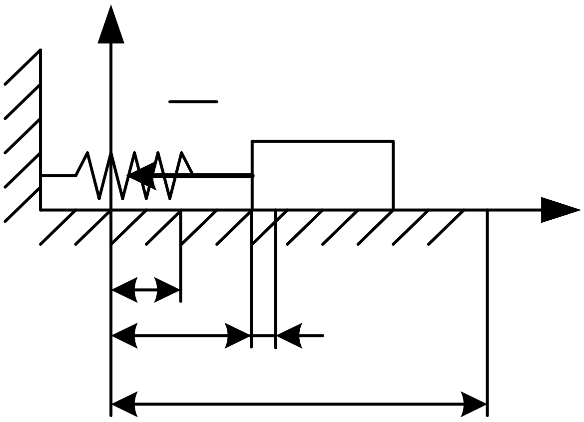


Рис. 2.5

Сила упругости $F_{\text{упр}}$ не постоянна, поэтому сначала определяем элементарную работу на малом перемещении dx:

$$dA = -F_{\text{упр}} dx. \tag{2.31}$$

В промежуточном положении, в котором изображено тело на рис. 2.5, $F_{\text{упр}} = cx$, где c – жесткость пружины, x – ее деформация.

Начало оси x совмещено с положением статического равновесия, поэтому в промежуточном положении пружина растянута на величину $\lambda = x$.

Подставив значение $F_{\text{упр}}$ в (2.31), получаем $dA = -cxdx$.

Работу силы упругости на конечном перемещении определим по формуле

$$A = -c\int_{x_1}^{x_2} xdx = -\frac{c}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right), \text{ или } A = -\frac{c}{2}\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right), \tag{2.32}$$

где $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2$ – деформация пружины в начальном и конечном положениях тела (системы).

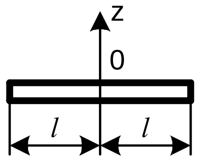
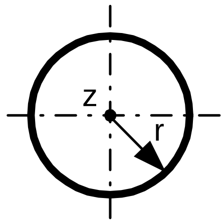
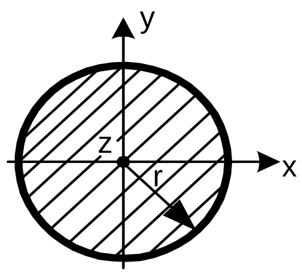
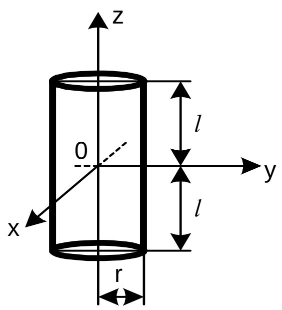
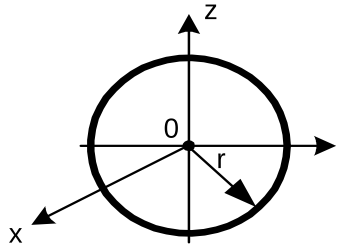
Если в начальном положении деформация пружины равна нулю, т.е. $\lambda_1 = 0$, то формула (2.32) принимает вид

$$A = -\frac{c}{2}\lambda_2^2 = -\frac{c}{2}\lambda^2. \tag{2.33}$$

7. Для твердого тела сумма работ внутренних сил равна нулю при любом его перемещении $\sum dA_i^i = 0$.

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел приведены в табл. 2.1. (рис. 2.6 – 2.10).

Таблица 2.1

№ п/п	Наименование тела	Схема тела	Момент инерции
1	Тонкий прямолинейный стержень	 Рис. 2.6	$J_z = \frac{Ml^2}{3}$
2	Кольцо, полый цилиндр	 Рис. 2.7	$J_z = Mr^2$
3	Тонкий круглый диск	 Рис. 2.8	$J_x = J_y = \frac{Mr^2}{4}$ $J_z = \frac{Mr^2}{2}$
4	Круглый цилиндр	 Рис. 2.9	$J_x = J_y = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$ $J_z = \frac{Mr^2}{2}$
5	Шар	 Рис. 2.10	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}Mr^2$

Если задан радиус инерции твердого тела, то момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, определяется по формуле $J_c = M\rho^2$, где M – масса тела, ρ – радиус инерции.

Задание 2

Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система состоит из катков (или катка и неподвижного блока) 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусом ступеней R_3= 0,3 м, r_3= 0,1 м и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3= 0,2 м, блока 4 радиуса R_4= 0,2 м и грузов 5 и 6; тела 1 и 2 считать сплошными однородными цилиндрами, а массу блока 4 – равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1. Тела системы соединены друг с другом нерастяжимой нитью. Участки нитей параллельны соответствующим плоскостям (рис. 2.11…2.20).

Под действием силы $F = f(S)$, зависящей от перемещения S точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение S станет равным $S_1 = 0{,}2$ м. Искомая величина указана в столбце «Найти» табл. 2.2, где обозначено: ω_3 – угловая скорость тела 3; ε_4 – угловое ускорение тела 4; v_5 – скорость центра масс тела 5; W_2 – ускорение центра масс тела 2 и т.п.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями, катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках можно не изображать груз, если по условию его масса равна нулю.

Вариант задания (номер схемы, исходные данные из табл. 2.2) выдается преподавателем.

Таблица 2.2

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	m_6, кг	M, Нм	$F = f(S)$, Н	Найти
0	2	0	4	0	6	0	1,2	$80(3+4S)$	v_1
1	0	2	0	6	0	4	0,6	$20(6+5S)$	W_6
2	6	0	0	2	4	0	1,8	$60(4+S)$	ω_1
3	0	4	6	0	0	2	0,3	$40(3+8S)$	ε_3
4	4	0	0	2	0	6	1,5	$50(5+2S)$	v_6
5	2	0	4	0	0	6	0,9	$30(4+2S)$	W_1
6	0	4	0	6	2	0	2,4	$60(2+5S)$	v_5
7	6	0	0	4	0	2	0,3	$80(1+4S)$	ε_4
8	0	6	2	0	4	0	1,2	$20(8+2S)$	ω_3
9	0	2	0	4	6	0	0,6	$40(3+2S)$	W_2

