

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра "Сопротивление материалов"

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

ПРАКТИКУМ

Часть II

Составители:
В.М. Кислов
И.А. Черноусова

Владимир 2004

УДК 539.3/8
Р 24

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент кафедры
сопротивление материалов Московского государственного
строительного университета
И.В. Новоселов

Кандидат технических наук, доцент
Владимирского государственного университета
И.И. Шишов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Кислов В.М., Черноусова И.А.
Р 24 Расчет стержневых систем. Практикум: В 2 ч./ Влад. гос. ун-т.
Владимир. 2004 г. Ч. 2. 58 с.

Содержит варианты заданий к курсовым и расчетно-проектировочным работам по сопротивлению материалов и примеры их выполнения.

Предназначен для студентов строительных специальностей всех форм обучения. Варианты заданий, указания к заданиям 4 – 5 и примеры их выполнения, введение и заключение разработаны В.М. Кисловым. Указания к заданиям 1 – 3 и примеры их выполнения написаны И.А. Черноусовой.

Табл. 10. Ил. 31. Библиогр.: 3 наим.

УДК 539.3/8

Введение

При изучении курса сопротивление материалов наибольшие затруднения для студентов связаны обычно с выполнением курсовых работ и расчетно-проектировочных заданий. Именно эта часть практического курса в наибольшей степени способствует развитию инженерного мышления, приобретению необходимых навыков расчета конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Настоящий практикум имеет целью помочь студентам овладеть методами выполнения курсовых работ и расчетно-проектировочных заданий.

Вторая часть практикума «Расчет стержневых систем» включает задания, указания и примеры выполнения по следующим разделам курса сопротивления материалов:

- кривой изгиб стержней,
- внецентренное сжатие стержней,
- расчет статически неопределимых (неразрезных) балок,
- расчет стержней на устойчивость,
- расчет стержней на продольно-поперечный изгиб.

Приведенные варианты заданий соответствуют программе курса сопротивления материалов для строительных специальностей.

Задание 1

КОСОЙ ИЗГИБ

В соответствии с шифром для балки, изображенной на рис. 1, с нагрузками (табл. 1, 2) и поперечным сечением (см. рис. 2) требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в двух плоскостях (окончательно эпюры моментов изобразить в аксонометрии на одной оси).
2. Из условия прочности по нормальным напряжениям для опасного сечения определить параметр a ($R_{\text{раст}} = R_{\text{сж}} = R = 10 \text{ МПа}$).
3. Вычертить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении и показать нейтральную линию.

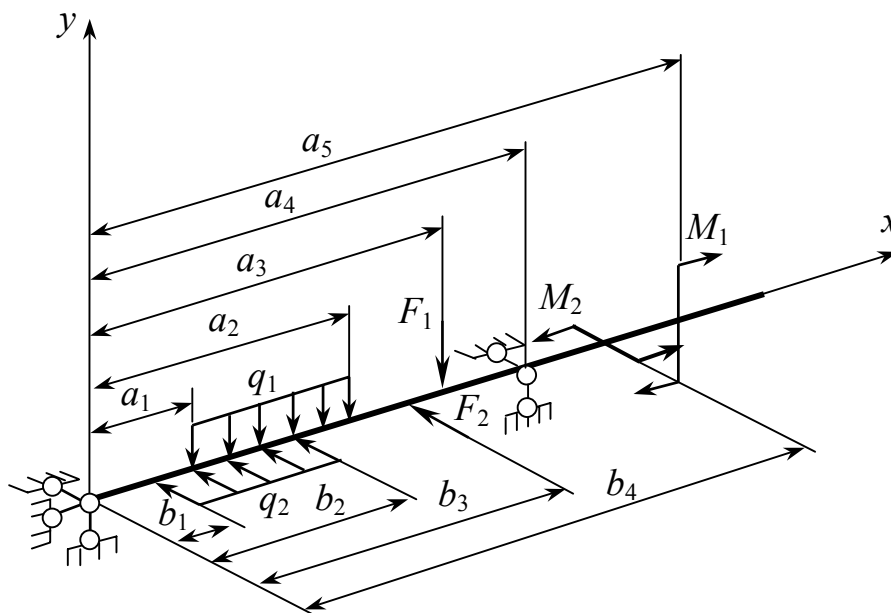


Рис. 1

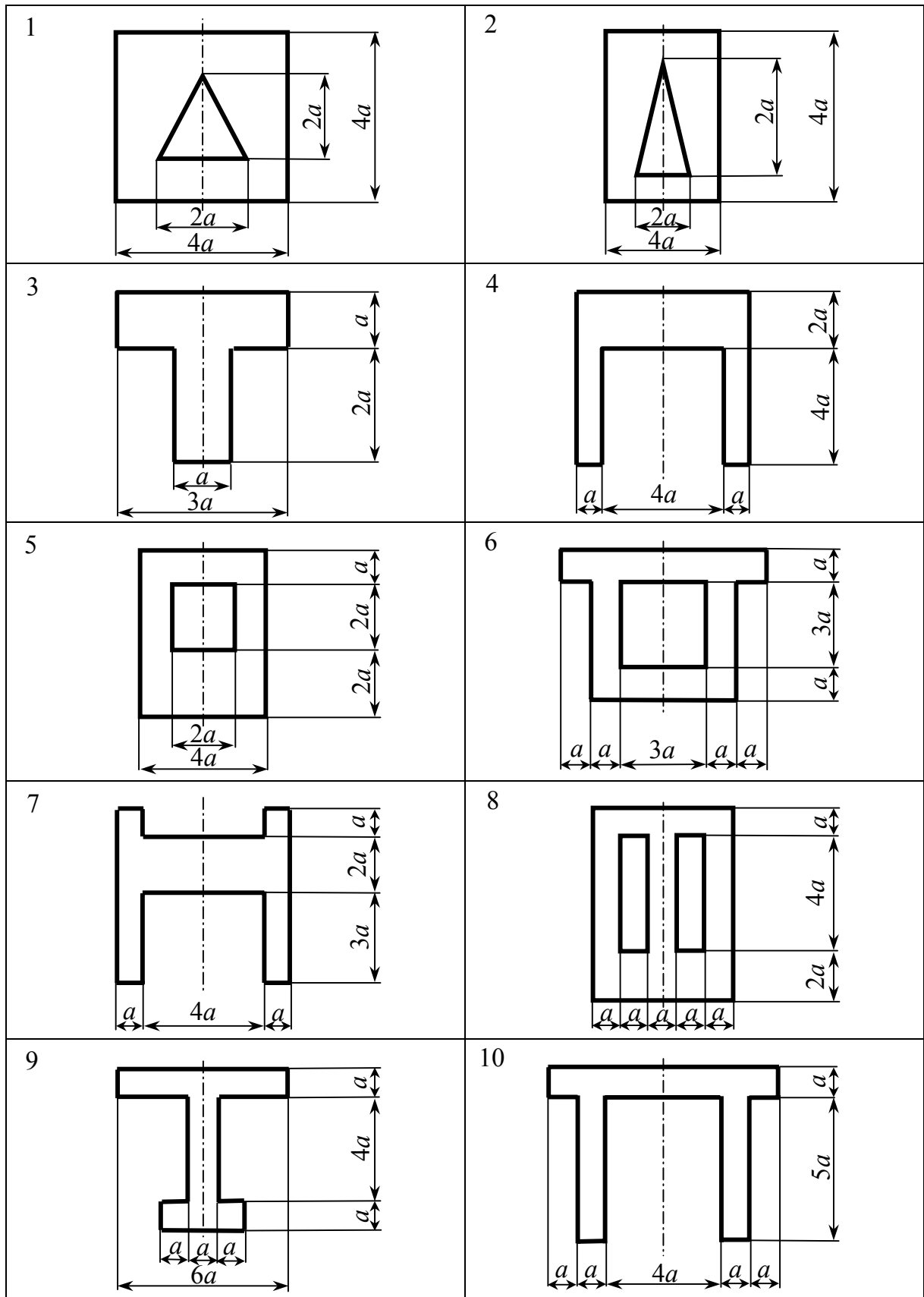
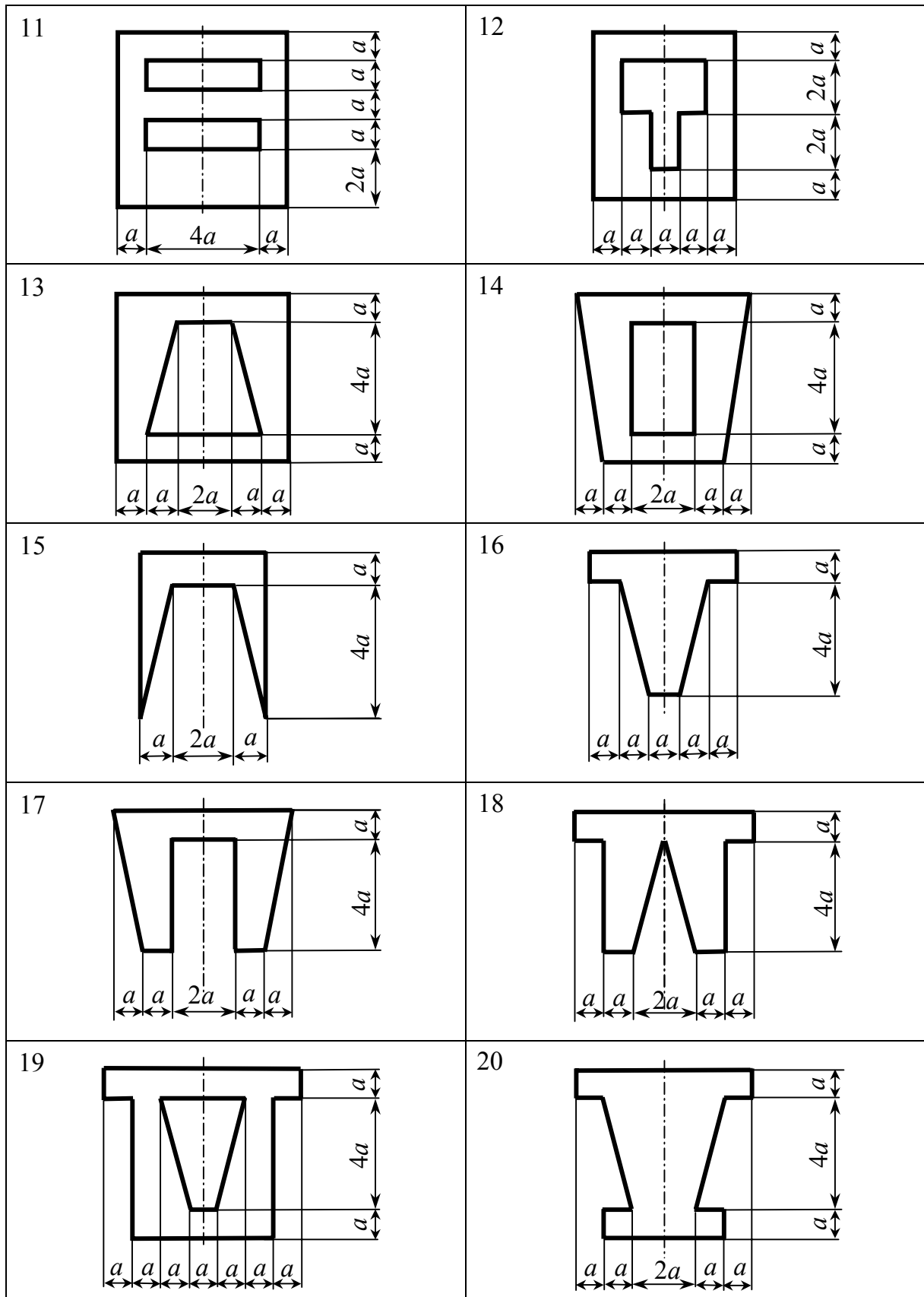


Рис. 2



Окончание рис. 2

Таблица 1

№ п/п	$a_1, \text{ м}$	$a_2, \text{ м}$	$a_3, \text{ м}$	$a_4, \text{ м}$	$a_5, \text{ м}$	$b_1, \text{ м}$	$b_2, \text{ м}$	$b_3, \text{ м}$	$b_4, \text{ м}$
1	0	4	4	6	6	0	4	2	8
2	0	4	2	6	4	0	6	3	8
3	2	4	2	6	8	6	8	3	3
4	2	4	2	6	4	4	8	4	8
5	0	8	2	8	6	0	3	3	6
6	4	8	3	6	3	2	6	2	4
7	2	8	8	6	3	2	6	8	4
8	4	8	7	4	4	6	8	8	4
9	0	3	3	6	3	6	8	8	0
10	0	6	3	6	8	0	8	4	0
11	1	5	3	8	7	5	8	3	5
12	3	8	6	5	3	5	7	3	3
13	3	6	6	8	2	4	6	2	8
14	2	5	4	6	8	2	6	8	8
15	5	7	2	8	8	2	7	4	5
16	1	4	8	6	8	1	6	8	4
17	3	8	8	6	6	3	6	2	6
18	5	8	6	8	2	5	8	6	2
19	2	6	2	8	8	0	4	6	4
20	0	3	5	6	8	3	6	5	0

Таблица 2

№ п/п	Форма сечения	$q_1, \text{ кН/м}$	$F_1, \text{ кН}$	$M_1, \text{ кН}\cdot\text{м}$	$q_2, \text{ кН/м}$	$F_2, \text{ кН}$	$M_2, \text{ кН}\cdot\text{м}$
1	20	20	-40	0	0	80	20
2	19	30	0	-80	0	40	30
3	18	10	60	0	0	-20	40
4	17	40	0	60	0	-60	-40
5	16	-20	-60	0	0	-40	-80
6	15	0	60	0	10	40	-10
7	14	0	-20	-30	20	-40	0
8	13	0	-10	40	30	0	20
9	12	0	-30	30	-20	0	0
10	11	0	20	60	-40	0	80
11	10	0	30	20	-10	0	-20
12	9	0	40	-20	-30	30	0
13	8	0	50	-40	40	0	-30
14	7	0	-50	10	50	20	0
15	6	0	80	50	20	0	50
16	5	-10	0	-50	0	60	-50
17	4	20	40	0	0	-60	60
18	3	-30	0	80	0	-30	-60
19	2	40	30	0	0	50	10
20	1	-50	0	-60	0	-50	40

Указания к решению задания 1

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении стержня не совпадает ни с одной из плоскостей, проходящих через главные, центральные оси инерции этого сечения.

Косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух плоских изгибов.

Момент M_z , действующий в плоскости xu стержня, вызывает нормальные напряжения $\sigma(M_z)$ (см. рис. 3, а). Момент M_y , действующий в плоскости xz стержня, вызывает нормальные напряжения $\sigma(M_y)$ (см. рис. 3, б).

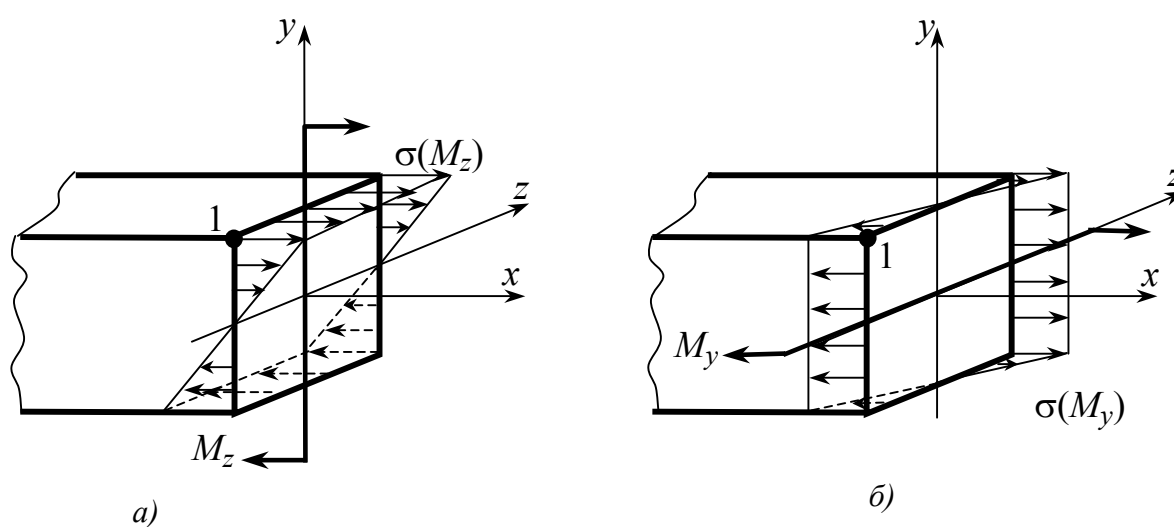


Рис. 3

При косом изгибе в произвольной точке поперечного сечения возникает нормальное напряжение:

$$\sigma = \pm \left| \frac{M_z}{J_z} y \right| \pm \left| \frac{M_y}{J_y} z \right|. \quad (1)$$

В формуле (1) знак "+" перед слагаемым ставится в том случае, если под действием соответствующего момента точка, где определяются нормальные напряжения, попадает в растянутую зону.

