Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

Н.Н. БУХАРОВ В.Н. ГОРЛОВ А.Б. ЕВЛЮХИН

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ

Учебное пособие

Владимир 2003

УДК 519.12
В24

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Владимирского государственного педагогического университета
В.В. Жиков

Кандидат технических наук, доцент кафедры информатики
Всероссийского заочного финансово-экономического института
А.А. Левкин

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Бухаров Н.Н., Горлов В.Н., Евлюхин А.Б.
В24 Введение в дискретную математику: Учеб. пособие / Владим. гос. ун-т. Владимир, 2003. 68 с.
ISBN 5-89368-428-1

Основное внимание уделяется вопросам: элементы теории множеств, отношения, булевы функции, элементы теории графов.

Предназначено для студентов третьего курса специальности 010200 – прикладная математика и информатика и 072300 – лазерная техника и лазерные технологии, изучающих курс «Дискретная математика». Может быть полезно всем студентам и аспирантам, выполняющим курсовые работы, связанные с математическим моделированием.

ISBN 5-89368-428-1

Введение

Дискретная математика объединяет разделы математики, не связанные с понятиями предела, бесконечности, непрерывности. Эти разделы составляют основу математической кибернетики и широко используются в областях, связанных с информационными технологиями и компьютерами.

Учебное пособие основано на односеместровом лекционном курсе, который читается студентам специальности «Прикладная математика» Владимирского государственного университета. Главными целями курса авторы считают: знакомство с основными понятиями дискретной математики и методами решения типичных задач. Учебное пособие состоит из трех глав. Каждая глава, помимо теоретической части, содержит поясняющие примеры и задачи для самостоятельного решения.

Первая глава включает основные положения теории множеств. Наряду с такими базовыми понятиями теории, как множество, бинарное отношение, функция, рассматриваются способы задания и свойства бинарных отношений, а также приводятся основные сведения об отношениях эквивалентности и частичного порядка, которые чаще всего встречаются в приложениях.

Во второй главе обсуждаются некоторые вопросы алгебры логических функций. Глава начинается с изложения основных положений исчисления высказываний, содержит основные сведения о представлении логических функций в виде нормальных форм и достаточно подробное изложение теории полноты логических функций.

Третья глава посвящена теории графов. Теория графов и особенно алгоритмы на графах находят широкое применение в математическом моделировании и программировании, поскольку язык графов особенно удобен для описания различных моделей. В начале главы приводятся основные понятия теории графов (типы графов, маршруты, цепи, циклы), рассматриваются вопросы обходов графов, обсуждаются базовые понятия связности и планарности графов. Заключительная часть главы содержит описание ряда алгоритмов на графах. В конце пособия дан рекомендательный библиографический список для более подробного изучения предмета.

Глава 1. **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ**

1.1. Понятие множества. Способы задания множеств

Понятие множества является одним из основных понятий математики. Оно не сводится к другим, более общим понятиям, поэтому не может быть определено в формально логическом смысле. Под множеством понимают объединение в одно общее объектов хорошо различимых нашей интуицией или мыслью. Г. Кантор «определил» множество следующим образом: «Множество есть многое, мыслимое как единое».

Объекты, которые образуют множество, называют элементами. Отношение между множеством и элементом описывается с помощью знака отношения принадлежности $\in$, то есть, если a принадлежит A, то записывают $a \in A$, если не принадлежит – $a \notin A$. При построении конкретных математических моделей полагают, что все элементы рассматриваемых множеств принадлежат некоторому универсальному множеству U.

По количеству элементов, содержащихся в множестве, различают конечные (состоят из конечного числа элементов) и бесконечные множества (число элементов не ограничено). Для удобства и единообразия языка вводится особое понятие для множества, не содержащего ни одного элемента – пустое множество ($\varnothing$).

Конечное множество может быть задано перечислением (списком своих элементов) в виде $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Другим способом задания множества является определение с помощью характеристического свойства множества (предиката): $X = \{x | P(x)\}$. Характеристический предикат – это условие, выраженное в форме логического утверждения, однозначно определяющее принадлежность данного элемента множеству. Наконец, множество может быть задано с помощью порождающей процедуры, то есть процедуры, которая будучи запущенной «возвращает» элементы соответствующего множества $X = \{ x | x: = f(x)\}$.

1.2. Операции над множествами

Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то говорят, что A является подмножеством B. Такое отношение между A

B называют *отношением включения* $A \subseteq B$, то есть

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Множества A и B считают равными, если их элементы совпадают:

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \text{ или } A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A).$$

Это соотношение указывает типичный способ доказательства того, что данные множества равны: сначала доказывают, что $A \subseteq B$, затем – $B \subseteq A$.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A - собственное подмножество B или $A \subset B$. Формально это соотношение можно выразить в виде

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ и } A \neq B) \text{ или } A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ и } B \not\subset A).$$

Объединением множеств A и B ($A \bigcup B$) называют множество из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств

$$A \bigcup B = \{x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B $(A \bigcap B)$ называют множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат A и B:

$$A \bigcap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью $A \setminus B$ называется множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Дополнением (до универсального множества U) множества A называют множество элементов из U, не принадлежащих A, то есть

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Симметричная разность $A \div B$ – это множество из элементов, принадлежащих либо множеству A, либо множеству B, то есть

$$A \div B = \{x \mid (x \in A, x \notin B) \text{ или } (x \in B, x \notin A)\} \text{ или } A \div B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

Для иллюстрации операций используют круги Эйлера. На рис. 1.1 результаты операций выделены темным цветом.

$A \bigcup B$ $\qquad$ $A \bigcup B$ $\qquad$ $A \setminus B$ $\qquad$ $A \div B$

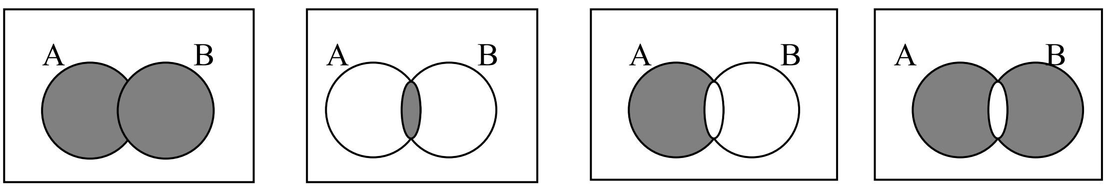

Рис. 1.1. Операции над множествами

Множества могут использоваться как элементы других множеств. Множество, элементами которого являются множества, называют классом или семейством. *Семейством всех подмножеств (булеаном)* данного множества A называют множество $P(A)$, которое содержит в качестве элементов все возможные подмножества A, то есть

$$P(A) = \{C \mid C \subseteq A\}.$$

Для булеана часто используют обозначение в виде 2^A. Следует отметить, что $P(A)$ содержит два несобственных подмножества множества A: пустое множество и собственно множество A.

Используя операции над множествами, можно выражать одни множества через другие в виде формул, содержащих обозначения множеств, знаки операций и скобки. При этом естественным считается выполнение операции в следующей последовательности: дополнение, пересечение, объединение и разность. Семейство всех подмножеств универсального множества вместе с операциями над множествами образуют алгебру подмножеств. Особенности этой алгебры можно описать системой тождеств алгебры подмножеств.

Первая группа тождеств описывает свойства основных операций.

1) $A \bigcup B = B \bigcup A$; $A \bigcap B = B \bigcap A$;
2) $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$; $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$;
3) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$; $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$;
4) $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$; $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$;
5) $A \bigcup A = A \bigcap A = A$;
6) $A \bigcap (A \bigcup B) = A$; $A \bigcup (A \bigcap B) = A$;
7) $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$; $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$; $A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$.

Вторая группа тождеств описывает свойства включения.

1) $A \bigcap B \subseteq A$; $A \bigcap B \subseteq B$; $A \subseteq A \bigcup B$; $B \subseteq A \bigcup B$; $A \setminus B \subseteq A$;
2) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \bigcup B = B$; $A \subseteq B \Leftrightarrow A \bigcap B = A$; $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$.

Третья группа тождеств определяет операции с пустым ($\varnothing$) и универсальным множеством (U).

1) $A \bigcup \varnothing = A$; $A \bigcap U = A$;
2) $A \bigcap \varnothing = \varnothing$; $A \bigcup U = U$;
3) $A \bigcup \overline{A} = U$; $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$;
4) $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{U} = \varnothing$; $\varnothing = U$.

Задачи с множествами можно решать, используя непосредственно определения операций («поэлементный» способ) или с помощью основных тождеств.

Пример

Существуют ли множества A, B, C такие, что $A \bigcap B \neq \varnothing$, $A \bigcap C = \varnothing$, $A \bigcap B \setminus C = \varnothing$?

Приведем решение, опираясь на определения операций над множествами. Так как $A \bigcap B \neq \varnothing$, то существует $x \in A \bigcap B$. Поэтому $(x \in A \bigcap B \Rightarrow x \in A)$ и $(x \in A$ и $A \bigcap C = \varnothing) \Rightarrow x \notin C$. Отсюда следует, что $(x \in A \bigcap B$ и $x \notin C) \Rightarrow x \in (A \bigcap B) \setminus C$, то есть существует по крайней мере один элемент x такой, что $x \in A \bigcap B \setminus C$ или множество $A \bigcap B \setminus C$ не пусто. Таким образом, множеств, для которых справедливы все условия примера, не существует.

Второе решение получим исходя из основных тождеств. Так как $(A \bigcap B) \setminus C = \varnothing$, то $A \bigcap B \subseteq C$. Используя свойства разности и включения, получим: $A \bigcap B \subseteq C \Rightarrow A \bigcap B = (A \bigcap B) \bigcap C$, $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap B \bigcap C$ и $A \bigcap B \bigcap C = B \bigcap (A \bigcap C)$. Поскольку $A \bigcap C = \varnothing$, то $A \bigcap B = \varnothing$, то есть первое условие примера несовместимо с двумя другими.

1.3. Отношения

Совокупность, состоящую из двух элементов x_1, x_2, расположенных в определённом порядке, будем называть *упорядоченной парой* $< x_1, x_2 >$. Две пары $< x_1, x_2 >$ и $< y_1, y_2 >$ считаются равными, если $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$. Совокупность из n элементов $< x_1, x_2, ..., x_n >$, по определению равная $<< x_1, ..., x_n >, x_n >$, называется *упорядоченной* n-кой, (вектором, кортежем, последовательностью).

Прямым (*декартовым*) *произведением множеств* $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество всех возможных упорядоченных n-ок, содержащих по одному элементу из каждого A_i в том порядке, в котором множества перечислены в произведении.

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{< a_1, a_2, ..., a_n > | \, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$

Если $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, то произведение называют прямой степенью A и обозначают A^n. Очевидно, что $A^1 = A$. Если хотя бы одно $A_i = \varnothing$, то произведение равно пустому множеству. Декартово произведение является ассоциативной, но не коммутативной операцией.

Множество точек плоскости, заданных упорядоченной парой координат, может служить примером прямого произведения. Пусть A – конечное множество символов (алфавит). Тогда элементы множества A^n – слова длиной *n*. Множество всех слов в алфавите A – это объединение всех степеней множества A.

Одно из основных понятий дискретной математики – это понятие бинарного отношения, которое используется для описания некоторой связи между элементами двух множеств. *Бинарным отношением* R *между множествами* A,B называется множество упорядоченных пар $<a,b>$, где $a \in A, b \in B$. Элементы a, b называют координатами (компонентами) бинарного отношения. Каждое отношение есть подмножество декартова произведения $A \times B$: $R \subseteq A \times B$. Для записи того, что некоторая пара x, y находится в отношении R, используют следующие формулы:

$$<x, y> \in R \text{ или } xRy, \text{ где } x \in A, y \in B.$$

Если $A = B$, то такое отношение называется *бинарным отношением на* A. Бинарное отношение выделяется из декартова произведения с помощью характеристического свойства.

Областью определения бинарного отношения R называют множество

$$\delta_R = \{x \mid \text{существует } y \text{ такое, что} \langle x, y\rangle \in R\}.$$

Область значений отношения R *– это множество*

$$\rho_R = \{y \mid \text{существует } x \text{ такое, что } \langle x, y\rangle \in R\}.$$

Для бинарных отношений обычным образом определяются операции объединения, пересечения и разности. *Дополнением бинарного отношения* между множествами A,B называется множество $\overline{R} = (A \times B) \setminus R$. *Обратным отношением* для бинарного отношения R называют R^{-1}, такое что, $R^{-1} = \{<x, y> \mid <y, x> \in R\}$.

Очевидно, что $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Для бинарного отношения на множестве A можно определить тождественное отношение

$$I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}.$$

Пусть $R_1 \subseteq A \times B$ – отношение из A в B и $R_2 \subseteq B \times C$ – отношение из B в C. *Произведением* (свёрткой, композицией) отношений называется отношение

$$R_1 \cdot R_2 = \{< x,y >| \exists z :< x,z > \in R_1 \text{ и } < z,y > \in R_2\},$$
$$\text{где } x \in A,\ z \in B,\ y \in C,\ R_1 \cdot R_2 \subseteq A \times C.$$

Образом множества $X \subseteq A$ относительно R называют множество

$$R(X) = \{y \mid \exists x \in X :< x,y > \in R\},\ R(X) \subseteq B.$$

Прообразом множества $Y \subseteq B$ относительно R называют множество

$$R^{-1}(Y),\ R^{-1}(Y) \subseteq A.$$

<u>Примеры</u>

1. На множестве $A = \{1, 2, 3\}$ построить бинарные отношения $R_1 = \{< x, y >| x + y$ – четное$\}$, $R_2 = \{< x, y >| x + y$ – нечетное$\}$, определить R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 R_2$, $R_2 R_1$.

На основе определений соответствующих отношений получим:

$R_1 = \{<1,1>,<1,3>,<2,2>,<3,1>,<3,3>\}$, $R_1^{-1} = R_1$,

$R_2 = \{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>\}$, $R_2^{-1} = R_2$,

$R_1 R_2 = \{<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>\} = R_2$, $R_2 R_1 = R_2$.

2. Доказать, что для любых бинарных отношений справедливо

1) $(R^{-1})^{-1} = R$, 2) $(R_2 R_1)^{-1} = R_1^{-1} R_2^{-1}$.

Докажем 2). Пусть $\langle x,y \rangle$ – произвольный элемент множества $(R_2 R_1)^{-1}$, тогда $< x, y > \in (R_2 R_1)^{-1} \Leftrightarrow < y,x > \in R_2 R_1 \Leftrightarrow \exists z :< y,z > \in R_2$ и $< z, y > \in R_2^{-1} \Leftrightarrow < x, y > \in R_1^{-1} R_2^{-1}$.

1.4. Отображения и функции

Бинарное отношение между A и B такое, что $\delta_R = A$ будем называть *отображением* A в B и обозначать $R : A \to B$. При этом $\rho_R \subseteq B$. Бинарное отношение, для которого справедливо $\delta_R = A$ и $\delta_R = B$, называют *отображением A на B* или сюръективным отображением. В общем случае отображения образа элемента x, где $x \in \delta_R$, т.е. $R(x)$ является подмножеством ρ_R и может содержать несколько элементов; аналогичное утверждение справедливо относительно прообраза элемента $R^{-1}(y)$.

Отображение f из A в B (на B) называется *функцией*, если для любых x, y_1, y_2 из $< x, y_1 > \in f$, $< x, y_2 > \in f$ следует $y_1 = y_2$. Для записи функции используют обозначения $f : A \to B$, xfy, $y = f(x)$. Основное свойство «функционального отображения» показано на рис. 1.2.

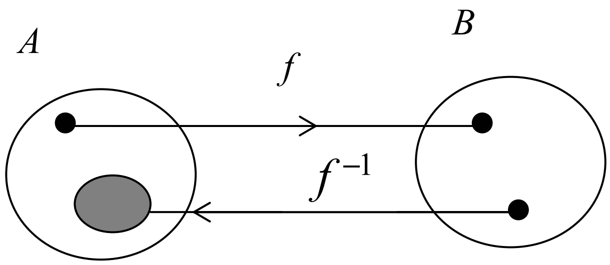

Рис. 1.2. Функциональное отображение

Таким образом, бинарное отношение $f \subseteq A \times B$ является функцией, если оно одновременно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\delta_f = A$,
2) $(<x,y_1> \in f, <x,y_2> \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$,
3) $(<x_1,y> \in f, <x_2,y> \in f) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Функция называется *инъективной* (1-1 функцией), если для любых x_1, x_2, y из условий $\langle x_1, y\rangle \in f$, $\langle x_2, y\rangle \in f$ следует $x_1 = x_2$. Функция f называется *биективной* (взаимно-однозначным соответствием между A и B), если f одновременно сюръективна и инъективна.

Пусть f^{-1}– бинарное отношение, обратное функции $f : A \to B$. Для того чтобы f^{-1}было функцией, достаточно инъективности f. Однако при этом f^{-1} будет функцией из ρ_f в A, причём $\rho_f = \delta_{f^{-1}}$ не обязательно совпадает с B, или f^{-1} не обязательно функция из B в A. Чтобы функция f^{-1}была функцией из B в A, нужно чтобы fбыла биекцией. Точнее справедливо следующее утверждение: функция $f : A \to B$ имеет обратную функцию $f^{-1} : B \to A$ тогда и только тогда, когда f-биекция.

Множество всех функций из множества A во множество B обозначают B^A.

Если областью определения функции f является декартово произведение множеств $\delta_f = A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \to B$, то соответствующая функция называется *n*-местной функцией. Говорят, что функция имеет *n* аргументов $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

1.5. Специальные бинарные отношения

1.5.1. Способы задания отношений

Бинарные отношения на множестве чаще всего встречаются на практике, поскольку описывают внутренние свойства и связи между элементами множества. Формально бинарным отношением на множестве A называют подмножество квадрата $A : R \subseteq A^2$.

Для задания бинарного отношения на множестве можно использовать любые способы задания множеств, например, список пар, для которых это отношение выполняется. Отношения на конечных множествах обычно задаются списком, матрицей, фактор-множеством или графом.