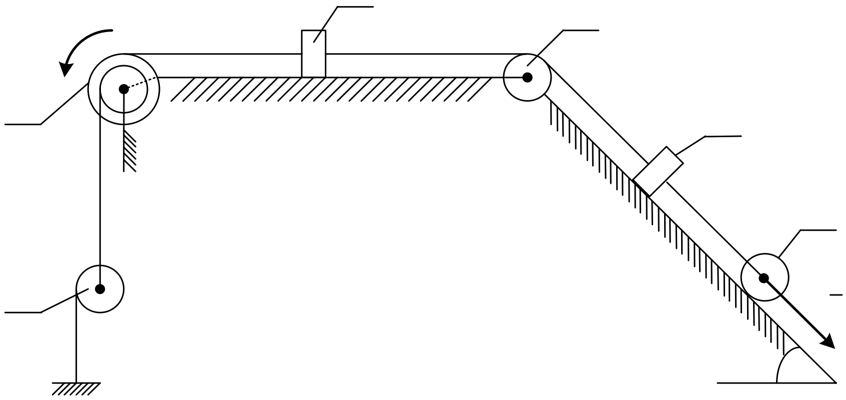


Рис. 2.11. Схема 0

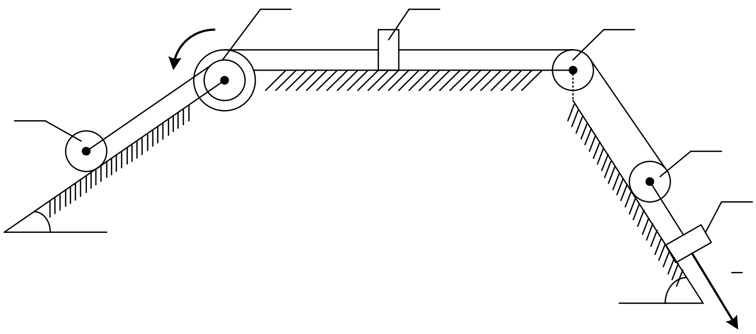


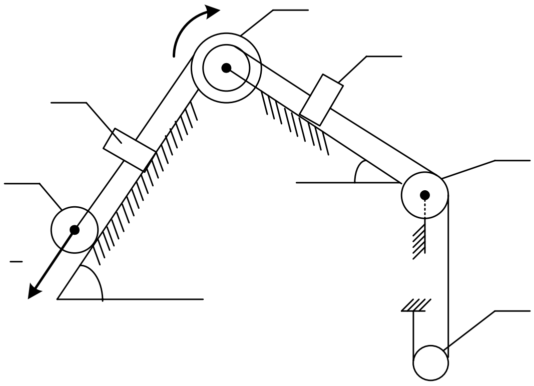
Рис. 2.12. Схема 1

5

M

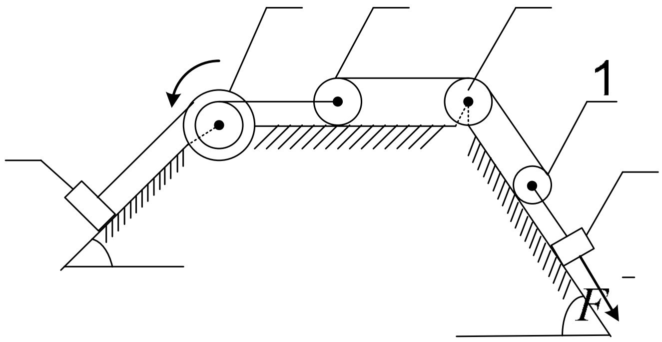
3

M 3



5

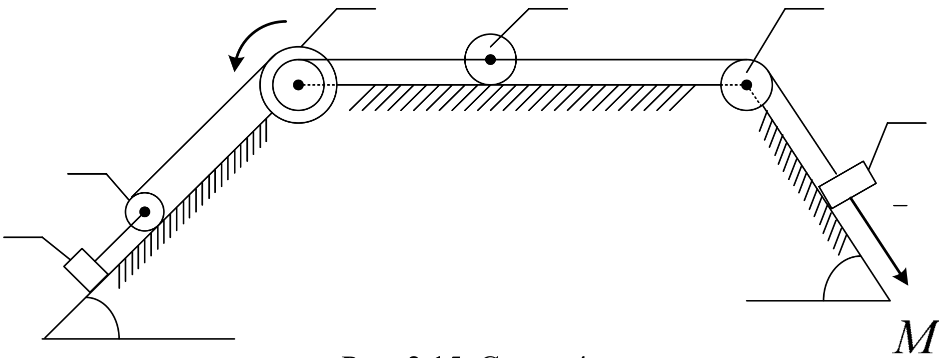
Рис. 2.13. Схема 2



60^0

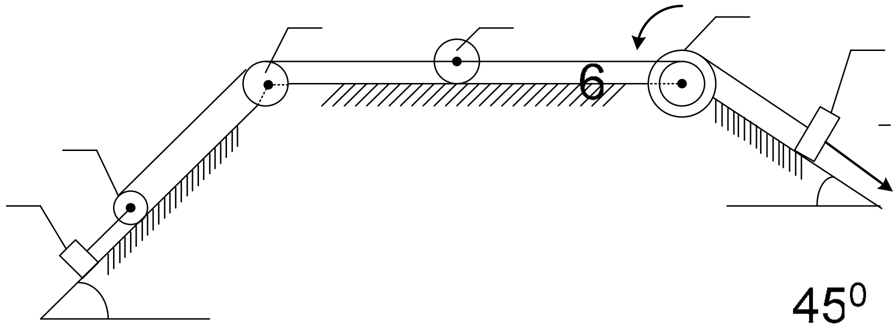
Рис. 2.14. Схема 3

3



M

Рис. 2.15. Схема 4



45^0

Рис. 2.16. Схема 5

3

M

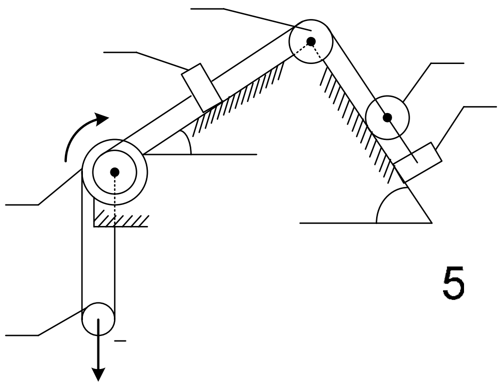


Рис. 2.17. Схема 6

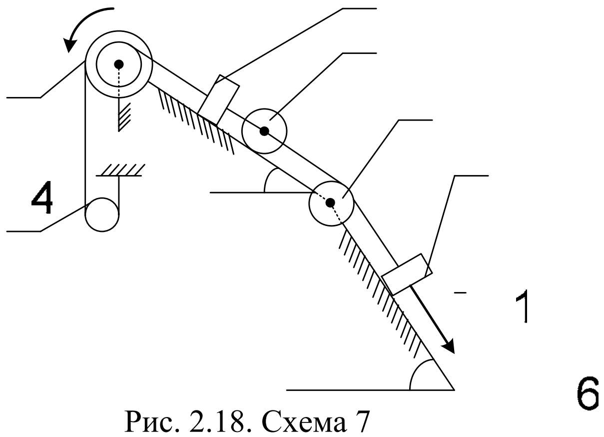


Рис. 2.18. Схема 7

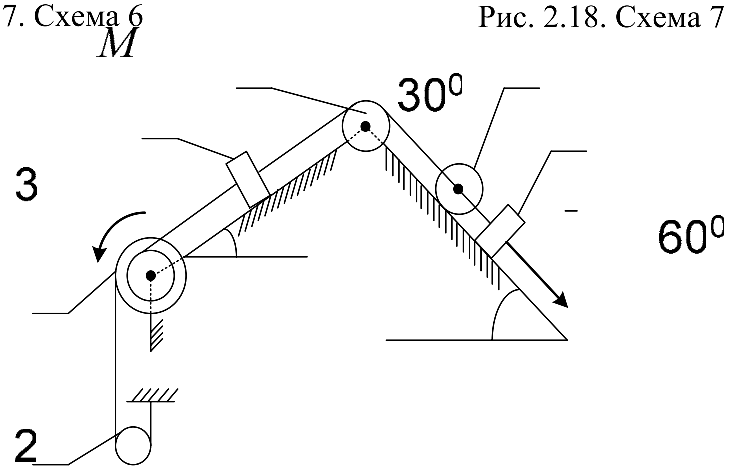


Рис. 2.19. Схема 8

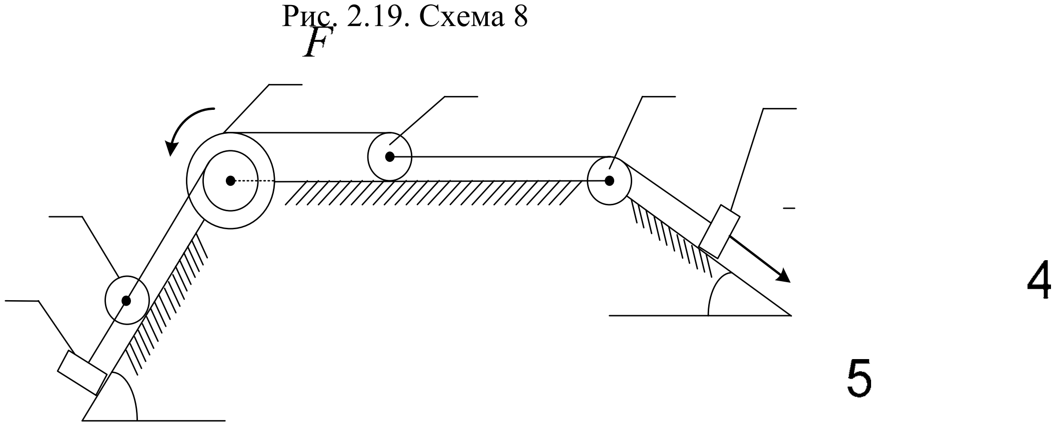


Рис. 2.20. Схема 9

Пример выполнения задания 2

Дано: m_1 = 3 кг; m_2 = 1 кг; m_3 = 2 кг; $F = 10(2+S)$ Н; S = 0,1 м; f = 0,1; ρ_3 = 0,1 м; M = 1,2 Нм; $R_2 = R_3$ = 0,4 м; $r_3 = \frac{1}{2}R_3$.

Каток 2 сплошной, однородный.

Определить: v_1 – скорость тела 1 (рис. 2.21).

Решение

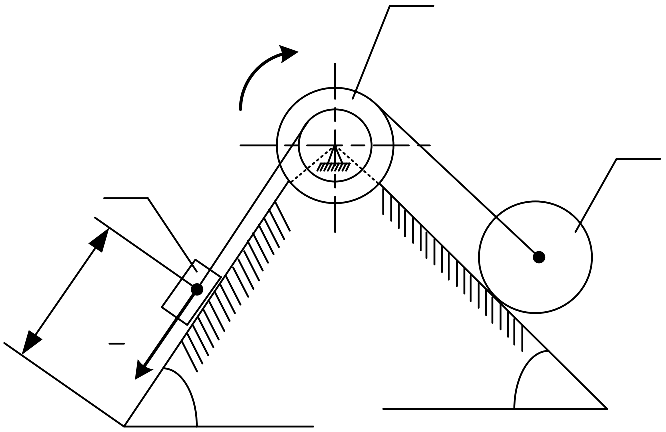


Рис. 2.21

Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum_1^n A_i^e + \sum_1^n A_i^i \qquad (2.34)$$

где T_0 и T – кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях;

$\sum\limits_1^n A_i^e$ – сумма работ внешних сил, приложенных к системе;

$\sum\limits_1^n A_i^i$ – сумма работ внутренних сил. Данная система неизменяемая и $\sum\limits_1^n A_i^i = 0.$

Так как вначале система находится в состоянии покоя, то $T_0 = 0,$ и уравнение (2.34) примем вид

$$T = \sum_1^n A_i^e. \qquad (2.35)$$

Найдем кинетическую энергию системы T в конечном ее положении.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы равна сумме кинетических энергий тел 1, 2, 3.

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2.36)$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$T_1 = \frac{m_1 \mathrm{v}_1^2}{2}.$$

Кинетическая энергия ступенчатого блока 3, вращающегося вокруг неподвижной оси,

$$T_3 = \frac{J_z \omega_3^2}{2},$$

где J_z – момент инерции блока относительно оси вращения; $J_z = m_3 \rho_3^2$; ω_3 – угловая скорость барабанов.

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega_2^2}{2},$$

где v_c – скорость центра масс C катка;

J_c – момент инерции катка относительно его центральной оси;

$$J_C = \frac{m_2 R_2^2}{2};$$

ω_2 – угловая скорость катка.

Выразим скорость v_c, угловые скорости ω_2, ω_3 через скорость груза 1 (рис. 2.22).

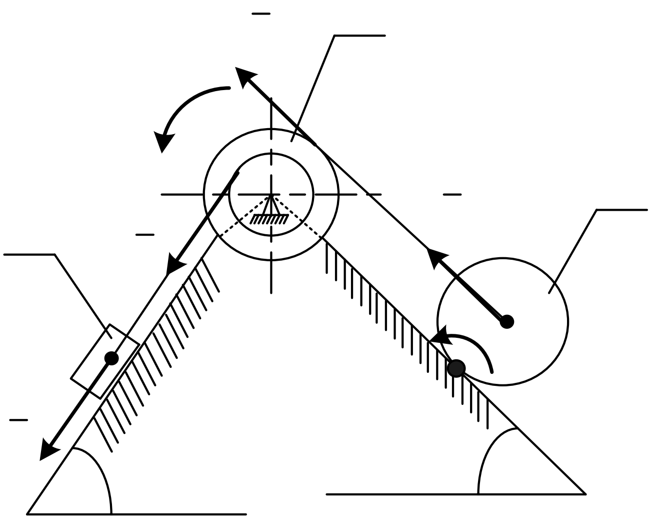


Рис. 2.22

Скорость точек обода ступенчатого блока равна скорости движения сходящей с барабана нити (нить не растяжима). Следовательно, $\omega_3 = \dfrac{v_1}{r_B}$;

$v_c = \omega_3 R_3$; $v_c = \dfrac{v_1 R_3}{r_3}$.

Так как каток 2 катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей катка C_v находится в точке соприкосновения его с неподвижной поверхностью. Поэтому $\omega_2 = \dfrac{\mathrm{v}_c}{CC_\mathrm{v}} = \dfrac{\mathrm{v}_c}{R_2}$; $\omega_2 = \dfrac{\mathrm{v}_1 R_3}{r_3 R_2}$.

При подстановке найденных зависимостей в уравнения кинетических энергий тел получим:

$$T_3 = \frac{m_3 \rho_3^2 \mathrm{v}_1^2}{2 r_3^2} = \frac{2 \times 0{,}1^2}{2 \times 0{,}2^2} \mathrm{v}_1^2 = 0{,}25 \mathrm{v}_1^2;$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \times \frac{\mathrm{v}_1^2 R_3^2}{r_3^2} + \frac{m_2}{2} \times \frac{R_2^2}{2} \times \frac{\mathrm{v}_1^2 R_3^2}{r_3^2 R_2^2} = \frac{3}{4} m_3 \frac{\mathrm{v}_1^2 R_B^2}{r_B^2} = \frac{3}{4} \times 1 \times \frac{0{,}4^2}{0{,}2^2} \mathrm{v}_1^2 = 3 \mathrm{v}_1^2;$$

$$T_1 = \frac{m_1 \mathrm{v}_1^2}{2} = \frac{3}{2} \mathrm{v}_1^2 = 1{,}5 \mathrm{v}_1^2;$$

$$T = 1{,}5 \mathrm{v}_1^2 + 0{,}25 \mathrm{v}_1^2 + 3 \mathrm{v}_1^2 = 4{,}75 \mathrm{v}_1^2.$$

Найдем сумму работ всех сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении (рис. 2.23).

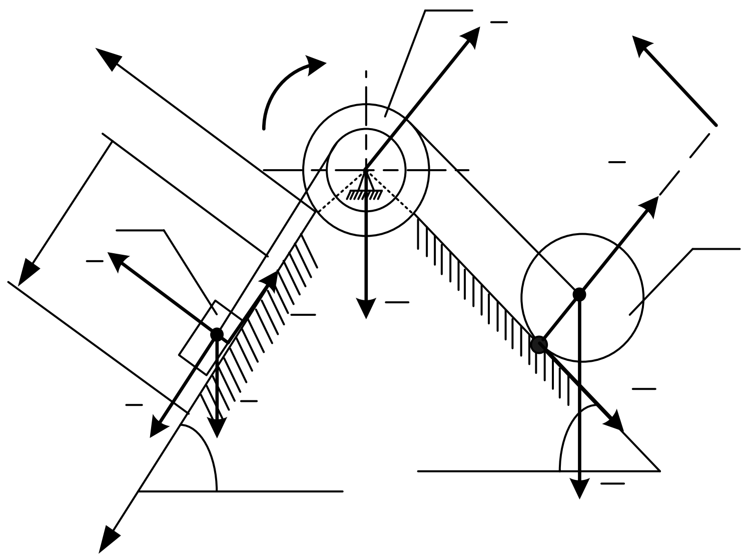


Рис. 2.23

На груз 1 действуют силы: вес $\overline{P_1}$; нормальная реакция $\overline{N_1}$; сила трения $\overline{F_{\text{тр}}}$, направленная противоположно скорости груза 1; сила $\overline{F}$.

