

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
Педагогический институт
Муниципальный Университет города Нью-Йорка (CSI)

И. Е. ЛЮБЛИНСКАЯ С. В. ТИХОМИРОВА

**ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ПРИЛОЖЕНИЯ GEOGEBRA**

**ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ДЛЯ СТУДЕНТОВ-БАКАЛАВРОВ
НАЧАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Учебно-методическое пособие



Владимир 2017

УДК 373.3
ББК 74.202.5
Л93

Рецензенты:

Кандидат педагогических наук, доцент
проректор по научно-методической работе
Владимирского института развития образования имени Л. И. Новиковой
Е. Л. Харчевникова

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. В. Жиков

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Издание подготовлено при финансовой поддержке Фонда Евразия
по Российско-американской Программе партнерства университетов (ППУ).
Международный проект W16-2020 «Разработка
методических материалов для начальных классов по геометрии с использованием
компьютерных технологий и апробация материалов со студентами-практикантами»

Люблинская, И. Е., Тихомирова, С. В. Преподавание геометрии
Л93 с использованием приложения GeoGebra. Факультативный курс для
студентов-бакалавров начального образования : учеб.-метод. пособие /
И. Е. Люблинская, С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и
Н. Г. Столетовых ; Пед. ин-т ; Муницип. Ун-т г. Нью-Йорка (CSI). –
Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 64 с.
ISBN 978-5-9984-0755-0

Издание знакомит читателей с приемами использования приложения GeoGebra в
преподавании геометрии в начальной школе.

Предназначено для студентов-практикантов высших педагогических заведений и
всех интересующихся методикой обучения начальной школы с использованием компь-
ютерных технологий.

Ил. 41. Библиогр.: 10 назв.

УДК 373.3
ББК 74.202.5

ISBN 978-5-9984-0755-0

© Люблинская И. Е.,
Тихомирова С. В., 2017
© ВлГУ, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Раздел «ГЕОМЕТРИЯ И МЕТОДИКА»	8
О симметриях и ошибках в геометрии начальной школы	9
Задания по теме «Симметрия» для начальной школы	16
Приложение 1. Некоторые сведения о параллелограммах	18
Общие свойства параллелограммов	18
Особые формы параллелограммов:	
прямоугольник, ромб и квадрат	21
Приложение 2. Практическая работа «модель прямого угла»	24
Приложение 3. Примеры педагогических приемов	25
Раздел «ТЕХНОЛОГИИ»	28
Принципы эффективного применения технологии при преподавании и изучении математики	28
Изучение элементарной геометрии с использованием программы <i>GeoGebra</i>	30
Краткие сведения о <i>GeoGebra</i>	31
Инструкция по применению инструментальных средств по геометрии для программы <i>GeoGebra</i> базового уровня	33
Уроки <i>GeoGebra</i> для изучения элементарной геометрии	35
Вступление	35
Дроби и площадь (4 урока)	36
Нахождение половин – прямоугольники	36
Нахождение половин – нестандартные формы	38
Нахождение третей – прямоугольники	38
Нахождение третей – нестандартные формы	40
Четырехугольники (2 урока)	40
Классификация четырехугольников	41
Художественные изображения на основе четырехугольников	42

Параллельные и перпендикулярные прямые и отрезки прямых (2 урока)	43
Инструментальное средство <i>параллельная прямая</i> – какую функцию оно выполняет?	44
Инструментальное средство <i>перпендикулярная прямая</i> – какую функцию оно выполняет?	45
Проведение классификации плоских фигур с использованием параллелей и перпендикуляров (2 урока)	47
Построение параллелограммов	47
Построение прямоугольников	48
Симметрия (7 уроков)	49
Отражение	50
Найти осевую симметрию	51
Симметрия в природе	52
Задачи на симметрию	52
Симметрия в узорах, созданных в технике оригами	53
Создание задачи на симметрию – одна ось симметрии	54
Создание задачи на симметрию – две оси симметрии	55
Классификация плоских фигур (1 урок)	56
Правильные многоугольники	57
 Шаблон для составления плана урока	 59
 ЗАКЛЮЧЕНИЕ	 62
 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	 63

ВВЕДЕНИЕ

Факультативный курс проводится в рамках проекта по сотрудничеству между Владимирским Государственным Университетом им. А. Г. и Н. Г. Столетовых и Муниципальным Университетом города Нью-Йорка. Проект финансируется Российско-Американской «Программой Партнерства Университетов» (ППУ). ППУ направлена на установление и развитие партнерских отношений между российскими и американскими университетами и запуск новых совместных проектов. ППУ реализуется Фондом Евразия (США) и Национальным фондом подготовки кадров (РФ) при финансовой поддержке Государственного департамента США.

На современном этапе для начального математического образования характерно возрастание интереса к изучению геометрического материала. Геометрия является базой, фундаментом для развития пространственного (образного) и логического мышления младшего школьника. Поэтому целью данного курса является углубление знаний студентов-практикантов в геометрии и в методиках использования компьютерных технологий в преподавании геометрии. В рамках этого курса планируется 4 совместных занятия по 2,5 часа в форме вебинара с видеозаписью и синхронным переводом, которые будут проводиться в специально оборудованных компьютерных кабинетах. Наряду с целью углубления знаний студентов, этот курс также предназначен для развития умения пользоваться современными компьютерными технологиями в преподавании математики. По окончании курса студенты-практиканты разработают развернутый план урока по теме симметрии с использованием программы GeoGebra и проведут урок в своем классе с видеозаписью.

Материалы для курса можно скачать с сайта <http://bit.ly/GeoGebraRU>.

Предварительная программа курса

Дата	План занятия	Домашнее задание
11.2.17	<ol style="list-style-type: none"> 1. Представление участников и цели проекта 2. Погружение (моделирование урока в начальной школе) - урок типа открытие по теме осевая симметрия 3. Обсуждение педагогических приёмов преподавания математики и применения программы GeoGebra в проведенном уроке 4. Введение в тему симметрии 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Выбор темы и целей урока, черновик задания для школьников 2. Выполнение обучающих заданий по использованию программы GeoGebra 3. Выполнение задания по геометрии
18.2.17	<ol style="list-style-type: none"> 1. Введение в программу GeoGebra 2. Педагогические методики/приёмы по использованию программы GeoGebra 3. Моделирования урока с построением в программе 4. Самостоятельное (в парах) задание из методички + индивидуальные консультации 5. Планирование урока + индивидуальные консультации (+ план предварительной подготовка школьников к уроку) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. План ознакомления школьников с программой GeoGebra 2. Продолжение планирования урока, с разработкой заданий в программе GeoGebra 3. Выполнение задания в программе GeoGebra 4. Выполнение задания по геометрии
25.2.17	<ol style="list-style-type: none"> 1. Методы эффективного использования программы GeoGebra в классе (с примерами различных педагогических ситуаций) 2. Совместное обсуждение заданий-образцов в сравнении с открытыми заданиями на построение 3. Обсуждение требований к заданию для школьников в программе GeoGebra 4. Разработка качественных вопросов для школьников различного уровня, включая творческого характера 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Закончить задание для школьников - в программе, инструкция и вопросы 2. Закончить черновик развернутого плана урока 3. Подготовить фрагмент урока для представления на семинаре (в микрогруппах) 4. Назначить даты проведения уроков

Окончание

Дата	План занятия	Домашнее задание
25.2.17	5. Самостоятельная работа над заданием для школьников + индивидуальные консультации	
4.03.17	1. Представление фрагментов урока с обсуждением - по 3 группы с каждой стороны 2. Обзор требований к уроку и видео 3. Самостоятельная работа и индивидуальные консультации по планам уроков	1. Развернутый план урока + задание в программе + инструкции для школьников по выполнению задания с вопросами 2. Проведение уроков и видео.

Дополнительные субботы (в случае плохой погоды): 18.03, 25.03

Требования к участникам для получения стипендии:

1. Выполнение тестов по геометрии и заполнение вопросников до начала и после окончания курса.
2. Посещение всех занятий.
3. Разработка развернутого плана урока по теме симметрии с заданием для школьников в приложении GeoGebra.
4. Представление фрагмента урока на занятиях.
5. Проведение урока в школе с видео-записью.
6. Представление примеров работ школьников над заданием.

РАЗДЕЛ «ГЕОМЕТРИЯ И МЕТОДИКА»

Данный раздел посвящен геометрии и вопросам методики преподавания геометрического материала в начальной школе. Именно в геометрии заложены основы для формирования логического и алгоритмического мышления, пространственного воображения и математической речи. Поэтому любое использование элементов геометрии на уроках способствует развитию наглядно-действенного (дошкольный возраст), наглядно-образного (начальный школьный возраст) и наглядно-логического (подростковый возраст) уровней мышления. Благодаря постепенному и достаточно раннему (согласно физиологическому возрасту) внедрению подобных заданий в процесс обучения, имеем целью формирование уровней мышления ребенка и, как следствие, в среднем звене заинтересованность детей при изучении геометрии, более осмысленное восприятие геометрического материала.

Анализируя основные ошибки, которые дети допускают в начальном курсе геометрии, приходим к выводу, что они связаны с неправильным пониманием определений и свойств математических объектов, а также неумением правильно интерпретировать геометрические образы.

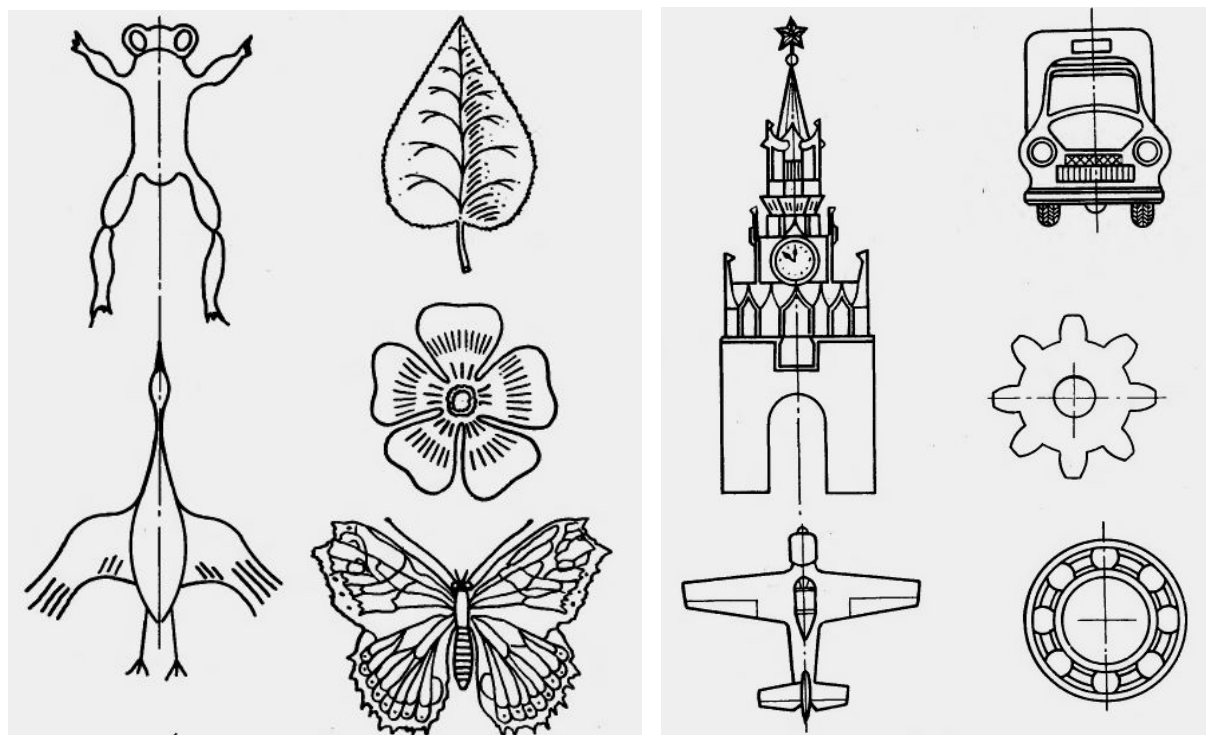
Раздел «Геометрия и методика» сконцентрирован на теме «Симметрии», содержит таблицу «основные виды симметрии в школе»; популярные ошибки-проблемы учащихся и рекомендации по исправлению (разрешению) данных ошибок; в качестве контроля предлагается выполнять задания не только на бумаге, но и с использованием компьютерных технологий. В приложениях данного раздела подробно изложена математическая теория о параллелограммах и переносной симметрии (Приложение 1), практическая работа «модель прямого угла»

(Приложение 2), примеры педагогических приемов, которые студенты могут использовать в своей педагогической практике (Приложение 3).

Подчеркнем, что в нашей методической разработке идеи математики, методики и технологий начальной школы реализованы посредством темы «Симметрии». Студент может применить педагогические приемы и технологии для других тем.

О симметриях и ошибках в геометрии начальной школы

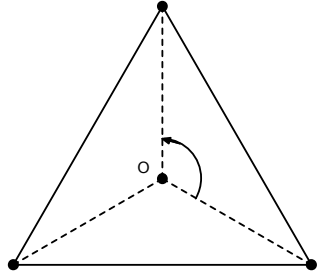
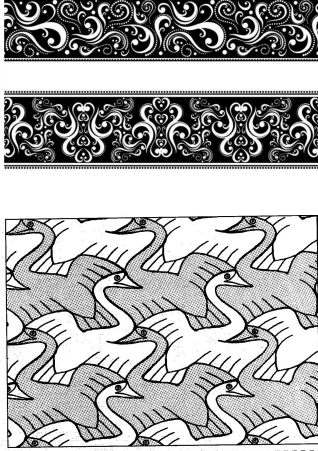
Рассмотрите рисунки. Как вы считаете, что объединяет данные картинки?



Изображенные предметы обладают осевой симметрией. Все эти фигуры имеют хотя бы одну ось симметрии.

Приведем таблицу основных видов симметрии, встречающихся в школьном курсе математики.

Вид симметрии Определение	Построение симметричных точек	Характерное свойство	Примеры фигур с элементами симметрии
<p>Центральная</p> <p>Две точки симметричны относительно некоторого центра, если этот центр совпадает с серединой отрезка, соединяющего данные точки</p>		<p>Движение плоскости, имеющее единственную неподвижную точку</p>	<p>Круг, центр круга – центр симметрии.</p> <p>Параллелограмм, точка пересечения диагоналей – центр симметрии.</p>
<p>Осевая</p> <p>Две точки симметричны относительно некоторой прямой (оси), если они находятся на перпендикуляре к этой прямой на равном расстоянии от нее</p>		<p>Движение плоскости, у которого множество неподвижных точек — прямая</p>	<p>Круг, диаметр круга – ось симметрии.</p> <p>Правильный треугольник, 3 высоты – 3 оси симметрии.</p> <p>Прямоугольник, 2 средние линии – 2 оси симметрии.</p> <p>Ромб, диагонали ромба – 2 оси симметрии.</p> <p>Квадрат, 2 средние линии и 2 диагонали – 4 оси симметрии</p>
<p>Зеркальная (относительно плоскости)</p> <p>Две точки симметричны относительно некоторой плоскости, если отрезок, соединяющий эти точки, перпендикулярен этой плоскости, а сами точки равноудалены от нее</p>		<p>Движение пространства, множество неподвижных точек которого есть плоскость</p>	<p>Правильная четырехугольная призма имеет 5 плоскостей симметрии: 3 срединных сечения и 2 диагональных</p>

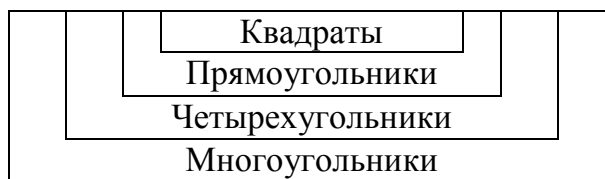
<p>Вращения или поворотная</p> <p>Одна точка получается из другой поворотом вокруг некоторого центра на данный угол, если они расположены на одной окружности, центр которой совпадает с центром поворота, и радиусы, проведенные к этим точкам, образуют данный угол. При этом задается направление поворота – по часовой стрелке или против нее.</p> <p>Центр поворота называется центром симметрии n-го порядка фигуры, если при повороте данной фигуры вокруг центра поворота на угол $\frac{360^\circ}{n}$ фигура совмещается сама с собой</p>		<p>На плоскости: движение плоскости, имеющее единственную неподвижную точку – центр симметрии n-го порядка.</p> <p>В пространстве: движение пространства, множество неподвижных точек которого – прямая, является поворотом вокруг этой прямой</p>	<p>Правильный треугольник имеет центр симметрии 3 порядка</p> <p>Квадрат имеет центр симметрии 4 порядка</p> <p>Снежинка имеет центр симметрии 6 порядка</p>
<p>Переносная или параллельный перенос</p> <p>Движение плоскости, которое перемещает точки плоскости в одном и том же направлении на одну и ту же величину</p>		<p>Присущие неограниченным фигурам</p>	<p>Бордюр – это полоса между двумя параллельными прямыми, заполненная равными друг другу фигурами.</p> <p>Паркет – это замощение (покрытие) плоскости равными непересекающимися фигурами</p>

Нам интересен вопрос об усвоении геометрических понятий младшими школьниками. Как дети воспринимают материал при изучении темы «Многоугольники»? Видят ли дети симметрии в геометрии, в математике вообще и в окружающем их мире? Остановимся на наиболее часто встречающихся проблемных моментах при изучении геометрического материала в начальном курсе математики.

Проблема 1 связана с понятиями квадрат и прямоугольник. Определенную трудность для младших школьников представляет осознание того, что любой квадрат является прямоугольником. Причина в том, что целостный образ квадрата и прямоугольника уже сложился у большинства детей, а умением выделять существенные признаки фигуры они еще не овладели.

В данном случае очень важно продумать последовательность вопросов, организующих деятельность детей, направленную на выделение существенных признаков прямоугольника и квадрата¹. Для этой цели учитель может использовать раздаточный материал: конверт с набором различных геометрических фигур, окрашенных в разные цвета. Сначала следует выяснить, как можно их назвать (многоугольники). Затем предложить учащимся показать и назвать многоугольники, у которых три угла и три стороны; четыре угла и четыре стороны; пять углов и пять сторон и т. д. После этого предложить им оставить на парте только четырехугольники. Затем из них выделить те, у которых один, два, три, четыре прямых угла (после нескольких попыток некоторые ученики догадаются, что четырехугольников у которых только три прямых угла вообще быть не может). Дети выполняют задание учителя, сначала прикидывая «на глаз», какие углы могут быть прямыми, затем проверяют свое предположение с помощью модели прямого угла².

В результате выделяются четырехугольники, у которых все углы прямые. Они имеют название – прямоугольники. Среди прямоугольников можно выделить такие, у которых все стороны равны. Это квадраты. Отношения между понятиями *многоугольник, четырехугольник, прямоугольник, квадрат* представлены схематически:



¹ Подробно о свойствах четырехугольников см. в Приложении 1.

² Практическую работу «Модель прямого угла» см. в Приложении 2.

Эту схему можно затем использовать для проведения различных игр, например игры «Где мое место?». Для этого двум ученикам дается одинаковое количество различных многоугольников (одному синего, другому красного цвета). Побеждает тот, кто правильно и быстро заполнит схему фигурами.

Можно игру провести иначе. Один ученик получает несколько геометрических фигур. Сначала он рассматривает каждую фигуру так, чтобы ее видел весь класс, но не видел партнер по игре. Затем описывает фигуру, называя ее признаки, партнер угадывает название и помещает ее на схеме. Основное условие игры: фигуру нужно так описать, чтобы выбор ее места был однозначным. Например, ученик описывает фигуру так: «пять сторон и пять углов» (выбор однозначен - это пятиугольник, он помещается в области «многоугольники»). Далее он предлагает такое описание: «четыре стороны и четыре угла». В этом случае выбор не однозначен. Это может быть любой четырехугольник, либо прямоугольник, либо квадрат. Или такое описание: «четыре стороны и все равны» (выбор также не однозначен). Это может быть квадрат или ромб, который можно будет поместить в область «четырехугольники». В процессе такой игры дети начинают осознавать, что такое *существенные признаки* геометрической фигуры.

Задание. Придумайте игры, которые вы могли бы предложить детям для выяснения отношений между геометрическими фигурами, для усвоения их существенных свойств и названий.

Проблема 2. Расположение фигур на плоскости.

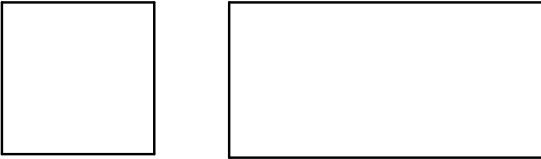
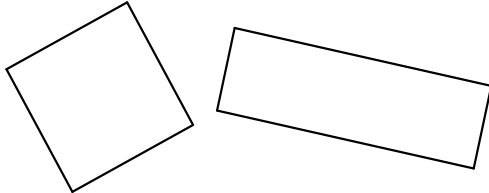
Ориентация и пропорции не имеют никакого отношения к характеристическим свойствам фигуры.

Например, распространенными заблуждениями для треугольников являются следующие:

- Треугольники имеют одну вершину в верхней части и две вершины в нижней части.
- Треугольник всегда опирается на одну из своих сторон или, другими словами, одна из сторон является нижней частью треугольника.

Некоторые из распространенных заблуждений для прямоугольников:

- Форма прямоугольника всегда протяженная.
- Прямоугольник имеет две длинные стороны и две короткие стороны.

Привычное расположение квадрата и прямоугольника	Непривычное расположение квадрата и прямоугольника
	

Рекомендации по исправлению ошибок:

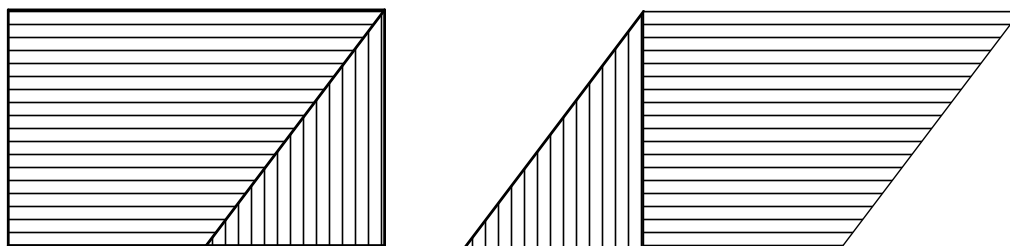
Для ребенка младшего школьного возраста наиболее доступным и продуктивным способом приобретения знаний и умений является собственный практический опыт. Можно провести следующую работу. Учитель раздает детям кальку и лист. На кальке имеются контуры четырех фигур: параллелограммов, ромбов, квадратов и прямоугольников – достаточно по одному. На альбомном листе произвольно изображены (в смысле, по разному расположенные) такого же размера (как на кальке) четырехугольники разных цветов. Прикладывая кальку, ученик убеждается, что лист заполнен только данными четырехугольниками.