Матрица бинарного отношения на множестве $A = \{a_1, a_2, ... a_m\}$ – это квадратная матрица порядка m, каждый элемент которой $C_{i,j}$ определяется следующим образом:

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a_i R a_j \\ 0, & \text{если} \quad a_i \not{R} a_j \end{cases}$$

Матрица – это «поле» для декартового произведения; единицей отмечается место пары, которая принадлежит бинарному отношению; ноль соответствует парам, не принадлежащим бинарному отношению. Описание в виде графа эквивалентно матричному, если последнюю считать матрицей смежности соответствующего графа.

<u>*Пример*</u>

Для множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$ построить матрицы следующих бинарных отношений: R_1 – "арифметическое $\le$ ", R_2 – "иметь общий делитель, отличный от 1", R_3 – "быть делителем".

Решение представляется следующими матрицами

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \; C_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \; C_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Сечением элемента $x \in A$ по бинарному отношению R называют множество таких элементов из A, которые находятся в отношении R с x, т.е. $[x]_R = x / R = \{y \mid <x, y> \in R\}$. Множество сечений всех элементов множества A по бинарному отношению R называют фактор-множеством множества A по R и обозначают A / R. Фактор-множества отношений R_1 и R_2 можно записать в виде

$$A_1 / R = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{4\}\},\ A_2 / R = \{\ \varnothing,\ \{2, 4\}, \{3\}\}.$$

Задание бинарного отношения с помощью фактор-множества, по-видимому, самый "экономичный" способ; часто в той или иной форме используется в алгоритмах; небольшая (в общем случае) "избыточность" информации позволяет организовать удобный поиск.

1.5.2. Свойства бинарных отношений на множестве А

Наиболее общие свойства бинарного отношения определяются понятиями: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Бинарное отношение называют *рефлексивным*, если все пары из одинаковых элементов принадлежат R:

$$\forall x \in A\ \ <x,x> \in R, \text{ или } (R - \text{рефлексивно}) \Leftrightarrow I_A \subseteq R.$$

Бинарное отношение называют *антирефлексивным*, если все пары из одинаковых элементов не принадлежат R:

$$\forall x \in A\ \ <x,x> \notin R \text{ или } (R - \text{антирефлексивно}) \Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing.$$

Бинарное отношение может не обладать свойствами рефлексивности и антирефлексивности, если некоторые пары одинаковых элементов не принадлежат R. В матрице рефлексивного бинарного отношения на главной диагонали расположены единицы, для антирефлексивного бинарного отношения на главной диагонали – нули.

Симметричными называют бинарные отношения, в которых порядок элементов не имеет значения:

$$(<x,y> \in R) \Rightarrow (<y,x> \in R), \text{ или } (R - \text{симметрично}) \Leftrightarrow R = R^{-1}.$$

Для *антисимметричного* бинарного отношения порядок элементов имеет решающее значение: если $xRy, x \neq y$, то yRx, точнее:

$$((<x,y> \in R) \text{ и } (<y,x> \in R)) \Rightarrow x = y, \text{ или } (R - \text{антисимметрично}) \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A.$$

Матрица симметричного бинарного отношения – симметрична. В матрице антисимметричного бинарного отношения каждой внедиагональной единице соответствует симметричный нуль, а главная диагонали заполнена единицами.

Транзитивным бинарным отношением называется отношение, для которого справедливо следующее условие:

$$(\forall x,y,z \in A):(<x,y>\in R \text{ и } <z,y>\in R) \Rightarrow <x,z>\in R$$

$$\text{или } (R - \text{транзитивное}) \Leftrightarrow R\ R \subseteq R.$$

Полным (*линейным*) называют отношение, для которого любые два несовпадающие элемента множества, взятые в определенном порядке, принадлежат отношению:

$\forall x,y \in A: x \neq y \Rightarrow$ $(\langle x,y\rangle \in R$ или $\langle y,x\rangle \in R)$, или ($R$ – полно) $\Leftrightarrow R \bigcup I \bigcup R^{-1} = U$.

1.6. Отношение эквивалентности на множестве А

Отношением эквивалентности на множестве *A* (эквивалентностью на *A*) называется рефлексивное, симметричное, транзитивное бинарное отношение. Задание эквивалентности на множестве проявляет структуру или строение множества в том смысле, что позволяет представить множества в виде объединения непересекающихся множеств. Очевидно, что любое множество можно представить в виде объединения некоторой совокупности его подмножеств. Такое представление множества *A* с помощью совокупности попарно непересекающихся множеств называется *разбиением множества на классы:*

$$\forall i \neq j,\ A = \bigcup_i A_i, \quad A_i \bigcap A_j = \varnothing.$$

Если на *A* задано бинарное отношение эквивалентности *R*, то *классом эквивалентности элемента* $x \in A$ *по эквивалентности R* называют множество всех элементов *A*, каждый из которых находится в отношении эквивалентности с *x* (множество эквивалентных элементов)

$$[x]_R = x / R = \{y \,|\, <x, y> \in R\}.$$

Можно показать, что классы эквивалентности элементов образуют разбиение множества:

- $\forall x \in A$ принадлежит некоторому классу (из рефлексивности $x \in [x]_R$);
- эквивалентные элементы принадлежат одному классу;

$$< x, y > \in R \Rightarrow [x]_R = [y]_R ;$$

$$\forall z \in [x]_R \Leftrightarrow x \sim z; \; x \sim z \Rightarrow z \sim x; \; z \sim x \text{ и } x \sim y \Rightarrow z \sim y;$$

$$z \sim y \Rightarrow y \sim z \Rightarrow z \in [y]_R ;$$

$$([x]_R \subseteq [y]_R; [y]_R \subseteq [x]_R) \Rightarrow [x]_R = [y] .$$

Классы неэквивалентных элементов не имеют общих элементов:

$$< x, y > \notin R \Rightarrow [x]_R \cap \; [y]_R = \varnothing.$$

Пусть $\exists z \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow (z \in [x]_R, \; (x \sim z), z \in [y]_R, \; (y \sim z))$, тогда из симметричности R следует $z \sim y$ и $(x \sim z, \; z \sim y) \Rightarrow x \sim y$.

Задание эквивалентности на A однозначно определяет разбиение A. Обратное тоже справедливо. Любое разбиение множества A на попарно непересекающиеся подмножества определяет некоторое отношение эквивалентности на A. Множество классов эквивалентности элементов A по эквивалентности R называют *фактор-множеством A по R* (A / R). Мощность этого множества называют *индексом разбиения.*

Примеры

1) Отношение равенства на множестве будем обозначать E (каждый элемент равен себе и не равен всем остальным). Это минимальное отношение, в том смысле, что удаление любой пары делает отношение нерефлексивным. Каждый класс эквивалентности содержит только один ("свой") элемент. Фактор-множество совпадает с исходным множеством.

2) На конечном множестве символов A (алфавите) бинарное отношение "быть словом одинаковой длины" определяет эквивалентность. Классу эквивалентности принадлежат все слова одинаковой длины, фактор-множество – счетно.

3) На множестве треугольников в плоскости бинарное отношение конгруэнтности определяет эквивалентность. Класс эквивалентности составляют все треугольники, которые совпадают при наложении. Мощность класса равна мощности континуума, фактор-множество имеет континуальный индекс.

4) Будем называть формулой выражение из знаков функций, описывающих суперпозицию этих функций, и символов аргументов. Утверждение, состоящее из формул, описывающих суперпозицию элементарных функций, соединенённых знаком равенства, задает бинарное отношение на множестве формул – *отношение равносильности*. Формулы равносильны, если описывают одну и ту же функцию. Равносильность отличается от отношения *E*. Отношение *E* для формул – это совпадение формул по написанию (*графическое равенство*). По отношению равносильности формулы одной и той же элементарной функции принадлежат одному классу эквивалентности. Здесь счетно само множество, каждый класс эквивалентности и фактор-множество.

Будем называть множества *A* и *B* эквивалентным и (*A*~*B*), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Введенное выше отношение, очевидно, является рефлексивным, симметричным и транзитивным, т.е. задает эквивалентность и определяет разбиение множеств на классы.

Мощность множества A определяется как класс эквивалентности данного множества, т.е. как класс разбиения, которому принадлежит *A* (|*A*|). Множества из одного класса называют *равномощными.* Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда состоят из одного и того же числа элементов; класс эквивалентности конечного множества содержит все множества с одинаковым количеством элементов, поэтому мощность конечных множеств характеризуется числом элементов, т.е. если A содержит n элементов, то $|A|=n$. Мощность – это то общее, что есть у эквивалентных множеств; для конечных множеств – это количество элементов. В этом смысле понятие мощности в применении к бесконечным множествам является аналогом понятия количество (количественным (кардинальным) числом).

1.7. Отношение порядка

Всякое рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на множестве *A* определяет отношение *предпорядка*. В качестве примера рассмотрим множество языков *L* с отношением перевода $\pi(l_1\pi\ l_2$, если возможен перевод с l_1 на l_2). π – рефлексивно, так как существует перевод с l_i на l_i для любых $l_i \in L$. π – транзитивно, так как $(l_1\pi\ l_2$ и $l_2\pi\ l_3) \Rightarrow l_1\pi\ l_3$. π – не является симметричным, так как из

$l_1 \pi\ l_2$ не следует $l_2 \pi\ l_1$. π – не является антисимметричным, так как из ($l_1 \pi\ l_2$ и $l_2 \pi\ l_1$) не следует $l_1 = l_2$.

Бинарное отношение на множестве A, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности, называется отношением *порядка (частичным порядком*) и обозначается $\leq$. Иррефлексивное, транзитивное, антисимметричное бинарное отношение на множестве A определяет отношение строгого порядка (<). В силу рефлексивности $\leq$, каждый порядок включает в качестве подмножества функцию $I_A : A \to A$, или $I_A = \{< x, x > \mid \ \forall x \in A\}$. Если эту функцию исключить из $\leq$, то получается <, связанный с заданным порядком очевидным соотношением $< \, = \, \leq \backslash I_A$. Так как $\leq \cap I_A = \varnothing$, то в рамках бинарного отношения $\leq$ можно ввести отношение <, так, что $x < y$, если $x \leq y$ и $x \neq y$.

Отношение порядка, обратное к $\leq \left(\leq^{-1}\right)$, называется двойственным к $\leq$ и обозначается как $\geq$.

Множество A называется *частично упорядоченным*, если $A \neq \varnothing$ и на нем задан порядок $\leq$. Множество A с разными порядками $\leq_1, \leq_2$ обычно считается различными множествами. Элементы $x, y \in A$, где A – частично упорядоченное множество, называют *сравнимыми*, если $x \leq y$ или $y \leq x$, и *несравнимыми*, если $< x, y > \notin \leq$ и $< y, x > \notin \leq$. Частичный порядок на A называют *линейным порядком*, а множество A – *линейно упорядоченным,* если любые два элемента сравнимы по $\leq$.

Очевидно, что в частично упорядоченном множестве можно найти подмножества, все элементы которых сравнимы между собой. Такие подмножества называют *цепью*. Более строго, *цепью* называется подмножество B частично упорядоченного множества, если оно *линейно упорядочено* отношением $\leq \cap B^2$.

<u>*Примеры*</u>

1. На любом множестве A можно ввести отношение *тривиального порядка* в виде равенства элемента самому себе, т.е. для $\forall a, b \in A \quad a \leq b$, если $a = b$ или $\leq = I_{\text{A}}$. Так как любые два неравные элементы множества A несравнимы, то A – частично упорядоченное множество. Матрица отношения порядка совпадает с единичной матрицей.

2. На множестве всех подмножеств произвольного непустого множества A ($P(A)$) отношение порядка вводится с помощью отношения

включения $\subseteq$ или <B, C> $\subseteq\leq$, если $B \subseteq C$. Отношение включения рефлексивно, так как $B \subseteq B$; транзитивно, так как из $B \subseteq C$ и $C \subseteq D$ следует $B \subseteq D$; антисимметрично, поскольку, если $B \subseteq C$ и $C \subseteq B$, то $B = C$. Множество *P(A)* является частично упорядоченным, потому что любые два подмножества *B*, *C* такие, что $B \cap C \neq B$ и $B \cap C \neq C$ – не сравнимы.

3. На множестве точек плоскости (*x, y*) зададим отношение *R* = {*x, y*| *x* = *y* или прямая *xy* перпендикулярна *OX* и *x* лежит ниже *y*}. *R* - рефлексивно по определению; *R* – транзитивно так как, если *x* < *y* (*x* ниже *y* на одной прямой) и *y* < *z* (*y* ниже *z* на той же прямой), то *x* < *z* (*x* ниже *z*); *R* – антисимметрично, так как *x* ниже *y* и *y* ниже *x*, тогда и только тогда, когда *x* = *y*. Точки не лежащие на одной вертикальной прямой не сравнимы, поэтому множество является частично упорядоченным.

Элемент $v \in A$ $(w \in A)$ частично упорядоченного множества A называется наибольшим (наименьшим), если для любого $x \in A$ выполняется $x \leq v$ $(w \leq x)$. Понятно, что наибольший (наименьший) элемент сравним со всеми элементами множества. Поэтому из антисимметричности порядка следует, что наибольший (наименьший) элемент, если он существует, то единственен. Множество может и не иметь наибольшего (наименьшего) элемента.

Множества из первого и третьего примеров не имеют ни наибольшего, ни наименьшего элементов. Во втором примере пустое множество является наименьшим, а исходное множество – наибольшим элементами. Следует отметить, что в матрице отношения порядка строка (столбец) наименьшего (наибольшего) элемента не содержат ни одного нуля.

Элемент $v \in A$ $(w \in A)$ называется *максимальным* (*минимальным*), если $\exists x \in A : v \leq x \Rightarrow x = v$ $(x \leq w \Rightarrow x = w)$.

Максимальный (минимальный) элемент является наибольшим (наименьшим) на подмножестве всех сравнимых с ним элементов. Отсюда следует, что максимальный элемент в парах отношения порядка может быть только вторым и (или) "занимать оба места"; минимальный – только первым и (или) "занимать оба места". Поэтому в матрице столбец, соответствующий минимальному элементу, содержит только одну единицу на диагонали. Для максимального элемента аналогичное утверждение справедливо относительно строки.

Определим максимальные и минимальные элементы в рассмотренных выше примерах. В тривиально упорядоченном множестве каждый элемент одновременно является максимальным и минимальным. Во втором примере максимальный элемент совпадает с наибольшим, минимальный – с наименьшим. Множество третьего примера не имеет минимальных и максимальных элементов.

Можно доказать, что:

- если существует наибольший (наименьший) элемент частично упорядоченного множества, то он же является и максимальным (минимальным);
- обратное утверждение в общем случае несправедливо, но для линейно упорядоченного множества выполняется;
- в конечном линейно упорядоченном множестве максимальный элемент множества совпадает с наибольшим не только для самого множества, но и для всех подмножеств;
- в конечном частично упорядоченном множестве всегда есть максимальный и минимальный элементы, но наибольший и наименьший не всегда;
- элемент, являющийся максимальным и минимальным одновременно, не сравним с другими элементами.

Верхней (*нижней*) *гранью* подмножества $B \subseteq A$ называется любой $a \in A$, больший или равный (меньший или равный), чем все элементы $b \in B$. Точнее,

$$\forall a \in A: \quad \forall b \in B \le a \qquad (\forall a \in A: \quad a \le \forall b \in B).$$

Здесь важно, что верхняя (нижняя) грань «выбирается» из элементов A (включая и $B \subseteq A$), сравнимых со всеми элементами B.

Множество верхних (нижних) граней подмножества B называют *верхним* (B^{Δ}) и *нижним* (B^{∇}) *конусами*. Наименьший элемент верхнего конуса, если он существует, называется *точной верхней гранью (sup B)*. Наибольший элемент B^{∇} называют *точной нижней гранью (inf B)*. Для того чтобы точная грань существовала, очевидно, все элементы соответствующего конуса должны быть сравнимы с этим элементом. Если точная грань существует, то она единственна, то есть *inf B* и *sup B* – однозначно определенные элементы A.

На множестве всех подмножеств (пример 2) для всякого $B \subseteq A$ верхний конус образуют множества C, в которые включено B, т.е.

$B^{\Delta}=\{C | C \bigcup B=C\}$и, очевидно, *sup* B = B. Нижний конус состоит из таких C, которые сами включены в B, т.е. $B^{\nabla}=\{C \mid C \bigcap B=C\}$и, понятно, *inf* B = B.

Определим точную верхнюю и нижнюю грани для двухэлементных подмножеств этого примера, т.е. когда B = $\{B_1, B_2\}$, причем в общем случае $B_1 \not\subset B_2$ и $B_2 \not\subset B_1$.

B^{∇} = { С| С содержит элементы, принадлежащие B_1 и B_2 одновременно},

$$inf\ B=B_1 \bigcup B_2 .$$

B^{Δ} = {С| С содержит элементы, принадлежащие B_1 или B_2},

$$sup\ B=B_1 \bigcap B_2 .$$

Можно доказать, что это справедливо, когда $B_1 \subseteq B_2$ или $B_2 \subseteq B_1$.

1.8. Решётки

Частично упорядоченное множество L называют *решёткой* (*структурой*), если каждое его двухэлементное подмножество имеет точные верхние и нижние грани, то есть

$$\forall\ x, y\ \in L \text{ существуют } inf\{x, y\} \text{ и } sup\{x, y\}.$$

Убедимся, что семейство множеств произвольного множества A, упорядоченного отношением включения, является решёткой. Определим точные грани для произвольного двухэлементного подмножества $\{x, y\}$, $x \in P(A)$, $y \in P(A)$. Пусть верхний конус этого множества состоит из множеств *z*, где z – множество, сравнимое с x и y, и $x \subseteq z, y \subseteq z$, то есть z содержит элементы множеств x и y. Очевидно, ”минимальное “ z, определяющее точную верхнюю грань, равно объединению x и y, то есть

$$sup\{x, y\}=x \bigcup y .$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$inf\{x, y\}=x \bigcap y .$$

В силу общности этих соотношений, знаки $\bigcup$, $\bigcap$ часто используют как символы взятия точной верхней и точной нижней граней.

Простейшей решёткой является любая цепь. Так как любые два элемента цепи сравнимы и, если $a \leq b$, то $sup\{a, b\}=b$, $inf\{a, b\}=a$, то есть точные грани определены для всех пар элементов цепи.