Силами, действующими на ступенчатый блок 3, являются: вес $\overline{P_3}$; реакция подшипников в точке *0* – $\overline{N_3}$ и момент сил сопротивления *M*.

К катку 2 приложены силы: вес катка $\overline{P_2}$; сила сцепления $\overline{F_{\text{сц}}}$, препятствующая скольжению катка; нормальная реакция $\overline{N_2}$.

Работа силы P_1:

$$A(P_1) = m_1 g S_1 \sin 60^\circ.$$

Работа силы F:

$$A(F) = \int_0^{S_1} 10(2 + S)dS = 20S_1 + 5S_1^2.$$

Работа силы $F_{\text{тр}}$:

$$A(F_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}} S_1;\ F_{\text{тр}} = fN_1.$$

Для определения N_1 составим дифференциальное уравнение движения груза 1 в проекции на ось y: $m_1 \ddot{y} = N_1 - P_1 \cos 60^\circ$; учитывая, что проекция ускорения груза 1 $\ddot{y} = 0$, получим:

$$0 = N_1 - P_1 \cos 60^\circ; \quad N_1 = F_1 \cos 60^\circ = m_1 g \cos 60^\circ,$$

тогда

$$F_{\text{тр}} = fmg \cos 60^\circ \text{ и } A(F_{\text{тр}}) = -fm_1 g S_1 \cos 60^\circ.$$

Работа пары сил *M:*

$$A(M) = -M\varphi_3,$$

где φ_3 – угловое перемещение ступенчатого блока 3. Выразим угол поворота φ_3 через перемещение груза 1 S_1.

Интегрируя $\omega_3 = \dfrac{v_1}{r_3}$, получим $\varphi_3 = \dfrac{S_1}{r_3}$, тогда

$$A(M) = -M\frac{S_1}{r_3}.$$

Работа силы тяжести катка *D:*

$$A(P_2) = -P_2 S_2 \sin 45^\circ.$$

Перемещение S_2 выразим через перемещение S_1. Скорость центра C катка 2 равна $v_C = \dfrac{v_1 R_3}{r_3}$, интегрируя эту формулу, получим

$$S_2 = \frac{S_1 R_3}{r_3};$$

$$A(P_2) = -m_2 g \frac{R_3}{r_3} \sin 45°.$$

Сумма работ всех сил, приложенных к рассматриваемой системе,

$$\sum_1^n A_i^e = A(P_1) + A(F) + A(F_{\text{тр}}) + A(M) + A(P_2) \ ,$$

$$\sum_1^n A_i^e = 0{,}256 + 2{,}05 - 0{,}147 - 0{,}6 - 1{,}386 = 0{,}173 \text{ Дж}.$$

Остальные силы работу не совершают.

$A(N_1) = 0,$ т.к. угол между силой N_1 и перемещением точки ее приложения равен 90°, а $\cos\ 90° = 0$.

$A(P_3) = 0;$ $A(N_3) = 0,$ т.к. они приложены к неподвижной точке.

$A(N_Q) = 0,$ $A(F_{\text{сц}}) = 0,$ т.к. эти силы приложены к мгновенному центру скоростей.

Приравнивая значения T и $\sum_1^n A_i$, получим:

$$4{,}75 \mathrm{v}_1^2 = 0{,}173,$$

откуда

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{\frac{0{,}173}{4{,}75}} = 0{,}19 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\mathrm{v}_1 = 0{,}19$ м/с.

Задание 3

Применение теоремы о движении центра масс к исследованию движения механической системы

Тела 2 и 4 (рис. 2.24…2.31) движутся (вращаются) по отношению к телу 1 с помощью механизмов, установленных на этом теле. Блок 3 вращается по закону $\varphi = f(t)$. Учитывая, что блок и катки сплошные однородные цилиндры и предполагая горизонтальную плоскость гладкой, определить закон движения призмы. При $t = 0$ система находилась в покое.

Качение тел происходит без проскальзывания; нити невесомы и нерастяжимы, трением скольжения тел 2 по плоскостям пренебречь.

Необходимые для решения исходные данные приведены в табл. № 2.3 и на рис. 2.24…2.33. Вариант задания выдаётся преподавателем.

Указания к работе.

Если $\sum F_{ix}^{e} = 0$ и в начальный момент $\mathrm{v}_{cx} = 0$, то при движении системы $x_c = \mathrm{const}$. Пусть для определенности система состоит из трёх тел с массами m_1, m_2, m_3 с начальными координатами их центров масс x_1, x_2, x_3. Если под действием сил тела совершат абсолютные перемещения, проекции которых на ось ox будут Δx_1, Δx_2, Δx_3, то соответствующие координаты станут равны $x_1 + \Delta x_1$, $x_2 + \Delta x_2$, $x_3 + \Delta x_3$. Тогда учитывая, что $x_c = \mathrm{const}$, получим

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = m_1 \left(x_1 + \Delta x_1\right) + m_2 \left(x_2 + \Delta x_2\right) + m_3 \left(x_3 + \Delta x_3\right),$$

или $m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 = 0$.

В общем виде это условие можно записать:

$$\sum_{1}^{n} m_i \Delta x_i = 0,$$

где m_i – масса центра масс i-го тела;

Δx_i – абсолютное перемещение центра масс i-го тела вдоль оси ox.

Вариант задания (номер схемы, исходные данные из табл. 2.3.) выдается преподавателем.

Таблица № 2.3

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	α^o	β^o	$\varphi = f(t)$, рад
0	$6m$	$2m$	m	$2m$	60	30	$0{,}3t^2$
1	$5m$	m	m	$2m$	60	45	$0{,}3t^3$
2	$4m$	m	m	$2m$	30	60	$0{,}5t^2$
3	$8m$	$3m$	m	$2m$	45	45	$0{,}6t^2$
4	$9m$	$4m$	m	$2m$	30	45	$0{,}9t^3$
5	$6m$	$2m$	m	$2m$	60	45	$0{,}3t^4$
6	$5m$	m	m	$2m$	45	30	$0{,}2t^3$
7	$8m$	$3m$	m	$2m$	30	60	$0{,}8t^2$
8	$10m$	$5m$	m	$2m$	60	30	$0{,}9t^2$
9	$9m$	$2m$	m	$2m$	45	45	$0{,}1t^3$

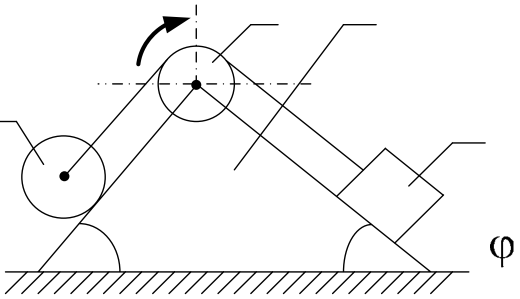


Рис. 2.24. Схема 0

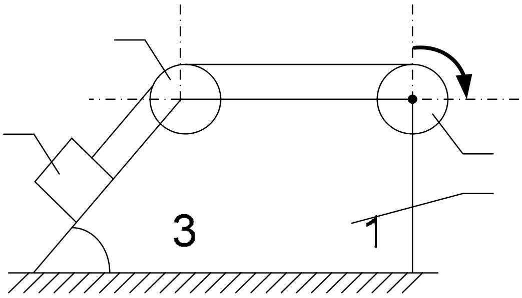


Рис. 2.25. Схема 1

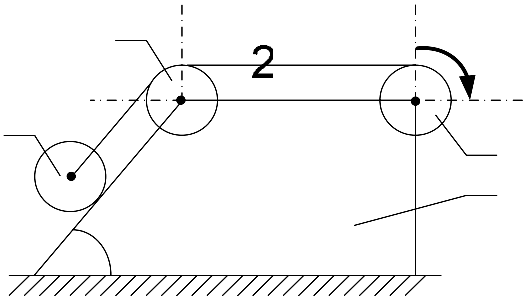
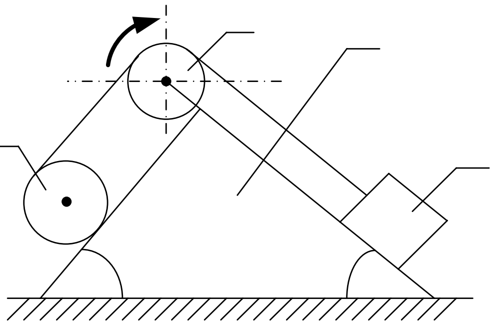


Рис. 2.26. Схема 2

α



4

Рис. 2.27. Схема 3

β

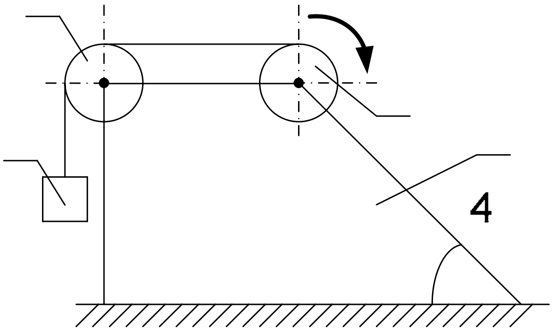


Рис. 2.28. Схема 4

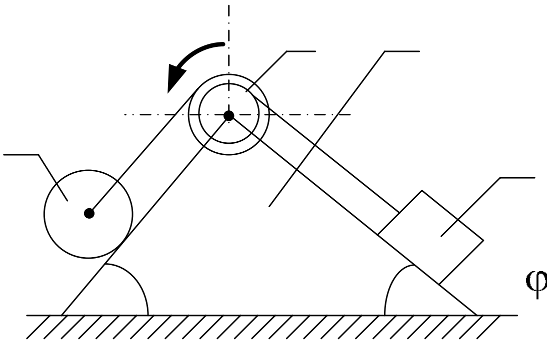


Рис. 2.29. Схема 5

2

3

1

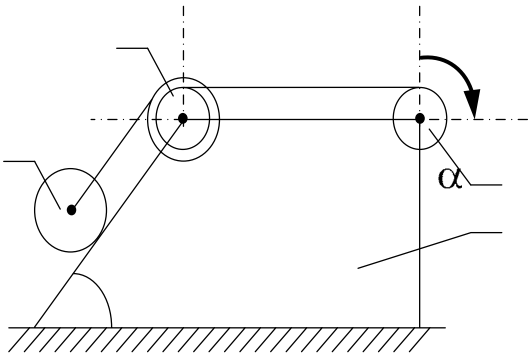


Рис. 2.30. Схема 6

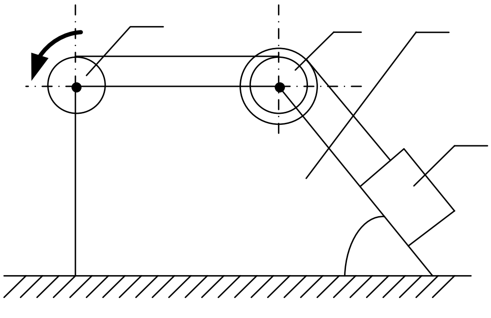


Рис. 2.31. Схема 7

2

φ

3

4

1

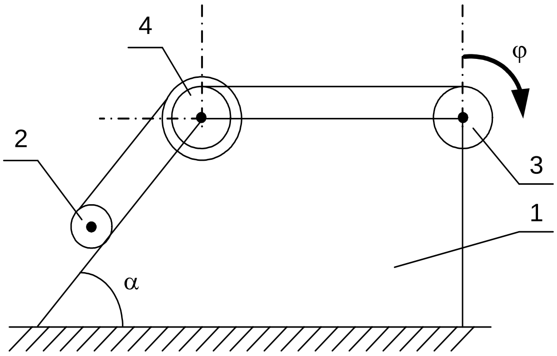


Рис. 2.32. Схема 8

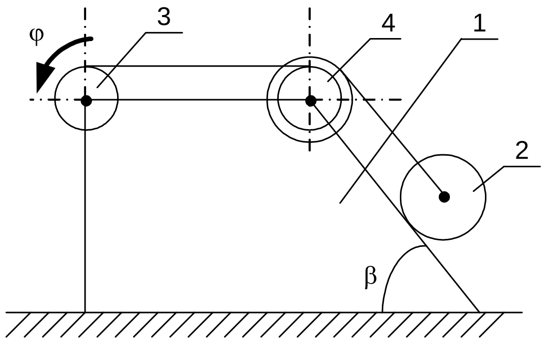


Рис. 2.33. Схема 9

Пример выполнения задания 3

Дано:

$m_1 = 6m;\ m_2 = 2m;\ m_3 = m_4 = m;\ r_3 = r;\ \alpha = 60^\circ.$

Закон движения тела 3 осуществляется согласно зависимости $\varphi(t) = 0{,}5t^2$.

