

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

**Б. А. БЕЛЯЕВ**

**МЕХАНИКА.  
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

Учебное пособие к практическим занятиям



Владимир 2016

УДК 621.01  
ББК 34.41  
Б44

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
зав. кафедрой автоматизации технологических процессов  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*В. Ф. Коростелев*

Почетный работник среднего профессионального образования  
Российской Федерации  
зав. отделением автомобильного транспорта  
Владимирского авиамеханического колледжа  
*В. Г. Судариков*

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

**Беляев, Б. А.**

Б44      Механика. Прикладная механика : учеб. пособие к практ.  
занятиям / Б. А. Беляев ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Сто-  
летовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2016. – 84 с.  
ISBN 978-5-9984-0740-6

Содержит целостное, системное и компактное изложение четырёх разделов учебной дисциплины «Прикладная механика». Материал может использоваться студентами для самостоятельной работы по изучению разделов названной дисциплины и решения практических задач, для выполнения учебных заданий (расчётно-графической и курсовой работ, курсового проекта), при подготовке к зачёту или экзамену.

Предназначено для студентов 1 – 3-го курсов очной, заочной и заочно-дистанционной форм обучения, изучающих дисциплину «Механика. Прикладная механика».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Табл. 6. Ил. 43. Библиогр.: 4 назв.

УДК 621.01  
ББК 34.41

ISBN 978-5-9984-0740-6

© ВлГУ, 2016

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие состоит из четырёх разделов. Первый посвящён основам теоретической механики – науки, изучающей общие законы механического движения и взаимодействия материальных тел. Второй включает основы сопротивления материалов – науки о прочности, жёсткости и надёжности элементов инженерных конструкций. Основные понятия сопротивления материалов опираются на законы и теоремы общей механики. В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, где наиболее существенными выступают свойства деформируемых тел. Сопротивление материалов имеет целью создать практически приемлемые простые приёмы расчёта типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций.

В третьем разделе анализируются общие вопросы теории механизмов и машин (ТММ) – кинематика, структурный анализ и силовой расчёт рычажных механизмов. Из названия этого раздела следует, что основным понятием ТММ является понятия машины, а основу любой машины составляют механизмы. Четвёртый раздел, посвящённый основам конструирования и деталям машин, включает методы, правила проектирования передачи вращательного движения – зубчатой эвольвентной передачи.

## ВВЕДЕНИЕ

Механика – одна из древнейших наук. Она развивалась по мере накопления человечеством знаний об окружающем мире, своевременно отвечая на многочисленные запросы практики. В древности не существовало деления науки по отраслям, поэтому механика, как и философия, естествознание, являлась составной частью учения о природе и обществе. И только в IV в. до н. э. началось отделение частных наук от общего естествознания.

Изучение механики требует от студентов твёрдых знаний основ высшей математики, физики, навыков решения задач по этим дисциплинам, а также знаний и навыков по начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графике.

В процессе изучения дисциплины студенты выполняют практические работы. Каждый раздел необходимо изучать в порядке, предусмотренном в рабочей программе. Ведение конспекта обязательно. Только в этом случае можно получить прочные знания и навыки расчётов по разделам дисциплины.

Работать с учебниками и конспектом лекций рекомендуется в такой последовательности:

- ознакомиться с содержанием данной темы по программе;
- изучить материал темы. Если тема имеет большой объём, надо разбить её на отдельные части;
- разобрать узловые вопросы темы, записать основные определения, доказательства, правила, формулы, если необходимо – снабдить их схемами или рисунками.

В целях закрепления учебного материала и приобретения навыков использования расчётных формул следует разобрать примеры и задачи, помещённые в учебнике и конспекте лекций. К экзамену или зачёту допускаются студенты, не имеющие задолженности по практическим занятиям.

### **Выполнение практического задания**

К выполнению практического задания можно приступить только после изучения соответствующей темы. На практических занятиях разрешается пользоваться конспектом лекций, учебной и справочной литературой.

Практические задания даны в последовательности тем и должны решаться постепенно. Все задачи и расчёты обязательно должны быть доведены до окончательного числового результата.

В настоящем учебном пособии предлагаются задания и примеры решения по темам дисциплины.

### **Требования к выполнению практического задания**

Практическое задание, сдаваемое студентами на проверку, выполняется и оформляется в соответствии со следующими требованиями.

Практическое задание выполняется на бумаге форматом А4 аккуратным почерком с интервалом между строками. Первый лист титульный. Тексты условий задач переписывать обязательно, схемы или рисунки к задачам должны быть сделаны чётко карандашом. Решение задачи делится на пункты. Каждый пункт должен иметь подзаголовок с указанием, что и как определяется, по каким формулам или на основе каких теорем, законов, правил, методов. Преобразования формул, уравнений в ходе решения производить в общем виде, а уже затем подставлять исходные данные. Порядок подстановки числовых значений должен соответствовать порядку расположения в формуле буквенных обозначений этих величин. После подстановки исходных значений вычислить окончательный или промежуточный результат.

В соответствии с требованиями стандарта при решении задач необходимо применять только Международную систему единиц физических величин (СИ) и стандартные символы для обозначения этих величин.

Правильность всех вычислений следует тщательно проверить, обратить особое внимание на соблюдение единиц подставляемых в формулу значений величин и оценить правдоподобность полученного ответа.

Если задание не зачтено, то согласно указаниям преподавателя оно выполняется заново или частично.

*Раздел 1*  
**ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

---

**1. СТАТИКА**

*Статикой* называется раздел теоретической механики, в котором излагается *общее учение о силах* и изучается *равновесие материальных тел*, находящихся под действием сил.

**Равновесие плоской системы сил  
(общий случай)**

Под равновесием понимают состояние покоя тела по отношению к инерциальной системе отсчета, связанной обычно с неподвижным телом.

В качестве модели реального материального тела в статике рассматривается абсолютно твердое тело – тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается постоянным.

Совокупность сил, действующих на твердое тело, называется системой сил.

При решении задач на равновесие системы сил чаще всего сразу расчленяют эту систему и рассматривают равновесие каждого из тел в отдельности. При этом учитывают четвертую аксиому статики: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны  $F_1 = -F_2$ . Но эти силы не образуют уравновешенную систему сил, так как они приложены к разным телам.

Тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется *свободным*.

Тело, перемещения которого препятствуют какие-нибудь другие скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называется *несвободным*. Все то, что ограничивает перемещение данного тела, называют *связью*.

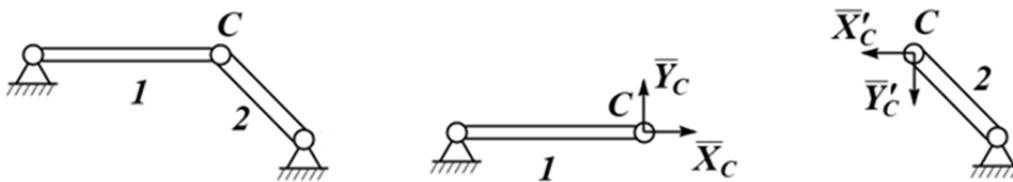
Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствующая тем или иным его перемещениям, называется *реакцией связи*. Ре-

акция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

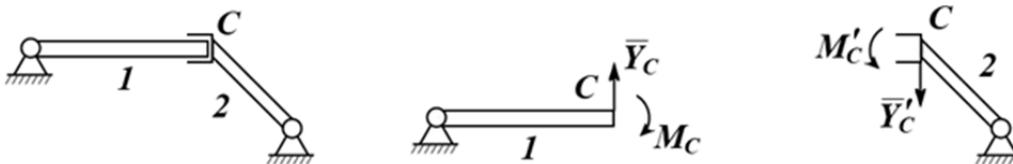
**Принцип освобожденности от связей:** несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие реакциями. В статике этот принцип позволяет рассматривать равновесие несвободного твердого тела как свободного под действием **активных** (заданных) **сил и реакций связей**.

При расчленении систем сил руководствуются правилом, чтобы в месте расчленения появлялось не более двух неизвестных реакций связей.

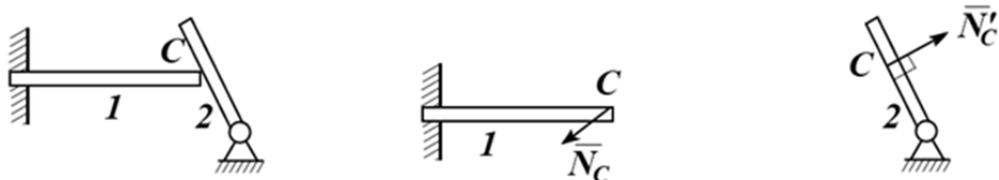
Расчленяют систему сил в следующих соединениях (рис. 1):



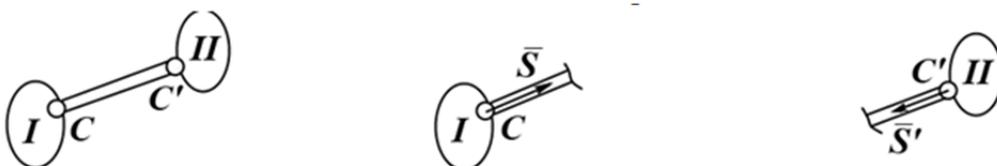
1. В цилиндрическом шарнире



2. В скользящей заделке



3. В точке свободной опоры тел



4. Соединения невесомым стержнем

Рис. 1. Расчленение систем

### *Порядок решения задач*

1. Выделить одно тело системы, равновесие которого следует рассмотреть.

2. Приложить к выделенному телу все активные (заданные) силы. Если к телу приложена распределенная нагрузка, то ее необходимо заменить равнодействующей.

3. Освободить тело от связей, приложив соответствующие реакции. При необходимости убедиться, что данная задача является статически определимой.

4. Направить оси координат и выбрать моментные точки. Для каждого тела системы могут быть выбраны различные системы координат.

5. Составить уравнения равновесия произвольной плоской системы сил для выделенного тела.

Все полученные уравнения равновесия решают совместно, определяя неизвестные реакции связей.

Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что ее направление выбрано верно, если отрицательной, то истинное направление реакции противоположно выбранному (модуль же реакции определен верно).

После того как задача решена, необходимо проверить правильность решения. Для этого следует составить не применявшуюся при решении сумму моментов, при этом нужно учитывать истинные направления реакций. Равенство нулю алгебраической суммы моментов подтвердит правильность решения задачи.

При решении подобных задач можно применять и другой прием. Рассмотреть условия равновесия для всей конструкции в целом (как для одного абсолютно твердого тела), а затем к этим трем уравнениям присоединить три уравнения равновесия, составленные только для одного из двух тел данной системы. Этот приём нередко предпочтительнее, так как в уравнения равновесия, составленные для всей системы в целом, входят только внешние силы и поэтому эти уравнения оказываются обычно проще.

**Пример.** Определить внешние (опорные) и внутренние связи рамы, изображенной на рис. 2, при следующих исходных данных:

$$q = 2 \text{ кН/м}, P = 4 \text{ кН}.$$

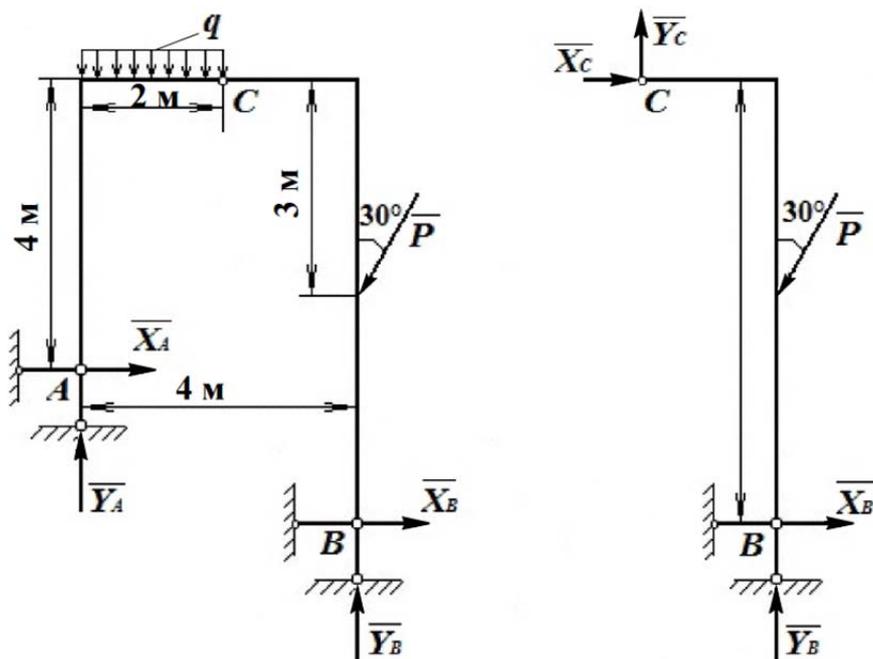


Рис. 2. Составная конструкция рамы

### Решение

Составим уравнения равновесия для всей конструкции:

$$\Sigma F_{kx} = 0; X_A - P \sin 30^\circ + X_B = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; Y_A - 2q - P \cos 30^\circ + Y_B = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma m_A(F_k) = 0; 2X_B + Y_B - 4P \cos 30^\circ + 1P \sin 30^\circ - q \cdot 2 \cdot 1 = 0. \quad (3)$$

Уравнения равновесия для правой части рамы:

$$\Sigma F_{kx} = 0; X_C - P \sin 30^\circ + X_B = 0; \quad (4)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; Y_C - P \cos 30^\circ + Y_B = 0; \quad (5)$$

$$\Sigma m_C(F_k) = 0; 6X_B + 2Y_B - 2P \cos 30^\circ - 3P \sin 30^\circ = 0. \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (3) и (6), получим

$$X_B = 1 \text{ кН}; Y_B = 3,464 \text{ кН}.$$

Подставляя найденные значения  $X_B$  и  $Y_B$  в уравнения (1) и (2), определим реакции опоры  $A$

$$X_A = 1 \text{ кН}; Y_A = 4 \text{ кН}.$$

Из уравнений (4) и (5) определим реакции внутренних связей

$$X_C = 1 \text{ кН}; Y_C = 0 \text{ кН}.$$

Сделаем проверку, составив уравнение моментов для всей конструкции относительно точки  $B$ :

$$\Sigma m_B(F_k) = 0; 3P \sin 30^\circ + q \cdot 2 \cdot 3 - 2X_A - 4Y_A = 0.$$

Подставляя численные значения, получаем  
 $4 \cdot 0,5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 0$ ;  $6 + 12 - 2 - 16 = 0$ ;  $18 - 18 = 0$ .

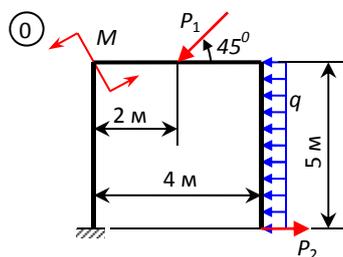
Ответ:

$$X_C = \pm 1 \text{ кН}, X_A = 1 \text{ кН}, X_B = 1 \text{ кН}, Y_C = 0 \text{ кН}, Y_A = 4 \text{ кН}, Y_B = 3,464 \text{ кН}.$$

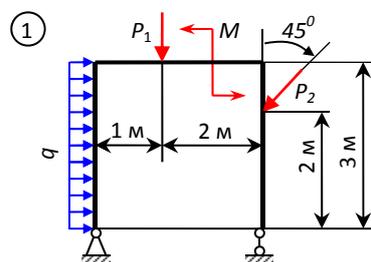
Поскольку силы  $X_C$  и  $Y_C$  – внутренние, то знак силы определяется в зависимости от того, для какой части конструкции рассматривается равновесие. В том случае, когда части конструкции опираются друг на друга или когда одна из опор является гладкой поверхностью, целесообразно сразу расчленять систему на отдельные тела и составлять уравнения равновесия для каждого тела в отдельности (см. рис. 2). При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

### Практическое задание

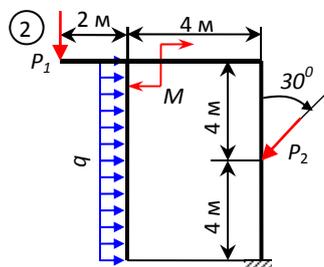
**Задача.** Определить внешние (опорные) и внутренние связи составной конструкции рамы. Варианты взять из рис. 1.



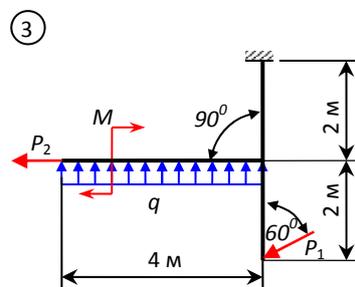
$$P_1 = P_2 = 5 \text{ кН} \quad q = 3 \text{ кН/м}$$



$$P_1 = P_2 = 2 \text{ кН} \quad q = 2 \text{ кН/м}$$

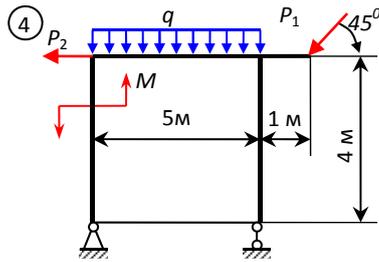


$$P_1 = P_2 = 1,5 \text{ кН} \quad q = 1 \text{ кН/м}$$

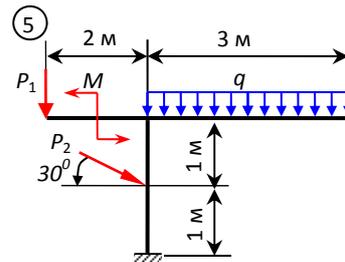


$$P_1 = P_2 = 2 \text{ кН} \quad q = 1 \text{ кН/м}$$

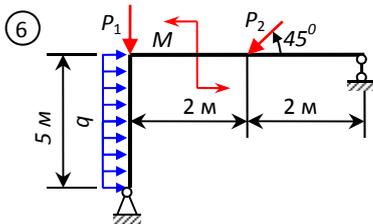
Рис. 3. Варианты задач для практического занятия (см. также с. 11)



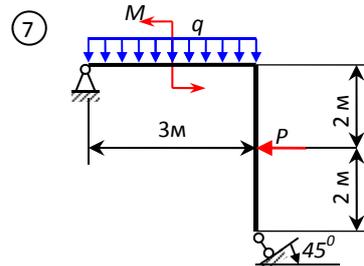
$$P_1 = P_2 = 1 \text{ кН} \quad q = 1 \text{ кН/м}$$



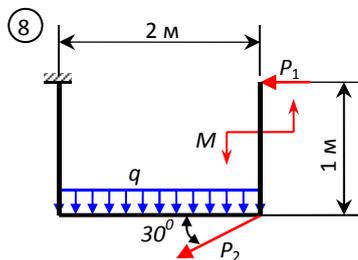
$$P_1 = P_2 = 1 \text{ кН} \quad q = 1 \text{ кН/м}$$



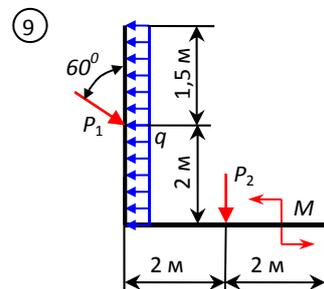
$$P_1 = P_2 = 2 \text{ кН} \quad q = 2 \text{ кН/м}$$



$$P = P_2 = 6 \text{ кН} \quad q = 6 \text{ кН/м}$$



$$P_1 = P_2 = 3 \text{ кН} \quad q = 1 \text{ кН/м}$$



$$P_1 = P_2 = 2 \text{ кН} \quad q = 2 \text{ кН/м}$$

Рис. 3. Варианты задач для практического занятия (окончание)

### Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения таким понятиям статики, как материальная точка, абсолютно твёрдое тело.
2. Что называется свободным и несвободным телом?
3. Что называется силой? Какими тремя факторами определяется сила, действующая на твёрдое тело?

4. Дайте понятие распределённой нагрузки.
5. Что такое сосредоточенная сила?
6. Что такое равнодействующая и уравновешивающая силы?
7. Какие случаи приведения систем сил вы можете назвать?
8. Что называют связью?
9. Какие основные типы связей вам известны?
10. В чём заключается принцип освобождения от связей?
11. Что называется реакцией связи?
12. Сформулируйте правило расчленения системы сил.

## 2. КИНЕМАТИКА

*Кинематика* рассматривает механическое движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, т. е. без учета сил, вызывающих это движение. Кинематику называют иногда «геометрией движения», включающей, конечно, понятие времени. Основными характеристиками движений в кинематике являются траектория, пройденный путь, скорость и ускорение движения. Основная задача кинематики – описать движение тела в пространстве в зависимости от времени, не выясняя причин движения.

*Механическим движением тела* называется изменение его положения относительно другого тела, происходящее в пространстве с течением времени.

Рассмотрение любого движения начинают с выбора системы отсчёта, включающей в себя тело отсчёта, систему координат и приборы для исследования движения.

Под *материальной точкой* понимают модель тела, размерами которого при решении задачи можно пренебречь.

*Траектория движения* – это линия, которую описывает подвижная точка относительно выбранной системы отсчёта (рис. 4).

*Путь* – длина траектории  $l$ . Перемещение – вектор, соединяющий начальное и конечное положения точки  $S$ .

Положение точки в пространстве задаётся радиус-вектором или тремя его проекциями на оси координат (рис. 5).

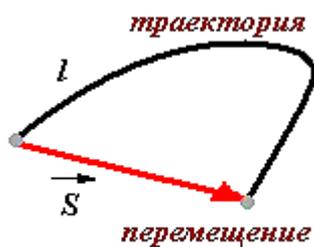


Рис. 4. Движение точки в пространстве

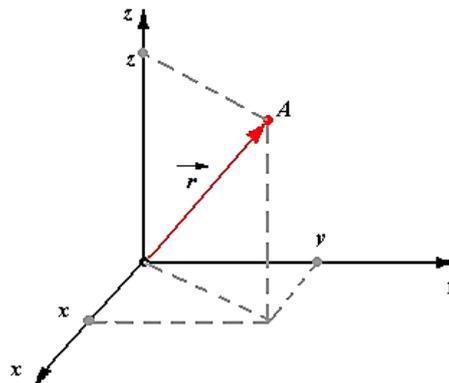


Рис. 5. Положение точки в пространстве

Следовательно, закон движения – это зависимость радиус-вектора от времени или зависимость координат от времени:

$$r = r(t) \text{ или } x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

**Скорость точки** – векторная физическая величина, характеризующая изменение положения точки в пространстве с течением времени

$$v = l/t.$$

**Средняя скорость перемещения** равна отношению полного перемещения к промежутку времени, за которое это перемещение совершено

$$v_{\text{ср}} = S/\Delta t.$$

**Мгновенная скорость** – скорость в заданный момент времени

$$v = r.$$

Модуль мгновенной скорости определяется равенством

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

**Нормальным (центростремительным) ускорением точки  $a_n$**  называется проекция ускорения точки на главную внутреннюю нормаль к траектории (рис. 6). Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению и является всегда положительной величиной.

**Касательным (тангенциальным) ускорением  $a_\tau$**  точки называется проекция ускорения точки на касательную к траектории, т. е. на вектор скорости  $v$ .

Касательное ускорение характеризует изменение скорости точки по величине. Нормальное и касательное ускорения точки – главные кинематические величины, определяющие вид и особенности движения точки.

**Полное ускорение  $a$**  – векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости  $a = v/t$ .

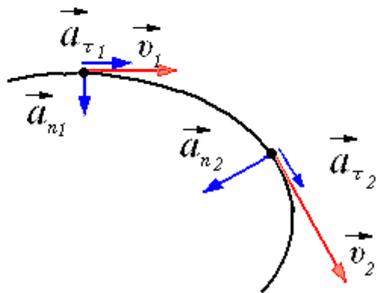


Рис. 6. Криволинейное движение точки

При криволинейном движении точки полное ускорение можно разложить на две составляющие

$$a = a_n + a_\tau.$$

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

**Пример.** Даны уравнения

движения точки в декартовой системе координат (в плоскости  $xу$ ):

$$x = -2\cos(\pi/4)t + 3; \quad y = 2\sin(\pi/8)t - 1,$$

где  $x, y$  – в метрах,  $t = 1$  с.

### Решение

1. Для определения уравнения траектории точки исключаем из уравнений движения  $t$ . Поскольку  $t$  входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ или } \cos(\pi/4)t = 1 - 2\sin^2(\pi/8)t.$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем их в предыдущее выражение

$$\cos(\pi/4)t = (3-x)/2; \quad \sin^2(\pi/8)t = (y+1)/2; \quad (3-x)/2 = 1 - 2(y+1)^2/4, \text{ откуда } x = (y+1)^2 + 1.$$

2. Строим график этой функции, представляющий собой в данном случае параболу (рис. 7).