Частично упорядоченное множество, в котором любое подмножество имеет точные грани, называют полной решёткой. Если все цепи в решётке конечны, то решётка полная, поэтому конечная решётка всегда полная. Решётки на конечных множествах удобно изображать в виде ориентированного графа, в котором вершины обозначают элементы множества, а дуги соединяют «меньший» элемент с непосредственно «большим». В этом случае: $a \le b$ – если и только если существует путь из a в b; верхняя грань $\{a,b\}$ – это элемент, в который есть путь из a и из b; нижняя – элемент из которого есть путь в a и в b.

Пример

Пусть A – множество двоичных векторов длины 3, то есть $a = <a_1, a_2, a_3>$, упорядоченное так, что $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a_i \le b_i$, $i = 1, 2, 3$. Решётка на множестве A изображена на рис 1.3.

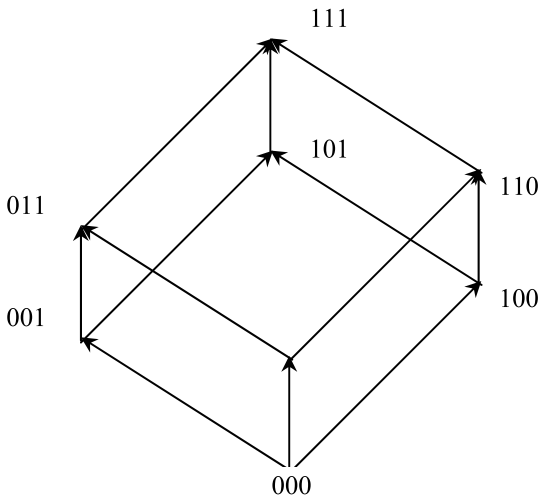

Рис. 1.3. Решетка на множестве A

Ввиду того, что точная нижняя грань и точная верхняя грань – однозначно определенные элементы решетки, то на решетке можно ввести алгебраические операции.

Теорема 1. Если L – решётка, то, определив операции + и * в виде $a + b = sup\{a,b\}$, $a * b = inf\{a,b\}$, получим алгебраическую систему, операции которой обладают следующими свойствами:

1) $a + b = b + a$, $a * b = b * a$ – независимость граней от порядка элементов;

2) $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a*b)*c = a*(b*c)$ – независимость граней от порядка выполнения операций;

3) $a + a = a$, $a * a = a$ – грани однотипных множеств совпадают с самими элементами;

4) $(a+b)*a = a$, $a * b + a = a$ – результат последовательного взятия точной нижней грани и точной верхней грани с одним и тем же элементом.

Эта теорема допускает обращение, то есть справедлива теорема 2.

Теорема 2. Всякое множество L с операциями +, *, обладающими свойствами 1 – 4, можно превратить в решётку, определив отношение порядка в виде $a \le b$, если $a = ab$, то есть

$$a \le b\text{, если } inf\{a,b\} = a.$$

При этом $\inf\{a,b\} = a\,b$, $sup\{a,b\} = a + b$ и $a \le b$ тогда и только тогда, когда $a + b = b$,

$$a \le b\text{, если } sup\{a,b\} = b.$$

Важным классом решёток являются *дистрибутивные* решётки. По определению решётка L дистрибутивна, если

$$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c),\ (a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c).$$

Дистрибутивные решетки часто встречаются при математическом моделировании сложных систем.

1.9. Задачи к главе 1

1. Доказать тождества:

а) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,

б) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$,

в) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,

г) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$,

д) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$,

е) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$,

ж) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

з) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$,

и) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$.

2. Доказать, что для любых множеств справедливо:

а) $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C$,

б) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$,

в) $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$,

г) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.

3. Верно ли, что для любых множеств A, B, C справедливо:

а) $(A \cap B \subseteq \overline{C}$ и $A \cup C \subseteq B) \Rightarrow A \cap C = \varnothing$,

б) $(A \ne B$ и $B \ne C) \Rightarrow A \ne C$.

4. Решить уравнения с множествами:

а) $A \setminus X = B,\ A \cup X = C$;

б) $A \cup X = B \cap X,\ A \cap X = C \cup X$.

5. Доказать тождества:

а) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$, б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times D)$,

в) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

г) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

6. Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R\,R$, $R^{-1}R$, $R\,R^{-1}$ для бинарных отношений:

а) $R = \{<x, y> \mid x, y \in N$ и x делит $y\}$,

б) $R = \{<x, y> \mid x, y \in D$ и $2x \geq 3y\}$.

7. Для каких бинарных отношений справедливо равенство

$R^{-1} = \bar{R}$?

8. Доказать, что для любых бинарных отношений:

а) $R(P\,Q) = (R\,P)Q$,

б) $(R\,P)^{-1} = P^{-1}R^{-1}$,

в) $(R \cup P)Q = (R\,Q) \cup (P\,Q)$.

9. Пусть R – бинарное отношение на множестве A. Доказать, что

$R = I_A \Leftrightarrow R\,R_1 = R_1\,R = R_1$ для любого R_1 на A.

10. Доказать, что для того чтобы R было взаимно однозначным соответствием между A и B, необходимо и достаточно, чтобы

$R\,R^{-1} = I_A$, $R^{-1}R = I_B$.

11. Доказать, что:

а) если R и P рефлексивны, то рефлексивны и $R \cup P$, $R \cap P$, R^{-1}, $R\,P$;

б) если R и P симметричны, то симметричны и $R \cup P$, $R \cap P$, R^{-1}, $R\,P^{-1}$.

12. Для любого $R \subseteq A^2$ доказать, что

R – эквивалентность $\Leftrightarrow (R\,R^{-1}) \cup I_A = R$.

13. Доказать, что пересечение эквивалентностей есть эквивалентность.

14. Доказать, что произведение эквивалентностей $R_1\,R_2$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда $R_1\,R_2 = R_2\,R_1$.

15. Пусть отношения $\leq$, $<$ определены естественным образом на множестве целых чисел. Доказать, что $< \cdot < \neq <$, $\leq \cdot < = <$, $\leq \cdot \geq = N^2$.

16. Доказать, что если R – частичный порядок, то R^{-1} – частичный порядок.

17. Пусть A – частично упорядоченное множество, в котором каждая цепь имеет не более m элементов, а любое подмножество попарно несравнимых элементов содержит не более n элементов. Доказать, что A имеет не более mn элементов.

18. Доказать, что в решетке любой максимальный элемент является наибольшим, а любой минимальный – наименьшим.

19. Доказать, что в любой конечной решетке существуют наибольший и наименьший элементы.

Глава 2. **АЛГЕБРА ЛОГИКИ**

В дальнейшем изложении высказывание будет интересовать нас лишь как объект, которому приписывается одно из двух значений: *и* – "истина" или *л* – "ложь". Поэтому каждое высказывание мы отождествим с его истинностным значением, т.е. с одним из элементов множества $\{и, л\}$ или, как это будет иногда удобно, множества $\{0, 1\}$. Рассматривая ту или иную логическую операцию на этом множестве, мы постараемся приблизить ее к нашему пониманию соответствующей логической связки. Это позволит продолжить, но уже на строгом уровне, изучение логических связок, введенных в 1-й главе.

Определение операции конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$, импликации $\Rightarrow$, отрицания $\neg$ поместим в следующую таблицу:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$
л	*л*	*л*	*л*	*и*
л	*и*	*л*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*и*	*л*
и	*и*	*и*	*и*	*и*

x	$\neg x$
л	*и*
и	*л*

2.1. Формулы и функции алгебры логики

Формула будет определена как конечная последовательность символов алфавита, в который входят:

1. $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ – переменные, называемые пропозициональными переменными. При интерпретации формул эти переменные будут пробегать множество $\{и, л\}$.

2. $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$ – логические символы. Эти символы будут использоваться как соответствующие логические операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания.

3. (,) – технические символы.

Понятие формулы введем индуктивным определением, указав сначала самые простые формулы (база индуктивного определения), затем – правила образования из них остальных формул.

Определение.

1. Каждая пропозициональная переменная – формула .

2. Если *A и B – формулы, то формулами будут и следующие последовательности:* $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \Rightarrow B)$, $\neg A$.

3. Последовательность является формулой только в том случае, если она образована по правилам 1 и 2.

Примеры формул:

$$((x \Rightarrow y) \wedge z),\ (\neg\ (x \Rightarrow \neg y) \Rightarrow (x \vee y)),\ ((x \Rightarrow y) \Rightarrow ((z \Rightarrow x) \vee z)),$$
$$(((x \Rightarrow \neg\ y) \wedge y) \Rightarrow x)\ .$$

В этом нетрудно убедиться, восстановив последовательность образования этих формул из пропозициональных переменных. Так, в первом случае мы имеем: x, y – переменные, а значит по пункту 1 определения – формулы; $(x \Rightarrow y)$ – формула по пункту 2; а так как и z – формула, то $((x \Rightarrow y) \wedge z)$ – формула по пункту 2.

Примем ряд соглашений, которые позволят нам не быть столь пунктуальными в расстановке скобок, как того требует определение формулы. Во-первых, мы договоримся опускать в формуле пару внешних скобок. Во-вторых, расположим логические символы в последовательность $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и будем говорить, что всякий символ в этой последовательности действует на скобки сильнее всех символов справа от него. Условимся считать, что сокращенная запись формулы выполнена верно, если восстановление скобок по силе действия на них логических символов приводит к исходной формуле.

Например, формула $((x \vee (y \Rightarrow \neg\ z)) \Rightarrow (x \wedge y))$ с учетом наших соглашений перепишется в виде $x \vee (y \Rightarrow \neg\ z) \Rightarrow x \wedge y$, так как последовательное восстановление скобок приводит нас к данной формуле:

$$x \vee (y \Rightarrow \neg\ z) \Rightarrow (x \wedge y),$$
$$(x \vee (y \Rightarrow \neg\ z)) \Rightarrow (x \wedge y),$$
$$((x \vee (y \Rightarrow \neg\ z)) \Rightarrow (x \wedge y)).$$

Функции алгебры логики. Рассмотрим произвольную формулу алгебры логики и припишем ее пропозициональным переменным некоторые значения из множества $\{$*и, л*$\}$. Логические символы, встречающиеся в формуле, будем при этом рассматривать как обозначения соответствующих логических операций. Тогда, используя определения основных логических операций, можно вычислить *значение формулы* для данного набора значений ее переменных. Например, положив в формуле

$$(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg x \Rightarrow \neg y)$$

$x = л$, $y = и$, и выполнив последовательно указанные операции, получим:

$$\underbrace{\underbrace{(л \Rightarrow и)}_{и} \Rightarrow \underbrace{(\neg л \Rightarrow \neg и)}_{л}}_{л}$$

т.е. данная формула на наборе <*л, и*> принимает значение *л*.

Такой подсчет можно провести для любой формулы и любого набора значений ее переменных. Таблица значений формулы, вычисленных для всех наборов ее переменных, часто называется еще *истинностной таблицей* данной формулы.

Для формулы $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg x \Rightarrow \neg y)$ эта таблица выглядит следующим образом:

x	y	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg x \Rightarrow \neg y)$
л	*л*	*и*
л	*и*	*л*
и	*л*	*и*
и	*и*	*и*

Поскольку значение формулы для каждого набора значений ее переменных вычисляется однозначно, имеет смысл говорить об операции, задаваемой этой формулой на множестве $\{и, л\}$.

<u>Определение</u>. *n-местную операцию* $f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ *на множестве* $\{и,л\}$ *назовем функцией алгебры логики от переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Итак, всякая формула алгебры логики задает некоторую функцию. Для обозначения этой функции мы будем употреблять формулу, ее задающую. В частности, мы будем говорить далее о функциях $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \Rightarrow y$, $\neg x$, которые будем называть основными логическими функциями. Несколько ниже мы убедимся и в обратном: каждая функция алгебры логики реализуется некоторой формулой.

Функции алгебры логики f и g считаются *равными* $(f = g)$, если для каждого набора значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, входящих хотя бы в одну из этих функций, значения функций f и g совпадают. Так, например, $(x \wedge \neg x) \vee z = z$, но $x \wedge y \neq x \wedge z$.

Равносильные формулы. Составим истинностные таблицы для формул $x \Rightarrow y$, $\neg x \vee y$:

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x \vee y$
л	*л*	*и*	*и*
л	*и*	*и*	*и*
и	*л*	*л*	*л*
и	*и*	*и*	*и*

Сравнение таблиц показывает, что различные формулы могут задавать одну и ту же функцию.

Определение. Формулы А и В называются равносильными, если они задают равные функции. В этом случае пишут А = В.

Отметим ряд равносильностей алгебры логики. Они аналогичны основным теоретико-множественным тождествам, которые характеризуют алгебру множеств как булеву алгебру, и в силу этого также называются булевыми.

1а) $x \wedge y = y \wedge x$

2а) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

3а) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

4а) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

5а) $x \wedge x = x$

6а) $x \wedge (y \vee \neg y) = x$

1б) $x \vee y = y \vee x$

2б) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

3б) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

4б) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

5б) $x \vee x = x$

6б) $x \vee (y \wedge \neg y) = x$

7) $\neg\neg x = x$

Проверку этих равносильностей можно провести непосредственным подсчетом их левых и правых частей.

Заметим, что если в формуле какую-либо ее часть, саму являющуюся формулой, заменить равносильной, то получим формулу, равносильную исходной. Это свойство позволяет проводить равносильные преобразования формул с целью их упрощения. Произведем это, к примеру, с формулой $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$:

$$(x \Rightarrow y) \Rightarrow y = (\neg x \vee y) \Rightarrow y = \neg(\neg x \vee y) \vee y = (\neg\neg x \wedge \neg y) \vee y =$$
$$= (x \wedge \neg y) \vee y = y \vee (x \wedge \neg y) = (y \vee x) \wedge (y \vee \neg y) = y \vee x.$$

Здесь мы при первом и втором преобразовании использовали равносильность $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$, а затем последовательно основные равносильности 4б), 7), 1б), 3б), 6а).

Назовем формулу $y \vee \neg y$ ($y \wedge \neg y$), а также каждую ей равносильную формулу, *тождественно истинной (тождественно ложной)* и введем для нее обозначение ***И*** (***Л***).

В преобразованиях формул часто бывают полезны следующие равносильности:

$$x \wedge \textbf{\textit{И}} = x,\ x \vee \textbf{\textit{Л}} = x,\ \textbf{\textit{И}} \Rightarrow x = x,\ x \vee \textbf{\textit{И}} = \textbf{\textit{И}},\ x \wedge \textbf{\textit{Л}} = \textbf{\textit{Л}}.$$

2.2. Задание функции формулой. Нормальные формулы

Введем обозначение, удобное в дальнейшем. Если $\varepsilon \in \{0, 1\}$ и A – произвольная формула, то

$$A^{\varepsilon} = \begin{cases} A, \text{ если } \varepsilon = и \\ \neg A, \text{ если } \varepsilon = л \end{cases}, \text{ в частности, } \quad x^{\varepsilon} = \begin{cases} x, \text{ если } \varepsilon = и \\ \neg x, \text{ если } \varepsilon = л. \end{cases}$$

<u>Определение</u>. Элементарной конъюнкцией называется всякая формула вида $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \wedge x_{i_2}^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, *где* $\varepsilon_i \in \{и,\ л\}$. *Элементарной дизъюнкцией называется всякая формула вида* $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \vee x_{i_2}^{\varepsilon_2} \vee \ldots \vee x_{i_n}^{\varepsilon_n}$.

Другими словами, элементарная конъюнкция (дизъюнкция) есть конъюнкция (дизъюнкция), каждый член которой есть переменная или отрицание переменной. Так, формулы $x \wedge y \wedge x$, $x \wedge y \wedge z$, $x \wedge \neg x \wedge y$, x представляют собой примеры элементарных конъюнкций, а формулы $x \vee \neg y \vee z$, $x \vee \neg y \vee x \vee z$, $x \vee \neg x \vee y$, x – элементарных дизъюнкций.

Элементарная конъюнкция $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \wedge x_{i_2}^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, все переменные в которой различны, принимает значение *и* тогда и только тогда, когда $x_{i_1} = \varepsilon_1,\ x_{i_2} = \varepsilon_2,\ \ldots,\ x_{i_n} = \varepsilon_n$. В самом деле, так как $и^и = и$ и $л^л = и$, то $\varepsilon_1^{\varepsilon_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_n^{\varepsilon_n} = и$. Если же мы возьмем набор $<\varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \ldots,\ \varepsilon_n'>$, отличный от $<\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n>$, то для некоторого k $(1 \le k \le n)$ $\varepsilon_k \ne \varepsilon_k'$. Тогда в конъюнкции $(\varepsilon_1')^{\varepsilon_1} \wedge \ldots \wedge (\varepsilon_n')^{\varepsilon_n}$ один из членов будет иметь вид $и^л$ или $л^и$. Так как $и^л = л^и = л$, то и вся элементарная конъюнкция $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \wedge$ $\wedge x_{i_2}^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ на наборе $<\varepsilon_1',\ \varepsilon_2',\ \ldots,\ \varepsilon_n'>$ примет значение *л*.

Аналогично можно показать, что элементарная дизъюнкция $x_{i1}{}^{\neg\varepsilon_1}$ $\vee\ x_{i2}{}^{\neg\varepsilon_2} \vee \ldots \vee x_{in}{}^{\neg\varepsilon_n}$ принимает значение *л* тогда и только тогда, когда $x_{i1} = \varepsilon_1,\ x_{i2} = \varepsilon_2,\ \ldots,\ x_{in} = \varepsilon_n$.

Будем говорить, что элементарная конъюнкция $x_{i1}^{\varepsilon_1} \wedge x_{i2}^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge$ $\wedge x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ и элементарная дизъюнкция $x_{i_1}^{\neg\varepsilon_1} \vee x_{i_2}^{\neg\varepsilon_2} \vee \ldots \vee x_{i_n}^{\neg\varepsilon_n}$ соответствуют набору $<\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n>$. Например, набору <*и, л, л, и*> соответствуют формулы $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$, $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4$.

Теорема. Всякая функция алгебры логики представима формулой, содержащей лишь логические символы $\wedge$, $\vee$, $\neg$.

Доказательство. Пусть на некотором наборе $<\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n>$ $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ = *и.* Выпишем все такие наборы. Для каждого из них построим соответствующую элементарную конъюнкцию. Затем возьмем дизъюнкцию этих конъюнкций.