Если же под действием соответствующего момента эта точка попадает в сжатую зону, то перед слагаемым ставится знак "-". Например, в точке 1 (см. рис. 3,а) изгибающий момент M_z вызывает деформацию растяжения, а из рисунка 3, б видно, что изгибающий момент M_y вызывает в

той же точке деформацию сжатия.

Формула (1) для нормальных напряжений в точке 1 примет вид:

$$\sigma_1 = + \left| \frac{M_z}{J_y} y_1 \right| - \left| \frac{M_y}{J_y} z_1 \right|.$$

Максимальное нормальное напряжение, возникающее в поперечном сечении не должно превышать расчетного сопротивления.

Это напряжение возникает в опасном сечении (о.с.) в опасной точке (о.т.).

Максимальные значения M_z и M_y не всегда попадают в одно сечение, и тогда приходится просчитывать на прочность несколько сечений, представляющихся расчетчику опасными.

Одним из способов определения опасной точки (о.т.) является подсчет нормальных напряжений во всех характерных точках сечения и сравнение их по величине.

Таким образом, условие прочности при косом изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\max} = + \left| \frac{M_z^{\text{о.с.}}}{J_z} y_{\text{о.т.}} \right| + \left| \frac{M_y^{\text{о.с.}}}{J_y} z_{\text{о.т.}} \right| \leq R.$$

Пример расчета

Задача № 1. Для балки изображенной на рис. 4, а с поперечным сечением - рис. 4, б построить эпюры внутренних силовых факторов; из расчета на прочность подобрать параметр a , приняв $R = 12$ МПа; построить эпюру нормальных напряжений для опасного сечения.

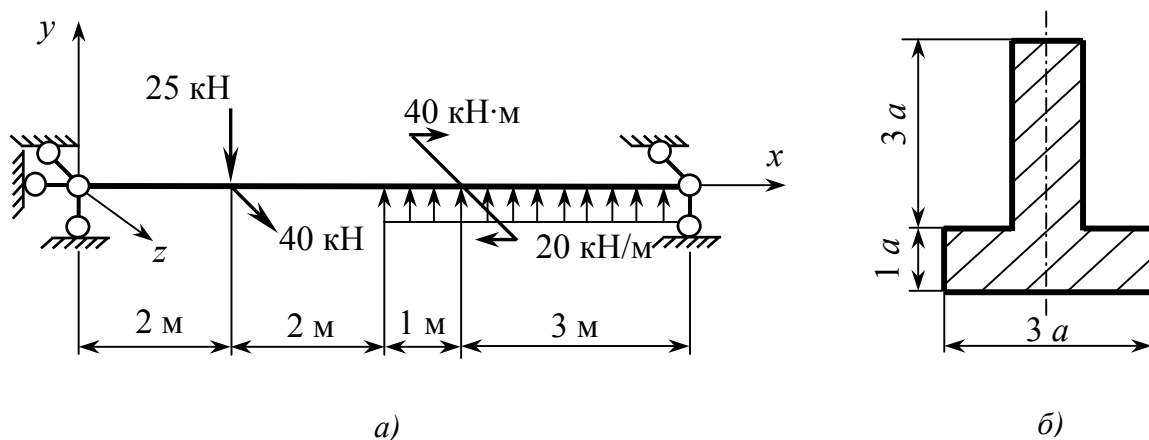


Рис. 4

Решение.

1. Рассмотрим вертикальную плоскость (см. рис. 5, а) и построим эпюры Q_y (рис. 5, б), M_z – (рис. 5, в).

2. Рассмотрим горизонтальную плоскость (см. рис. 5, г) и построим эпюры Q_z (рис. 5, д), M_y (рис. 5, е). Объединенная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 5, ж.

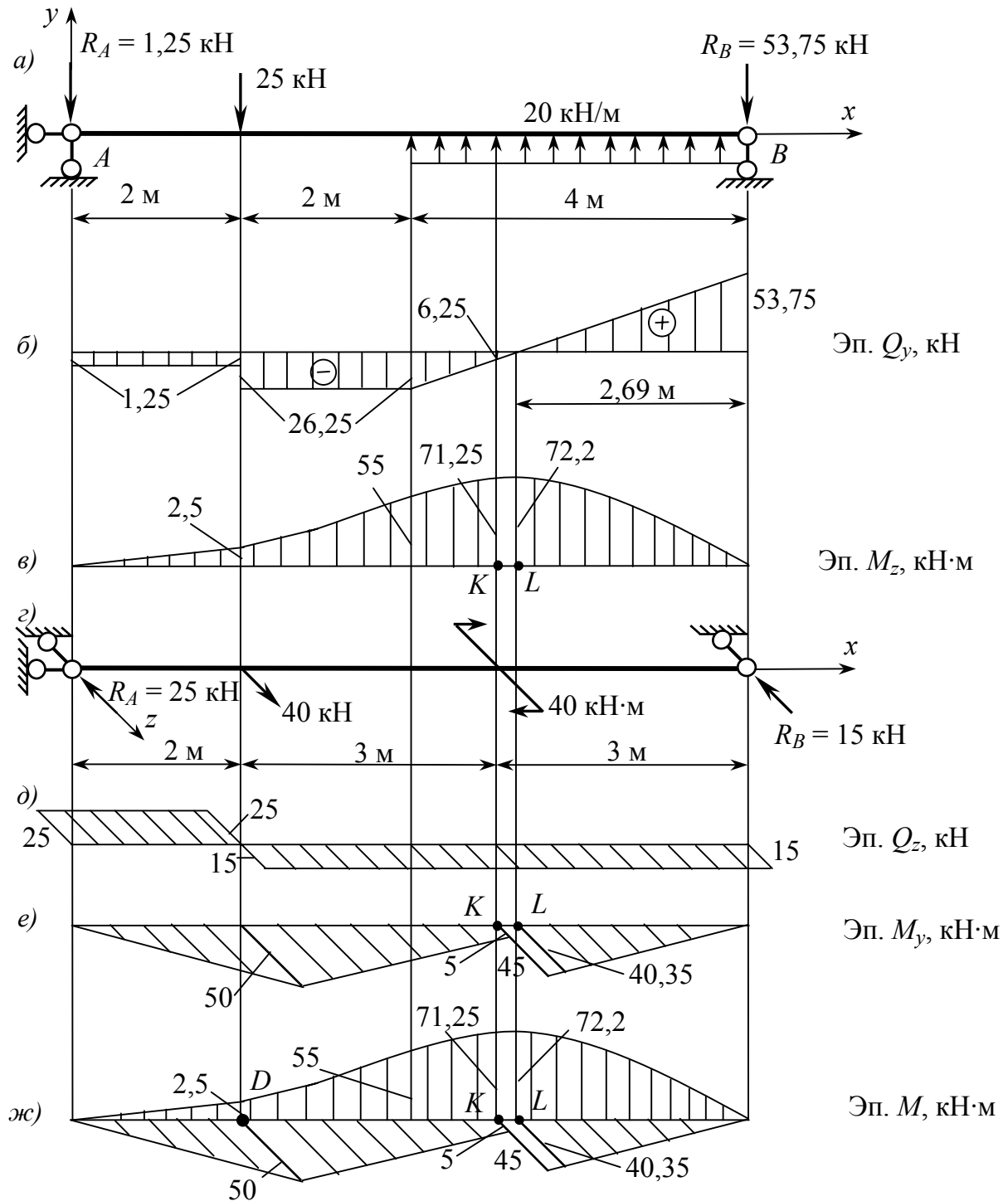


Рис. 5

3. Вычислим геометрические характеристики сечения (рис. 6):
- найдем положение центра тяжести;
 - найдем главные центральные моменты инерции.

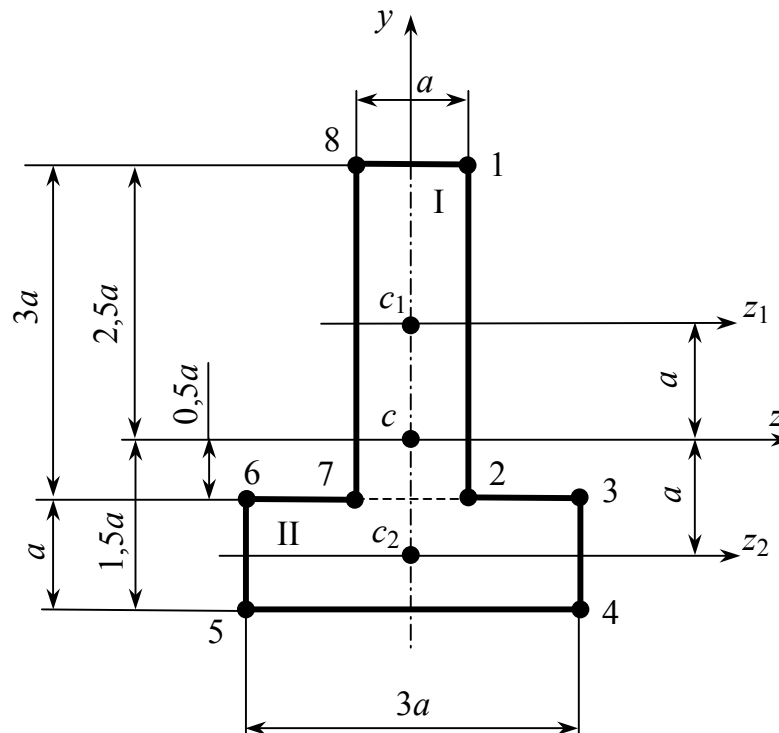


Рис. 6

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = \frac{3aa^3}{12} + \frac{a(3a)^3}{12} = 2,5a^4;$$

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} = \frac{a(3a)^3}{12} + a^2 3a^2 + \frac{3aa^3}{12} + a^2 3a^2 = .$$

4. Как следует из рис. 5, ж опасность будут представлять сечения L и сечения K , так как в них наибольшие и близкие к наибольшим изгибающие моменты. В сечении D наибольший момент M_y , но ему соответствует очень маленький момент M_z , поэтому сечение D рассматривать не будем.

Подсчитаем напряжения в характерных точках сечения L (рис. 5, ж). Изгибающие моменты в этом сечении равны:

$$M_z = 72,2 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_y = 40,35 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для правильной расстановки знаков в формуле (1) покажем действие

моментов M_y и M_z в сечении на рис. 7 (при этом будем помнить, что эпюра изгибающих моментов строится на растянутом волокне).

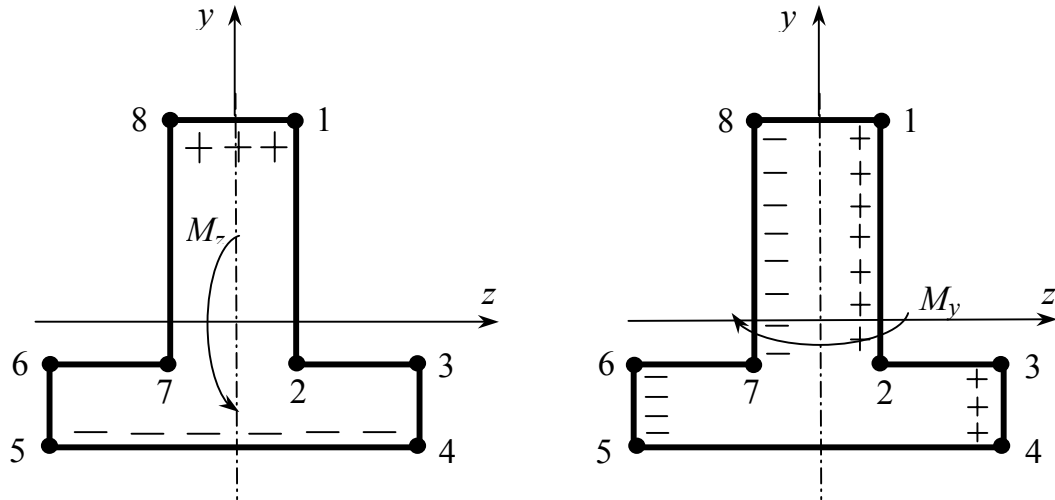


Рис. 7

В сечении L изгибающий момент M_z растягивает верхние волокна, сжимает нижние. Изгибающий момент M_y растягивает правые и сжимает левые волокна. Большие напряжения возникнут в точках, где знаки напряжений, вызванных моментами M_z и M_y совпадают, то есть в точках 1; 5 и 6.

$$\sigma_1 = + \left| \frac{M_z}{J_z} y_1 \right| + \left| \frac{M_y}{J_y} z_1 \right| = \frac{72,2}{8,5a^4} 2,5a + \frac{40,35}{2,5a^4} 0,5a = \frac{29,3}{a^3};$$

$$\sigma_5 = - \left| \frac{M_z}{J_z} y_5 \right| - \left| \frac{M_y}{J_y} z_5 \right| = - \frac{72,2}{8,5a^4} 1,5a - \frac{40,35}{2,5a^4} 1,5a = - \frac{37}{a^3};$$

$$\sigma_6 = - \left| \frac{M_z}{J_z} y_6 \right| - \left| \frac{M_y}{J_y} z_6 \right| = - \frac{72,2}{8,5a^4} 0,5a - \frac{40,35}{2,5a^4} 1,5a = - \frac{28,5}{a^3};$$

$$\sigma_{\max}^L = \sigma_5 = - \frac{37}{a^3}.$$

5. Рассмотрим сечение K (рис. 5,в) $M_z = 71,25 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и $M_y = 45 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Распределение знаков напряжений и потенциально опасные точки в сече-

нии K будут те же, что и в сечении L (рис. 7). Подсчитаем напряжения в точках 1, 5 и 6 сечения K :

$$\sigma_1 = +\frac{71,25}{8,5a^4}2,5a + \frac{45}{2,4a^4}0,5a = \frac{30}{a^3};$$

$$\sigma_5 = -\frac{71,25}{8,5a^4}1,5a - \frac{45}{2,5a^4}1,5a = -\frac{39,6}{a^3};$$

$$\sigma_6 = -\frac{71,25}{8,5a^4}0,5a - \frac{45}{2,5a^4}1,5a = -\frac{31,2}{a^3};$$

$$\sigma_{\max}^K = \sigma_5 = -\frac{39,6}{a^3};$$

$$\sigma_{\max}^K > \sigma_{\max}^L.$$

Следовательно, сечение K – опасное сечение.

Расчет на прочность

$$\sigma_{\max} \leq R$$

$$\frac{39,6 \cdot 10^3}{a^3} \leq 12 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \Rightarrow a \geq 0,15 \text{ м.}$$

Построим эпюры распределения нормальных напряжений по внешнему контуру сечения K .

$$\sigma_1 = \frac{3 \cdot 10^4}{(0,15)^3} = 8,9 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 8,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = -\left| \frac{M_z}{J_z} y_2 \right| + \left| \frac{M_y}{J_y} z_2 \right| = -\frac{71,25}{8,5a^4}0,5a + \frac{45}{2,5a^4}0,5a = \frac{4,8}{a^3} =$$

$$= \frac{0,48 \cdot 10^4}{(0,15)^3} = 1,4 \cdot 10^6 \frac{\text{H}}{\text{м}^2} = 1,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -\left| \frac{M_z}{J_z} y_3 \right| + \left| \frac{M_y}{J_y} z_3 \right| = -\frac{71,25}{8,5a^4} 0,5a + \frac{45}{2,5a^4} 1,5a = \frac{22,8}{a^3} =$$

$$= \frac{2,28 \cdot 10^4}{(0,15)^3} = 6,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = -\left| \frac{M_z}{J_z} y_4 \right| + \left| \frac{M_y}{J_y} z_4 \right| = -\frac{71,25}{8,5a^4} 1,5a + \frac{45}{2,5a^4} 1,5a = \frac{14,4}{a^3} =$$

$$= \frac{1,44 \cdot 10^4}{(0,15)^3} = 4,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = -\frac{39,6}{a^3} = -\frac{3,96 \cdot 10^4}{(0,15)^3} = -11,7 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = -\frac{31,2}{a^3} = -\frac{3,12 \cdot 10^4}{(0,15)^3} = -9,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_7 = -\left| \frac{M_z}{J_z} y_7 \right| - \left| \frac{M_y}{J_y} z_4 \right| = -\frac{71,25}{8,5a^4} 0,5a - \frac{45}{2,5a^4} 0,5a = -\frac{13,2}{a^3} =$$

$$= -\frac{1,32 \cdot 10^4}{(0,15)^3} = -3,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_8 = +\left| \frac{M_z}{J_z} y_8 \right| - \left| \frac{M_y}{J_y} z_8 \right| = \frac{71,25}{8,5a^4} 2,5a - \frac{45}{2,5a^4} 0,5a = \frac{12}{a^3} =$$

$$= \frac{1,2 \cdot 10^4}{(0,15)^3} = 3,5 \text{ МПа}.$$

По полученным данным построим эпюры σ по внешнему контуру сечения (рис. 8). Если перенести с эпюры σ на сечение точки, где напряжения равны нулю, и соединить эти точки между собой, мы получим прямую, проходящую через центр тяжести сечения, это нулевая линия – линия, где нормальные напряжения равны нулю.