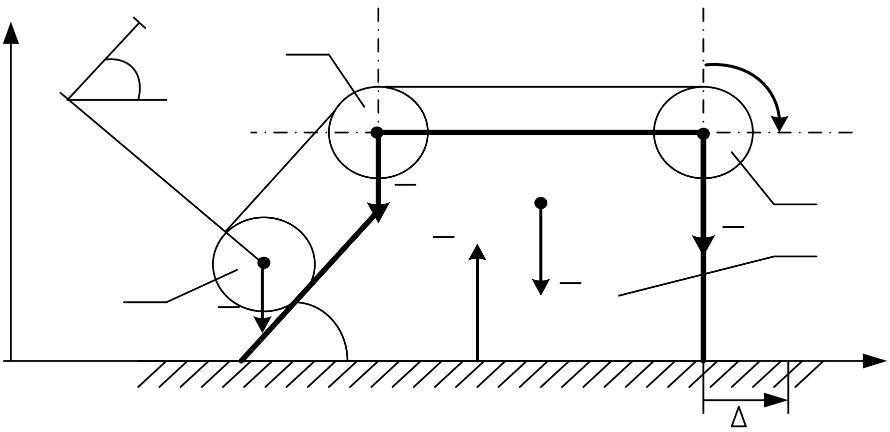


Рис. 2.34

Найти: перемещение призмы 1 по идеально гладкой плоскости (Δx_1) (рис. 2.34). В начальный момент система находилась в покое.

Решение.

Изобразим все внешние силы, приложенные к материальной системе. Внешними силами являются: P_1 – вес призмы, P_2 – вес катка, P_3 – вес блока 3, P_4 – вес блока 4, N – суммарная нормальная сила реакции горизонтальной плоскости.

Выберем направление осей координат, ось ox направим по горизонтали направо и запишем теорему о движении центра масс системы материальных точек в проекции на ось ox.

$$M\ddot{x}_c = \sum_1^n F_{ix}^e .$$

Так как внешние силы перпендикулярны к оси *x*, то $\sum_{1}^{n} F_{ix}^{e} = 0$.

Тогда $M\ddot{x}_c = 0$ и $M\dot{x}_c = C_1$.

В начальный момент времени система находилась покое, поэтому $C_1 = 0$ и $M\dot{x}_c = 0$. Отсюда следует, что $Mx_c = C_2 \to \text{const}$, т. е. абсцисса центра масс системы независимо от перемещений отдельных масс, входящих в систему, остаётся постоянной.

При этом имеет место следующее равенство

$$\sum m_i \Delta x_i = 0,$$

где m_i – масса *i*-ой точки или тела системы;

Δx_i – абсолютное перемещение *i*-й точки или центра масс тела вдоль оси *ox*.

Система состоит из четырёх тел, поэтому

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + m_4 \Delta x_4 = 0. \qquad (2.37)$$

Будем считать, что абсолютное перемещение призмы Δx_1 направлено вправо, куда направлена ось *ox*. Определим абсолютные перемещения других тел, выражая их через Δx_1

$$\Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_1,$$

т. к. центры масс этих тел закреплены на призме.

При определении абсолютного перемещения центра масс тела 2 его движение представим как сложное, состоящее из движения вместе с призмой и качения по призме.

Абсолютное перемещение центра масс тела 2 представим в виде

$$\Delta x_2 = \Delta x_2^e + \Delta x_2^r,$$

где $\Delta x_2^e = \Delta x_1$ – перемещение центра масс тела вместе с призмой (переносное перемещение);

Δx_2^r – перемещение центра масс тела вдоль оси *ox* за счёт качения его по призме (относительное перемещение).

Это перемещение

$$\Delta x_2^r = S_2 \cos\alpha = \varphi r_3 \cos\alpha = 0{,}5t^2 r \cos 60^o.$$

Тогда абсолютное перемещение

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + 0{,}5t^2 r \cos 60°.$$

Подставляя все перемещения в равенство (2.37), получаем

$$m_1\Delta x_1 + m_3\Delta x_1 + m_4\Delta x_1 + m_2\left(\Delta x_1 + 0{,}5t^2 r\cos 60^\circ\right) = 0. \qquad (2.38)$$

Из равенства (2.38)

$$\Delta x_1 = -\frac{m_2\, 0{,}5t^2 r\cos 60^\circ}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = -\frac{2m\cdot 0{,}5t^2 r\cos 60^\circ}{6m + 2m + m + m} = -\frac{t^2 r\cos 60^\circ}{10} = -0{,}05t^2 r.$$

Знак “–“ говорит о том, что призма будет перемещаться не вправо, куда направлена ось *ox*, а влево.

3. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Для рассмотрения движения несвободных систем Даламбер предложил специальный принцип, получивший название принципа Даламбера.

Принцип Даламбера для свободной материальной точки эквивалентен основному закону динамики. Для несвободной точки он эквивалентен основному закону вместе с аксиомой связей.

Уравнение движения материальной точки массой m относительно инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил и реакций связей имеет вид

$$m\overline{W} = \overline{F} + \overline{R}, \qquad (3.1)$$

где $\overline{F}$ – равнодействующая активных сил;

$\overline{R}$ – равнодействующая реакций связей;

$\overline{W}$ – ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета.

Представим (3.1) в виде

$$\overline{F} + \overline{R} - m\overline{W} = 0,$$

введем обозначение $\overline{F} = -m\overline{W}$ – сила инерции материальной точки и тогда получим

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{F} = 0. \qquad (3.2)$$

Таким образом, ***при движении материальной точки активные силы, реакции связей вместе с силой инерции точки образуют равновесную систему сил***.

Уравнение (3.2) выражает <u>принцип Даламбера для точки</u>.

Рассмотрим систему N материальных точек. К каждой точке системы приложены равнодействующая активных сил и равнодействующая реакций связей. Применяя принцип Даламбера к каждой точке системы, получим

$$\overline{F}_i^{e} + \overline{R}_i^{i} + \overline{F}_i^{\text{ин}} = 0; \qquad (3.3)$$

где нижний индекс $i = 1,2,\ldots,N$;

$\overline{F}^{\text{ин}} = -m_i \overline{W}_i$ – сила инерции i-й точки.

Условие (3.3) можно представить в эквивалентной форме

$$\left\{\overline{F}_i, \overline{R}_i, \overline{F}_i^{\text{ин}}\right\} \backsim 0; \ i = 1,2,...,N. \qquad (3.4)$$

N векторных условий (3.3) или (3.4) выражают принцип Даламбера для системы: ***при движении механической системы активные силы и реакции связей вместе с силами инерции составляют уравновешенную систему.***

Из принципа Даламбера для системы в форме (3.3) можно получить следствия в виде шести условий равновесия для сил, действующих на точки системы, сил инерции.

Если просуммировать левые части уравнений (3.3) по всем точкам системы, то

$$\sum_1^n \overline{F}_i + \sum_1^n \overline{R}_i + \sum_1^n \overline{F}_i^{\text{ин}} = 0, \qquad (3.5)$$

где $\sum_1^n \overline{F}_i$ – главный вектор активных сил;

$\sum_1^n \overline{R}_i$ – главный вектор реакций связей;

$\sum_1^n \overline{F}_i^{\text{ин}}$ – главный вектор сил инерции.

Умножая векторно каждое из соотношений (3.3) слева на радиус - вектор точки $\overline{r}$, и суммируя по точкам системы, получаем

$$\sum_1^n \overline{M}_0\left(\overline{F}_i^e\right) + \sum_1^n \overline{M}_0\left(\overline{R}_i\right) + \sum_1^n \overline{M}_0\left(\overline{F}_i^{\text{ин}}\right) = 0. \qquad (3.6)$$

Условия (3.5) и (3.6), если выразить их через проекции на координатные оси, дадут шесть условий равновесия, аналогичных условиям равновесия сил, приложенных к твердому телу, в статике.

Здесь $\sum_1^n \overline{M}_0\left(\overline{F}_i^e\right)$ – сумма моментов активных сил относительно точки O (главный момент задаваемых сил);

$\sum_1^n \overline{M}_0\left(\overline{R}_i\right)$ – сумма моментов реакций связей относительно точки O (главный момент реакций связей);

$\sum_{1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{F}_i^{\text{ин}}\right)$ – сумма моментов сил инерции относительно точки O (главный момент сил инерции).

<u>Силы инерции твердого тела в частных случаях его движения</u>

1. При поступательном движении

Если твердое тело движется поступательно (рис. 3.1), то ускорения его точек одинаковы. Силы инерции этих точек составляют систему параллельных сил, равных по величине, направленных в одну сторону. Такая система сил приводится к равнодействующей $\overline{R}^{\text{ин}}$, которая равна главному вектору

$$\overline{R}^{\text{ин}} = -M\overline{W}_c,$$

где M – масса тела;

$\overline{W}_c$ – вектор ускорения центра масс тела.

Линия действия равнодействующей силы инерции в этом случае проходит через центр масс и направлена в противоположную сторону вектора ускорения $\overline{W}_c$.

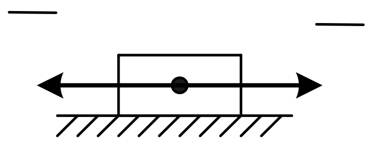
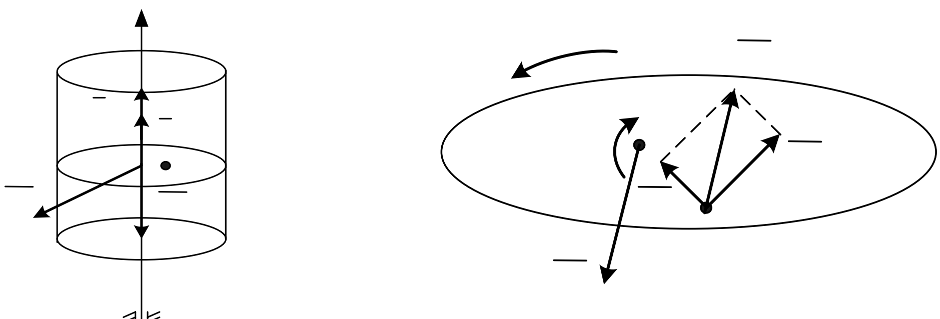


Рис. 3.1

2. При вращении вокруг неподвижной оси

Если выбрать за центр приведения сил инерции точку O, лежащую на оси вращения oz, то в этой точке получим главный вектор и главный момент (рис. 3.2, *а*, *б*).