Аналогичную практическую работу можно проделать лишь с одной фигурой – прямоугольником. На листе разбросаны прямоугольники и квадраты. С помощью кальки или модели прямого угла (Приложение 2) ученик доказывает, что все эти фигуры являются прямоугольниками. Далее, пользуясь моделью измерения отрезков (линейка), заключает, что некоторые из представленных прямоугольников являются квадратами.

Задание. Воспользуйся разноцветными прямоугольниками и квадратами. Составь узор для платка и для шарфа. Составь сказочный поезд, каждый вагон которого содержит по три-четыре прямоугольника, колесами могут быть только (в том числе) вершины фигур. Подумай, как эти задания выполнить в программе GeoGebra.

Проблема 3. Особенности периметров и площадей равносоставленных фигур. Иногда учащиеся считают, что если объект составлен из частей А и В, то характеристики для этого объекта при любом соединении части А с частью В сохраняются. Пример ошибки: периметр прямоугольника равен периметру параллелограмма, равносоставленного с данным прямоугольником.

На практике легко убедиться путем измерения (с помощью линейки), что периметры указанных равносоставленных фигур будут разными.



Напомним важные предложения теории измерений.

Площади равносоставленных фигур равны. Периметры равносоставленных фигур могут быть различны.

Фигуры, имеющие равные площади, не обязаны иметь равные периметры.

Фигуры, имеющие равные периметры, не обязаны иметь равные площади.

Существуют такие фигуры, которые имеют равные периметры, но их линейные размеры различаются.

Существуют такие фигуры, которые имеют равные площади, но их линейные размеры различаются.

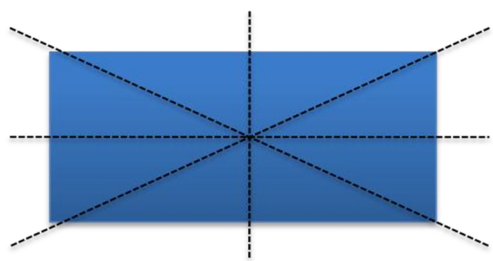
Задание. Два треугольника имеют равные площади. Следует ли из этого, что они равны? Объясни своё решение. Покажи в программе GeoGebra.

Задание. Прямые k и l параллельны. Точка B движется по прямой l , занимая положение B_1, B_2, B_3 и т.д., а точки A и C остаются неподвижными. Равновелики ли треугольники AB_1C, AB_2C и т.д.? Создай динамическую иллюстрацию задания в программе GeoGebra.

Задание. Квадрат разрезан по своим диагоналям. Сколько выпуклых многоугольников, отличных от квадрата, можно составить из четырех образовавшихся треугольников? Покажи своё решение.

Проблема 4, собственно, как и предыдущие проблемы, опять связана с визуальным восприятием изображения фигуры и касается ее линейной симметрии.

Учащиеся иногда находят больше осей симметрии, чем существует на самом деле. Например, в прямоугольнике учащиеся могут ошибочно выделить диагонали прямоугольника как оси симметрии.



Данная проблема легко устранима в случае подручного материала: путем

сгибания листа прямоугольной формы по предполагаемым осям симметрии. Если после сложения половинки листа совпали, то ось симметрии найдена верно.

Альтернативным средством в решении этой проблемы являются компьютерные технологии, именно, программы динамической геометрии.

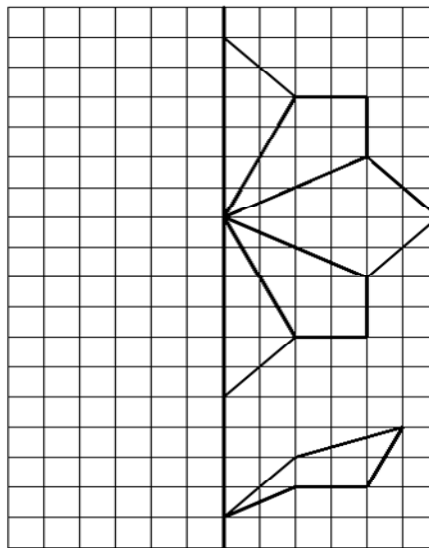
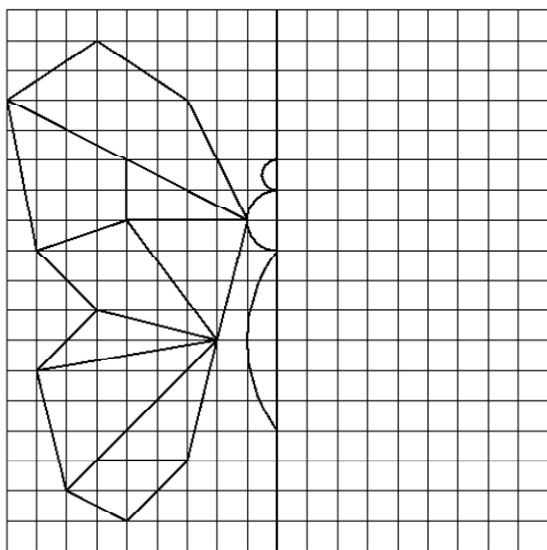
Считаем уместным привести здесь следующие предложения:

Любой правильный n -угольник имеет n осей симметрии.

Задание. Для данного правильного многоугольника найди все оси симметрии. Объясни почему эти прямые являются осями симметрии данного многоугольника. Почему ты уверен, что нашел ВСЕ оси симметрии?

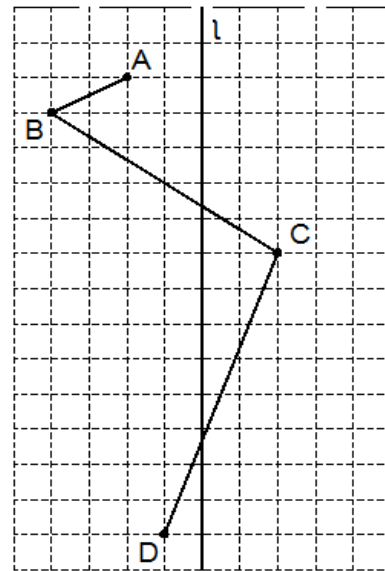
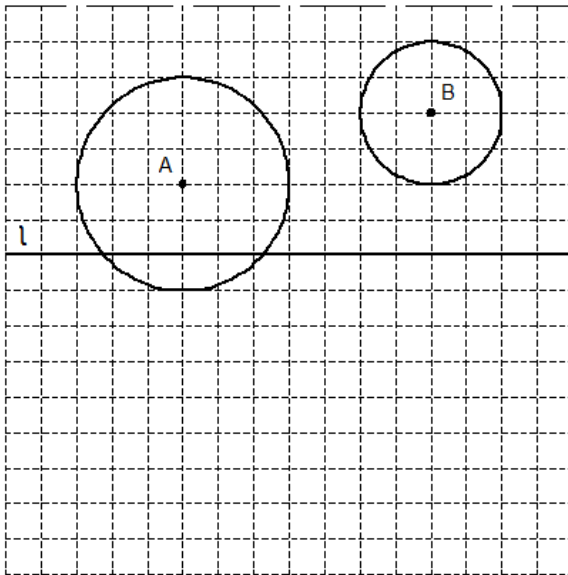
Задания по теме «Симметрия» для начальной школы

1. Дорисуй вторую половину и раскрась. Проверь правильность построения с помощью кальки.³

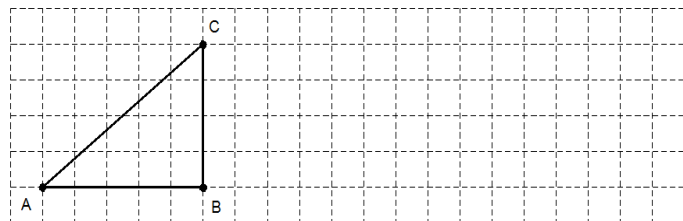


³ Л.Г. Петерсон. Учебник. Математика. 2 класс. Изд-во «Ювента». 2013.

2. а) Начерти на листе бумаги окружность радиусом 5 см. Вырежи круг, ограниченный этой окружностью. Перегни круг пополам. Линию перегиба обведи красным карандашом. Что ты заметил?
 б) Перегни круг пополам 2 раза. Новую линию перегиба обведи синим карандашом. Что ты заметил?⁴
3. Построй фигуры, симметричные данным относительно прямой l .⁵



4. а) Построй треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно стороны BC , а потом перенеси полученный треугольник вправо на 8 клеточек. Опиши обратное преобразование.⁶ б) Нарисуй квадрат $ABCD$ со стороной 3 см и построь квадрат, симметричный ему относительно стороны CD .
5. Вырежи из бумаги модели следующих фигур: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, треугольник с прямым углом, треугольник без прямого угла, круг – и с помощью перегибания найди их оси симметрии. Нарисуй оси симметрии этих фигур на чертеже.



⁴ Л.Г. Петерсон. Учебник. Математика. 2 класс. Изд-во «Ювента». 2013.

⁵ Л.Г. Петерсон. Учебник. Математика. 3 класс. Изд-во «Ювента». 2012.

⁶ Там же.

6. Построить окружность, симметричную данной относительно а) центра O , б) прямой a .
7. Построить отрезок $A'B'$, симметричный данному отрезку AB : а) относительно середины M отрезка, относительно одного из концов данного отрезка, относительно точки $O \in AB$, б) относительно среднего перпендикуляра данного отрезка AB , относительно прямой, проходящей через точку B , относительно прямой $l \cap AB = \emptyset$.
8. Разбейте множество букв алфавита на классы букв по следующим характеристическим свойствам: а) имеющих центр симметрии, б) имеющих центр симметрии какого-либо порядка $n \neq 1$, в) имеющих ось симметрии, г) имеющих несколько осей симметрии.

Приложение 1. Некоторые сведения о параллелограммах⁷

Ниже вниманию читателя будет представлено изучение множества параллелограммов, содержащее внутри себя подмножества ромбов, прямоугольников и квадратов. Самостоятельно студентам необходимо повторить тему «треугольники», тему «окружность и круг».

Общие свойства параллелограммов

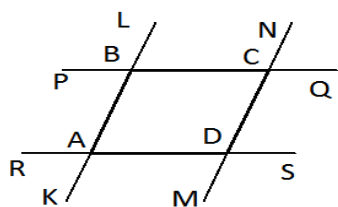


Рис.1

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Параллелограмм ($ABCD$, рис. 1) получится, если какие-нибудь две параллельные прямые KL и MN пересечь **двумя** другими параллельными прямыми PQ и RS .

Свойства сторон и углов параллелограмма

Во всяком параллелограмме ($ABCD$, рис.2) противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

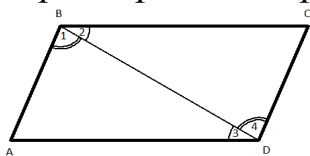


Рис.2

Проведя диагональ BD , получим два треугольника ABD и BCD , которые равны, потому что у них BD – общая сторона, $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие при параллельных прямых). Из равенства треугольников следует:

⁷ Материал заимствован из классической литературы по математике: А. П. Киселев. Элементарная геометрия. Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1996.

$AB=CD$, $AD=BC$ и $\angle A=\angle C$. Противоположные углы B и D также равны, так как они представляют собой суммы равных углов.

З а м е ч а н и е . Равенство противоположных сторон параллелограмма иногда выражают другими словами так: **отрезки параллельных, заключенные между параллельными, равны.**

С л е д с т в и е . Параллельные прямые (AB и CD) везде одинаково удалены одна от другой.

Действительно, если из каких-нибудь двух точек M и N прямой CD опустим на AB перпендикуляры MP и NQ , то эти перпендикуляры параллельны и потому фигура $MNPQ$ — параллелограмм; отсюда следует, что $MP=NQ$ т.е. точки M и N одинаково удалены от прямой AB .

Два признака параллелограммов

Если в четырехугольнике: **1) противоположные стороны равны или 2) две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырехугольник есть параллелограмм.**

1. Пусть фигура $ABCD$ (рис.3) есть четырехугольник, у которого $AB=CD$ и $BC=AD$.

Требуется доказать, что эта фигура – параллелограмм, т.е. $AB\parallel CD$ и $BC\parallel AD$.

Проведя диагональ BD , получим два треугольника, которые равны, так как у них BD – общая сторона, $AB=CD$ и $BC=AD$ (по условию). Из равенства их следует: $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы); вследствие этого $AB\parallel CD$ и $BC\parallel AD$ (если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны).

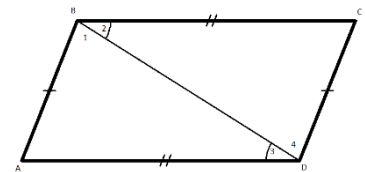


Рис.3

2. Пусть в четырехугольнике ($ABCD$, рис.4) дано условие $BC=AD$ и $BC\parallel AD$. Требуется доказать, что $ABCD$ есть параллелограмм, т.е. что $AB\parallel CD$.

Треугольники ABD и BCD равны, потому что у них BD – общая сторона, $BC=AD$ (по условию) и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при параллельных). Из равенства треугольников следует: $\angle 1 = \angle 4$, поэтому $AB\parallel CD$.

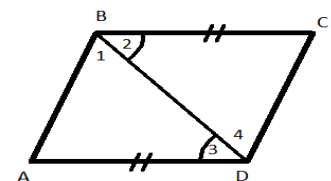


Рис.4

Свойство диагоналей параллелограмма

В параллелограмме ($ABCD$, рис.5) диагонали делятся пополам.

Треугольники BOC и AOD равны, потому что у них $BC=AD$. (как противоположные стороны параллелограмма), $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (как накрест лежащие при параллельных). Из равенства треугольников следует: $OC=OA$ и $OB=OD$.

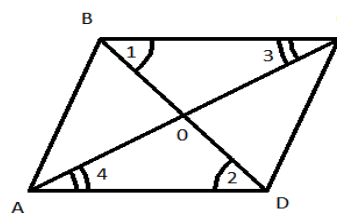


Рис.5

Центр симметрии

Если через точку пересечения диагоналей параллелограмма (через точку O , рис.6) проведем какую-нибудь прямую (MN), то эта прямая пересечет контур параллелограмма в двух точках (P и Q), симметричных относительно точки пересечения диагоналей, т.е. в двух таких точках, которые, во-первых, лежат по разные стороны от точки O и, во-вторых, на равных расстояниях от этой точки. Действительно, треугольники OAP и OCQ равны, так как у них $AO=OC$ (по свойству диагоналей параллелограмма), углы при общей вершине O равны (как вертикальные) и $\angle 1 = \angle 2$ (как углы внутренние накрест лежащие при параллельных). Из равенства этих треугольников следует: $OP=OQ$.

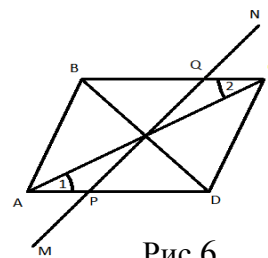


Рис.6

Если в какой-нибудь фигуре существует точка, обладающая указанным свойством, то такая точка называется **центром симметрии** этой фигуры: значит, **в параллелограмме точка пересечения его диагоналей есть центр симметрии**.

Если фигуру, имеющую центр симметрии, повернем вокруг этого центра на 180° , то фигура совместится с ее прежним положением, так как всякие две симметричные точки (например, P и Q , A и C) после такого вращения поменяются местами.

Симметрия относительно центра называется **центральной симметрией** в отличие от симметрии относительно оси, называемой **осевой симметрией**.

Особые формы параллелограммов: прямоугольник, ромб и квадрат

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

Так как прямоугольник есть параллелограмм, то он обладает всеми свойствами параллелограмма; например, диагонали его делятся пополам и точка их пересечения есть центр симметрии. Но у прямоугольника есть еще свои особые свойства, которые укажем в следующих двух теоремах:

1. В прямоугольнике (ABCD, рис. 7) диагонали равны.

Прямоугольные треугольники ACD и ABD равны, потому что у них AD – общий катет и $AB=CD$ (как противоположные стороны параллелограмма). Из равенства треугольников следует: $AC=BD$.

1. Прямоугольник имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, в чем можно убедиться из рассмотрения рис. 8.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны. Конечно, ромбу принадлежат все свойства параллелограмма, но у него есть еще следующие два особых свойства:

1. Диагонали ромба (ABCD, рис. 9) взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.

Треугольники ABO и BCO равны, потому что у них BO – общая сторона, $AB=BC$ (так как у ромба все стороны равны) и $AO=OC$ (так как диагонали всякого параллелограмма делятся пополам). Из равенства треугольников следует: $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, т.е. $BD \perp AC$ и $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, т.е. угол B делится диагональю пополам. Из равенства треугольников BOC и COD увидим, что $\sphericalangle C$ делится диагональю пополам и т.д.

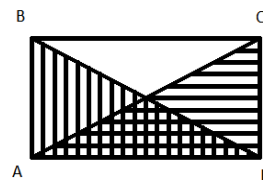


Рис. 7

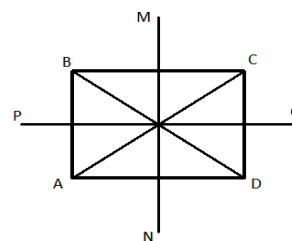


Рис. 8

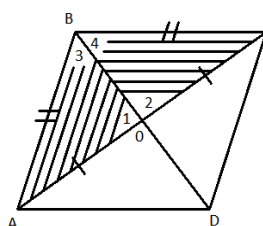


Рис. 9

2. Каждая диагональ ромба есть его ось симметрии.

Диагональ BD (рис.10) есть ось симметрии ромба $ABCD$, потому что, вращая $\triangle ABD$ вокруг BD , можем совместить его с $\triangle BCD$. То же самое можно сказать о диагонали AC .

Квадрат можно определить различно: или это параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые; или это прямоугольник, у которого все стороны равны; наконец, это ромб, у которого углы прямые.

Поэтому квадрату принадлежат все свойства параллелограмма, прямоугольника и ромба. Например, у квадрата имеются четыре оси симметрии (рис.11): две, проходящие через середины противоположных сторон (как у прямоугольника), и две, проходящие через вершины противоположных углов (как у ромба).

Параллельное перенесение. Пусть дана какая-нибудь фигура F (например, треугольник, рис.12) и на ней взяты две произвольные точки A и B . Вообразим, что эта фигура движется (например, в сторону, указанную стрелкой) по той плоскости, на которой она расположена, таким образом, что ее точки A и B (следо-

вательно, и весь отрезок AB) скользят по неподвижной прямой xy , проходящей через эти точки, причем не изменяется ни форма фигуры F , ни величина ее. Пример такого движения наблюдаем, когда для проведения перпендикулярной или параллельной прямой заставляем чертежный треугольник скользить одним своим катетом по краю линейки, удерживаемой неподвижно.

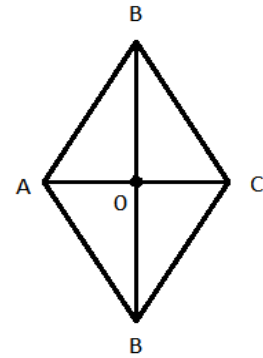


Рис.10

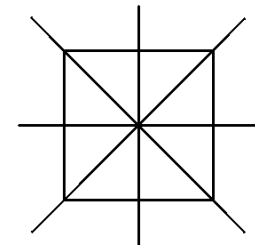


Рис.11

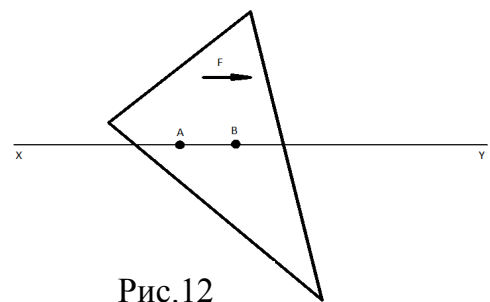


Рис.12

Разъясним теперь, что при таком движении фигуры F все ее точки двигаются в одном и том же направлении по прямым, параллельным той неподвижной прямой, по которой производится скольжение, и при этом проходят пути одинаковой длины.

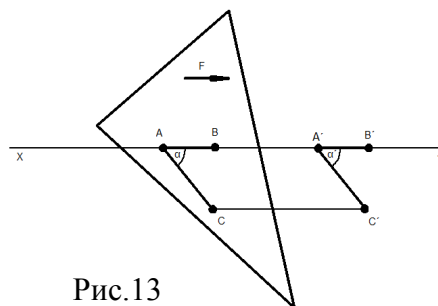


Рис.13

Возьмем, например (рис.13), какую-нибудь точку C и соединим ее прямой с точкой A . Пусть отрезок AB переместится (скольжением вдоль xy) в положение $A'B'$. Тогда отрезок CA переместится в некоторое положение $C'A'$, причем не изменится ни длина этого отрезка, ни величина угла α , образуемого им с AB .

Значит, в четырехугольнике $AA'C'C$ две противоположные стороны $A'C'$ и AC будут равны и параллельны, поэтому четырехугольник этот окажется параллелограммом (см. определение параллелограмма) и, значит, $CC'=AA'$ и $CC' \parallel AA'$. Таким образом, всякая точка C фигуры F перемещается по прямой, параллельной линии скольжения, и проходит путь, равный пути AA' .

Такое движение фигуры F , при котором все ее точки перемещаются по прямым, параллельным некоторой неподвижной прямой (по которой производится скольжение), называется **параллельным перенесением** (или **переносной симметрией**, см. табл. выше).

При параллельном перенесении фигуры F всякая ее прямая MN (рис.14) переносится параллельно самой себе.