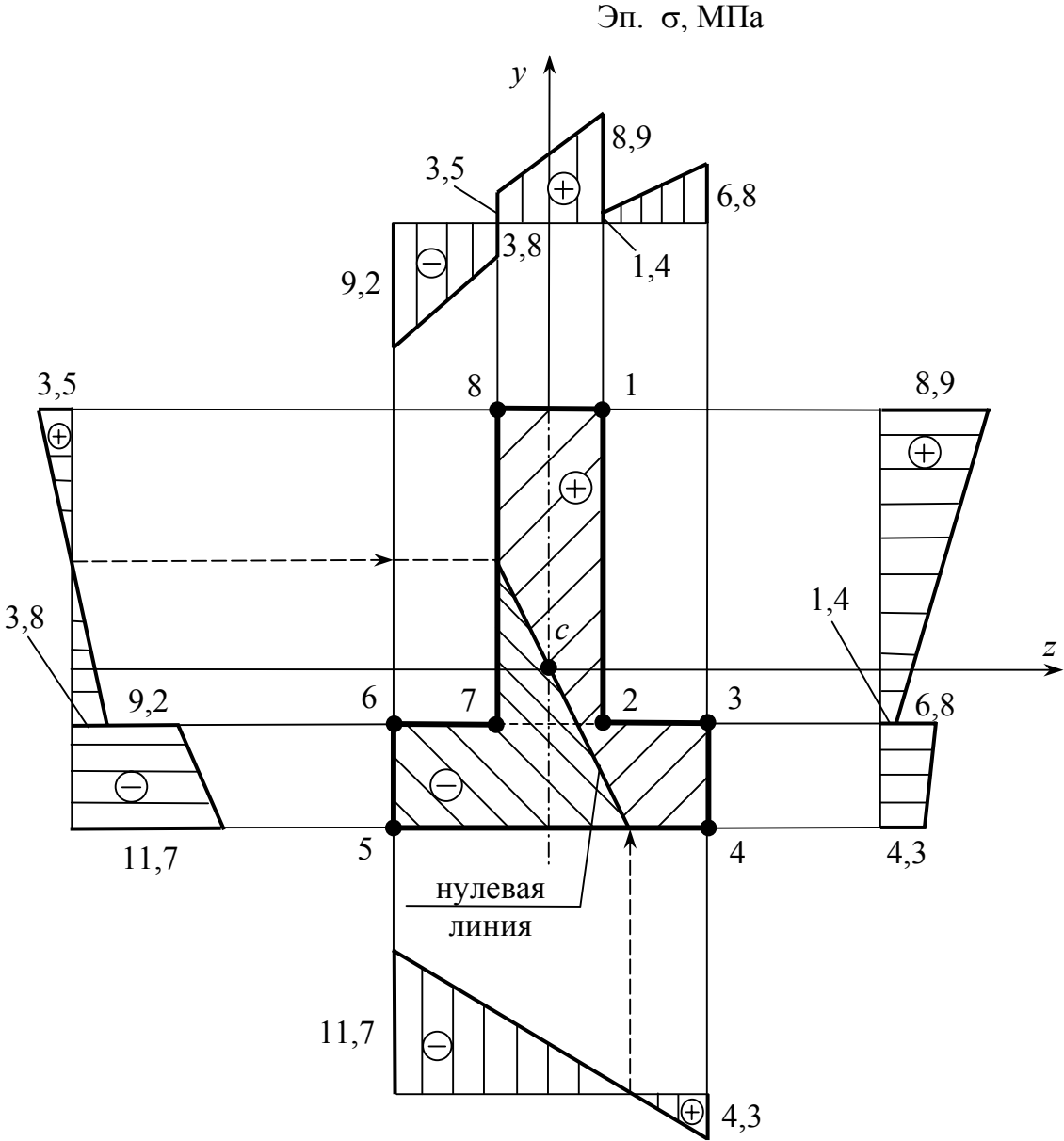


Рис. 8

Задание 2

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

В соответствии с шифром для колонны, испытывающей внецентренное сжатие (рис. 9) с поперечным сечением (см. рис. 2) и нагрузкой (табл. 3) требуется:

1. Построить эпюры внутренних силовых факторов и подобрать параметр a поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям. Расчетные сопротивления материала: $R_{сжат} = 8 \text{ МПа}$; $R_{раст} = 0,5 \text{ МПа}$.
2. Показать распределение нормальных напряжений в поперечном сечении колонны.
3. Построить ядро сечения.

Таблица 3

№ п/п	I		II	
	F , кН	$\frac{e_y}{h}$	Тип сечения	$\frac{e_z}{b}$
1	60	+ 0,10	10	+ 0,30
2	65	+ 0,12	9	+ 0,32
3	70	+ 0,14	8	+ 0,34
4	75	+ 0,16	7	+ 0,35
5	80	+ 0,18	6	+ 0,36
6	85	- 0,20	5	- 0,40
7	90	- 0,22	4	- 0,10
8	95	- 0,24	3	- 0,12
9	100	- 0,26	2	- 0,14
10	105	- 0,28	1	- 0,15
11	110	+ 0,30	20	- 0,16
12	115	+ 0,32	19	- 0,18
13	120	+ 0,34	18	- 0,20
14	125	+ 0,36	17	- 0,22
15	130	+ 0,38	16	- 0,24
16	135	- 0,40	15	+ 0,25
17	140	- 0,15	14	+ 0,26
18	145	- 0,25	13	+ 0,28
19	150	- 0,35	12	+ 0,13
20	155	- 0,13	11	+ 0,38

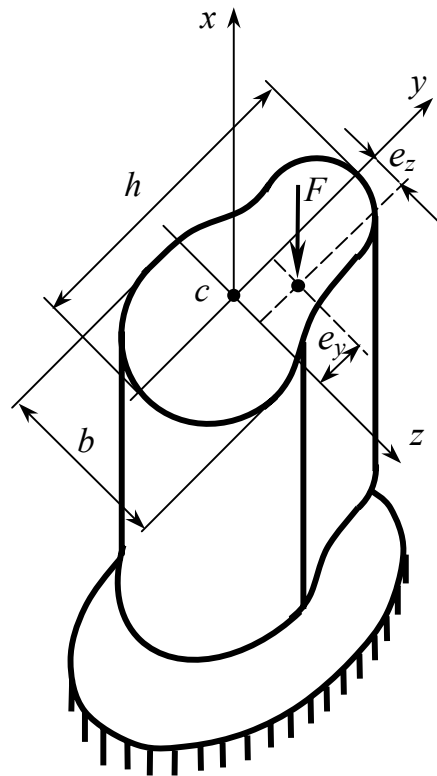


Рис. 9

Указания к решению задания 2

Внецентренным растяжением или сжатием называется такой вид деформации, когда в поперечном сечении стержня одновременно действуют продольная растягивающая или сжимающая сила и изгибающий момент. На рис. 10, а изображен стержень, в поперечном сечении которого одновременно действуют продольная сила N и изгибающий момент M , составляющие которого относительно главных осей инерции сечения равны M_z и M_y . Продольная сила N и моменты M_z и M_y могут рассматриваться как результат приложенной силы $F = N$ (рис. 10, б). Именно поэтому случай одновременного действия в поперечном сечении продольной силы и изгибающего момента называют внецентренным растяжением (при растягивающей продольной силе) или сжатием (при сжимающей силе). Координаты e_y и e_z точки P приложения силы F называются эксцентриситетами этой силы относительно главных центральных осей инерции z и y , точку P – центром давления или полюсом. Изгибающие моменты в сечении равны:

$$M_z = Fe_y, \quad M_y = Fe_z.$$

Нормальное напряжение в произвольной точке сечения с координатами y и z равно:

$$\sigma = \pm \sigma_N \pm \sigma_{M_z} \pm \sigma_{M_y}.$$

Знак "+" или "-" перед слагаемыми выбирается в зависимости от того растяжение или сжатие возникает в точке поперечного сечения под действием соответствующих силовых факторов. Растягивающие напряжения положительные, сжимающие – отрицательны, то есть

$$\sigma = \pm \left| \frac{N}{A} \right| \pm \left| \frac{M_z}{J_z} y \right| \pm \left| \frac{M_y}{J_y} z \right|. \quad (2)$$

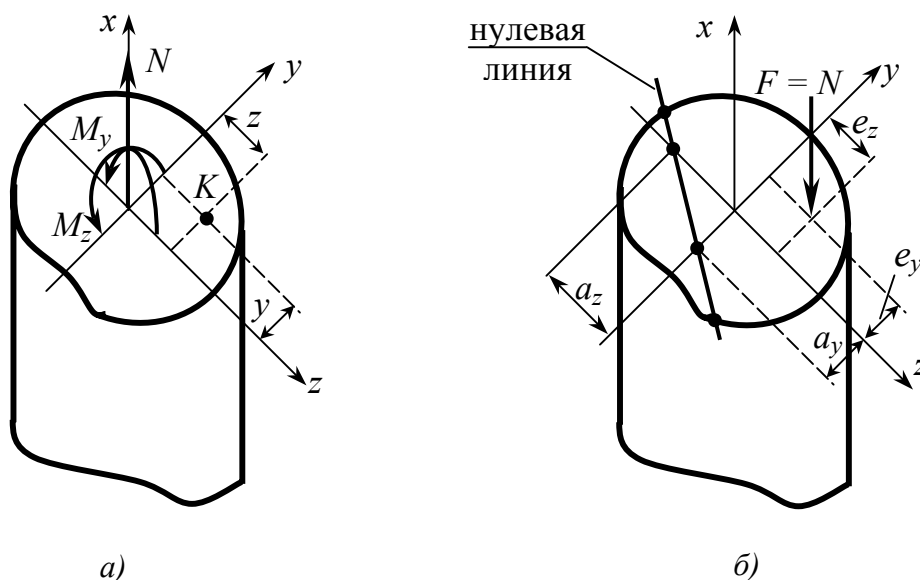


Рис. 10

Максимальное нормальное напряжение, возникающее в сечении стержня не должно превышать расчетного сопротивления. Если стержень выполнен из материала с разными расчетными сопротивлениями на растяжение и на сжатие, то условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max}^+ \leq R_{\text{раст}} \quad \text{и} \quad \left| \sigma_{\min}^- \right| \leq R_{\text{сж}}.$$

Нулевая линия при внецентренном растяжении или сжатии не проходит через центр тяжести сечения. Ее положение легко задать в отрезках,

отсекаемых нулевой линией на главных осях y и z :

$$\begin{cases} a_y = -\frac{i_z^2}{e_y} \\ a_z = -\frac{i_y^2}{e_z} \end{cases}, \quad (3)$$

где $i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$ и $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$ - радиусы инерции поперечного сечения стержня относительно главных центральных осей инерции z и y .

С одной стороны от нулевой линии в поперечном сечении возникают растягивающие нормальные напряжения, с другой – сжимающие. Как видно из формул (3) нулевая линия и полюс находятся в противоположных четвертях системы координат и, чем ближе полюс к центру тяжести сечения, тем дальше нулевая линия отодвигается от этого центра. Таким образом, можно найти положение полюса, при котором нулевая линия выйдет за пределы сечения, а это значит, что нормальные напряжения в этом сечении будут иметь один знак.

Геометрическое место точек вокруг центра тяжести сечения, попав в которое сила F вызовет в этом сечении нормальные напряжения одного знака, называется ядром сечения.

Координаты точек ядра сечения определяются при помощи следующих формул:

$$\begin{cases} e_z = -\frac{i_y^2}{a_z} \\ e_y = -\frac{i_z^2}{a_y} \end{cases}, \quad (4)$$

где a_z и a_y – отрезки, отсекаемые нулевыми линиями, на осях z и y , проходящими по касательным к сечению.

Пример расчета

Задача № 1. Колонна с поперечным сечением, показанным на рис. 11, сжимается силой $F = 10$ кН, приложенной в точке с координатами $e_y = 0,16h$; $e_z = -0,5b$. Найти параметр a поперечного сечения, если

$R_{\text{раст}} = 0,5 \text{ МПа}$, $R_{\text{сж}} = 8 \text{ МПа}$. Построить эпюры внутренних силовых факторов, эпюры распределения нормальных напряжений по сечению, а также построить ядро сечения.

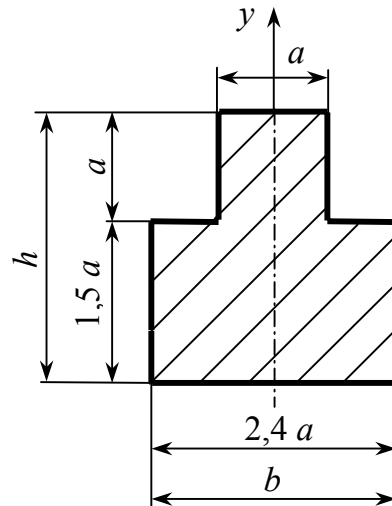


Рис. 11

Решение:

1. Вычислим геометрические характеристики сечения (см. рис. 12). Сначала определяем положение центра тяжести сечения $z_c = 0$, $y_c = 1,02 a$.

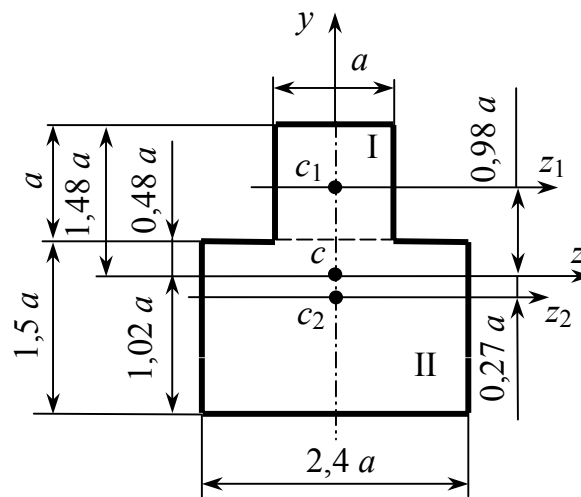


Рис. 12

$$A = aa + 1,5a \cdot 2,4a = 4,6a^2;$$

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} = \frac{a^4}{12} + \frac{1,5a(2,4a)^3}{12} = 1,81a^4;$$

$$J_z = J_z^I + J_z^{II} = \frac{a^4}{12} + (0,98a)^2 a^2 + \frac{2,4a(1,5a)^3}{12} + (0,27a)^2 3,6a^2 = 1,98a^4;$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{1,81a^4}{4,6a^2} = 0,39a^2$$

и

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{1,98a^4}{4,6a^2} = 0,43a^2.$$

Покажем сечение колонны с приложенной в нем силой F (точка P) (рис. 13). Координаты точки приложения силы:

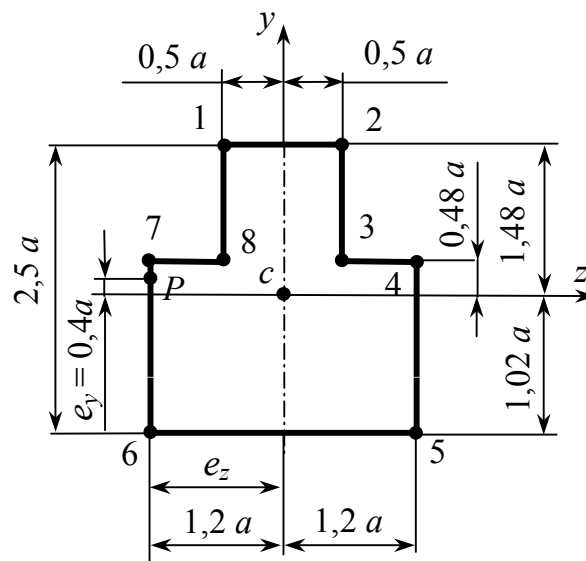


Рис. 13

$$e_y = 0,16 \cdot 2,5a = 0,4a$$

и

$$e_z = -0,5 \cdot 2,4a = -1,2a.$$

2. Определим внутренние силовые факторы:

$$N = -F = -160 \text{ кН};$$

$$M_z = Fe_y = 160 \cdot 0,4a = 64a;$$

$$M_y = Fe_z = 160 \cdot 1,2a = 192a.$$

Построим эпюры этих факторов (см. рис. 14).