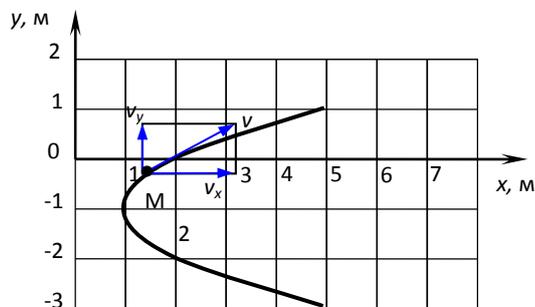


Рис. 7. График параболы

3. Определяем положение точки на траектории параболы:

$$x(t) = -2\cos(\pi/4) + 3 = 1,59 \text{ м};$$

$$y(t) = 2\sin(\pi/8) - 1 = -0,235 \text{ м}.$$

4. Скорость точки найдём по её проекциям на координатные оси:

$$v_x = dx/dt = (\pi/2) \sin(\pi/4) t; \quad v_y = dy/dt = (\pi/4) \cos(\pi/8) t;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

При  $t = 1 \text{ с}$

$$v_x = 1,11 \text{ м/с}; \quad v_y = 0,73 \text{ м/с}; \quad v = 1,33 \text{ м/с}.$$

5. Ускорения точки найдём по их проекциям на координатные оси (рис. 8):

$$a_x = dv_x/dt = (\pi^2/8) \cos(\pi/4) t; \quad a_y = dv_y/dt = -(\pi^2/32) \sin(\pi/8) t;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

При  $t = 1 \text{ с}$

$$a_x = 0,87 \text{ м/с}^2; \quad a_y = -0,12 \text{ м/с}^2; \quad a = 0,88 \text{ м/с}^2.$$

6. Касательное ускорение точки

$$a_\tau = (v \cdot a_x + v_y \cdot a_y)/v = (1,11 \cdot 0,87 + 0,73(-0,12))/1,38 = 0,66 \text{ м/с}^2.$$

7. Нормальное ускорение точки при  $t = 1 \text{ с}$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{0,88^2 - 0,66^2} = 0,58 \text{ м/с}^2.$$

8. Изобразим вектор ускорения точки и его составляющие, причём правильность решения контролируем как по составляющим  $a_x$  и  $a_y$ , так и по  $a_\tau$  и  $a_n$

$$a = a_x + a_y = a_\tau + a_n.$$

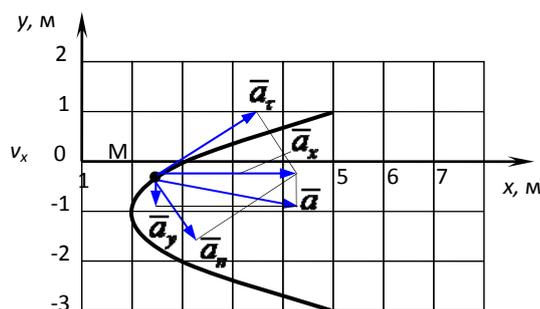


Рис. 8. Построение ускорений точки

9. Радиус кривизны траектории движения точки

$$\rho = v^2/a_n = 1,33^2/0,58 = 3,05 \text{ м}.$$

Ответ:  $v = 1,33 \text{ м/с}; a = 0,88 \text{ м/с}^2; a_\tau = 0,66 \text{ м/с}^2; a_n = 0,58 \text{ м/с}^2; \rho = 3,05 \text{ м}.$

## Практическое задание

**Задача.** По заданным уравнениям движения точки  $M$  найти и изобразить на рисунке вид её траектории. Для момента времени  $t = 1$  с указать положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории. Указать на рисунке векторы скорости и ускорения, а также все найденные в ходе решения задачи их компоненты. Варианты взять из табл. 1.

Таблица 1

Номер варианта	Уравнения движения	
	$x(t), \text{ м}$	$y(t), \text{ м}$
0	$-2t^2 + 3$	$-5t$
1	$4\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 2$	$4\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-\cos\left(\frac{\pi}{3}t^2\right) + 3$	$\sin\left(\frac{\pi}{3}t^2\right) - 1$
3	$4(t+1)$	$-\frac{4}{t+1}$
4	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 4$
5	$3t^2 + 2$	$-4t$
6	$7\sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) + 3$	$2 - 7\cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right)$
7	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 2$
8	$-4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$
9	$-4t^2 + 1$	$-3t$

### Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоят основные задачи кинематики?
2. Какие кинематические характеристики вы можете назвать?
3. Какие задания движения точки вам известны?

4. Что такое абсолютная, относительная и переносная скорости точки?
5. Что такое движение свободного твёрдого тела? Законы движения.
6. Изложите содержание координатного способа задания движения точки.
7. Каково направление вектора скорости криволинейного движения точки? Вычислить его при координатном способе задания её движения.
8. Вектор нормального ускорения точки криволинейного движения и вычисление его при координатном способе задания её движения.
9. Что характеризуют нормальное и касательное ускорения точки?
10. Какая зависимость существует между радиус-вектором криволинейно движущейся точки и вектором её скорости?

### **3. ДИНАМИКА**

В динамике изучаются механические движения материальных объектов под действием сил. Сложные материальные объекты – механические системы и твёрдые тела, которые состоят из набора материальных точек.

Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным эвклидовым, свойства его не зависят от движущихся в нем материальных объектов.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга, оно протекает одинаково.

#### **Принцип Даламбера для материальной точки**

Уравнение движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил и сил реакции связей имеет вид

$$m \cdot a = F + R,$$

где  $F$  – равнодействующая активных сил,  $R$  – равнодействующая сил реакции связей.

Силой инерции материальной точки называют произведение массы точки на вектор ускорения, взятое с обратным знаком, т. е.  $\Phi = -m \cdot a$ . Если использовать понятие силы инерции, то можно сформулировать принцип Даламбера для материальной точки: ***в каждый момент времени активные силы, действующие на материальную точку силы реакции связей вместе с силой инерции точки, образуют уравновешенную систему сил.***

$$F + R + \Phi = 0.$$

Принцип Даламбера называют еще методом кинетостатики. С его помощью для решения задач динамики можно использовать методы статики.

Понятие о силе инерции ввел еще Ньютон. Он рассуждал так: если точка движется под действием силы  $F = m \cdot a$ , то тело (или система тел) является источником этой силы. По закону равенства действия и противодействия ускоряемая точка будет воздействовать на ускоряющее ее тело с силой  $\Phi = -m \cdot a$ . Эту силу Ньютон назвал системой инерции точки. Силы  $F$  и  $\Phi$  равны и противоположны, но приложены к разным телам, поэтому складывать их нельзя. Сила инерции точки на саму точку не действует. Для точки это фиктивная сила. Если бы на точку кроме силы  $F$  действовала бы еще и сила  $\Phi$ , то точка оставалась бы в покое.

Принцип Даламбера дает общий прием составления уравнений, необходимых для решения задач динамики системы, причем эти уравнения имеют ту же форму, что и уравнения статики. Этот прием оказывается особенно полезным при решении тех задач, в которых требуется найти динамические реакции связей, т. е. реакции, возникающие при движении системы.

В задачах, в которых внешние силы, силы реакции связей и силы инерции образуют произвольную пространственную систему сил, требуется определить реакции двух закрепленных точек твердого тела (двух подшипников или подшипника и подпятника), возникающие при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через эти точки.

После приложения всех внешних нагрузок, реакций связей и всех сил инерции можно рассматривать равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При этом в общем

случае можно составить шесть известных из «пространственной» статики уравнений равновесия: три уравнения проекций сил и три уравнения моментов сил относительно координатных осей.

При решении задач по принципу Даламбера следует иметь в виду, что в уравнение моментов всех сил относительно оси вращения искомые реакции подшипников не войдут, так как их моменты относительно этой оси равны нулю. Поэтому эти реакции определяются из остальных пяти уравнений равновесия. Если в задаче, как это нередко бывает, требуется найти только реакции, перпендикулярные к оси вращения, то достаточно составить четыре уравнения равновесия (два уравнения проекций на оси, перпендикулярные оси вращения, и два уравнения моментов относительно этих же осей).

**Пример.** Определить усилия в стержнях  $S_1$  и  $S_2$ .

Дано:  $m_1 = 55$  кг;  $m_2 = 105$  кг;  $m_3 = 90$  кг;  $m_4 = 80$  кг;  $R_1 = 0,35$  м;  $R_2 = 0,70$  м;  $l_1 = 0,95$  м;  $l_2 = 1,35$  м;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ$ ;  $q = 200$  кг/м;  $T = 2500$  Н.

**Решение**

1. Выполняем расчетную схему строго в соответствии с условием задачи (учитываем углы  $\alpha$  и  $\beta$  и выбираем линейный масштаб). Расчетная схема по условию задачи представлена на рис. 9.

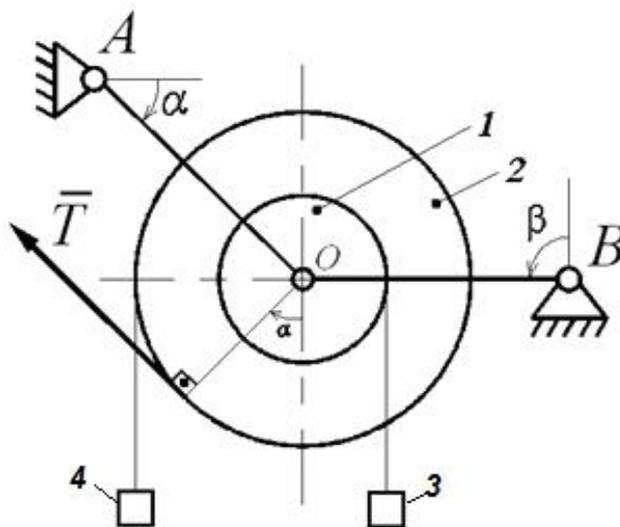


Рис. 9. Механическая система

2. Для решения задачи воспользуемся принципом Даламбера для механической системы (или системы материальных точек): в любой момент времени векторная сумма главных векторов внешних

сил, реакций связей и сил инерции и главных моментов этих сил относительно произвольного центра равняется нулю. Следовательно, необходимо выделить внешние силы, силы реакций связей и силы инерции.

3. Внешние силы. К внешним силам относятся сила  $T$  (направлена под углом  $45^\circ$  к горизонтали), силы тяжести  $m_1 \cdot g$ ,  $m_2 \cdot g$ ,  $m_3 \cdot g$ ,  $m_4 \cdot g$  и силы тяжести стержней  $AO$  и  $BO$  –  $m_5 \cdot g$  и  $m_6 \cdot g$  соответственно. Силы  $m_5 \cdot g$  и  $m_6 \cdot g$  по модулю равны:

$$m_5 \cdot g = q \cdot l_1 \cdot g = 200 \cdot 0,95 \cdot 9,8 \approx 1860 \text{ Н};$$

$$m_6 \cdot g = q \cdot l_2 \cdot g = 200 \cdot 1,35 \cdot 9,8 \approx 2650 \text{ Н}.$$

При этом массы стержней равны:

$$m_5 = q \cdot l_1 = 200 \cdot 0,95 = 190 \text{ кг};$$

$$m_6 = q \cdot l_2 = 200 \cdot 1,35 = 270 \text{ кг}.$$

Все вычисления выполняем с точностью до трех значащих цифр.

На рис. 10 покажем эти силы. При этом учитываем, что, поскольку стержни однородные, силы тяжести  $m_5 \cdot g$  и  $m_6 \cdot g$  приложены в геометрических центрах этих стержней. Таким образом, все внешние нагрузки  $T$ ,  $m_1 \cdot g$ ,  $m_2 \cdot g$ ,  $m_3 \cdot g$ ,  $m_4 \cdot g$ ,  $m_5 \cdot g$  и  $m_6 \cdot g$  на расчетной схеме (см. рис. 10) показаны.

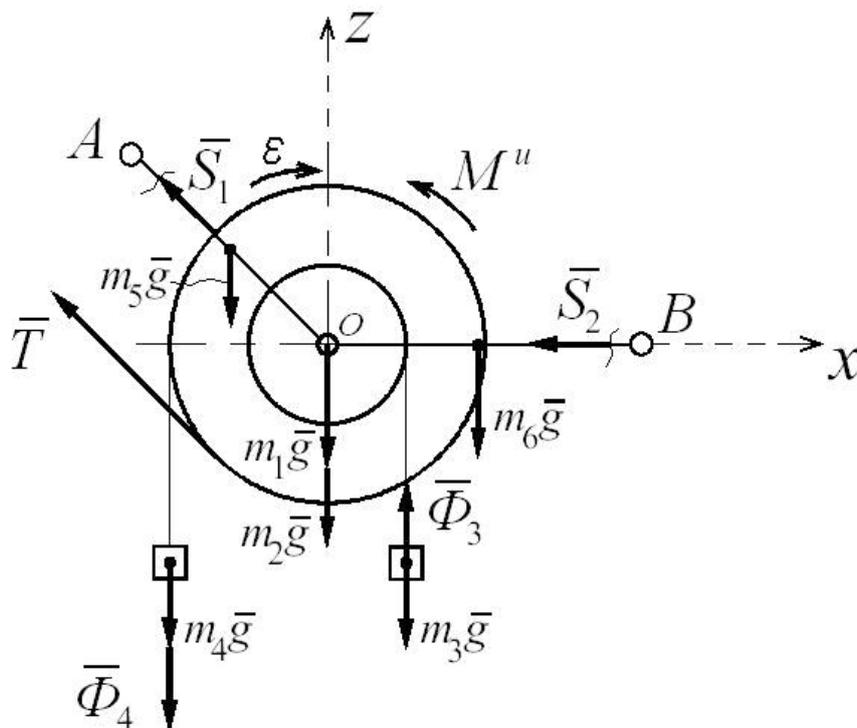


Рис. 10. Расчётная схема сил

4. Силы реакций связей. К силам реакций связей, которые в дальнейшем будем учитывать, относятся усилие  $S_1$  в стержне  $AO$  и усилие  $S_2$  в стержне  $BO$ . Реакции в шарнире  $O$  не рассматриваются, так как для данной механической системы эти реакции являются силами внутренними. На рис. 10 силы  $S_1$  и  $S_2$  показываем направленными вдоль стержней в произвольную сторону.

5. Силы инерции. При вычислении главного вектора и главного момента сил инерции твердого тела необходимо учитывать вид движения этого тела.

Блоки 1 и 2 жестко соединены друг с другом, сидят на одной оси, поэтому, вращаясь, имеют равные угловую скорость и угловое ускорение. При вращательном движении твердого тела силы инерции приводятся к главному моменту сил инерции, равному и направленному в сторону, противоположную угловому ускорению

$$M^u = I_Z \varepsilon,$$

где  $I_Z = I_{Z1} + I_{Z2}$  – момент инерции блоков 1 и 2 относительно оси вращения;  $\varepsilon$  – угловое ускорение блоков.

Следовательно,

$$I_Z = 0,5m_1 \cdot R_1^2 + 0,5m_2 \cdot R_2^2 = 0,5 \cdot 55 (0,35)^2 + 0,5 \cdot 105 (0,70)^2 = 3,75 + 25,7 \approx 29,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

На данном этапе решения задачи определить угловое ускорение блоков по величине не представляется возможным. Поэтому допустим, что угловое ускорение  $\varepsilon$  блоков направлено по часовой стрелке (показано на рис. 10). Тогда момент сил инерции  $M_{и}$  направлен в противоположную сторону.

Грузы 3 и 4 совершают поступательное движение. В этом случае все силы инерции приводятся к главному вектору сил инерции, которые соответственно равны

$$\Phi_3 = -m_3 \cdot a_3 \text{ и } \Phi_4 = -m_4 \cdot a_4,$$

где знак «минус» означает, что главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению твердого тела;  $a_3 = \varepsilon \cdot R_1 = 0,35\varepsilon \text{ м/с}^2$  и  $a_4 = \varepsilon R_2 = 0,7\varepsilon \text{ м/с}^2$ .

Направления  $a_3$  и  $a_4$  соответствуют выбранному ранее направлению  $\varepsilon$ .

С учетом изложенного, покажем на рис. 10 силы инерции  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$ .

6. Принцип Даламбера позволяет решать задачи динамики значительно более простыми методами статики. В соответствии с условием задачи механическая система расположена в вертикальной плос-

кости. Следовательно, все силы располагаются именно в этой плоскости. Направления сил произвольны. Таким образом, применяя принцип Даламбера, считаем, что имеет место равновесие механической системы под действием плоской произвольной системы сил. Составим три уравнения равновесия в выбранной и показанной на рис. 10 системе координат:

$$1. \Sigma F_{ix} = 0; -T \cos 45^\circ - S_1 \cos 45^\circ - S_2 = 0;$$

$$2. \Sigma F_{iz} = 0; T \sin 45^\circ + S_1 \sin 45^\circ - m_1 \cdot g - m_2 \cdot g - m_3 \cdot g - m_4 \cdot g - m_5 \cdot g - m_6 \cdot g - \Phi_4 + \Phi_3 = 0;$$

$$3. \Sigma M_0(F_i) = 0; T \cdot R_2 - M_{\text{и}} + m_3 \cdot g \cdot R_1 - \Phi_3 \cdot R_1 - m_4 \cdot g \cdot R_2 - \Phi_4 \times R_2 - m_5 \cdot g (l_1/2) \cos 45^\circ + m_6 \cdot g(l_2/2) = 0.$$

При составлении третьего уравнения равновесия за положительное направление момента силы принимаем направление момента внешней силы  $T$ , т. е. по часовой стрелке.

С учетом значений сил и момента сил инерции получим

$$T \cdot R_2 + g(m_3 \cdot R_1 - m_4 \cdot R_2 - m_5(l_1/2)\cos 45^\circ + m_6(l_2/2)) - I_Z \cdot \varepsilon - m_3 \cdot 0,35\varepsilon \cdot R_1 - m_4 \cdot 0,7\varepsilon \cdot R_2 = 0.$$

Находим угловое ускорение

$$\varepsilon = [T \cdot R_2 + g(m_3 \cdot R_1 - m_4 \cdot R_2 - m_5(l_1/2) \cos 45^\circ + m_6(l_2/2))]/(I_Z + m_3 \cdot 0,35R_1 + m_4 \cdot 0,7\varepsilon \cdot R_2) = [2500 \cdot 0,7 + 9,8(90 \cdot 0,35 - 80 \cdot 0,7 - 190(0,95/2)0,707 + 270(1,35/2))]/(29,1 + 0,35 \cdot 90 \cdot 0,35 + 0,7 \cdot 80 \cdot 0,7) = 33,6 \text{ с}^{-2}.$$

Силы инерции равны:

$$\Phi_3 = m_3 \cdot a_3 = m_3 \cdot 0,35\varepsilon = 90 \cdot 0,35 \cdot 33,6 \approx 1060 \text{ Н};$$

$$\Phi_4 = m_4 \cdot a_4 = m_4 \cdot 0,7\varepsilon = 80 \cdot 0,7 \cdot 33,6 \approx 1880 \text{ Н}.$$

Из уравнения равновесия находим усилие в стержне 1

$$S_1 = [-T \sin 45^\circ + g(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) + \Phi_4 - \Phi_3]/\sin 45^\circ = [-2500 \cdot 0,707 + 9,8(55 + 90 + 80 + 190 + 270) + 1880 - 1060]/0,707 = 9610 \text{ Н}.$$

Из уравнения равновесия находим усилие в стержне 2

$$S_2 = -T \cos 45^\circ - S_1 \cos 45^\circ = -2500 \cdot 0,707 - 9610 \cdot 0,707 = -8560 \text{ Н}.$$

Ответ:  $S_1 = 9610 \text{ Н}; S_2 = -8560 \text{ Н}.$

## Практическое задание

**Задача.** Механическая система, расположенная в вертикальной плоскости, состоит из двух блоков 1 и 2, жёстко соединённых между

собой и насаженных на общую ось, которая через шарнир (подшипник)  $O$  опирается на стержни  $AO$  ( $l_1$ ) и  $BO$  ( $l_2$ ). На каждый из блоков намотана невесомая нерастяжимая нить, на концах которой прикреплены грузы 3 и 4. Блоки считать сплошными однородными цилиндрами, массы  $m_1$  и  $m_2$  и радиусы  $R_1$  и  $R_2$ . Погонная масса стержней  $q$  и они наклонены к вертикали или горизонтали под углами  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. К механической системе приложены внешние нагрузки: постоянная сила  $T$  или постоянный момент  $M$ . Определить усилия в стержнях. Варианты взять из табл. 2 и рис. 11.

Таблица 2

Номер варианта	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$R_1$	$R_2$	$l_1$	$l_2$	$\alpha$	$\beta$	$q$ , кг/м	$T$ , Н	$M$ , Н·м
	кг				м				градус				
0	40	70	60	100	0,25	0,40	0,8	0,9	30	90	100	1200	480
1	60	100	20	80	0,20	0,50	1,0	1,1	45	60	120	1400	560
2	50	90	70	90	0,30	0,55	1,1	1,2	60	45	140	1600	600
3	30	80	40	70	0,35	0,60	0,9	0,8	60	90	150	1800	640
4	20	60	50	60	0,15	0,30	0,7	0,9	60	30	160	2000	680
5	45	90	100	50	0,40	0,60	1,2	1,0	45	90	180	1000	440
6	70	120	110	70	0,45	0,70	1,3	1,1	45	30	170	900	400
7	80	140	75	85	0,50	0,75	1,4	1,3	45	45	110	2100	720
8	90	180	85	110	0,55	0,80	1,5	1,4	30	60	180	2200	760
9	100	190	95	130	0,60	0,85	1,6	1,5	30	45	190	2300	800

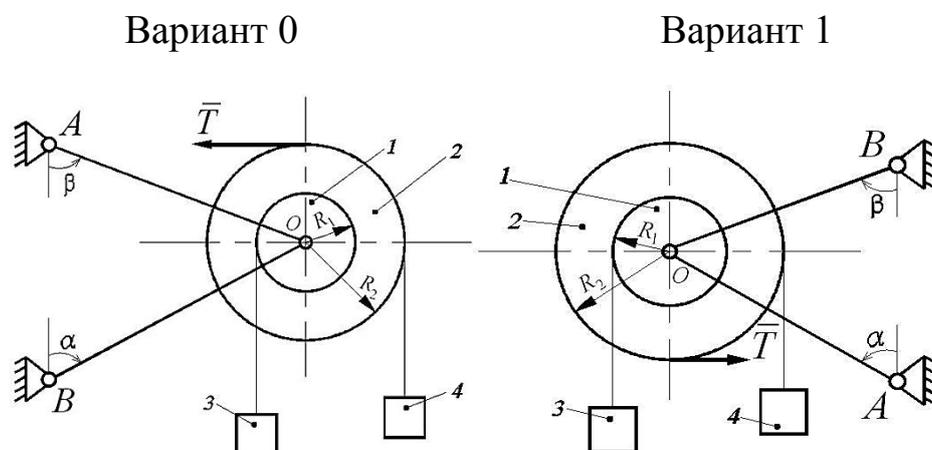
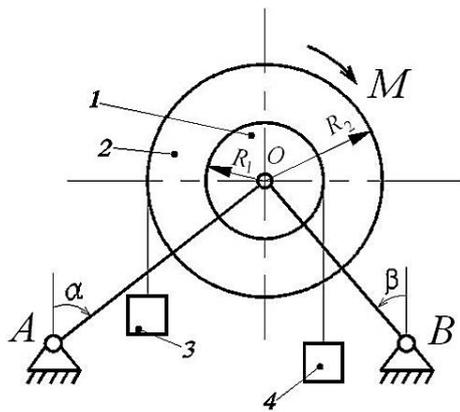
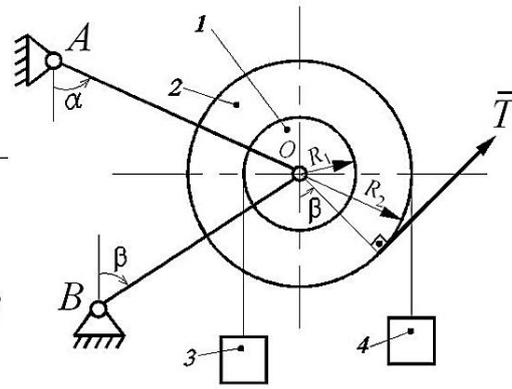


Рис. 11. Механическая система (см. также с. 24, 25)

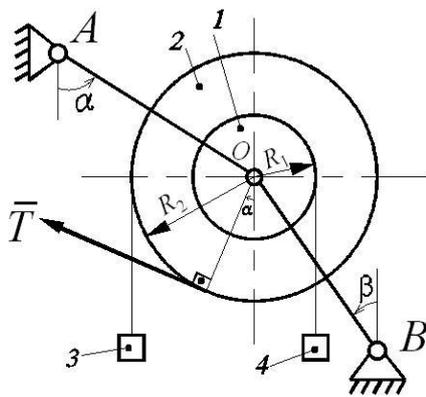
Вариант 2



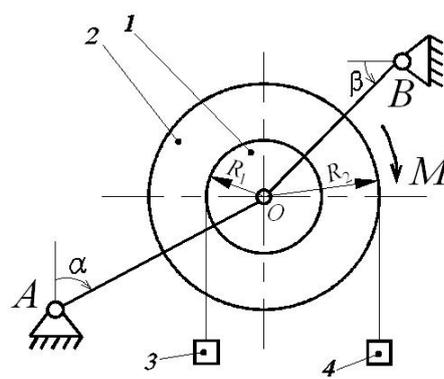
Вариант 3



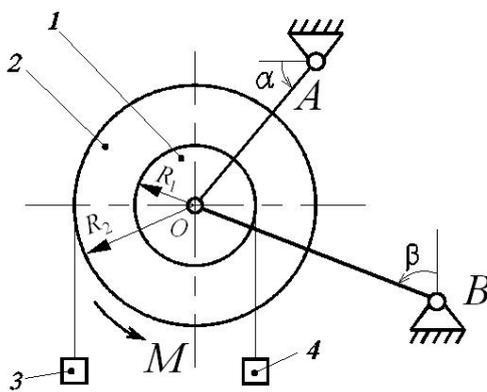
Вариант 4



Вариант 5



Вариант 6



Вариант 7

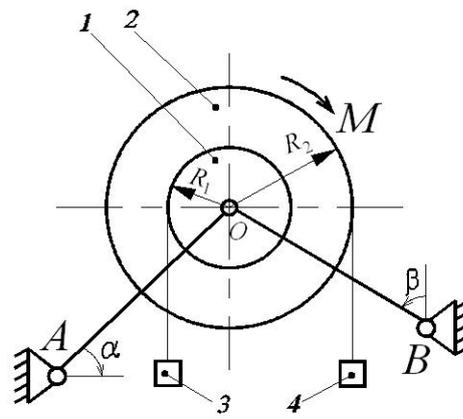
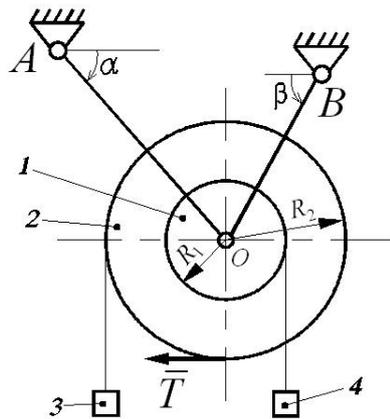


Рис. 11. Механическая система (продолжение)

Вариант 8



Вариант 9

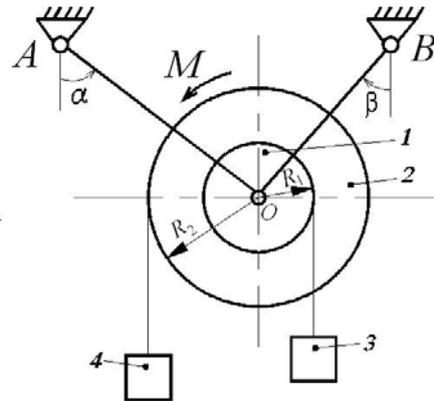


Рис. 11. Механическая система (окончание)

### Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте две основные задачи динамики материальной точки.
2. Изложите методы решения задач динамики материальной точки.
3. Какие законы Ньютона вам известны?
4. Опишите уравнение движения материальной точки.
5. Как различаются активные и реактивные силы?
6. Для чего нужна сила инерции материальной точки?
7. В чём состоит принцип Даламбера для материальной точки?
8. В чём состоит принцип Даламбера для механической системы?
9. Как определить главный момент силы?
10. Что такое плоская произвольная система сил?