а) *б)*

Рис. 3.2

Главный вектор сил инерции $\overline{R}'^{\text{ин}}$ определяется формулой $\overline{R}^{\text{ин}} = -M\overline{W}_c$, (здесь и в дальнейшем у главного вектора штрих опускается) приложен в точке O и направлен в сторону, противоположную направлению вектора ускорения центра масс $\overline{W}_c$.

Главный момент сил инерции равен $M_z^{\text{ин}} = -J_z\varepsilon$,

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;

ε – угловое ускорение тела.

Момент сил инерции $M^{\text{ин}}$ направлен противоположно угловому ускорению.

Если центр масс находится на оси вращения, то $\overline{F^{\text{ин}}}$.

3. При плоском движении

Выбрав за центр приведения сил инерции центр масс тела, точку С (рис. 3.3), получим в этой точке главный вектор и главный момент сил инерции. Для главного момента сил инерции имеем $\overline{R}^{\text{ин}} = -M\overline{W}_c$.

Главный момент сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения тела, определяется по формуле $M_C^{\text{ин}} = -J_C\varepsilon$,

где J_C – момент инерции тела относительно названной оси.

Направлен главный момент сил инерции в сторону, противоположную угловому ускорению.

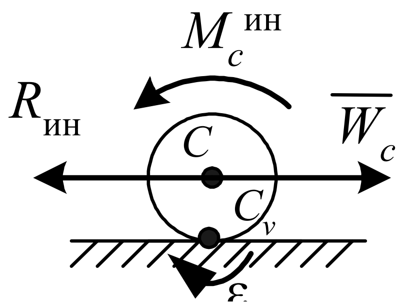


Рис. 3.3.

Задание 4

Применение принципа Даламбера к определению реакций связей

В задании 4 следует применить принцип Даламбера для определения натяжения нитки на всех участках механической системы и ускорения центра масс тела, указанного в таблице, или угловое ускорение одного из тел (табл. 4.1).

Таблица 3.1

Номер условия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Найти	W_{c_1}	W_6	ε_4	ε_3	W_6	W_{c_1}	W_5	ε_4	W_3	W_{c_2}

Остальные данные (схемы и необходимые числовые значения) использовать из задания 2 (табл. № 2.2, рис. 2.11…2.20). Считать силу F постоянной и равной 10 Н. Трением пренебречь.

Пример выполнения задания 4

Дано: $m_1 = 3$ кг; $m_2 = 1$ кг; $m_3 = 2$ кг; $F = 10$ Н; $\rho_3 = 0{,}1$ м; $M = 1{,}2$ Нм; $R_2 = R_3 = 0{,}4$ м; $r_3 = \frac{1}{2} R_3$.

Определить: W_1 – ускорение первого тела, а также натяжение нитей на всех участках (рис. 3.4).

Решение:

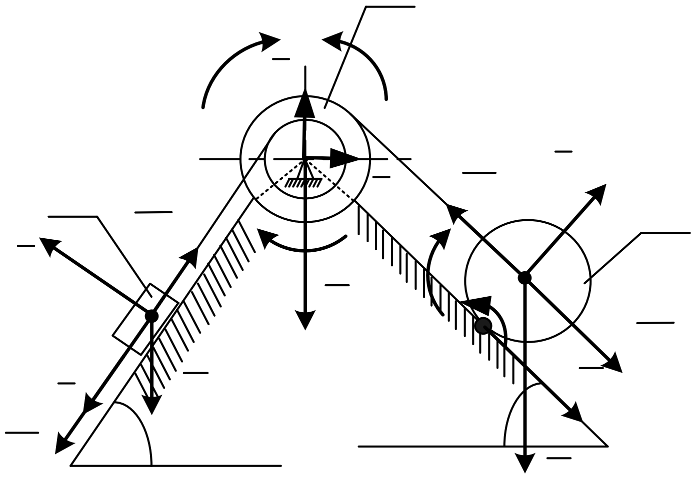


Рис. 3.4

Для определения реакций связей воспользуемся принципом Даламбера.

Построим расчетную схему, на которой покажем активные силы, реакции связей и силы инерции. На груз 1 действуют сила $\overline{F}$, сила тяжести $\overline{P}_1$, реакция поверхности N_1 и главный вектор сил инерции $\overline{R}_1^{ин} = -m_1 \overline{W}_1$. Вектор $\overline{R}_1^{ин}$ направлен в противоположную сторону вектора $\overline{W}_1$.

На ступенчатый блок 3 действуют сила тяжести P_3, реакции в шарнире O, пара сил M и главный вектор сил инерции $M_3^{ин} = -J_0 \varepsilon_3$; J_0 – момент инерции ступенчатого блока относительно оси вращения, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка

$$J_0 = m_3 \rho_3^2.$$

Выразим угловое ускорение ступенчатого блока 3 через ускорение первого груза. Зависимость скоростей $\omega_3 = \frac{v_1}{r_3}$. Продифференцируем эту формулу по времени $\frac{d\omega_3}{dt} = \frac{1}{r_3}\frac{dv_1}{dt}$; $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$; $\frac{dv_1}{dt} = W_1$. Получим $\varepsilon_3 = \frac{W_1}{r_3}$.

Подставив значение J_0 и ε_3 в уравнение главного момента сил инерции, получим $M_3^{\text{ин}} = m_3\rho_3^2 \dfrac{W_1}{r_3}$.

Главный момент сил инерции направлен в сторону, противоположную угловому ускорению ступенчатого блока.

На каток 2 действует сила тяжести $\overline{P}_2$, реакция связи $\overline{N}_2$, сила сцепления $\overline{F}_{\text{сц}}$, главный вектор сил инерции $\overline{R}_2^{\text{ин}} = -m_2\overline{W}_c$ и главный момент сил инерции $M_2^{\text{ин}} = J_c\varepsilon_2$; J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Выразим W_c и ε_2 через W_1. Для этого продифференцируем по времени формулы зависимости скоростей тел 1 и 2

$$\mathrm{v}_c = \frac{\mathrm{v}_1 R_3}{r_3}; \quad \omega_2 = \frac{r_1 R_3}{r_3 R_2}.$$

Получим $\dfrac{d\mathrm{v}_c}{dt} = \dfrac{R_3}{r_3}\dfrac{d\mathrm{v}_1}{dt}$, $W_c = \dfrac{R_3}{r_3}W_1$;

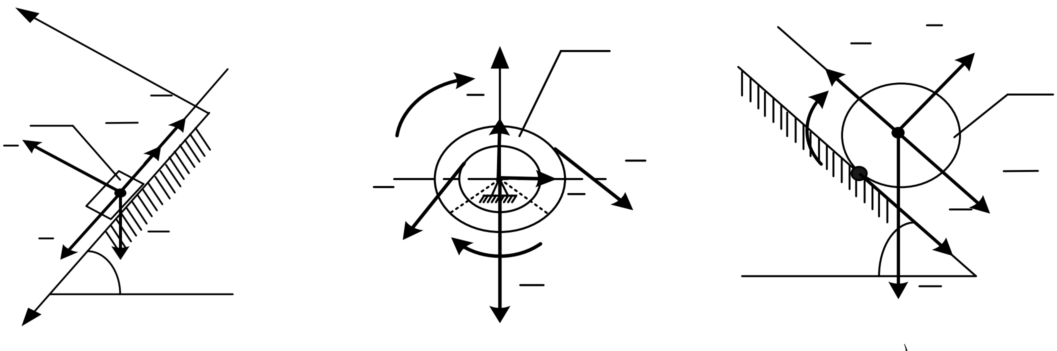
$$\frac{d\omega_2}{dt} = \frac{R_3}{r_3 R_2}\frac{d\mathrm{v}_1}{dt}; \quad \varepsilon_2 = W_1\frac{R_3}{r_3 R_2}; \quad J_c = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Тогда имеем $R_2^{\text{ин}} = m_2\dfrac{R_3}{r_3}W_1$;

$$M_2^{\text{ин}} = \frac{m_2 R_2^2}{2}\frac{R_3 W_1}{r_3 R_2} = \frac{m_2 R_2 R_3}{2r_3}W_1.$$

Для определения реакций нитей рассмотрим динамическое равновесие отдельных тел, входящих в систему.

Для каждого тела составим расчетные схемы (рис. 3.5, *а, б, в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 3.5

Наша задача сводится к определению реакций нити $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ и ускорения первого тела $\overline{W}_1$.

Для первого тела (рис. 3.5, *а*) можем составить два уравнения. Для тел 3 и 2 (рис. 3.5 *б, в*) по три уравнения.

Нам нужно составить только три, чтобы определить три неизвестные величины.

Для схемы рис. 3.5, *а*)составим уравнение $\sum_{1}^{n} F_{xi} = 0$

$$F + P_1 \cos 30^\circ - F_1^{\text{ин}} - T_1 = 0. \tag{3.7}$$

Для схемы рис. 3.5, *б* составим уравнение $\sum_{1}^{n} M_0 = 0$

$$T_1 r_3 - T_2 R_3 - M - M_3^{\text{ин}} = 0. \tag{3.8}$$

Для схемы рис. 3.5, *в* составим уравнение $\sum_{1}^{n} M_{c\text{v}} = 0$

$$T_2 R_2 - M_2^{\text{ин}} - F_2^{\text{ин}} R_2 - P_2 R_2 \cos 45^\circ = 0. \tag{3.9}$$

Подставив в уравнения (3.7), (3.8) и (3.9) значения сил инерции, получим

$$F + m_1 g \cos 30^\circ - m_1 W_1 - T_1 = 0,$$

$$T_1 r_3 - T_2 R_3 - M - m_3 \rho_3^2 \frac{W_1}{r_3} = 0,$$

$$T_2 R_2 - \frac{m_2 R_2 R_3}{2 r_3} W_1 - m_2 \frac{R_3}{r_3} W_1 R_2 - m_2 g R_2 \cos 45^\circ = 0.$$

Подставим в эти уравнения все численные значения. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 35{,}46 - 3W - T_1 = 0; \\ 0{,}2T_1 - 0{,}4T_2 - 1{,}2 - 0{,}1W_1 = 0; \\ T_2 - 3W_1 - 6{,}93 = 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Решая эту систему уравнений, определим $T_1,\ T_2,\ W_1$

$$W_1 = 1{,}642 \text{ м/с}^2;$$

$$T_1 = 30{,}534 \text{ Н};$$

$$T_2 = 11{,}856 \text{ Н}.$$

4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В аналитической механике изучается равновесие и движение механических систем.

1. Классификация связей

Рассмотренные ниже методы решения задач механики применимы не при любых связях, наложенных на систему. Некоторые сведения о связях мы уже имеем (из статики), но их недостаточно.

Рассмотрим вопрос о связях, об их классификации несколько подробнее.

Связями называются любого вида ограничения, которые налагаются на положение и скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие силы на систему действуют.

Эти ограничения могут быть записаны аналитически с помощью уравнений связей.

Например, если известно, что при движении точки выполняется условие

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25,$$

то это означает, что точка движется по сферической поверхности радиуса $R = 5$. В общем случае уравнение связи может быть представлено в виде функции

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0. \qquad (4.1)$$

По виду этого уравнения связи классифицируются:

1) на стационарные и нестационарные.