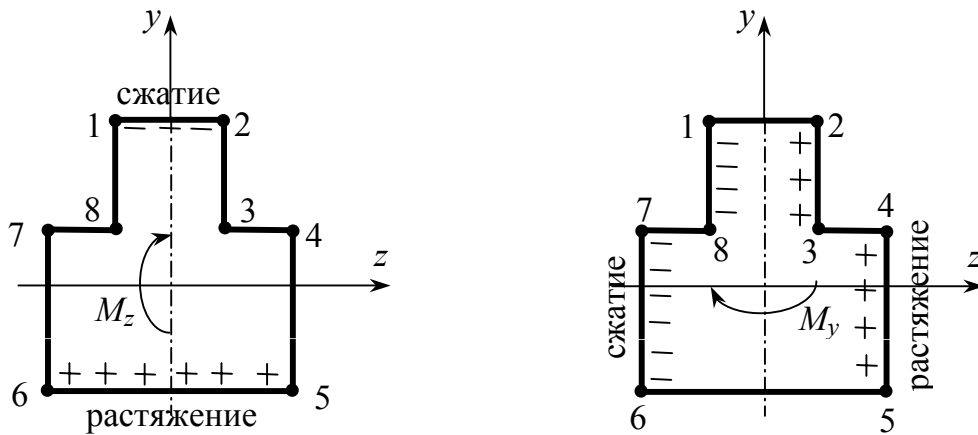


Рис. 14

3. По формуле (2) найдем напряжения в характерных точках поперечного сечения. Для правильной расстановки знаков покажем действие изгибающих моментов (см. рис. 15).

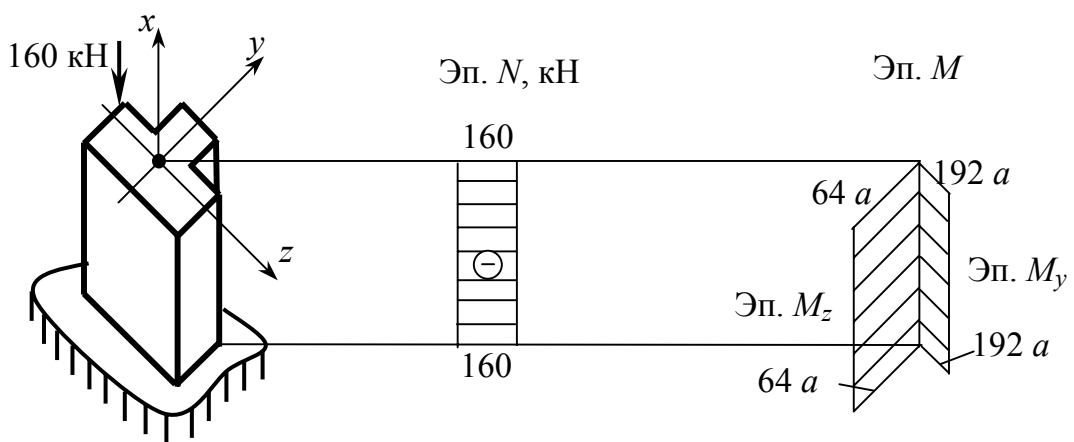


Рис. 15

$$\sigma_1 = -\left|\frac{N}{A}\right| - \left|\frac{M_z}{J_z} y_1\right| - \left|\frac{M_y}{J_y} z_1\right| = -\frac{160}{4,6a^2} - \frac{64a}{1,98a^4} 1,48a - \frac{192a}{1,81a^4} 0,5a = -\frac{135,66}{a^2};$$

$$\sigma_2 = -\left|\frac{N}{A}\right| - \left|\frac{M_z}{J_z} y_2\right| + \left|\frac{M_y}{J_y} z_2\right| = -\frac{160}{4,6a^2} - \frac{64a}{1,98a^4} 1,48a + \frac{192a}{1,81a^4} 0,5a = -\frac{25,98}{a^2};$$

$$\sigma_3 = -\left|\frac{N}{A}\right| - \left|\frac{M_z}{J_z} y_3\right| + \left|\frac{M_y}{J_y} z_3\right| = -\frac{160}{4,6a^2} - \frac{64a}{1,98a^4} 0,48a + \frac{192a}{1,81a^4} 0,5a = \frac{2,74}{a^2};$$

$$\sigma_4 = -\left|\frac{N}{A}\right| - \left|\frac{M_z}{J_z} y_4\right| + \left|\frac{M_y}{J_y} z_4\right| = -\frac{160}{4,6a^2} - \frac{64a}{1,98a^4} 0,48a + \frac{192a}{1,81a^4} 1,2a = \frac{77}{a^2};$$

$$\sigma_5 = -\left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{J_z} y_5\right| + \left|\frac{M_y}{J_y} z_5\right| = -\frac{160}{4,6a^2} + \frac{64a}{1,98a^4} 1,02a + \frac{192a}{1,81a^4} 1,2a = \frac{125,5}{a^2};$$

$$\sigma_6 = -\left|\frac{N}{A}\right| + \left|\frac{M_z}{J_z} y_6\right| - \left|\frac{M_y}{J_y} z_6\right| = -\frac{160}{4,6a^2} + \frac{64a}{1,98a^4} 1,02a - \frac{192a}{1,81a^4} 1,2a = -\frac{129,11}{a^2};$$

$$\sigma_7 = -\left|\frac{N}{A}\right| - \left|\frac{M_z}{J_z} y_7\right| - \left|\frac{M_y}{J_y} z_7\right| = -\frac{160}{4,6a^2} - \frac{64a}{1,98a^4} 0,48a - \frac{192a}{1,81a^4} 1,21a =$$

$$= -\frac{177,59}{a^2};$$

$$\sigma_8 = -\left|\frac{N}{A}\right| - \left|\frac{M_z}{J_z} y_8\right| - \left|\frac{M_y}{J_y} z_8\right| = -\frac{160}{4,6a^2} - \frac{64a}{1,98a^4} 0,48a - \frac{192a}{1,81a^4} 0,5a =$$

$$= -\frac{103,34}{a^2}.$$

Опасной точкой в сжатой зоне является т. 7, в растянутой зоне – т. 5.

4. Сделаем расчет на прочность:

$$\sigma_{\max}^{(-)} = \sigma_7 \leq R_{\text{сж}},$$

$$\frac{177,59 \text{ кН}}{a^2} \leq 8 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2,$$

$$a \geq 0,15 \text{ м.}$$

$$\sigma_{\max}^{(+)} = \sigma_5 \leq R_{\text{раст}},$$

$$\frac{125,5 \text{ кН}}{a^2} \leq 0,5 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2,$$

$$a \geq 0,50 \text{ м.}$$

Из полученных двух значений a выбираем большее.

Принимаем $a = 0,50 \text{ м}$.

5. Определим внутренние силовые факторы с учетом найденного параметра a :

$$N = -160 \text{ кН},$$

$$M_z = 64a = 64 \cdot 0,5 = 32 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_y = 192a = 192 \cdot 0,5 = 96 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

6. Для построения эпюр распределения нормальных напряжений в поперечном сечении вычисляем σ с учетом параметра a :

$$\sigma_1 = -\frac{135,66}{a^2} = -\frac{135,66}{(0,5)^2} = -542,64 \text{ кН/м}^2 = -0,54 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = -\frac{29,58}{a^2} = -\frac{29,58}{0,5^2} = -118,32 \text{ кН/м}^2 = -0,12 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{2,74}{a^2} = \frac{2,74}{0,5^2} = 10,96 \text{ кН/м}^2 = 0,01 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{77}{a^2} = \frac{77}{0,5^2} = 308 \text{ кН/м}^2 = 0,31 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = \frac{125,5}{a^2} = \frac{125,5}{0,5^2} = 502 \text{ кН/м}^2 = 0,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = -\frac{129611}{a^2} = -\frac{129611}{0,5^2} = -516,44 \text{ кН/м}^2 = -0,52 \text{ МПа};$$

$$\sigma_7 = -\frac{177,59}{a^2} = -\frac{177,59}{0,5^2} = -710,36 \text{ кН/м}^2 = -0,71 \text{ МПа};$$

$$\sigma_8 = -\frac{103,34}{a^2} = -\frac{103,34}{0,5^2} = -413,36 \text{ кН/м}^2 = -0,41 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру σ (МПа) (см. рис. 16).

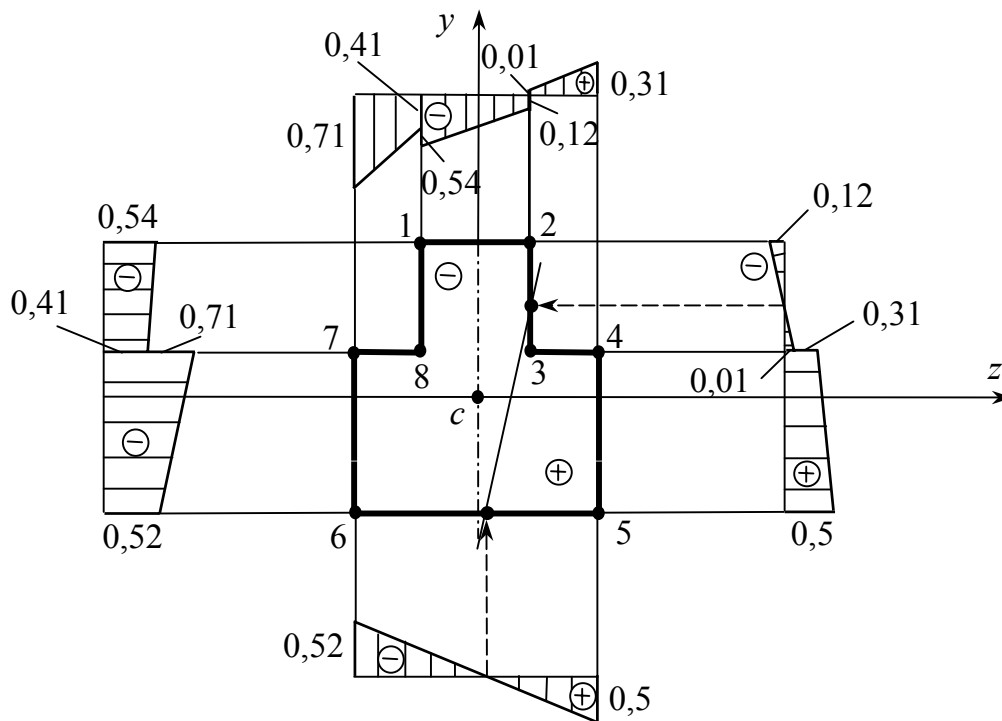


Рис. 16

7. Для построения ядра сечения будем последовательно проводить касательные к этому сечению, считая, что они являются нулевыми линиями (см. рис. 17).

Координаты точек ядра сечения будем определять по формуле (4).

Нулевая линия I:

1. Отрезки, отсекаемые этой нулевой линией на осях y и z :

$$a_y = 0,74 \text{ м}, a_z = \infty.$$

Вычислим квадраты радиусов инерции:

$$i_z^2 = 0,43 \cdot 0,5^2 = 0,11 \text{ м}^2, \quad i_y^2 = 0,39 \cdot 0,5^2 = 0,1 \text{ м}^2.$$

Вычислим координаты точки 1 ядра сечения, соответствующей нулевой линии I.

$$e_y = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{0,11}{0,74} = -0,15 \text{ м}, \quad e_z = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{0,1}{\infty} = 0.$$

Нулевая линия II:

Чтобы найти отрезки, отсекаемые этой нулевой линией на осях y и z , необходимо рассмотреть подобие треугольников ABD , DEG , GHK .

$$a_y = 1,1 \text{ м}, a_z = 0,77 \text{ м}.$$

Найдем координаты точки 2 ядра сечения:

$$l_y = -\frac{0,11}{1,1} = -0,1 \text{ м}, \quad l_z = -\frac{0,1}{0,77} = -0,13 \text{ м}.$$

Нулевая линия III: $a_y = \infty$, $a_z = 0,6 \text{ м}$.

Найдем координаты точки 3:

$$e_y = \frac{0,11}{\infty} = 0,$$

$$e_z = -\frac{0,1}{0,6} = -0,17 \text{ м}.$$

Нулевая линия IV: $a_y = -0,51 \text{ м}$, $a_z = \infty$.

Найдем координаты точки 4:

$$e_y = \frac{0,11}{0,51} = 0,22 \text{ м},$$

$$e_z = -\frac{0,1}{\infty} = 0.$$

Точки 5 и 6 симметричны точкам 3 и 2.

Соединив последовательно получившиеся точки, получим ядро сечения (рис. 17).

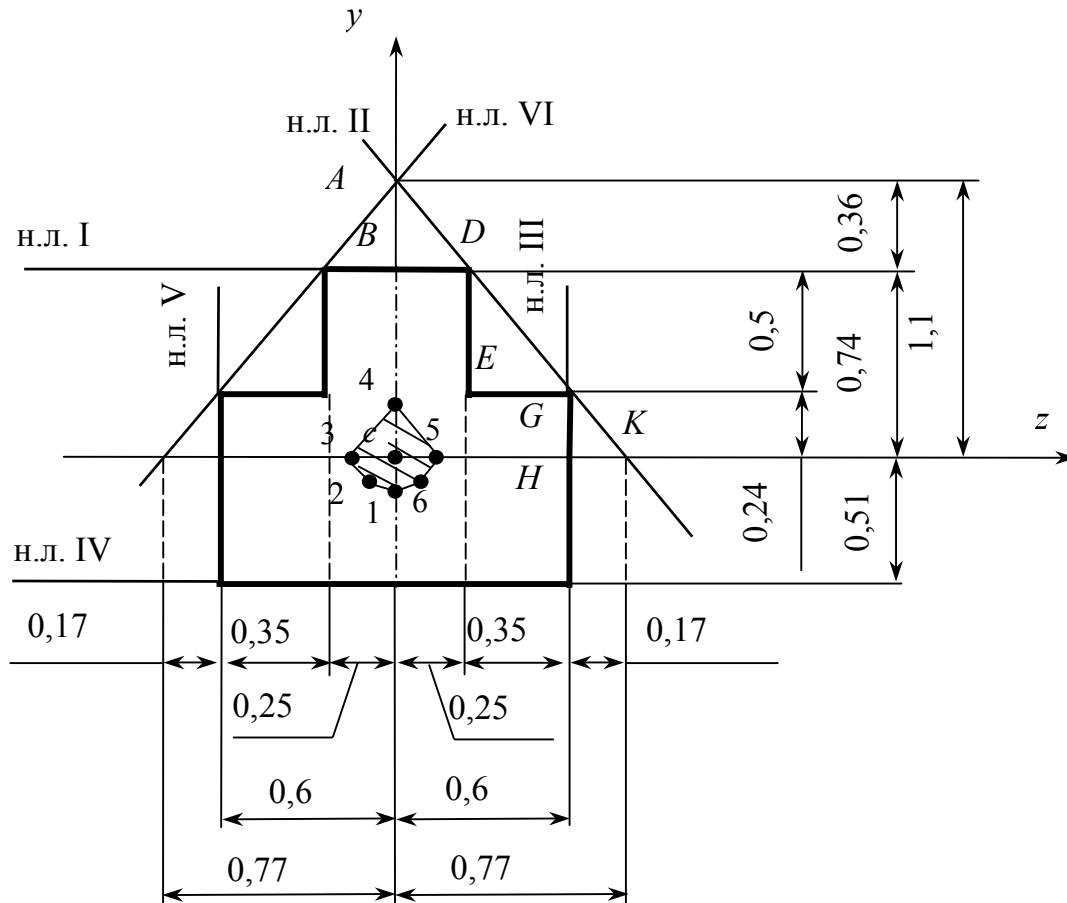


Рис. 17

Задание 3

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ

В соответствии с шифром для балки (см. рис. 18) с размерами и нагрузками, взятыми из табл. 4 и 5, формой поперечного сечения (см. рис. 19) требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов, используя уравнение трех моментов.
2. Построить эпюру поперечных сил.
3. Из расчета на прочность по нормальным напряжениям подобрать размеры поперечного сечения. Расчетное сопротивление $R = 210$ МПа.