## Раздел 2

# ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

---

### 1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. ЗАКОН ГУКА

**Твёрдым телом** в механике называется неизменяемая система материальных точек, т. е. такая идеализированная система, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными.

Силы притяжения и отталкивания обуславливают механическую прочность твердых тел, т. е. их способность противодействовать изменению формы и объёма. Растяжению тел препятствуют силы межатомного притяжения, а сжатию – силы отталкивания.

Недеформируемых тел в природе не существует.

Под **растяжением (сжатием)** понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные продольные силы  $N$ , а прочие силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю (рис. 12).

Растягивающие нормальные продольные силы принято считать положительными (рис. 12, а), а сжимающие – отрицательными (рис. 12, б).

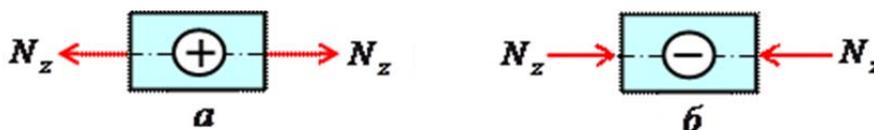


Рис. 12. Растягивающие продольные силы: а – положительные;  
б – отрицательные

При расчёте стержней, испытывающих деформацию растяжения на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи: определение напряжений (от  $N_z$ ), возникающих в стержне, и нахождение линейных перемещений в зависимости от внешней нагрузки.

Рассмотрим однородный стержень, с одним концом жёстко заделанным, а другим – свободным, к которому приложена центральная продольная сила  $P$  (рис. 13).

До нагружения стержня его длина равнялась  $l$ , после нагружения она стала  $l + \Delta l$ . Величину  $\Delta l$  называют **абсолютной деформацией стержня**.

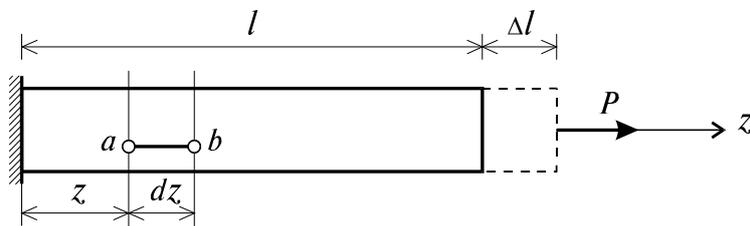


Рис. 13. Нагруженный стержень

Отношение абсолютной деформации  $\Delta l$  к первоначальной длине образца  $l$  называют **относительной деформацией**  $\varepsilon = \Delta l/l$ . При растяжении он увеличит свою длину на величину  $dz$  и его деформация составит  $\varepsilon = \Delta dz/dz$ .

В пределах малых деформаций при простом растяжении или сжатии **закон Гука** записывается в следующем виде: **механическое напряжение прямо пропорционально модулю относительной деформации**  $\sigma = E \varepsilon$ .

Коэффициент пропорциональности  $E$  в законе Гука называется **модулем продольной упругости** (модулем Юнга). Физический смысл: модуль Юнга численно равен такому нормальному напряжению, которое должно было бы возникнуть в теле при увеличении его длины в 2 раза (если бы для такой большой деформации выполнялся закон Гука). В СИ модуль Юнга выражают в паскалях ( $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ ).

Продольные силы  $N_z$ , возникающие в поперечных сечениях стержня, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений. График, показывающий изменение продольных сил по длине оси стержня, называется **эпюрой продольных сил** (эп.  $N_z$ ). Он дает наглядное представление о законе изменения продольной силы.

Осью абсцисс служит ось стержня. Каждая ордината графика – продольная сила (в масштабе сил) в данном сечении стержня.

Эпюра позволяет определить, в каком сечении действует максимальное внутреннее усилие (например, найти  $N_{\max}$  при растяжении – сжатии). Сечение, где действует максимальное усилие, называют **опасным**.

Перед построением эпюр необходимо освободить стержень, в котором будем строить эпюры от опорных связей (выделить объект равновесия) и приложить к нему все действующие внешние силы (активные и реактивные). Затем необходимо установить границы участков, в пределах которых закон изменения внутренних сил постоянный. Границами таких участков являются сечения, где приложены сосредоточенные силы или начинается и кончается распределенная нагрузка, а также сечения, где имеется перелом стержня.

Применяя метод сечений и учитывая правила знаков, изложенные выше, получаем уравнения изменения внутренних сил в пределах длины каждого участка стержня.

### Расчёт стержней при центральном растяжении – сжатии

**Пример.** Стальной стержень (модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^4$  кН/см<sup>2</sup>) линейными размерами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и площадью поперечного сечения нижнего участка  $F_n = F = 10$  см<sup>2</sup>, а верхнего –  $F_v = 2F = 20$  см<sup>2</sup> нагружен внешними осевыми силами  $P_1 = 100$  кН и  $P_2 = 300$  кН (рис. 14, а). Построить эпюры продольных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma_z$ . Оценить прочность стержня, если предельное напряжение (предел текучести)  $\sigma_m = 24$  кН/см<sup>2</sup>, а допускаемый коэффициент запаса  $[n] = 1,5$ . Найти удлинение стержня  $\Delta l$ .

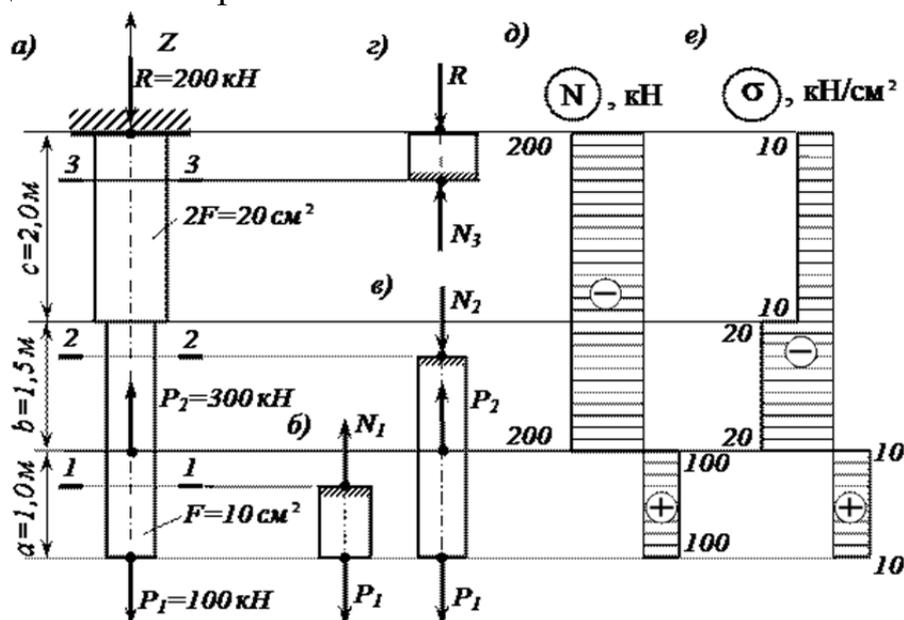


Рис. 14. Расчётная схема

## Решение

1. Определяем опорную реакцию  $R$ , возникающую в заделке.

Учитывая, что  $P_2 > P_1$ , направим опорную реакцию  $R$  вниз. Тогда из уравнения равновесия  $\Sigma z = 0$

$$-R + P_2 - P_1 = 0; R = P_2 - P_1 = 300 - 100 = 200 \text{ кН.}$$

2. Строим эпюры продольных сил  $N$ .

Разбиваем длину стержня на три участка. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы и (или) изменяется размер поперечного сечения стержня.

Воспользуемся методом сечений. Делаем по одному сечению в произвольном месте каждого из трех участков стержня.

*Сечение 1–1.* Мысленно отбросим верхнюю часть стержня (рис. 14, б) и само сечение считаем неподвижным. Очевидно, что внешняя сила  $P_1$  растягивает рассматриваемую нижнюю часть стержня. Отброшенная верхняя часть стержня противодействует этому растяжению. Это противодействие заменим внутренней продольной силой  $N_1$ , направленной от сечения и соответствующей растяжению. Разрушения стержня не произойдет только в том случае, если возникающая в сечении 1–1 внутренняя продольная сила  $N_1$  уравновесит внешнюю силу  $P_1$ . Поэтому очевидно, что  $N_1 = P_1 = 100 \text{ кН}$ .

*Сечение 2–2.* Внешняя сила  $P_1$  растягивает рассматриваемую нижнюю часть стержня, а сила  $P_2$  её сжимает. Причем согласно условию задачи  $P_2 > P_1$ , чтобы уравновесить эти две силы, в сечении 2 – 2 должна возникнуть внутренняя сила  $N_2$ , противодействующая сжатию, т. е. направленная к сечению (рис. 14, в)

$$N_2 = P_2 - P_1 = 300 - 100 = 200 \text{ кН.}$$

*Сечение 3–3.* Внутренняя продольная сила  $N_3$  должна уравновесить внешнюю (реактивную) сжимающую силу  $R$  (рис. 14, г). Поэтому она направлена к сечению и равна

$$N_3 = R = 200 \text{ кН.}$$

Легко убедиться в том, что полученный результат не изменится, если отбросить не нижнюю, а верхнюю часть стержня. В этом случае продольная сила  $N_3$  также противодействует сжатию и равна

$$N_3 = P_2 - P_1 = 300 - 100 = 200 \text{ кН.}$$

При построении эпюры продольных сил  $N$  воспользуемся следующим правилом знаков: внутренняя продольная сила, возникающая

в поперечном сечении стержня, считается положительной, если она противодействует растяжению стержня, и отрицательной, если она противодействует его сжатию. Оно вводится для того, чтобы можно было наглядно видеть, какая часть стержня испытывает деформацию растяжения, а какая часть – деформацию сжатия. Это обстоятельство может оказаться крайне важным, в частности для стержней из хрупкого материала, которые имеют разные допускаемые напряжения на растяжение и сжатие.

Таким образом, в любом сечении нижнего участка стержня внутренняя продольная сила противодействует растяжению и равна  $N_1 = 100$  кН. В любом сечении среднего и верхнего участков стержня имеет место деформация сжатия, поэтому  $N_2 = N_3 = -200$  кН.

Эпюра продольных сил  $N$  представлена на рис. 14, д. При анализе эпюры очевидно, что в местах приложения внешних сил имеет место скачкообразное изменение продольной силы на величину, равную значению соответствующей внешней силы. Причем изменение поперечного размера стержня, как это видно из рис. 14, д, никак не сказывается на характере эпюры  $N$ .

### 3. Построим эпюры нормальных напряжений $\sigma_z$ .

Нормальное напряжение, возникающее в  $k$ -м поперечном сечении стержня при растяжении (сжатии), вычисляется по формуле

$$\sigma_{Jk} = N_k / F_k,$$

где  $N_k$  и  $F_k$  – продольная сила и площадь  $k$ -го поперечного сечения стержня соответственно.

В первом поперечном сечении стержня нормальное напряжение равно  $\sigma_{J1} = N_1 / F_1 = N_1 / F = +100/10 = +10$  кН/см<sup>2</sup>, во втором  $-\sigma_{J2} = N_2 / F_2 = N_2 / F = -200/10 = -20$  кН/см<sup>2</sup>, в третьем  $-\sigma_{J3} = N_3 / F_3 = N_3 / 2F = -200/20 = -10$  кН/см<sup>2</sup>.

Строим по вычисленным значениям эпюру  $\sigma_z$  (рис. 14, е). В пределах каждого из участков стержня напряжения постоянны, т. е. эпюра напряжений параллельна оси. Заметим, что в отличие от эпюры  $N$  на эпюре  $\sigma_z$  «скачок» имеет место не только в местах приложения внешних сил, но и там, где происходит изменение размеров поперечного сечения стержня.

### 4. Оценим прочность стержня.

Сопоставим наибольшее (по модулю) нормальное напряжение  $\sigma_{J2}$ , которое возникает во втором сечении стержня, с допускаемым

напряжением  $[\sigma]$ , представляющим собой долю от предельного напряжения  $\sigma_{пр}$ , т. е. от напряжения, при котором начинается разрушение материала. Разрушение стали как пластичного материала начинается при появлении значительных остаточных деформаций. Поэтому для стали предельное напряжение равно пределу текучести  $\sigma_{пр} = \sigma_m$ . Тогда

$$[\sigma] = \sigma_m / [n] = 24 / 1,5 = 16 \text{ кН/см}^2.$$

Условие прочности имеет вид  $\sigma_z^{\max} \leq [\sigma]$ , тогда  $\sigma_z^{\max} = |\sigma_{J2}| = 20 \text{ кН/см}^2 > [\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$ , следовательно, прочность стержня на втором участке не обеспечена.

Таким образом, площадь поперечного сечения стержня на втором участке, равную  $F_2 = F = 10 \text{ см}^2$ , необходимо увеличить.

Несложный анализ показывает, что на других участках стержня условие прочности выполняется.

Из условия прочности определяем требуемую площадь поперечного сечения стержня на втором участке

$$F_2 \geq |N_2| / [\sigma] = 200 / 16 = 12,5 \text{ см}^2.$$

5. Вычислим удлинение всего стержня  $\Delta l$ .

При переменных по длине стержня значениях продольной силы и площади поперечного сечения удлинение вычисляем по формуле

$$\Delta l = \sum (N_k \cdot l_k / E \cdot F_k),$$

где  $l_k$  – длина соответствующего участка стержня, а  $E$  – модуль Юнга.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \Delta l &= N_1 \cdot l_1 / E \cdot F_1 + N_2 \cdot l_2 / E \cdot F_2 + N_3 \cdot l_3 / E \cdot F_3 = \\ &= 100 \cdot 100 / 2 \cdot 10^4 \cdot 10 - 200 \cdot 150 / 2 \cdot 10^4 \cdot 12,5 - 200 \cdot 200 / 2 \cdot 10^4 \cdot 20 = \\ &= -0,17 \text{ см.} \end{aligned}$$

Таким образом, длина стержня уменьшается на 1,7 мм.

## Практическое задание

**Задача.** Стальной стержень переменного сечения (модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ ) линейными размерами  $a$ ,  $b$  и  $c$  находится под действием внешних осевых сил  $P$  и  $2P$  (рис. 15). Построить эпюры продольных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma_z$ . Оценить прочность стержня, если предельное напряжение (предел текучести)  $\sigma_m = 24 \text{ кН/см}^2$ , а допускаемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 1,5$ . Найти удлинение стержня  $\Delta l$ .

Варианты взять из табл. 3 и рис. 15.

Таблица 3

Номер схемы	$F$ , см <sup>2</sup>	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$P$ , кН
1	2,0	1,2	1,4	1,6	11
2	2,2	1,4	1,6	1,4	12
3	2,4	1,8	1,6	1,2	13
4	2,6	1,6	2,0	1,0	14
5	2,8	2,0	1,8	1,2	15
6	3,0	2,2	1,6	1,4	16
7	3,2	2,4	1,4	1,6	17
8	3,4	2,6	1,2	1,8	18
9	3,6	2,8	1,0	1,4	19
0	3,8	2,4	1,6	1,2	20

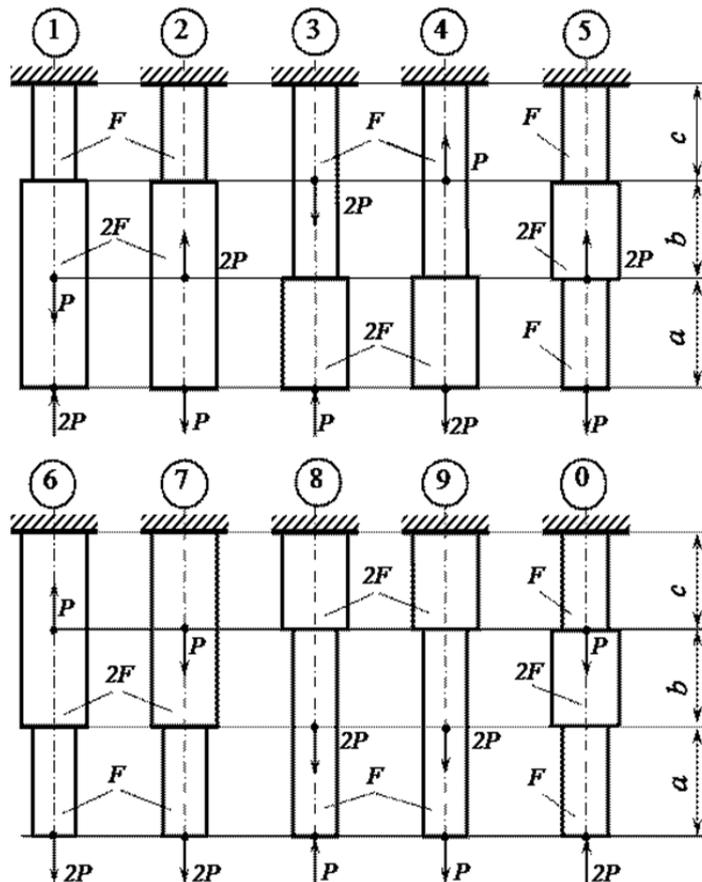


Рис. 15. Расчётная схема вертикального стержня

## 2. ИЗГИБ

**Изгиб** – вид деформации, когда под действием внешних сил в поперечном сечении балки (стержня, бруса) возникают изгибающие моменты.

Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, а поперечные и нормальные силы отсутствуют, то такой изгиб называется **прямым чистым изгибом**.

При изгибе продольная ось балки искривляется, поперечные сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются, продольные волокна либо растягиваются, либо сжимаются (рис. 16). **Расчётной схемой балки** определяется ось балки как геометрическое место точек – центров тяжести поперечных сечений физической балки. К оси балки прикладываются нагрузки, ось балки опирается на опоры, создавая, таким образом, геометрически неизменяемую систему.

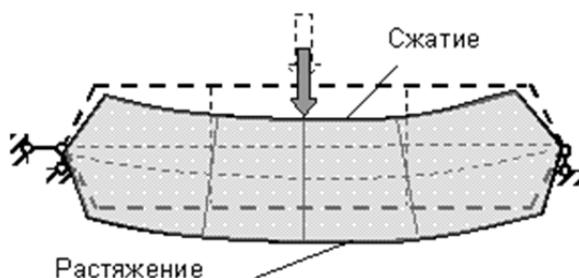


Рис. 16. Деформированное положение балки

Изогнутая деформированная ось балки называется **упругой линией балки**, а расстояние по вертикали между точками на деформированной и недеформированной осях балки называется **прогибом балки**.

Для передачи нагрузок балка должна быть зафиксирована относительно корпуса с помощью опор – устройств, воспринимающих внешние силы.

Различают три основных вида опор балок:

- 1) жёсткое защемление (заделка) исключает осевые угловые смещения и воспринимает осевые силы и моментную нагрузку (рис. 17, а);
- 2) шарнирно-неподвижная опора допускает поворот вокруг оси и не воспринимает момент (рис. 17, б);

3) шарнирно-подвижная опора не допускает смещение балки только в направлении одной из осей и передает нагрузку вдоль этой силы (рис. 17, в).

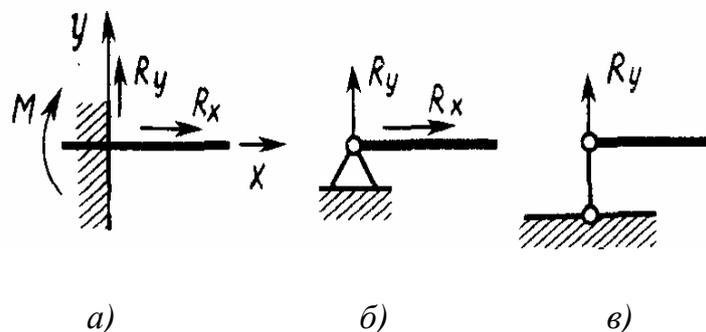


Рис. 17. Основные виды опор балок

Под действием внешних нагрузок в местах закрепления балки возникает опорная реакция  $R_y$ , которую находят из условий равновесия статики  $\Sigma x = 0$ ,  $\Sigma y = 0$ ,  $\Sigma z = 0$ .

Анализ внутренних сил начинается после определения реакции. Они являются одним из факторов, определяющих появляющиеся в строительном элементе напряжения, следовательно, и его прочность. Поэтому при подборе сечения конкретной балки необходимо знать, какие в ней действуют внутренние силы и каково их значение. Для решения этой задачи применяют **метод сечений**.

Для того чтобы рассчитывать балку на изгиб, необходимо знать максимальные значения  $M$  и  $Q$ , а так как они зависят от положения на балке сечения, для которого они рассчитываются, то возникает необходимость выяснения закона изменения изгибающего момента и поперечной силы по длине балки.

С этой целью обычно строят эпюры  $M$  и  $Q$ . Ось абсцисс эпюры  $M$  проводят параллельно оси балки. Для ряда сечений вычисляют значения изгибающих моментов и откладывают их в масштабе по перпендикуляру к оси; полученные точки соединяют. При этом положительные значения  $M$  откладывают вниз от оси. Аналогично строят эпюру  $Q$ , откладывая положительные значения поперечной силы вверх по оси, а отрицательные – вниз.