Стационарными связями называются такие связи, уравнения которых не содержат времени.

В приведенном выше примере связь стационарная. Для тела, лежащего на полу движущегося лифта, пол является нестационарной связью;

2) голономные (геометрические) и неголономные (кинематические).

Связи называются **голономными**, если их уравнения записаны в виде, не содержащем производных от координат по времени.

$$f(x, y, z, t) = 0. \qquad (4.2)$$

Остальные связи называются неголономными или неинтегрируемыми. Иными словами, связи называются **неголономными**, если их уравнения не могут быть записаны в виде, не содержащем производных от координат по времени.

Пример. Для колеса, катящегося по поверхности без проскальзывания, выполняется условие (рис. 4.3):

$$V_c = \omega \cdot CC_{\mathrm{v}} = \omega \cdot R \text{, или } \dot{x}_c = \dot{\varphi} \cdot R .$$

Это уравнение содержит скорости, но его можно проинтегрировать и получить уравнение, содержащее только координаты в виде:

$$x_c = \varphi \cdot R .$$

Или уравнение

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0 .$$

Это уравнение можно записать следующим образом

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

После интегрирования имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = C .$$

Эти примеры иллюстрируют голономные связи.

Следующий пример уравнения связи:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = C .$$

Это уравнение проинтегрировать нельзя, поэтому рассматриваемая связь неголономная;

3) удерживающие и неудерживающие.

Уравнения **удерживающих связей** записываются в виде равенств, а **неудерживающих** – в виде неравенств.

Пример: $x^2 + y^2 + z^2 < 25$ – точка может двигаться внутри сферы.

4) идеальные и неидеальные.

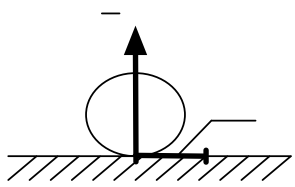
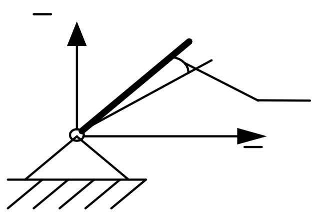
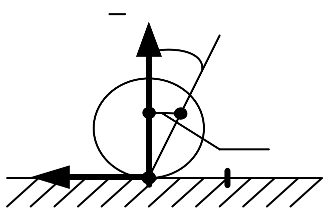
Связь называется **идеальной**, если её реакции на любом возможном перемещении системы не совершают работу.

Условия идеальности связей записываются так:

$$\sum_{1}^{i} \delta A_i^r = 0. \tag{4.3}$$

Примеры идеальных связей приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1.

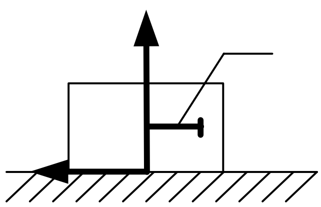
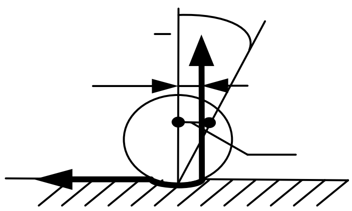
1. Идеально гладкая поверхность	 Рис. 4.1	$\delta A(N) = 0 \ (\alpha = 90°)$
2. Цилиндрический шарнир без трения	 Рис. 4.2	$\delta A(x_0) = \delta A(y_0) = 0$, т. к. точка приложения сил - точка O - не перемещается
3. Колесо катится без проскальзывания по твердой поверхности	 Рис. 4.3	$\delta A(N) = \delta A(F_{\text{тр}}) = 0$, т. к. силы приложены к мгновенному центру скоростей

N

Примеры неидеальных связей приведены в табл. 4.2.

y_0

Таблица 4.2.

1. Тело перемещается по негладкой поверхности	 Рис. 4.4	O $\delta A(F_{\text{тр}}) = -F_{\text{тр}}\delta S \neq 0$
2. Колесо катится без проскальзывания не по твердой поверхности	 Рис. 4.5	$\delta A(N) = -N f_k \delta\varphi \neq 0$

N

Итак, каждой связи можно дать четыре характеристики, относя её к голономной или неголономной, стационарной или нестационарной, удерживающей или неудерживающей, идеальной или неидеальной.

$F_{\text{тр}}$

C_v

В дальнейшем мы будем иметь дело только с голономными связями.

2. Возможные перемещения

Понятие возможных перемещений лучше всего проиллюстрировать на примере стационарной голономной связи, которая наложена на одну материальную точку.

Пусть материальная точка лежит на поверхности. Такая связь позволяет точке перемещаться вдоль этой поверхности. Любое из этих бесконечно малых перемещений называется возможным перемещением.

Возможным перемещением системы называется любое бесконечно малое её перемещение, которое допускает связи, наложенные на систему. При этом связи не должны нарушаться или разрушаться.

Примеры

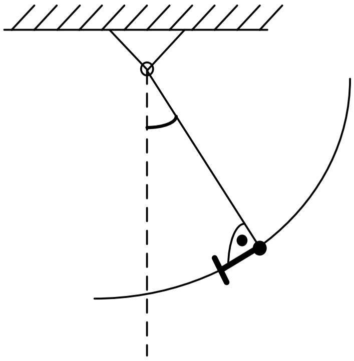


Рис. 4.6

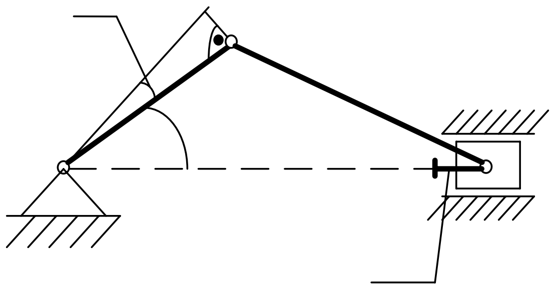


Рис. 4.7

В виду малости возможные перемещения точек отсчитываются не по дуге траектории, а по отрезку прямой, направленной по касательной к ней из данного положения, также как и вектор скорости (перемещения точки A δS_A на рис. 4.6, 4.7).

Любой системе можно сообщить бесконечное множество перемещений. Однако для любой из них можно указать некоторое число независимых между собой перемещений, с помощью которых можно получить все другие перемещения.

Пример. Для точки, лежащей на плоскости, любое возможное перемещение можно получить через dx и dy.

Число независимых возможных перемещений механической системы с голономными связями равно числу степеней свободы этой системы.

На рис. 4.7. показаны разные перемещения $\delta\varphi$, δS_A, δS_B, но они взаимозависимы, т.к. система имеет одну степень свободы.

3. Элементарная работа силы на возможном перемещении

Работа сил на возможном перемещении определяется точно так же, как и работа сил на действительном перемещении. Отличаются они только обозначением. Элементарная работа силы на действительном перемещении обозначается символом dA, а элементарная работа силы на возможном перемещении – δA.

$$\delta A_i = F_i \cdot \delta S_i \cdot \cos\alpha_i,$$

где δS_i – возможное перемещение точки приложения F_i силы;

α_i – угол между силой F_i и перемещением δS_i.

Принцип возможных перемещений при равновесии механической системы

Пусть механическая система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую её точку, уравновешиваются.

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = 0,$$

где $\overline{F}_i$ – равнодействующая активных сил; $\overline{R}_i$ – равнодействующая реакций связей. Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение и вычислим работу всех сил на этом перемещении. Так как силы, приложенные к каждой точке, уравновешиваются, то сумма работ этих сил на перемещении δS_i будет равна нулю. Учитывая, что $\overline{F}_i = -\overline{R}_i$ получим:

$$\sum_1^n F_i \delta S_i \cos\alpha_i - \sum_1^n R_i \delta S_i \cos\alpha_i = 0.$$

Если связи идеальные, то вторая сумма будет равна нулю и тогда

$$\sum_1^n F_i \delta S_i \cos\alpha_i = 0. \qquad (4.4)$$

Уравнение работ (4.4) называют общим уравнением статики.

При равновесии механической системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных (задаваемых) сил на любом возможном перемещении системы равна нулю.

4. Общее уравнение динамики

По принципу Даламбера механическую систему, движущуюся под действием некоторых сил, можно рассматривать как неподвижную, если ко всем точкам системы приложить их силы инерции. После этого, так как система «неподвижна», можно воспользоваться и принципом возможных перемещений.

В уравнение работ (4.4) добавится еще сумма работ сил инерции точек на их возможных перемещениях:

$$\sum_{1}^{n} F_i \delta S_i \cos\alpha_i + \sum_{1}^{n} F_i^{\text{ин}} \delta S_i \cos\beta_i = 0. \qquad (4.5)$$

Уравнение (4.5) называют общим уравнением динамики.

Обозначив $\sum_{1}^{n} F_i \delta S_i \cos\alpha_i = \sum \delta A_i$, $\sum_{1}^{n} F_i^{\text{ин}} \delta S_i \cos\beta_i = \sum \delta A_i^{\text{ин}}$, получим уравнение (4.5) в виде

$$\sum_{1}^{n} \delta A_i + \sum_{1}^{n} \delta A_i^{\text{ин}} = 0. \qquad (4.6)$$

5. Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Обобщенные координаты – это независимые параметры, позволяющие однозначно определять положение всех точек механической системы в любой момент времени. У механических систем с голономными (геометрическими) связями число обобщенных координат равно числу степеней свободы. Обобщенные координаты обозначаются буквами

$$q_1, q_2, ..., q_s, \qquad (4.7)$$

где S – число степеней свободы системы.

Обобщенные координаты могут иметь любой физический смысл и любую размерность. В механике они могут иметь размерность длины, угла, площади, объема и т.д.

Пример.

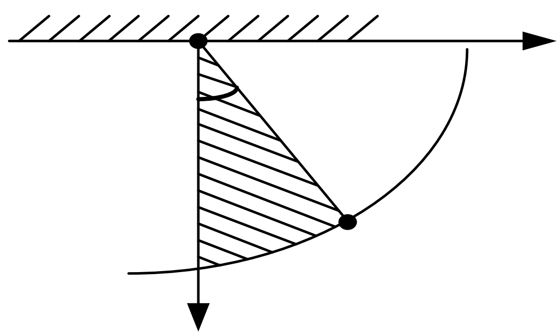


Рис. 4.8

Плоский математический маятник (рис. 4.8) имеет одну степень свободы $S = 1$. В качестве обобщенной координаты q можно принять: угол φ, длину S дуги AM, площадь σ сектора OAM.

Малые положительные приращения обобщенных координат называются **обобщенными возможными перемещениями** и обозначаются символами

$$\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s. \tag{4.8}$$

При движении системы ее обобщенные координаты будут с течением времени непрерывно изменяться и закон этого движения определится уравнениями:

$$q_1 = f_1(t),\ q_2 = f_2(t), \ldots,\ q_s = f_s(t). \tag{4.9}$$

Уравнения (4.9) представляют собой кинематические уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Производные от обобщенных координат по времени называются **обобщенными скоростями системы**. Их будем обозначать символами

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s,$$

где $\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$. Размерность обобщенных скоростей зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты и будет равна отношению размерности обобщенной координаты к размерности времени.

6. Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек, на которые действуют силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$.