Полученная формула принимает значение *и* на тех и только тех наборах $<\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n>$, где $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ = *и.* Действительно, на каждом таком наборе значение *и* принимает соответствующая этому набору элементарная конъюнкция, а значит и дизъюнкция таких конъюнкций. Если $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ = *л*, то на каждом таком наборе принимают значение *л* все элементарные конъюнкции, вошедшие в нашу формулу, так как никакая из них данному набору не соответствует. Значит, примет значение *л* и дизъюнкция этих конъюнкций.

Если на некотором наборе $<\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n>$ $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ = *л*, то можно поступить иначе: искомой формулой будет конъюнкция элементарных дизъюнкций, которые соответствуют тем наборам, на которых функция равна *л*.

Пример. Построить формулу от переменных *x, y, z,* которая принимает "истину" тогда и только тогда, когда большинство ее переменных принимают значение *л*.

Нужная формула истинна на наборах <*л, л, л*>, <*л, л, и*>, <*л, и, л*>, <*и, л, л*>. Им соответствуют элементарные конъюнкции $\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z$, $\neg x \wedge \neg y \wedge z$, $\neg x \wedge y \wedge \neg z$, $x \wedge \neg y \wedge \neg z$. Их дизъюнкция и будет искомой формулой:

$$(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z).$$

Поскольку искомая формула принимает *л* на наборах <*л, и, и*>, <*и, л, и*>, <*и, и, л*>, <*и, и, и*>, то нужной формулой будет также:

$$(\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).$$

<u>Определение</u>. Каждая формула вида $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$, где A_i – элементарная конъюнкция (i = 1, 2, ..., n), называется дизъюнктивной нормальной формулой (Д Н Ф). Так, формулы $x \wedge \neg y \wedge z$, $(x \wedge y) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee x$ – ДНФ.

Каждая формула вида $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, где A_i – элементарная дизъюнкция, i = 1, 2, ..., n, называется конъюнктивной нормальной формулой (КНФ). Например, формулы $x \vee y$, $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge y$ – КНФ.

Теорема. Всякая функция алгебры логики представима ДНФ и КНФ.

Доказательство. Если функция принимает только значение "ложь", то она представима, например, ДНФ $x \wedge \neg x$. Функция, принимающая только истинное значение, представима КНФ $x \vee \neg x$. Для остальных функций способ построения их КНФ и ДНФ указан в доказательстве предыдущей теоремы.

2.3. Суперпозиция функций алгебры логики. Полные системы функций

<u>Определение</u>. Пусть Ф – некоторая система функций алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $g(y_1, \ldots, y_k)$ – функции этой системы и y – произвольная переменная. Функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(y_1, \ldots, y_k), x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называются *элементарными суперпозициями функций системы Ф.*

Про первую функцию говорят, что она получена переименованием переменной из функции f, про вторую – подстановкой функции g в функцию f.

Обозначим через $\Phi^{(1)}$ множество всех элементарных суперпозиций функций системы $\Phi^{(0)}$ в Ф, через $\Phi^{(2)}$ – множество всех элементарных суперпозиций функций системы $\Phi^{(1)}$, и т.д. …, через $\Phi^{(n+1)}$ – множество всех элементарных суперпозиций функций системы $\Phi^{(n)}$. Получим последовательность классов функций $\Phi^{(0)} \subseteq \Phi^{(1)} \subseteq \Phi^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq \Phi^{(n)} \subseteq \Phi^{(n+1)} \subseteq \ldots$

Функция f называется суперпозицией системы Ф, если для некоторого n $f \in \Phi^{(n)}$.

<u>Определение</u>. Система функций называется полной, если всякая функция алгебры логики является суперпозицией функций этой системы.

Полнота системы функций означает, что каждая функция алгебры логики получается из функций этой системы применением конечного числа подстановок и переименований переменных.

Назовем некоторые примеры полных систем.

1. Всякая функция алгебры логики представима КНФ и ДНФ и поэтому может рассматриваться как соответствующая суперпозиция основных логических функций $x \wedge y$, $x \vee y$, $\neg x$. Это говорит о полноте системы $\{x \wedge y, x \vee y, \neg x\}$.

2. Каждая из систем функций $\{x \wedge y, \neg x\}$, $\{x \vee y, \neg x\}$, $\{x \Rightarrow y, \neg x\}$ – полная.

Чтобы убедиться в полноте какой-либо системы функций, достаточно выразить функции некоторой известной полной системы через функции исследуемой системы.

В нашем случае полнота первой системы функций следует из полноты $\{x \wedge y, x \vee y, \neg x\}$ и равенства $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$. Полнота второй системы получается из полноты той же системы и равенства $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$. Только что доказанная полнота системы $\{x \vee y, \neg x\}$ и равенство $x \vee y = \neg x \Rightarrow y$ влекут полноту третьей системы.

3. Рассмотрим систему, состоящую из одной функции, так называемого штриха Шеффера $x|y$, которая задается следующей таблицей:

x	y	$x\|y$
л	*л*	*и*
л	*и*	*и*
и	*л*	*и*
и	*и*	*л*

Непосредственно видно, что $x|y = \neg(x \wedge y) = {}$ $= \neg x \vee \neg y$. Следующие равенства выражают функции полной системы $\{x \wedge y, \neg x\}$ через штрих Шеффера: $\neg x = {}$ $= \neg x \vee \neg x = x|x$, $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg(x|y) = (x|y)|(x|y)$.
Что говорит о полноте системы $\{x|y\}$.

Наши дальнейшие исследования будут направлены на получение необходимых и достаточных условий полноты системы функций. Их итогом будет теорема Поста о функциональной полноте в алгебре логики.

2.4. Замкнутые классы функций

Определение. Совокупность функций Ф называется замкнутым классом, если каждая суперпозиция функций из Ф снова принадлежит Ф.

Множество всех функций алгебры логики образует, очевидно, замкнутый класс. Другим примером замкнутого класса можно назвать совокупность всех функций от одной переменной. Однако уже функции от двух переменных не образуют замкнутого класса, поскольку, например, функция $x\wedge y\vee z$, являющаяся суперпозицией функций $x\wedge y$, $x\vee z$, не принадлежит этой совокупности.

Мы переходим к рассмотрению следующих пяти важных замкнутых классов:

P_0 – класс функций, сохраняющих нуль;

P_1 – класс функций, сохраняющих единицу;

S – класс самодвойственных функций;

M – класс монотонных функций;

L – класс линейных функций.

Доказательство их замкнутости будет заключаться в проверке наследственности общего свойства, которое объединяет функции в данном классе, при подстановке и переименовании переменных.

В дальнейшем нам будет удобно вместо *и, л* писать соответственно 1, 0.

1. Класс P_0.

$$P_0 = \{f\,|\,f(0, 0, \ldots, 0) = 0\}.$$

Про каждую функцию из P_0 будем говорить, что она сохраняет нуль. P_0 не пуст, например, $x\vee y\in P_0$. P_0 не совпадает с классом всех функций алгебры логики. Докажем замкнутость этого класса. Во-первых, очевидно, что переименовывая переменную у функции, сохраняющей 0, мы в результате получим функцию, которая также сохраняет 0. Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, $g(y_1, \ldots, y_k) \in P_0$, т.е. $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $g(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Тогда $f(0, \ldots, 0, g(0, \ldots, 0), 0, \ldots, 0) = 0$, и значит, подстановка функции g в f принадлежит P_0.

2. Класс P_1.

$$P_1 = \{f\,|\,f(1, 1, \ldots, 1) = 1\}.$$

Каждая функция из P_1 на наборе из единиц принимает единицу. В этом случае будем говорить, что функция сохраняет единицу. Класс таких функций, очевидно, не пуст и не совпадает с классом всех функций алгебры логики. Проверка его замкнутости аналогична предыдущему случаю и предоставляется читателю.

3. Класс S.

<u>Определение</u>. Назовем функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$ *двойственной к функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Непосредственно из определения получаем, что
$(x \wedge y)^* = \neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg\neg x \vee \neg\neg y = x \vee y$,
$(x \vee y)^* = \neg(\neg x \vee \neg y) = \neg\neg x \wedge \neg\neg y = x \wedge y$,
т.е. конъюнкция и дизъюнкция двойственны.

Если 1 и 0 будут обозначать функции, тождественно равные соответственно 1 и 0 (функции константы), то
$1^* = 0$, $0^* = 1$.

Функция может совпадать со своей двойственной, как, например, в этом случае:

$$x^* = \neg\neg x = x,\ (\neg x)^* = \neg\neg\neg x = \neg x.$$

Такие функции назовем *самодвойственными* и объединим их в множество S:

$$S = \{f \mid f = f^*\}.$$

Разобранные выше примеры показывают, что этот класс не пуст и не совпадает с классом всех функций алгебры логики.

Покажем, что подстановка сохраняет свойство самодвойственности функций. Пусть $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $g(y_1, \ldots, y_k) \in S$, тогда
$(f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(y_1, \ldots, y_k), x_{i+1}, \ldots, x_n))^* = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_{i-1}, g(\neg y_1, \ldots, \neg y_k), \neg x_{i+1}, \ldots, \neg x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_{i-1}, \neg\neg g(\neg y_1, \ldots, \neg y_k), \neg x_{i+1}, \ldots, \neg x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_{i-1}, \neg g^*(y_1, \ldots, y_k), \neg x_{i+1}, \ldots, \neg x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_{i-1}, \neg g(y_1, \ldots, y_k), \neg x_{i+1}, \ldots, \neg x_n) = f^*(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(y_1, \ldots, y_k), x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(y_1, \ldots, y_k), x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

При переименовании переменной свойство самодвойственности функции также сохраняется. Таким образом, S – замкнутый класс.

4. Класс M.

<u>Определение</u>. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется монотонной, если для любых двух наборов* $<\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n>$ *и* $<\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'>$ *таких, что* $\varepsilon_i \le \varepsilon_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \le f(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n')$.

Очевидно, что монотонными будут функции константы 0, 1. Другим примером монотонных функций можно назвать конъюнкцию и дизъюнкцию. Функция же $f(x, y) = x \Rightarrow y$ не будет монотонной, так как $0 \le 1$, $0 \le 0$, но $f(0, 0) = 1 > 0 = f(1, 0)$.

Пусть M – класс всех монотонных функций и $g(y_1, ..., y_k), f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in M$. Рассмотрим результат подстановки g в f – функцию $f(x_1, ..., x_{i-1}, g(y_1, ..., y_k), x_{i+1}, ..., x_n)$. Если $<a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_k>$, $<a_1', ..., a_n', b_1', ..., b_k'>$ такие два набора, что каждая компонента первого не превосходит соответствующую компоненту второго, то ввиду монотонности функции g, $g(b_1, ..., b_k) \le g(b_1', ..., b_k')$ и значит $f(a_1, ..., a_{i-1}, g(b_1, ..., b_k), a_{i+1}, ..., a_n) \le f(a_1', ..., a_{i-1}', g(b_1', ..., b_k'), a_{i+1}', ..., a_n')$ ввиду монотонности f.

Таким образом, подстановка монотонной функции в монотонную снова дает монотонную функцию. Переименование переменной также не нарушает монотонности.

5. Класс L.

Суммой в алгебре логики обычно называют функцию $x + y$, определяемую следующей таблицей:

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Нам будет удобно перейти к арифметической терминологии и в обозначении конъюнкции: вместо $x \wedge y$ будем писать xy. Эти операции обладают многими привычными арифметическими свойствами. К звестным уже нам свойствам конъюнкции можно, в частности, добавить следующие:

$x + y = y + x,$

$x + (y + z) = (x + y) + z,$

$x(y + z) = xy + xz,$

$1x = x,\ 0x = 0,\ 0 + x = x.$

Система функций $\{xy,\ x + y,\ 1\}$ является полной. Это следует из полноты $\{x \wedge y, \neg x\}$ и равенств: $xy = x \wedge y$, $\neg x = x + 1$.

<u>*Определение*</u>*. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется линейной, если $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + ... + \varepsilon_n x_n + \varepsilon_{n+1}$, где $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$* $(i = 1, 2, ..., n+1)$.

Утверждение, что класс L линейных функций замкнут, представляется достаточно очевидным.

В заключение рассмотрим теорему, которая даст нам способ исследования функций алгебры логики на линейность приведением этой функции к некоторой нормальной форме, называемой полиномом Жегалкина.

Следуя принятой нами арифметической терминологии, назовем одночленом выражение вида $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, где все переменные различны. Как обычно два одночлена будем считать равными, если они состоят из одного множества переменных.

<u>Определение</u>. Полиномом Жегалкина назовем выражение

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \varepsilon,$$

где A_i – различные одночлены, $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

Теорема. Любая функция алгебры логики представима единственным полиномом Жегалкина.

Доказательство. Так как система $\{xy,\ x + y,\ 1\}$ полна, то всякую функцию алгебры логики можно представить суперпозицией функций этой системы. Используя дистрибутивность умножения относительно сложения, раскроем скобки в этом представлении. В результате получим сумму одночленов (если в каком-либо слагаемом будут одинаковые сомножители, мы воспользуемся равенством $xx = x$) и константы. Равенство $x + x = 0$ позволит избавиться от одинаковых слагаемых.

Предположим, что некоторая функция представима двумя полиномами Жегалкина:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m + \varepsilon = A_1' + A_2' + \ldots + A_n' + \varepsilon'. \qquad (1)$$

Если эти полиномы различны, то представляются две возможности:

1) $\varepsilon \neq \varepsilon'$. Положив все переменные в полиномах равными 0, получим равенство $0 = 1$.

2) В одном полиноме есть одночлен, которого нет в другом. Пусть это будет, например A_1 . Прибавив к обеим частям равенства (1) его правую часть, после вычеркивания пар равных одночленов, получим равенство вида

$$A_1 + B_1 + \ldots + B_k = 0,$$

где слева стоит полином Жегалкина. Выберем в нем одночлен с минимальным числом переменных и подсчитаем значение многочлена, когда все эти переменные равны 1, а остальные переменные – 0. Получим противоречие $1 = 0$.

Пример. Исследуем на линейность функции $x \Rightarrow y$ и $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$. Для этого представим функции полиномом Жегалкина:

$$x \Rightarrow y = \neg x \vee y = \neg(x \wedge \neg y) = 1 + x\,(1 + y) = 1 + x + xy,$$

$$(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) = (1 + x + xy)(1 + y + xy) =$$

$$= 1 + x + xy + y + xy + xyy + xy + xxy + xyxy =$$

$$= 1 + x + xy + y + xy + xy + xy + xy + xy = 1 + x + y\,.$$

По доказанной теореме заключаем, что функция $x \Rightarrow y$ не является линейной. Вторая же функция – линейная.

2.5. Теорема Поста о функциональной полноте алгебры логики

Теорема Поста дает необходимые и достаточные условия полноты системы функций алгебры логики. До формулировки и доказательства рассмотрим несколько лемм.

Лемма 1. Суперпозицией функции, не сохраняющей нуль, можно получить $\neg x$ или 1.

Суперпозицией функции, не сохраняющей единицу, можно получить $\neg x$ или 0.

Доказательство. Пусть $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin P_0$, т.е. $f\,(0, 0, \ldots, 0) = 1$. Переименовав все переменные на x, получим функцию $g\,(x, x, \ldots, x)$ со свойством $g(0) = f\,(0, 0, \ldots, 0) = 1$. Если при этом $g(1) = 1$, то $g\,(x) = 1$. Если же $g(1) = 0$, то $g(x) = \neg x$.

Вторая часть леммы рассматривается аналогично.

Лемма 2. Суперпозицией несамодвойственной функции и $\neg x$ можно получить функции константы 0 и 1.

Доказательство. Пусть $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin S$. Найдется такой набор $<\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n>$, что $f\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \neq \neg f\,(\neg\varepsilon_1, \ldots, \neg\varepsilon_n)$, т.е. $f\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = $ $= f\,(\neg\varepsilon_1, \ldots, \neg\varepsilon_n)$. Подставим в функцию f $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вместо $x_i\, x^{\varepsilon_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Получим функцию $g\,(x) = f\,(x^{\varepsilon_1}, \ldots, x^{\varepsilon_n})$. Так как для любого ε $1^{\varepsilon} = \varepsilon$, $0^{\varepsilon} = \neg\varepsilon$, то $g(1) = f\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = f\,(\neg\varepsilon_1, \ldots, \neg\varepsilon_n) = g\,(0)$. Таким образом, $g\,(x)$ – константа. *Другую константу мы получим, подставив найденную в $\neg x$.*

Лемма 3. Суперпозицией немонотонной функции и функций констант можно получить $\neg x$.

Доказательство. Пусть $f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \notin M$. Найдутся два набора $<\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n>$ и $<\varepsilon_1',\ \ldots,\ \varepsilon_n'>$ такие, что для всех i $\varepsilon_i \leq \varepsilon_i'$, но $f\,(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n) > f\,(\varepsilon_1',\ \ldots,\ \varepsilon_n')$. Это неравенство означает, что $f\,(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n) = 1$, $f\,(\varepsilon_1',\ \ldots,\ \varepsilon_n') = 0$. Переименуем переменные x_i в функции f такие, что $\varepsilon_i < \varepsilon_i'$ на x.

Если же $\varepsilon_i = \varepsilon_i'$, подставим вместо x_i функцию константу ε_i. В результате получим функцию $g(x)$ такую, что $g(0) = f\,(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n) = 1$ и $g(1) = f\,(\varepsilon_1',\ \ldots,\ \varepsilon_n') = 0$. Этим свойством обладает, очевидно, функция $g(x) = \neg x$.

Лемма 4. Суперпозицией нелинейной функции и $\neg x$ и функций констант можно получить функцию xy.

Доказательство. Пусть $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin L$. Тогда в полиноме Жегалкина, представляющем эту функцию, один из одночленов содержит, по крайней мере, две переменные, например x_1, x_2. Группируя члены, содержащие произведение x_1x_2, а также члены, содержащие по отдельности x_1 и x_2, получим $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\,\varphi_0(x_3, \ldots, x_n) + x_1\,\varphi_1(x_3, \ldots, x_n) + x_2\,\varphi_2(x_3, \ldots, x_n) + {}$ $+ \varphi_3(x_3, \ldots, x_n)$. Функция $\varphi_0(x_3, \ldots, x_n)$ не равна тождественно нулю. Поэтому найдется набор $<\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n>$ такой, что $\varphi_0(x_3,\ \ldots,\ x_n) = 1$. Подставляя его в f, получим функцию:

$$x_1x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \{0,\ 1\}.$$

Допустим, что в этой функции $\alpha = 1$. Тогда подставим вместо x_2 функцию $\neg x_2 = x_2 + 1$: $x_1\,(x_2 + 1) + x_1 + \beta\,(x_2+1) + \gamma = x_1x_2 + x_1 + x_1 + \beta x_2 + \beta + \gamma =$

$$= x_1x_2 + \beta x_2 + (\beta + \gamma).$$

Если $\beta = 1$, аналогично избавимся от βx_2.