Действительно, если MN перенесется в положение $M'N'$, то четырехугольник $MM'N'N$ должен быть параллелограммом, так как пути MM' и NN' параллельны и равны; следовательно, $MN \parallel M'N'$. Конечно, если прямая (например, PQ) параллельна линии скольжения, то она при движении скользит вдоль самой себя.

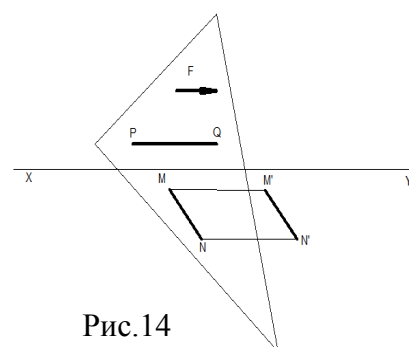


Рис.14

Приложение 2. Практическая работа «модель прямого угла»

Если из данной точки провести по линейке прямую линию, то получим геометрическую фигуру, называемую лучом.

Если провести два луча из одной точки, то эти лучи ограничат часть плоскости. При этом образуется геометрическая фигура, называемая углом. В этом случае угол — это часть плоскости, ограниченной двумя лучами, исходящими из одной точки, называемой вершиной угла.

Модель прямого угла дети получают, выполняя практическую работу. Каждому из них даются листы бумаги разных размеров с неровными краями. В середине листа ставится точка. Дети должны сложить лист так, чтобы линия сгиба прошла через эту точку. Затем они еще раз складывают лист так, чтобы части линии сгиба совместились. Организуя деятельность учащихся, учитель сам может демонстрировать им способ действия. В результате получится модель прямого угла. Все модели, изготовленные учащимися, накладываются друг на друга и делается вывод, что все прямые углы равны между собой.

Сознательное представление этих действий требует правильных представлений о величине угла. Для этой цели можно воспользоваться только приемом наложения и представления детей о луче.

С моделью прямого угла школьники выполняют различные упражнения: накладывают эту модель на углы, тетради, книги и убеждаются, что эти углы прямые; строят прямые углы на клетчатой и нелинованной бумаге. Ученики находят прямые углы на различных предметах. Необходимо строить прямые углы в различном положении на плоскости. Для этого раздаются листочки с начерченными на них лучами и предлагается провести ровные лучи так, чтобы образовались прямые углы. Учащиеся строят их при помощи модели прямого угла и при помощи *чертёжного треугольника*.

Учащиеся также могут использовать программу GeoGebra для построения прямых углов. Они могут убедиться в равенстве прямых углов между собой путем смещения.

Приложение 3. Примеры педагогических приемов

№	Название педагогического приема	Характеристика	Примечание
Постановка целей (повышение интереса к учебному материалу)			
1	Удивляй	Учитель находит угол зрения, при котором даже обыденное становится удивительным.	Рассматриваем фото, на которых изображены половинка бабочки, половинка снежинки, половинка человека, половинка машины, половинка зонтика. Ребята, как вы думаете какие предметы здесь изображены? Чего не хватает?
2	Фантастическая добавка	Учитель дополняет реальные события фантастикой	На уроке герой Винни Пух. Он странно выглядит. Медвежонок ходил за медом, и его покусали пчелы. Теперь щека слева припухла, над глазом справа шишка. Ребята, мы должны помочь Винни Пуху.
Объяснение нового материала			
3	Практичность теории	Введение в теорию учитель осуществляет через практическую задачу, полезность решения которой очевидна	Ребята, возьмите в руки карандаш. Попробуйте удержать его на кончике пальца так, чтобы его левые и правые части (относительно пальца) были на одном уровне. Вы нашли такое положение, карандаш держится на одной точке. Это центр симметрии карандаша.
4	Просмотр видеофрагментов по изучаемым темам	1. без задания 2. с заданием до просмотра 3. с заданием после просмотра	Представить видео: симметричные архитектурные сооружения, животные, птицы, техника, отражение в воде, другое.

Закрепление изученного материала			
5	Повторяем со взаимным контролем	Ученики составляют серию контрольных вопросов к изученному на уроке материалу.	Ученики 1 ряда составляют и задают вопросы ученикам 2 ряда и наоборот
6	Повторяем с расширением	Ученики составляют серию вопросов, дополняющих знания	Сегодня мы изучили тему симметрии прямоугольника. Какие вопросы можно задать о фигуре, отличной от прямоугольника, чтобы выяснить симметрична ли она
7	Свои примеры	Ученики подготавливают свои примеры к новому материалу.	Класс может быть разбит на группы, каждая из которых получает свое задание, например, рассмотреть оси симметрии для фигур: 1 – треугольники, 2 – четырехугольники, 3 – круги
8	Мини – рассказ	1. Составь мини рассказ, используя термины из списка, а так же словосочетания «так как», «потому что», «следовательно», «если - то», и рассказать в классе	Что мы сегодня узнали? С какими понятиями познакомились? Подготовь ответ по проведенному исследованию о симметрии фигуры
Домашнее задание			
9	Творчество работает на будущее	Ученики выполняют творческие домашние задания по изученному материалу	Придумай свои симметричные фигуры. Придумай рисунок-загадку на дорисовывание симметричных элементов фигуры для одноклассника
Игры			
10	«Да-нетка»	Учитель загадывает нечто. Ученики пытаются найти ответ, задавая вопросы. Учитель отвечает только да - нет	Учитель загадывает симметричную фигуру. Ученики задают вопросы о свойствах фигуры, пока не отгадают

11	Игра «Третий лишний»	Набор из различных фигур: многоугольники, овалы, круги, звездочки, снежинки. Необходимо убрать лишнее	Задача: определить лишнего и объяснить выбор, или создать задание и загадать одноклассникам. Задание: В первую коробочку положи фигуры, которые имеют ось симметрии, во вторую – все оставшиеся фигуры. Опиши, какие фигуры оказались во второй коробочке.
Опрос			
12	Опрос по цепочке	Выступление одного ученика прерывается в любом месте и передается другому. И так до завершения	Учитель предлагает фигуру для анализа её свойств и симметрий.
13	Игра-опрос	Игры по типу телевизионных шоу	Учитель создает категории вопросов (по фигурам). Количество баллов определяется сложностью вопроса.
14	Презентация	Индивидуальные или групповые презентации с демонстрацией результатов проекта	Групповой проект – исследование симметрии в архитектуре, растениях, животных.
15	Логическая цепочка.	Учащиеся получают лист с фразами. Их необходимо выстроить в цепочку с причинно-следственной связью. Чтобы каждая предыдущая фраза была причиной последующей.	Пример фраз (уже приведен в правильном порядке): 1. Я нарисовал прямоугольник. 2. Я нашел середины противоположных сторон. 3. Я построил прямую через середины противоположных сторон. 4. Я согнул лист бумаги вдоль прямой. 5. Части прямоугольника совпали. 6. Моя прямая является осью симметрии прямоугольника.

РАЗДЕЛ «ТЕХНОЛОГИИ»

Принципы эффективного применения технологии при преподавании и изучении математики⁸

Одним из самых мощных факторов современного развития математики как науки и преподавания математики как учебного предмета является применение новых технологий. Применение компьютеров содействовало созданию совершенно новых областей математики. В образовании новые технологии повысили значение некоторых идей, сделали решение ряда задач и проблем более доступным, дали новые способы представления и работы с математической информацией, предоставляя возможность выбора содержания и педагогических подходов, которые мы никогда не имели ранее.

Однако не все, что возможно технически, следует осуществлять на практике. На процесс обучения оказывают влияние многие факторы. Их система включает в себя преподавателей, теории обучения и понятия, родителей, учебные программы, интересы и стремления учащихся, ресурсы, культурные ожидания, технологии и многое другое. Можно много говорить об этих факторах, однако влияние каждого из них нельзя полностью понять вне связи с другими. Это особенно относится к технологии, что частично объясняет тот факт, что не существует общепринятого представления об оптимальном применении технологии в учебном процессе. Более того, вопрос заключается даже не в том, какое программное обеспечение или технические средства применить, а в том, как та или иная технология будет работать в рамках конкретной учебной дисциплины, вплоть до рассмотрения того, какое воздействие отдельные вопросы оказывают на конкретного учащегося. Каждый вопрос является уникальным, и то, насколько он эффективен и уместен,

⁸ Based on Goldenberg, P. (2000). Thinking (and talking) about technology in math classrooms. In *Issues in Mathematics Education*. Education Development Center, Inc. Retrieved from: http://www2.edc.org/mcc/pdf/iss_tech.pdf.

следует оценивать в каждом конкретном случае. Важен отбор материала и как сформулированы задачи, а не то, с помощью каких технологий они решаются. Решение задачи с использованием компьютера, равно как и решение на бумаге, может быть эффективным, а может просто отнять у вас время.

Используя новые технологии мы имеем возможность сделать выбор среди множества задач и каким образом они будут представлены. Некоторые задачи слишком трудные для решения на бумаге. Некоторые задачи требуют эксперимента с математическими объектами и наблюдения за реакцией этих объектов. Некоторые задачи требуют визуального представления в виде графиков, диаграмм, геометрических фигур, движущихся объектов в качестве ответов на вопросы учащихся или в виде команд.

По Гольденбергу (Goldenberg) (2000), существует несколько принципов эффективного применения технологии:

1. Следует учитывать различные роли, которые играет технология. Необходимо выбирать технологию в соответствии с целями урока, принимая во внимание конкретные нужды конкретных учащихся. Используйте компьютеры для развития навыков мышления более высокого порядка. Не применяйте компьютеры в качестве карточек для запоминания. Простое «добавление» технологии в качестве средства мотивации может быть неуместно и даже вредно для процесса обучения.
2. Задачи применения технологии должны соответствовать целям урока. Позвольте технологии выполнять свою «работу», при том, что Вы сосредотачиваетесь на основных понятиях. Если уделять слишком большое внимания методикам, применение технологии может быть неоправданно. Применение технических средств не должно отвлекать от главного.
3. Анализ процесса, а не просто запоминание, может быть естественным путем к пониманию главной идеи. Технология, которая затушевывает детали и перескакивает к выводам, не приносит пользы. Технология должна поддерживать процесс мышления, позволять анализировать, и не давать возможность ученику перескочить к результату, минуя этапы решения. Технология призвана помогать учащимся в процессе размышления над задачей, проведения анализа процесса, поиска доказательств и т.д.

4. Технология призвана помочь учащимся развивать способности мышления на высоком уровне. Достигнутое в конечном итоге мышление становится независимым от технологии.
5. Учащиеся должны быть опытными пользователями технических средств. Они должны применять их уверенно, понимая их ограничения и возможности, а также иметь ясное представление о том, как можно применять технические средства для решения сложных задач.

Технологии предоставляют огромные, удивительные, новые возможности, расширяющие область того, чему и как мы можем учить. Некоторые новые учебные программы содержат видение того, как можно применять технологии, а также предоставляют ресурсы и помогают учителям расширять возможности свободного владения новыми средствами обучения. Что нужно делать для этого? Контролировать изменения, сохраняя ясное представление о том, что можно сделать с использованием технологии, учитывая их возможности, но не рассматривая их как руководящее средство. Главное, о чем Вы должны думать – это то, чего Вы хотите от учащихся, принимая во внимание цели каждого урока и нужды каждого ученика, и поставив перед собой задачи, оцените, ведут ли Вас технические средства к решению задач или отвлекают от них.

Изучение элементарной геометрии с использованием программы *GeoGebra*

Появляющиеся компьютерные приложения, такие как *GeoGebra*, дают возможность ученикам всех классов принять участие в интерактивном, основанном на исследовательском подходе, решении задач при изучении геометрии и проведении измерений, развивая при этом компьютерную грамотность. *GeoGebra* – это бесплатное, много-платформенное динамическое математическое программное обеспечение, предназначенное для всех уровней обучения. Простой для применения пакет *GeoGebra* объединяет геометрию, алгебру, работу с таблицами, построение графиков и диаграмм, статистику и высшую математику. В Европе и США эта программа получила несколько наград, присуждаемых программному обеспечению, создаваемому в образовательных целях.

Краткие сведения о *GeoGebra*

- Дает возможность построения графиков, диаграмм, таблиц и проведения алгебраических действий, которые взаимосвязаны и в полной мере являются динамическими
- Характеризуется простым для применения интерфейсом, имеющим, тем не менее, много эффективных функций
- Включает средства автоматизированной разработки учебных курсов, предоставляющие возможность создавать интерактивные учебные материалы, такие как веб-страницы
- Программа, работающая на многих языках, доступна миллионам пользователей во всем мире
- Программа с открытым исходным кодом является бесплатной

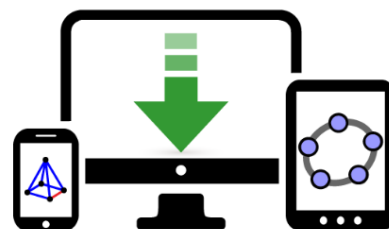
Онлайн-ресурсы

- Официальный сайт *GeoGebra* (<http://www.GeoGebra.org/>) – узнайте больше о *GeoGebra* и загрузите *GeoGebra* с этого сайта (бесплатное программное обеспечение)
- *GeoGebra* на канале YouTube (<https://www.youtube.com/GeoGebraChannel>) – обучающие видео и примеры использования *GeoGebra* в школах
- Сайт для хранения *GeoGebra* (<http://tube.GeoGebra.org/>) – пользователи *GeoGebra* делятся приложениями и планами уроков

Загрузка и установка *GeoGebra* на Вашем компьютере или планшете

Инструкции для использования на компьютере:

1. Включите Google Chrome и перейдите на официальный веб-сайт *GeoGebra* <http://www.GeoGebra.org/>. Щелкните на вкладку Загрузки (Downloads).



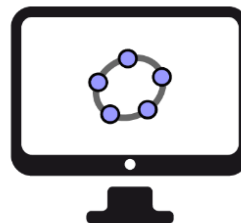
2. Выберите одну из опций, доступных для стационарных компьютеров:

- a. Приложение Chrome – добавляет веб-приложение и не требует административного доступа к компьютеру, нужен доступ к интернету при использовании приложения
- b. Windows, Mac OS X или Linux – загружает пакет программного обеспечения, которое может применяться без доступа к интернету

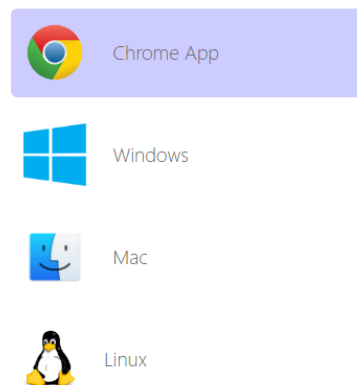
Примечание: в этом курсе мы будем использовать веб-приложение.

Инструкция к применению для планшета:

1. Получите доступ к Apple Store на устройстве на платформе iOS или Play Маркет на устройстве на платформе Android.
2. Проведите поиск приложения GeoGebra
3. Скачайте приложение на свое устройство
4. В качестве альтернативы выйдите на официальный веб-сайт GeoGebra, выберите опцию Скачать, а затем выберите опцию GeoGebra для планшета.



GeoGebra для персональных компьютеров



GeoGebra для планшетов



Инструкция по применению инструментальных средств по геометрии для программы *GeoGebra* базового уровня

Некоторые из инструментальных средств *GeoGebra* имеют наглядный характер и понятны и без значительной теоретической подготовки по геометрии. Для этих инструментальных средств имеются учебные инструктивные файлы для учащихся, как показано в таблице ниже. Инструкции для каждого задания включены в соответствующий файл *GeoGebra* (.ggb). Каждый такой файл мотивирует учащихся к экспериментированию с инструментальными средствами. Задания сконструированы так, чтобы занимать короткий период времени, примерно 10 – 15 минут. В классе эти задания могут использоваться отдельными учащимися или коллективно с применением интерактивной доски.

Для других инструментальных средств, особенно относящихся к последним классам начальной школы, само инструментальное средство представляет собой новое понятие, например, инструментальное средство ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ (PARALLEL LINE) или инструментальное средство ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ (PERPENDICULAR LINE). Эти инструментальные средства представлены на уроках *GeoGebra*, которые также вводят и разъясняют связанное понятие.

Базовые инструментальные средства *GeoGebra* – обучающие файлы

Загрузите обучающие файлы на свой компьютер. Затем выполните каждое задание согласно инструкциям, имеющимся в каждом файле.



Обучающий_курс_1_движение_A.ggb

Обучающий_курс_2_движение_B.ggb

ПЕРЕМЕЩАТЬ

А. Перемещение объектов, таких как прямые или многоугольники, целиком.

В. Передвижение точки прямой или многоугольника, приводящее к изменению прямых или многоугольников.



Обучающий_курс
_3_точка.ggb

ТОЧКА

Построить точку на плоскости



Обучающий_курс
_4_прямая.ggb

ПРЯМАЯ

Используя две точки построить прямую на плоскости



Обучающий_курс_5_отре-
зок.ggb

ОТРЕЗОК

Используйте любые две точки для построения отрезка прямой на плоскости



Обучающий_курс_6_рас-
стояние_длина.ggb

РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА

Рассчитайте и покажите расстояние между двумя точками, длину отрезка прямой или периметра многоугольника



Обучающий_курс_7_мно-
гоугольник.ggb

МНОГОУГОЛЬНИК

Начертите многоугольники любого размера и типа



Обучающий_курс_8_пло-
щадь.ggb

ПЛОЩАДЬ

Рассчитайте и покажите площадь многоугольника или круга



Обучаю-
щий_курс_9_текст.ggb

ТЕКСТ

Создайте ярлыки для рамок с текстом на странице *GeoGebra*



Обучающий курс_10_пере-
местить_чертеж.ggb

ПЕРЕМЕСТИТЬ ЧЕРТЕЖ

Передвиньте экранное окно на другое место на общей странице *GeoGebra*.



Обучающий_курс_11_об-
щая_практика.ggb

Используйте базовые инструмен-
тальные средства для геометриче-
ских построений.

Уроки *GeoGebra* для изучения элементарной геометрии

Вступление

Каждый урок включает раздаточный материал для учащихся, являющийся неотъемлемой частью плана урока, а также соответствующий файл *GeoGebra*. Существуют, по крайней мере, три основные методики включения *GeoGebra* в учебный процесс:

- а) Учителя используют *GeoGebra* для создания “динамических рабочих листов” для самостоятельной работы учащихся. *GeoGebra* предоставляет учителям инструментальное средство для создания индивидуализированных интерактивных обучающих материалов, так называемых “динамических рабочих листов” путем экспорта динамических фигур на веб-страницы.
- б) Интерактивные презентации, основанные на *GeoGebra*, как в формате “динамических рабочих листов”, так и в виде стандартных файлов *GeoGebra*, могут быть использованы для инструктирования малых или больших групп учащихся через применение технологий интерактивной доски, что является обычной практикой в начальной школе.
- с) Обучение учеников применению *GeoGebra* с целью создания собственных геометрических построений, которое проводится в то время, как они экспериментируют и решают задачи, связанные с концепциями, процедурами и математическими выкладками, относящимися к геометрии. Различные инструментальные средства *GeoGebra*, используемые для геометрических построений, могут сами использоваться для инструктирования при, например, экспериментировании с инструментальным средством «параллельные прямые» с целью выяснения смысла понятия «параллельность».

Все эти методики использования *GeoGebra* представлены в плане решения задач по геометрии, включенных в данные материалы. Хотя все они могут быть полезными в зависимости от конкретных целей обучения, если основная цель состоит в том, чтобы развивать навыки работы учащихся с программным обеспечением *GeoGebra*, которое может быть применено также в средних и старших классах школы,

приоритетом должно являться развитие умения учащихся начальной школы не только взаимодействовать с динамическими рабочими листами, разработанными учителем, но также использовать базовые геометрические построения и измерительные инструментальные средства *GeoGebra* с целью исследования понятий и решения задач.

Эти материалы используют педагогические методы и технологии, предполагающие такой подход к изучению геометрии, который сосредоточен на концептуальном понимании предмета на основе направляемой учителем поисково-исследовательской работы включающей геометрические построения, в противоположность изучению математики, на основе запоминания материала без глубокого понимания.

ДРОБИ И ПЛОЩАДЬ (4 УРОКА)

1. Нахождение половин – прямоугольники
Найдите как можно больше способов разделить прямоугольник на половины.
2. Нахождение половин – нестандартные фигуры
Разделите на половины различные фигуры неправильной формы.
3. Нахождение третей – прямоугольники
Найдите как можно больше способов деления прямоугольника на трети.
4. Нахождение третей – нестандартные фигуры
Разделите на трети различные фигуры неправильной формы.

1. Нахождение половин – прямоугольники

Вступление и предварительная информация

В этом упражнении найдите способ деления прямоугольников пополам, но учтите, то Вам потребуется проявить творческий подход! Следует иметь в виду, что половины прямоугольника не всегда выглядят одинаково (являются равными).



Задачи



- Используйте инструментальное средство ОТРЕЗОК и инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) для экспериментального нахождения максимально большого количества способов деления прямоугольника на две равно-великие части – части, имеющие одинаковую площадь
- Начертите каждое решение на прямоугольниках на экране *GeoGebra*.



Проверьте свою работу



- Проверка: Каждая половина должна иметь одну и ту же площадь. В ПАНЕЛИ НАСТРОЙКИ СТИЛЯ используйте СЕТКУ, чтобы убедиться, что площади одинаковы.
- Проверка: Если Вам требуется распечатать и вырезать свое решение, следует вырезать его вдоль прямой или прямых, которые Вы добавили, после вырезания должно быть только две части.
- Проверка: Каждое решение должно быть новым. Если Вы можете получить тот же чертеж, перевернув или повернув уже имеющееся изображение, это НЕ является новым решением.



Имеются ли у Вас другие решения?

- Если Вы можете представить другие решения, кроме этих 8-ми, продвиньтесь вниз на чертежной плоскости, начертите больше прямоугольников тех же размеров, и покажите Ваши дополнительные решения.

Напечатайте и обсудите

- Когда Вы найдете все способы деления каждого многоугольника на половины, распечатайте экран *GeoGebra*.
- Найдите партнера, который также закончил эту работу, и сравните ваши отрезки прямых.
- Согласны ли вы друг с другом? Нашли ли вы разные решения?

2. Нахождение половин – нестандартные формы

Вступление и предварительная информация

В этом упражнении найдите способ деления произвольных многоугольников пополам, но учтите, то Вам потребуется проявить творческий подход! Следует иметь в виду, что половины многоугольника не всегда выглядят одинаково (являются равными).