Пусть система имеет S степеней свободы и ее положение определяется координатами (4.7). Сообщим системе такое независимое перемещение, при котором координата q_1 получит приращение δq_1, а остальные координаты не изменяются. Тогда радиус-вектор $\overline{r}_i\left(\overline{r}_i = \overline{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s)\right)$ каждой точки системы получит элементарное приращение $\left(\delta\overline{r}_i\right)_1$. Так как при рассматриваемом перемещении изменяется только координата q_1 (остальные сохранят постоянные значения), то $\left(\delta\overline{r}_i\right)_1$ вычисляется как частный дифференциал

$$(\delta\overline{r}_i)_1 = \frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1. \tag{4.10}$$

Вычислим сумму элементарных работ всех действующих сил на рассматриваемом перемещении:

$$\delta A_1 = \overline{F}_1\left(\delta\overline{r}_1\right)_1 + \overline{F}_2\left(\delta\overline{r}_2\right)_1 + ... + \overline{F}_n\left(\delta\overline{r}_n\right)_1 =$$

$$= \overline{F}_1\frac{\partial\overline{r}_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \overline{F}_2\frac{\partial\overline{r}_2}{\partial q_1}\delta q_1 + ... + \overline{F}_n\frac{\partial\overline{r}_n}{\partial q_1}\delta q_1.$$

Вынесем δq_1 за скобку и обозначим $Q_1 = \sum \overline{F}_i \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}$, получим $\delta A_1 = Q_1 \delta q_1$, назовем Q_1 обобщенной силой, и тогда ее величина будет равна

$$Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta q_1}. \tag{4.11}$$

Таким образом, сообщая системе независимое возможное перемещение по каждой обобщенной координате, мы сможем определить обобщенные силы $Q_1, Q_2, ..., Q_s$, соответствующие этим обобщенным координатам.

Если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором изменяются все обобщенные координаты, то получим

$$\sum \delta A_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_s \delta q_s. \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) дает выражение полной элементарной работы всех действующих на систему сил в обобщенных координатах.

Значит **обобщенные силы** – это величины, равные коэффициентам при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил. Размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты.

7. Уравнение Лагранжа

Для вывода уравнения Лагранжа воспользуемся общим уравнением динамики (4.6).

$$\sum_1^n \delta A_i + \sum_1^n \delta A_i^{\text{ин}} = 0.$$

Пусть система имеет S степеней свободы и её положение определяется обобщёнными координатами (4.7). Тогда по формуле (4.12) имеем

$$\sum_1^n \delta A_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_s \delta q_s \tag{4.13}$$

Так же можно преобразовать к обобщённым координатам элементарную работу сил инерции $F_i^{\text{ин}}$. При этом получим

$$\sum_1^n \delta A_i^{\text{ин}} = Q_1^{\text{ин}} \delta q_1 + Q_2^{\text{ин}} \delta q_2 + ... + Q_s^{\text{ин}} \delta q_s, \tag{4.14}$$

здесь $Q_1^{\text{ин}}, Q_2^{\text{ин}} ... Q_s^{\text{ин}}$ – обобщённые силы инерции, которые равны:

$$Q_1^{\text{ин}} = \sum_1^n \overline{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1},\ Q_2^{\text{ин}} = \sum_1^n \overline{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2}, \dots, Q_S^{\text{ин}} = \sum_1^n \overline{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_S}, \tag{4.15}$$

Уравнение (4.6) с учётом (4.13) и (4.14) имеет вид

$$(Q_1 + Q_1^{\text{ин}})\delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{\text{ин}})\delta q_2 + ... + (Q_s + Q_s^{\text{ин}})\delta q_s = 0.$$

Так как $\partial q_1, \partial q_2, ..., \partial q_s$ между собой независимы, то полученное равенство может выполняться лишь при условии, когда каждый из коэффициентов при $\partial q_1, \partial q_2, ..., \partial q_s$ в отдельности равен нулю, т.е.

$$Q_1 + Q_1^{\text{ин}} = 0,\ Q_2 + Q_2^{\text{ин}} = 0, \dots, Q_s + Q_s^{\text{ин}} = 0. \tag{4.16}$$

Условия (4.16) называются уравнениями Лагранжа первого рода.

Выразим все входящие в уравнения (4.16) обобщённые силы инерции через кинетическую энергию системы:

Преобразуем сначала соответствующим образом величину $Q_1^{\text{ин}}$. Поскольку сила инерции любой из точек системы $F_i^{\text{ин}} = -m_i w_i$, то первая формула равенств (4.16) может быть записана в виде:

$$-Q_1^{\text{ин}} = \sum_1^n m_i \frac{d\overline{\mathrm{v}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}. \tag{4.17}$$

Чтобы выразить $Q^{\text{ин}}$ через кинетическую энергию системы, надо преобразовать правую часть равенства (4.17) так, чтобы она содержала точки скорости v_i точек системы. С этой целью заметим прежде всего, что

$$\frac{d\overline{\mathrm{v}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\overline{\mathrm{v}}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\right) - \overline{\mathrm{v}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\right).$$

В справедливости этого результата легко убедиться, продифференцировав первое слагаемое, стоящее в правой части равенства.

Дальнейшие преобразования осуществляются на основании следующих двух условий:

1. Операции полного дифференцирования по t и частного дифференцирования по q_1 переместительны, что даёт

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{d\overline{r}_i}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathrm{v}}_i}{\partial q_1}. \tag{4.18}$$

2. Частная производная от $\bar{r}_i$ по q_1 есть предел отношения частного приращения $(\Delta\bar{r}_i)_1$ к приращению Δq_1, откуда получаем

$$\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_1} = \lim\frac{\Delta\bar{r}_i}{\Delta q_1} = \lim\frac{\Delta\left(\dfrac{d\bar{r}_i}{dt}\right)}{\Delta\left(\dfrac{dq_1}{dt}\right)} = \lim\left(\frac{\Delta\dot{r}_i}{\Delta\dot{q}}\right) = \frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_i}{\partial\dot{q}_1}. \qquad (4.19)$$

С учётом (4.18) и (4.19) равенство (4.17) представим в виде

$$\frac{d\bar{\mathrm{v}}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\mathrm{v}}_i\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_i}{\partial\dot{q}_1}\right) - \bar{\mathrm{v}}_i\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_i}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_i^2}{\partial\dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\bar{\mathrm{v}}_i^2}{\partial q_1}. \qquad (4.20)$$

Подставим (4.20) в формулу $-Q_1^{\text{ин}} = \sum_1^n m_i\dfrac{d\bar{\mathrm{v}}_i}{dt}\cdot\dfrac{\partial\bar{r}_i}{\partial q_1}$ и получим

$$-Q_1^{\text{ин}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\sum\frac{m_i\mathrm{v}_i^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum\frac{m_i\mathrm{v}_i^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

где $\sum\dfrac{m_i\mathrm{v}_i^2}{2}$ – кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получатся для всех остальных обобщённых сил инерции.

В результате равенства (4.16) примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_S}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \end{cases} \qquad (4.21)$$

Уравнения (4.21) представляют собой дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщённых координатах или <u>уравнения Лагранжа второго рода</u>. Число этих уравнений равно числу степеней свободы системы.

Уравнения Лагранжа дают единый метод решения задач динамики.

Задание 5

Применение общего уравнения динамики или уравнений Лагранжа к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы определить величину ускорения или углового ускорения тела, заданного в таблице 3.1.

Варианты механических систем показаны на рис. 2.11…2.20 к заданию 2, необходимые данные для решения приведены в табл. 2.2 к тому же заданию.

Считать силу F – постоянной и равной 10 Н. Трение качения, скольжения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции не заданы, считать сплошными однородными цилиндрами. Катки катятся по поверхностям без проскальзывания.

Пример выполнения задания 5

Дано: $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 1$ кг, $m_3 = 2$ кг, $\rho_3 = 0{,}1$ м (радиус инерции третьего тела); $M = 1{,}2$ Нм; $R_2 = R_3 = 0{,}4$ м; $r_3 = \frac{1}{2}R_3$.

Механическая система (рис. 4.9) приводится в движение постоянной силой $F = 10$ Н.

Каток 2 – сплошной однородный цилиндр. Определить ускорение первого тела W_1.

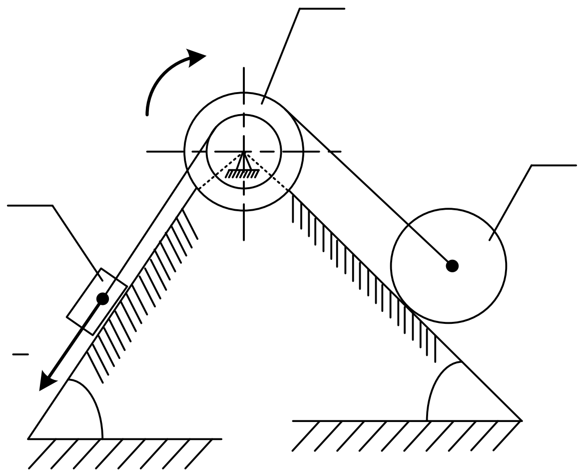


Рис. 4.9

Решение:

1. <u>Решение задачи с помощью общего уравнения динамики</u>

Построим расчетную схему (рис. 4.10), где покажем задаваемые силы: $\overline{F}$, $\overline{P_1}$ – сила тяжести первого груза, $\overline{P_2}$ – сила тяжести второго груза,

$\overline{P}_3$ – сила тяжести третьего груза; реакции внешних связей $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{F}_{\text{тр}}$, $\overline{R}_0$; приложим силы инерции: $\overline{F}_1^{\text{ин}} = -m_1\overline{W}_1$, $\overline{F}_2^{\text{ин}} = -m_2\overline{W}_2$; $\overline{M}_2^{\text{ин}} = -J_c\overline{\varepsilon}_2$, $\overline{M}_3^{\text{ин}} = -J_c\overline{\varepsilon}_3$.

Силы инерции тел зависят от вида движения тела (см. Принцип Даламбера).

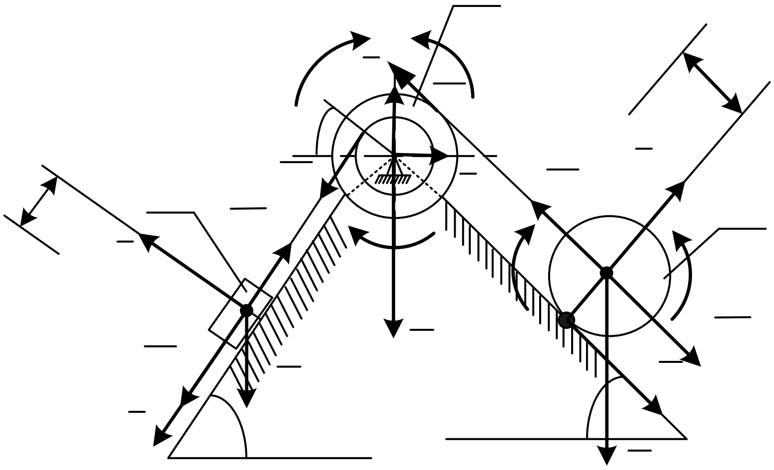


Рис. 4.10

Выразим скорости, ускорения, перемещения всех тел через скорость, ускорение и перемещение тела 1.

Угловая скорость третьего тела равна $\omega_3 = \dfrac{\text{v}_1}{r_3}$ (нить нерастяжима, все точки нити имеют одинаковые скорости).

Угловое ускорение третьего тела выражается следующим образом

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{1}{r_3}\frac{d\text{v}_1}{dt};\ \frac{d\text{v}_1}{dt} = W_1;\ \varepsilon_3 = \frac{W_1}{r_3}.$$

Кроме этого $\omega_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}$; $\text{v}_1 = \dfrac{dS_1}{dt}$.