Правило для определения знаков изгибающего момента и поперечной силы утверждает, что изгибающий момент считается положи-

тельным, если балка изгибается выпуклостью вниз; если сумма проекций внешних сил дает составляющую, направленную вертикально вверх, то  $Q$  – положительна (рис. 18).

При расчёте и построении эпюр рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1) определяют опорные реакции балки;

2) разбивают балку на участки, приняв в качестве границ участков точки приложения сосредоточенных сил или начало и конец участков, нагруженных распределенной нагрузкой;

3) в пределах каждого участка проводят сечение, нормальное оси балки;

4) для каждого сечения составляют формулу изгибающего момента и поперечной силы в соответствии с правилами нахождения этих величин, сформулированными в начале настоящего раздела;

5) подсчитывают значения  $M$  и  $Q$  на границах всех участков;

6) исходя из общеизвестных правил высшей математики, находят местоположение максимума функции и его значение, если окажется, что на каком-либо участке изменение искомого параметра происходит нелинейно;

7) строят эпюры.

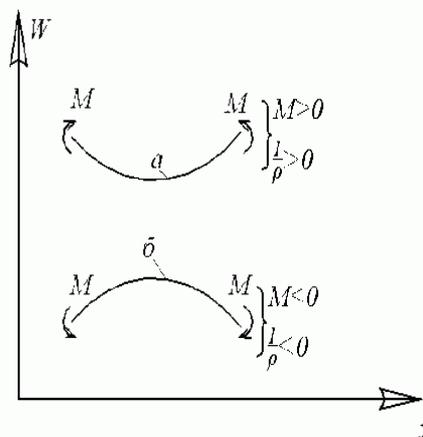


Рис. 18. Правило знаков

### Расчёт балок, работающих на поперечный изгиб

**Пример.** Для консольной балки, нагруженной распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 20$  кН/м и сосредоточенным моментом  $M = 50$  кН·м (рис. 19), требуется построить эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ , подобрать балку круглого поперечного сечения при допуске нормальном напряжении  $[\sigma] = 16$  кН/см<sup>2</sup> и проверить прочность балки по касательным напряжениям при допуске касательном напряжении  $[\tau] = 8$  кН/см<sup>2</sup>. Линейные размеры балки приведены на рис. 19, а.

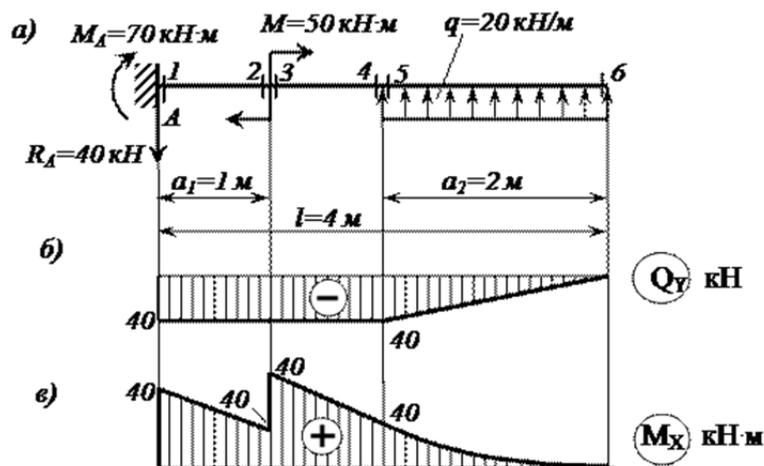


Рис. 19. Расчётная схема для консольной балки

## Решение

1. Определяем опорные реакции.

Горизонтальная реакция в заделке  $H_A$  равна нулю, поскольку внешние нагрузки в направлении оси  $z$  на балку не действуют.

Предварительно выбираем направления остальных реактивных усилий, возникающих в заделке: вертикальную реакцию  $R_A$  направим вниз, а момент  $M_A$  – по ходу часовой стрелки. Тогда из уравнений статики

$$\Sigma M_A = 0; \Sigma Y = 0.$$

Составляя эти уравнения, считаем момент положительным при вращении против хода часовой стрелки, а проекцию силы положительной, если ее направление совпадает с положительным направлением оси  $y$ .

Из первого уравнения находим момент в заделке  $M_A$

$$\Sigma M_A = -M_A - M + q \cdot a_2 (l - a_2/2) = 0.$$

$$\text{Отсюда } M_A = -M + q \cdot a_2 (l - a_2/2) = -50 + 20 \cdot 2 (4 - 2/2) = 70 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из второго уравнения – вертикальную реакцию  $R_A$

$$\Sigma Y = -R_A + q \cdot a_2 = 0.$$

$$\text{Отсюда } R_A = q \cdot a_2 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ кН}.$$

Полученные положительные значения для момента  $M_A$  и вертикальной реакции  $R_A$  в заделке свидетельствуют о том, что их направления выбраны правильно.

2. Строим эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$ .

В соответствии с характером закрепления и нагружения балки разбиваем ее длину на два участка. По границам каждого из этих участков наметим четыре поперечных сечения (см. рис. 19), в которых будем методом сечений (РОЗУ) вычислять значения перерезывающих сил и изгибающих моментов.

*Сечение 1.* Отбросим мысленно правую часть балки. Заменяем ее действие на оставшуюся левую часть перерезывающей силой  $Q_{y1}$  и изгибающим моментом  $M_{x1}$ .

Перерезывающая сила, возникающая в любом поперечном сечении, должна уравновесить все внешние силы (активные и реактивные), которые действуют на рассматриваемую (т. е. видимую) часть балки. Поэтому перерезывающая сила должна быть равна алгебраической сумме всех сил.

Правило знаков для перерезывающей силы следующее: внешняя сила, действующая на рассматриваемую часть балки и стремящаяся «повернуть» эту часть относительно сечения по ходу часовой стрелки, вызывает в сечении положительную перерезывающую силу. Такая внешняя сила входит в алгебраическую сумму для определения  $Q_{y1}$  со знаком плюс.

В этом сечении реакция опоры  $R_A$  вращает видимую часть балки против хода часовой стрелки. Поэтому

$$Q_{y1} = -R_A = -40 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент в любом сечении должен уравновесить момент, создаваемый видимыми внешними усилиями, относительно рассматриваемого сечения. Следовательно, он равен алгебраической сумме моментов всех усилий, которые действуют на рассматриваемую часть балки, относительно рассматриваемого сечения. При этом внешняя нагрузка, изгибающая рассматриваемую часть балки выпуклостью вниз, вызывает в сечении положительный изгибающий момент. И момент, создаваемый такой нагрузкой, входит в алгебраическую сумму для определения  $M_x$  со знаком плюс.

Очевидны два усилия: реакция  $R_A$  и момент в заделке  $M_A$ . Однако у силы  $R_A$  плечо относительно сечения равно нулю. Поэтому

$$M_{x1} = +M_A = 70 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Поставлен знак плюс потому, что реактивный момент  $M_A$  изгибает видимую часть балки выпуклостью вниз.

*Сечение 2.* Теперь в отличие от первого сечения у силы  $R_A$  появилось плечо  $a_1 = 1\text{ м}$ . Поэтому

$$Q_{y2} = -R_A = -40 \text{ кН}; M_{x2} = +M_A - R_A \cdot a_1 = 70 - 40 \cdot 1 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение 3

$$Q_{y3} = -R_A = -40 \text{ кН};$$

$$M_{x3} = +M_A - R_A \cdot a_1 + M = 70 - 40 \cdot 1 + 50 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение 4

$$Q_{y3} = -q \cdot a_2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН};$$

$$M_{x4} = +q \cdot a_2 (a_2/2) = 20 \cdot 2 (2/2) \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение 5

$$Q_{y5} = -q \cdot a_2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кН};$$

$$M_{x5} = +q \cdot a_2 (a_2/2) = 20 \cdot 2 (2/2) \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Сечение 6

$$Q_{y6} = M_{x6} = 0.$$

По найденным значениям строим эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  (рис. 19, б) и изгибающих моментов  $M_x$  (рис. 19, в).

Под незагруженными участками эпюра перерезывающих сил идет параллельно оси балки, а под распределенной нагрузкой  $q$  – по наклонной прямой вверх. Под опорной реакцией  $R_A$  на эпюре  $Q_y$  имеется скачок вниз на величину этой реакции, т. е. на 40 кН.

На эпюре изгибающих моментов очевиден излом под опорной реакцией  $R_A$ . Угол излома направлен навстречу реакции опоры. Под распределенной нагрузкой  $q$  эпюра изменяется по квадратичной параболе, выпуклость которой направлена навстречу нагрузке. В сечении 6 на эпюре  $M_x$  – экстремум, поскольку эпюра перерезывающей силы в этом месте проходит через нулевое значение.

3. Определяем диаметр поперечного сечения балки.

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{\max} = M_{x\max}/W_x \leq [\sigma],$$

где  $W_x = \pi \cdot d^3/32 \approx 0,1d^3$  – момент сопротивления балки при изгибе для круглого поперечного сечения.

Наибольший по абсолютному значению изгибающий момент возникает в третьем сечении балки

$$M_{x\max} = |M_{x3}| = 8000 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

Тогда требуемый диаметр балки определяется по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{|M_{x3}|/0,1[\sigma]} = \sqrt[3]{8000/0,1 \cdot 16} = 17,1 \text{ см} = 171 \text{ мм}.$$

Выбираем из стандартного ряда и принимаем  $d = 170 \text{ мм}$ .

Проверка:

$$\sigma_{\max} = M_{x\max}/W_x = 8000/(\pi \cdot 17^3/32) = 16,6 \text{ кН/см}^2 > [\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2.$$

Таким образом, «перенапряжение» балки составляет  $(16,6 - 16) / 16 \cdot 100 \% = 3,75 \% < 5 \%$ , что допускается.

4. Проверяем прочность балки по наибольшим касательным напряжениям.

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении балки круглого сечения, вычисляются по формуле

$$\tau_{\max} = 4Q_{y\max} / 3F,$$

где  $F = \pi \cdot d^2 / 4$  – площадь поперечного сечения балки.

Согласно эпюре  $Q_y$  наибольшее по алгебраической величине значение перерезывающей силы равно  $Q_{y\max} = 40$  кН.

Тогда

$\tau_{\max} = 4Q_{y\max} / 3F = 4 \cdot 40 / 3 (3,14 \cdot 17^2 / 4) = 0,235 \text{ кН/см}^2 < [\tau] = 8 \text{ кН/см}^2$ , т. е. условие прочности и по касательным напряжениям выполняется, причем с большим запасом.

**Пример.** Для шарнирно-опёртой балки, нагруженной распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 20$  кН/м, сосредоточенной силой  $P = 50$  кН и сосредоточенным моментом  $M = 60$  кН·м (рис. 20), требуется построить эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$  и подобрать балку двутаврового поперечного сечения при допуске нормального напряжения  $[\sigma] = 16$  кН/см<sup>2</sup> и допуске касательном напряжении  $[\tau] = 8$  кН/см<sup>2</sup>. Пролет балки  $l = 6$  м.

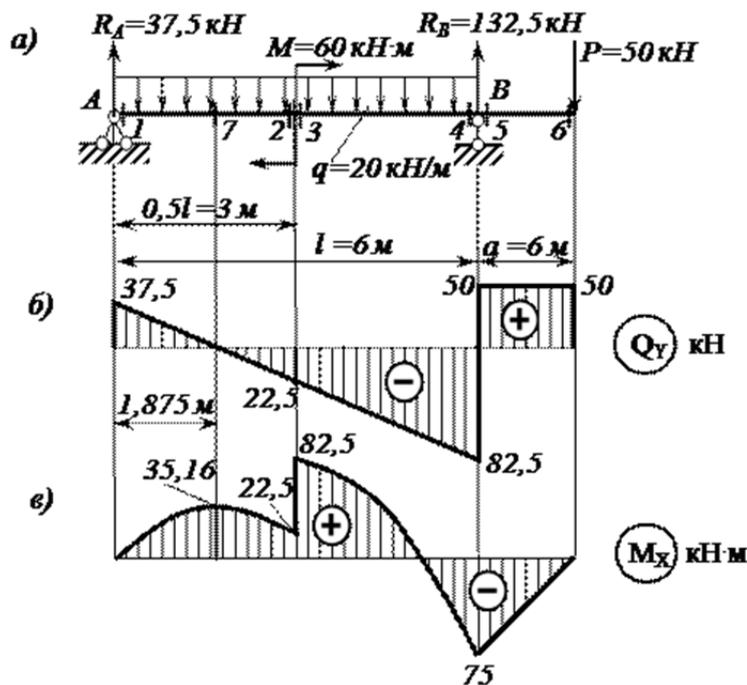


Рис. 20. Расчётная схема балки

## Решение

1. Определяем опорные реакции.

Для заданной двухопорной балки необходимо найти три опорные реакции  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $R_B$ . Поскольку на балку действуют только вертикальные нагрузки, перпендикулярные к ее оси, горизонтальная реакция неподвижной шарнирной опоры  $A$  равна нулю  $H_A = 0$ .

Направления вертикальных реакций  $R_A$  и  $R_B$  выбираем произвольно. Направим, например, обе вертикальные реакции вверх. Для вычисления их значений составим два уравнения статики

$$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0.$$

Равнодействующая погонной нагрузки  $q$ , равномерно распределенной на участке длиной  $l$ , равна  $ql$ , т. е. равна площади эпюры этой нагрузки и приложена в центре тяжести этой эпюры – посередине длины.

Тогда

$$\Sigma M_A = + R_B \cdot l - q \cdot l (l/2) - P (l + l/4) - M = 0;$$

$$R_B = [q \cdot l (l/2) + P (l + l/4) + M] / l = [20 \cdot 6 (6/2) + 50 (6 + 6/4) + 60] / 6 = 132,5 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = -R_A \cdot l - M - P \cdot l/4 + q \cdot l (l/2) = 0;$$

$$R_A = [-M - P \cdot l/4 + q \cdot l (l/2)] / l = [-60 - 50 \cdot 6/4 + 20 \cdot 6 (6/2)] / 6 = 37,5 \text{ кН.}$$

$$\text{Проверка: } \Sigma Y = R_A - P + R_B - q \cdot l = 0.$$

Силы, направление которых совпадает с положительным направлением оси  $y$ , проецируются на эту ось со знаком плюс

$$37,5 - 50 + 132,5 - 2 \cdot 60 = 0; 0 = 0, \text{ т. е. верно.}$$

2. Строим эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ .

Разбиваем длину балки на отдельные участки. Границами этих участков будут точки приложения сосредоточенных усилий (активных и/или реактивных), а также точки, соответствующие началу и окончанию действия распределенной нагрузки. Таких участков получается три. По их границам наметим шесть поперечных сечений, в которых определяются перерезывающие силы и изгибающие моменты (рис. 20, а).

*Сечение 1.* Отбросим мысленно правую часть балки.

Перерезывающая сила  $Q_{y1}$  в сечении балки равна алгебраической сумме всех внешних сил (активных и реактивных). Равнодействующая погонной нагрузки  $q$  равна нулю, поэтому

$$Q_{y1} = +R_A = 37,5 \text{ кН.}$$

Стоит знак плюс потому, что сила  $R_A$  вращает часть балки относительно первого сечения по ходу часовой стрелки.

Изгибающий момент в сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех усилий относительно первого сечения. Мы видим, что реакция опоры  $R_A$  и погонная нагрузка  $q$  распределены на бесконечно малой длине.

Однако у силы  $R_A$  плечо равно нулю, равнодействующая погонной нагрузки  $q$  также равна нулю, поэтому  $M_{x1} = 0$ .

*Сечение 2.* Реакция  $R_A$  и нагрузка  $q$ , действующая на участке длиной  $l/2$ . Равнодействующая погонной нагрузки равна  $q \cdot l/2$ . Она приложена посередине участка длиной  $l/2$ . Поэтому

$$Q_{y2} = +R_A - q \cdot l/2 = 37,5 - 20 \cdot 6/2 = -22,5 \text{ кН;}$$

$$M_{x2} = +R_A \cdot l/2 - q \cdot l/2 \cdot l/4 = 37,5 \cdot 6/2 - 20 \cdot 6/2 \cdot 6/4 = 22,5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

*Сечение 3*

$$Q_{y3} = +R_A - q \cdot l/2 = 37,5 - 20 \cdot 6/2 = -22,5 \text{ кН;}$$

$$M_{x3} = R_A (l/2) - q (l/2) (l/4) + M = 37,5 (6/2) - 20 (6/2) (6/4) + 60 = 82,5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

*Сечение 4*

$$Q_{y4} = +R_A - q \cdot l = 37,5 - 2 \cdot 60 = -82,5 \text{ кН;}$$

$$M_{x4} = R_A \cdot l - q \cdot l (l/2) + M = 37,5 \cdot 6 - 20 \cdot 6 (6/2) + 60 = -75 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

*Сечение 5*

$$Q_{y5} = +P = 50 \text{ кН;}$$

$$M_{x5} = -P(l/4) = -50(6/4) = -75 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

*Сечение 6*

$$Q_{y6} = +P = 50 \text{ кН;}$$

$$M_{x6} = 0.$$

По найденным значениям строим эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  (рис. 20, б) и изгибающих моментов  $M_x$  (рис. 20, в).

На эпюре изгибающих моментов очевидны изломы под сосредоточенной силой  $P$  и под опорными реакциями. Углы изломов направлены навстречу этим силам. Под распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  эпюра изменяется по квадратичной параболе, выпуклость которой направлена навстречу нагрузке. Под сосредоточенным моментом – скачок на 60 кН·м, т. е. на величину самого момента. В

сечении 7 на эпюре  $M_x$  – экстремум, поскольку эпюра перерезывающей силы для этого сечения проходит через нулевое значение ( $Q_y = 0$ ). Определим расстояние  $x^*$  от сечения 7 до левой опоры  $A$ .

Перерезывающая сила

$$Q_y = R_A - q \cdot x^* = 37,5 - 20 x^* = 0.$$

Отсюда

$$x^* = R_A / q = 37,5 / 20 = 1,875 \text{ м.}$$

Тогда экстремальное значение изгибающего момента в сечении 7 равно

$$M_x = R_A \cdot x^* - q \cdot x^* (x^*/2) = 37,5 \cdot 1,875 - 20 \cdot 1,875 (1,875/2) = 35,16 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

3. Определяем требуемый момент сопротивления балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

Согласно эпюре  $M_x$  максимальный по алгебраической величине изгибающий момент возникает в третьем поперечном сечении балки  $M_{x\max} = |M_{x3}| = 82 \text{ кН} \cdot \text{см}$ .

$$\text{Тогда } W_x \geq M_{x\max} / [\sigma] = 8250 / 16 = 516 \text{ см}^3.$$

По сортаменту подбираем двутавр № 30а, имеющий  $W_x = 518 \text{ см}^3$ .

4. Проверяем прочность балки по наибольшим касательным напряжениям.

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении двутавровой балки, вычисляем по формуле

$$\tau_{\max} = Q_{y\max} \cdot S_x / I_x \cdot d.$$

По сортаменту для выбранного двутавра определяем, что статический момент половины сечения относительно нейтральной оси  $S_x = 292 \text{ см}^3$ , момент инерции относительно нейтральной оси  $I_x = 7780 \text{ см}^4$ , а толщина стенки  $d = 0,65 \text{ см}$ .

Согласно эпюре  $Q_y$  наибольшее по алгебраической величине значение перерезывающей силы  $Q_{y\max} = |Q_{y4}| = 82,5 \text{ кН}$ . Тогда  $\tau_{\max} = |Q_y|_{\max} S_x / I_x d = 82,5 (292 / 7780) 0,65 = 4,76 \text{ кН/см}^2 < |\tau| = 8 \text{ кН/см}^2$ , т. е. условие прочности заданной балки по касательным напряжениям выполняется.

### Практическое задание

**Задача.** Для двух заданных схем балок (рис. 21) требуется:

1. Построить эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ .

2. Подобрать из условия прочности по нормальным напряжениям  $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$  балку круглого поперечного сечения для схемы *a* и балку двутаврового поперечного сечения для схемы *б* (см. рис. 21).

3. Проверить прочность подобранных балок по касательным напряжениям  $[\tau] = 8 \text{ кН/см}^2$ .

Варианты взять из табл. 4 и рис. 21.

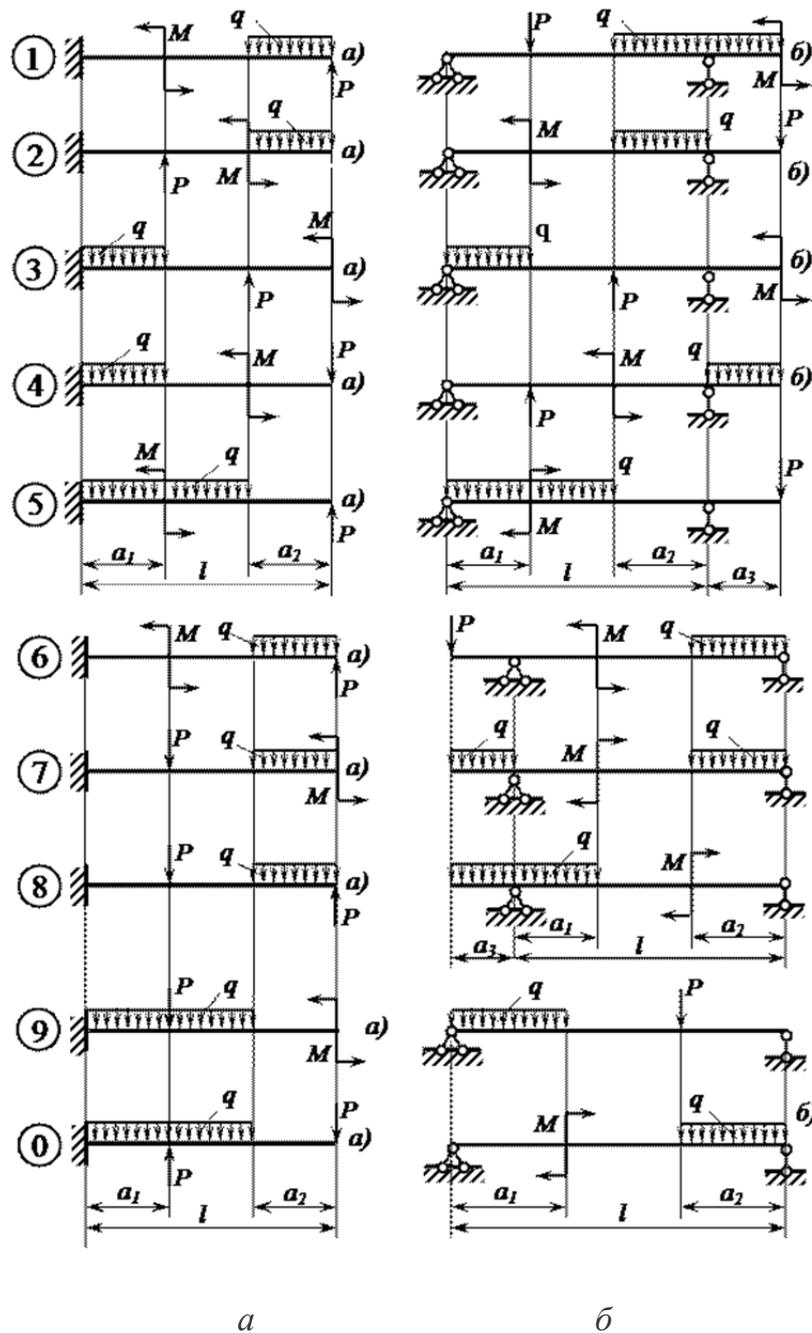


Рис. 21. Расчётные схемы балок: *a* – консольная балка; *б* – шарнирно-опёртая балка

Таблица 4

Номер варианта и схемы (см. рис. 21)	$l$ , м	$a_1/l$	$a_2/l$	$a_3/l$	$M$ , кН·м	$P$ , кН	$q$ , кН/м
1	3	0,2	0,6	0,2	8	5	10
2	4	0,3	0,5	0,3	7	6	11
3	5	0,4	0,4	0,3	6	7	12
4	6	0,5	0,3	0,2	5	8	13
5	3	0,6	0,7	0,2	4	9	14
6	4	0,7	0,5	0,3	8	10	9
7	5	0,8	0,4	0,6	7	5	10
8	6	0,2	0,6	0,3	6	6	11
9	3	0,3	0,5	0,4	5	7	12
0	4	0,4	0,4	0,2	4	8	8

### 3. КРУЧЕНИЕ

Деформация кручения имеет место при действии на вал уравновешенной системы пар сил, расположенных в плоскостях, перпендикулярных продольной оси вала (рис. 22, а).

В поперечных сечениях вала действует только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_z$  (рис. 22, б).

Рассмотрим порядок определения величины крутящего момента:

1. Вал разбивают на участки, границами которых являются сечения, где приложены крутящие моменты и сечения, где изменяется диаметр.