Файл GeoGebra: 2_нахождение_половин.ggb



Задача

- Используйте инструментальное средство ОТРЕЗОК для построения отрезка прямой, который делит каждый многоугольник на равные половины.
- Имеется ли более одного способа сделать это?
- Если это возможно, используйте другой отрезок прямой для того, чтобы разделить многоугольник иным способом.

Распечатайте и обсудите

- Когда Вы найдете все способы, с помощью которых можно разделить каждый многоугольник на половины, распечатайте экран *GeoGebra*.
- Найдите партнера, который также закончил выполнение задания, и сравните Ваши отрезки прямых. Согласны ли Вы друг с другом?
- Если Вы видите отрезок прямой, который, как Вы полагаете, в действительности не делит многоугольник на половины, поделитесь этим, а затем обсудите, почему Вы так считаете.

3. Нахождение третей – прямоугольники

Вступление и предварительная информация

В этом упражнении найдите способ деления прямоугольников на трети, но учтите, то Вам потребуется проявить творческий подход! Следует иметь в виду, что трети прямоугольника не всегда выглядят одинаково (являются равными).



Задача



- Используйте инструментальное средство ОТРЕЗОК и инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) для экспериментального нахождения максимально большого количества способов деления прямоугольника на 3 равные части—части, имеющие одинаковые площади.
- Начертите каждый вариант решения на прямоугольниках на экране *GeoGebra*.



Проверьте свою работу



- Проверка: Каждая треть должна иметь одинаковую площадь. В ПАНЕЛИ НАСТРОЙКИ СТИЛЯ используйте СЕТКУ для того, чтобы проверить их равенство.
- Проверка: Если Вам нужно распечатать и вырезать свое решение, вырезайте фигуры вдоль линии или линий, которые Вы добавили; после вырезания должно быть только три части.
- Проверка: Каждое решение должно быть новым. Если Вы можете получить тот же чертеж, перевернув или повернув уже имеющееся изображение, это НЕ является новым решением



Есть ли у Вас другие решения?

- Если Вы можете найти больше этих 6 решений, продвигайтесь вниз на чертежной плоскости, начертите больше прямоугольников тех же размеров, и покажите Ваши дополнительные решения.

Напечатайте и обсудите

- Когда Вы найдете все способы деления каждого многоугольника на трети, распечатайте экран *GeoGebra*. Найдите партнера, который также закончил эту работу, и сравните ваши отрезки прямых.
- Согласны ли вы друг с другом? Нашли ли вы разные решения?

4. Нахождение третей – нестандартные формы

Вступление и предварительная информация

В этом упражнении найдите способ деления произвольных многоугольников на трети, но учтите, то Вам потребуется проявить творческий подход! Следует иметь в виду, что трети многоугольника не всегда выглядят одинаково (являются равными).

Файл GeoGebra: 4_нахождение_третей.ggb



Задача

- Используйте инструментальное средство ОТРЕЗОК для построения отрезка прямой, который делит каждый многоугольник на трети.
- Имеется ли более одного способа сделать это?
- Если это возможно, используйте другой отрезок прямой для того, чтобы разделить многоугольник иным способом.

Распечатайте

- Когда Вы найдете все способы, с помощью которых можно разделить каждый многоугольник на трети, распечатайте экран *GeoGebra*.
- Найдите партнера, который также закончил выполнение задания, и сравните Ваши отрезки прямых.
- Согласны ли Вы друг с другом?
- Если Вы видите отрезок прямой, который, как Вы полагаете, в действительности не делит многоугольник на трети, три равные доли, поделитесь этим, а затем обсудите, почему Вы так считаете.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ (2 УРОКА)

1. Классификация четырехугольников

Четырехугольники делятся на прямоугольники, квадраты и ромбы. Включает нечетырехугольники.

2. Художественное изображение из четырехугольников

Создайте художественную композицию из пяти различных четырехугольников.

1. Классификация четырехугольников

Файл GeoGebra: 1_классификация_четыреугольники.ggb



Сортировка по видам

- Используйте инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ для сортировки по видам многоугольников, «перетаскивая» их в соответствующие рамки.



Построение

- В пространстве слева от заполненных рамок, используйте инструментальное средство МНОГОУГОЛЬНИК для построения новых фигур, которые могут войти в каждую из рамок:
 - а. Один прямоугольник
 - б. Один квадрат
 - в. Один ромб
 - д. Один иной четырехугольник, не являющийся прямоугольником, квадратом или ромбом
 - е. Один многоугольник, который не является четырехугольником



- Не «перетаскивайте» эти новые фигуры в рамки. Вместо этого, используйте инструментальное средство ТЕКСТ для маркировки каждой новой фигуры, указав ее название:
 - а. Прямоугольник
 - б. Квадрат
 - в. Ромб
 - д. Иной четырехугольник
 - е. Нечетырехугольник

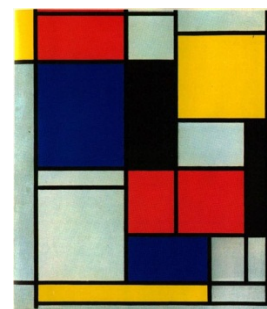
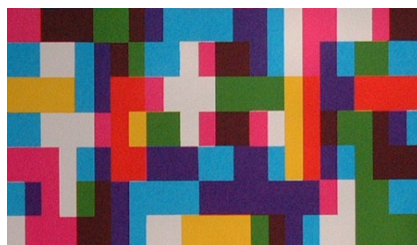
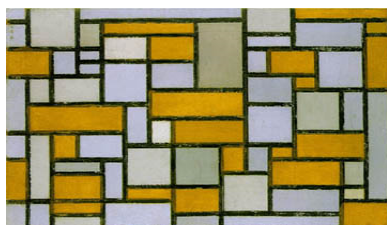
Напечатайте и обсудите

- Когда Вы закончите построение и маркировку, распечатайте страницу *GeoGebra*.
- Найдите партнера, который также закончил работу и распечатал ее.

- Сравните ваши сортировки. Согласны ли Вы с сортировкой многоугольников Вашего партнера? Если нет, обсудите, как Вы решили, к какой рамке относится многоугольник, вызвавший разногласия.
- Обсудите многоугольники, построенные друг другом. Проверьте, согласны ли вы, что они были промаркированы правильно.

2. Художественные изображения на основе четырехугольников

Некоторые художники, например Пайет Мондриан (Piet Mondrian) использовали большое количество геометрических фигур, в частности, четырехугольников, в своих художественных произведениях.



Файл GeoGebra: 2_искусство_четыреугольники

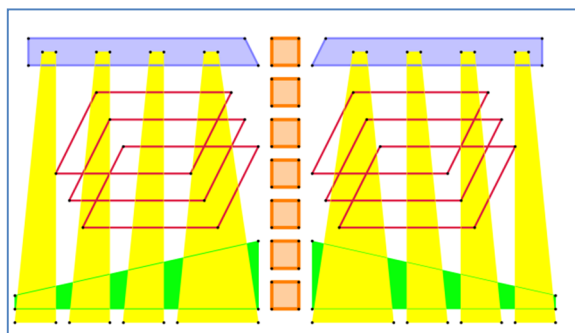


Рисунок на странице *GeoGebra* был построен с использованием различных четырехугольников.



Очистка рабочего пространства

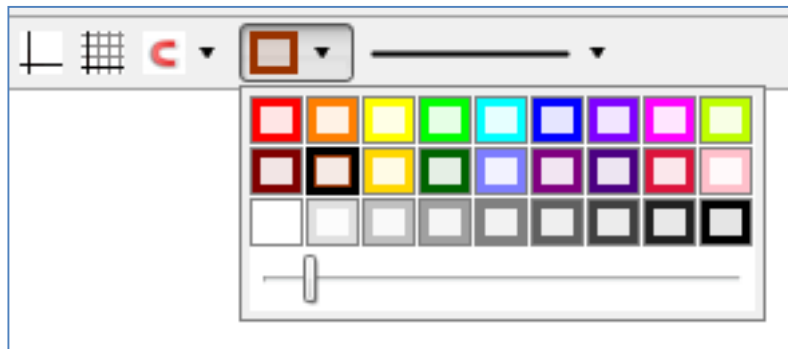


- Используйте **ВЫДЕЛИТЬ ВСЕ** из меню **ПРАВКИ**. Затем используйте клавишу **УДАЛЕНИЕ** на клавиатуре, чтобы очистить страницу *GeoGebra*.



Создание

- Используйте инструментальное средство МНОГОУГОЛЬНИК для создания рисунка, включающего, по крайней мере, одну из следующих фигур:
 - а. Параллелограмм
 - б. Прямоугольник
 - с. Квадрат
 - д. Ромб
 - е. Трапеция
- Может оказаться более легким построение рисунка с включенным средством СЕТКА, но выключите его, если Вы хотите распечатать свой рисунок.
- После того, как Вы выбрали инструментальное средство МНОГОУГОЛЬНИК, обратите внимание, что Вы можете выбрать цвет многоугольников и его интенсивность до того, как приступите к построению многоугольников.



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ И ОТРЕЗКИ ПРЯМЫХ (2 УРОКА)

1. Инструментальное средство ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ – какую функцию оно выполняет?
Учащиеся используют инструментальное средство *GeoGebra* ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ для достижения понимания понятия «параллельность» через экспериментальную работу и наблюдение.
2. Инструментальное средство ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ – какую функцию оно выполняет?

Учащиеся используют инструментальное средство *GeoGebra* ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ для достижения понимания понятия «перпендикулярность» через экспериментальную работу и наблюдение.

1. Инструментальное средство ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ – какую функцию оно выполняет?

Файл GeoGebra: 1_открытие_параллельность.ggb

Построение

- На странице *GeoGebra* Вы увидите четыре геометрических фигуры:
 - а. Точка А
 - б. Точка В
 - с. Точка С
 - д. Прямая ВС



- На панели инструментов имеется инструментальное средство ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ.
- Щелкните по инструментальному средству ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ, чтобы выбрать его. Обратите внимание на указания по применению этого инструментального средства *GeoGebra*:

Параллельная прямая
Укажите точку и параллельную прямую



- Щелкните сначала по Точке А, а затем щелкните по прямой ВС. Будет построена новая параллельная прямая.
- Но что такое «параллельная прямая»?



Эксперимент

- Используйте инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ для проведения эксперимента путем перемещения точек А, В или С. Переместите также две прямые. Проведите наблюдения.



- Если требуется, используйте инструментальные средства **УВЕЛИЧИТЬ** или **УМЕНЬШИТЬ** для изменения видимого изображения.

Новое построение



- Используйте инструментальное средство **УДАЛИТЬ**, щелкнув которым по точке или прямой линии на странице *GeoGebra* можно удалить объекты.
- Теперь используйте инструментальное средство **ТОЧКА**, инструментальное средство **ПРЯМАЯ**, а также инструментальное средство **ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ** для построения собственных параллельных прямых и повторного проведения экспериментов по перемещению точек или прямых.

Выводы

- Итак, что такое параллельная прямая? Напишите свои выводы ниже:

2. Инструментальное средство ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ (Perpendicular Line) – Какую функцию оно выполняет?

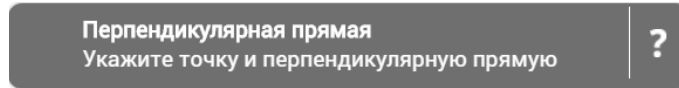
Файл GeoGebra: 2_открытие_перпендикулярность.ggb

Построение

- На странице *GeoGebra* Вы увидите 4 геометрические фигуры:
 - а. Точка А
 - б. Точка В
 - с. Точка С
 - д. Прямая ВС



- На панели инструментов имеется инструментальное средство ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ. Щелкните по инструментальному средству ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ, чтобы выбрать его. Обратите внимание на указания по применению этого инструментального средства *GeoGebra*:



- Щелкните сначала по Точке А, а затем щелкните по прямой ВС. Будет построена новая перпендикулярная прямая.
- Но что такое «перпендикулярная прямая»?



Эксперимент

- Используйте инструментальное средство ПЕРЕМЕЩЕНИЕ (MOVE) для проведения эксперимента путем перемещения точек А, В или С (Points A, B, or C). Переместите также две прямые. Проведите наблюдения.
- Если требуется, используйте инструментальные средства УВЕЛИЧИТЬ ИЗОБРАЖЕНИЕ (ZOOM IN) или УМЕНЬШИТЬ ИЗОБРАЖЕНИЕ (ZOOM OUT) для изменения видимого изображения.



New Construction

- Используйте инструментальное средство УДАЛИТЬ ОБЪЕКТ (DELETE OBJECT), щелкнув которым по точке или прямой линии на странице *GeoGebra* можно удалить объекты.
- Теперь используйте инструментальное средство НОВАЯ ТОЧКА (NEW POINT), инструментальное средство ПРЯМАЯ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ (LINE THROUGH TWO POINTS), а также инструментальное средство ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ (PERPENDICULAR LINE) для построения собственных перпендикулярных прямых и повторного проведения экспериментов по перемещению точек или прямых.



Выводы

- Итак, что такое перпендикулярная прямая? Напишите свои выводы ниже:

ПРОВЕДЕНИЕ КЛАССИФИКАЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЕЙ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ (2 УРОКА)

1. Построение параллелограммов
Задача на построение показывает параллельные прямые как характерный признак некоторых четырехугольников.
2. Построение прямоугольников
Задача на построение показывает перпендикулярные прямые как характерный признак некоторых четырехугольников.

1. Построение параллелограммов

Предварительная информация

Как мы узнаем, что определенную фигуру можно назвать параллелограммом? Что делает геометрическую фигуру параллелограммом? Эта работа позволит изучить один признак параллелограммов.



Задача на построение

- На странице *GeoGebra* строят две прямые: **прямая EB** и **прямая BC**.
- Используя только инструментальное средство **ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ**, можете ли Вы построить параллелограмм, путем дополнительного построения к **прямой EB** и **прямой BC**?



Эксперимент и выводы

- После того, как Вы построите свой параллелограмм, используйте инструментальное средство ПЕРЕМЕЩЕНИЕ (указатель), для «перетаскивания» точек **Е**, **В** и **С** на другие места на координатной сети.
- На основе этого построения, определите, что такое **параллелограмм**, используя понятие «параллельные прямые»:
 - *Параллелограмм – это фигура, ...*
- Какие другие распространенные геометрические фигуры можно создать, проведя определенные действия с Вашим параллелограммом?
- Можете ли Вы создать прямоугольник? Прямоугольник – это просто особый вид параллелограмма.
- Можете ли Вы создать квадрат? Квадрат – это просто особый вид прямоугольника.

2. Построение прямоугольников

Предварительная информация

Как Вы узнаете, что определенную фигуру можно назвать «**прямоугольник**»?»

Что делает геометрическую фигуру прямоугольником?

Эта работа позволит изучить один признак прямоугольников.



Задача на построение

- На странице *GeoGebra* имеется **прямая АВ**.
- Используя только инструментальное средство ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПРЯМАЯ, можете ли Вы построить прямоугольник путем дополнительного построения к **прямой АВ**?



Эксперимент и выводы

- После того, как Вы построили свой прямоугольник, используйте инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) для «перетаскивания» точек по координатной сети и манипуляции Вашего прямоугольника.
- На основе данного построения дайте определение **прямоугольника**, используя понятие перпендикулярных прямых:
 - *Прямоугольник – это четырехугольник, ...*
- Можете ли Вы построить квадрат? Квадрат – это просто особый вид прямоугольника.
- После того, как Вы построите прямоугольник и квадрат с помощью перпендикулярных прямых, что Вы можете сказать об углах внутри прямоугольника или квадрата?

СИММЕТРИЯ (7 УРОКОВ)

1. Отражение

Учащиеся работают над понятием симметрии

2. Найти симметрию

Построить ось симметрии для данных фигур

3. Симметрия в природе

Найдите симметрию в природных объектах

4. Задачи на симметрию

Перед учащимся ставится задача построить геометрические фигуры, соответствующие критериям, связанным с симметрией.

5. Искусство оригами и симметрия

Моделирование изготовления геометрических фигур путем сложения и вырезания фигур из бумаги с целью создания объектов, основанных на симметрии

6. Создание задачи на симметрию – одна ось симметрии

Учащиеся строят неизвестную фигуру на основе данной оси симметрии и части фигуры (5 заданий)

7. Создание задачи на симметрию – две оси симметрии
Учащиеся строят неизвестную фигуру на основе данных осей симметрии и части фигуры (3 задания)

1. Отражение

Файл GeoGebra: 1_определение_симметрии.ggb



Предварительная информация

- Используя инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель), щелкните по кнопке-флажку ЩЕЛКНИТЕ, ЧТОБЫ ПОКАЗАТЬ ОТРЕЗКИ.
- Представьте, какой рисунок был бы создан, если бы Вы могли создать точную копию каждой фигуры, а затем сложить ее вдоль обозначенных оранжевыми точками прямых. Другой способ представить себе этот процесс – это вообразить отражение каждой фигуры в зеркале, расположенном вдоль обозначенной оранжевыми точками прямой.
- *GeoGebra* выполнит отражение для Вас.



Постройка отражений

- Выберите инструментальное средство ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ.
- Для того, чтобы использовать это инструментальное средство, сначала кликните по красной фигуре, затем осторожно кликните по отрезку прямой обозначенной оранжевыми точками, касающейся красной фигуры.



- Используя инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель), кликните по кнопке-флажку, чтобы *спрятать* отрезки оранжевой прямой. Теперь Вы можете видеть новую красную фигуру, созданную путем отражения первоначальной красной фигуры относительно отрезка прямой.



- Используя инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель), кликните по кнопке-флажку, чтобы *спрятать* отрезки прямой снова.



- Теперь используйте инструментальное средство ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ, чтобы создать отражения остающихся пяти фигур. Прежде чем Вы выполните это действие с каждой фигурой, попробуйте представить, как будет выглядеть получившаяся фигура.



Где геометрия?

- Используя инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель), кликните по кнопке-флажку, чтобы *скрыть* отрезки оранжевой прямой. Теперь Вы можете видеть все Ваши новые фигуры, созданные путем отражения относительно отрезка прямой.
- Каждая из этих новых фигур имеет признак, который в геометрии называется осевой *симметрией*.



- Используя инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель), кликните по кнопке-флажку, чтобы *показать* отрезки прямых снова.
- Отрезки прямых обозначенных оранжевыми точками называются *осями симметрии* каждой новой фигуры.

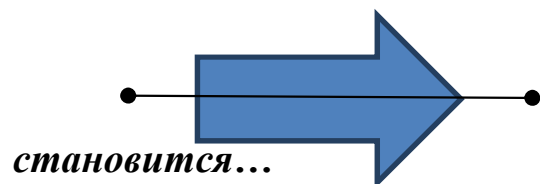
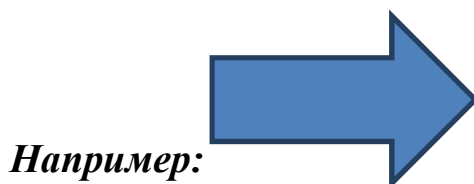
2. Найдите осевую симметрию

Файл GeoGebra: 2_найти_одну_ось_симметрии.ggb



Построение осей симметрии

- Каждая из этих фигур имеет одну ось симметрии.
- Используйте инструментальное средство ОТРЕЗОК для построения наиболее точной оценки того, где расположена ось симметрии для данной фигуры.



Проверьте свою работу

- Когда Вы закончите построение всех шести осей симметрии, используйте инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель) для того, чтобы кликнуть кнопки-флажки, чтобы проверить свой ответ.

3. Симметрия в природе

Предварительная информация

Симметрия – это не только концепция, рассматриваемая при изучении геометрии. Симметрия часто встречается в мире природы.

Файл GeoGebra: 3_симметрия_природа.ggb



Найдите оси симметрии

- Изучите каждую картинку. Постарайтесь обнаружить симметрию в каждом природном объекте.
- Используйте инструментальное средство ОТРЕЗОК, чтобы построить ось симметрии для каждого природного объекта.



Проверьте свои идеи

- Используя инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ (указатель), кликните по кнопке-флажку, чтобы проверить свои ответы.

4. Задачи на симметрию

Файл GeoGebra:4_симметрия_задачи.ggb



- Используйте или инструментальное средство МНОГОУГОЛЬНИК или инструментальное средство ОТРЕЗОК для завершения построений с целью решения этих задач.



Задача 1

- Постройте геометрическую фигуру, имеющую только одну ось симметрии.
- Проведите маркировку оси симметрии, используя инструментальное средство ОТРЕЗОК.



Задача 2

- Постройте геометрическую фигуру, имеющую только две оси симметрии.
- Проведите маркировку осей симметрии, используя инструментальное средство ОТРЕЗОК.

Задача 3

- Постройте геометрическую фигуру без осей симметрий.



Задача 4

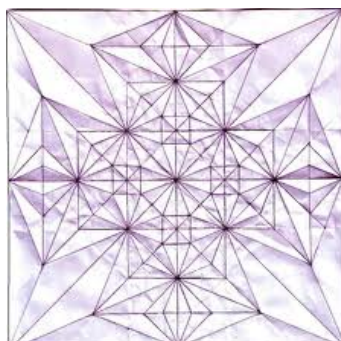
- Постройте геометрическую фигуру, имеющую более двух осей симметрии.
- Проведите маркировку осей симметрии, используя инструментальное средство ОТРЕЗОК.

Последующие действия

- Распечатайте чертежи *GeoGebra* и сравните Ваши построения с построениями Вашего партнера. Проверьте правильность работы друг друга.

5. Симметрия в узорах, созданных в технике оригами

(Адаптировано из рабочего листа *GeoGebra* Даниэля Ментрарда (Daniel Mentrard))



Эти изображения являются примерами узоров, созданных на основе симметрии. Если Вы когда-нибудь изготовили снежинку из сложенной несколько раз бумаги, Вы создали узор, используя симметрию.