Если в итоге получим функцию, свободный член которой равен 1, подставим ее в функцию $\neg x$.

Теорема Поста. Система функций Ф полна тогда и только тогда, когда для каждого из классов P_0, P_1, S, M, L в ней найдется функция, не принадлежащая этому классу.

Доказательство. Если система функций полна, то она не может целиком содержаться ни в одном из данных классов, так как в противном случае этот класс содержал бы все функции алгебры логики.

Пусть в системе Ф найдутся функции f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, и $f_0 \notin P_0$, $f_1 \notin P_1$, $f_2 \notin S$, $f_3 \notin M$, $f_4 \notin L$. По лемме 1 из функций f_0 и f_1 можно получить $\neg x$ или 1 и 0. В первом случае из $\neg x$ и f_2 по лемме 2 можно получить константы. Во втором случае по лемме 3 из констант и f_3 можно получить $\neg x$. Применяя теперь к функциям f_4 и $\neg x$, 0, 1 лемму 4, получим функцию xy.

Поскольку система функций $\{\neg x, xy\}$ полна, будет полна и система Ф. Теорема доказана.

Исследование конечной системы функций на полноту удобно оформлять так называемой таблицей Поста. Покажем, как это делается на примере системы $\{0, 1, xy, x + y + z\}$.

	P_0	P_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-			+	+
xy				+	-
$x{+}y{+}z$				-	

Знак «+» или «–» в клетке этой таблицы означает принадлежность или непринадлежность функции, стоящей в строке, классу, стоящему в данном столбце. Заполнение таблицы целесообразно вести по столбцам, останавливаясь каждый раз, как только встретится. Очевидно, что система полна тогда и только тогда, когда в каждом столбце будет хотя бы один минус. Система $\{0, 1, xy, x + y + z\}$ полна.

Глава 3. **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ**

Эта глава посвящена графам — математическим объектам, интересным во всех отношениях. Приведем обширную цитату из введения к книге Ф. Харари «Теория графов»: «Существует несколько причин нарастания интереса к теории графов. Неоспорим тот факт, что теория графов применяется в таких областях, как физика, химия, теория связи, проектирование ЭВМ, электротехника, машиностроение, архитектура, исследование операций, генетика, психология, социология, экономика, антропология и лингвистика. Эта теория тесно связана также со многими разделами математики, среди которых – теория групп, теория матриц, численный анализ, теория вероятностей, топология и комбинаторный анализ».

Теория графов – тот редкий раздел математики, о котором доподлинно известно, когда он возник и кто был его основоположником. «Отцом» теории графов (так же, как и алгебраической топологии) является Леонард Эйлер, опубликовавший в 1736 г. решение задачи о Кенигсбергских мостах.

Следующие шаги в развитии теории графов принадлежат Г. Кирхгофу, применившему теорию графов в 1847 г. к теории электрических цепей (законы Кирхгофа) и А. Келли, разработавшему в 1857 г. теорию деревьев и применившему ее к теории химических изомеров.

Родившись при решении головоломок и занимательных задач, в XX веке теория графов стала мощным средством решения проблем многих наук, широкая применимость стала дополнительным стимулом ее бурного развития: Сам термин «граф» ровно на 200 лет моложе этой теории, он введен в употребление в 1936 г. выдающимся венгерским математиком Д. Кёнигом.

3.1. Общее определение графа

Графы бывают двух типов – неориентированные и ориентированные. В нашем курсе мы будем в основном заниматься ориентированными графами (они чаще встречаются в приложениях).

<u>Определение</u>. *Ориентированным графом* (*орграфом, графом*) *будем называть тройку* $G(X, U, f)$, *где* X ($\neq\varnothing$) *– множество, называемое множеством вершин графа,* U *– множество (возможно, и пустое), называемое множеством дуг,* f *– отображение, действующее из* U *в* $X\times X$, *называемое отображением инцидентности.*

<u>Пример</u>. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 3.1

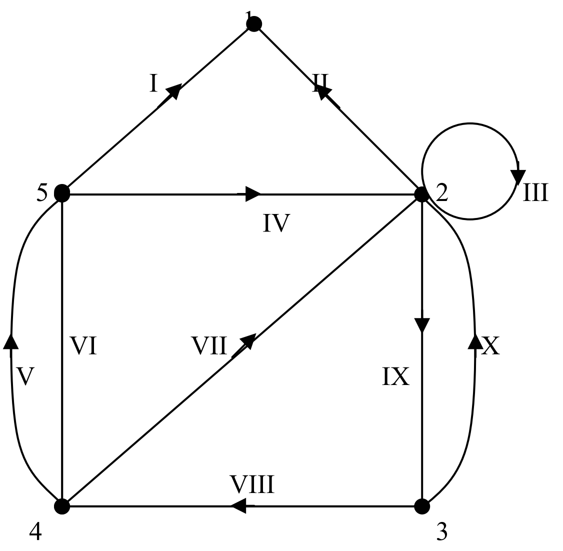

Рис. 3.1. Ориентированный граф

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$U = \{I, II, \dots, X\}$

$f(I) = (5, 1)$;

$f(II) = (2, 1)$

$f(III) = (2, 2)$

$f(IV) = (5, 2)$

$f(V) = (4, 5)$

$f(VI) = (4, 5)$

$f(VII) = (4, 2)$

$f(VIII) = (3, 4)$

$f(IX) = (2, 3)$

$f(X) = (3, 2)$

Введем в рассмотрение стандартные отображения

$$p_1 : X\times X \to X \text{ и } p_2 : X\times X \to X$$

следующим правилом:

$$p_1((x;y)) = x;\ p_2((x;y)) = y.$$

<u>Определение</u>. *Пусть $G(X, U, f)$ – граф, и $(\in U)$ – дуга. Назовем вершину $(p_1 \circ f)(u)$ началам дуги и, вершину $(p_2 \circ f)(u)$ – концом дуги и.*

Дуги и $(\in U)$ и v $(\in U)$ называются параллельными (кратными), если $f(u) = f(v)$.

Дуга $t(\in U)$ называется петлей в вершине x, если

$$(p_1 \circ f)(t) = (p_2 \circ f)(t) = x.$$

Если $f(u) = (x, y)$, то говорят, что дуга и инцидентна вершинам x и y. Вершина x $(x\in X)$ называется изолированной, если

$$f^{-1}((X\backslash\{x\})\times\{x\}) = f^{-1}(\{x\}\times(X\backslash\{x\})) = \varnothing.$$

Для графа на рис. 3.1 дуги V и VI параллельны, IX и X – противоположны, III – петля в вершине 2, вершина 6 – изолированная вершина. Вершина 2 инцидентна дугам II, III, IV, X, XI и VII.

<u>Пример</u>. *Граф шахматной игры.* Множество вершин этого графа – множество позиций шахматной игры (позиция – диаграмма расположения фигур и указание, чей ход предстоит). Дуги графа шахматной игры – такие упорядоченные пары позиций, в которых вторая может быть получена из первой по правилам шахматной игры за один ход. Отображение инцидентности – это отображение вложения множества дуг в декартово произведение вершин.

Сама шахматная игра может рассматриваться как игра двух лиц на графе шахматной игры. «Белые» находятся в вершине, отвечающей началу игры (исходная расстановка, ход белых), и совершают ход, т.е. выбирают одну из дуг, выходящих из этой вершины. «Черные» получают ход в вершине, соответствующей концу этой дуги, и т. д. Цель игры – «загнать» противника в такую вершину x, что $f^{1}(\{x\}$ x $X) = \varnothing$, т.е. в безвыходное положение.

3.2. Локальные характеристики графа

<u>Определение</u>. *Граф $G(X, U, f)$ называют конечным, если $|X| < \infty$,* $|U|<\infty$. В дальнейшем мы будем рассматривать только конечные графы (не оговаривая это дополнительно).

Определение. Пусть $x\ (x\in X)$ – вершина графа $G(X,U,f)$, поставим ей в соответствие три числа: deg_+x, deg_-x, $deg\,x$:

$deg_+x = |\,f^{-1}(X\times\{x\})|$ – число входящих в x дуг,

$deg_-x = |f^{-1}(\{x\}\times X)|$ – число выходящих из x дуг,

$deg\,x = deg_+x + deg_-x$.

deg_+x называют полустепенью захода в вершину x, $deg_-\,x$ – полустепенью исхода из вершины x, $deg\,x$ называют степенью вершины x.

Очевидно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. Для любого графа $G(X,U,f)$, у которого $|U|<\infty$, имеют место соотношения

1. $\sum\limits_{x\in X} \deg_+ x = \sum\limits_{x\in X}\deg_- x = |U|$,
2. $\sum\limits_{x\in X}\deg x = 2\,|U\,|$.

$$|U| = |f^{-1}(X\times X)| = |f^{1}(\cup(X\times\{x\})| = |\cup f^{1}(X\times\{x\})| =$$
$$= |\cup f^{1}(X\times\{x\})| = \Sigma|f^{1}(X\times\{x\})| =$$
$$= \sum_{x\in X} \deg_+ x = \textit{аналогично} = \sum_{x\in X}\deg_- x.$$

Соотношение 2() – это следствие соотношения (1).

Теорема 3.2. Теорема Эйлера о рукопожатиях. В любом конечном графе $G(X,U,f)$ число вершин нечетной степени четно или равно нулю.

Представим множество вершин X в виде $X = X_2\cup X_1$, отнеся к X_2 такие вершины x, у которых $degx = 2k_x$, $k_x\in Z_+$; а к X_1 - такие вершины x, y, у которых $degx = 2k_x+1$, $k_x\in Z_+$. Тогда, воспользовавшись соотношением (2) теоремы 3.1, получаем

$$2\,|U\,|= \sum_{x\in X} \deg x = \sum_{x\in X_2} \deg x + \sum_{x\in X_1}\deg x =$$
$$= 2\sum_{x\in X_2} k_x + 2\sum_{x\in X_1} k_x + \sum_{x\in X_1} 1 = 2\sum_{x\in X} k_x + |\,X_1\,| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\,X_1\,| = 2\,|U\,| = 2\sum_{x\in X} k_x = 2(|\,U\,| - \sum_{x\in X} k_x).$$

Правая часть кратна двум или равна нулю, значит $|X_1|$ кратно двум или равно нулю.

Возможная интерпретация данной теоремы такова: на любом мероприятии (приеме, банкете и т. п.) число лиц, совершивших нечетное число рукопожатий, четно или таких лиц нет вовсе.

Графы принято интерпретировать (изображать) рисунками, состоящими из точек, соответствующих вершинам, и линий со стрелками, изображающих дуги.

Приведем в качестве заключительного в этом параграфе примера граф возможного курса дискретной математики (рис. 3.2). Вершины графа будут соответствовать разделам: алгебра высказываний (АВ), алгебра предикатов (АП), алгебра множеств и отношений (АМО), отображения и комбинаторика (ОК), отношения (О), булевы функции (БФ), элементы теории алгоритмов (А), введение в теорию графов (ТГ). Дуги графа – стрелки, ведущие от разделов, материал которых используется при изучении данного раздела, к вершине, соответствующей данному разделу:

Вопросы и задания

1. Сравните условия теорем 3.1 и 3.2. Почему условия теоремы 3.1 слабее?
2. Оцените сверху количество дуг графа с *n* вершинами, на котором нет петель, противоположных и параллельных дуг.

3.3. Изоморфизм графов

Похожесть и непохожесть однотипных объектов в математике определяется понятием «изоморфизм».

<u>*Определение*</u>. *Графы* $G_1(X_1, U_1, f_1)$ *и* $G_2(X_2, U_2, f_2)$ *называются изоморфными (пишут* $G_1 \cong G_2$*), если существуют биективные отображения* $\varphi: X_1 \to X_2$ *и* $\varphi: U_1 \to U_2$ *такие, что*

$$(P_I \circ f_2 \circ \psi)(u) = (\varphi \circ P_I \circ f_1 \circ)(u), \vee u \in U,\ i = 1, 2.$$

(Иначе $P_I \circ f_2 \circ \psi = \varphi \circ P_I \circ f_1$ *и* $P_2 \circ f_2 \circ \psi = \varphi \circ P_2 \circ f_1$*).*

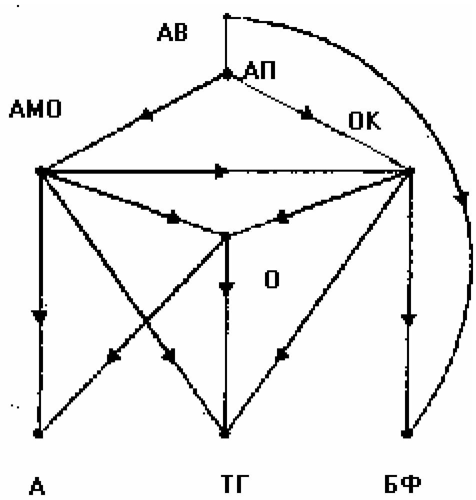

Рис. 3.2. Граф курса дискретной математики

Пример. Рассмотрим графы G_1, G_2, G_3, G_4, изображенные на рис. 3.3.

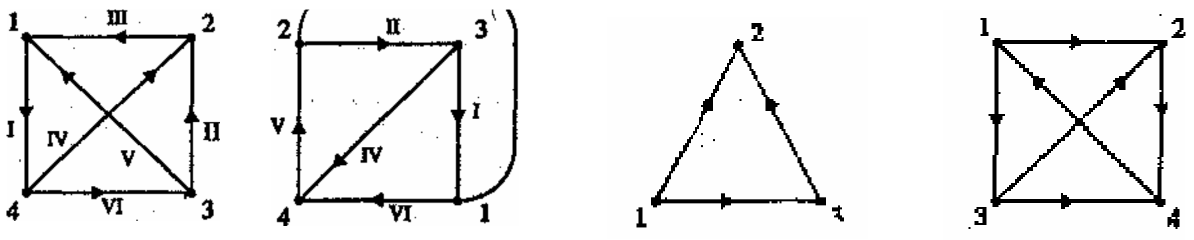

Рис. 3.3. Изоморфные графы

Очевидно, что $G_1 \cong G_2$, $G_1 \neq G_3$, $G_1 \neq G_4$. Изоморфизм $G_1 \cong G_2$ реализует отображения φ и ψ, заданные следующими соотношениями:

$\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = 4$, $\varphi(3) = 1$, $\varphi(4) = 3$,
$\psi(\mathrm{I}) = \mathrm{II}$, $\psi(\mathrm{II}) = \mathrm{VI}$, $\psi(\mathrm{III}) = \mathrm{V}$, $\psi(\mathrm{IV}) = \mathrm{IV}$,
$\psi(\mathrm{V}) = \mathrm{III}$, $\psi(\mathrm{VI}) = \mathrm{I}$.

Теорема 3.3. Изоморфизм — отношение эквивалентности на множестве графов Г, т.е. оно рефлексивно, симметрично, транзитивно:

1. $\forall G\ (\in \Gamma)\ G \cong G$;
2. $\forall G_1\ \forall G_2\ (G_1 \cong G_2 \Rightarrow G_2 \cong G_1)$;
3. $\forall G_1\ \forall G_2\ \forall G_3\ ((G_1 \cong G_2)\ \&(G_2 \cong G_3) \Rightarrow G_1 \cong G_3$.

Доказательство теоремы основано на том, что

а) тождественное отображение биективно;

б) биективные отображения обратимы и обратные к ним биективны;

в) композиция биективных отображений биективна.

3.4. Геометрические графы. Реализуемость графов

<u>*Определение*</u>. *Геометрическим графом называется граф, у которого множество вершин – множество отмеченных точек в R_2 или R_3, множество дуг – множество параметризованных отрезков непрерывных кривых в R_2 или в K_3, концами которых являются соответствующие им вершины графа.*

Все графы, приведенные раньше на рисунках, можно считать геометрическими.

Теорема 3.4. Для любого графа существует изоморфный ему геометрический граф (и в R_2, *и в* R_3), называемый его геометрической реализацией.

Вершинам графа поставим в соответствие помеченные точки плоскости или пространства, а дуги изобразим параметризованными отрезками прямых или дуг окружностей.

Определение. Геометрический граф называется правильно реализованным (или правильным), если его дуги не имеют общих точек, отличных от вершин графа.

Пример. Рассмотрим графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 3.4.

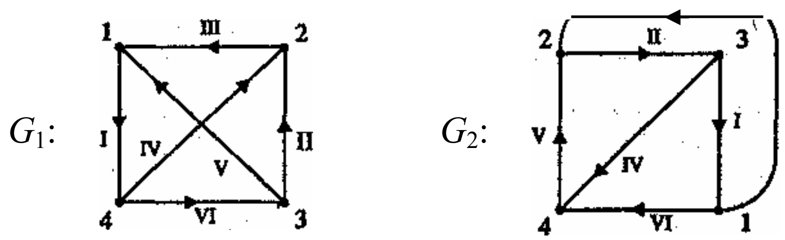

Рис. 3.4. Пример правильно реализованного графа

Граф G_1 не является правильно реализованным, граф G_2 – правильный. (Заметим, что $G_1 \cong G_2$, т.е. G_2 – правильная реализация G_1).

Теорема 3.5. Для любого графа существует его правильная реализация в R_3.

Опишем конструкцию, позволяющую построить правильную реализацию. Возьмем в R_3 произвольную прямую l. Вершинам графа $G(X, U, f)$ поставим в соответствие отмеченные точки на этой прямой (точки будем обозначать теми же буквами, что и вершины графа G).

Каждой дуге графа G будет соответствовать своя плоскость, проходящая через l. Если дуга $u \in U$ такова, что $f(u) = (x;y),\ x \neq y,$ то в соответствующей плоскости построим на отрезке $[x;\ y]$ как на диаметре полуокружность, параметризованную от x к y; если $w \in U$ и $f(w) = (z;\ z),$ то в соответствующей плоскости изобразим единичную окружность, касательную к l в точке z, параметризованную произвольно (рис. 3.5). Очевидно, эта конструкция дает правильную реализацию.