2. В пределах каждого участка используют метод сечений: разрезают вал поперечным сечением; отбрасывают одну из частей вала (желательно ту, к которой приложено больше крутящих моментов или моменты, величина которых неизвестна).

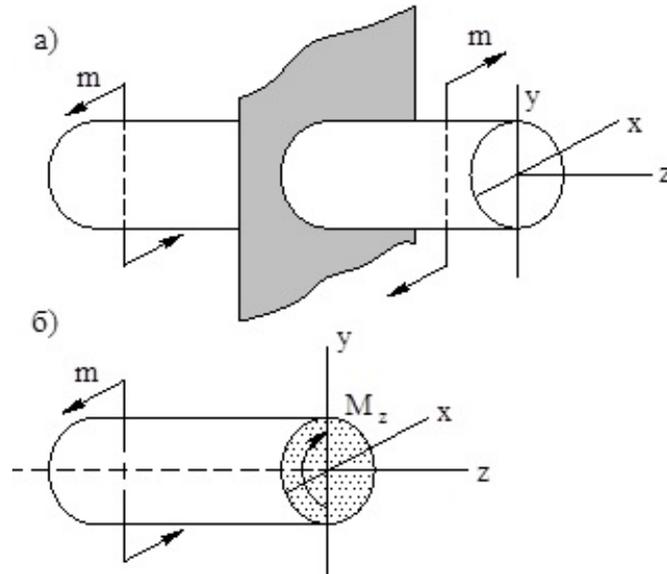


Рис. 22. Вал, работающий на кручение

3. Определяют величину крутящего момента: величина крутящего момента  $M_z$  в произвольном сечении вала численно равна алгебраической сумме внешних крутящих моментов, приложенных к оставшейся части вала  $M_z = \sum m_z^{\text{ост}}$ .

4. Определяют знак внешнего крутящего момента: если он направлен по часовой стрелке при взгляде на поперечное сечение со стороны оставшейся части, то его следует взять со знаком плюс, а если против часовой стрелки, – то со знаком минус (рис. 23).

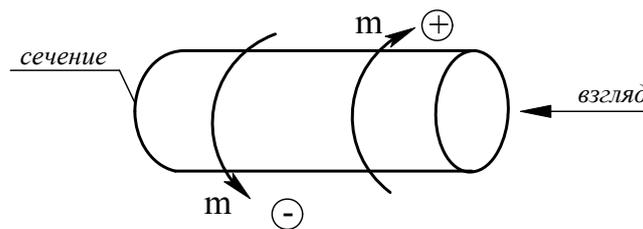


Рис. 23. Определение знака внешнего крутящего момента

Крутящему моменту соответствуют касательные напряжения  $\tau$ , которые распределяются по линейному закону вдоль диаметра вала рис. 24.

Величина касательных напряжений в любой точке поперечного сечения вала может быть определена по формуле  $\tau = M_z / J_p \cdot \rho$ ,

где  $M_z$  – крутящий момент;  $J_p = \pi \cdot d^4/32 \approx 0,1d^4$  – полярный момент инерции для круглого сечения вала, где  $d$  – диаметр вала;  $\rho$  – расстояние от центра круга (полюса) до точки, в которой определяется напряжение.

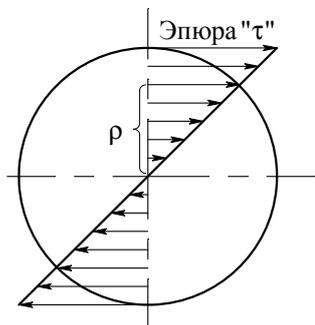


Рис. 24. Распределение касательных напряжений

Отсюда следует, что касательное напряжение в центре сечения равно нулю, а максимальные по величине напряжения действуют в точках контура сечения (так называемые «опасные точки»), т. е. при  $\rho = d/2$ .

Физический смысл крутящего момента  $M_z$  – это момент результирующей пары внутренних касательных сил упругости, действующих в поперечном сечении вала.

Прочность вала, работающего на кручение, считается обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его опасном сечении, не превышают величины допускаемого напряжения (допускается перенапряжение в пределах 5 %).

Для вала постоянного диаметра опасным считается участок, в котором действует наибольший крутящий момент.

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = M_z / W_p \leq [\tau],$$

где  $\tau_{\max}$  – максимальное касательное напряжение в опасном сечении вала;  $M_z$  – крутящий момент;  $W_p = \pi \cdot d^3/32 \approx 0,2d^3$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала;  $[\tau] \approx (0,55 \dots 0,60) [\sigma]$  – допускаемое касательное напряжение для пластичных материалов.

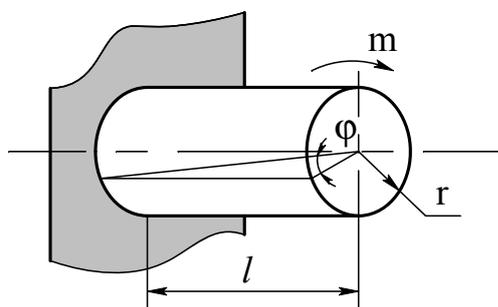


Рис. 25. Определение угла закручивания

При кручении вала возникают деформации, характеристикой которых является угол закручивания  $\varphi$ , т. е. угол, на который поперечное сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению (рис. 25).

В пределах упругих деформаций угол закручивания связан с крутящим моментом линейной зависимостью

$$\varphi = M_z \cdot l / J_p \cdot G,$$

где  $l$  – длина участка вала (расстояние между сечениями, относительный (взаимный) угол поворота которых определяется;  $G$  – модуль сдвига.

Мерой жесткости при кручении вала будет относительный угол закручивания  $\theta$  (угол закручивания на единицу длины вала).

В отличие от допускаемого напряжения, зависящего в первую очередь от материала вала, допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала. Значения допускаемых углов закручивания, встречающихся в различных отраслях машиностроения, весьма разнообразны; наиболее распространены значения  $[\theta_0] = 0,25 \dots 1,0$  град/м.

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta = M_z / G \cdot J_p \leq [\theta_0].$$

При расчете вала отсюда определяют требуемое значение  $J_p$ , а затем вычисляют диаметр вала. Из двух значений диаметров вала, определенных из расчетов на прочность и жесткость, в качестве окончательного (исполнительного размера) должен быть принят больший.

**Пример.** Для заданной расчетной схемы вала (рис. 26) требуется построить эпюру крутящих моментов, определить поперечные размеры вала; проверить жесткость вала.  $m_1 = 1$  кН·м,  $m_2 = 0,4$  кН·м,  $m_3 = 0,5$  кН·м,  $[\tau] = 60$  МПа, модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

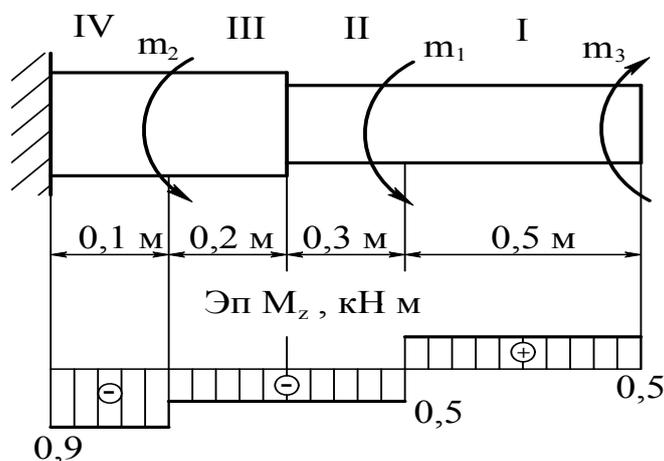


Рис. 26. Расчётная схема вала

### Решение

1. Разбиваем вал на четыре участка. Границами участков будут сечения, в которых действуют внешние моменты, и сечения, где изменяется диаметр вала.

2. Определяем крутящие моменты в поперечных сечениях каждого участка вала и строим их эпюру:

$$Mz_1 = m_3 = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Mz_2 = m_3 - m_1 = 0,5 - 1 = -0,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Mz_3 = m_3 - m_1 = 0,5 - 1 = -0,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Mz_4 = m_3 - m_1 - m_2 = 0,5 - 1 - 0,4 = -0,9 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Опасными участками вала являются I и IV.

3. Находим требуемые полярные моменты сопротивления обеих ступеней вала:

$$W_p = M_{z\max}/[\tau];$$

$$W_{p1-2} = 0,5 \cdot 10^6/60 = 8,33 \cdot 10^3 \text{ мм}^3;$$

$$W_{p3-4} = 0,9 \cdot 10^6/60 = 15 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

4. Определяем требуемые поперечные размеры вала:

$$d = \sqrt[3]{W_p/0,2};$$

$$d_{1-2} = \sqrt[3]{8,33 \cdot 10^3/0,2} = 34,6 \text{ мм} \approx 35 \text{ мм};$$

$$d_{3-4} = \sqrt[3]{15 \cdot 10^3/0,2} = 42 \text{ мм}.$$

5. Вычисляем полярные моменты инерции поперечных сечений вала:

$$J_p = \pi \cdot d^4/32 \approx 0,1d^4;$$

$$J_{p1-2} = 0,1 \cdot 35^4 = 150 \cdot 10^3 \text{ мм}^4;$$

$$J_{p3-4} = 0,1 \cdot 42^4 = 311 \cdot 10^3 \text{ мм}^4.$$

6. Проверяем жесткость вала:

а) определяем наибольший относительный угол закручивания:

$$\theta = |M_z|/G \cdot J_p;$$

$$\theta_1 = (0,5 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 180^\circ)/(8 \cdot 10^4 \cdot 150 \cdot 10^3 \cdot 3,14) = 5 \cdot 180^\circ/8 \times \\ \times 150 \cdot 3,14 = 2,4^\circ;$$

$$\theta_2 = (0,9 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 180^\circ)/(8 \cdot 10^4 \cdot 311 \cdot 10^3 \cdot 3,14) = 90 \cdot 180^\circ/8 \times \\ \times 311 \cdot 3,14 = 2,1^\circ;$$

б) делаем вывод о жесткости вала

$$\theta_{\max} = \theta_1 = 2,4^\circ > 1,5^\circ.$$

Жесткость вала недостаточна.

## Практическое задание

**Задача.** Для заданной расчетной схемы вала требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить поперечные размеры вала.

3. Проверить жесткость вала.  
 Варианты взять из табл. 5 и рис. 27.

Таблица 5

Вариант	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$a$	$b$	$c$	$[\tau]$
	кН · м			м			МПа
1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,3	0,4	35
2	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,3	40
3	0,3	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	50
4	0,4	0,3	0,1	0,2	0,3	0,3	50
5	0,2	0,4	0,2	0,2	0,3	0,2	60
6	0,3	0,2	0,6	0,3	0,4	0,3	80
7	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,4	70
8	0,3	0,1	0,5	0,3	0,4	0,3	60
9	0,1	0,5	0,3	0,2	0,1	0,3	40
10	0,2	0,8	0,4	0,3	0,2	0,3	50

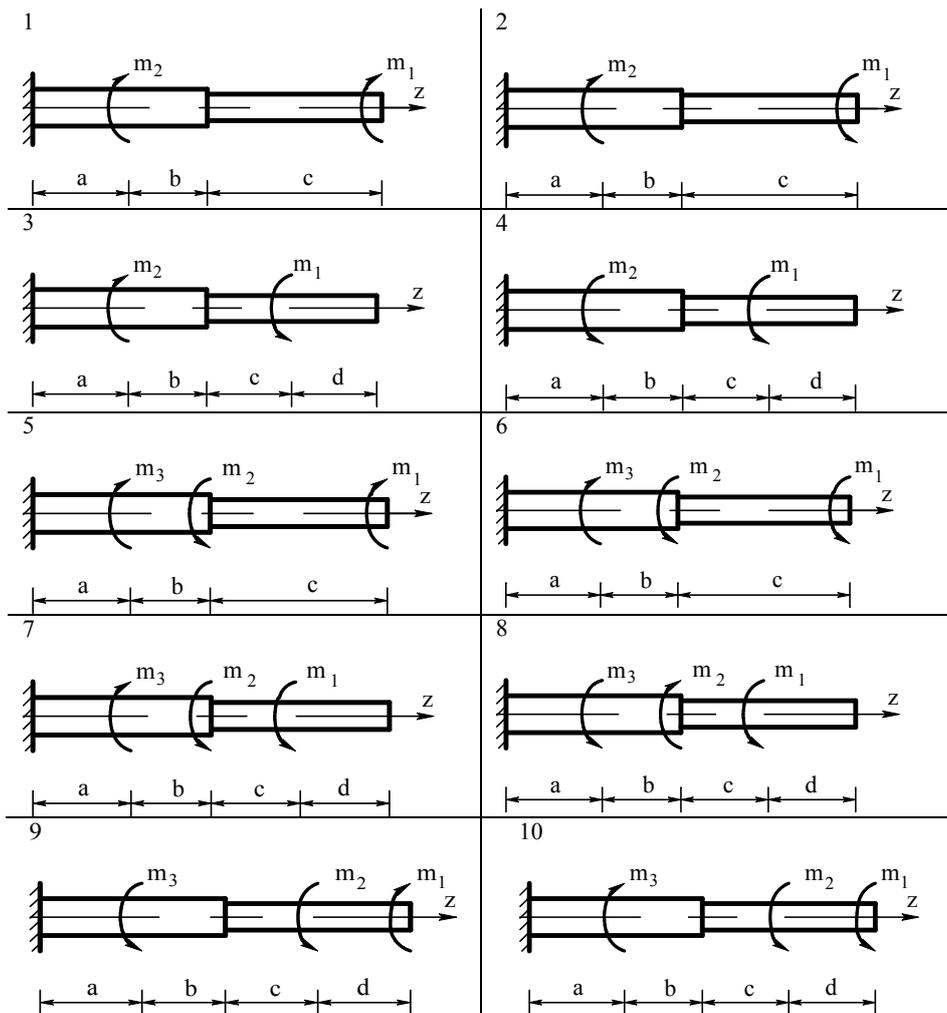


Рис. 27. Варианты расчётных схем

## Вопросы для самоконтроля

1. В каких случаях имеет место деформация кручения бруса?
2. Какой внутренний силовой фактор действует в поперечных сечениях вала?
3. Сформулируйте правило для определения величины крутящих моментов и правило знаков.
4. Зависит ли величина крутящих моментов от размеров вала и формы его поперечного сечения?
5. Зависит ли величина касательного напряжения от длины вала в случае нагружения его сосредоточенными моментами? От формы сечения? От размеров сечения?
6. Какие напряжения действуют в поперечных сечениях вала?
7. В каких точках поперечного сечения напряжения при кручении равны нулю? В каких точках они максимальны?
8. Какое направление имеют касательные напряжения в точках поперечного сечения при кручении?
9. Условие прочности при кручении.
10. В каких случаях прочность вала считается достаточной?
11. Что является характеристикой деформации при кручении? От чего зависит её величина?
12. При каких деформациях зависимость между крутящим моментом и углом закручивания линейная?
13. Что является мерой деформации при кручении?
14. Как определить угол поворота заданного сечения вала?
15. Как определяется величина относительного угла закручивания?
16. Условие жесткости при кручении.

*Раздел 3*  
**ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

---

## 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА

*Кинематический анализ механизма* – исследование его основных параметров без учёта действующих на него сил с целью изучения законов изменения и на основе этого выбор из ряда известных наилучшего механизма.

Для анализа применяют наиболее простой графоаналитический метод, который основан на непосредственном геометрическом построении планов положений механизма. Он позволяет наглядно представить движение его звеньев. При этом на чертеже отображаются действительная форма этих траекторий, действительные значения углов, составляемых звеньями, а следовательно, и действительная конфигурация механизма в соответствующие мгновения времени.

Недостаток метода – невысокая точность, которая зависит от точности графических построений.

**Пример.** Провести кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма (рис. 28), для которого задано:

$$\varphi_1 = 60^\circ; l_{AB} = 0,15 \text{ м}; l_{BC} = 0,45 \text{ м}; l_{BD} = 0,5l_{BC}; l_{EH} = 0,5l_{AB}; l_{BS2} = l_{AB}; \\ a = 0,22 \text{ м}; \omega_1 = 30 \text{ с}^{-1}; \varepsilon_1 = 100 \text{ с}^{-2}; m_1 = 13 \text{ кг}; m_2 = 26 \text{ кг}; m_5 = 30 \text{ кг}; \\ J_{1S} = 3,6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; J_{2S} = 1,2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; J_{5S} = 0,6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; F_3 = 4000 \text{ Н}.$$

Движение механизма происходит под действием движущего момента, приложенного к главному валу – кривошипу. При движении ползуна вдоль горизонтальной оси вправо на него действует сила полезного сопротивления  $F_3$  – это рабочий ход. При движении ползуна влево сила  $F_3$  отсутствует – это обратный, или холостой ход. Величины силы  $F_3$  и движущего момента  $M_1$  считаем постоянными. Кроме этого на звенья механизма действуют силы тяжести и инерции, при этом силами трения в кинематических парах условно пренебрегаем.

### **Решение**

Предварительно строим кинематическую схему механизма. Для этого определим масштаб линейных размеров звеньев механизма.

Принимаем длину кривошипа (выбирается произвольно)  $AB = 50$  мм.

Тогда масштаб линейных размеров звеньев механизма  $\mu_l = l_{AB}/AB = 0,15/50 = 0,003$  м/мм.

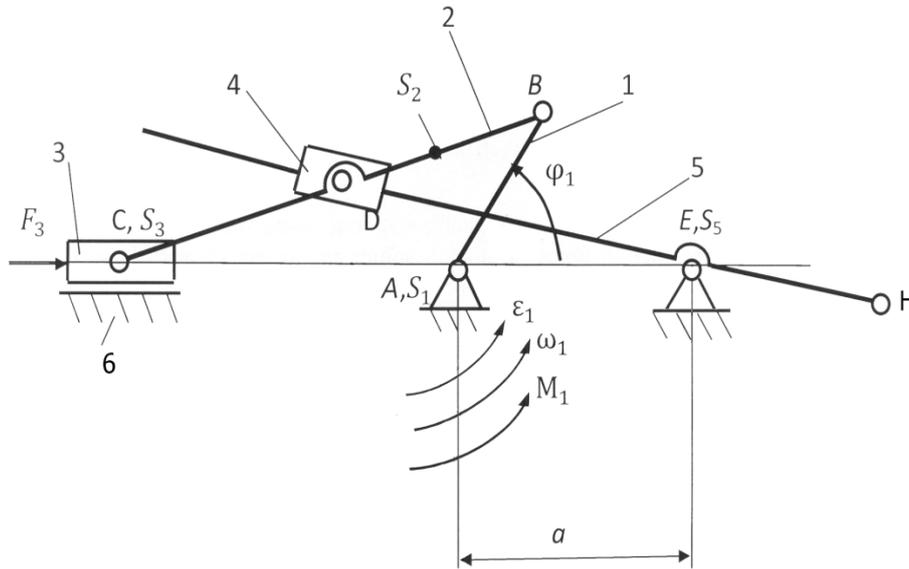


Рис. 28. Кинематическая схема кривошипно-ползунного механизма: 1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – ползун; 4 – кулисный камень; 5 – кулиса; 6 – направляющая

Определяем линейные размеры остальных звеньев механизма:

$$BC = l_{BC}/\mu_l = 0,45/0,003 = 150 \text{ мм};$$

$$BD = 0,5BC = 0,5 \cdot 150 = 75 \text{ мм};$$

$$BS_2 = AB = 50 \text{ мм};$$

$$EH = 1,5AB = 1,5 \cdot 50 = 75 \text{ мм};$$

$$a = 0,22/\mu_l = 0,22/0,003 = 73 \text{ мм}.$$

Зная длины звеньев, вычерчиваем кинематическую схему механизма при  $\varphi_1 = 60^\circ$  (см. рис. 28). Поскольку механизм имеет простые структурные группы, для исследования кинематики достаточно рассмотреть начальное (заданное) положение.

Как видно из рис. 28, при работе механизма т. В вращается по окружности, т. С (ползун) совершает возвратно-поступательное движение.

После построения кинематической схемы механизма строим план скоростей для заданного положения.

*Свойства плана скоростей:*

1. Отрезки плана скоростей, проходящие через полюс, изображают абсолютные скорости. Направление абсолютных скоростей всегда получается от полюса. В конце векторов абсолютных скоростей принято ставить строчную букву той буквы, которой обозначается соответствующая точка на плане механизма.

2. Отрезки плана скоростей, не проходящие через полюс, обозначают относительные скорости.

3. Концы векторов абсолютных скоростей точек механизма, жестко связанных между собой, на плане скоростей образуют фигуры, подобные, сходственно расположенные и повернутые на  $90^\circ$  относительно фигур, образуемых этими точками на плане механизма.

4. Неподвижные точки механизма имеют соответствующие им точки на плане скоростей, расположенные в полюсе.

5. План скоростей дает возможность находить нормали и касательные к траектории точки без построения самих траекторий.

Вектор скорости т.  $B$  направлен перпендикулярно кривошипу  $AB$  в сторону его вращения  $\omega_1$

$$V_B = \omega_1 l_{AB} = 30 \cdot 0,15 = 4,5 \text{ м/с.}$$

Определим масштаб плана скоростей

$$\mu_V = V_B / pb = 4,5 / 45 = 0,1 \text{ (м/с)/мм.}$$

Из т.  $p$ , принятой за полюс плана скоростей, откладываем в направлении вращения  $\omega_1$  вектор скорости т.  $B$   $pb = 45$  мм перпендикулярно  $AB$  (рис. 29). Отрезок  $pb$  выбирается произвольно.

Из т.  $b$  проводим линию, перпендикулярную шатуну  $BC$ , а из полюса  $p$  – линию, параллельную оси движения ползуна. Точка пересечения этих двух линий и даст на плане скоростей вектор скорости  $V_C$  ползуна.

Из построения получаем:

$$pc = 32 \text{ мм; } V_C = \mu_V (pc) = 0,1 \cdot 32 = 3,2 \text{ м/с;}$$

$$bc = 24 \text{ мм; } V_{BC} = \mu_V (bc) = 0,1 \cdot 24 = 2,4 \text{ м/с.}$$

Скорость т.  $S_2$  определяем по правилу подобия

$$bc / bs_2 = BC / BS_2 = > bs_2 = bc \cdot BS_2 / BC = 24 \cdot 50 / 150 = 8 \text{ мм.}$$

Так как т.  $S_2$  принадлежит шатуну  $BC$ , то значения  $bs_2$  откладываем на отрезке  $bc$  от т.  $b$  к т.  $c$ , отмеченную т.  $S_2$  соединяем с полюсом  $p$  и получаем вектор скорости т.  $S_2$  на плане скоростей (см. рис. 29). Из построения получаем действительную скорость т.  $S_2$

$$V_{S_2} = \mu_V (ps_2) = 0,1 \cdot 39 = 3,9 \text{ мм.}$$

Из рис. 28 очевидно, что т.  $D$  одновременно принадлежит шату-ну  $BC$  и кулисе  $ED$ . Поэтому т.  $D$  разложим на две совмещенные точки – т.  $D_2$  и т.  $D_5$ .

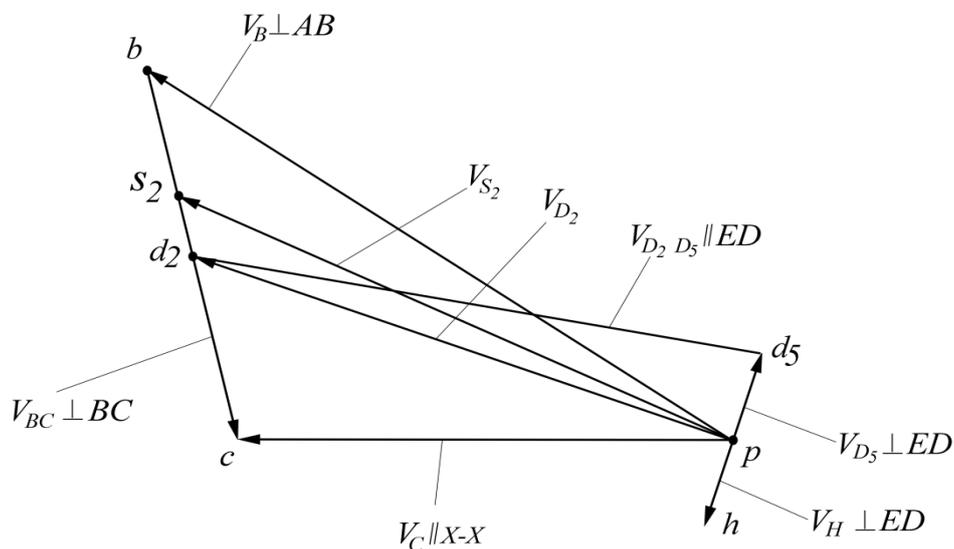


Рис. 29. План скоростей для заданного положения механизма

Скорость совмещённой т.  $D_2$  (если принадлежит только  $BC$ ) определим по правилу подобия

$$bc/bd_2 = BC/BD_2 \Rightarrow bd_2 = bc \cdot BD_2/BC = 24 \cdot 0,5 = 12 \text{ мм.}$$

Так как т.  $D_2$  принадлежит шатуну  $BC$ , то значения  $bd_2$  откладываем на отрезке  $bc$  от т.  $b$  к т.  $c$ , отмеченную т.  $d_2$  соединяем с полюсом  $p$  и получаем вектор скорости т.  $D_2$  на плане скоростей (см. рис. 29). Из построения получаем действительную скорость совмещённой т.  $D_2$   $V_{D_2} = \mu_V (pd_2) = 0,1 \cdot 37 = 3,7 \text{ м/с.}$

Скорость совмещённой т.  $D_5$  (если принадлежит только  $ED$ ) можно описать векторным уравнением

$$V_{D_2} = V_{D_5} + V_{D_2 D_5}.$$

Уравнение имеет два неизвестных, поэтому решаем его графически. Из полюса  $p$  задаём направление вектора  $pd_5$  перпендикулярно  $ED$ , а из т.  $d_2$  задаём направление вектора  $d_2 d_5$  параллельно  $ED$ , пересечение двух векторов определит положение т.  $d_5$  на плане скоростей (см. рис. 29).