Файл GeoGebra: 5_симметрия_оригами. ggb



Создайте

- Когда Вы откроете файл *GeoGebra*, Вы увидите лист бумаги, сложенный дважды.
- Используйте инструментальное средство ПЕРЕМЕЩЕНИЕ для того, чтобы развернуть бумагу, используя ползунок вверху страницы:



- Теперь используйте ползунок для того, чтобы снова сложить бумагу в маленький квадрат.
- Используйте инструментальное средство ПЕРЕМЕЩЕНИЕ для того, чтобы захватить и передвигать шесть красных точек, чтобы «вырезать» новую фигуру в бумаге.
- Постарайтесь представить, как будет выглядеть Ваш узор, когда Вы развернете бумагу.
- Теперь используйте ползунок, чтобы развернуть бумагу и посмотреть Ваш симметричный узор.
- Поэкспериментируйте с разными «разрезами». Если Вы создадите узор, который Вам особенно понравится, распечатайте его.

6. Создание задачи на симметрию – одна ось симметрии

Файлы GeoGebra: 6_создать_симметричную_фигуру.ggb (всего 5 файлов, маркированных ба – бе)

Предварительная информация

- На каждой странице *GeoGebra* имеется два объекта:
 1. Ось симметрии
 2. Половина симметричной фигуры

Задача

- Имея ось симметрии и половину фигуры, постройте недостающую часть фигуры.



Предложения



- Используйте инструментальное средство ТОЧКА и инструментальное средство ОТРЕЗОК, чтобы построить недостающую половину симметричной фигуры.

Совет: Эту задачу намного легче решить, если предварительно включить инструментальное средство СЕТКА.



Проверьте свое построение

- После того, как Вы закончите построение, проверьте свое решение, используя инструментальное средство ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ. После того, как Вы выберете это инструментальное средство, просто кликните по линии симметрии. Инструментальное средство ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ создаст недостающую половину всей фигуры.
- Проверьте, чтобы удостовериться в том, что Ваше построение действительно является недостающей частью симметричной фигуры.

7. Создание задачи на симметрию – две оси симметрии

Файлы GeoGebra: 7_создать_задачу_на_симметрию.ggb (всего 3 файла, маркированных 7a – 7c)

Предварительная информация

- На каждой странице *GeoGebra* имеется два объекта:
 1. Две оси симметрии (показаны красной пунктирной линией)
 2. Четверть неизвестной симметричной фигуры

Задача

- На основе данных осей симметрии и имеющейся фигуры создать неизвестную симметричную фигуру.

- Другими словами, постройте недостающие $\frac{3}{4}$ неизвестной фигуры.



Рекомендации

- Используйте инструментальное средство ТОЧКА и инструментальное средство ОТРЕЗОК для построения недостающих четвертей неизвестной симметричной фигуры.

Совет: Эту задачу намного легче решить, если предварительно включить инструментальное средство СЕТКА.

Проверьте свое построение

- После того, как Вы закончите свое построение, проверьте свое решение, используя инструментальное средство ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ. После того, как Вы выбрали это средство, просто кликните по первоначальной фигуре, а затем кликните по линии симметрии. Инструментальное средство ОТРАЖЕНИЕ ОБЪЕКТА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ создаст недостающую часть всей фигуры.
- Повторите этот процесс, пока Вы не создадите изображение всей симметричной фигуры.
- Проверьте, действительно ли Ваше построение является недостающей частью симметричной фигуры.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛОСКИХ ФИГУР (1 УРОК)

Правильные многоугольники

Постройте правильные многоугольники, выучите их названия и выясните определение правильного многоугольника.

Файл GeoGebra: правильные_многоугольники.ggb

Правильные многоугольники



Предварительная информация

- Одно из инструментальных средств *GeoGebra*, используемых для геометрических построений, это инструментальное средство ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК. В этой работе Вы используете это инструментальное средство для выяснения того, что в геометрии понимается под *правильным многоугольником*.

Постройте правильный многоугольник с 3 сторонами

- Выберите инструментальное средство ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК (REGULAR POLYGON).
- Обратите внимание на указания в строке меню:

Правильный многоугольник
Укажите две вершины и общее число вершин



- Выберите начальную точку недалеко от верха страницы и кликните. Выберите вторую точку и кликните. Теперь Вам нужно будет ввести количество сторон Вашего многоугольника:

Правильный многоугольник

Вершины

OK Отмена

- Измените 4 на 3 и кликните ОК.
- Вы можете использовать инструментальное средство ПЕРЕМЕЩАТЬ для того, чтобы захватить и «перетащить» любую вершину многоугольника, меняя тем самым его размер и расположение.
- Выберите инструментальное средство УГОЛ и кликните по центру Вашего многоугольника для того, чтобы указать величину всех внутренних углов, т.е. углов внутри многоугольника.
- Выберите инструментальное средство РАССТОЯНИЕ ИЛИ ДЛИНА и укажите длины всех сторон Вашего многоугольника.
- Наконец, кликните по кнопке-флажку “3”, чтобы узнать название этого многоугольника, построенного Вами.



Внесение сведений в таблицу данных

- В таблице заполните строку для 3-стороннего правильного многоугольника.
- Затем удалите Ваш многоугольник и постройте следующий многоугольник указанный в таблице. Заполните соответствующую строку в таблице.

Таблица данных			
Количество сторон	Название	Величина внутренних углов	Длина сторон
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Выводы

- После заполнения таблицы, какое определение Вы можете дать *правильному многоугольнику*?

Шаблон для составления плана урока

Рекомендации: заполните каждый раздел шаблона плана урока, представив данные, необходимые для лучшего понимания хода урока, а также информацию о применении программы GeoGebra Вами и Вашими учениками в ходе урока. В дополнение к этому шаблону, Вы должны предоставить два отдельных файла: раздаточный материал для учащихся, который должен применяться с программой GeoGebra, и файл GeoGebra. Раздаточный материал, касающийся работы учащихся, предоставит им инструкции по применению технологий, необходимых для выполнения рабочих заданий. Указания, которые должны выполнять учащиеся, должны содержать вопросы, на которые ученики обязаны дать ответы, чтобы выполнить задачи урока. Раздаточный материал должен выглядеть привлекательно и аккуратно. Он будет включать название, вступление и учебные цели для учащихся, а также место для фамилии и имени ученика и даты. Использование графических объектов в технологических инструкциях обязательно.

Имя и фамилия ученика:		Тема урока:	
Учебный предмет:		Класс:	Количество учащихся:
Тип программы обучения: общеобразовательный класс, гимназический класс, класс с углубленным изучением. Процент детей с ОВЗ. Процент детей, не говорящих по-русски.		Продолжительность урока:	
Описание урока (включая деление учащихся на группы):			
<i>Напишите краткое и четкое описание происходящего на уроке. Объясните, как ученики будут использовать GeoGebra, и как будет проводиться деление учеников на группы во время работы с GeoGebra.</i>			

Выполнение государственных образовательных стандартов на уроке:

Обратитесь к федеральному государственному образовательному стандарту начального общего образования. Согласно классу, выберите соответствующие требования к результатам освоения основной образовательной программы начального общего образования

Образовательные цели:

Запишите образовательные цели (результаты обучения), которые ученик должен выполнить на данном уроке. Каждая цель должна быть записана с новой строки.

Материалы, ресурсы и технологии:

Составьте список материалов, ресурсов и технологий, требуемых для проведения данного урока. Вы должны также включать ссылку на, по крайней мере, один заслуживающий доверия печатный или онлайн-ресурс, используемый для представления учебных знаний на уроке (это может быть учебник для данного класса и предмета, онлайн ресурс учебного плана и т.д.). Если учащиеся будут использовать сайты в Интернете, необходимо включать название, которое могло бы использоваться в качестве закладки, а также действующий адрес URL для каждого сайта в Интернете.

Подготовка учителя:

Объясните (используя нумерованный список) каждый шаг, который учитель должен выполнить, чтобы подготовиться к уроку. Этот список может включать, например, план урока, сбор материала, нахождение сайтов и закладок в Интернете, распечатку копий раздаточных материалов и т.д.

Деятельность учащихся:

Объясните, каким образом учащиеся будут активно вовлечены в урочную деятельность. Объясните, как они будут работать в ходе урока, выполняя задачи, поставленные перед ними. Должно быть дано краткое описание каждой части урока. (В официальном плане урока этот раздел был бы подробной пошаговой инструкцией к выполнению действий в ходе урока. В этом формате данный раздел должен быть выполнен в виде повествования, состоя-

щего из 2-3 абзацев. Изложение должно быть достаточно полным, но сжатым). Основное внимание в этом разделе должно быть уделено задачам, которые учащиеся должны решить с использованием GeoGebra. Описание само по себе должно быть достаточным, чтобы оценить использование GeoGebra на уроке с учетом принципа эффективности ее применения.

Оценка:

Расскажите, каким образом Ваши учащиеся достигли учебных целей данного урока (как в ходе урока, так и при подведении итогов). Опишите критерии оценки успешности учащихся – за какие учебные достижения учащиеся получают «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». Как Вы будете оценивать то, что ученики выучили? Критерии должны четко соответствовать учебным целям и стандартам. Как Вы будете отслеживать достижения учащихся в образовательном процессе? Также опишите, как будет осуществляться обратная связь с Вашими учениками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За последние 20 лет применение программ динамической геометрии, в частности приложения *GeoGebra*, в образовательном процессе нашло широкое применение в средних школах. Доступ к программам динамической геометрии для миллионов преподавателей и учеников привел к развитию многочисленных педагогических приёмов использования этих технологий в школе. В недавнее время эти программы стали применяться и в начальной школе. В данном учебном пособии мы рассказали о приемах применения GeoGebra в преподавании геометрии в начальной школе на примерах темы симметрии и свойства фигур. Мы предлагаем читателям расширить эти идеи на другие темы в программе геометрии начальной школы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вейль, Г. Симметрия / под ред. Б. А. Розенфельда ; пер. с англ. Б. В. Бирюкова, Ю. А. Данилова. – М. : Наука, 1968. – 192 с.
2. Мороз, О. В. В поисках гармонии / О. В. Мороз. – М. : Просвещение, 2008. – 176 с.
3. Претте, М. К. Творчество и выражение: Курс художественного воспитания / М. К. Претте, А. Капальдо ; пер. А. Б. Махов. – М. : Сов. художник, 1981. – Т. 1. – 112 с.
4. Тарасов, Л. В. Этот удивительный симметричный мир : пособие для учащихся / Л. В. Тарасов. – М. : Просвещение, 1982. – 176 с.
5. Тюхтин, В. С. Система. Симметрия. Гармония / В. С. Тюхтин, Ю. А. Урманцев. – М. : Искусство, 1988. – 320 с.
6. Хогарт, В. Анализ красоты / В. Хогарт. – М. : Искусство, 1987. – 284 с.
7. Гарднер, М. Этот правый, левый мир : пер. с англ. / М. Гарднер. – М. : Мир, 1969. – 456 с.
8. Пидоу, Д. Геометрия и искусство / Д. Пидоу. – М. : Мир, 1979. – 334 с.
9. Шубников, А. В. Симметрия в науке и искусстве / А. В. Шубников, В. А. Копцик. – М. : Наука, 1972. – 568 с. [Электронный ресурс, 2004]. – URL: <http://www.razum.ru> (дата обращения: 17.01.2017).
10. Вигнер, Е. Этюды о симметрии : пер. с англ. / Е. Вигнер. – М. : Мир, 1971. – 320 с.

Учебное издание

ЛЮБЛИНСКАЯ Ирина Ефимовна
ТИХОМИРОВА Светлана Викторовна

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ПРИЛОЖЕНИЯ GEOGEBRA

Факультативный курс для студентов-бакалавров начального образования

Учебно-методическое пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 26.01.17.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 3,72. Тираж 300 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.

College of Staten Island
The City University of New York

School of Education

and

Vladimir State University
named after Alexander and Nicolay Stoletovs

Pedagogical Institute

Irina E. LYUBLINSKAYA Svetlana V. TIKHOMIROVA

TEACHING GEOMETRY USING GEOGEBRA APPLICATION

Elective course for pre-service elementary school teachers

Student teaching manual



Vladimir 2017

LB1594.5QA461
371.33-dc23
L99

Referees:

E. L. Kharchevnikova, Ph. D. in Education
Professor of Department of Childhood Education
Vladimir Institute of Educational Development named after L. I. Novikova

V. V. Zhikov, Dr. Sci. (Physics – Mathematics)
Chairman of Department of Mathematical Analysis, Professor
Vladimir State University named after Alexander and Nicolay Stoletovs

Published in accordance with the decision of the editorial panel of VISU

Publication of this student teaching manual is financed by Eurasia Foundation's US-Russia University Partnership Program (UPP) as part of the project W16-2020 titled "Development of elementary school technology-based geometry curriculum and field testing of materials with pre-service elementary school teachers"

Lyublinskaya, Irina E., Tikhomirova, Svetlana V. Teaching geometry using GeoGebra application. Elective course for pre-service elementary school teachers : student teaching manual / Irina E. Lyublinskaya, Svetlana V. Tikhomirova ; Coll. of Staten Island; City Univ. of New York; Sch. of Educ.; Vladim. St. Univ. named A.G. and N.G. Stoletovs ; Pedagog. Inst.; – Vladimir : VISU Press, 2017. – 64 p.
ISBN 978-5-9984-0755-0

This manual provides readers with methods of teaching geometry in elementary school using GeoGebra application. It is written for pre-service teachers as well as all educators interested in methods of using computer technologies in elementary school.

Includes bibliographical references.

LB1594.5QA461
371.33-dc23

ISBN 978-5-9984-0755-0

© Lyublinskaya Irina E.,
Tikhomirova Svetlana V., 2017
© VISU, 2017

CONTENTS

PREFACE	5
The Geometry Learning and Teaching	8
Symmetry and Most Common Children’s Misconceptions in Elementary Geometry	9
Tasks on the Symmetry for elementary school students and pre-service teachers	16
Appendix 1. Some information about parallelograms	18
General properties of parallelograms	18
Special cases of parallelograms: rectangle, rhombus and square	21
Appendix 2. Modeling right angle activity	24
Appendix 3. Instructional techniques for teaching mathematics	25
Technology Applications	28
Principles of effective use of technology in teaching and learning mathematics	28
Elementary Geometry using GeoGebra	30
Quick Facts	31
Tutorials for the Basic GeoGebra Geometry Tools	33
GeoGebra Lessons for Elementary Geometry	35
Introduction	36
Fractions and Area (4 lessons)	36
Finding Halves – Rectangles	38
Finding Halves – Non-standard Shapes	38
Finding Thirds – Rectangles	40
Finding Thirds – Non-standard Shapes	40

Quadrilaterals (2 lessons)	40
Classifying Quadrilaterals	41
Art from Quadrilaterals	42
Parallel and Perpendicular Lines and Line Segments (2 Lessons)	43
The Parallel Line Tool – Just What Does It Do?	44
The Perpendicular Line Tool – Just What Does It Do?	45
Classify 2d Figures Using Parallel and Perpendicular (2 Lessons)	47
Constructing Parallelograms	47
Constructing Rectangles	48
Symmetry (7 Lessons)	49
Reflections	50
Find the Symmetry	51
Symmetry in Nature	52
Symmetry Challenges	52
Folded Art from Symmetry	53
Create Symmetry Challenge – One Line of Symmetry	54
Create Symmetry Challenge – Two Lines of Symmetry	55
Classify 2D Figures (1 Lesson)	56
Regular polygons	57
 Lesson Plan Template	 59
 CONCLUSIONS	 62
 RECOMMENDED LITERATURE	 63

PREFACE

This elective course is offered as part of collaborative project between Vladimir State University named after A.G. and N.G. Stoletovs and the City University of New York. The Project is financed by the US-Russia University Partnership Program (UPP). The UPP is an initiative for mutual cultural and academic collaboration that connects higher education institutions in Russia and US with one another and supports the launch of new bilateral partnerships. UPP is implemented by Eurasia Foundation (US) and National Training Foundation (RF) with funding from U.S. Department of State.

In recent years, there has been growing interest in including geometry into elementary school mathematics curriculum. Geometry is the basis for development of spatial reasoning (visual thinking), as well as logical thinking of elementary school students. Therefore, the purpose of this course is to deepen knowledge of geometry and methods of integrating computer technology into geometry for pre-service elementary school teachers. Within the framework of this course there will be four 2.5-hour long joint sessions in the form of a webinar with video recording and simultaneous translation. They will be carried out in a specially equipped computer laboratories. Alongside with the intent to increase the knowledge of pre-service teachers, this course is also designed to enhance modern technology skills in teaching mathematics. At the final stage of the course pre-service teachers will develop a detailed lesson plan focused on the topic of symmetry using GeoGebra program and will deliver this lesson in their classes that will be video recorded.

Student materials can be downloaded from <http://bit.ly/GeoGebraUS>.

Tentative plan of the course

Date	Agenda	Homework
February 11, 2017	<ol style="list-style-type: none"> 1. Presentation of the participants and purposes of the project 2. Immersion (modeling of an elementary school lesson) – discovery lesson about reflection symmetry 3. Discussion of instructional strategies in teaching the topic and using GeoGebra in the lesson 4. Introduction to the topic of Symmetry 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identification of the topic and purpose of the lesson, draft of the GeoGebra task for students 2. Complete GeoGebra tutorials from the course brochure 3. Complete geometry tasks (TBD)
February 18, 2017	<ol style="list-style-type: none"> 1. Introduction to GeoGebra 2. Instructional strategies for using GeoGebra 3. Modeling of the lesson using constructions in GeoGebra 4. Independent (in pairs) task from the course brochure + individual counseling 5. Lesson planning + individual counseling (+ plans for preliminary preparation of students for the lesson) 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Plans for GeoGebra introduction to the students 2. Continuation of the lesson planning, development of student task in GeoGebra 3. Complete GeoGebra lessons from the course brochure (TBD) 4. Complete geometry tasks (TBD)
February 25, 2017	<ol style="list-style-type: none"> 1. Principles of effective use of GeoGebra in class (with examples of different pedagogical situations) 2. Joint discussion of pre-made tasks in comparison with open design tasks in GeoGebra 3. Discussion of requirements for the tasks in different level school students in GeoGebra 4. Development of conceptual questions for students of different levels of ability 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Finishing lesson task in GeoGebra, instructions and questions 2. Prepare the draft of lesson plan 3. Prepare a technology-based portion of the lesson for micro-teaching 4. Schedule the date for teaching the lesson

Date	Agenda	Homework
	5. Independent work on GeoGebra task for students + individual counseling	
March 4, 2017	<ol style="list-style-type: none"> 1. Micro-teaching of the lessons with discussion – 3 groups from each side 2. Review of the requirements to the lesson plan and video 3. Independent work on lesson plans + individual counseling 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Final lesson plan + GeoGebra file with the task in the program + student activity handout 2. Teaching the lesson and video.

Snow days makeup: March 18, March 25

Scholarship requirements for the participants:

1. Completion of geometry tests and attitude surveys before and after the course.
2. Attendance of all course sessions.
3. Development of a lesson plan with focus on topic of symmetry with student activity handout for the task completed in GeoGebra.
4. Presentation of a lesson fragment at the workshop (micro-teaching in small groups).
5. Delivery of a lesson at the school with video recording.
6. Submission of sample students' work on GeoGebra task.

THE GEOMETRY LEARNING AND TEACHING

This section describes some topics of geometry and discusses instructional strategies in teaching geometry in elementary school. The geometry is a discipline of mathematics where we can develop foundations for logical and algorithmic thinking, spatial reasoning, and mathematical literacy. The use of geometry concepts in mathematics fosters development of children's concrete thinking based on manipulation of physical objects (pre-school), visual thinking using drawings and images (elementary school), and abstract/logical thinking (secondary school). Consistent introduction of geometry tasks into teaching mathematics starting at young age results in development of children's levels of thinking, increases their motivation and interest in learning geometry, and leads to deeper understanding of geometry material.

On the other hand, lack of understanding of definitions and properties of mathematical objects, as well as inability to correctly interpret geometric images leads to misconceptions that children commonly have in elementary school.

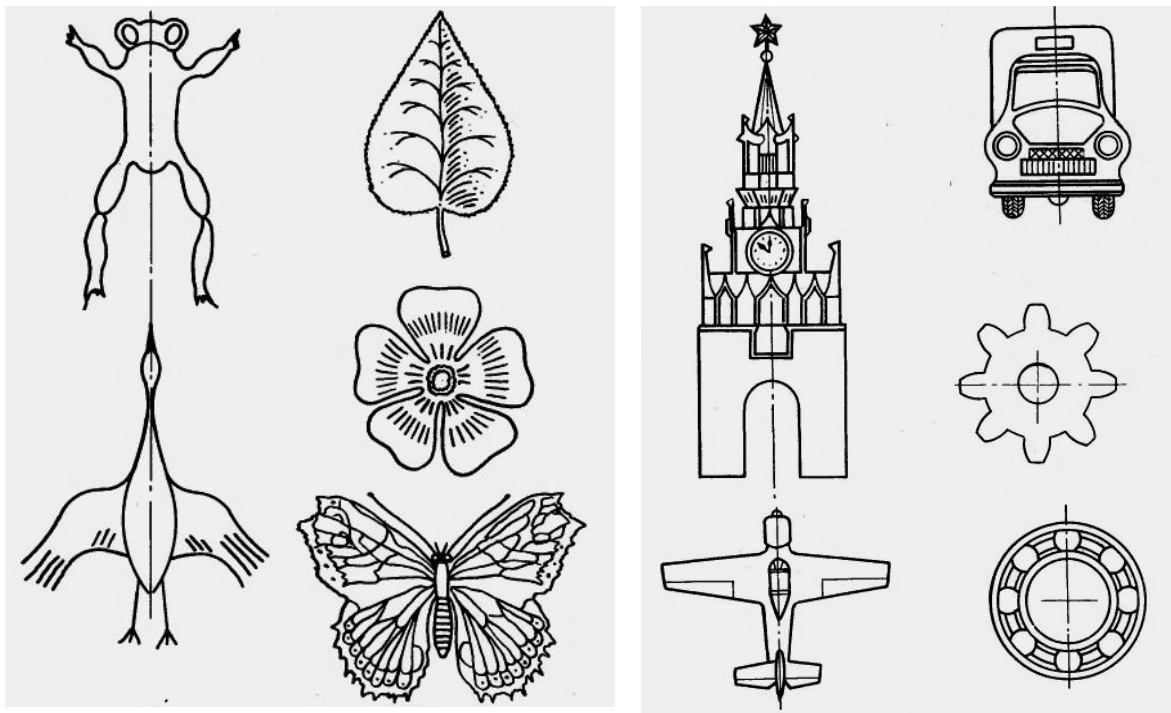
This section of the brochure focuses on the topic of symmetry. As a reference you will find the table that describes main types of symmetry taught in elementary and secondary school curriculum (table 1). The section discusses most common children's misconceptions along with recommendations for their remedies. Tasks offered in this section could be completed with paper and pencil, as well as with computer technology. In the appendices you will find detailed introduction to the topics of parallelogram and translation (appendix 1),

student activity to model right angle (appendix 2), and instructional strategies that pre-service teachers can use in their teaching (appendix 3).