Таблица 4

№ п/п	$l_1, \text{ м}$	$l_2, \text{ м}$	$l_3, \text{ м}$	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$d, \text{ м}$
1	5,7	3,3	3,0	1,0	1,5	2,0	2,2
2	6,0	3,6	3,3	1,2	1,6	2,2	2,0
3	3,0	3,9	3,6	1,4	1,8	1,0	1,2
4	3,3	4,2	3,9	1,5	2,0	1,2	1,0
5	3,6	4,5	4,0	1,6	2,2	1,5	1,8
6	3,9	4,8	4,2	1,8	1,0	1,8	1,5
7	4,2	5,1	4,5	2,0	1,2	1,8	2,4
8	4,5	5,4	4,8	2,2	1,4	1,6	2,0
9	4,8	5,7	5,0	1,0	1,5	2,0	1,6
10	5,0	6,0	5,1	1,2	1,6	1,6	1,5
11	5,1	3,3	5,4	1,4	1,8	1,8	1,4
12	5,4	3,6	5,7	1,5	2,0	2,0	2,2
13	5,7	3,9	6,0	1,6	2,2	2,2	1,5
14	6,0	4,2	3,0	1,8	1,0	1,5	12,2
15	4,5	4,5	3,3	2,0	1,2	1,2	1,0
16	4,0	4,8	3,6	2,2	1,4	1,4	1,2
17	5,7	5,1	3,9	1,0	1,5	1,5	1,8
18	3,0	5,4	4,0	1,2	1,6	1,8	1,4
19	4,2	5,7	4,2	1,4	1,8	1,4	2,0
20	3,6	6,0	4,5	1,5	2,0	2,0	2,4
21	4,8	3,0	4,8	1,6	2,2	1,0	1,2
22	3,3	3,3	5,0	1,8	1,0	1,2	1,0
23	5,1	3,6	5,1	2,0	1,2	2,0	2,2
24	5,4	3,9	5,4	2,2	1,4	2,2	2,5

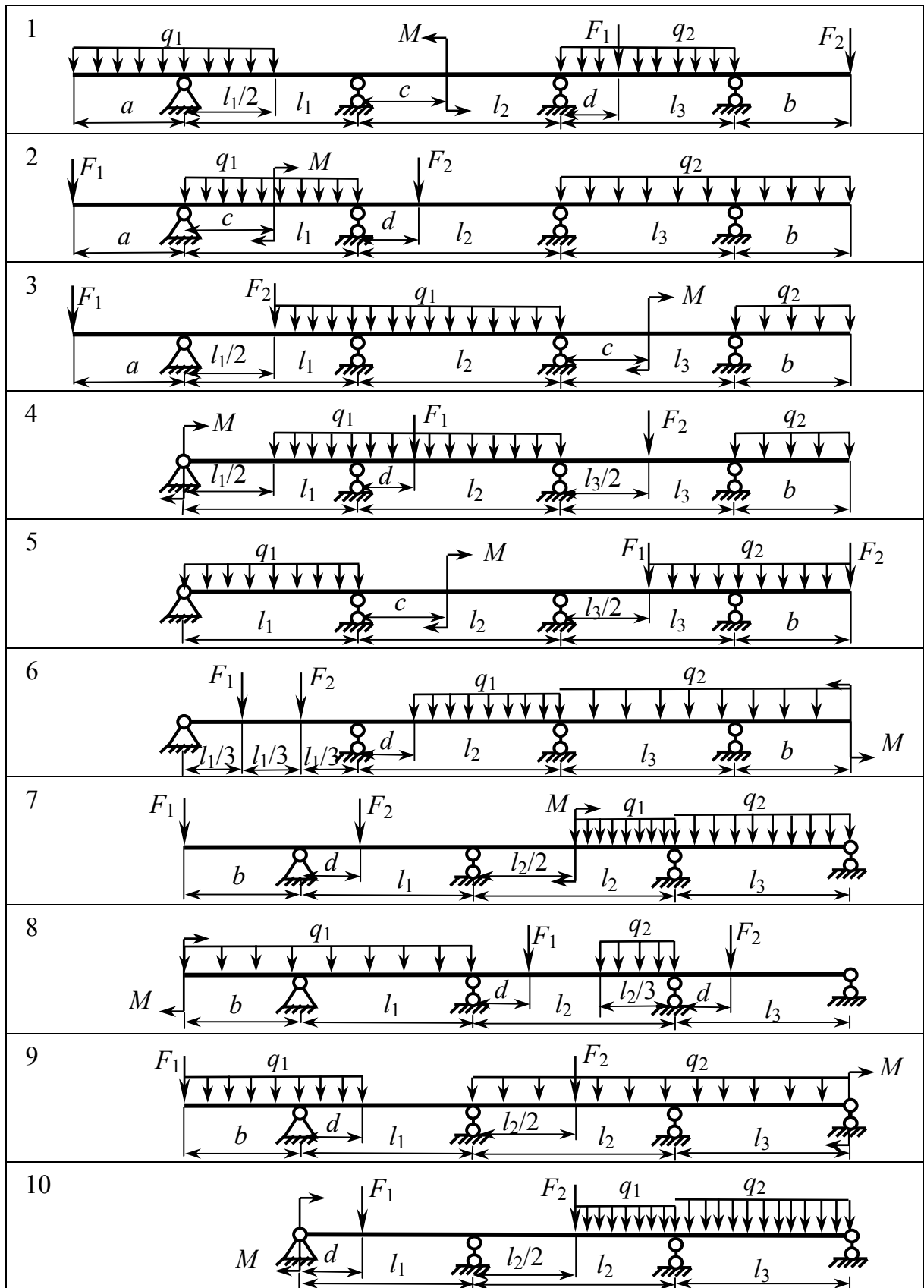
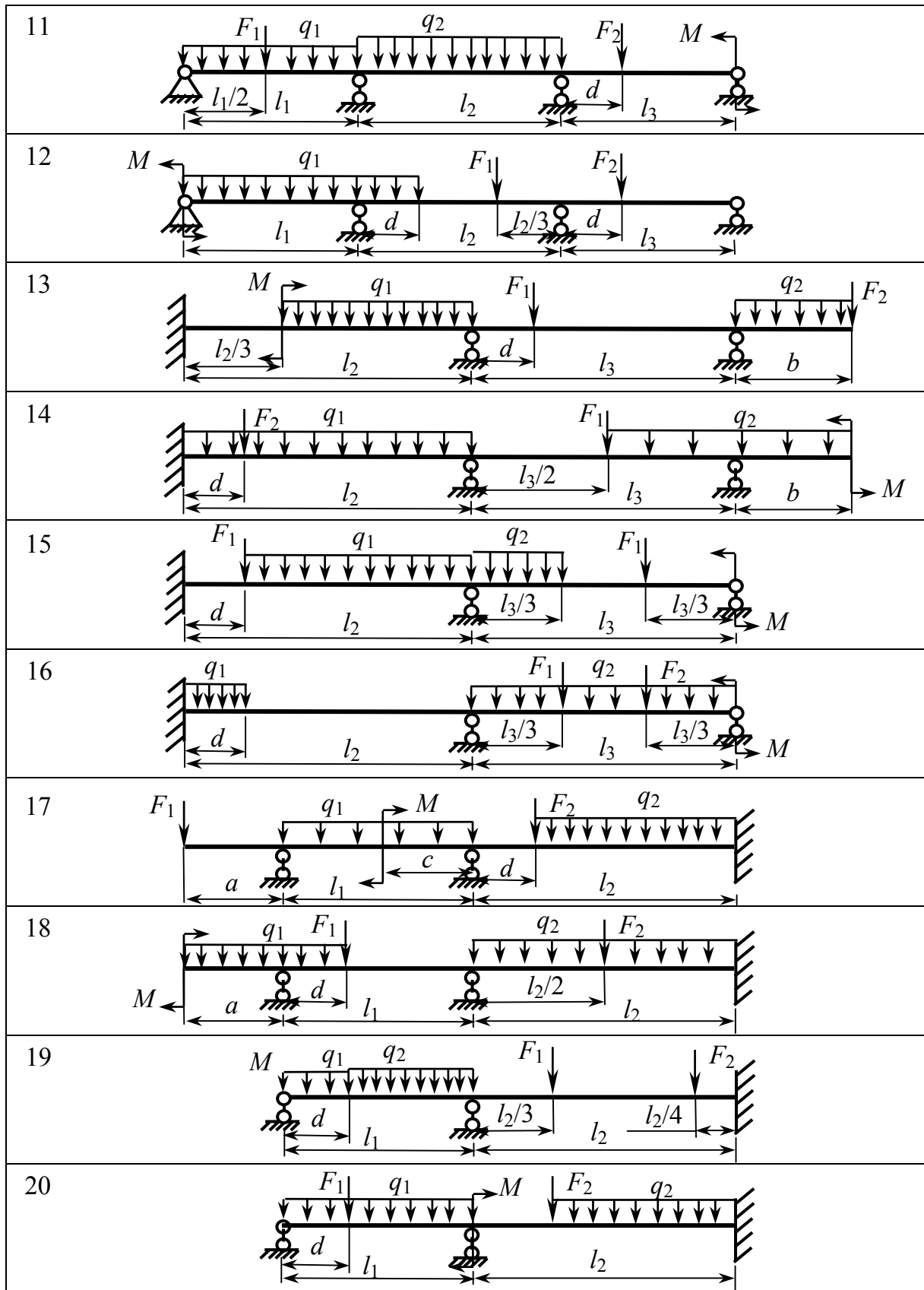


Рис. 18



Окончание рис. 18

Таблица 5

№ п/п	Форма сечения	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	F_1 , кН	F_2 , кН	M , кН·м
1	1	10	12	-15	30	8
2	2	12	14	18	23	-8
3	3	14	16	20	26	10
4	4	16	18	25	24	-10
5	5	18	20	30	22	12
6	1	20	10	22	20	-12
7	2	10	22	24	18	14
8	3	12	24	-10	16	-14
9	4	14	26	-12	14	16
10	5	16	28	-14	15	-16
11	1	18	30	-16	12	18
12	2	20	10	18	20	-18
13	3	22	12	20	10	20
14	4	24	14	22	12	-20
15	5	26	16	24	14	22
16	1	28	18	26	16	-22
17	2	30	20	28	18	24
18	3	26	10	30	20	-24
19	4	24	12	-10	22	26
20	5	22	14	-12	24	-26

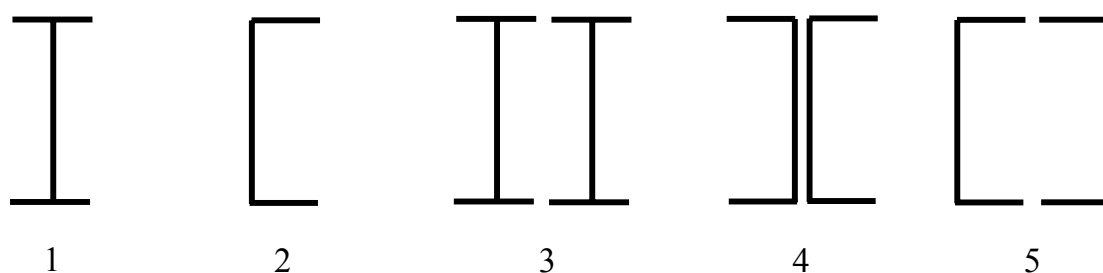


Рис. 19

Указания к решению задания 3

Неразрезными называются балки, не имеющие промежуточных врезных шарниров. Такие балки широко применяются в строительстве и являются статически неопределимыми.

Степень статической неопределимости неразрезной балки L находится по формуле

$$L = C_0 - 3, \quad (5)$$

где C_0 – число опорных связей (стержней).

Для решения задачи из статически неопределимой балки (рис. 20, а) образуем статически определимую. Она получается путем введения шарниров в опорные сечения. Такая балка называется основной системой (рис. 20, б). В качестве неизвестных будут выступать опорные изгибающие моменты. Эти моменты положительны, если они растягивают нижние волокна. Опоры принято нумеровать слева направо, обозначая крайнюю левую номером "ноль", номер пролета определяется номером принадлежащей ему правой опоры.

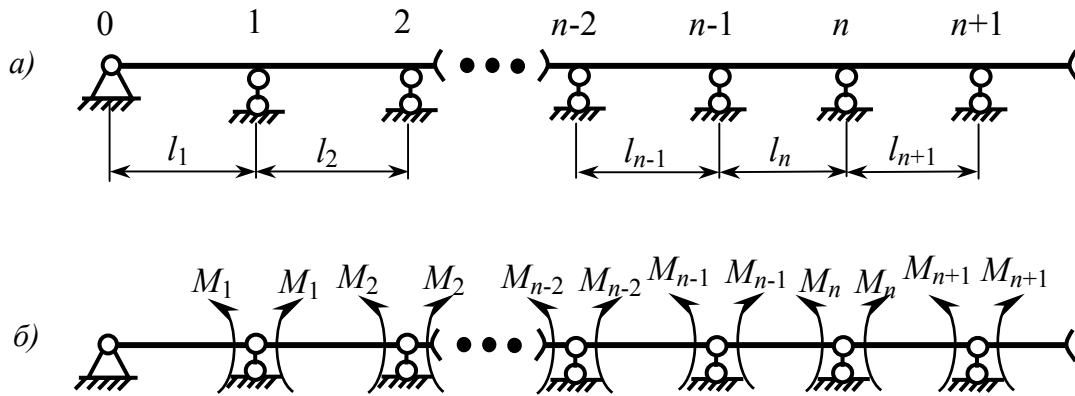


Рис. 20

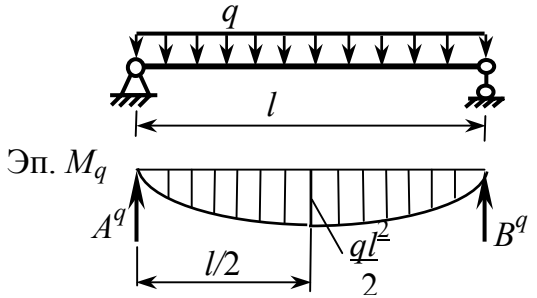
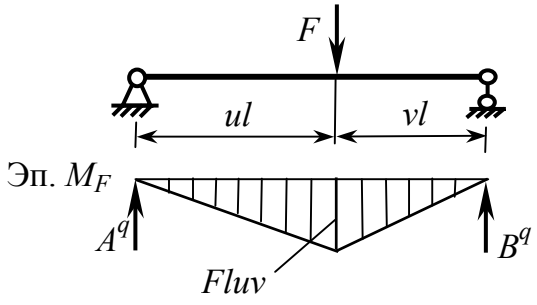
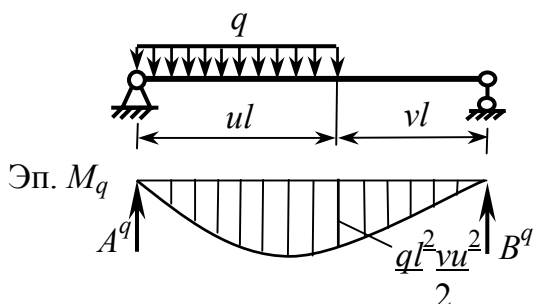
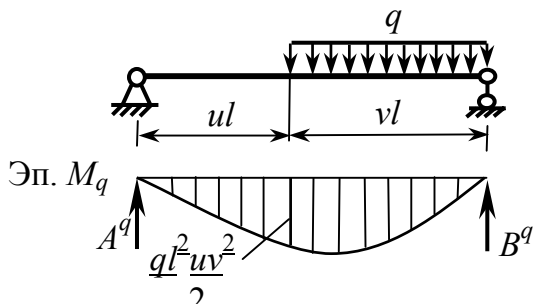
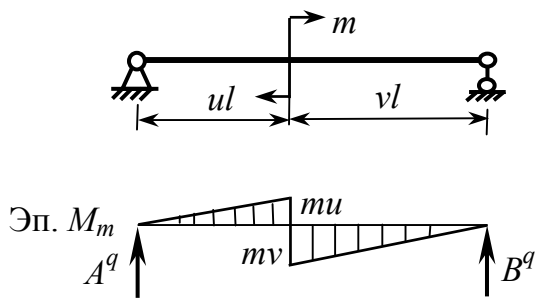
Уравнение трех моментов составляется для неизвестного опорного момента M_n и имеет вид:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6(B_n^\Phi + A_{n+1}^\Phi), \quad (6)$$

где B_n^Φ - фиктивная реакция правой опоры n -ого пролета, A_{n+1}^Φ - фиктивная реакция левой опоры $(n + 1)$ -ого пролета.

Фиктивные реакции определяются от фиктивной нагрузки, представляющей собой эпюру пролетных моментов ($M_{\text{прол}}$) в основной системе от заданной нагрузки. Фиктивные реакции для наиболее часто встречающихся нагрузок приведены в табл. 6.

Таблица 6

Схема нагрузки	A^Φ	B^Φ
 <p>Эп. M_q</p>	$\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$
 <p>Эп. M_F</p>	$\frac{Fl^2uv(1+v)}{6}$	$\frac{Fl^2uv(1+u)}{6}$
 <p>Эп. M_q</p>	$\frac{ql^3u^2(2-u)^2}{24}$	$\frac{ql^3u^2(2-u^2)}{24}$
 <p>Эп. M_q</p>	$\frac{ql^3v^2(2-v^2)}{24}$	$\frac{ql^3v^2(2-v)^2}{24}$
 <p>Эп. M_m</p>	$\frac{-ml(1-3v^2)}{6}$	$\frac{ml(1-3u^2)}{6}$

Для расчета неразрезной балки необходимо составить столько уравнений, сколько возникает неизвестных опорных моментов. Чтобы записать уравнение 3-х моментов, достаточно в формуле (6) дать индексу n значение номеров опор, где возникают неизвестные опорные моменты.

Если в крайней опоре балки есть заделка (рис. 21, а), то в основной системе она заменяется дополнительным пролетом бесконечно малой длины (рис. 21, б). Консольные части балки условно отбрасываются, а их действие заменяют известными моментами и поперечными силами (рис. 21, б). Момент M_0 будет равен: $M_0 = -F_a$; $Q = -F$; $M_3 = 0$. Составив систему уравнений 3-х моментов и решив ее, найдем опорные моменты.