Из построения получим скорости

$$V_{D_5} = \mu_V (pd_5) = 0,1 \cdot 5 = 0,5 \text{ м/с}; \quad V_{D_2 D_5} = \mu_V (d_2 d_5) = 0,1 \cdot 37 = 3,7 \text{ м/с.}$$

Теперь, когда известна скорость т.  $D_5$ , можно определить скорость т.  $H$  методом подобия

$$ph/pd_5 = EH/ED = \Rightarrow ph = pd_5 EH/ED = 5 \cdot 75/122 \approx 3 \text{ мм.}$$

Полученную величину откладываем от полюса  $p$  в противоположную сторону вектора  $pd_5$ . Из построения получим скорость т.  $H$

$$V_H = \mu_V(ph) = 0,1 \cdot 3 = 0,3 \text{ м/с.}$$

Определим угловые скорости шатуна  $BC$  (звено 2) и кулисы  $DE$  (звено 5):

$$\omega_2 = V_{BC}/l_{BC} = 2,4/0,45 \approx 5,3 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_5 = V_{D5}/l_{D5E} = 0,5/0,003 \cdot 122 = 1,3 \text{ с}^{-1}.$$

По приведённым выше формулам были определены линейные и угловые скорости точек и звеньев начального (заданного) положения механизма при  $\varphi_1 = 60^\circ$ .

После того как построили план скоростей, строим план ускорений для начального (заданного) положения механизма при  $\varphi_1 = 60^\circ$  (рис. 30).

*Свойства планов ускорений:*

1. Отрезки планов ускорений, проходящие через полюс, изображают абсолютные ускорения. Направление абсолютных ускорений всегда получается от полюса. В конце векторов абсолютных ускорений принято ставить строчную букву той буквы, которой обозначена соответствующая точка на плане механизма.

2. Отрезки плана ускорений, соединяющие концы векторов абсолютных ускорений, обозначают относительные ускорения.

3. Концы векторов абсолютных ускорений точек механизма, жестко связанных между собой, на плане ускорений образуют фигуры, подобные, сходственно расположенные и повернутые на угол  $180^\circ - \varphi$  относительно расположения их на плане механизма.

4. Постоянные неподвижные точки механизма имеют соответствующие им точки плана ускорений, расположенные в полюсе.

Кривошип  $AB$  вращается с угловой скоростью, поэтому ускорение т.  $B$  можно представить векторным уравнением

$$a_B = a_B^n + a_B^\tau,$$

где  $a_B^n = \omega_1^2 l_{AB} = 30^2 \cdot 0,15 = 135 \text{ м/с}^2$  – нормальное ускорение т.  $B$ , которое направлено по звену  $AB$  от т.  $B$  к т.  $A$ ;  $a_B^\tau = \varepsilon_1 l_{AB} = 100 \cdot 0,15 = 15 \text{ м/с}^2$  – касательное ускорение т.  $B$ , которое направлено перпендикулярно звену  $AB$  в сторону углового ускорения  $\varepsilon_1$ .

Для построения плана ускорений определим масштаб по формуле  $\mu_a = a_B^n / \pi b = \omega_1^2 l_{AB} / \pi b = 30^2 \cdot 0,15 / 135 = 135 / 135 = 1 \text{ (м/с}^2\text{) / мм}$ , где  $\pi b = 135 \text{ мм}$  – длина отрезка (принимается произвольно), изображающего на плане ускорений вектор нормального ускорения т.  $B$  кривошипа  $AB$ .

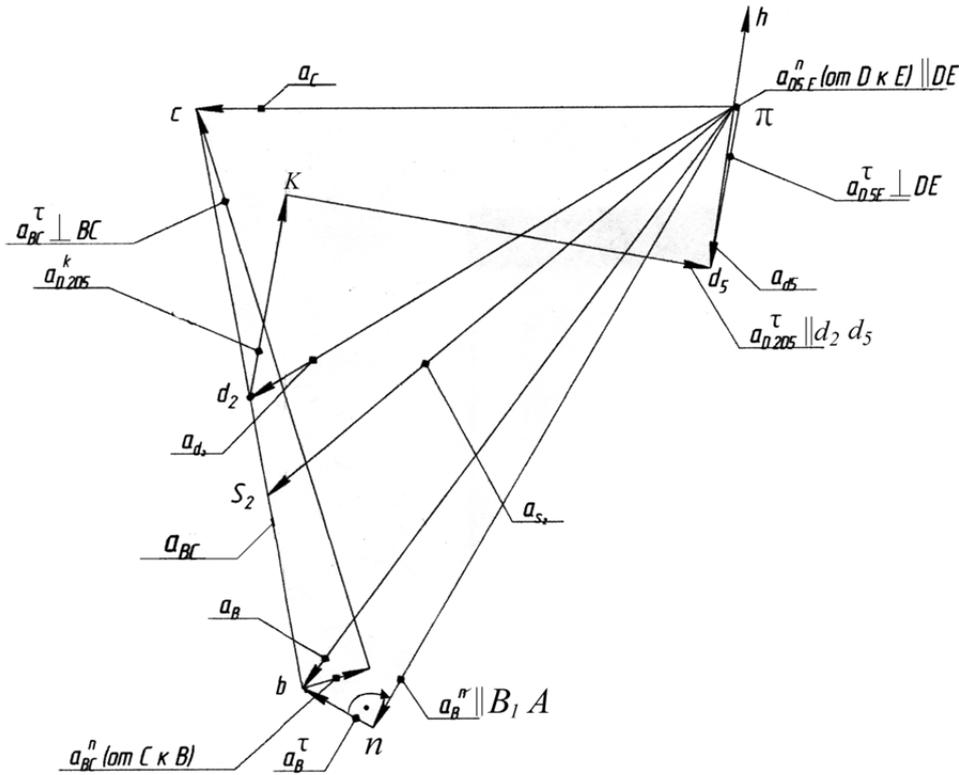


Рис. 30. План ускорений для заданного положения механизма

Из произвольной т.  $\pi$  – полюса плана ускорений – проводим вектор  $\pi b = 135 \text{ мм}$  параллельно звену  $AB$  в направлении от т.  $B$  к т.  $A$ , получаем т.  $n$ . Из т.  $n$  проведём отрезок  $nb = a_B^\tau / \mu_a = 15 / 1 = 15 \text{ мм}$ , который направлен перпендикулярно  $AB$ . Если графически сложить отрезки  $\pi n$  и  $nb$ , то получится отрезок  $\pi b$  – это и есть вектор ускорения т.  $B$ .

Ускорение т.  $C$  определяем по векторному уравнению

$$a_{BC} = a_B + a_{BC}^n + a_{BC}^\tau,$$

где  $a_{BC}^n = V_{BC}^2 / l_{BC} = 2,4^2 / 0,45 = 12,8 \text{ м/с}^2$  – нормальное ускорение шатуна  $BC$ , которое направлено параллельно  $BC$  от т.  $C$  к т.  $B$  (на плане ускорений изобразится отрезком  $12,8 \text{ мм}$ );  $a_{BC}^\tau$  – касательное ускорение т.  $C$ , направлено перпендикулярно  $BC$ . Если графически сложить два вектора  $a_{BC}^n$  и  $a_{BC}^\tau$ , то получится вектор ускорения шатуна  $BC$  (на плане отрезок  $bc$ ).

Для того чтобы найти графически вектор ускорения ползуна (т. С), необходимо сложить два вектора:  $\pi c$ , параллельный движению т. С, и вектор  $bc$ . Из построения получим ускорение ползуна

$$a_c = \pi c \mu_a = 100 \cdot 1 = 100 \text{ м/с}.$$

Ускорение т.  $S_2$  определим по правилу подобия

$$bc/bs_2 = BC/BS_2 = \Rightarrow bs_2 = bc BS_2/BC = 110 \cdot 50/150 \approx 37 \text{ мм}.$$

Отложим этот отрезок на  $bc$  от т.  $b$  к т.  $c$  и, соединив т.  $s_2$  с полюсом  $\pi$ , получим вектор ускорения т.  $S_2$ .

$$\text{Из построения получим } a_{s_2} = \pi s_2 \mu_a = 114 \cdot 1 = 114 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение совмещённой т.  $D_2$  определим по правилу подобия

$$bc/bd_2 = BC/BD_2 = \Rightarrow bd_2 = bc BD_2/BC = 110 \cdot 0,5 = 55 \text{ мм}.$$

Отложим этот отрезок на  $bc$  от т.  $b$  к т.  $c$  и, соединив т.  $d_2$  с полюсом  $\pi$ , получим вектор ускорения т.  $D_2$ .

$$\text{Из построения получим } a_{D_2} = \pi d_2 \mu_a = 105 \cdot 1 = 105 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение совмещённой т.  $D_5$  определим из двух векторных уравнений:

$$a_{D_5} = a_{D_2} + a_{D_2D_5}^k + a_{D_2D_5}^\tau;$$

$$a_{D_5} = a_E + a_{D_5E}^k + a_{D_5E}^\tau.$$

Величину ускорения Кориолиса найдем по формуле

$$a_{D_2D_5}^k = 2\omega_2 \cdot V_{D_2D_5} = 2 \cdot 5,3 \cdot 3,7 = 39,2 \text{ м/с}^2.$$

Для направления вектора ускорения надо пользоваться правилом Н. Е. Жуковского: через точку  $M$  (рис. 31) проводим плоскость  $\Pi$ , перпендикулярную вектору  $\omega_e$  (переносной угловой скорости тела  $\sigma$ ). На плоскость  $\Pi$  проецируем вектор относительной скорости  $V_r$  и в той же плоскости полученную проекцию скорости поворачиваем в сторону переносного вращения тела  $\sigma$  на угол  $90^\circ$ ; это и будет направление ускорения Кориолиса  $a_k$ .

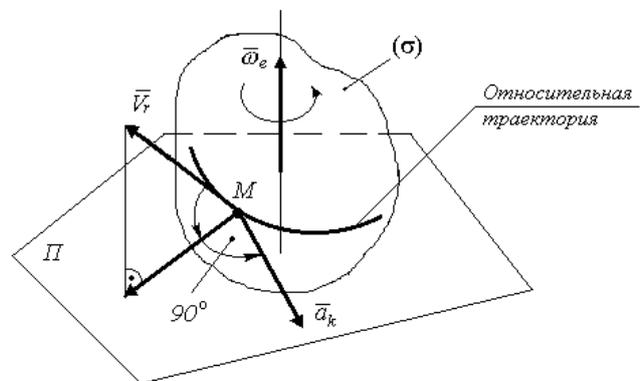


Рис. 31. Ускорение Кориолиса

В нашем примере направление ускорения Кориолиса  $a_{D_2D_5}^k$  найдём поворотом  $V_{D_2D_5}$  на  $90^\circ$  в направлении  $\omega_2$  (на рис. 30 отрезок  $d_2k = a_{D_2D_5}^k/\mu_a = 39/1 = 39$  мм). Вектор  $a_{D_2D_5}^\tau$  направлен параллельно  $DE$ , а вектор  $a_{D_5E}^\tau$  от т.  $D$  к т.  $E$ .

Из построения получим  $a_{D5E}^n = V_{D5}^2 / l_{D5E} = 0,5^2 / 122 \cdot 0,003 = 0,7 \text{ м/с}$ . На плане этот вектор изобразится отрезком 0,7 мм. Вектор  $a_{D5E}^\tau$  направлен перпендикулярно  $DE$ .

В приведённой выше системе двух уравнений четыре неизвестных, поэтому решаем её графически (см. рис. 30). Из построений получаем:

$$a_{D5} = \pi d_5 \mu_a = 31 \cdot 1 = 31 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{D5E}^\tau = d_5 e \mu_a = 31 \cdot 1 = 31 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение т.  $H$  определим из подобия

$$\pi h / \pi d_5 = HE / DE = > \pi h = \pi d_5 (HE / DE) = 31 (75 / 122) = 19 \text{ мм}.$$

Отложим этот отрезок от полюса  $\pi$  и из построения найдём величину ускорения  $a_H = \pi h \cdot \mu_a = 19 \cdot 1 = 19 \text{ м/с}^2$ .

Угловые ускорения шатуна  $BC$  (звено 2) и кулисы  $DE$  (звено 5) определим по формулам:

$$\varepsilon_2 = a_{BC}^\tau / l_{BC} = 110 / 0,45 = 244,4 \text{ с}^{-2}; \quad \varepsilon_5 = a_{DE}^\tau / l_{DE} = 31 / 0,366 \approx 84,7 \text{ с}^{-2}.$$

## Практическое задание

**Задача.** Выполнить кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма при  $\omega = \text{const}$ . Варианты взять из приложения.

## Вопросы для самоконтроля

1. Что называется звеном? Какое звено называется входным, выходным, ведомым?
2. Как называются звенья рычажных механизмов в зависимости от характера их движения относительно стойки или других звеньев?
3. Что называется кинематической парой, элементом кинематической пары?
4. По каким признакам классифицируются кинематические пары?
5. Какие кинематические пары называются низшими, а какие высшими?
6. Что называется кинематической цепью?
7. Что называется группой Ассура?
8. Что в ТММ называется масштабным коэффициентом (масштабом)?

9. Что такое план скоростей (ускорений) звена, механизма?
10. Когда применяется теорема о подобии и как она используется при определении скоростей и ускорений точек звена?
11. Как определяются величина и направление нормального и кориолисова ускорений?
12. Как определить действительные величины скорости и ускорения какой-либо точки звена механизма, пользуясь планами скоростей и ускорений?

## 2. СТРУКТУРНЫЙ И СИЛОВОЙ АНАЛИЗЫ МЕХАНИЗМА

В задачу силового анализа входит определение всех сил и моментов пар сил, которые приложены к каждому отдельному звену механизма. Эти силы и моменты необходимы, например, для расчёта на прочность отдельных звеньев механизма или его деталей.

Силы, действующие на звенья, условно делят на две группы: движущие и силы сопротивления. Кроме движущих и сил сопротивления в механизме действуют также силы тяжести и инерции звеньев, а также внутренние силы – силы давления (реакции) в кинематических парах.

Вектор силы инерции звена направлен в сторону, противоположную вектору ускорения центра тяжести звена. Момент сил инерции звена направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения звена.

**Силы реакций ( $R$ )** – это внутренние силы, действующие в кинематических парах механизма. В каждой кинематической паре механизма одновременно действуют две одинаковые по величине реакции, направленные противоположно, например  $R_{12} = -R_{21}$ . Реакции всегда направлены по нормали к соприкасающимся поверхностям звеньев в кинематической паре.

Силовой анализ проводится в следующей последовательности:

1. Определяются все внешние силы, приложенные к звеньям механизма, от действия которых требуется найти реакции в кинематических парах механизма.

2. Выбирается ведущее звено (в плоских рычажных механизмах это, как правило, кривошип), к которому должна быть приложена уравнивающая сила  $P_y$  или уравнивающий момент  $M_y$  для того, чтобы обеспечить заданный закон движения ведущего звена.

3. Осуществляется расчленение ведомой кинематической цепи механизма на группы Ассура.

4. Проводится силовой анализ каждой группы Ассура в отдельности, так как группа Ассура является *статически определимой* системой. При этом анализ начинают с группы Ассура, присоединённой к механизму при его образовании в последнюю очередь; затем переходят к следующей группе и так до тех пор, пока не будет выполнен силовой расчёт всех групп, образовавших ведомую часть механизма.

5. В последнюю очередь проводится силовой анализ первичного (начального) звена. В данном примере это кривошип  $AB$ .

В первую очередь находятся реакции во внешних кинематических парах группы, а затем во внутренних парах по условиям равновесия звеньев группы, взятых порознь.

Для реакций, возникающих между элементами кинематических пар, приняты следующие обозначения: реакция со стороны звена 1 на звено 2 обозначается  $R_{21}$ , реакция со стороны звена 2 на звено 1 соответственно  $R_{12}$ , причём  $R_{12} = -R_{21}$ .

Реакция характеризуется *величиной (модулем), направлением и точкой приложения*.

При силовом анализе используется принцип Даламбера: «Если к внешним силам, действующим на звенья механизма, добавить силы инерции, то данную систему сил можно рассматривать как находящуюся в равновесии».

**Пример.** Провести структурный и силовой анализы кривошипно-ползунного механизма с простыми кинематическими парами (см. рис. 28).

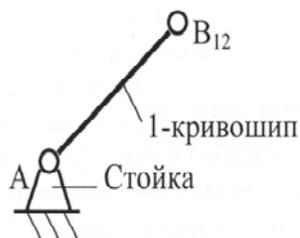
Определяем степень подвижности механизма с низшими кинематическими парами по формуле П. Л. Чебышева

$$W = 3n - 2p_n = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1,$$

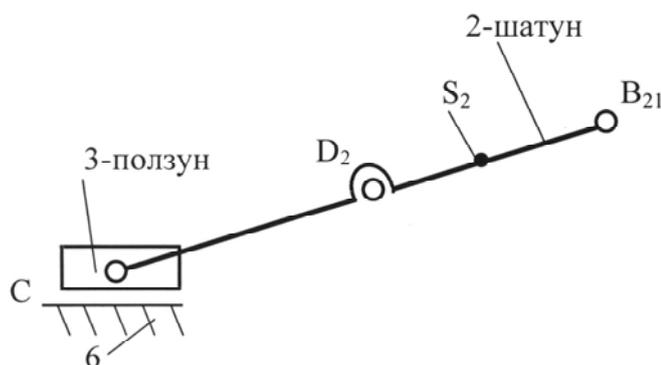
где  $n = 5$  – число подвижных звеньев (кривошип, шатун, ползун, кулисный камень, кулиса);  $p_n = 7$  – число низших кинематических пар [ $A$  (стойка – 1),  $B$  (1 – 2),  $D$  (2 – 4),  $D$  (4 – 5),  $C$  (2 – 3),  $C$  (3 – 6),  $E$  (5 – стойка)].

Определяем класс и порядок механизма:

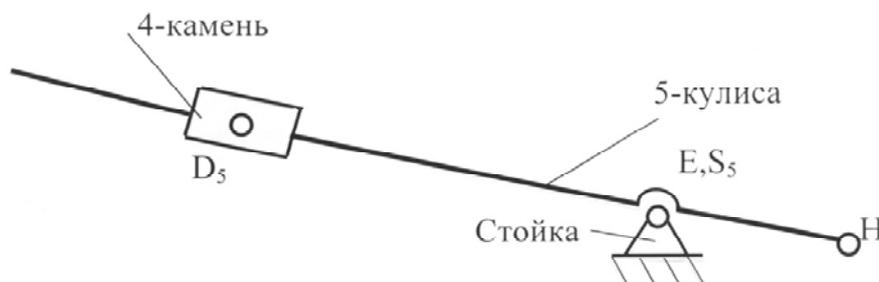
1. Входное звено – механизм 1-го класса



2. Структурная группа 2 – 3 – механизм 2-го класса 3-го порядка



3. Структурная группа 4 – 5 – механизм 2-го класса 2-го порядка



*Структурная группа из звеньев 4 – 5 (камень – кулиса)*

Под действием приложенных сил и сил реакций структурная группа находится в равновесии. По рисунку структурной группы определяем направления сил и момента, действующих на группу (рис. 32).

В т. E вес  $G_5$  по закону Ньютона направлен вертикально вниз, а реакция  $R_{56}$  во внутренней кинематической паре – вертикально вверх. Реакция  $R_{52}$  во внешней кинематической паре направлена

перпендикулярно звену 5 в т.  $D_5$ . Момент  $M_{ин5}$  направлен по часовой стрелке.

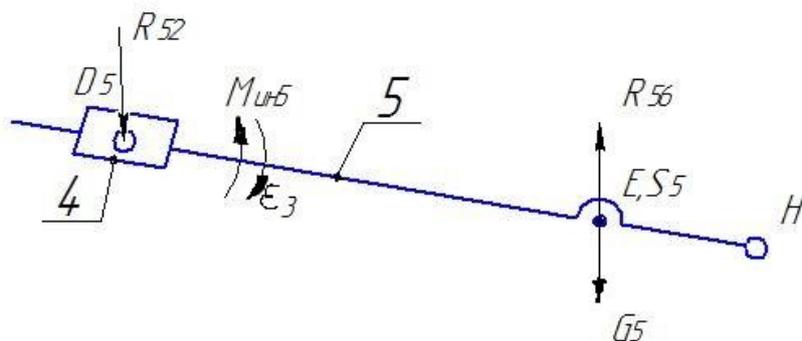


Рис. 32. Силовой анализ структурной группы 4 – 5

### Структурная группа из звеньев 2 – 3 (шатун – ползун)

Под действием приложенных сил и сил реакций структурная группа находится в равновесии. На рисунке структурной группы определяем направления сил и момента, действующих на группу (рис. 33).

В т.  $C$  вес  $G_3$  направлен вертикально вниз, а реакция  $R_{63}$  – вертикально вверх. Нормальная составляющая  $R_{21}^n$  в т.  $B_{21}$  направлена вдоль звена 2 от т.  $B_{21}$  к т.  $C$ . Тангенциальная составляющая реакции  $R_{21}^t$  в т.  $B_{21}$  направлена перпендикулярно звену 2, момент инерции  $M_{ин2}$  – против часовой стрелки, а сила инерции  $F_{ин3}$  – против направления ускорения ползуна 3 (см. рис. 30). Реакция  $R_{25}$  в т.  $D_2$  направлена параллельно реакции  $R_{52}$  (см. структурную группу 4 – 5), но в противоположную сторону. В т.  $S_2$  вес  $G_2$  направлен вертикально вниз, а сила инерции  $F_{ин2}$  – параллельно и противоположно вектору ускорения этой точки (см. рис. 30).

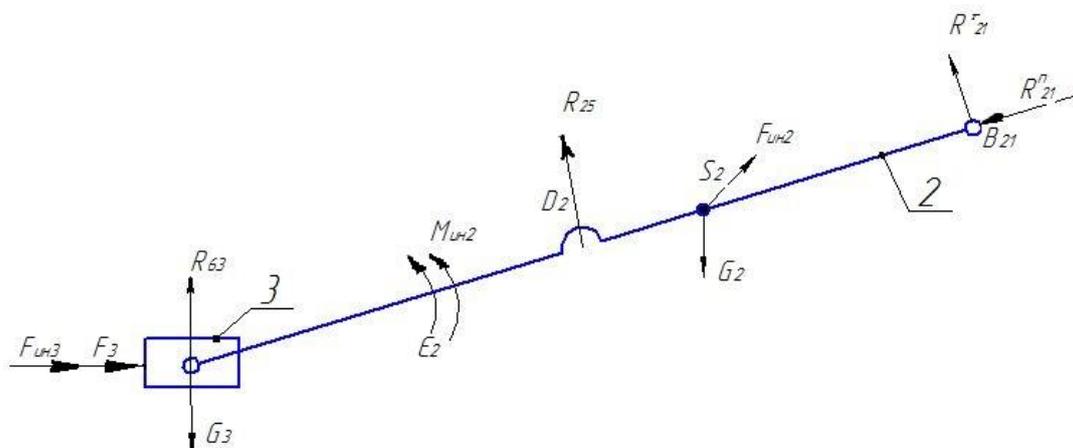


Рис. 33. Силовой анализ структурной группы 2 – 3

### Ведущее звено механизма (кривошип AB)

На рисунке звена вычерчиваем прикладываемые к нему все силы и моменты (рис. 34).

Ведущее звено имеет степень подвижности  $W = 1$ , поэтому под действием приложенных к нему сил, в том числе и сил инерции, его нельзя считать находящимся в равновесии. Чтобы имело место равновесие, необходимо дополнительно ввести силу или пару, уравнивающую все силы, приложенные к ведущему звену.