While this publication focuses on the topic of symmetry, the instructional strategies and technology could be applied for learning and teaching of other topics of geometry.

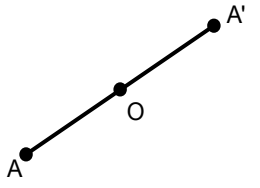
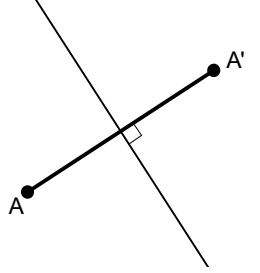
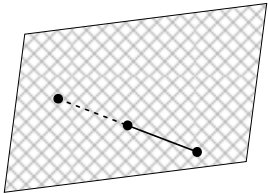
Symmetry and Most Common Children’s Misconceptions in Elementary Geometry

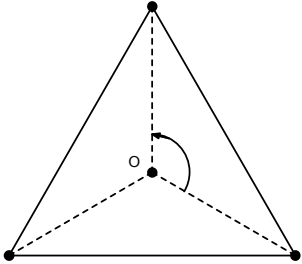
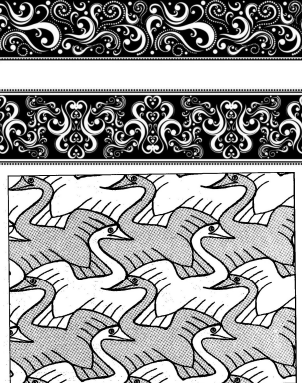
Take a look at the pictures. What do they have in common?



All these objects have at least one line of symmetry. Table 1 provides description of the main types of symmetry that are taught in school mathematics curriculum.

Table 1. Types of symmetry

<p>Type of symmetry. Definition</p>	<p>Construction of symmetric points</p>	<p>Characteristic property.</p>	<p>Examples of shapes with elements of symmetry</p>
<p>Central symmetry Two points are symmetric about a point, called center of symmetry if this center is the midpoint of the segment that connects these points.</p>		<p>Movement of a plane that has only one stationary point.</p>	<p>A circle, the center of the circle is the center of symmetry. A parallelogram, the point of intersection of diagonals is the center of symmetry.</p>
<p>Line (reflection) symmetry Two points are symmetric concerning some straight line (axis) if they are located on the perpendicular to this line at equal distance from it</p>		<p>Movement of the plane that has the set of stationary points which is a straight line</p>	<p>A circle, a diameter of a circle is the axis of symmetry. An equilateral triangle, 3 altitudes are 3 axes of symmetry. A rectangle, 2 medians are 2 axes of symmetry. A rhombus, diagonals are 2 axes of symmetry. A square, 2 medians and 2 diagonals are 4 axes of symmetry.</p>
<p>Mirror symmetry (about the plane) Two points are symmetric about a plane if a segment connecting these points is perpendicular to this plane and the points are equidistant from it.</p>		<p>Movement of space, the set of stationary points of which is a plane</p>	<p>The right rectangular prism has 5 planes of symmetry: 3 median sections and 2 diagonal ones.</p>

<p>Rotational symmetry</p> <p>A point is obtained from another point by rotating around a center by a given angle. Both points are located on the same circle, so that the center of rotation is in the center of the circle. The segments connecting these points to the center of the circle form the angle of rotation.</p> <p>The direction of the rotation is set as clockwise or counterclockwise.</p> <p>The center of rotation is called the center of the n^{th} order symmetry of the figure if it matches itself when rotated by an angle of $\frac{360^\circ}{n}$ around the center of rotation.</p>		<p>On the plane movement of the plane that has only one stationary point – the n^{th} order center of symmetry.</p> <p>In space movement of the space that has the set of stationary points which is a straight line. Rotation is carried out around this line.</p>	<p>A right triangle has the 3rd order center of symmetry.</p> <p>A square has the 4th order center of symmetry.</p> <p>A snowflake has 6th order center of symmetry.</p>
<p>Translational symmetry or slide</p> <p>Movement of the plane that transfers points of the plane in the same direction by the same distance.</p>		<p>This property refers only to unbounded figures.</p>	<p>A border is a stripe between two parallel lines filled with congruent figures.</p> <p>Parquet is tiling of a plane with congruent non-overlapping figures.</p>

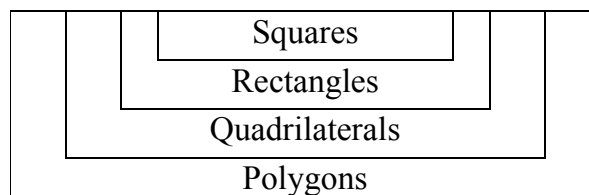
We are interested in acquisition of mathematical concepts by elementary school children. How do children perceive material while studying the “Polygons” unit? Do children see symmetry in geometry, in mathematics in general, and in the world around them? Consider the most common children’s misconceptions in geometry.

Misconception 1: Square is not a rectangle.

Realizing that a square is a rectangle is somewhat difficult for elementary school children. The reason is the fact that the majority of children have already acquired holistic image of a square and a rectangle but they are lacking the ability to identify the definitive attributes of a figure to make this connection.

In this case, it is very important to plan the sequence activities for the children aimed at identifying the definitive attributes of a rectangle and a square¹. For example, a teacher can use an envelope with a set of different geometric figures painted in different colors. First it is necessary for children to recognize the name of these shapes, e.g., polygons. Then teacher offers students to show and name polygons that have three angles and three sides, four angles and four sides, five angles and five sides, etc. After that, children can keep only quadrilaterals on their desks. The next step is for students to classify quadrilaterals they have by the number of right angles. After several attempts some students will guess that quadrilaterals with exactly three right angles do not exist. While accomplishing the task given by the teacher the children first try to approximate which angles could be right and then check their assumptions with the help of the right-angle model².

This sequence of activities results in identifying quadrilaterals that have four right angles. They are called rectangles. Among rectangles it is possible to identify those with all sides equal. They are called squares. The relations between the notions *polygon*, *quadrilateral*, *rectangle*, *square* are presented in a diagram below.



¹ Detailed information on properties of a quadrilateral see in Appendix 1

² Practical work «Right angle model» see in Appendix 2

This diagram may be used for different games, for example the game “Where is my place?” Two students are given equal numbers of different polygons (one gets blue figures, the other – red). The student who is the first to place his/her shapes correctly on the diagram is the winner.

The game may be played in a different way. One student gets several geometric figures. First, he/she shows picks one of the figure to show it to the class, except for his/her partner. Student then describes the figure by its properties. The partner guesses the name of the figure and places it on the diagram. The main rule of the game: the figure must be described in such way that the choice of its placement is unambiguous. For example, a student describes a figure as follows: “five sides and five angles”. The choice is unambiguous – it is a pentagon, it is placed in the “Polygons” part of the diagram. Then he proposes such description: “four sides and four angles”. In that case the choice is ambiguous. It could be any quadrilateral, or a rectangle, or a square. Or such description: “four sides and all of them are equal” (the choice is ambiguous as well). It could be a square or a rhombus that can be placed in the “Quadrilaterals” part of the scheme. In the process of playing this game the students begin to understand what are the *definitive attributes* of a geometric figures.

Task. Create games that you can use in your class for children to identify the relations between geometric figures, and to learn their definitive attributes and names.

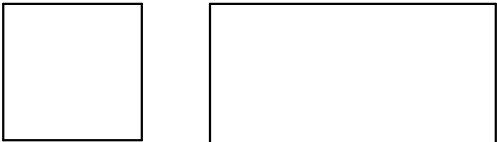
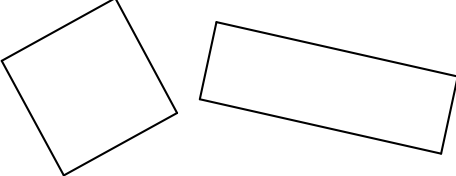
Misconception 2. Position, orientation, or size of a figure change its definitive attributes.

Children believe that orientation and proportions change definitive attributes (or characteristic properties) of a figure. For example, consider popular misconceptions about triangles:

- Triangles have one vertex in the upper part and two vertices at the bottom.
- A triangle is always based on one of its sides or, in other words, one of the sides is the bottom of a triangle.

Here are some popular misconceptions about rectangles:

- The shape of a rectangle is always extended.
- A rectangle has two long sides and two short sides.

Usual position of a square and a rectangle	Unusual position of a square and a rectangle
	

There are many ways that teachers can help children overcome these misconceptions. For an elementary school student, the most accessible and productive way of acquisition of knowledge and skills is his/her own practical experience. Here is an example of hands-on activity that can be used in this case. The teacher hands out tracing paper and a sheet of paper to the children. There are outlines of four figures on the tracing paper: parallelogram, rhombus, square and rectangle (it is enough to have one of each type). On a sheet of white paper the teacher has the arbitrarily placed quadrilaterals of the same size as on the tracing paper (in the sense, they are differently positioned). Using tracing paper a student gets convinced that the sheet is filled only by the same quadrilaterals.

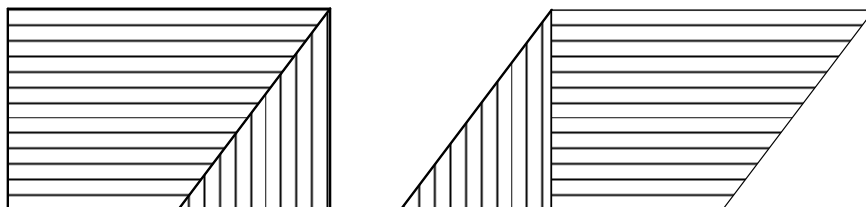
A similar hands-on activity can be done with just one figure, a rectangle. Rectangles and squares are scattered across a sheet of paper. With the help of tracing paper or a right-angle model (Appendix 2) a student confirms that these figures are rectangles. Then, using a model for measuring segments (a ruler) he/she makes a conclusion that some of the presented rectangles are squares.

Task. Use multi-colored rectangles and squares. Create a design for a scarf and a shawl. Make a fairy-tale train where each car contains three or four rectangles, only vertices of the rectangles could be the wheels of the train. Think how to complete these tasks in the program GeoGebra.

Misconception 3. Students believe that if areas of two shapes are the same, their perimeters will also be the same.

This misconception is clearly observed when working with composite shapes of equal areas. Assume that a geometric figure is composed of shape A and shape B. Children believe that rearranging A and B to make a different shape will preserve not only area, but perimeter as well. For example, a right

triangle is cut out of rectangle and moved to form a parallelogram. Children will immediately assume that perimeter of a parallelogram is equal to the perimeter of a rectangle.



Recall some important concepts of the theory of measurements. The areas of a composite figures composed of the parts with equal areas are equal. The perimeters of these composite figures can be different. Figures having equal area do not necessarily have equal perimeters. Figures having equal perimeters do not necessarily have equal areas. There are figures that have equal perimeters but their linear dimensions are different. There are figures that have equal areas but their linear dimensions are different.

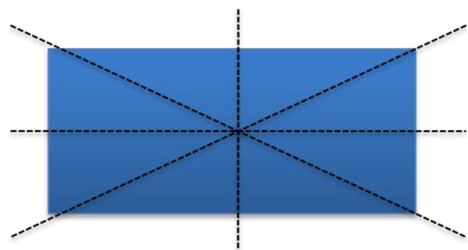
Task. Two triangles have equal areas. Does it mean they are equal? Explain your answer. Use GeoGebra program to illustrate your answer.

Task. Given points A and C on the line k and point B on the line l . Lines k and l are parallel. Point B moves along line l , taking position B_1, B_2, B_3 , etc., while points A and C remain stationary. What can you say about triangles AB_1C, AB_2C , etc.? Create the dynamic illustration for the task in GeoGebra.

Task. A square is cut along its diagonals. How many convex polygons different from a square may be composed from the four triangles that have been formed? Show your solution.

Misconception 4. Students sometimes find more lines of symmetry than exist.

Like previous misconceptions, this one is connected with visual percep-



tion of the figure image. For example, in a rectangle a student can erroneously identify diagonals of a rectangle as lines of symmetry.

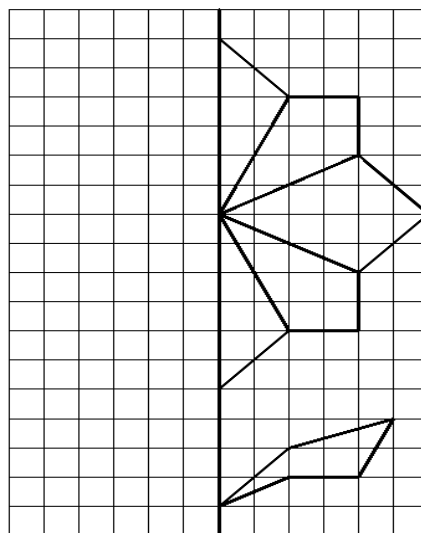
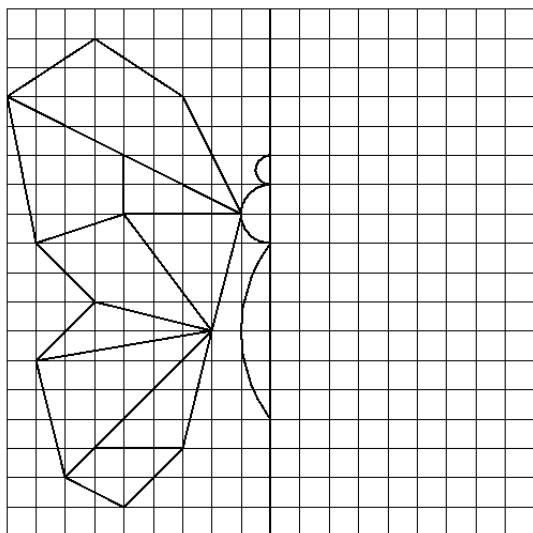
This misconception can be easily resolved using easily available materials. Students can be given rectangular sheet of paper to fold along the presumed lines of symmetry. If after folding the halves of the sheet match the line of symmetry was found correctly. Alternatively, students can use computer technologies to model the problem, specifically, dynamic geometry software such as GeoGebra.

In conclusion, it can be shown that any regular polygon with n sides has n lines of symmetry.

Task. Find all lines of symmetry for given regular polygon. Explain why these lines are lines of symmetry for this polygon. Why are you sure that you have found ALL symmetry lines?

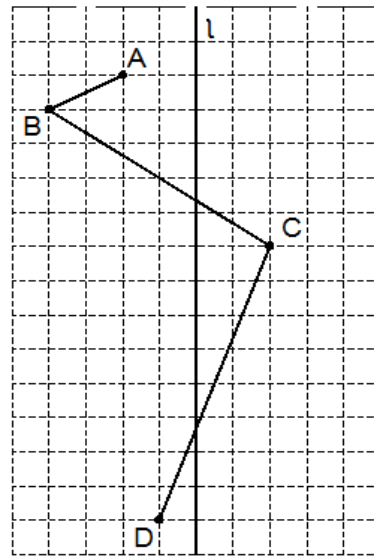
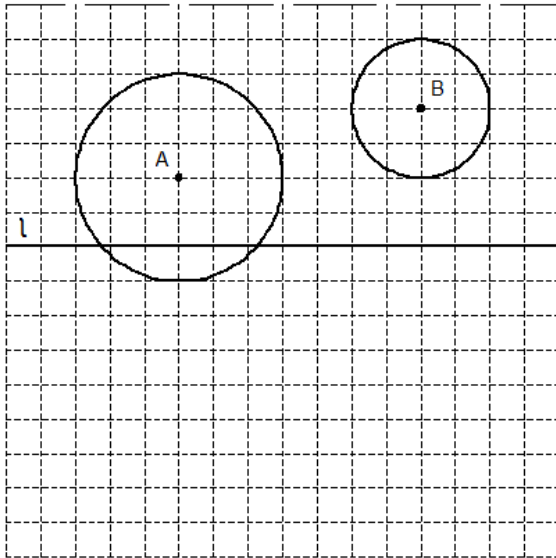
Tasks on the *Symmetry* for elementary school students and pre-service teachers

1. Complete the second part of the picture and color it. Check if the construction is correct with the help of tracing paper.³

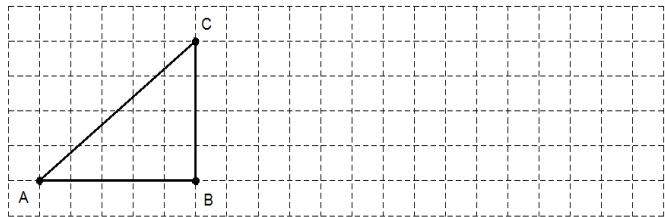


³ L.G. Peterson. Student's book. Mathematics. 2 grade. Yuventa. 2013.

2. a) Draw a circle with a radius of 5 cm on a sheet of paper. Cut this circle out. Fold the circle in half. Draw a line with a red pencil along the crease. What have you noticed? b) Fold the circle in half twice. Draw a line with a blue pencil along the new crease. What have you noticed?⁴
3. Construct figures symmetrical to the given ones with the given line of symmetry l .⁵



4. a) Construct a triangle symmetrical to the triangle ABC about side BC , and then slide the image 8 units to the right. Describe the inverse transformation.⁶ b) Draw a square $ABCD$ with the side 3 cm long and construct a square symmetrical to it about side CD .



5. Cut out of paper models of the following shapes: parallelogram, rectangle, rhombus, square, right isosceles triangle, acute isosceles triangle, and circle. Use folding to find their lines of symmetry. Sketch the lines of symmetry of these figures on paper.

⁴ L.G. Peterson. Student's book. Mathematics. 2 grade. Yuventa. 2013.

⁵ L.G. Peterson. Student's book. Mathematics. 3 grade. Yuventa. 2012.

⁶ *ibid.*

6. Construct a circle symmetrical to the given one about a) the center O , b) a line a .
7. Construct a segment $A'B'$ symmetric to the given segment AB : a) about the midpoint M of the segment, about one of the ends of this segment, about point O that does not belong to AB , b) about the perpendicular bisector of the given segment AB , about the line passing through the point B , about the line that does not have any points in common with the segment AB .
8. Split the set of letters of the alphabet into groups with the following characteristic properties: a) having the center of symmetry, b) having the center of symmetry of some order $n \neq 1$, c) having the line of symmetry, d) having several lines of symmetry.

Appendix 1. Some information about parallelograms⁷

The set of parallelograms includes the subsets of rhombuses, rectangles, and squares. Students have to review the topics of triangles and circles on their own.

General properties of parallelograms

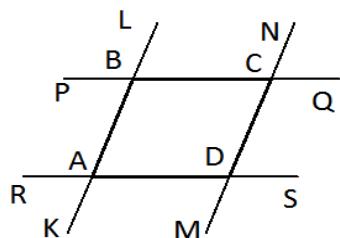


Figure 1

*A **parallelogram** is a quadrilateral with opposite sides parallel.*

A parallelogram ($ABCD$, fig.1) is formed if any two parallel lines KL and MN are intersected by two other parallel lines PQ and RS .

Properties of sides and angles of a parallelogram

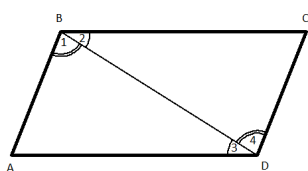


Figure 2

In any parallelogram ($ABCD$, fig.2) opposite sides are equal and opposite angles are equal.

Diagonal BD divides $ABCD$ into two triangles ABD and BCD , which are congruent (by ASA). Specifically, BD is their common side, $\angle 1 = \angle 4$ and $\angle 2 = \angle 3$ (as alternate interior angles). From equality of triangles

⁷ The material is taken from classical mathematics book: A.P. Kiselyov. Elementary geometry. Teacher's book. – M. Prosvescheniye, 1996

it follows that $AB = CD$, $AD = BC$ and $\angle A = \angle C$. Opposite angles B and D are equal as well, as they are sums of equal angles.

Note. Equality of opposite sides in a parallelogram is sometimes expressed in other words as follows: **parallel line segments contained between parallel lines are equal**.

Consequence. *Parallel lines (AB and CD) are always equidistant from one another.*

Actually, if from any two points M and N on line CD we drop perpendiculars MP and NQ on line AB , these perpendiculars are parallel and consequently figure $MNPQ$ is a parallelogram; hence $MP = NQ$ i.e. points M and N are equidistant from line AB .

Characteristics of parallelograms

If in a quadrilateral: 1) Two pairs of opposite sides are equal in length, or 2) One pair of opposite sides are parallel and equal in length, then such quadrilateral is a parallelogram.

1. Given quadrilateral $ABCD$ (fig. 3) with sides $AB=CD$ and $BC=AD$. Prove that this figure is a parallelogram, i.e. $AB \parallel CD$ and $BC \parallel AD$.

After drawing a diagonal BD , we will have two triangles that are equal (SSS), since BD is their common side, $AB=CD$ and $BC=AD$ (by condition). Therefore, $\angle 1 = \angle 4$ and $\angle 2 = \angle 3$ (angles opposite to equal sides are equal); consequently $AB \parallel CD$ and $BC \parallel AD$ (if alternate interior angles are equal, the lines are parallel).

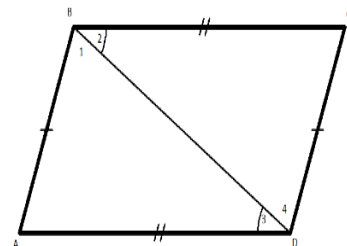


Figure 3

2. Given $BC=AD$ and $BC \parallel AD$ in a quadrilateral $ABCD$ (fig.4). Prove that $ABCD$ is a parallelogram, i.e. $AB \parallel CD$.

Triangles ABD and BCD are equal as BD is their common side, $BC=AD$ (by condition) and $\angle 2 = \angle 3$ (as alternate interior angles). From equality of triangles it follows: $\angle 1 = \angle 4$, consequently $AB \parallel CD$.