Определение. Граф называется плоским ($\Leftrightarrow$ *планарным), если у него существует правильная реализация в* R_3 .

Определение. *Полным графом K_n ($n \in N$) называется граф с n вершинами без петель, кратных и противоположных дуг (ориентация безразлична), у которого любые две вершины соединены дугой (рис. 3.6).*

Определение. *Полным двудольным графом $K_{n,\ m}$ ($n \leq m$) называется граф с $n+m$ вершинами без петель, кратных и противоположных дуг (ориентация безразлична), у которого множество вершин разбито на два непересекающихся подмножества с n и m вершинами, так что любые две вершины различных подмножеств соединены дугой и такие две вершины одного подмножества не соединены дугой (рис. 3.7).*

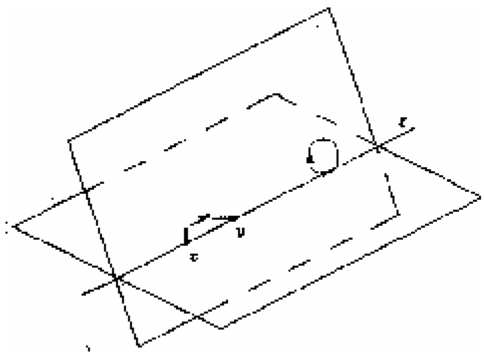

Рис. 3.5. Построение правильной реализации графа

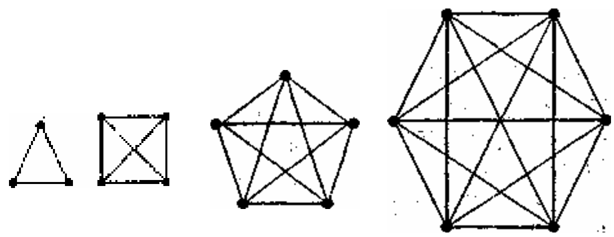

Рис. 3.6. Полные графы

Оказывается (и это доказали почти одновременно и независимо российский математик Л.С. Понтрягин и польский математик К. Куратовский), не являются плоскими графы K_5 и $K_{3,\ 3}$ и графы, части которых устроены «подобно» K_5 и $K_{3,\ 3}$. Смысл и значение этого факта и теоремы о правильной реализуемости графов в R_3 для микроэлектроники трудно переоценить. Фактически из-за графов K_5 и $K_{3,\ 3}$ пришлось создавать технологию многослойных печатных плат или микросхем в виде сэндвичей.

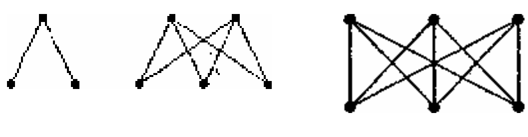

Рис. 3.7. Полные двудольные графа

3.5. Пути, цепи, контуры, циклы

Определение. Путем длины n ($n \in N$) на графе $G(X, U, f)$ называется отображение $\mu: [1; n]_N \to U$ такое, что

$$P_2 \circ f \circ \mu(i-1) = P_1 \circ f \circ \mu(i), I = 1, 2, \ldots, n.$$

Вершина $P_1 \circ f \circ \mu(1)$ называется началом пути μ, вершина $P_2 \circ f \circ \mu(n)$ – концом пути μ.

Если $P_1 \circ f \circ \mu(1) = P_2 \circ f \circ \mu(n)$, то путь называется контуром. Если отображение μ инъективно, то путь (контур) называется простым.

Определение. Цепью длины n ($n \in N$) на графе $G(X, U, f)$ называется отображение $\eta: [1; n]_N \to U$ такое, что у любой дуги $\eta(i)$ ($i = 2, 3, \ldots, n-1$) одна инцидентная вершина общая с дугой $\eta(i-1)$, а другая – общая с дугой $\eta(i+1)$.

Вершина дуги $\eta(1)$, не являющаяся общей с дугой $\eta(2)$, называется началом цепи, вершина дуги $\eta(n)$, не являющаяся общей с дугой $\eta(n-1)$, называется концом цепи.

Если начало цепи совпадает с ее концом, цепь называется циклом.

Если отображение η инъективно, то цепь (цикл) называется простым.

Пример. Рассмотрим граф, приведенный на рис. 3.8, и отображение $\mu: [1; 9]_N \to U$, заданное табл. 3.1.

Таблица 3.1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu(i)$	VI	VIII	III	IX	II	IV	V	II	I

Ясно, что μ – путь длины 9 из 2-й вершины в 7-ю вершину. Рассмотрим отображение η, заданное правилом

$$\eta(1) = \text{VI}; \eta(2) = \text{III}; \eta(3) = \text{IX}; \eta(4) = \text{V}.$$

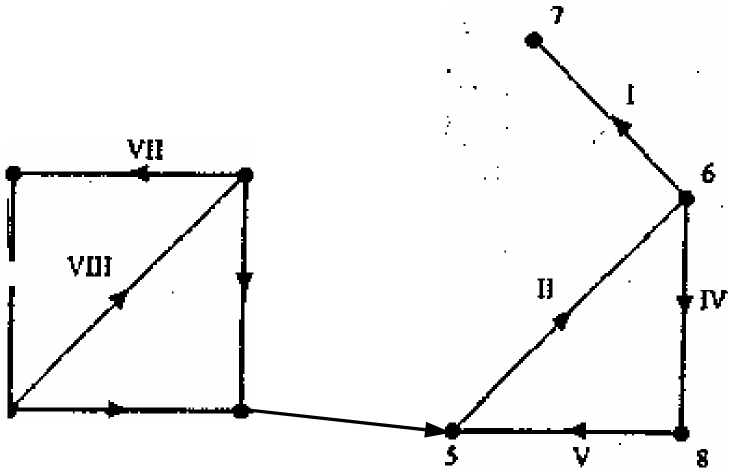

Рис. 3.8. Иллюстрация понятий: цепь и контур

Ясно, что η – цепь длины 4 из 2-й в 8-ю вершину.

$\mu_1(1) = \mathrm{VI}$; $\mu_1(2) = \mathrm{VIII}$; $\mu_1(3) = \mathrm{VII}$ – *контур длины 3.*

$\eta_1(1) = \mathrm{VI}$; $\eta_2(2) = \mathrm{X}$; $\eta_1(3) = \mathrm{III}$; $\eta_1(4) = \mathrm{VII}$ – *цикл длины 4.*

Лемма 3.1. (Лемма о простом пути). Пусть $G(X, U, f)$ – граф, $x;y$ ($\in X$) – такие вершины, что существует путь μ_{xy} *длины* n_{xy} с началом в вершине x и концом в вершине y, тогда существует простой путь μ'_{xy} длины n'_{xy} с началом в вершине x и концом в вершине y, причем $n'_{xy} \le n_{xy}$.

Возможны два случая:

а) отображение μ_{xy} инъективно, тогда $\mu'_{xy} = \mu_{xy}$, $n'_{xy} = n_{xy}$ и утверждение леммы доказано (тривиально).

б) отображение μ_{xy} не является инъективным, значит существует такая дуга $u^* \in U$, что

$$|\mu^{-1}_{xy}(\{u^*\})| \ge 2.$$

Упорядочим элементы множества $\mu^{-1}_{xy}(\{u^*\})$ в порядке возрастания, т.е.

$$\mu^{-1}_{xy}(\{u^*\}) = \{i_1; i_2; \ldots; i_k\}.$$

Образуем путь μ_{1xy} длины $n_{1xy} = n_{xy} - (i_k - i_1)$, соединяющий x с y, равный

$$\mu_{1\,xy}(i) = \begin{cases} \mu_{xy}(i), \text{ если } 1 \le i \le i_1; \\ \mu_{xy}(i + (i_k - i_1)), \text{ если } i_1 \le i \le n_{xy} - (i_k - i_1). \end{cases}$$

При этом

$$|\mu^{-1}_{xy}(\{u^*\})| = 1;\ \mu^{-1}_{1\,xy}(\{u^*\}) \subset \mu^{-1}_{xy}(\{u^*\})$$

для любой дуги u, отличной от u^*. Тогда, если μ_{1xy} инъективно, полагаем $\mu'_{xy} = \mu_{1xy}$, $n'_{xy} = n_{1xy}$ не является инъективньм отображением, то к нему применимы приведенные выше рассуждения. Мы получим путь μ_{2xy} длины $n_{2xy} < n_{1xy}$ и т. д. За конечное число шагов процесс оборвется (так как длина пути – натуральное число) и требуемый простой путь будет построен.

Лемма 3.2. (Лемма о простой цепи). Пусть $G(X, U, f)$ – граф, x, y ($\in X$) – такие вершины, что существует цепь η_{xy} длины n_{xy}, соединяющая x с y. Тогда существует простая цепь η'_{xy} длины n'_{xy}, соединяющая x с y, причем

$$n'_{xy} \le n_{xy} .$$

Лемма 3.3. (Лемма об инвертировании цепи). Пусть $G(X, U, f)$ – граф, x, y ($\in X$) – вершины такие, что существует цепь η_{xy} длины n_{xy}, соединяющая x с y, тогда существует цепь η^-_{xy} длины n_{xy}, ведущая из y в x.

Очевидно, отображение $\eta^-_{xy} : |1; n_{xy}|_N \to U$, заданное равенством

$$\eta^-_{xy}(i) = \eta_{xy}(\eta_{xy} - i+1),$$

является искомой цепью из y в x. Говорят, что цепь η^-_{xy} получена инвертированием цепи η_{xy}.

Вопросы и задания

1. Докажите, что если $G_1(X_1, U_1, f_1) \cong G_2(X_2, U_2, f_2)$ и φ, ψ – пара биективных отображений, реализующих этот изоморфизм, то для любой вершины $x \in X$ справедливо:

$\deg_+ x = \deg_+ \varphi(x)$; $\deg_- x = \deg_- \varphi(x)$;

$\deg x = \deg \varphi(x)$.

Характеристики $\deg_+$, $\deg_-$, $\deg$ в левой части равенств вычисляются для графа G_1, а в правой части – для графа G_2 .

2. Проверьте, что в лемме 3.3 действительно является цепью.

3.6. Эйлеровы графы

В этом параграфе мы возвращаемся к истокам теории графов и задачам, которыми занимался Леонард Эйлер. Отправной точкой для него послужила знаменитая задача о Кенигсбергских мостах, которая теперь стала неотъемлемой принадлежностью любого учебника по теории графов. Семь мостов города Кенигсберг (ныне Калининград) расположены на реке Прегель так, как изображено на рис. 3.9, соединяя его (города) части A, B, *C, D*. Задача состоит в следующем: «Найти такую точку города, выйдя из которой можно пройти по всем мостам города по одному разу и вернуться в нее обратно». Эйлер доказал, что эта задача не имеет решения. Каждый мост Эйлер заменил линией, соединяющей точки, соответствующие берегам. В результате получился граф, изображенный на рис. 3.10 (ориентация дуг не имеет значения).

Определение. Связный граф называется эйлеровым, если на нем существует простой цикл, проходящий через все дуги графа (простой, проходящий через все дуги, т. е. проходящий по одному разу через каждую дугу).

Лемма 3.4. Если степень каждой вершины конечного графа четна, то на графе существует хотя бы один простой цикл.

Наличие хотя бы одной петли делает лемму тривиальной. Осталось рассмотреть графы без петель. Возьмем произвольную вершину графа. Так как ее степень четна, то существует по крайней мере две дуги, для которых она является граничной. Выйдем по одной из этих дуг из этой

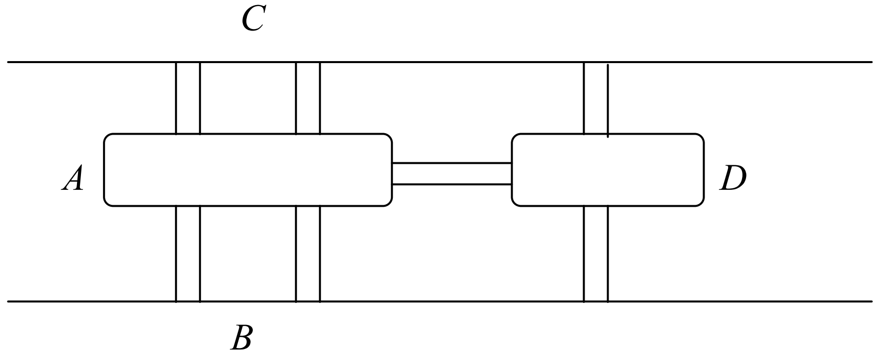

Рис. 3.9. Схема расположения мостов

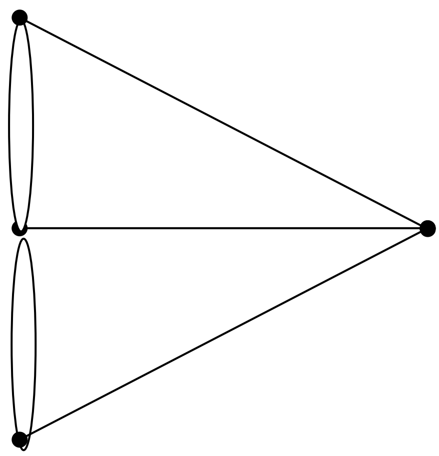

Рис. 3.10. Граф задачи о Кенигсбергских мостах

вершины (не обязательно по ее ориентации). Вершина, в которую мы придем, также имеет четную степень, и значит, кроме дуги, по которой мы пришли, есть еще хотя бы одна, по которой можно из этой вершины уйти. «Исключим» после прохождения через вершину дуги «прихода» и «ухода». При этом степень пройденной вершины уменьшилась на 2, а значит, осталась четной. Таким образом, мы показали, что условие четности степеней вершин – это условие «незастревания» в них, и оно наследуется при уничтожении пройденных дуг. Двигаясь таким образом по конечному графу, не застревая в его вершинах, мы не можем все время оказываться в вершинах, в которых мы не побывали ранее (так как в конечном графе конечное число вершин). Тогда на каком-то из шагов такого «путешествия» мы окажемся в вершине графа, в которой уже были до этого. Отрезок простой цепи, заключенный между первым и вторым прохождением через такую вершину, является простым циклом на исходном графе.

Теорема 3.6. (Критерий эйлеровости графа). Для того чтобы конечный связный граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными числами.

Необходимость. Она очевидна, так как двигаясь по эйлеровому циклу, войдя в вершину по одной дуге, мы выходим из нее по другой дуге, т.е. каждой «дуге входа» соответствует «дуга выхода». Каждая такая пара дуг дает вклад, равный двум, в степень вершины, а поскольку эйлеров цикл содержит все дуги, то степень каждой вершины представлена суммой двоек, и значит, четна.

Достаточность. Достаточность будем доказывать по индукции, взяв в качестве параметра индукции число дуг графа.

Шаг 1. $|U| = 1$. Единственный граф, удовлетворяющий условиям теоремы, изображен на рис. 3.11. Очевидно, его единственная дуга и образует эйлеров цикл.

Индуктивный переход. Предположим, что утверждение теоремы (ее достаточной части) справедливо для любого графа, у которого $|U| \leq n_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для графа, у которого $|U| \leq n_0+1$. Так как степени всех его вершин четны, то по лемме 3.4 на этом графе существует простой цикл η. Если этот цикл проходит через все дуги графа G, то он и есть искомый эйлеров цикл, и

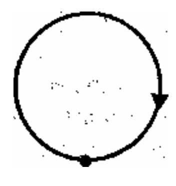

Рис. 3.11. Эйлеров граф

индуктивный переход доказан. В противном случае рассмотрим граф, полученный из G удалением дуг цикла η – G^*_η . Каждая его компонента связности – конечный связный граф с четными степенями вершин и числом дуг, меньшим либо равным n_0. Тогда по предположению индукции на каждой компоненте связности существует эйлеров цикл. Обозначим эйлеровы циклы компонент $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$. Поскольку исходный граф связен, то цикл η имеет хотя бы по одной общей вершине с компонентами графа G^*_η . Выберем по одной общей с циклом вершине на каждой компоненте – $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Искомый эйлеров цикл на графе G построим следующим образом: отправившись по циклу η из произвольной его вершины, движемся по нему до тех пор, пока не встретим вершину x_i из множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, тогда от вершины x_i пройдем по эйлерову циклу η_I на соответствующей компоненте графа G^*_η, после чего продолжим движение по циклу η до тех пор, пока не встретим вершину $x_j \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, опять прервем движение по η и пройдем по эйлерову циклу η_j соответствующей компоненты и т. д. В результате движения по циклу η мы побываем во всех вершинах множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, а значит, пройдем по всем циклам $\eta_1;\eta_2;\ldots\eta_k$ (рис. 3.12).

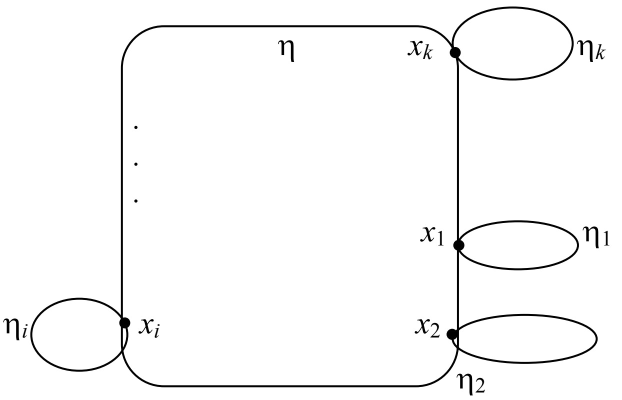

Рис. 3.12. Построение эйлерова графа

Процесс склейки эйлерова цикла из цикла η и циклов $\eta_1;\eta_2;\ldots\eta_k$ похож на сборку ожерелья с подвесками. Индуктивный переход, а вместе с ним вся теорема доказаны.

<u>Определение</u>. *Связный граф называется квазиэйлеровым, если на нем существует простая цепь, проходящая через все дуги графа.*

Теорема 3.7. (Критерий квазиэйлеровости). Для того чтобы конечный связный граф был квазиэйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степени всех его вершин были четными числами или степени всех его вершин за исключением ровно двух были четными числами, причем в первом случае эйлерова цепь является эйлеровым циклом, а во втором случае эйлерова цепь начинается в одной из вершин нечетной степени, а заканчивается в другой вершине нечетной степени.