Вес  $G_{12}$  в т.  $A$  направлен вертикально вниз, реакция  $R_{12}$  в т.  $B_{12}$  – параллельно нормальной составляющей  $R_{21}^n$  (см. рис. 33), но в противоположную сторону. Направление реакции  $R_{61}$  в т.  $A$  можно определить, если построить силовой треугольник.

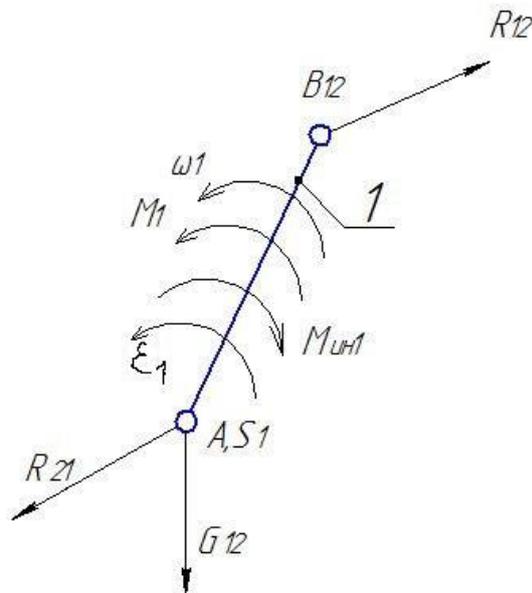


Рис. 34. Силовой анализ ведущего звена

Момент инерции  $M_{ин1}$  направлен против часовой стрелки, т. е. против заданного момента  $M_1$ .

### Практическое задание

**Задача.** Выполнить структурный и силовой анализы кривошипно-ползунного механизма с простыми кинематическими парами при  $\omega = \text{const}$ . Варианты выбрать из приложения.

### Вопросы для самоконтроля

1. Как определить характер движения звена? Какое движение называется замедленным, какое – ускоренным?
2. Как определяются по величине и направлению силы инерции и момент от сил инерции?

3. Сформулировать принцип, согласно которому задачи силового исследования механизмов можно решить методами статики.
4. Какие задачи решает кинестатика?
5. Сколько неизвестных содержит реакция в поступательной и вращательной кинематических парах?
6. Что такое движущие силы?
7. Чем отличаются силы полезного сопротивления от сил вредного сопротивления?
8. Что такое реакции в кинематической паре?

## *Раздел 4*

# **ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ И ДЕТАЛИ МАШИН**

---

### **Краткие теоретические сведения**

Все основные рабочие процессы осуществляются машинами или с применением средств механизации. Современные машины многократно повышают производительность труда человека и решают задачи, порой непосильные человеку. Например, мощность энергетических машин достигает миллионов киловатт.

Детали машин – это их составные части.

Конструирование – творческий процесс создания оптимального варианта машины в документах (главным образом в чертежах) на основе теоретических расчетов, конструкторского, технологического и эксплуатационного опыта.

Основные этапы конструирования:

1. Анализ технического задания. Основные требования к объекту конструирования. Общие правила конструирования. Основные принципы работы объекта.

2. Выявление технических решений. Подбор и разработка вариантов конструкции, относящихся к объекту и основному принципу.

Успешная работа деталей машин заключается в обеспечении работоспособности и надёжности.

**Работоспособность** деталей машин определяется как свойство выполнять свои функции с заданными показателями и характеризуется следующими критериями:

1) прочностью – способностью детали сопротивляться разрушению или необратимому изменению формы (деформации);

2) жёсткостью – способностью детали сопротивляться любой деформации;

3) износостойкостью – способностью сохранять первоначальную форму своей поверхности, сопротивляясь износу;

4) теплостойкостью – способностью сохранять свои свойства при действии высоких температур;

5) виброустойчивостью – способностью работать в нужном диапазоне режимов без недопустимых колебаний.

**Надёжность** определяется как свойство детали машины выполнять свои функции, сохраняя заданные показатели в течение заданного времени и по существу выражает собой перспективы сохранения работоспособности.

В процессе работы детали машины подвергаются не только расчётным нагрузкам, которые конструктор ожидает и учитывает, но и, например, ударам, вибрациям, загрязнениям, экстремальным природным условиям и т.п. При этом возникает отказ – утрата работоспособности вследствие разрушения деталей или нарушения их правильного взаимодействия.

Отказы бывают полные и частичные; внезапные (поломки) и постепенные (износ, коррозия); опасные для жизни; тяжёлые и лёгкие; устранимые и неустраиваемые; приработочные (возникают в начале эксплуатации) и связанные с наличием дефектных деталей; отказы по причине износа, усталости и старения материалов.

Надёжной можно считать машину, имеющую следующие свойства:

1) безотказность – способность сохранять свои эксплуатационные показатели в течение заданной наработки без вынужденных перерывов;

2) долговечность – способность сохранять заданные показатели до предельного состояния с необходимыми перерывами для ремонтов и технического обслуживания;

3) ремонтпригодность – приспособленность изделия к предупреждению, обнаружению и устранению отказов и неисправностей посредством техобслуживания и ремонта;

4) сохраняемость – способность сохранять требуемые эксплуатационные показатели после установленного срока хранения и транспортирования.

Надёжность трудно рассчитать количественно, она обычно оценивается как вероятность безотказной работы на основании статистики эксплуатации группы идентичных машин.

При всей значимости описанных критериев нетрудно заметить, что прочность – это важнейший критерий работоспособности и надёжности. Невыполнение условия прочности автоматически делает бессмысленными все другие требования и критерии к качеству машин.

Все этапы проектирования, каждый шаг конструктора сопровождаются расчётами. Это естественно, так как грамотно выполнен-

ный расчёт намного проще и в сотни раз дешевле экспериментальных испытаний.

Рассмотрим зубчатую передачу, которая применяется во многих механизмах и машинах. **Зубчатыми передачами** называются механизмы с высшими кинематическими парами, в состав которых входят зубчатые колеса, рейки или секторы – звенья, снабженные профилированными выступами или зубьями.

Отношение угловых скоростей вращения обоих валов передачи называется **передаточным отношением  $i$** , которое характеризует процесс преобразования движения количественно.

Отношение угловой скорости ведущего вала к угловой скорости ведомого называется **передаточным числом  $u$** , которое определяет направление передачи энергии.

Величины  $i$  и  $u$  могут меняться или оставаться постоянными за время одного оборота ведущего вала.

Любую зубчатую передачу (рис. 35) можно схематично представить в виде двух начальных поверхностей (рис. 36), контактирующих между собой, а плоскую передачу – в виде двух начальных окружностей, перекатывающихся друг по другу без скольжения и контактирующих в полюсе  $p$ . Тогда  $V_p = r_{w1} \cdot \omega_1 = r_{w2} \cdot \omega_2$ , т. е.  $\omega_1 / \omega_2 = r_{w2} / r_{w1} = i_{1,2}$ .



Рис. 35. Общий вид зубчатой передачи

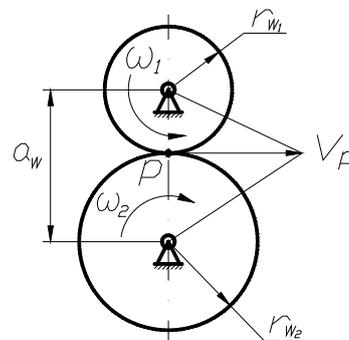


Рис. 36. Схема зубчатой передачи

В современном машиностроении применяются зубчатые колёса самых разнообразных конструкций. Конструктивные формы и размеры зубчатого колеса зависят от нагрузок. Зубчатые цилиндрические колёса изготавливают ковкой, штамповкой, сваркой и литьём (рис. 37).

**Обод** – наружная рабочая часть зубчатого колеса.

**Венец** – часть обода зубчатого колеса, на котором нарезаны зубья.

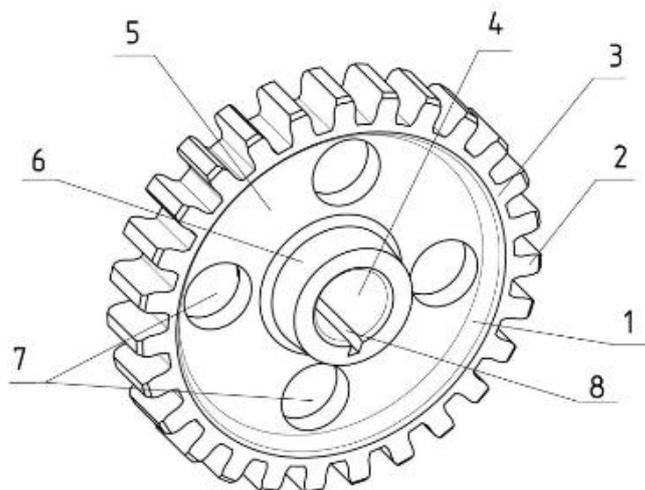


Рис. 37. Строение зубчатого цилиндрического штампованного колеса: 1 – обод; 2 – зуб; 3 – венец; 4 – посадочное отверстие; 5 – диск; 6 – ступица; 7 – отверстие в диске; 8 – шпоночный паз

**Диск** – часть зубчатого колеса, при помощи которого обод соединяется со ступицей. Диск в деталях простой конструкции и малых размеров выполняется как единое целое вместе с ободом и ступицей. Для облегчения веса в диске могут выполняться отверстия (отв. 7 на рис. 37), в сварных зубчатых колёсах больших размеров к дискам приваривают ребра для увеличения жёсткости колеса.

**Посадочное отверстие** – центральное отверстие в ступице колеса, которым оно надевается на вал. Выполняется по точным размерам и может иметь различные формы. Это зависит от вида соединения колеса с валом.

**Ступица** – центральная часть колеса вместе с посадочным отверстием. Размеры ступицы выбирают в зависимости от размеров посадочного отверстия. В общем случае наружный диаметр ступицы должен быть больше диаметра посадочного отверстия в 1,5 раза, длина ступицы приблизительно должна быть равна диаметру отверстия.

**Шпоночный паз** – углубление в отверстии колеса и на валу для закладывания в это углубление крепёжной детали призматической

формы, называемой шпонкой, которая предотвращает проворот колеса относительно вала.

Наибольшее распространение получили цилиндрические зубчатые эвольвентные колёса с профилем, предложенным Леонардом Эйлером в 1754 г. Преимущество этого профиля в простоте изготовления, достаточно высокой нагрузочной способности, малой чувствительности к неточностям межцентрового расстояния.

**Эвольвентой** круга называют кривую  $M_0M$ , которая описывает любую точку прямой, перекатывающейся без скольжения по окружности (рис. 38). При этом прямую  $n - n$  обычно называют **производящей**, а окружность – **основной**. Острый угол  $\alpha$  между касательной  $\tau - \tau$  к эвольвенте  $M_0M$  и радиус-вектором эвольвенты  $OM$  называется **углом профиля**. Угол, образованный начальным радиус-вектором эвольвенты  $OM_0$  и её текущим радиусом  $OM$ , называется **эвольвентным** ( $\theta$ ).

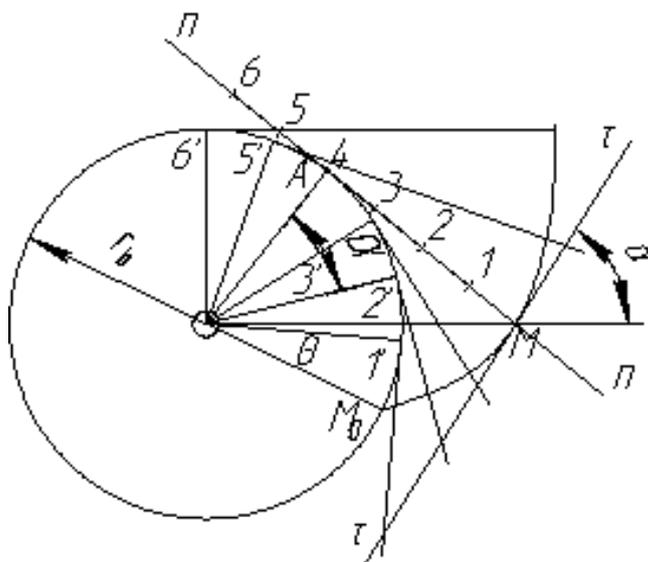


Рис. 38. Образование эвольвенты

Основные геометрические параметры зубчатого колёса с эвольвентным профилем (рис. 39) так характеризуют зубчатое колесо: число зубьев  $z$ , модуль зацепления  $m$ , угол профиля зуба  $\alpha$ . Число зубьев колеса определяется непосредственно подсчётом, а модуль зацепления рассчитывается по формуле  $m = P_t/\pi$ , где  $P_t$  – шаг по делительной окружности (см. рис. 36). Как правило, размеры зубчатого колеса и зубьев выражаются через модуль, который выбирается из ряда рациональных чисел от 0,05 до 100.

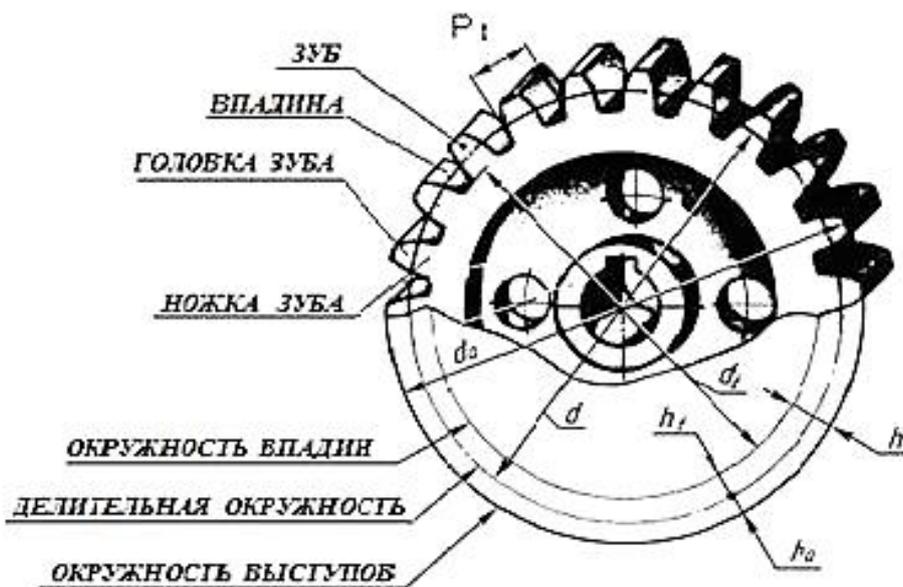


Рис. 39. Геометрические параметры цилиндрического колеса с эвольвентным профилем зуба

Зубчатое эвольвентное зацепление можно рассмотреть на рис. 40.

Пусть профиль зуба звена 1 очерчен по эвольвенте  $r_{b1}$ , а профиль зуба звена 2 по эвольвенте  $r_{b2}$ . Поместим центры этих окружностей в т.  $O_1$  и в т.  $O_2$  и приведём эвольвенты в соприкосновение в т.  $K$ .

Нормаль к эвольвенте  $\mathcal{E}_1$  в т.  $K$  должна быть касательной к  $r_{b1}$ , а нормаль к эвольвенте  $\mathcal{E}_2$  — касательной к  $r_{b2}$ .

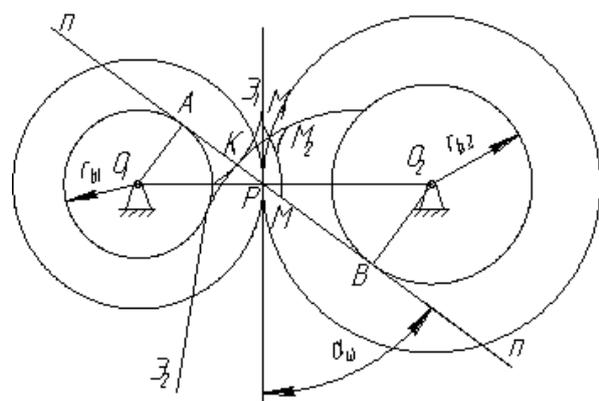


Рис. 40. Эвольвентное зацепление

В точке касания нормаль должна быть общей к обоим профилям и, следовательно, т.  $K$  лежит на общей касательной к основным окружностям. При вращении звеньев 1 и 2 точка касания эвольвент перемещается по отрезку  $AB$  этой касательной, так как вне отрезка  $AB$  эвольвенты не могут касаться, т. е. иметь общую нормаль.

Отсюда следует, что линия зацепления эвольвентных профилей совпадает с общей нормалью к ним и лежит на отрезке  $AB$  общей касательной к основным окружностям. Точка  $P$  — полюс зацепления — за-

нимает неизменное положение. По свойству центроид начальные окружности при движении звеньев перекатываются без скольжения. Итак, при эвольвентном зацеплении передаточное отношение имеет постоянную величину  $U_{12} = \pm r_{b1}/r_{b2}$ .

Знак минус относится к внешнему зацеплению, знак плюс – к внутреннему.

Выводы:

1. При эвольвентном зацеплении изменение межосевого расстояния не влияет на величину передаточного отношения вследствие неизменности радиусов основных окружностей. При изменении межосевого расстояния изменятся лишь радиусы  $r_w$  и угловые зацепления  $\alpha_w$ .

2. При эвольвентном зацеплении передаточное отношение согласно основной теории имеет постоянную величину.

3. При внешнем зацеплении эвольвентные профили являются сопряжёнными только в пределах отрезка  $AB$  линии зацепления.

Линией зацепления  $AB$  называется геометрическое место точек соприкосновения профилей боковых поверхностей зубьев колёс, принадлежащее неподвижному пространству. Точки  $M_1$  и  $M_2$  – сопряжённые.

Точки, касающиеся друг друга на линии зацепления, называются сопряжёнными.

Точки  $A$  и  $B$  – теоретические границы зацепления, за этими точками зацепления допускать нельзя, так как может наступить заклинивание передачи.

В зависимости от расположения начальных и делительных окружностей получают три типа зубчатых передач.

Первый тип (рис. 41, б). Эти окружности совпадают, если передачи удовлетворяют условию  $x_1 + x_2 = 0$  (передача называется **нулевой**), т. е. передачи, составленные из колёс без смещения, и передачи, в которых отрицательное смещение одного колеса равно по абсолютной величине положительному смещению другого колеса (равносмещённые).

Межосевое расстояние в этих передачах  $a = 0,5m(z_1 - z_2)$  называется **делительным межосевым расстоянием**, а угол зацепления  $\alpha$  равен углу профиля производящего контура.

Второй тип (рис. 41, а). В передачах, у которых по делительным окружностям толщина зуба одного колеса больше ширины впадины

другого, для зацепления без бокового зазора межцентровое расстояние  $a_w$  должно быть больше  $a$ . Соответственно увеличивается и угол  $\alpha_w$ .

Третий тип (рис. 41, в). Аналогично для передач, у которых по делительной окружности толщина зубьев одного из колёс меньше впадины другого, имеем  $a_w < a$ . Эти передачи получают при  $x_1 + x_2 < 0$ .

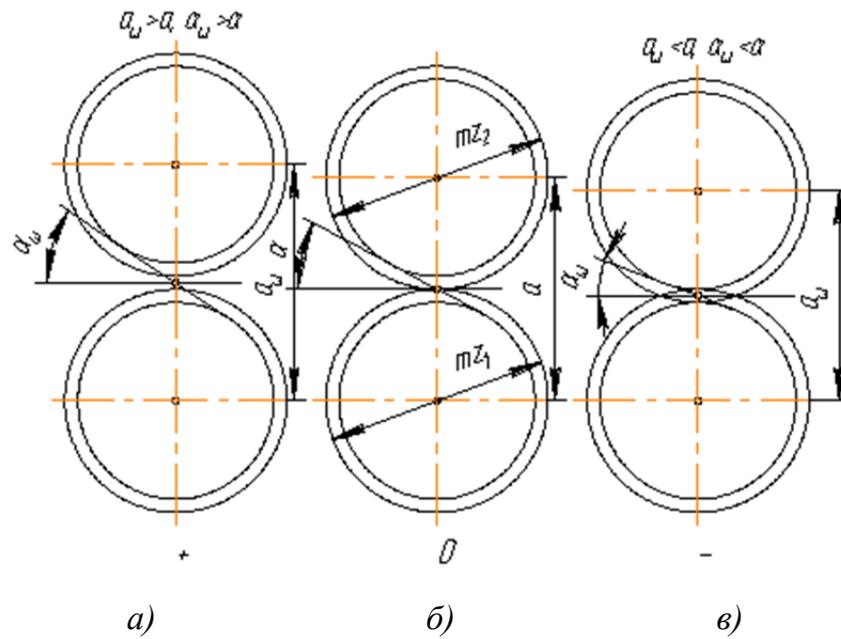


Рис. 41. Типы передач

При проектировании зубчатой передачи проектировщик решает несколько задач:

- 1) выбирает тип зубчатого механизма, его передаточное отношение и число зубьев колес;
- 2) проводит проектный прочностной расчет механизма и определяет величину межосевого расстояния или модуль зубчатых колес (модуль зубчатых колес округляется до ближайшей величины из стандартного ряда модулей);
- 3) осуществляет геометрический расчет зубчатой передачи для выбранных коэффициентов смещения исходного контура, которые обеспечивают исключение подрезания, срезания и заострения зубьев колес и благоприятное или оптимальное сочетание качественных показателей зубчатой передачи.

Для эвольвентных зубчатых передач область сочетаний коэффициентов смещений зубчатых колес  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих огра-

ничениям по срезанию в станочном зацеплении, заострению, заклиниванию в зацеплении эвольвент и на переходных кривых, по допустимым минимальным или максимальным значениям качественных показателей, называют *блокирующим контуром* – это совокупность линий в системе координат  $x_1$  и  $x_2$ , ограничивающих зону допустимых значений коэффициентов смещения для передачи с числами зубьев колёс  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 42). Внутри блокирующего контура нанесены линии, характеризующие качество зацепления:

- линия коэффициента торцевого перекрытия  $\varepsilon_\alpha = 1,2$ ;
- линии, характеризующие равнопрочность зубьев шестерни и колеса при ведущей шестерне (линия *a-a*) и при ведущем колесе (линия *b-b*);
- линия одинаковых удельных скольжений  $V_{p1}$  и  $V_{p2}$  в нижних точках основных активных профилей зубьев шестерни и колеса.

В настоящее время с ростом производительности компьютеров появляется возможность геометрического синтеза оптимальных зубчатых передач без предварительного построения блокирующего контура.

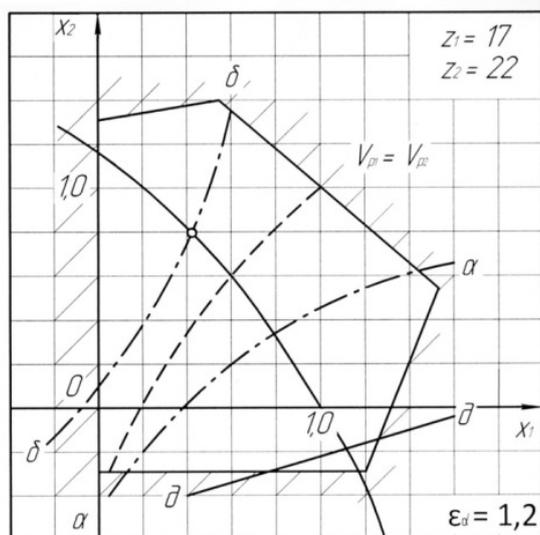


Рис. 42. Блокирующий контур  
(цена деления 0,2)

**Пример.** Рассчитать эвольвентную зубчатую передачу наибольшей прочности по излому зубьев (*НИ*),  $z_1 = 17$ ,  $z_2 = 22$ , модуль зацепления  $m = 10$  мм. Ведущее колесо 2. Угол профиля  $\alpha = 20^\circ$ ; коэффициент высоты головки зуба  $h_a^* = 1$ ; коэффициент радиального зазора  $c^* = 0,25$ .

В соответствии с прочностными требованиями по блокирующему контуру для чисел зубьев 17 и 22 определяем коэффициенты смещения как координаты точки пересечения линии  $\epsilon_\alpha = 1,2$  с линией  $b-b$ , тогда  $x_1 = 0,42$ ,  $x_2 = 0,74$  (см. рис. 42).

Все расчёты геометрических параметров необходимо выполнять тщательно, при проверках добиваться совпадения результатов с точностью до двух десятичных знаков.

Порядок расчёта:

1. Коэффициент суммы смещения

$$x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0,42 + 0,74 = 1,16,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  величины алгебраические.

2. Угол зацепления

$$\text{Inv}_{\alpha_w} = 2x_\Sigma \text{tg}\alpha / (z_1 + z_2) + \text{inv}\alpha = 2 \cdot 1,16 \cdot 0,3640 + 0,01490 = 0,85938.$$

По эвольвентной функции определяем  $\alpha_w = 26^\circ 37'$ .