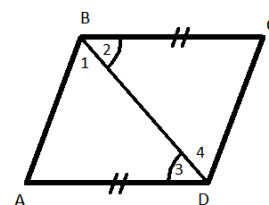


Figure 4

Property of diagonals of a parallelogram

In a parallelogram $ABCD$ (fig.5) diagonals are bisected.

Triangles BOC and AOD are equal, as $BC = AD$ (as opposite parallelogram sides), $\angle 1 = \angle 2$ and $\angle 3 = \angle 4$ (as alternate interior angles). From equality of triangles it follows: $OC = OA$ and $OB = OD$.

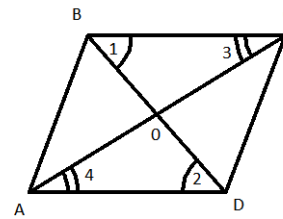


Figure 5

The center of symmetry

The point of intersection of parallelogram diagonals is the center of symmetry of the parallelogram. Draw any line MN through this point (point O , fig.6). This line intersects the side BC at point Q and side AD at point P . Points P and Q are symmetric about point O , i.e. these two points are on opposite sides of point O and equidistant from it. The proof is based on the fact that triangles OAP and OCQ are congruent (ASA), as $AO = OC$ (by property of parallelogram diagonals), the angles at the common vertex O are equal (as vertical) and $\angle 1 = \angle 2$ (as alternate interior angles). Therefore, $OP = OQ$.

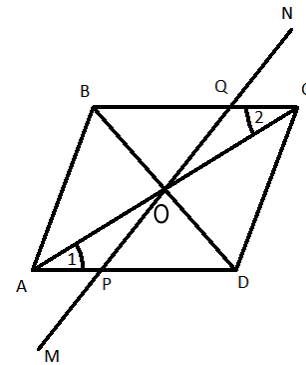


Figure 6

If in any figure there exists a point having specified property, then such point is called *the center of symmetry* of this figure: consequently, **in the parallelogram the intersection of its diagonals is the center of symmetry.**

If the figure having the center of symmetry is turned around this center by 180° , then the figure will coincide with itself, as any two symmetric points (i.e. P and Q , A and C) after such rotation will swap positions. Symmetry about the center is called *central symmetry* as opposed to the symmetry about a line is referred to as *line* (or reflection) symmetry.

Special cases of parallelograms: rectangle, rhombus and square

A rectangle is a *parallelogram with all right angles*. Since rectangle is a parallelogram, it has all properties of a parallelogram; for example, its diagonals are bisected and the point of their intersection is the center of symmetry. However, a rectangle has its own specific properties which will be indicated in the following two theorems:

1. *In a rectangle (ABCD, fig.7) diagonals are equal.*

Proof: Right triangles ACD and ABD are congruent (SSS) as AD is their common side and $AB = CD$ (as opposite sides of parallelogram). Therefore, $AC = BD$.

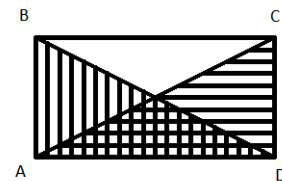


Figure 7

2. *A rectangle has two mutually perpendicular lines of symmetry (it can be verified from studying fig.8).*

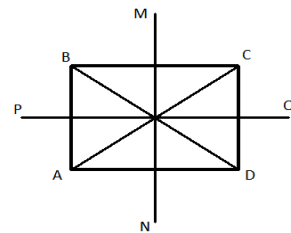


Figure 8

A *rhombus* is a parallelogram with all equal sides. Of course, a rhombus has all properties of a parallelogram, but it has the following two specific properties:

1. *Diagonals of a rhombus (ABCD, fig.9) are mutually perpendicular and bisect rhombus angles.*

Triangles ABO and BCO are congruent (SSS), as BO is their common side, $AB = BC$ (as all sides of a rhombus are equal) and $AO = OC$ (as the diagonals of any parallelogram are bisected). Therefore, $\angle 1 = \angle 2$, i.e. $BD \perp AC$ and $\angle 3 = \angle 4$, i.e. angle B is bisected by the diagonal. From equality of triangles BOC and COD we will see that $\angle C$ is bisected by the diagonal, etc.

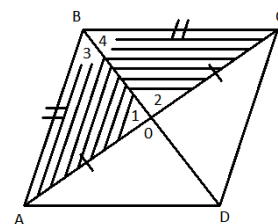


Figure 9

2. Each diagonal of a rhombus is its axis of symmetry.

Diagonal BD (fig.10) is the axis of symmetry of rhombus $ABCD$, as through reflection $\triangle ABD$ over line BD , it overlaps with $\triangle BCD$. The same can be said about diagonal AC .

A **square** can be defined in several ways: it is a parallelogram with all sides equal and all right angles; or it is a rectangle with all equal sides; and lastly, it is a rhombus with all right angles.

Therefore, a square possesses all properties of a parallelogram, a rectangle, and a rhombus. For example, a square has four lines of symmetry (fig.11): two, passing through the midpoints of opposite sides (same as a rectangle), and two, passing through the vertices of the opposite angles (same as a rhombus).

Translation (slide)

Consider an arbitrary figure F , for example, a triangle (fig.12). Select two arbitrary points A and B on this figure. Imagine that figure F moves in the plane in the direction specified by the arrow in such way that points A and B (as well as the segment AB) slide along the line xy passing through these points. Neither the shape of the figure F nor the size of it changes.

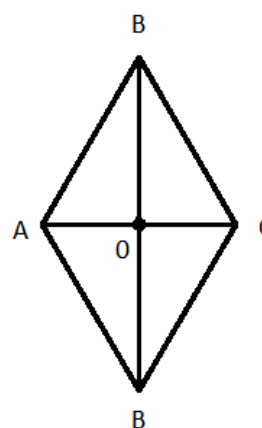


Figure 10

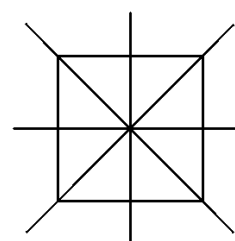


Figure 11

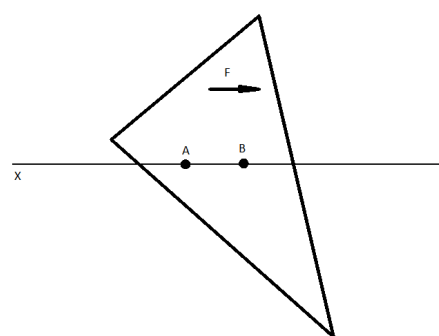


Figure 12

Notice that during this motion all the points of figure F will be moving in the same direction along lines parallel to the stationary line (xy) along which sliding is carried out and furthermore these points will move the same distances.

Consider an arbitrary point C on the figure F and connect it with point A (fig.13). Let segment AB move (by sliding along xy) to position $A'B'$.

Then segment CA will move to some position $C'A'$, and neither length of this segment, nor size of angle α , formed by AC and AB will change. Consequently, in quadrilateral $AA'C'C$ two opposite sides $A'C'$ and AC will be equal and parallel, therefore this quadrilateral will be a parallelogram by definition. Therefore, $CC' = AA'$ and $CC' \parallel AA'$. Thus, any point C of figure F moves along the line, parallel to the line xy by the same distance equal to AA' .

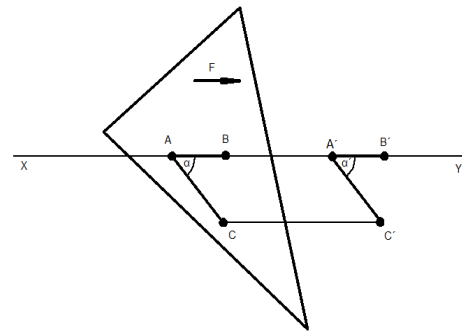


Figure 13

Such motion of figure F when all its points move along the lines parallel to some stationary line is called *translation* (or slide).

In translation of figure F any segment MN that belongs to figure F (Fig. 14) moves parallel to itself. Since MN is translated to $M'N'$, quadrilateral $MM'N'N$ will be a parallelogram, because MM' and NN' are parallel and equal; consequently, $MN \parallel M'N'$. Any segment that is parallel to the direction of translation (e.g. PQ), slides along itself during translation.

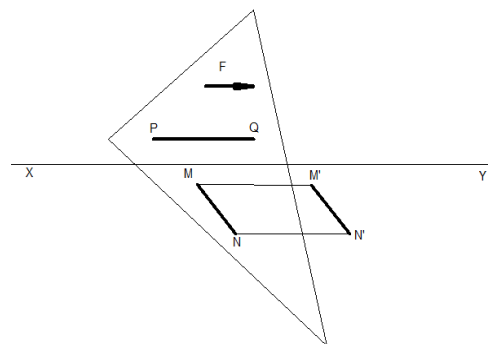


Figure 14

Appendix 2. Modeling right angle activity

Draw a straight line from a given point. This geometrical figure is called a ray. If you draw two rays from the same point, then these rays will enclose a part of the plane that form a geometrical figure called an angle. Therefore, an angle is a part of the plane bounded by two rays starting from the same point called the vertex of an angle.

Children should be first introduced to the concept of an angle by learning about right angle. This section provides description of hands-on activity for modeling the right angle. Students get sheets of the paper different in size with uneven edges. In the middle of the sheet a point is drawn. The children should fold the paper so that the crease passes through this point. Then they fold the paper once again so that crease lines overlap. As a result of folding the crease lines form a right angle. Students can then compare their models by overlaying the paper in order to conclude that all right angles are equal to each other. The teacher can model the steps as she/he guides the students through the steps of the activity.

In order to fully understand the results of this activity, it is necessary for children to have correct understanding of the magnitude of an angle. At this age it is sufficient to use the method of comparing the angles by overlaying them along with students' notion of a ray.

With the model of a right angle students can complete various exercises: they overlay this model on angles, notebooks, books and they see for themselves that these angles are right; they draw right angles on square grid and unruled paper. Students find right angles on various objects. It is necessary to draw right angles in various positions on plane. Teacher can provide loose-leaf paper with rays drawn on them and students are offered to draw rays to form right angles. Students draw them with the help of the model of a right angle and by means of a right triangle.

Students can also use GeoGebra program to draw right angles. They can verify equality of right angles by sliding them on top of each other.

Appendix 3. Instructional techniques for teaching mathematics

#	Instructional Technique	Description	Examples
Setting up goals (motivation)			
1	Element of surprise	The teacher finds a different perspective on the topic that even ordinary becomes amazing	We view the photos on which a half of a butterfly, a half of a snowflake, a half of a person, a half of a car , a half of an umbrella are shown. Children, can you say what objects are shown here? What is missing?
2	Addition of a fantasy element	A teacher adds fantasy character or event to real events	Winnie the Pooh comes to the lesson with swollen left cheek, because he went to get some honey, and got stung by the bees. He asks children to figure out how to make his picture, that does not show swelling. Do you think you his face is symmetrical? Can it help?
Explanation of the new material			
3	Connecting theory to practice	The teacher introduces theory through a practical task which is obviously useful.	In order to introduce properties of the reflection symmetry, the teacher provides students with paper, pencil and a mirror and asks them to observe reflection of a drawing in the mirror.
4	Watching video segments on the topics being studied	1. Without task 2. With the task given before viewing 3. With the task given after the viewing	Presentation of video: symmetric architectural structures, animals, birds, technical devices, reflection in water, etc.

Elaboration of the new material			
5	Peer review	Students compile a series of questions about the material studied at the lesson.	Students working in small groups exchange their questions with another group.
6	Review with extension	Students develop questions that extend acquired knowledge to new ideas	We have studied the topic symmetry of a rectangle. What questions can you ask about a symmetric figure that is not a rectangle to find out whether it is symmetric?
7	Student examples	Students prepare their own examples for the new material.	The class may be split into groups, each of them receives its own task, for example consider lines of symmetry for 1 – triangles, 2 – quadrilaterals, 3 – circles
8	Short story	Develop a short story using the terms from the list as well as words and word combinations such as “because of”, “so”, “if... then”, then tell your story to the class.	What have we learned today? What concepts were introduced to you? Prepare presentation about your exploration of the symmetry of the figure you were assigned.
Homework			
9	Integrating creativity	Using creativity students elaborate learned material	Create your own symmetric figures. Create incomplete picture for a partner to use symmetry and guess the image.
Games			
10	«Yes-no» game	The teacher asks pupils to guess about a thing he meant. The pupils try to find answers asking questions. The teacher answers only “yes” or “no”.	Teacher thinks of a symmetric figure. Students ask questions about properties of a figure until they guess the figure.

11	“The third wheel” game	In the set of different figures students identify one that does not fit.	<p>Problem: to identify the figure that does not fit into the set and explain the choice, or to create the task for peers by selecting the elements of the set.</p> <p>Task: Put the figures that have line of symmetry into the first box, all the other figures put into the second box. Describe what figures got into the second box.</p>
Summative Assessment			
12	Chain explanation	Explanation of one student is interrupted by the teacher at any point and another student is offered to continue explanation.	
13	Game show	Assessment in the format of the game show	Jeopardy with categories as figures, and questions about symmetry and properties, with scores corresponding to the complexity of the game.
14	Presentation	Individual or group presentations of projects with demonstration of results	Group project – exploration of symmetry in architecture, plants, animals.
15	Logical sequence	Students get set of phrases. They need to sequence them in logical order using cause-effect relationship. Each previous phrase must be the cause for the next one.	Example of set of phrases (given in correct order here): 1. I drew a rectangle. 2. I found midpoints of opposites sides. 3. I drew a line through midpoints of opposite sides. 4. I folded paper along the line. 5. Parts of rectangle overlapped exactly. 6. My line is line of symmetry for rectangle.

TECHNOLOGY APPLICATIONS

Principles of effective use of technology in teaching and learning mathematics⁸

One of the strongest forces in the contemporary growth and evolution of mathematics and math teaching is the power of new technologies. In math, computers have fostered entirely new fields. In education, they've raised the importance of certain ideas, made some problems and topics more accessible, and provided new ways to represent and handle mathematical information, affording choices about content and pedagogy that we've never had before.

Not everything that can be done should be done. Student learning is affected by a complex system: teachers, educational theories and beliefs, parents, curricula, students' interests and aspirations, resources, cultural expectations, technology, and more. There is much to say about all of these considerations, but the impact of each cannot be fully understood except in relation to the others. This is especially true of technology, which partially explains why there is no single, universally accepted view of the best use of technology in classrooms. Moreover, the right questions about technology are not broad ones about which hardware or software to use, but about how each works in a certain curriculum, right down to its effect on how individual problems are posed to the

⁸ Based on Goldenberg, P. (2000). Thinking (and talking) about technology in math classrooms. In *Issues in Mathematics Education*. Education Development Center, Inc. Retrieved from: http://www2.edc.org/mcc/pdf/iss_tech.pdf.

student. Each of these is its own unique case to judge as effective and appropriate or not. It is the problems that are posed, not the technology with which they are attacked, that make all the difference. With computers, as with pencils, some problems are great and some are a waste of time.

With technology, what changes is the pool of problems to choose among and the ways they can be presented. Some problems are too hard to be posed in a pencils-only classroom. Some lessons require students to experiment with certain mathematical objects and see how they respond. Some require visual representations — graphs, diagrams, geometric figures, moving images — that respond to students' questions, answers, or commands.

Per Goldenberg (2000), there are several principles of effective use of technology:

1. Be aware of the different roles of technology - technology needs to be chosen to fulfill the classroom goals, right down to the particular needs of particular students. Use computers to teach higher-order thinking skills. Don't use computer "as flashcards". Merely adding technology as a motivational tool only could be irrelevant or even detrimental to student learning.
2. The purpose of using technology should correspond to the purpose of the lesson. Allow technology to do "labor" while focusing on concepts. When focusing on procedures, use of technology might not be appropriate. Technology should not be a distraction.
3. Analyzing the process can be a natural route to understanding (rather than just memorizing) the main point. Technology that obscures the details and skips directly to the answer is no help. The nature of thinking asked of students should be supported and not shortcut by technology. Technology should be used to help students think about a problem, analyze a process, generate a proof, etc.

4. Technology should help students develop ways of thinking (higher-order thinking) about the problem - thinking that eventually becomes independent of the technology.
5. Students should be power users of technology, e.g. use it with confidence, understand its limits and capabilities, and have clear view of how they can use technology to solve challenging problems.

Technology affords important and exciting new capabilities that expand the options for what and how we teach. Some of the newer curricula both establish a vision for the use of technology and provide re-sources that help teachers gain power and fluency with these new classroom tools. What's to be done? Keep change under control. Keep a clear vision of what is desired of the technology, responsive to but not governed by changes in what is possible with the technology. Think foremost about what you want for your children — the goals of the particular classroom, and the needs of each particular student — and after deciding on your goals, then assess whether the tools are bringing you closer or distracting you away.

Elementary Geometry using *GeoGebra*

Emerging computer applications such as *GeoGebra* offer the opportunity to engage students at all grade levels in highly interactive, inquiry-based problem solving within the study of geometry and measurement while developing technological literacy. *GeoGebra* is free and multi-platform dynamic mathematics software for all levels of education that joins geometry, algebra, tables, graphing, statistics and calculus in one easy-to-use package. It has received several educational software awards in Europe and the USA.

Quick Facts

- Graphics, algebra and tables are connected and fully dynamic
- Easy-to-use interface, yet many powerful features
- Authoring tool to create interactive learning materials as web pages
- Available in many languages for millions of users around the world
- Free and open source software

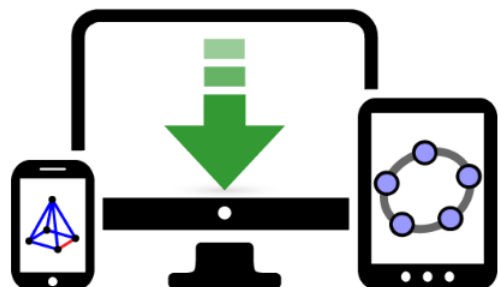
Online resources

- Official *GeoGebra* Web Site (<http://www.GeoGebra.org/>) - learn more about *GeoGebra* and download *GeoGebra* here (free shareware)
- *GeoGebra* YouTube Channel (<https://www.youtube.com/GeoGebraChannel>) - video tutorials and examples of *GeoGebra* use in schools
- *GeoGebra* Sharing Site (<http://tube.GeoGebra.org/>) - *GeoGebra* user share apps and lesson plans

Downloading and Installing *GeoGebra* on your computer or tablet

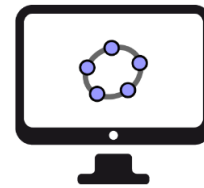
Instructions for use with the computer:

1. Start Google Chrome and go to official *GeoGebra* website <http://www.GeoGebra.org/>. Click on Downloads.

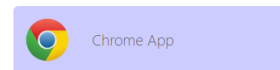


2. Select one of the options available for Desktops:

- a. Chrome App – adds web app and does not require administrative access to the computer, requires access to internet when using the APP
- b. Windows, Mac OS X, or Linux – downloads software package that can be used locally



GeoGebra for Desktops



Windows



Mac OS X



Linux

Note: in this course we will use web app.

Instructions for use with the tablet:

1. Access Apple Store on iOS device or Play Store on Android device.
2. Search for GeoGebra APP
3. Download APP to your device.
4. Alternatively, access official website, select downloads options and chose option GeoGebra for tablets.



GeoGebra for Tablets



Tutorials for the Basic *GeoGebra* Geometry Tools

Some of the *GeoGebra* tools are intuitive and will be understandable even without much formal background in geometry. For these tools, there are tutorial files for students as indicated in the table below. The instructions for each tutorial are embedded within the *GeoGebra* (.ggb) file. Each such file encourages students to experiment with the tool being addressed. These activities are designed to take only a short amount of time, generally about 10-15 minutes. In the classroom, these tutorials can be used by individual students or collectively at an interactive whiteboard.

For other tools, especially in upper elementary grades, the tool itself represents a new concept, for example, the PARALLEL LINE tool or the PERPENDICULAR LINE tool. These tools are introduced within *GeoGebra* lessons that also introduce and teach the related concept.

Basic *GeoGebra* Tools – Tutorial Files

Download tutorial files to your computer. Then complete each tutorial following instructions provided in each file.



tutorial_1_move_A.ggb

tutorial_2_move_B.ggb

MOVE

A. Move complete objects like lines or polygons.

B. Move points in a line or polygon, thus altering the line or polygon.



tutorial_3_point.ggb



tutorial_4_line.ggb



tutorial_5_segment.ggb



tutorial_6_distance_length.ggb



tutorial_7_polygon.ggb



tutorial_8_area.ggb



tutorial_9_text.ggb



tutorial_10_move_graphics_view.ggb
Move the display window to other locations on the overall *GeoGebra* page.



tutorial_11_practice_with_all.ggb

POINT

Construct a point on the plane

LINE

Use any two points to define a line on the plane

SEGMENT

Use any two points to define a line segment on the plane

DISTANCE OR LENGTH

Compute and display the distance between two points, the length of a line segment or the perimeter of a polygon

POLYGON

Construct polygons of any size and type

AREA

Compute and display the area of a polygon or circle

TEXT

Create text box labels on the *GeoGebra* page

MOVE GRAPHICS VIEW

Move the display window to other locations on the overall *GeoGebra* page.

Use the basic construction tools to create geometric art.

***GeoGebra* Lessons for Elementary Geometry**

Introduction

Each lab activity includes a student handout, essentially the lesson plan, and a related *GeoGebra* file. There are at least three basic strategies for integrating *GeoGebra* into the teaching- learning process:

- a) Teachers use *GeoGebra* to create “dynamic worksheets” for individual instruction. *GeoGebra* provides teachers with a tool for creating personalized interactive instructional materials, so called dynamic worksheets, by exporting dynamic figures into web pages.
- b) Interactive *GeoGebra*-based presentations, whether in dynamic worksheet format or simply standard *GeoGebra* files, can be used for small or large group instruction via the interactive whiteboard technologies now found commonly in elementary schools.
- c) Students can be taught to use *GeoGebra* to make their own geometric constructions as they experiment and problem solve with concepts, procedures, and mathematics related to geometry. The various *GeoGebra* geometric construction tools can themselves become instructional tools, for example, experimenting with the Parallel Line tool to discover the meaning of “parallel.”