Подставим эти величины в уравнение угловой скорости третьего тела. В результате получим:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{1}{r_3}\frac{dS_1}{dt}.$$

Проинтегрировав это равенство, получим зависимость угла поворота третьего тела $\delta\varphi_1$ от перемещения первого δS_1.

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{r_3}.$$

Перейдём ко второму телу:

$$\mathrm{v}_c = \omega_3 R_3; \quad \mathrm{v}_c = \frac{\mathrm{v}_1}{r_3} R_3; \quad \frac{d\mathrm{v}_c}{dt} = \frac{R_3}{r_3}\frac{d\mathrm{v}_1}{dt}; \quad \frac{d\mathrm{v}_c}{dt} = W_c; \quad W_c = \frac{R_3}{r_3} W_1,$$ здесь W_c – ускорение центра масс второго тела.

Угловая скорость второго тела $\omega_2 = \dfrac{\mathrm{v}_c}{CC_\mathrm{v}} = \dfrac{r_c}{R_2} = \dfrac{\mathrm{v}_1 R_3}{r_3 R_2}$.

Продифференцировав по времени $\dfrac{d\omega_2}{dt} = \dfrac{R_3}{r_3 R_2}\dfrac{d\mathrm{v}_1}{dt}$, получим

$$\varepsilon_2 = \frac{R_3}{r_3 R_2} W_1,$$

где ε_2 – угловое ускорение второго тела.

Проинтегрировав формулы, определяющие скорость v_c и ω_2, получим:

$$\delta S_c = \frac{\delta S_1 R_3}{r_3}; \ \delta\varphi_2 = \frac{\delta S_1 R_3}{r_3 R_2}.$$

Определим силы инерции:

$$F_1^{\text{ин}} = m_1 W_1; \ F_1^{\text{ин}} = 3W_1 \text{ (Н)};$$

$$F_2^{\text{ин}} = m_2 W_c = m_2 \frac{R_3}{r_3} W_1 = 2W_1 \text{ (Н)};$$

$$M_2^{\text{ин}} = J_c \varepsilon_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2} \frac{R_3}{r_3 R_2} W_1 = 0{,}4W_1 \text{ (Н)};$$

$$M_3^{\text{ин}} = J_0 \varepsilon_3 = m_3 \rho_3^2 \frac{W_1}{r_3} = 0{,}1W_1 \text{ (Н)}.$$

Сообщим системе возможное перемещение δS_1 и составим общее уравнение динамики:

$$F\delta S_1 + P_1 \delta S_1 \sin 60^\circ - F_1^{\text{ин}} \delta S_1 - M\delta\varphi_3 - M_3^{\text{ин}} \delta\varphi_3 - F_2^{\text{ин}} \delta S_2 -$$
$$- M_2^{\text{ин}} \delta\varphi_2 - P_2 \delta S_2 \sin 45^\circ = 0.$$

Подставив числовые значения заданных сил и сил инерции, а также значения перемещений, выраженных через δS_1, получим

$$W_1 = 1{,}655 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $W_1 = 1{,}655$ см/с^2.

2. <u>Решение задачи с помощью уравнения Лагранжа</u>

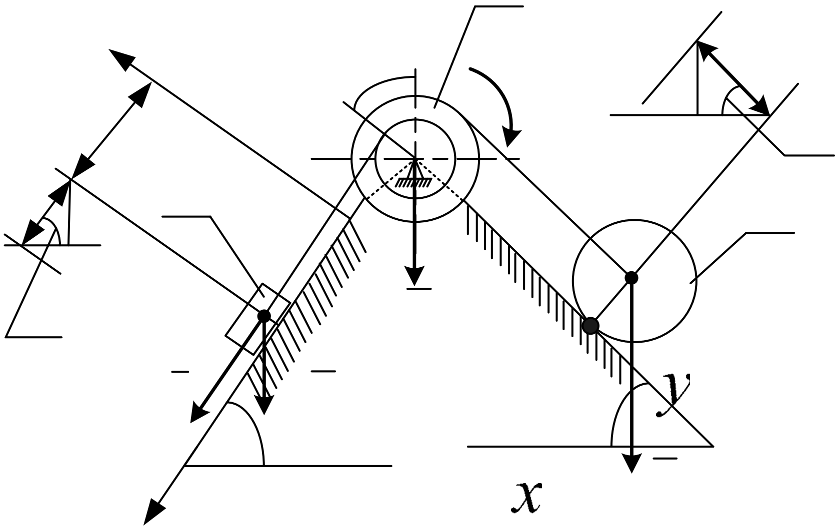


Рис. 4.11

Данная система имеет одну степень свободы. Поэтому выберем одну обобщенную координату. Так как по условию требуется определить ускорение первого тела, которое совершает поступательное прямолинейное движение, выберем линейную координату x, следящую за перемещением центра масс этого тела (рис. 4.11).

Запишем уравнение Лагранжа для данной системы:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x,$$

где T – кинетическая энергия системы;

x – обобщённая координата;

$\dot{x}$ – обобщённая скорость ($\dot{x} = \text{v}_1$),

$$Q_x = \frac{\sum\limits_1^n \delta A_i^e}{\delta x}$$ – обобщённая сила;

$\sum\limits_1^n \delta A_i^e$ – сумма элементарных работ внешних сил на приращении δx по заданной обобщённой координате.

Определяем кинетическую энергию системы, выразив её через обобщенную скорость $\dot{x}$:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где T_1, T_2, T_3 – соответственно кинетические энергии первого, второго и третьего тел.

Первое тело совершает поступательное движение, его кинетическая энергия определяется по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2;$$

$$T_1 = 1{,}5\dot{x}^2.$$

Второе тело совершает плоско-параллельное движение

$$T_2 = \frac{1}{2} J_c \omega_2^2 + m_2 v_c^2,\ J_c = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Зависимости скоростей точек системы мы рассматривали выше, когда выполняли это задание с помощью общего уравнения динамики.

$$\omega_2 = \frac{v_1 R_3}{r_3 \ddot{R}_2} = \frac{\dot{x} R_3}{r_3 R_2};\ v_c = \frac{v_1 R_3}{r_2} = \frac{\dot{x} R_3}{r_3}.$$

Подставив численные значения известных величин, получим:

$$\omega_2 = 5\dot{x};\ v_c = 2\dot{x};\ J_c = 0{,}08;$$

$$T_2 = 3\dot{x}^2.$$

Третье тело совершает вращательное движение

$$T_3 = \frac{1}{2} J_0 \omega_3^2.$$

$$J_0 = m_3 \rho_3^2 = 2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}02,$$

$$\omega_3 = \frac{v_1}{r_3} = \frac{\dot{x}}{r_3} = 5\dot{x},$$

$$T_3 = 0{,}25\dot{x}^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия системы равна:

$$T = 1{,}5\dot{x}^2 + 3\dot{x}^2 + 0{,}25\dot{x}^2 = 4{,}75\dot{x}^2.$$

Определяем слагаемые уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 9{,}5\dot{x};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 9{,}5\ddot{x};\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Определим обобщённую силу, для этого покажем на рис. 4.11 внешние силы: F, M, $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$, $P_3 = m_3 g$.

Сообщим системе приращение δx выбранной обобщённой координате x и определим элементарную работу действующих сил

$$\sum \delta A^{e} = F\delta x + P_1 h_1 - M\delta\varphi - P_2 h_2,$$

$$h_1 = \delta x \sin 60^\circ, \quad h_2 = \delta S \sin 45^\circ.$$

Выразим $\delta\varphi$ и δS через δx (см. общее уравнение динамики).

$$\delta S = 2\delta\varphi, \; \delta\varphi = \frac{\delta x}{r_3} = 5\delta x.$$

$$\sum \delta A^{e} = F\delta x + m_1 g\delta x \sin 60^\circ - M \cdot 5\delta x - m_2 g \cdot 2\delta x \sin 45^\circ.$$

Подставив численные величины, получим

$$\sum \delta A^{e} = 15{,}721\delta x;$$

$$Q_x = \frac{15{,}721\delta x}{\delta x} = 15{,}721 \text{ (Н)}.$$

Найденные значения подставим в уравнение Лагранжа

$$9{,}5\ddot{x} = 15{,}721.$$

Следовательно,

$$W_1 = \ddot{x} = \frac{15{,}721}{9{,}5} = 1{,}655 \text{ см/с}^2.$$

Сравнив результаты определения ускорения первого тела различными способами, делаем вывод – расчёт провели верно.

5. Контрольные вопросы

1. Дифференциальные уравнения движения точки.
2. Две задачи динамики.
3. Общие теоремы динамики механической системы.
4. Принцип Даламбера.
5. Принцип возможных перемещений.
6. Общее уравнение динамики.
7. Уравнение Лагранжа второго рода.

Рекомендательный библиографический список

1. *Яблонский, А.А.* Курс теоретической механики: в 2 ч. / А.А. Яблонский. – М. : Высш. шк., 1966. – 175 с.

2. Теоретическая механика: метод. указания и контрольные задания / сост. : Л.И. Котова [и др.] – М. : Высш. шк., 1989. – 50 с.

3. *Тарг, С.М.* Краткий курс теоретической механики. / С.М. Тарг – М. : Наука, 1970. – 369 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИНАМИКА
Методические указания к курсовым работам
по теоретической механике

Составители
КРЫЛОВ Александр Васильевич
МЕТЛИНА Лина Федоровна
ФЕДОТОВ Олег Владимирович

Ответственный за выпуск за выпуск – зав. кафедрой профессор В.В. Козырев

Редактор Е.В. Невская
Компьютерная верстка С.В. Павлухина
ЛР № 020275. Подписано в печать 04.02.05.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать на ризографе. Усл. печ. л. 3.49. Уч.-изд. л. 3.71. Тираж 200 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета
600000, Владимир, ул. Горького, 87

Аннотация

Данная работа представляет собой пособие для выполнения курсовой работы студентами заочной формы обучения по теоретической механике, раздел «Динамика».

Цель пособия – научить студентов самостоятельно выполнять курсовые работы. В работе даны задания по основным темам динамики: дифференциальные уравнения движения материальной точки, основные теоремы динамики материальной системы, аналитическая механика.

Для каждого задания рассмотрены примеры.

Очень коротко и ясно представлена теория, которую можно использовать и при подготовке к экзамену.

В конце пособия даны контрольные вопросы.

РЕЦЕНЗИЯ

на работу Крылова А.В., Метлиной Л.Ф. Федотова О.В.
«Методические указания и задания к курсовым работам для студентов заочной формы обучения. Динамика»

Данная работа предназначена для студентов заочной формы обучения.

В нее включены задания по основным темам динамики и очень компактно теория для их выполнения. Подробно рассмотрены примеры.

Методическое пособие составлено таким образом, что им можно пользоваться и для подготовки к экзаменам. В конце методички даны контрольные вопросы.

Этим пособием могут пользоваться студенты и дневной формы обучения.

Рекомендую данную работу к публикации.

Доктор технических наук, профессор Л.М. Самсонов

ВЫПИСКА
из протокола заседания
кафедры «Теоретическая и прикладная механика»
№ ____ от «__» ________ 2004 г.

СЛУШАЛИ: материалы методического пособия «методические указания и задания к курсовым работам для студентов заочной формы обучения. Динамика». Авторы: Крылов А.В., Метлина Л.Ф., Федотов О.В.

ПОСТАНОВИЛИ: рекомендовать пособие «Методические указания и задания к курсовым работам для студентов заочной формы обучения. Динамика» авторов Крылова А.В., Метлиной Л.Ф., Федотова О.В. к публикации в редакционно-издательском комплексе ВлГУ.

Зав. кафедрой ТиПМ В.В. Козырев

Ученый секретарь Л.Ф. Метлина