Ясно, что теорема 3.5 является следствием теоремы 3.4. Случай двух вершин нечетной степени и построение эйлеровой цепи можно свести к эйлерову циклу на графе, полученном из G добавлением дуги, соединяющей две вершины нечетной степени.

Вопросы и задания

1. Можно ли нарисовать фигуру, называемую «сабли Магомеда» (рис. 3.13), не отрывая карандаш от бумаги и не проходя по отрезкам линий дважды (за исключением помеченных точек)?

2. Какие из графов, приведенных на рисунке 3.14, являются эйлеровыми, квазиэйлеровыми?

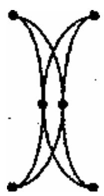

Рис. 3.13. Граф «сабли Магомеда»

Рис. 3.14. Примеры эйлеровых и квазиэйлеровых графов

3.7. Деревья и леса

В этом параграфе мы изучим простой и очень важный своими приложениями класс графов – деревья. О широком применении этого класса говорят такие термины: «дерево поиска», «древовидные структуры», «ветвление» и др.

<u>Определение</u>. Числом связности графа $G(X, U, f)$ называется число его различных компонент связности. Число связности обозначается $c(G)$.

Лемма 3.5. Для любого конечного графа $G(X, U, f)$ справедливо

$$|X| - c(G) \le |U| . \tag{3}$$

Проведем доказательство индукцией по параметру m — $|U|$.

Предположим $m = 0$. Любой граф, у которого $|U| = 0$ $(\Leftrightarrow U = \varnothing)$, имеет вид, изображенный на рис. 3.15.

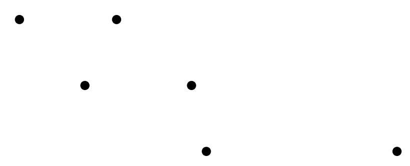

Рис. 3.15. Граф с $|U| = 0$

Тогда $c(G) = |X|$. Значит,

$$|X| - c(G) = |X| - |X| = 0 \leq 0 = |U| .$$

Соотношение (3) выполнено.

Индуктивный переход. Предположим, что соотношение (3) справедливо для любого графа, у которого $|U| \leq m_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для графа, у которого $|U| \leq m_0 + 1$. Для такого графа возможны два случая: 1) на нем нет мостов; 2) на нем есть хотя бы один мост.

В первом случае удалим произвольную дугу u графа G, т. е. перейдем к графу G^*_u . Для него соотношение (3) выполнено (по предположению), значит,

$$|X| - c(G^*_u) \leq |U \setminus \{u\}|,$$

но $c(G^*_u) = c(G)$, тогда

$$|X| - c(G^*_u) \leq |U \setminus \{u_0\}| .$$

Соотношение (3) доказано.

Во втором случае обозначим через u_0 мост графа G и выпишем соотношение (3) для графа G^*_{u0} :

$$|X| - c(G^*_{u0})\ |U \setminus \{u\}|.$$

Можно доказать, что $c(G^*_{u0}) = c(G) + 1$. Тогда

$$|X| - c(G) - 1 \leq |U \setminus \{u_0\}| = |U| - 1.$$

Соотношение (3) выполнено и в этом случае. Индуктивный переход доказан.

Лемма 3.6. Конечный граф $G(X, U, f)$, у которого

$$|U| \leq |X| - 2, \tag{4}$$

не является связным.

Предположим противное, т. е. что существует конечный связный граф $G_0(X_0, U_0, f_0)$, у которого $|U_0| \le |X_0| - 2$. По предыдущей лемме для него выполнено

$$|X_0| - 1 \le |U_0| \ . \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получим

$$|X_0| - 1 \le |X_0| - 2 \text{ или } -1 \le -2 \ .$$

Полученное противоречие и доказывает лемму.

<u>Определение</u>. *Деревом называется конечный связный граф без циклов.*

Пример. На рис. 3.16 изображены деревья и лес из двух деревьев

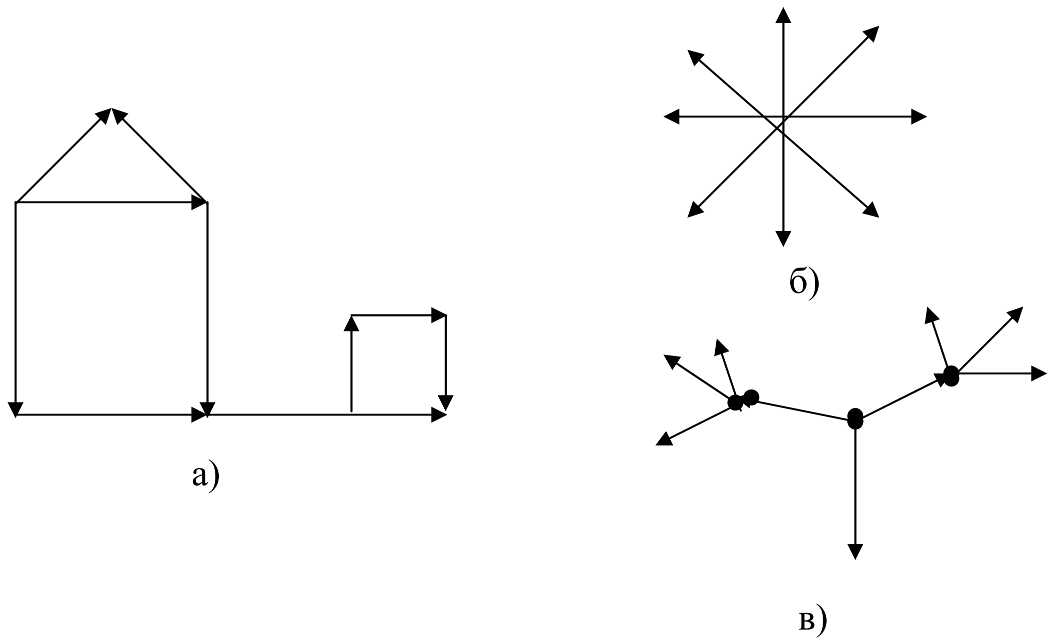

Рис. 3.16. а – не дерево; б – дерево; в – лес и деревья

<u>Определение</u>. Лесом из k деревьев называется граф G без циклов, у которого $c(G) = k, k>1.$

Теорема 3.8. (Основная теорема о деревьях). Для конечного графа $G(X, U, f)$ следующие 6 утверждений эквивалентны:

1. G – дерево, т.е. связный граф без циклов.
2. G не содержит циклов и $|U| = |X| - 1$.
3. G связен и $|U| = |X| - 1$.
4. G связен и каждая его дуга является мостом.
5. Любые две вершины можно соединить и причем единственной простой цепью.

6. G – не содержит циклов, добавление к нему любой из дуг приводит к образованию единственного простого цикла.

Докажем, что из 1) следует 4). Доказательство проведем от противного, т.е. предположим, что существует такое дерево G, на котором есть дуга u_0, не являющаяся мостом. Обозначим через x_0 ее конец, через y_0 – ее начало. Образуем граф G^*_{u0}. Так как он по нашему предположению связен, то на нем существует простая цепь η_{x0y0}, ведущая из x_0 в y_0, тогда $\eta_{x0y0} \cup \{u_0\}$ – простой цикл G, что противоречит тому, что G – дерево.

Докажем, что из 1) следует 2), но так как то, что из 1) следует 4), уже доказано, то можно доказывать, что из 1) и 4) следует 2). На самом деле достаточно доказать, что из 1) и 4) следует, что $|U| = |X| - 1$. Докажем это по индукции, взяв в качестве параметра индукции $m = |U|$.

Предположим $m = 0$. Единственное дерево имеет вид, приведенный на рис. 3.17. Ясно, что для него $|U| = 1$, $|U| = 0$, и значит, $|U| = |X| - 1$.

Рис. 3.17. Дерево с $|X| = 1$, $|U| = 0$

Индуктивный переход. Предположим, что соотношение $|U| = |X| - 1$ справедливо для любого дерева, у которого $|U| \le m_0$. Докажем, что тогда оно справедливо и для дерева, у которого $|U| = m_0 + 1$. Удалим произвольную дугу u дерева, т.е. перейдем к графу G^*_u. Так как 4) для G выполнено, то u – мост и G^*_u состоит из двух компонент связности, каждая из которых – дерево с числом дуг, меньшим либо равным m_0. Тогда для каждой компоненты связности выполнено предположение индукции

$$|U_1| = |X_1| - 1,\ |U_2| = |X_2| - 1.$$

Складывая последние равенства, получаем

$$\underbrace{|U_1| + |U_2|}_{|U|-1} = \underbrace{|X_1| + |X_2|}_{|X|} - 2,$$

$$|U| - 1 = |X| - 2;$$
$$|U| = |X| - 1.$$

Индуктивный переход доказан.

Докажем теперь, что из 2) следует 3). На самом деле достаточно доказать, что из 2) следует «G – связен». Доказывать это будем от противного, т.е. предположим, что существует граф G, который не содержит циклов и у которого $|U| = |X| - 1$, но G не является связным. Тогда он состоит, по крайней мере, из k $(k \geq 2)$ компонент связности, каждая из которых не содержит циклов, и значит, является деревом. Переход $1 \Rightarrow 2$ уже доказан, значит, для каждой компоненты

$$|U_i| = |X_i| - 1,\ i = 1, 2, , \ldots, k\,.$$

Суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{k} |U| = \sum_{i=1}^{k} (|x_i| - 1),$$

или $|U| = |X| = k$.

Это противоречит тому, что $|U| = |X| - 1$.

Докажем, что из 3) следует 4). Будем доказывать от противного, т. е. предположим, что существует граф G, который связен и у которого $|U| = |X| - 1$, но 4) для него не выполнено, т. е. не каждая дуга является мостом. Пусть $u_0 \in U$ не является мостом, тогда G'_{u0} – связный граф, у которого число дуг равно $|X| - 2$, а это противоречит лемме 3.6.

Докажем, что из 4) следует 5). Доказывать будем от противного, т. е. предположим, что существует такой связный граф, у которого каждая дуга является мостом, но для которого 5) не выполнено. Так как на графе G условие 5) не выполнено, то на нем есть такие две вершины, которые можно соединить двумя простыми цепями — η_1 и η_2 . Ясно, что $\eta_1 \cup \eta_2$ является либо простым циклом, либо содержит простой цикл. А дуги простого цикла не являются мостами. Получено противоречие с 4).

Докажем, что из 5) следует 6). Добавим к графу G дугу w, соединяющую y с x. На исходном графе по условию существует простая цепь η_{xy}, соединяющая x с y, тогда $\eta_{xy} \cup \{w\}$ – простой цикл. Докажем единственность образовавшегося простого цикла. Доказывать единственность будем от противного. Предположим, что существуют такие вершины x_0 и y_0 и добавленная дуга w_0, соединяющая x_0 с y_0, что на графе $G \cup \{w_0\}$ существует два простых цикла, проходящих через w_0 : η_1 и η_2 . Но тогда $\eta_1 \setminus \{w_0\}$ и $\eta_2 \setminus \{w_0\}$ – две простые цепи, соединяющие x_0 с y_0 на G, а это противоречит 5).

Докажем, что из 6) следует 1). Докажем отдельно, что:

а) из 6) следует – «C связен»;

б) из 6) следует «C без циклов».

Докажем а) от противного, т. е. предположим, что существует несвязный граф, для которого выполнено 6). Возьмем на этом графе две вершины x_0 и y_0, лежащие в разных компонентах связности, и добавим к графу дугу w_0, их соединяющую. Ясно, что при этом не образуется простой цикл, а это противоречит 6).

Докажем б) тоже от противного, т. е. предположим, что существует граф, содержащий цикл, для которого выполнено 6) – добавление любой дуги приводит к образованию единственного простого цикла. Существование на графе цикла означает и существование на нем простого, проходящего через все свои вершины (кроме начала и конца) по одному разу (⇔ элементарного) цикла. Зафиксируем на нем две вершины x_0 и y_0 и добавим к графу дугу w, их соединяющую. Ясно, что при этом образуется два простых цикла (рис. 3.18). Получено противоречие с 6).

<u>Следствие</u>. Если $G(X, U, f)$ – лес из k деревьев, то

$$|U| = |X| - k.$$

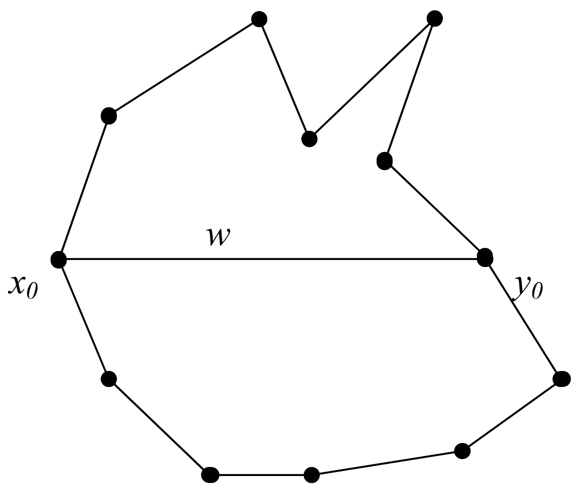

Рис. 3.18. Простой цикл

<u>Определение</u>. Вершина x графа $G(X,U,f)$ называется висячей, если $\deg x = 1$.

<u>Следствие</u>. Если $G(X, U, f)$ – дерево и $|X| \geq 2$, то на нем есть по крайней мере две висячие вершины.

Допустим противное, т.е. что существует дерево $G(X, U, f)$, у которого $|X| \geq 2$ и не более одной висячей вершины.

Представим X в виде $X = (X \setminus X_b) \cup X_b$, где X_b – множество висячих вершин. Обозначим $\sigma = |X_b| \leq 1$. По теореме Эйлера имеем

$$2|U| = \sum_{x\in X} \deg x = \sum_{x\in X\setminus X_b} \deg x + \sum_{x\in X_b} \deg x =$$

$$= \sum_{x\in X\setminus X_b} \deg x + \sigma \geq \sum_{x\in X\setminus X_b} 2 + \sigma = 2(|X| - \sigma) + \sigma = 2|X| - \sigma.$$

Учтем, что $|U| = |X| - 1$, тогда

$$2(|X| - 1) \geq 2|X| - \sigma \text{ или } -2 \geq -\sigma.$$

Последнее дает противоречие и при $\sigma = 0$, и при $\sigma = 1$.

Задания

1. Докажите самостоятельно следствие 3.1 к теореме о деревьях.
2. Диаметром связного графа называется самая длинная простая цепь. Докажите, что любые два диаметра графа имеют общую вершину.

3.8. Взвешенные графы. Задача о кратчайшем соединении

Завершая эту главу, рассмотрим взвешенные графы, т. е. такие, у которых дугам поставлены в соответствие вещественные (как правило неотрицательные) числа, называемые весами. В качестве весов могут выступать длины дуг, пропускная способность, стоимость эксплуатации.

Задача о кратчайшем соединении. Известны точки, в которых будут расположены населенные пункты (города) и известны трассы дорог, которые можно построить, а также стоимость их строительства. На рис. 3.19 указаны населенные пункты *A, B, C, D, F, E*; арабские цифры около проектируемых участков дорог – стоимость их строительства; римские цифры – номера дуг. Требуется определить, какие из дорог следует построить, чтобы полученная схема дорог позволяла попасть из любого города в любой, и из всех возможных схем имела наименьшую стоимость строительства.

Ясно, что сформулированная задача может быть формализована с помощью теории графов.

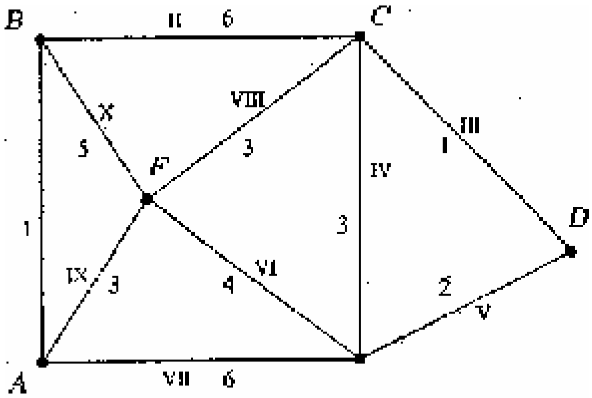

Рис. 3.19. Взвешенный граф

<u>Определение</u>. *Взвешенным графом (графом с весами на дугах) будем называть четверку G(X, U, f,* ρ), *где G(X, U, f) – граф,* $\rho : U \to (0, +\infty)$. *Отображение ρ называется весовым отображением. Если u ∈ U, то* ρ*(u) называют весом дуги u. Если* $\{u_i\}^n{}_i = 1$ *– путь или цепь на графе G, то ее весом называют величину*

$$\rho(\{u_i\})_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} \rho(u_i).$$

Весом графа G(X, U, f, ρ) *называют величину*

$$\rho(G) = \sum_{u \in U}^{n} \rho(u).$$

Аналогично определяется вес подграфа и частичного графа.

Сформулируем задачу о соединении городов на языке теории графов. Дан конечный связный взвешенный граф $G(X, U, f, \rho)$. Требуется найти связный частичный граф минимального веса.

Определение. Покрывающим деревом связного графа называется его частичный граф, который является деревом. Если G не является связным графом, то говорят о покрывающем лесе, т.е. о деревьях, покрывающих его компоненты связности.

Теорема 3.9. Решение задачи о соединении городов – покрывающее дерево.

Предположим противное, т. е. что решение задачи – $G(X, U^1, f|_{U^1}, \rho|_{U^1})$ не является деревом. Тогда на нем по основной теореме о деревьях существует хотя бы одна дуга, которая не является мостом. Обозначим ее u_0. Рассмотрим граф $G(X, U^1\backslash\{u_0\}, f|_{U^1\backslash\{u0\}}, \rho\,|_{U^1\backslash\{u0\}})$. Очевидно, он связен и $\rho(G(X, U^1\backslash\{u_0\}, f|_{U^1\backslash\{u0\}}, \rho\,|_{U^1\backslash\{u0\}})) - \rho(u_0) < \rho(G(X, U^1\backslash\{u_0\}, f|_{U^1}, \rho\,|_{U^1}))$.
Последнее противоречит тому, что $G(X, U^1, f|_{U^1}, \rho|_{U^1})$ является решением задачи о соединении городов.