Расчёт величины  $\text{inv}\alpha_w$  необходимо делать с точностью до шестого десятичного знака и округлять до пятого знака. Угол зацепления определяется с точностью до одной минуты (табл. 6).

Таблица 6

Угол, град	Угол, мин					
	0	10	20	30	40	50
24	0,0264	0,0269	0,0275	0,0281	0,0287	0,0293
25	0,0300	0,0306	0,0313	0,0319	0,0326	0,0333
26	0,0339	0,0346	0,0354	0,0361	0,0368	0,0375

3. Межосевое расстояние

$$a_w = ((z_1 + z_2)m/2) (\cos \alpha / \cos \alpha_w) = ((17+22)10/2) (0,9397/0,8941) = 204,95 \text{ мм}.$$

Значение косинусов и их отношение определяется с точностью до четырех десятичных знаков,  $a_w$  и последующие линейные величины вычисляются в миллиметрах с точностью до второго десятичного знака.

4. Делительное межосевое расстояние

$$a = (z_1 + z_2) m = (17 + 22)10 = 195 \text{ мм.}$$

5. Делительные радиусы:

$$r_1 = z_1 \cdot m/2 = 17 \cdot 10/2 = 85 \text{ мм}; r_2 = z_2 \cdot m/2 = 22 \cdot 10/2 = 110 \text{ мм.}$$

6. Основные радиусы:

$$r_{B1} = r_1 \cdot \cos \alpha = 85 \cdot 0,9397 = 79,87 \text{ мм};$$

$$r_{B2} = r_2 \cdot \cos \alpha = 110 \cdot 0,9397 = 103,37 \text{ мм.}$$

7. Передаточное число

$$u = z_2/z_1 = 22/17 = 1,29.$$

8. Начальные радиусы:

$$r_{w1} = a_w/(u + 1) = 204,95/(1,29 + 1) = 89,50 \text{ мм};$$

$$r_{w2} = a_w \cdot u/(u + 1) = 204,95 \cdot 1,29/(1,29 + 1) = 115,45 \text{ мм.}$$

$$\text{Проверяем: } a_w = r_{w1} + r_{w2} = 89,50 + 115,45 = 204,95 \text{ мм.}$$

9. Коэффициент воспринимаемого смещения – отношение воспринимаемого смещения к модулю

$$y = (a_w - a)/m = (204,95 - 195)/10 = 0,995.$$

Значение  $y$  подсчитывается с точностью до трех знаков.

$$\text{Проверяем: } a_w = a + y \cdot m = 195 + 0,995 \cdot 10 = 204,95 \text{ мм.}$$

10. Коэффициент уравнивающего смещения

$$\Delta y = x_\Sigma - y = 1,16 - 0,995 = 0,165.$$

11. Радиусы вершин зубьев:

$$r_{a1} = r_1 + (h_a^* + x_1 - \Delta y) m = 85 + (1 + 0,42 - 0,165)10 = 97,55 \text{ мм};$$

$$r_{a2} = r_2 + (h_a^* + x_2 - \Delta y) m = 110 + (1 + 0,74 - 0,165)10 = 125,75 \text{ мм.}$$

12. Радиусы впадин:

$$r_{f1} = r_1 - (h_a^* + c^* - x_1) m = 85 - (1 + 0,25 - 0,42)10 = 76,70 \text{ мм};$$

$$r_{f2} = r_2 - (h_a^* + c^* - x_2) m = 110 - (1 + 0,25 - 0,74)10 = 104,90 \text{ мм.}$$

13. Высоты зубьев:

$$h_1 = r_{a1} - r_{f1} = 97,55 - 76,70 = 20,85 \text{ мм};$$

$$h_2 = r_{a2} - r_{f2} = 125,75 - 104,90 = 20,85 \text{ мм.}$$

$$\text{Проверяем: } h_1 = h_2 = 20,85 \text{ мм.}$$

14. Толщина зубьев:

$$s_1 = (\pi/2 + 2x_1 \operatorname{tg} \alpha) m = (3,1415/2 + 2 \cdot 0,42 \cdot 0,3640)10 = 18,77 \text{ мм};$$

$$s_2 = (\pi/2 + 2x_2 \operatorname{tg} \alpha) m = (3,1415/2 + 2 \cdot 0,74 \cdot 0,3640)10 = 21,09 \text{ мм.}$$

15. Шаг зубьев

$$p = \pi \cdot m = 3,1415 \cdot 10 = 31,42 \text{ мм.}$$

16. Шаг зацепления

$$p_w = p_v = \pi \cdot m \cdot \cos \alpha = 3,1415 \cdot 10 \cdot 0,9390 = 29,50 \text{ мм.}$$

## Расчет некоторых геометрических и кинематических показателей, определяющих качество зубчатой передачи

Нагрузочная способность и долговечность зубчатой передачи определяются материалом и технологией изготовления зубчатых колес, а также показателями, определяющими качество зацепления.

К числу основных качественных показателей относятся следующие.

**Коэффициент повышения контактной прочности** показывает приблизительно (теоретически), во сколько раз контактная прочность передачи, имеющей угол зацепления  $\alpha_w$ , выше по сравнению с передачей, у которой  $\alpha_w = 20^\circ$  при прочих равных параметрах (модулях, числах зубьев колес и др.). Смысл этого показателя становится яснее, если вспомнить, что с увеличением угла зацепления возрастают радиусы кривизны рабочих поверхностей зубьев, а следовательно, и допустимая нагрузка на зубья. Для нашего примера

$$\varphi_k = \operatorname{tg} \alpha_w / \operatorname{tg} \alpha = 0,5012 / 0,3640 = 1,38.$$

**Коэффициент торцевого перекрытия  $\varepsilon_\alpha$**  – отношение угла торцевого перекрытия  $\varphi_\alpha$  зубчатого колеса цилиндрической передачи к его угловому шагу  $\tau = 360/z$ . Этот коэффициент характеризует плавность работы зацепления. С уменьшением  $\varepsilon_\alpha$  (особенно до величины, меньшей 1,2) возрастают колебания угловых скоростей зубчатых колес, а следовательно, и дополнительные динамические нагрузки. Поэтому коэффициент торцевого перекрытия косвенно влияет на нагрузочную способность передачи. Уменьшение его до  $\varepsilon_\alpha < 1,2$  нежелательно, хотя передача будет работать при предельном значении  $\varepsilon_\alpha = 1$ . Коэффициент торцевого перекрытия может быть найден по формуле

$$\varepsilon_\alpha = (z_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a1} + z_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2} - (z_1 + z_2) \operatorname{tg} \alpha_w) / 2\pi.$$

Значения углов  $\alpha_{a1}$  и  $\alpha_{a2}$  определяются соответственно тригонометрическими функциями

$$\cos \alpha_{a1} = r_{b1} / r_{a1} \text{ и } \cos \alpha_{a2} = r_{b2} / r_{a2}.$$

Для рассматриваемого примера:

$$\cos \alpha_{a1} = r_{b1} / r_{a1} = 79,87 / 97,55 = 0,8187, \text{ тогда } \alpha_{a1} = 35^\circ 03' \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_{a1} = 0,7015;$$

$$\cos \alpha_{a2} = r_{b2} / r_{a2} = 103,37 / 125,75 = 0,8220, \text{ тогда } \alpha_{a2} = 34^\circ 42' \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_{a2} = 0,6924.$$

$$\text{Отсюда } \varepsilon_\alpha = 1,21.$$

Если значение  $\varepsilon_\alpha$  значительно отличается от величины, принятой при выборе  $x_1$  и  $x_2$  по блокирующему контуру (более чем на 0,01), то допущена ошибка в расчётах или при определении коэффициентов смещений; её необходимо устранить.

**Удельное скольжение в контактной точке профиля зуба** – отношение скорости скольжения контактных точек к скорости общей точки по профилю зуба данного зубчатого колеса в направлении скольжения. От его значения зависит износостойкость зубьев и стойкость их против заедания, которые возрастают по мере уменьшения удельного скольжения. Удельное скольжение переменное вдоль профиля зуба и достигает максимума в одной из крайних точек активного профиля зуба. В полюсе зацепления оно равно нулю.

Наибольших значений удельные скольжения достигают обычно на ножках зубьев (в нижних точках активных профилей).

Для рассматриваемой передачи они равны:

у шестерни  $v_{p1} = [(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)(u + 1)] / [\operatorname{tg} \alpha_w - u(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)] = -2,76$ ;

у колеса  $v_{p2} = [(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w)(u + 1)] / [u \operatorname{tg} \alpha_w - (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w)] = -1,28$ .

Наибольшее значение удельных скольжений на головках зубьев (в верхних точках активных профилей):

у шестерни  $v_{h1} = [(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w)(u + 1)] / u \operatorname{tg} \alpha_{a1} = 0,51$ ;

у колеса  $v_{h2} = [(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)(u + 1)] / u \operatorname{tg} \alpha_{a2} = 0,63$ .

**Коэффициент формы зуба  $Y$**  характеризует соотношение высоты зуба и его толщины у основания. От величины  $Y$  зависит прочность зуба на излом. Чем больше  $Y$ , тем большую нагрузку может выдержать зуб. Формулы для вычисления коэффициента формы зуба довольно сложны и поэтому здесь не приводятся.

## Практическое задание

**Задача.** Рассчитать некоторые геометрические параметры цилиндрической зубчатой эвольвентной передачи внешнего зацепления. Варианты приведены на рис. 43.

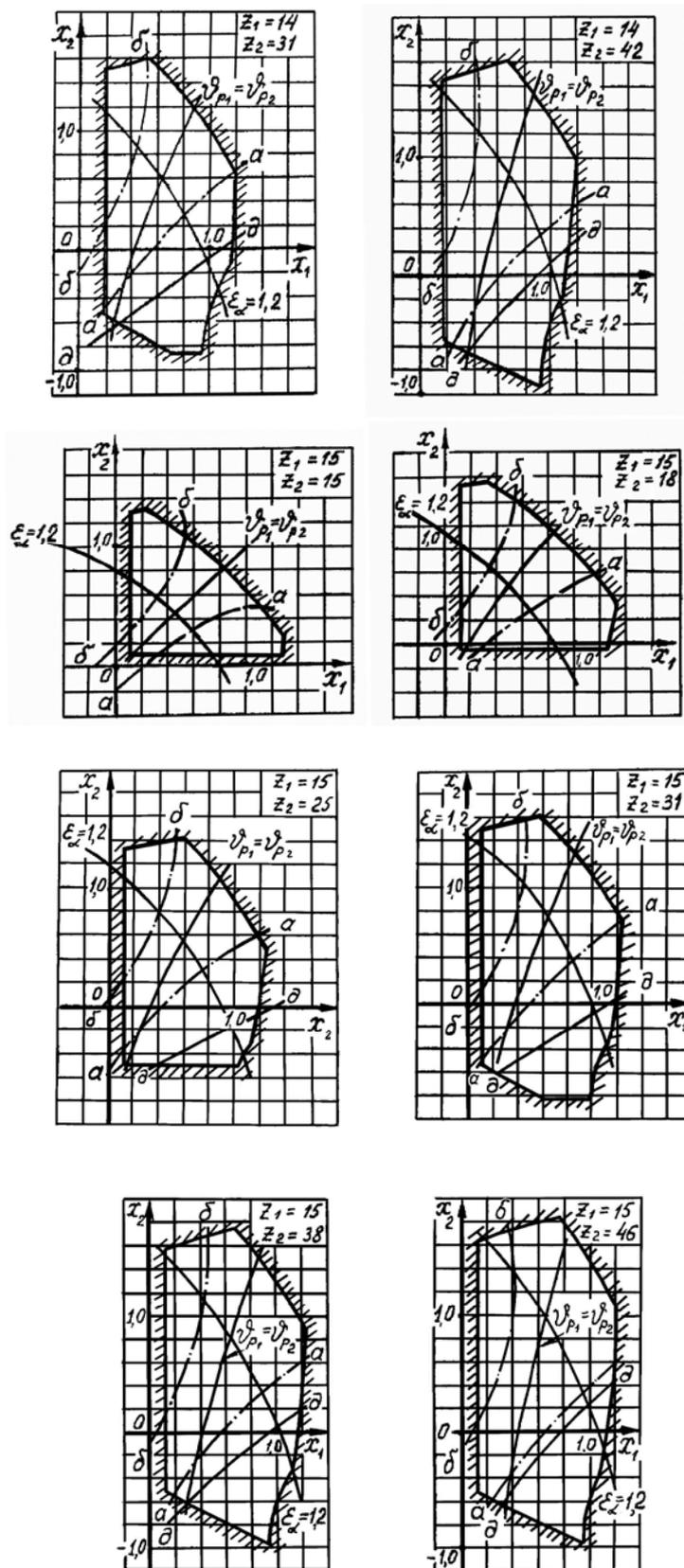


Рис. 43. Варианты для расчёта геометрических параметров зубчатой эвольвентной передачи (см. также с. 79)

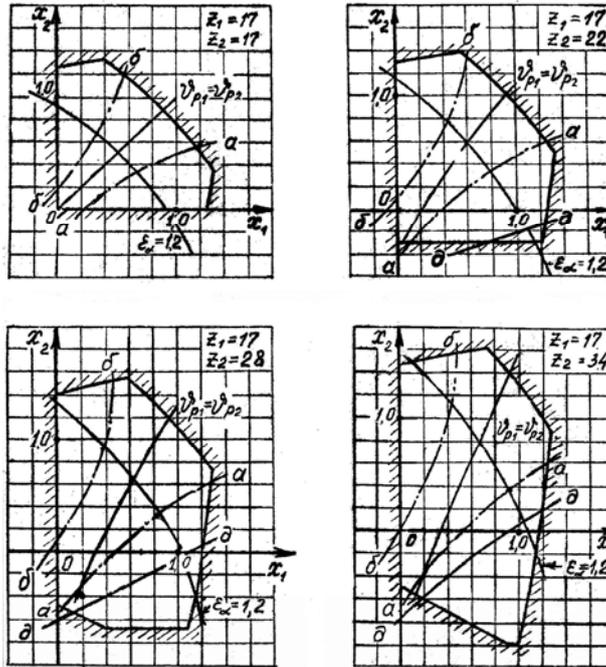


Рис. 43. Окончание

### Вопросы для самоконтроля

1. Какие механизмы называются передачами?
2. Что называют эвольвентой окружности?
3. Какую окружность зубчатого колеса называют начальной?
4. Какую окружность зубчатого колеса называют делительной?
5. Какую окружность зубчатого колеса называют основной?
6. Что называется высотой головки зуба колеса?
7. Что называют высотой ножки зуба колеса?
8. Что называют шагом зубчатого колеса?
9. Что называют модулем зубчатого колеса?
10. Что такое блокирующий контур? Как с помощью его определить коэффициент смещения колёс передачи?
11. Что такое линия зацепления?
12. Какой угол называется углом зацепления?
13. Что такое зубчатый венец колеса?
14. Что такое ступица колеса?
15. Что такое боковая поверхность зуба?
16. Что такое профиль зуба?
17. Как измерить шаг зубчатого колеса?
18. Как рассчитать модуль, зная диаметр окружности выступов?
19. Как, зная модуль и число зубьев колеса, рассчитать диаметр окружности впадин и выступов?
20. Как, зная модуль и число зубьев колеса, рассчитать диаметр делительной окружности?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие позволяет студентам ознакомиться с основными понятиями и определениями в области механики. В результате самостоятельного выполнения индивидуальных заданий студенты должны освоить методы решения задач по теоретической механике, сопротивлению материалов, а также кинематический и структурный анализы, силовой расчёт плоских рычажных механизмов с простыми кинематическими парами, методику расчёта геометрических параметров широко применяемой цилиндрической зубчатой эвольвентной передачи внешнего зацепления.

Выполнение индивидуальных заданий по каждому разделу позволяет сформировать у студентов навыки самостоятельного решения конкретных вопросов при проектировании новых машин, механизмов и приборов.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Новожилов, А. И.* Краткий курс теоретической механики : учеб. пособие / А. И. Новожилов ; под ред. В. Н. Филимонова. – 2-е изд., перераб. и доп. ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2006. – 237 с. ISBN 5-89368-643-8.

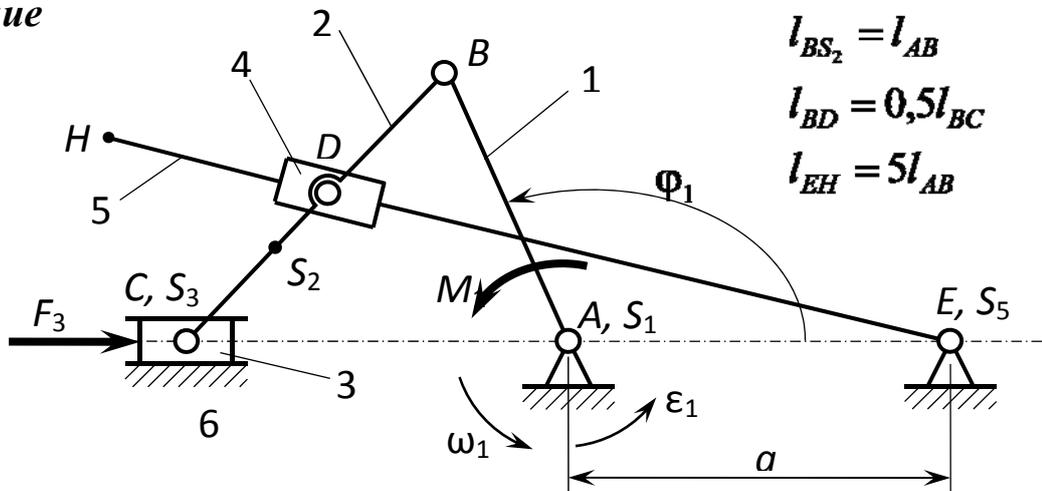
2. *Александров, А. В.* Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова. – 4-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2004. – 560 с. ISBN 5-06-003732-0.

3. *Конспект лекций по дисциплине «Теория механизмов и машин»* / Владим. гос. ун-т ; сост. Б. А. Беляев. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2011. – 72 с.

4. *Чернилевский, Д. В.* Детали машин и основы конструирования : учеб. для вузов / Д. В. Чернилевский. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : Машиностроение, 2012. – 383 с. – ISBN 978-5-94275-617-8.

ПРИЛОЖЕНИЕ

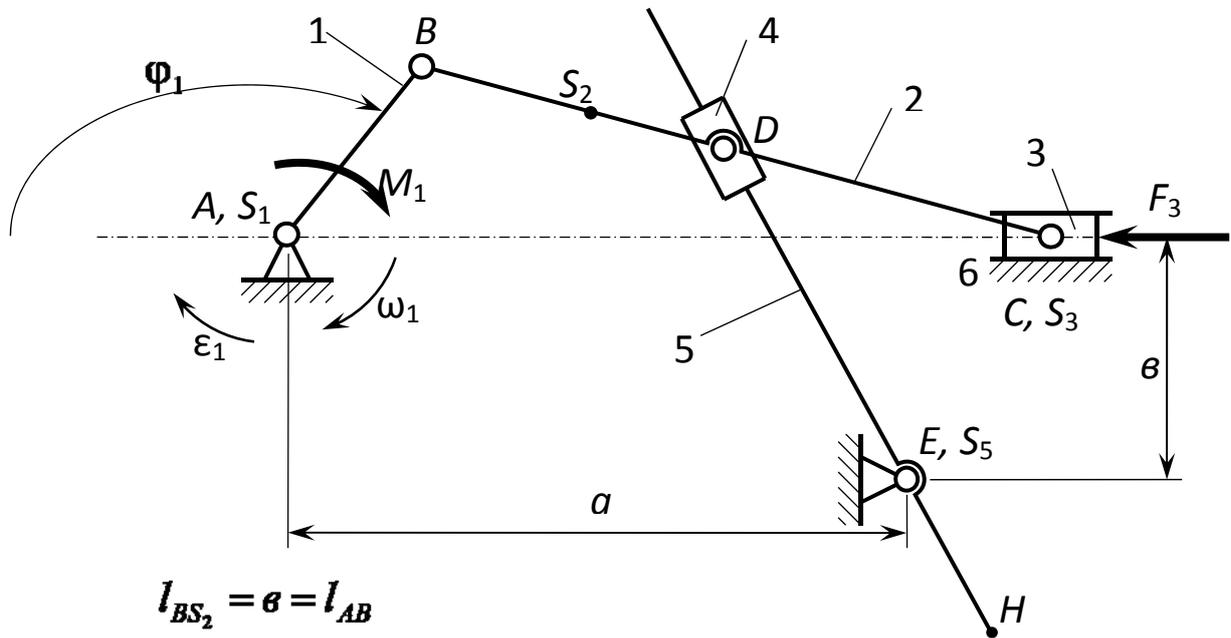
Задание



Обозначение	Единица измерения	Вариант				
		1	2	3	4	5
$\varphi_1$	град	90	105	120	135	150
$l_{AB}$	м	0,10	0,12	0,14	0,18	0,20
$l_{BC}$	м	0,35	0,42	0,49	0,63	0,70
$a$	м	0,20	0,24	0,28	0,36	0,40
$\omega_1$	рад·с <sup>-1</sup>	20	22	24	28	30
$\epsilon_1$	рад·с <sup>-2</sup>	45	55	65	875	100
$m_1$	кг	40	42	38	35	30
$m_2$	кг	25	27	23	20	15
$m_3$	кг	20	22	21	18	13
$m_5$	кг	50	55	45	40	30
$J_{1S}$	кг·м <sup>2</sup>	2,4	2,1	1,4	1,2	1,0
$J_{2S}$	кг·м <sup>2</sup>	2,0	1,6	1,2	1,3	1,6
$J_{5S}$	кг·м <sup>2</sup>	2,2	2,0	1,8	2,0	1,7
$F_3$	Н	4500	5000	4800	4000	3800

**Задание**

Окончание приложения



$$l_{BS_2} = h = l_{AB}$$

$$l_{BD} = 0,5l_{BC}$$

$$l_{EH} = 0$$

Обозначение	Единица измерения	Вариант				
		6	7	8	9	10
$\varphi_1$	град	120	30	60	45	60
$l_{AB}$	м	0,15	0,20	0,25	0,30	0,28
$l_{BC}$	м	0,45	0,60	0,75	0,90	0,84
$a$	м	0,30	0,40	0,50	0,60	0,56
$\omega_1$	рад·с <sup>-1</sup>	30	32	34	36	35
$\epsilon_1$	рад·с <sup>-2</sup>	100	105	110	140	150
$m_1$	кг	12	13	15	17	18
$m_2$	кг	24	26	30	35	36
$m_3$	кг	35	40	45	50	55
$m_5$	кг	30	35	40	42	48
$J_{1S}$	кг·м <sup>2</sup>	1,6	2,0	2,2	2,5	2,8
$J_{2S}$	кг·м <sup>2</sup>	0,8	1,0	1,1	1,3	1,5
$J_{5S}$	кг·м <sup>2</sup>	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$F_3$	Н	3500	4000	5000	4500	5000

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4

### *Раздел 1. ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ*

1. СТАТИКА.....	6
Равновесие плоской системы сил (общий случай).....	6
Порядок решения задач.....	8
Практическое задание.....	10
Вопросы для самоконтроля.....	11
2. КИНЕМАТИКА.....	12
Практическое задание.....	16
Вопросы для самоконтроля.....	16
3. ДИНАМИКА.....	17
Принцип Даламбера для материальной точки.....	17
Практическое задание.....	22
Вопросы для самоконтроля.....	25

### *Раздел 2. ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ*

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. ЗАКОН ГУКА.....	26
Расчет стержней при центральном растяжении – сжатии.....	28
Практическое задание.....	31
2. ИЗГИБ.....	33
Расчет балок, работающих на поперечный изгиб.....	35
Практическое задание.....	42
3. КРУЧЕНИЕ.....	44
Практическое задание.....	48
Вопросы для самоконтроля.....	50

### *Раздел 3. ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН*

1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА.....	51
Практическое задание.....	58
Вопросы для самоконтроля.....	58

2. СТРУКТУРНЫЙ И СИЛОВОЙ АНАЛИЗЫ МЕХАНИЗМА.....	59
Практическое задание.....	63
Вопросы для самоконтроля.....	63
<i>Раздел 4. ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ И ДЕТАЛИ МАШИН</i>	
Краткие теоретические сведения.....	64
Расчет некоторых геометрических и кинематических показателей, определяющих качество зубчатой передачи .....	76
Практическое задание.....	77
Вопросы для самоконтроля.....	79
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	80
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	80
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	81

*Учебное издание*

БЕЛЯЕВ Борис Александрович

МЕХАНИКА. ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие к практическим занятиям

Редактор А. П. Володина

Технический редактор С. Ш. Абдуллаева

Корректор Е. С. Глазкова

Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой

Подписано в печать 28.12.16.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 4,88. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.