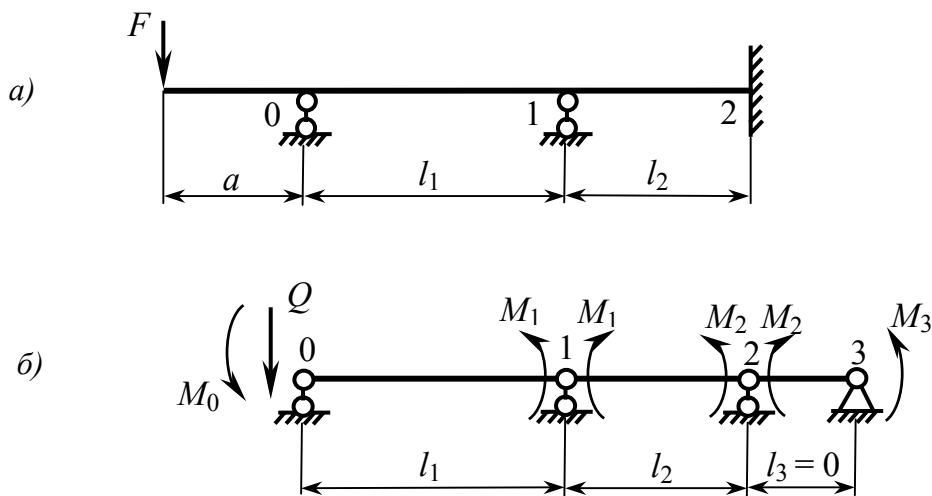


Рис. 21

Эпюру изгибающих моментов для заданной балки можно построить путем геометрического сложения эпюры пролетных моментов от внешней нагрузки с эпюрой от опорных моментов в основной системе.

Эпюру поперечных сил можно построить, используя окончательную эпюру изгибающих моментов. Для этого ее разбивают на участки с однородной функцией M . Формула для определения поперечной силы на таком участке имеет вид:

$$Q = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l_i} \pm \frac{q_i l_i}{2}. \quad (7)$$

В этой формуле значения моментов берутся со своими знаками. Знак "+" перед вторым слагаемым ставится при определении поперечной силы в левом сечении участка. Для правого сечения берется знак "-". Распределенная нагрузка q_i считается положительной, если она направлена сверху вниз.

Опорная реакция на любой опоре n может быть найдена как разность поперечных сил слева и справа от опоры n

$$R_n = Q_{n+1} - Q_n \quad (8)$$

После определения опорных реакций необходимо сделать статическую проверку.

Пример расчета

Задача № 1. Для балки, показанной на рис. 22 построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Из расчета на прочность подобрать поперечное сечение в виде трех двутавров, поставленных рядом. Расчетное сопротивление стали принять равным: $R = 210$ МПа.

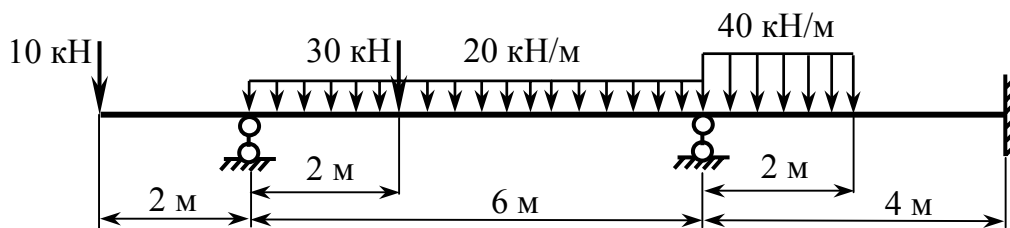


Рис. 22

Решение.

Определим по формуле (5) степень статической неопределенности
 $L = 5 - 3 = 2$.

Образую основную систему введением шарниров в опорные сечения балки. Со стороны заделки введем фиктивный пролет длиной, равной нулю. Основная система показана на рис. 23, а.

Запишем уравнения трех моментов.

1. Для момента над опорой 1 - $n = 1$:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(B_1^\Phi + A_2^\Phi).$$

2. Для момента над опорой 2 - $n = 2$:

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6(B_2^\Phi + A_3^\Phi).$$

По табл. 6 найдем значения фиктивных реакций. Фиктивные реакции в первом пролете складываются из фиктивных реакций от сосредоточен-

ной силы и фиктивной реакции от распределенной нагрузки:

$$B_1^\Phi = B_{1(F)}^\Phi + B_{1(q)}^\Phi,$$

где $B_{1(F)}^\Phi = \frac{Fl^2uv(1+u)}{6}$; $F = 30$ кН; $l = 6$ м.

Найдем значения коэффициентов u и v :

$$ul = 2\text{ м} \quad u \cdot 6 = 2 \quad u = \frac{1}{3};$$

$$vl = 4\text{ м} \quad v \cdot 6 = 4 \quad v = \frac{2}{3}.$$

$$B_{1(F)}^\Phi = \frac{30 \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right)}{6} = 53,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$B_{1(q)}^\Phi = \frac{ql^3}{24} = \frac{20 \cdot 6^3}{24} = 180 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$B_1^\Phi = 53,33 + 180 = 233,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$A_2^\Phi = \frac{ql^3u^2(2-u)^2}{24}; \quad q = 40 \text{ кН/м}; \quad l = 4 \text{ м};$$

$$ul = 2\text{ м} \quad u \cdot 4 = 2 \quad u = 0,5.$$

$$A_2^\Phi = \frac{40 \cdot 4^3 \cdot 0,5^2 (2 - 0,5)^2}{24} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$B_2^\Phi = \frac{ql^3u^2(2-u^2)}{24} = \frac{40 \cdot 4^3 \cdot 0,5^2 (2 - 0,5^2)}{24} = 46,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$A_3^\Phi = 0.$$

Опорные моменты над крайними опорами будут равны:

$$M_0 = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_3 = 0.$$

Подставляя полученные значения в уравнения трех моментов, получим:

$$-20 \cdot 6 + 2M_2(6 + 4) + M_0 \cdot 4 = -6(233,33 + 60)$$

$$M_1 \cdot 4 + 2M_2(4 + 0) + 0 = -6(46,67 + 0)$$

или

$$\begin{cases} 20M_1 + 4M_2 = -1640 \\ 4M_1 + 8M_2 = -280 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим значение неизвестных опорных моментов:

$$M_1 = -83,33 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ и } M_2 = 6,67 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюру опорных моментов $M_{оп}$ (рис. 23, в). Окончательная эпюра M (рис. 22, г) получается суммированием значений опорных моментов и эпюры пролетных моментов $M_{пр}$ (рис. 23, б).

Эпюру поперечных сил Q строим, используя эпюру M по формуле (7).

$$\text{На консоли } Q = \frac{-20 - 0}{20} = -10 \text{ кН}.$$

В первом пролете.

$$\text{Участок } 0 - K: Q_0 = \frac{78,89 - (-20)}{2} + \frac{20 \cdot 2}{2} = 69,45 \text{ кН},$$

$$Q_K = \frac{78,89 - (-20)}{2} - \frac{20 \cdot 2}{2} = 29,45 \text{ кН}.$$

$$\text{Участок } K - 1: Q_K = \frac{-83,33 - 78,89}{4} + \frac{20 \cdot 4}{2} = -0,55 \text{ кН},$$

$$Q_1 = \frac{-83,33 - 78,89}{4} - \frac{20 \cdot 4}{2} = -80,55 \text{ кН}.$$

Во втором пролете.

$$\text{Участок } 1 - L: Q_1 = \frac{1,67 - (-83,33)}{2} + \frac{40 \cdot 2}{2} = 82,5 \text{ кН},$$

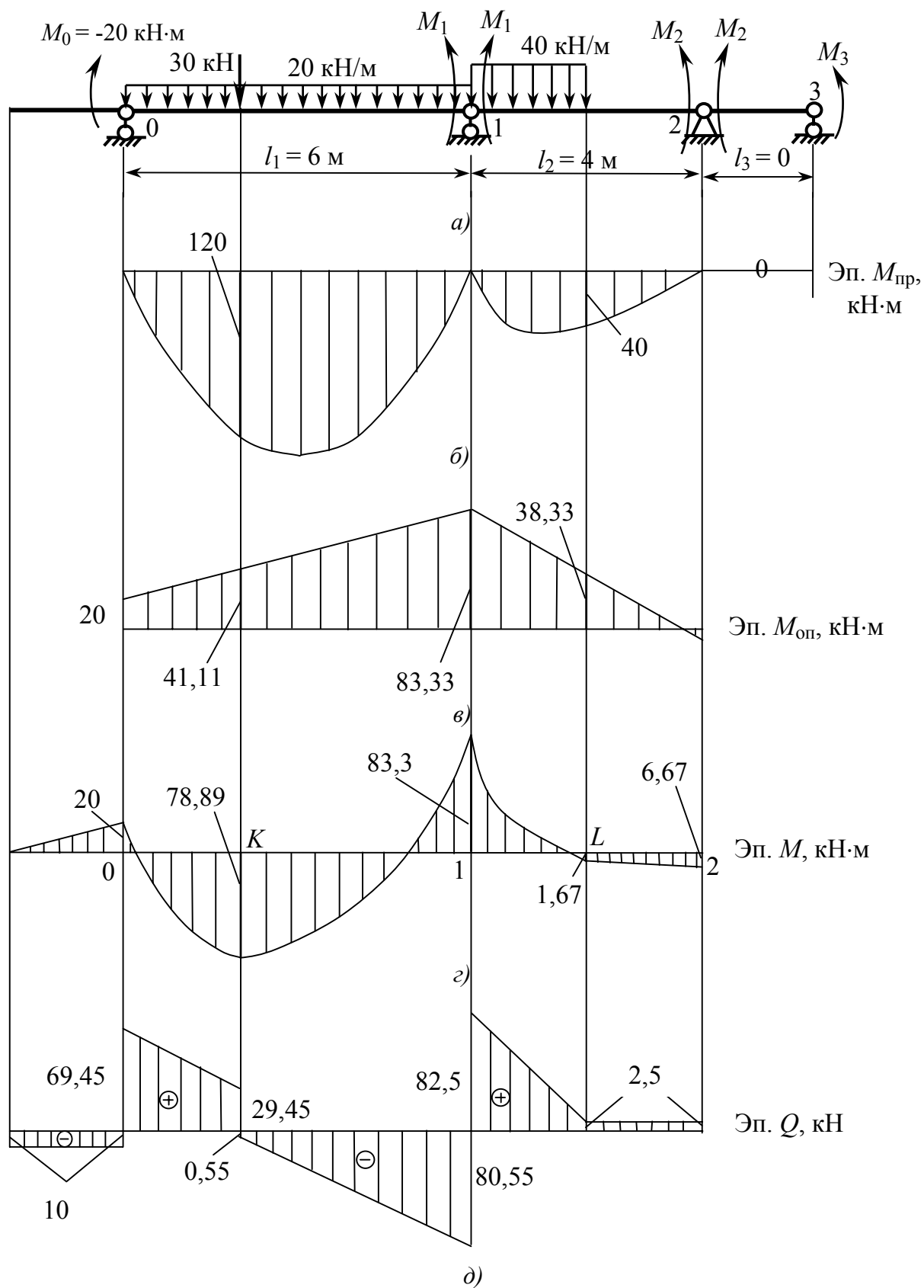


Рис. 23

$$Q_L = \frac{1,67 - (-83,33)}{2} - \frac{40 \cdot 2}{2} = 2,5 \text{ кН.}$$

Участок L_2 : $Q = \frac{6,67 - 1,67}{2} = 2,5 \text{ кН.}$

Эпюра Q показана на рис. 23, д.

Сделаем статическую проверку.

По формуле (8) определим реакции опор:

$$R_0 = 69,45 - (-10) = 79,45 \text{ кН;}$$

$$R_1 = 82,5 - (-80,55) = 163,05 \text{ кН;}$$

$$R_2 = -2,5 \text{ кН.}$$

Схема с приложенными нагрузками и возникшими реакциями показана на рис. 24.

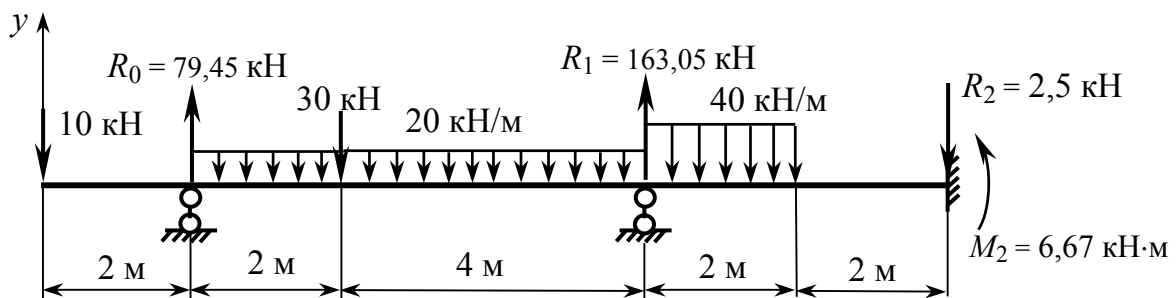


Рис. 24

Запишем уравнение статики:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0. \quad & -10 + 79,45 - 30 - 20 \cdot 6 + 163,05 - 40 \cdot 2 - 2,5 = 0 \\ & -242,5 + 242,5 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_2 = 0. \quad & 10 \cdot 12 - 79,45 \cdot 10 + 30 \cdot 8 + 20 \cdot 6 \cdot 7 - 163,05 \cdot 4 + 40 \cdot 2 \cdot 3 + 6,67 = 0 \\ & 1446,67 - 1446,7 \cong 0. \end{aligned}$$

Условия статического равновесия выполняются.

Только убедившись в правильности построения эпюр M и Q , можно приступить к расчету на прочность.

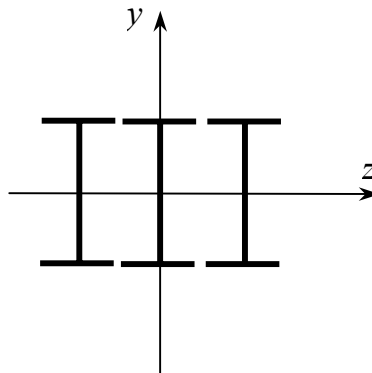
Опасное сечение – сечение 1, $M_{\max} = 83,33 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Запишем условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq R.$$

$$\text{Тогда } \sigma_{\max} = \frac{83,33 \cdot 10^3}{W_z} \leq 210 \cdot 10^6 \Rightarrow W_z \geq 397 \cdot 10^6 \text{ м}^3 = 397 \text{ см}^3.$$

Сечение балки имеет вид



$W_z = 3W'_z = 379 \text{ см}^3$, где $W'_z = 126 \text{ см}^3$ – осевой момент сопротивления одного двутавра, составляющего сечение. По сортаменту (ГОСТ 8239 – 89) подберем двутавр № 18 с $W'_z = 143 \text{ см}^3$. Тогда осевой момент сопротивления всего сечения будет равен:

$$W_z = 3 \cdot 143 = 429 \text{ см}^3.$$

Далее вычислим максимальное напряжение в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{83,33 \cdot 10^3}{429 \cdot 10^{-6}} = 194 \text{ МПа}.$$

Исходя из того, что $\sigma_{\max} = 194 < R = 210$, следовательно, условие прочности выполняется.

Задание 4

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

В соответствии с шифром для стойки с параметрами для расчета, взятыми из табл. 7 и граничными условиями, показанными на рис. 25, требуется определить:

1. Параметр a поперечного сечения с учетом коэффициента продольного изгиба φ ;
2. Критическую силу для подобранного поперечного сечения стойки;
3. Коэффициент запаса стойки по устойчивости;
4. Параметры поперечного сечения стойки, составленного из прокатных профилей (рис. 26) с учетом коэффициента продольного изгиба φ , предполагая, что стойка изгибается в плоскости $x - z$. Действующую силу P из табл. 7 необходимо увеличить в шесть раз.