Теорема 3.10. (Алгоритм Краскала). Последовательность $\{u_i\}^{|X|-1}_{i=1}$ дуг покрывающего дерева минимального веса может быть найдена с помощью следующего алгоритма:

1) u_1 – дуга минимального веса из множества U, не являющаяся петлей;

2) если уже определен начальный отрезок последовательности u_1, $u_2,\ldots, u_{k-1}$, то дуга u_k выбирается из множества $U \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ так, что выполнено два условия:

   а) добавление дуги u_k к $\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$ не приводит к образованию циклов;

   б) из дуг, удовлетворяющих условию а), дуга u_k обладает наименьшим весом.

Ясно, что последовательность, построенная по алгоритму, определяет покрывающее дерево. Очевидно, что $\rho(u_1) \le \rho(u_2) \le \ldots \le \rho(u_{|X|-1})$. Это дерево обозначим T_{Kp}. Покажем, что T_{Kp} является решением задачи о соединении городов. Предположим противное, т.е. что существует другое покрывающее дерево $T = G(X, V, f|_V, \rho|_V)$, при этом

$$\rho(T) < \rho(T_{Kp}). \tag{6}$$

Упорядочим последовательность дуг дерева T так, что $V = \{v_i\}^{|X|-1}_{i=1}$ и $\rho(v_1) \le \rho(v_2) \le \ldots \le \rho(v_{|X|-1})$. Ясно, что $\{u_i\}^{|X|-1}_{i=1} \ne \{v_i\}^{|X|-1}_{i=1}$. Обозначим через k такой индекс, что $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, …, $u_{k-1} = v_{k-1}$, $u_k \ne v_k$. Тогда $\rho(u_k) \le \rho(v_k)$, так как u_k по отношению к $\{u_i\}^{|X|-1}_{i=1}$ удовлетворяет подпункту а) пункта 2) алгоритма Краскала. Добавим к дереву T дугу u_k. По основной теореме о деревьях это привело к образованию единственного простого цикла, содержащего дугу u_k. Очевидно, этот простой цикл содержит хотя бы одну дугу v_j, $j > k$. Мы имеем $\rho(u_k) \le \rho(v_k) \le \rho(v_j)$. Разорвем этот цикл, удалив дугу v_j. Полученное дерево обозначим T_1. Занумеруем его последовательность дуг $\{v^1_i\}^{|X|-1}_{i=1}$ так, что $\rho(v^1_1) \le \rho(v^1_2) \le \ldots \le \rho(v^1_{|X|-1})$. Ясно, что

$$\rho(T_1) \le \rho(T). \tag{7}$$

Возможны два случая:

1) $\{u_i\}^{|X|-1}_{i=1} = \{v_i\}^{|X|-1}_{i=1}$. Тогда $T_1 = T_{Kp}$ и мы имеем

$$\rho(T_{Kp}) \le \rho(T). \tag{8}$$

Последнее противоречит (6).

2) $\{u_i\}^{|X|-1}_{i=1} \ne \{v_i\}^{|X|-1}_{i=1}$. Обозначим через $k1$ такой индекс, для которого

$$u_1 = v^1_1,\ u_2 = v^1_2,\ \ldots,\ u_{k1-1} = v^1_{k1-1},\ u_{k1} \ne v^1_{k1}.$$

Из построения T_1 следует, что $k1 > k$. Тогда, применяя рассуждения, приведенные для пары T_{KP}, T к паре T_{KP}, T_1, мы получим граф T_2 $(k2>k1)$, для которого опять возможны два случая: 1), 2). Но случай 1), приводит к противоречию, а случай 2) приведет к графу T_2 и $k3>k2$. Ясно, что мы можем лишь конечное число раз выходить на случай 2), так как $k1<k2<\ldots<|X|-1$, а выход на случай 1) приводит к тому, что

$$\rho(T_{Kp}) \le \rho(T_1) \le \rho(T_2) \le \ldots \le \rho(T),$$

а это противоречит (6).

Пример. Применим алгоритм Краскала к графу, приведенному на рис. 3.20 – схеме дорог. На первом шаге выбирается дуга $u_1 = III$, затем $u_2 = I$, $u_3 = V$ (далее отпадает возможность выбора дуги IV), $u_4 = VIII$ (далее отпадает возможность выбора дуги VI), $u_5 = IX$ (далее отпадает возможность выбора дуг *II, X, VIII)* . Процесс выбора дуг автоматически оборвался. Покрывающее дерево минимального веса приведено на рис. 3.20.

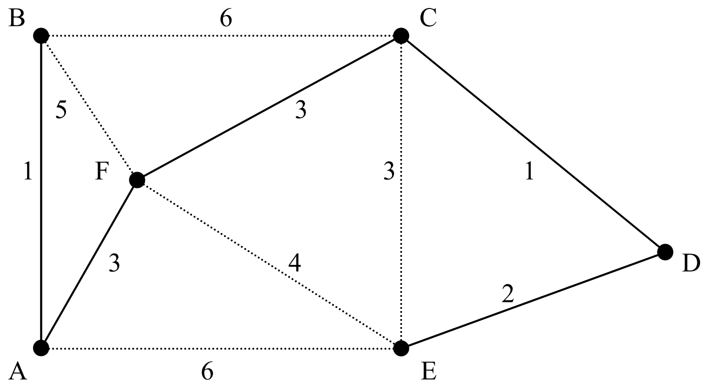

Рис. 3.20. Минимальное покрывающее дерево

3.9. Алгоритм Дейкстры поиска кратчайшего пути

Шаг 1. Перед началом выполнения алгоритма все вершины и дуги не окрашены. Каждой вершине в ходе выполнения алгоритма присваивается число $d(x)$, равное длине кратчайшего пути из s в x, включающего только окрашенные вершины.

Положим $d\{s\} = 0$ и $d(x) = \infty$ для всех x, отличных от s. Окрасить вершину s и положить $y = s$ (y – последняя из окрашенных вершин).

Шаг 2. Для каждой неокрашенной вершины x следующим образом пересчитать величину $d(x)$:

$$d(x) = \min(d(x), d(y) + a(y, x)\} . \qquad (9)$$

Если $d(x) = \infty$ для всех неокрашенных вершин x, закончить процедуру алгоритма: в исходном графе отсутствуют пути из вершины s в неокрашенные вершины. В противном случае окрасить ту из вершин x, для которой величина $d(x)$ является наименьшей. Кроме того, окрасить дугу, ведущую в выбранную на данном шаге вершину x (для этой дуги достигался минимум в соответствии с выражением (1)). Положить $y = x$.

Шаг 3. Если $y = t$, закончить процедуру: кратчайший путь из вершины s в вершину t найден (это единственный путь из s в t, составленный из окрашенных дуг). В противном случае перейти к шагу 2.

Отметим, что каждый раз, когда окрашивается некоторая вершина (не считая вершины s), окрашивается и некоторая дуга, заходящая в данную вершину. Таким образом, на любом этапе алгоритма в каждую вершину заходит не более чем одна окрашенная дуга. Кроме того, окрашенные дуги не могут образовать в исходном графе цикл, так как в алгоритме не может окрашиваться дуга, концевые вершины которой уже окрашены. Следовательно, можно сделать вывод о том, что окрашенные дуги образуют в исходном графе ориентированное дерево с корнем в вершине s. Это дерево называется ориентированным деревом кратчайших путей. Единственный путь от вершины s до любой вершины x, принадлежащей дереву кратчайших путей, является кратчайшим путем между указанными вершинами.

Если кратчайшему пути из вершины s в вершину x в дереве кратчайших путей принадлежит вершина y, то часть этого пути, заключенная между x и y, является кратчайшим путем между этими вершинами. Действительно, если бы между x и y существовал более короткий, то упомянутый выше путь между вершинами s и t не мог быть кратчайшим.

Пример. Применим алгоритм Дейкстры к графу, изображенному на рис. 3.21, для нахождения в нем кратчайшего пути между вершинами s и t.

Шаг 1. Перед первым выполнением шага 2 алгоритма окрашена только вершина s. Кроме того, $d(s) = 0$ и $d(x) = \infty$ для всех вершин x, не сопадающих с s.

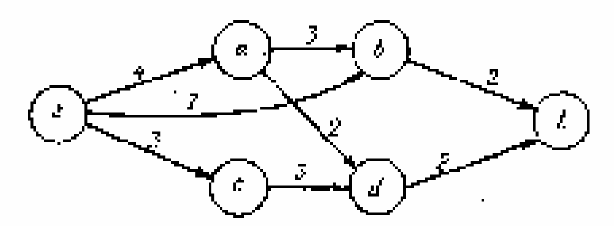

Рис. 3.21. Граф задачи о кротчайшем пути

Шаг 2. $(y = s)$

$d(a) = \min (d(a), d(s)+a(s, a)) = \min(\infty, 0 + 4) = 4$

$d(b) = \min (d(b), d(s)+a(s, b)) = \min(\infty, 0 + 7) = 7$

$d(c) = \min (d(c), d(s)+a(s ,c)) = \min(\infty, 0 + 3) = 3$

$d(d) = \min (d(d), d(s)+a(s, d)) = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty$

$d(t) = \min (d(t), d(s)+a(s, t)) = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty$.

Поскольку величина $d(c)$ является минимальной из величин $d(a)$, $d(b)$, $d(c)$ и $d(t)$, то вершина c окрашивается. Так же окрашивается и дуга (s, c), которая и определяет величину $d(c)$. Текущее дерево кратчайших путей состоит из дуги (s, c) (рис. 3.22).

Шаг 3. Поскольку вершина *t* остается неокрашенной, осуществляется переход к шагу 2.

Шаг 2. (y = c)

$d(a) = \min (d(c), d(s)+a(c, a)) = \min(4, 3+\infty) = 4$

$d(b) = \min (d(b), d(c)+a(c, b)) = \min(7, 3+\infty) = 7$

$d(d) = \min (d(d), d(c)+a(c, d)) = \min(\infty, 3+3) = 6$

$d(t) = \min (d(t), d(c)+a(s, t)) = \min(\infty, 3+\infty) = \infty.$

Поскольку величина $d(a) = 4$ является минимальной из величин $d(a)$, $d(b)$ и $d(t)$, то вершина *a* окрашивается. Так же окрашивается и дуга *(s, a)*, которая определяет величину *d(a)*. Текущее дерево кратчайших путей теперь состоит из дуг *(s, c)* и *(s, a)*.

Шаг 3. Поскольку вершина *t* остается неокрашенной, осуществляется переход к шагу 2.

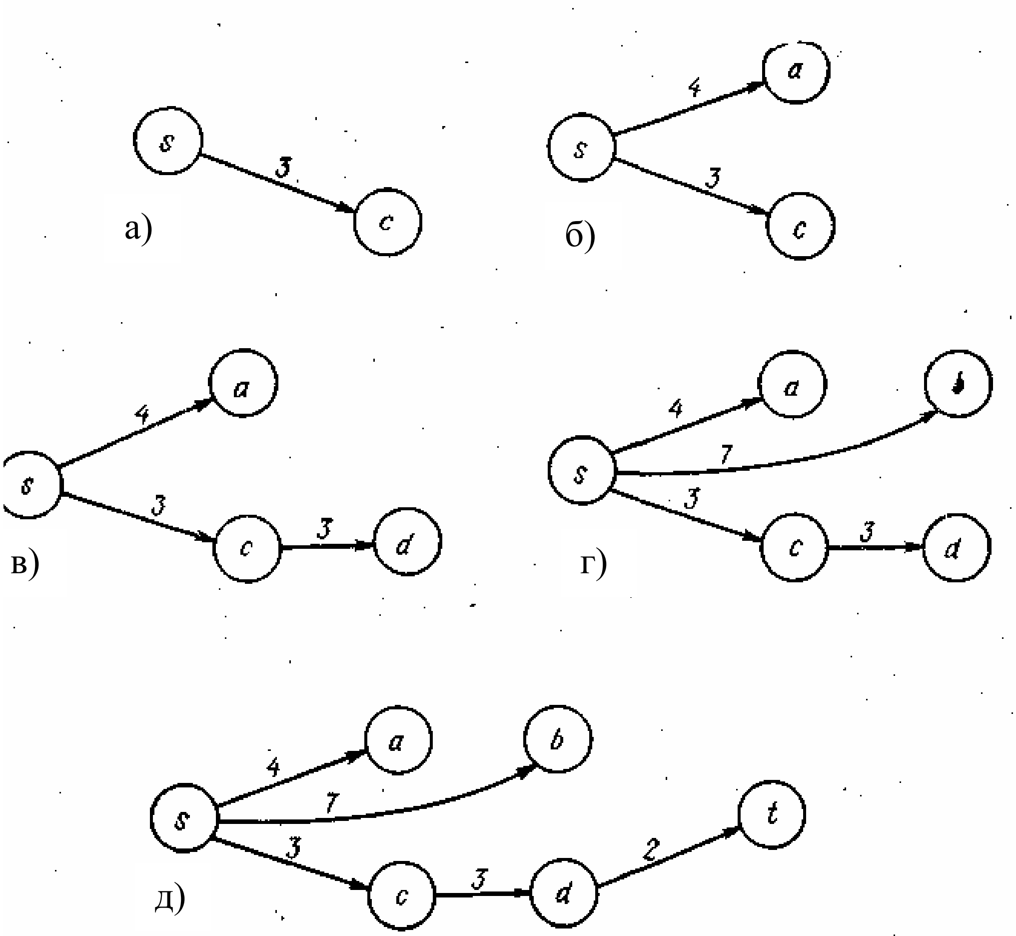

Рис. 3.22. Ориентированное дерево кратчайших путей

Шаг 2. (y = a)

$d(b) = \min (d(b), d(a)+a(c, b)) = \min (7, 4+3) = 7$

$d(d) = \min (d(d), d(a)+a(a, d)) = \min (6, 4+2) = 6$

$d(t) = \min (d(t), d(a)+a(a, t)) = \min (\infty, 4+\infty) = \infty.$

Поскольку величина $d(d) = 6$ является минимальной из величин $d(b)$, $d(d)$ и $d(t)$, то вершина d окрашивается. Можно считать, что величину $d(d)$ определяют как дугу (c, d), так и дугу (a, d). Поэтому можно окрасить любую из этих дуг. Окрасим, например, дугу (c, d). Текущее дерево кратчайших путей состоит теперь из дуг (s, c), (s, a) и (s, d).

Шаг 3. Поскольку вершина t остается неокрашенной, осуществляется переход к шагу 2.

Шаг 2. (y = d)

$d(b) = \min (d(b), d(d)+a(d, b)) = \min (7, 6+\infty) = 7$

$d(t) = \min (d(t), d(a)+a(d, t)) = \min (\infty, 6+2) = 8.$

Поскольку величина $d(b) = 7 = \min \{d(b), d(t)\}$ меньше величины $d(t)$, то вершина b окрашивается. Так же окрашивается и дуга (s, b), которая определяет величину $d(b)$. Текущее дерево кратчайших путей теперь состоит из дуг (s, c), (s, a), (c, d) и (s, b).

Шаг 3. Поскольку вершина t остается неокрашенной, осуществляется переход к шагу 2.

Шаг 2. $(y = b)$.

$d(t) = \min (d(t), d(b)+a(b, t)) = \min (8, 7+2) = 8.$

Итак, вершина t окрашивается. Вместе с ней окрашивается дуга (d, t), определяющая величину $d(t)$. Окончательно построенное дерево кратчайших путей состоит из дуг (s, c), (s, a), (c, d), (s, b) и (d, t).

Кратчайший путь, соединяющий вершину s с вершиной t, состоит из дуг (s, c), (c, d), (d, t) и имеет длину 3+3+2 = 8. Это не единственный кратчайший путь между вершинами s и t. Путь, состоящий из дуг (s, a), (a, d) и (d, t), имеет длину 4+2+2 = 8 и также является кратчайшим путем между вершинами s и t. Кратчайший путь не будет единственным в том случае, если в процедуре алгоритма ни разу не возникает неоднозначность в выборе окрашиваемой дуги.

Следует отметить высокую эффективность алгоритма Дейкстры и его широкую применимость в окружающем нас мире. Бортовые компьютеры современных автомобилей позволяют находить трассу кратчайшего пути, и делают это они с помощью алгоритма Дейкстры. Маршрутизаторы, являющиеся важнейшими элементами глобальной компьютерной сети Интернет, определяя маршрут доставки сообщения с одного сервера на другой, используют алгоритм Дейкстры.

Таким образом, графы и алгоритмы на графах все более и более (незаметно для нас самих) входят в нашу жизнь и становятся такими же привычными ее элементами, как электричество, радио и телевидение.

Вопросы и задания

1. Приведите пример графа и таких вершин x и y на нем, для которых существует несколько кратчайших путей из x в y.

2. Предложите модернизацию алгоритма Дейкстры, позволяющую находить все кратчайшие пути из одной вершины в другую.

3. Как модернизировать алгоритм Дейкстры, чтобы можно было находить все пути из одной вершины в другую в порядке убывания их длин?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – 384 с.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1 / Под ред. С.В. Яблонского и О.Б. Лупанова. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
3. Карпов В.Г., Мощеиский В.А. Математическая логика и дискретная математика. – Минск: Вышейш. шк., 1977. – 368 с.
4. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высш. шк, 1986. – 298 с.
5. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 376 с.
6. Фудзисава Т., Касами Т. Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур. – М.: Радио и связь, 1984. – 254 с.
7. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. – М.: Наука, 1979. – 236 с.
8. Трахтенорот Б.А. Алгоритмы и вычислительные машины. – М.: Сов. радио, 1974. – 239 с.
9. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.
10. Берж К. Теория графов и ее применения. – М., 1962. – 358 с.
11. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.: Наука, 1987. – 232 с.
12. Татт У. Теория графов. – М.: Мир, 1988. – 284 с.
13. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 256 с.
14. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 312 с.
15. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
16. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972. – 246 с.
17. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1995. – 256 с.
18. Сборник задач по математической логике и теории множеств. – Саратов: Изд-во СГУ, 1969. – 174 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

БУХАРОВ Николай Николаевич
ГОРЛОВ Виктор Николаевич
ЕВЛЮХИН Андрей Борисович

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНУЮ МАТЕМАТИКУ

Учебное пособие

Редактор Е.А. Амирсейидова
Корректор В.В. Гурова
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 22.09.03.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,95. Уч.-изд. л. 4,52. Тираж 60 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.