Таблица 7

№ п/п	P , кН	№ сечения (рис. 2)	l , м	Граничные условия в плоскости		№ сечения (рис. 26)
				$x-y$	$z-x$	
1	250	6	6,3	2	3	5
2	215	11	5,5	6	1	10
3	190	20	6,0	1	5	3
4	245	7	5,8	5	2	9
5	185	16	5,6	3	2	7
6	240	1	5,1	4	3	1
7	210	12	6,4	2	4	6
8	235	19	5,9	3	1	4
9	180	8	5,7	4	1	9
10	265	2	6,5	2	4	6
11	205	13	5,2	3	2	8
12	270	18	6,9	1	6	2
13	260	3	6,1	4	6	5
14	195	14	6,7	6	3	7
15	230	9	5,3	5	1	10
16	220	4	7,0	4	5	1
17	200	15	6,6	2	4	3
18	275	10	5,4	6	2	8
19	255	17	6,8	5	6	2
20	225	5	6,2	1	5	4

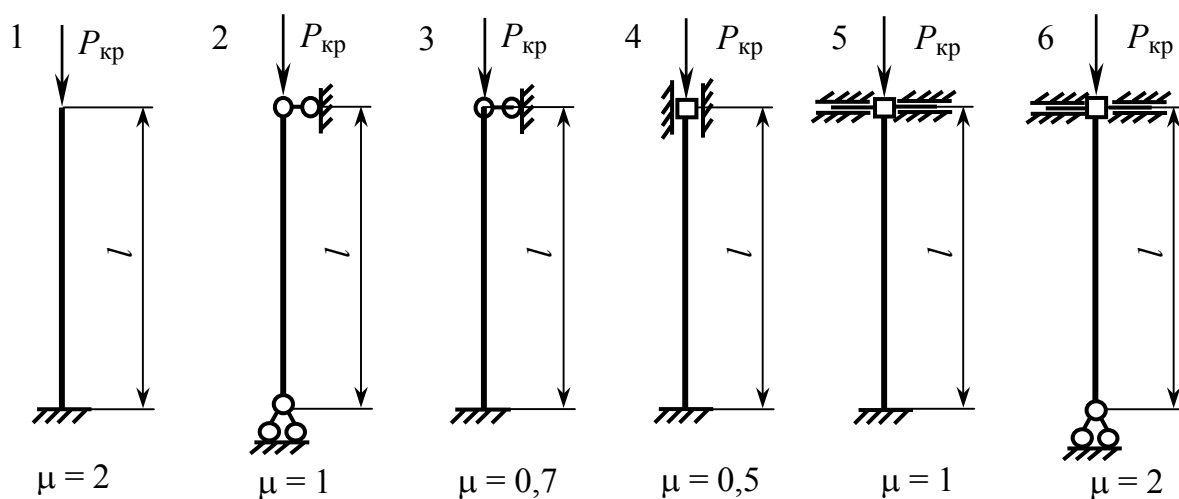


Рис. 25

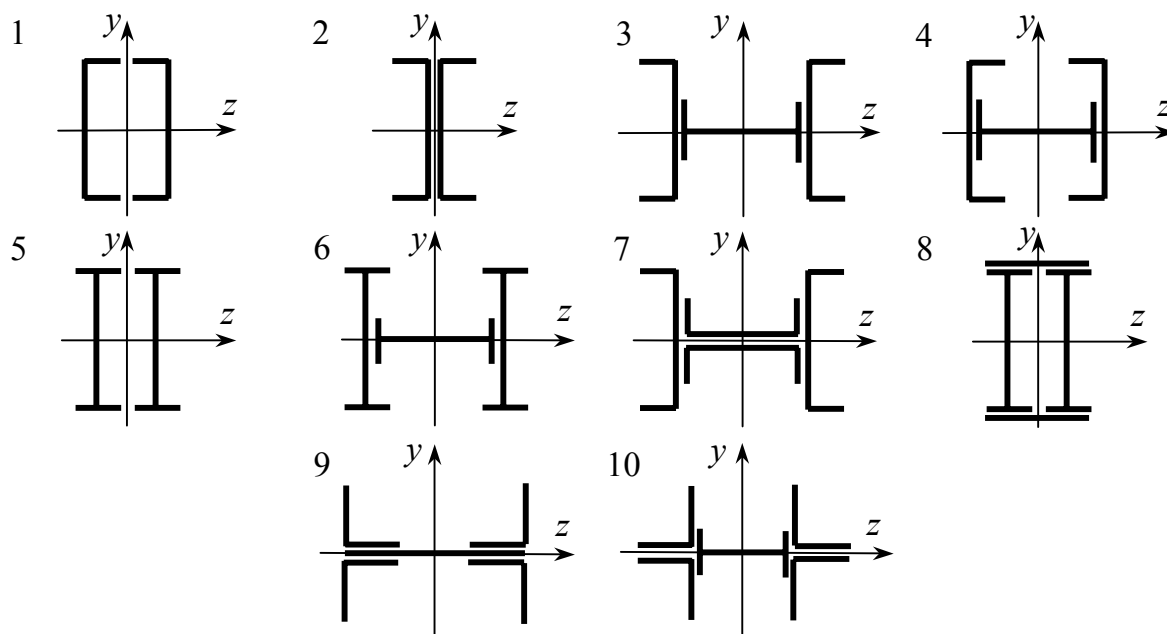


Рис. 26

Указания к решению задания 4

Потерей устойчивости называется процесс перехода стержня, из одной равновесной формы в другую. Нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости, называется критической. Для прямых стержней критическая нагрузка определяется по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2},$$

где μ - коэффициент приведенной длины, зависящий от вида закрепления стержня (см. рис. 25), а μl – приведенная длина стержня. Для стали формула Эйлера применима, только при гибкости

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} > 100,$$

где $i = \sqrt{\frac{J}{A}}$ - радиус инерции поперечного сечения стержня.

Если $\lambda < 100$, то критическое напряжение $\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A}$ определяется по формуле Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где a и b – эмпирические коэффициенты (для стали: $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа). Однако, критическое напряжение не должно превышать предела текучести.

Для деревянных стержней предельная гибкость $\lambda = 110$, коэффициенты в формуле Ясинского равны: $a = 29,3$ МПа, $b = 0,194$ МПа.

Если гибкость стержня находится в пределах $0 < \lambda < 40$ (массивные жесткие стержни), то потеря устойчивости их не происходит, а несущая способность ограничена условием прочности.

В практических расчетах необходимо чтобы нагрузка на стержень была меньше критической, то есть имел место некоторый запас прочности. Этот запас обеспечивается введением в расчет коэффициента продольного изгиба φ . Этот коэффициент зависит от гибкости стержня и механических свойств материала (см. табл. 8). Для деревянных стержней коэффициент продольного изгиба φ можно определить по формулам:

$$\varphi = 1 - 0,8 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2, \text{ при } \lambda \leq 70;$$

$$\varphi = \frac{3000}{\lambda^2}, \text{ при } \lambda > 70.$$

Тогда при расчете с учетом возможности потери устойчивости используется формула:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R.$$

Так как φ и A зависят от поперечного сечения стержня, то при решении задач приходится использовать метод последовательных приближений.

Таблица 8

Гиб- кость λ	Значения коэффициентов φ							
	Сталь с расчетным сопротивлением R , МПа				Алюминиевые сплавы		Чугун	Дерево
	200	240	280	320	АМг6	Д16-Т		
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,973	0,999	0,97	0,99
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,946	0,998	0,91	0,97
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,890	0,835	0,81	0,93
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,770	0,700	0,69	0,87
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,640	0,568	0,57	0,80
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,542	0,455	0,44	0,71
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,458	0,353	0,34	0,60
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,387	0,269	0,26	0,48
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,322	0,212	0,20	0,38
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,280	0,172	0,16	0,31
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,243	0,142	–	0,25
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,213	0,119	–	0,22
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,183	0,101	–	0,18
140	0,376	0,315	0,272	0,240	0,162	0,087	–	0,16
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,148	0,076	–	0,14
160	0,290	0,244	0,212	0,187	–	–	–	0,12
170	0,259	0,218	0,189	0,167	–	–	–	0,11
180	0,233	0,196	0,170	0,150	–	–	–	0,10
190	0,210	0,177	0,154	0,136	–	–	–	0,09
200	0,191	0,161	0,140	0,124	–	–	–	0,08
210	0,174	0,147	0,128	0,113	–	–	–	–

Пример расчета

Задача № 1. Подобрать параметр a поперечного сечения стойки (см. рис. 27, а) длиной $l = 4$ м, нагруженной центральной силой 150 кН. Стойка сделана из дерева с $R_{сж} = 10$ МПа. Граничные условия показаны на рис. 27, б.

Решение. Найдем геометрические характеристики поперечного сечения. Площадь сечения – $8a^2$. Так как сечение имеет две оси симметрии, то оси z и y – центральные и главные. Разбивая сечение на простые фигуры I и II, получим:

$$J_z = 2J_z^I + J_z^{II} = 2 \left(\frac{3aa^3}{12} + 3aa(1,5a)^2 \right) + \frac{a(2a)^3}{12} = 14,667a^4,$$

$$J_y = 2J_y^I + J_y^{II} = 2 \frac{a(3a)^3}{12} + \frac{2aa^3}{12} = 4,667a^4.$$

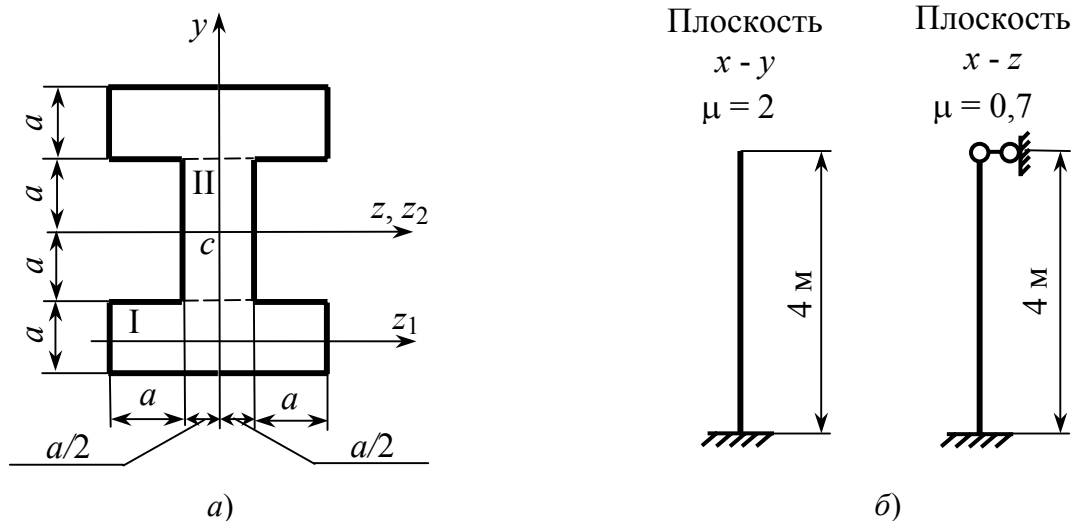


Рис. 27

Найдем радиусы инерции:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{14,667a^4}{8a^2}} = 1,354a,$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{4,667a^4}{8a^2}} = 0,764a.$$

Найдем гибкость стойки в плоскостях $x-y$, $x-z$:

$$\lambda_{x-y} = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{2 \cdot 4}{1,354a} = \frac{5,908}{a},$$

$$\lambda_{x-z} = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 4}{0,764a} = \frac{3,665}{a}.$$

Наибольшая гибкость в плоскости $x-y$. Тогда стойка будет терять устойчивость в этой плоскости, изгибаясь относительно оси z . Условие прочности с учетом коэффициента продольного изгиба φ имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R_{сж}.$$

Так как в этом выражении A и φ зависят от параметров поперечного сечения, то задача решается методом последовательных приближений. Вначале задают значение φ , и из условия прочности определяется величина a . Затем находится истинное значение φ , и если заданное и истинное значение совпадают, то величина a будет расчетной. Если эти значения не совпадают, то задаются новым φ , и расчет повторяют до тех пор, пока эти значения не совпадут.

Первое приближение.

Примем $\varphi = 0,5$. Из условия прочности

$$A = \frac{N}{\varphi R_{сж}} = \frac{15 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 10 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Так как $A = 8a^2 = 3 \cdot 10^{-2}$ м, получим

$$a = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-2}}{8}} = 0,612 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 6,12 \text{ см.}$$

Найдем истинное значение φ .

$$\text{Гибкость стойки } \lambda_{x-y} = \frac{5,908}{a} = \frac{5,908}{0,0612} = 96,54.$$

По табл. 8 данной гибкости соответствует $\varphi = 0,34$.

Так как заданное $\varphi = 0,5$ и истинное $\varphi = 0,34$ не равны друг другу, поэтому делаем следующее приближение.

Второе приближение:

$$\text{Примем } \varphi = \frac{0,5 + 0,34}{2} = 0,42.$$

Площадь поперечного сечения

$$A = \frac{N}{\varphi R_{сж}} = \frac{15 \cdot 10^4}{0,42 \cdot 10 \cdot 10^6} = 3,571 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$\text{Параметр } a = \sqrt{\frac{3,570 \cdot 10^{-2}}{8}} = 0,0668 \text{ м.}$$

$$\text{Гибкость стойки } \lambda_{x-y} = \frac{5,908}{0,0668} = 88,44.$$

По табл. 8 данной гибкости соответствует $\varphi = 0,40$. Так как $\varphi = 0,42$ и истинное $\varphi = 0,40$ почти равны друг другу, но еще не совпадают, следовательно, делаем следующее приближение.

Третье приближение:

$$\text{Принимаем } \varphi = \frac{0,4 + 0,42}{2} = 0,41.$$

$$\text{Площадь поперечного сечения } A = \frac{15 \cdot 10^4}{0,41 \cdot 10 \cdot 10^6} = 3,65 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

$$\text{Параметр } a = \sqrt{\frac{3,65 \cdot 10^{-2}}{8}} = 0,0675 \text{ м.}$$

$$\text{Гибкость стойки } \lambda_{x-y} = \frac{5,908}{0,0675} = 87,52.$$

По табл. 8 этой гибкости соответствует $\varphi = 0,41$. Следовательно, заданное $\varphi = 0,41$ и истинное $\varphi = 0,41$ совпали. Поэтому расчет закончен и параметр $a = 0,0675$ м.

Следует заметить, что если бы был сделан аналогичный расчет для плоскости $x - z$, то параметр a был бы равен $0,0546$ м, что меньше чем для плоскости $x - y$. Поэтому окончательно берем $a = 0,0675$ м.

Найдем величину критической силы в предположении, что стойка теряет устойчивость в плоскости $x - y$. Гибкость стойки при $a = 0,0675$ м равна $\lambda_{x-y} = 87,52$. Так как $\lambda_{x-y} = 87,52 < \lambda_{\text{пред}} = 110$ для дерева, то критическую силу определяем по формуле Ясинского:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 29,3 - 0,194 \cdot 87,52 = 12,32 \text{ МПа.}$$

Тогда

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = \sigma_{\text{кр}} \cdot 8a^2 = 12,31 \cdot 10^6 \cdot 8 \cdot 0,0675^2 = 449064 \text{ Н} = 449 \text{ кН.}$$

Тогда коэффициент запаса

$$k = \frac{P_{кр}}{N} = \frac{449}{150} = 3.$$

Задача № 2. Подобрать поперечное сечение стойки длиной 8 м, нагруженной центральной силой 1200 кН, при условии, что стойка изгибается в плоскости $x - y$. Сечение стойки (см. рис. 28, а) состоит из двух швеллеров и двух полос. Граничные условия в плоскости $x - y$ показаны на рис. 28, б; $R_{сжат} = 200$ МПа.

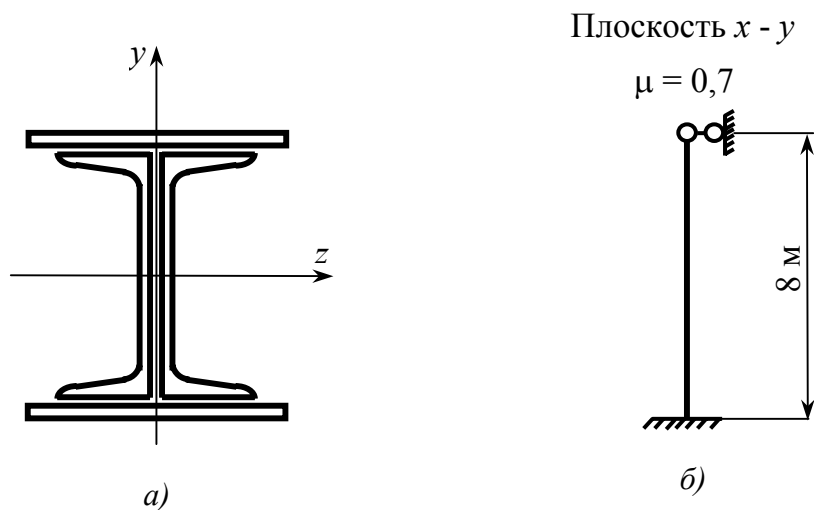


Рис. 28

Решение. Расчет проводится с использованием коэффициента продольного изгиба φ методом последовательных приближений.

Первое приближение.

Принимаем $\varphi = 0,5$.

Находим площадь поперечного сечения

$$A = \frac{N}{\varphi R_{сж}} = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 0,012 \text{ м}^2 = 120 \text{ см}^2.$$

Так как сечение состоит из швеллеров и полос, то при подборе можно варьировать обоими профилями, но можно задаться одним профилем и подбирать параметры другого.

Принимаем швеллер № 24: $A_{шв} = 30,6 \text{ см}^2$, $J_z = 2900 \text{ см}^2$.

Площадь поперечного сечения одной полосы равна

$$A_{\Pi} = \frac{120 - 2 \cdot 30,6}{2} = 29,4 \text{ см}^2,$$

поэтому, принимаем полосу сечением 1×30 см. Сечение состоит из двух швеллеров № 24 и двух полос сечением 1×30 см, находим истинное значение φ для этого сечения стойки.

Момент инерции относительно главной центральной оси z (рис. 28, а)

$$J_z = 2J_z^{\text{шв}} + 2J_z^{\Pi} = 2 \cdot 2900 + 2 \left(\frac{30 \cdot 1^3}{12} + 12,5^2 \cdot 1 \cdot 30 \right) = 15180 \text{ см}^4.$$

Радиус инерции относительно оси z

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = \sqrt{\frac{15180}{2(30,6 + 30)}} = 11,19 \text{ см}.$$

Гибкость стойки в плоскости $x - y$ равна $\lambda_{xy} = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 8}{0,1119} = 50,04$.

По табл. 8 для $\lambda_{xy} = 50,04$ - $\varphi = 0,85$. Так как истинное $\varphi = 0,85$ не равно принятому $\varphi = 0,5$, то делаем следующее приближение.

Второе приближение.

Принимаем $\varphi = \frac{0,5 + 0,85}{2} = 0,68$.

Площадь поперечного сечения

$$A = \frac{N}{\varphi R_{сж}} = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,68 \cdot 200 \cdot 10^6} = 0,0088 \text{ м}^2 = 88 \text{ см}^2.$$

Принимаем два швеллера № 24, а сечение полос будем подбирать.

Площадь поперечного сечения одной полосы равна

$$A_{\Pi} = \frac{88 - 2 \cdot 30,6}{2} = 13,4 \text{ см}^2,$$

поэтому принимаем полосу сечением $0,6 \times 22$ см, $A_{\Pi} = 13,2 \text{ см}^2$ и находим истинное значение φ .

Момент инерции равен

$$J_z = 2J_z^{\text{шв}} + 2J_z^{\text{п}} = 2 \cdot 2900 + 2 \left(\frac{22 \cdot 0,6^3}{12} + 12,3^2 \cdot 13,2 \right) = 9795 \text{ см}^4.$$

$$\text{Радиус инерции } i_z = \sqrt{\frac{9795}{2(30,6 + 13,2)}} = 10,57 \text{ см.}$$

$$\text{Гибкость стойки } \lambda_{xy} = \frac{0,7 \cdot 8}{0,1057} = 52,98.$$

По табл. 8 для $\lambda_{xy} = 52,98$ - $\varphi = 0,84$. Так как заданное $\varphi = 0,68$ и истинное $\varphi = 0,84$ не равны друг другу, то делаем следующее приближение.

Третье приближение.

$$\text{Принимаем } \varphi = \frac{0,84 + 0,68}{2} = 0,76.$$

Площадь поперечного сечения

$$A = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,76 \cdot 200 \cdot 10^6} = 0,0079 \text{ м}^2 = 79 \text{ см}^2.$$

Принимаем два швеллера № 24.

$$\text{Площадь сечения одной полосы } A_{\text{п}} = \frac{79 - 2 \cdot 30,6}{2} = 8,9 \text{ см}^2.$$

Принимаем полосу сечением $0,5 \times 18$ см, $A_{\text{п}} = 9 \text{ см}^2$ и находим истинное значение φ .

Момент инерции

$$J_z = 2 \cdot 2900 + 2 \left(\frac{18 \cdot 0,5^3}{12} + 12,25^2 \cdot 9 \right) = 8502 \text{ см}^4.$$

$$\text{Радиус инерции } i_z = \sqrt{\frac{8502}{2(30,6 + 9)}} = 10,36 \text{ см.}$$

$$\text{Гибкость стойки } \lambda_{xy} = \frac{0,7 \cdot 8}{0,1036} = 54,05.$$

По табл. 8 для $\lambda_{xy} = 54,05$ $\varphi = 0,83$. Так как заданное и истинное значения φ не совпадают, то делаем следующее приближение.

Четвертое приближение.

Примем $\varphi = 0,83$.

$$\text{Площадь сечения } A = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,83 \cdot 200 \cdot 10^6} = 0,00723 \text{ м}^2 = 72,3 \text{ см}^2.$$

Принимаем два швеллера № 24.

$$\text{Площадь сечения одной полосы } A_{\text{п}} = \frac{72,3 - 2 \cdot 30,6}{2} = 5,55 \text{ см}^2.$$

Принимаем полосу сечением $0,5 \times 11$ см, $A_{\text{п}} = 5,5 \text{ см}^2$.

Момент инерции сечения

$$J_z = 2 \cdot 2900 + 2 \left(\frac{11 \cdot 0,5^3}{12} + 12,25^2 \cdot 5,5 \right) = 7451 \text{ см}^4.$$

$$\text{Радиус инерции } i_z = \sqrt{\frac{7451}{2(30,6 + 5,5)}} = 10,16 \text{ см.}$$

$$\text{Гибкость стойки } \lambda_{xy} = \frac{0,7 \cdot 8}{0,1018} = 55,1.$$

По табл. 8 для $\lambda_{xy} = 55,1$ берем $\varphi = 0,827$.

Следовательно, истинное значение $\varphi = 0,827$ и заданным $\varphi = 0,83$ совпали с точностью производимых расчетов.

Окончательно принимаем сечение состоящее из двух швеллеров; 24 и двух полос сечением $0,5 \times 11$ см.

Найдем критическую силу для стойки при потере устойчивости ее в плоскости $x - y$. Так как $\lambda_{xy} = 55,1 < \lambda_{\text{пред}} = 100$, то критическую силу находим по формуле Ясинского.

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 55,1 = 247,2 \text{ МПа.}$$

Критическая сила:

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 247,2 \cdot 10^6 \cdot 0,00723 = 1784,78 \text{ кН.}$$

Коэффициент запаса по устойчивости

$$k = \frac{P_{\text{кр}}}{N} = \frac{1784,78}{1200} = 1,49.$$

Задание 5

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА ПРОДОЛЬНО – ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

В соответствии с шифром, выданным преподавателем, для стержня с данными для расчета, взятыми из табл. 9, определить максимальное нормальное напряжение в опасном сечении при действии поперечной и продольной нагрузок.

Примечания:

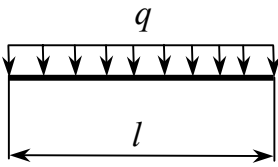
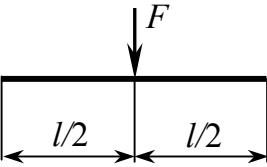
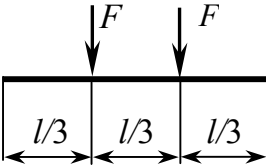
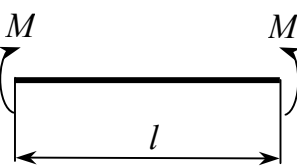
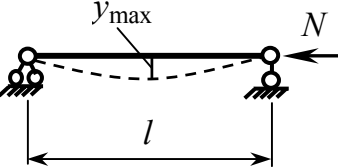
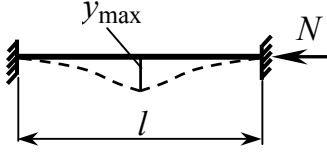
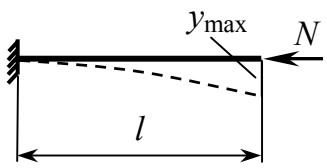
1. Эпюры моментов для расчетной схемы № 2 от поперечных нагрузок приведены на рис. 30. Для остальных расчетных схем эпюры моментов от поперечных нагрузок строятся методом сечений.

2. Максимальные прогибы в балках от поперечных нагрузок приведены в табл. 10.

Таблица 9

№ п/п	№ расчетной схемы из табл. 10	№ двутавра	l , м	N , кН	q , кН/м	F , кН	M , кН·м	№ поперечной нагрузки	
								1-я	2-я
1	2	16	6,0	300	5,0	8,0	2,10	1	–
2	1	20	7,0	200	2,0	10,0	1,40	2	–
3	3	27	6,0	250	2,0	8,0	1,20	2	–
4	2	18	7,0	200	2,0	10,0	1,85	1	2
5	1	18	6,0	250	1,0	5,0	1,00	3	–
6	3	14	3,8	200	3,0	4,0	1,65	1	–
7	1	24	7,0	300	7,0	10,0	1,45	1	–
8	2	30	10,0	500	5,0	15,0	1,60	3	–
9	3	22	4,2	250	1,0	4,0	1,95	3	–
10	2	16	6,4	250	4,0	10,0	1,40	2	–
11	1	14	5,0	250	2,0	6,0	2,00	4	–
12	3	33	6,6	250	2,0	8,0	5,00	4	–
13	1	22	6,6	300	2,0	8,0	1,80	1	2
14	3	18	4,0	220	1,0	4,0	1,55	1	2
15	1	16	5,8	200	3,0	6,0	2,00	1	4
16	3	33	12,0	600	4,0	18,0	1,75	1	3
17	1	27	7,0	350	5,0	12,0	1,50	1	3
18	2	20	4,0	200	1,0	5,0	1,40	1	3
19	1	24	8,0	400	5,0	16,0	1,85	2	3
20	3	22	6,0	300	3,0	9,0	1,80	2	3
21	2	27	9,0	350	4,0	18,0	2,05	1	3
22	3	30	6,4	250	2,0	10,0	1,90	1	3
23	1	24	6,4	250	3,0	10,0	3,00	2	4
24	3	20	4,2	200	0,8	4,8	2,10	2	3
25	2	14	6,0	200	1,0	8,0	2,40	2	–

Таблица 10

Номера поперечных нагрузок Номер расчетной схемы	1 	2 	3 	4 
1 	$\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{Fl^3}{48EJ}$	$\frac{23}{648} \frac{Fl^3}{EJ}$	$\frac{1}{8} \frac{Ml^2}{EJ}$
2 	$\frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{1}{192} \frac{Fl^3}{EJ}$	$\frac{5}{648} \frac{Fl^3}{EJ}$	—
3 	$\frac{1}{8} \frac{ql^4}{EJ}$	$\frac{5}{48} \frac{Fl^3}{EJ}$	$\frac{2}{9} \frac{Fl^3}{EJ}$	$\frac{1}{2} \frac{Ml^2}{EJ}$

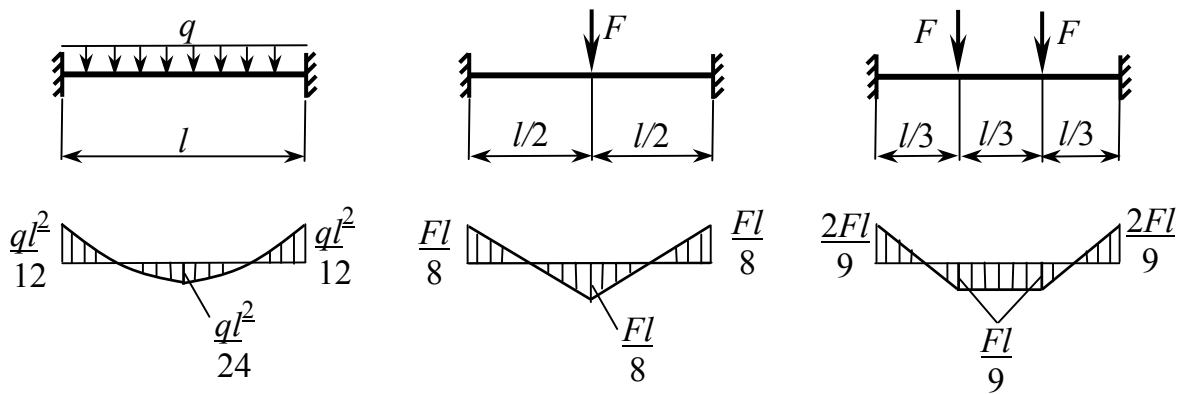


Рис. 30

Указания к выполнению задания 5

Для данного вида напряженно-деформируемого состояния гибких стержней не применим принцип независимости действия сил, так как продольная сила создает дополнительный момент на поперечных перемещениях стержня, которым нельзя пренебрегать.

Для определения нормальных напряжений при продольно-поперечном изгибе, при использовании приближенной теории, используется формула:

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{M_0}{W} - \frac{Ny_0}{\left(1 - \frac{N}{P_3}\right)W},$$

где N – продольная сила, M_0 – момент только от поперечной нагрузки, y_0 – прогиб только от поперечной нагрузки, W – момент сопротивления поперечного сечения, A – площадь поперечного сечения, P_3 – критическая сила, полученная по формуле Эйлера. Первый член формулы выражает напряжение от продольной силы, второй – напряжения от изгибающего момента и поперечной нагрузки, третий – напряжения от изгибающего момента равного произведению продольной силы, умноженному на прогиб от поперечной нагрузки.

Пример расчета

Задача № 1. Для балки, изображенной на рис. 31 определить нормальные напряжения в опасном сечении с учетом продольной и поперечной нагрузок. Балка сделана из двутавра № 20. Параметры балки: $l = 6,6$ м,

$N = 200$ кН, $q = 5$ кН/м, $F = 10$ кН.

Решение. Балка работает в условиях продольно поперечного изгиба. Опасным сечением будет сечение в середине балки, так как прогиб здесь наибольший. Нормальные напряжения в этом сечении равны:

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{M^{\circ}}{W} - \frac{Ny_{\max}^{\circ}}{\left(1 - \frac{N}{P_3}\right)W}.$$

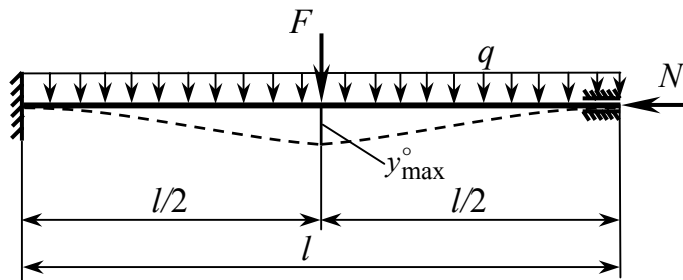


Рис. 31

Найдем все величины, входящие в формулу.

1. Момент от продольной нагрузки см. рис. 30

$$M^{\circ} = \frac{ql^2}{24} + \frac{Fl}{8} = \frac{5 \cdot 6,6^2}{24} + \frac{10 \cdot 6,6}{8} = 17,325 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2. По табл. 10 находим максимальный прогиб от поперечной нагрузки.

Для двутавра № 20: $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м, $J = 1840$ см⁴, $W = 184$ см³, $A = 26,8$ см².

$$y_{\max}^{\circ} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ} + \frac{1}{192} \frac{Fl^3}{EJ} = \frac{1}{384} \frac{5 \cdot 6,6^4}{EJ} + \frac{1}{192} \frac{10 \cdot 6,6^3}{EJ} = \frac{39,68}{EJ} =$$

$$= \frac{39,68}{2 \cdot 10^8 \cdot 184 \cdot 10^{-7}} = 0,011 \text{ м}.$$

3. Находим Эйлерову критическую силу

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 184 \cdot 10^{-7}}{(0,5 \cdot 6,6)^2} = 3379 \text{ кН}.$$

4. Подставив найденные значения в формулу для напряжений, получим

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{200}{26,8 \cdot 10^{-4}} - \frac{17,325}{184 \cdot 10^{-6}} - \frac{200 \cdot 0,011}{\left(1 - \frac{200}{3379}\right) 184 \cdot 10^{-6}} = \\ &= \frac{1}{10^{-4}} (-7,463 - 9,416 - 1,272) = -\frac{18,151}{10^{-4}} \text{ кН/м}^2 = -18,151 \cdot 10^7 \text{ Па} = 181,51 \text{ Мпа}.\end{aligned}$$

В последнем выражении третий член в скобке выражает дополнительное напряжение, созданное изгибающим моментом от продольной силы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные во второй части практикума вопросы сравнительно простые. Однако они позволяют освоить и понять специфику использования методов расчета конструкций. Эти задачи с одной стороны вскрывают характер исследуемых явлений, а с другой – позволяют получить окончательные результаты без привлечения современных вычислительных машин.

Рассмотренные в практикуме вопросы широко используются при расчете строительных конструкций. Кроме того, они лежат в основе последующих учебных дисциплин, посвященных расчету стержневых систем. Особенно важны знания рассмотренных задач при анализе напряженно-деформированного состояния при использовании машинных методов расчета.

Данный практикум позволит студентам лучше изучить отдельные положения курса сопротивления материалов и выполнить курсовые работы и расчетно-проектировочные задания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк. – 1995. – 560 с.
2. Сопротивление материалов. Под ред. Г.С. Писаренко. Киев. –1986. – 775 с.
3. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. И.Н. Миролюбов и др. М.: Высш. шк. – 1985. – 399 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Задание 1. Косой изгиб	4
Задание 2. Внецентренное сжатие	16
Задание 3. Расчет неразрезной балки	28
Задание 4. Расчет стержней на устойчивость	41
Задание 5. Расчет стержней на продольно-поперечный изгиб	52
Заключение	56
Библиографический список	57

Составители:

Кислов Валентин Михайлович
Черноусова Ирина Асафовна

Редактор
Корректор
Компьютерная верстка Т.А. Козлова

ЛР № 020275 от 13.11.96. Подписано в печать
Формат 60x84/16. Бумага для множит. Техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л.. Уч.-изд. л.. Тираж экз.

Заказ

Владимирский государственный университет.
Подразделение оперативной полиграфии
Владимирского государственного университета.
Адрес университета и подразделения оперативной полиграфии:
600000, Владимир, ул. Горького, 87