All of these strategies for using *GeoGebra* are represented in the range of geometry activities included in these materials. Though all can be useful depending upon specific learning objectives, if a primary goal is to develop students’ skills with the *GeoGebra* software that can be extended throughout middle and high school, then having elementary students not only interact with teacher- developed dynamic worksheets but use the basic *GeoGebra*

geometric construction and measurement tools to explore concepts and solve problems should be a priority.

These materials use the methods and techniques that promote a philosophy of learning geometry that centered on conceptual understanding through a pedagogy based on exploration and guided-inquiry through geometric construction as opposed to learning mathematics as memorization without deep understanding.

FRACTIONS AND AREA (4 LESSONS)

1. Finding Halves – Rectangles

Find as many ways as possible to divide a rectangle into halves.

2. Finding Halves – Non-standard Shapes

Divide miscellaneous, non-standard shapes into halves.

3. Finding Thirds – Rectangles

Find as many ways as possible to divide a rectangle into thirds.

4. Finding Thirds – Non-standard Shapes

Divide miscellaneous, non-standard shapes into thirds.

1. Finding Halves - Rectangles

Introduction and Background

In this activity you will find a way to divide rectangles in half, but you might have to be creative! Remember, the halves of a rectangle don't necessarily have to look exactly alike (be congruent).

GeoGebra file: 1_finding_halves_rectangles.ggb



The Challenge



- Use the SEGMENT tool and the MOVE (pointer) tool to experiment finding as many ways as you can to divide the rectangle into 2 equal pieces -- pieces having the same area.
- Draw each solution on the rectangles on the *GeoGebra* screen.



Check Your Work



- Test: Each half should have the same area. Use the GRID from TOGGLE STYLE BAR to make sure the areas are the same.
- Test: If we were to print and cut out your solution and cut it out along the line or lines you added, there should only be two pieces after cutting.
- Test: Each solution must be a new one. If I can flip or rotate a solution you already have and get the same diagram, then it is NOT a new solution.



Do You Have More Solutions?

- If you can find more than these eight, then move down on the drawing pad, draw more rectangles of the same dimensions, and show your additional solutions.

Print and Discuss

- When you have found all the ways you can to divide each polygon into halves, print the *GeoGebra* screen.
- Find a partner who is also finished and compare your line segments.
- Do you agree with each other? Did you find different solutions?

2. Finding Halves – Non-Standard Shapes

Introduction and Background

In this activity you will find a way to divide some polygons in half, but you might have to be creative! Remember, the halves of a polygon don't necessarily have to look exactly alike (be congruent).

GeoGebra file: 2_finding_halves.ggb



The Challenge

- Use the SEGMENT tool to construct a line segment that divides each polygon into equal halves.
- Is there more than one way to do this?
- If possible, use another line segment to divide the polygon in another way.

Print and discuss

- When you have found all the ways you can to divide each polygon into halves, print the *GeoGebra* screen.
- Find a partner who is also finished and compare your line segments.
- Do you agree with each other?
- If you see a line segment that you think does not really divide the polygon into halves, fair shares, and then discuss why you feel that way.

3. Finding Thirds – Rectangles

Introduction and Background

In this activity you will find a way to divide rectangles into thirds, but you might have to be creative! Remember, the thirds of a rectangle don't necessarily have to look exactly alike (be congruent).

GeoGebra file: 3_finding_thirds_rectangles.ggb



The Challenge



- Use the SEGMENT tool and the MOVE (pointer) tool to experiment finding as many ways as you can to divide the rectangle into 3 equal pieces -- pieces having the same area.
- Draw each solution on the rectangles on the *GeoGebra* screen.



Check Your Work

- Test: Each third should have the same area. Use the GRID from TOGGLE STYLE BAR to make sure the areas are the same.
- Test: If we were to print and cut out your solution and cut it out along the line or lines you added, there should only be three pieces after cutting.
- Test: Each solution must be a new one. If I can flip or rotate a solution you already have and get the same diagram, then it is NOT a new solution.



Do You Have More Solutions?

- If you can find more than these six, then move down on the drawing pad, draw more rectangles of the same dimensions, and show your additional solutions.

Print and Discuss

- When you have found all the ways you can to divide each polygon into thirds, print the *GeoGebra* screen.
- Find a partner who is also finished and compare your line segments.
- Do you agree with each other? Did you find different solutions?

4. Finding Thirds – Non-Standard Shapes

Introduction and Background

In this activity you will find a way to divide some polygons into thirds, but you might have to be creative! Remember, the thirds of a polygon don't necessarily have to look exactly alike (be congruent).

GeoGebra file: 4_finding_thirds.ggb



The Challenge

- Use the SEGMENT tool to construct a line segment that divides each polygon into thirds.
- Is there more than one way to do this?
- If possible, use another line segment to divide the polygon in another way.

Print and Discuss

- When you have found all the ways you can to divide each polygon into thirds, print the *GeoGebra* screen.
- Find a partner who is also finished and compare your line segments.
- Do you agree with each other?
- If you see a line segment that you think does not really divide the polygon into thirds, four fair shares, and then discuss why you feel that way.

QUADRILATERALS (2 LESSONS)

1. Classifying Quadrilaterals

Sort various quadrilaterals as rectangles, squares, and rhombuses. Includes non-quadrilaterals.

2. Art from Quadrilaterals

Create a design using five different quadrilaterals.

1. Classifying Quadrilaterals

GeoGebra file: 1_classify_quadrilaterals.ggb



Sort

- Use the MOVE tool to sort the polygons by dragging them into the correct containers.



Construct

- In the space to the left of the now filled containers, use the POLYGON tool to construct new shapes that could go into each of the containers:
 - a. One rectangle
 - b. One square
 - c. One rhombus
 - d. One other quadrilateral that is not a rectangle, square, or rhombus
 - e. One polygon that is not a quadrilateral



- Do not drag these new shapes into the containers. Instead, use the TEXT tool to label each new shape with its name:
 - a. Rectangle
 - b. Square
 - c. Rhombus
 - d. Other quadrilateral
 - e. Non-quadrilateral

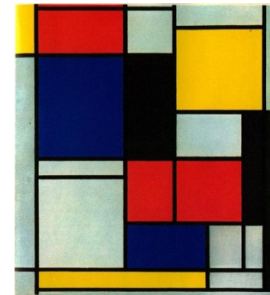
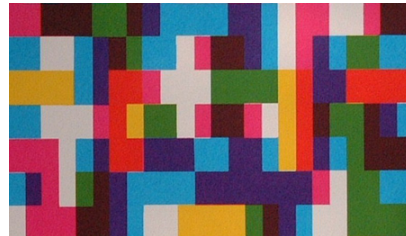
Print and Discuss

- When you have finished your constructions and labeling, print the *GeoGebra* page.
- Find a partner who has also finished and printed.

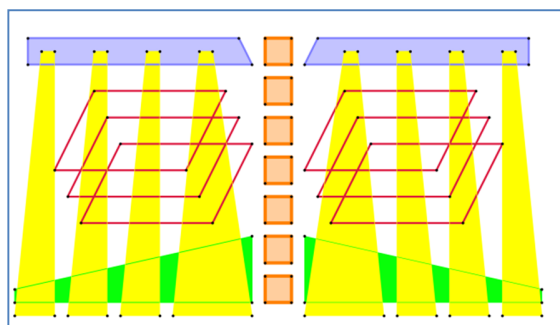
- Compare your sorting. Do you agree on all the polygons? If not, discuss how you decided which container the disputed polygon belonged in.
- Examine each other's constructed polygons. See if you agree that they are labeled correctly.

2. Art from Quadrilaterals

Some artists like Piet Mondrian used a great deal of geometry in their art, especially quadrilaterals.



GeoGebra file: 2_art_quadrilaterals.ggb



The design on the *GeoGebra* page was constructed using various quadrilaterals.



Clear the Workspace

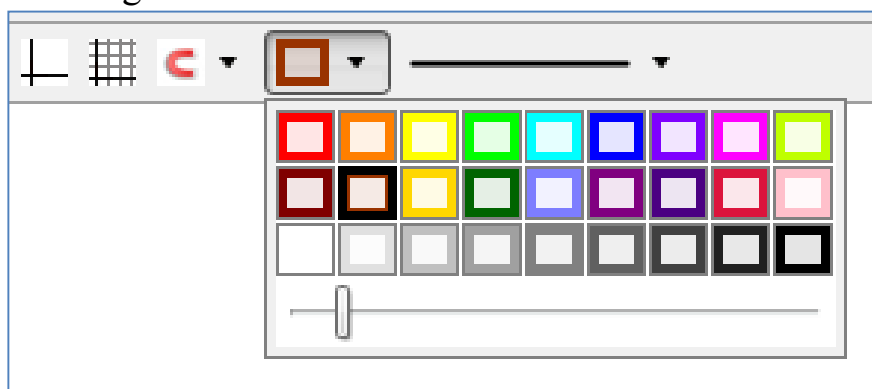
- Use the EDIT menu to SELECT ALL. Then use the DELETE key on the keyboard to clear the *GeoGebra* page.





Create

- Use the polygon tool to create a design that includes at least one of each of the following:
 - a. Parallelogram
 - b. Rectangle
 - c. Square
 - d. Rhombus
 - e. Trapezoid
- It may be easier to design with the GRID turned on, but turn it off if you decide to print your design.
- Once you have selected the POLYGON tool, notice that you can select a color and color intensity for your polygons before constructing them.



PARALLEL AND PERPENDICULAR LINES AND LINE SEGMENTS (2 LESSONS)

1. The Parallel Line Tool – Just What Does It Do?
Students use the *GeoGebra* Parallel Line tool to discover through experimentation and observation the meaning of "parallel".
2. The Perpendicular Line Tool – Just What Does It Do?
Students use the *GeoGebra* Perpendicular Line tool to discover through experimentation and observation the meaning of "perpendicular".

1. The Parallel Line Tool – Just What Does It Do?

GeoGebra file: 1_discover_parallel.ggb

Construct

- One the *GeoGebra* page you will see four geometric objects:
 - a. Point A
 - b. Point B
 - c. Point C
 - d. Line BC



- On the Tool Bar there is a PARALLEL LINE tool.
- Click on the PARALLEL LINE tool to select it. Notice the instructions for this *GeoGebra* tool:

Parallel Line
Select point and parallel line

- Click first on Point A and then click on Line BC. This will create a new, parallel line.
- But just what is a parallel line?



Experiment

- Use the MOVE tool to experiment by moving Points A, B, or C. Move the two lines as well. Make observations.



- If needed, use the ZOOM IN or ZOOM OUT tool to change your view.





New Construction

- Use the DELETE OBJECT eraser tool to click on the points and lines on the *GeoGebra* page and delete them.



- Now use the POINT tool, the LINE tool, and the PARALLEL LINE tool to create your own parallel lines and again experiment by moving points or lines

Conclusions

- So just what is a parallel line? Write your conclusions below:

2. The Perpendicular Line Tool – Just What Does It Do?

GeoGebra file: 2_discover_perpendicular.ggb

Construct

- On the *GeoGebra* page you will see four geometric objects:
 - a. Point A
 - b. Point B
 - c. Point C
 - d. Line BC



- On the Tool Bar there is a PERPENDICULAR LINE tool. Click on the PERPENDICULAR LINE tool to select it. Notice the instructions for this *GeoGebra* tool:

Perpendicular Line
Select point and perpendicular line

- Click first on Point A and then click on Line BC. This will create a new, perpendicular line.
- But just what is a “perpendicular line?”



Experiment

- Use the MOVE tool to experiment by moving Points A, B, or C. Move the two lines as well. Make observations.



- If needed, use the ZOOM IN or ZOOM OUT tool to change your view.



New Construction

- Use the DELETE OBJECT eraser tool to click on the points and lines on the *GeoGebra* page and delete them.



- Now use the NEW POINT tool, the LINE THROUGH TWO POINTS tool, and the PERPENDICULAR LINE tool to create your own perpendicular lines and again experiment by moving points or lines.

Conclusions

- So just what is a perpendicular line? Write your conclusions below:

CLASSIFY 2D FIGURES USING PARALLEL AND PERPENDICULAR (2 LESSONS)

1. Constructing Parallelograms

Construction challenge highlights parallel lines as attribute of some quadrilaterals.

2. Constructing Rectangles

Construction challenge highlights perpendicular lines as attribute of some quadrilaterals.

1. Constructing Parallelograms

Background

How do you know if a certain shape can be called “a parallelogram?”

What makes a shape a parallelogram?

This activity will explore one attribute of parallelograms.



Construction Challenge

- On the *GeoGebra* page there are two lines constructed: **Line EB** and **Line BC**.
- Using only the PARALLEL LINE tool, can you construct a parallelogram by adding to **Line EB** and **Line BC**?



Experiment and Conclude

- Once you have constructed your parallelogram, use the MOVE (pointer) tool to drag **Points E, B, and C** to different locations on the grid.
- Based on this construction, define *parallelogram* using the concept parallel lines:
 - *A parallelogram is a shape that...*
- What other common shapes can you make by manipulating your parallelogram?
- Can you make a rectangle? A rectangle is just a special type of parallelogram.
- Can you make a square? A square is just a special type of rectangle.

2. Constructing Rectangles

Background

How do you know if a certain shape can be called “a rectangle?”

What makes a shape a rectangle?

This activity will explore one attribute of rectangles.



Construction Challenge

- On the *GeoGebra* page there is the **Line AB**.
- Using only the PERPENDICULAR LINE tool, can you construct a rectangle by adding to **Line AB**?



Experiment and Conclude

- Once you have constructed your rectangle, use the MOVE (pointer) tool to drag points and manipulate your rectangle.
- Based on this construction, define *rectangle* using the concept of perpendicular lines:
 - *A rectangle is a quadrilateral that...*
- Can you make a square? A square is just a special type of rectangle.
- Since you constructed your rectangle and square with perpendicular lines, what can you say about the angles inside the rectangle or square?

SYMMETRY (7 LESSONS)

1. Reflections
Students develop concept of symmetry
2. Find the Symmetry
Construct a line of symmetry for given shapes
3. Symmetry in Nature
Find symmetry in natural objects
4. Symmetry Challenges
Student is challenged to construct shapes that meet criteria with regard to symmetry
5. Folded Art from Symmetry
Simulation of folding/cutting paper to create design based on symmetry
6. Create Symmetry Challenge – One Line of Symmetry
Students construct mystery shape given line of symmetry and piece of the missing shape (5 tasks)

7. Create Symmetry Challenge – Two Lines of Symmetry

Students construct mystery shape given lines of symmetry and piece of the missing shape (3 tasks)

1. Reflections

GeogGebra file: 1_define_symmetry.ggb



Background

- Using the MOVE (pointer) tool, click on CLICK TO SEE LINE SEGMENTS checkbox.
- Imagine what design would be created if you could make an exact copy of each shape and then fold it over along the dotted orange lines. Another way to think about this process is to imagine a reflection of each shape in a mirror located along the dotted orange line.
- *GeoGebra* will do this reflecting for you.



Construct Reflections

- Select the REFLECT ABOUT LINE tool.
- To use this tool, first click on the red shape then click carefully on the dotted orange line segment touching the red shape.



- Using the MOVE (pointer) tool, click the checkbox to *turn off* the dotted orange line segments. Now you can see your new red shape created by reflecting the original red shape along the line segment.



- Using the MOVE (pointer) tool, click on the checkbox again to *turn on* the line segments again.



- Now use the REFLECT ABOUT LINE tool to reflect the remaining five shapes. Before you do each, try to imagine what the resulting shape will look like.



Where's the Geometry?

- Using the MOVE (pointer) tool, click the checkbox to *turn off* the dotted orange line segments. Now you can see all your new shapes created by reflecting along the line segment.
- Each of these new shapes has a characteristic that geometers call *symmetry*.



- Using the MOVE (pointer) tool, click on the checkbox again to *turn on* the line segments again.
- The dotted orange line segments are called the *line of symmetry* of each new shape.

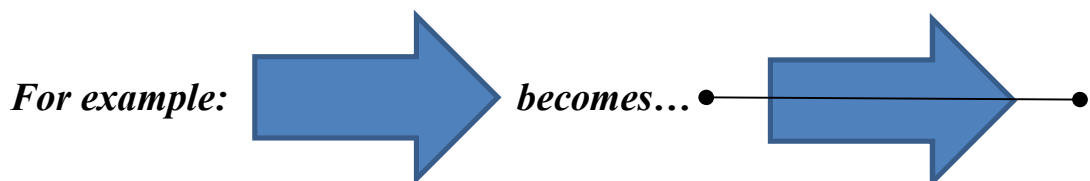
2. Find the Symmetry

GeoGebra file: 2_find_single_line_symmetry.ggb



Construct Lines of Symmetry

- Each of these shapes has a single line of symmetry.
- Use the SEGMENT tool to construct your best estimate of where that line of symmetry is for shape.





Check Your Work

- When you have finished constructing all six lines of symmetry, use the MOVE (pointer) tool to click the checkboxes to check your answer.

3. Symmetry in Nature

Background

Symmetry is not just a concept found in the study of geometry. Symmetry is often found in the natural world.

GeoGebra file: 3_symmetry_nature.ggb



Find Lines of Symmetry

- Examine each picture. Try to discover symmetry in the natural object presented.
- Use the SEGMENT tool to construct a line of symmetry for each object from nature.



Test Your Ideas

- Using the MOVE (pointer) tool, click on the checkbox. This will display the actual lines of symmetry.

4. Symmetry Challenges

GeoGebra file: 4_symmetry_challenges.ggb



- Use either the POLYGON tool or the SEGMENT tool to complete your constructions for these challenges.





Challenge 1

- Construct a shape with *exactly one* line of symmetry.
- Label the line of symmetry using the SEGMENT tool.



Challenge 2

- Construct a shape with *exactly two* lines of symmetry.
- Label the lines of symmetry using the SEGMENT tool.

Challenge 3

- Construct a shape with *no* lines of symmetry.



Challenge 4

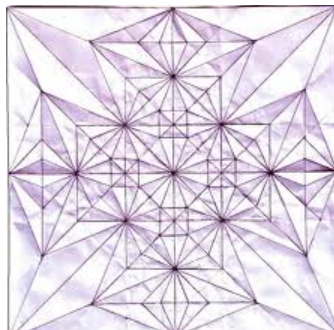
- Construct a shape with *more than two* lines of symmetry.
- Label the lines of symmetry using the SEGMENT tool.

Follow-up

- Print your *GeoGebra* sketches and compare your constructions with a partner's constructions. Check each other's work for correctness.

5. Folded Art from Symmetry

(Adapted from a *GeoGebra* worksheet by Daniel Mentrard)



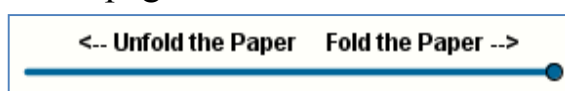
These images are examples of designs created from symmetry. If you have ever made a folded paper snowflake, then you have created a design using symmetry.

GeoGebra file: 5_folded_art_from_symmetry.ggb



Create

- When you open the *GeoGebra* file, you will see a piece of paper folded twice.
- Use the MOVE tool to unfold the paper using the slider at the top of the page:



- Now use the slider to refold the paper into a small square.
- Use the MOVE tool to grab and drag the six red points to “cut” a new shape in the paper.
- Try to imagine what your design will look like when you unfold the paper.
- Now use the slider to unfold the paper and see your symmetrical design.
- Experiment with different “cuts.” If you create a design you especially like, then print it.

6. Create Symmetry Challenge – One Line of Symmetry

GeoGebra files: 6_create_symmetry_challenge.ggb (total of 5 files, labeled 6a – 6e)

Background

- On each of the *GeoGebra* page there are two objects:
 1. A line of symmetry
 2. Half of a symmetrical shape

Challenge

- Given the line of symmetry and half of the shape as clues, create the missing half of the shape.



Suggestions

- Use the POINT tool and the SEGMENT tool to construct the missing half of the symmetrical shape.



Hint: This challenge is much easier if you turn on the GRID before beginning.



Check Your Construction

- After you have completed your construction, check your solution using the REFLECT ABOUT LINE tool. After selecting this tool, just click on the original shape and then click on the line of symmetry. The REFLECT ABOUT LINE tool will create the missing half of the overall shape.
- Check to see if your construction is indeed the missing half of the symmetrical shape.

7. Create Symmetry Challenge – Two Lines of Symmetry

GeoGebra files: 7_create_symmetry_challenge.ggb (total of 3 files, labeled 7a – 7c)

Background

- On each of the *GeoGebra* page there are two objects:
 1. Two lines of symmetry (dashed red)
 2. One fourth of a mystery symmetrical shape

Challenge

- Given the lines of symmetry and of the given shape as clues, create the mystery symmetrical shape.
- In other words, construct the other $\frac{3}{4}$ of the mystery shape.



Suggestions



- Use the POINT tool and the SEGMENT tool to construct the missing fourths of the mystery symmetrical shape.

Hint: This challenge is much easier if you turn on the GRID before beginning.



Check Your Construction

- After you have completed your construction, check your solution using the REFLECT ABOUT LINE tool. After selecting this tool, just click on the original shape and then click on the line of symmetry. The REFLECT ABOUT LINE tool will create a missing piece of the overall shape.
- Repeat this process until you have created an image of the entire symmetrical shape.
- Check to see if your construction is indeed the missing part of the symmetrical shape.

CLASSIFY 2D FIGURES (1 LESSON)

Regular polygons

Construct regular polygons, learn their names, and discover the definition of regular polygon

Regular Polygons



Background

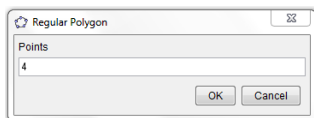
- One of the *GeoGebra* geometric construction tools is the REGULAR POLYGON tool. In this activity, you will use this tool to discover what geometers mean by a *regular polygon*.

Construct a Regular Polygon with 3 Sides

- Select the REGULAR POLYGON tool.
- Notice the instructions in the menu bar:

Regular Polygon
Select two points and enter number of vertices

- Select a starting point near the top of the page and click. Select a second point and click. Now you will be asked to enter the number of sides for your polygon:



- Change the 4 to a 3 and click OK.



- You can use the MOVE tool to drag any vertex of the polygon, changing its size or orientation.



- Select the ANGLE tool and click on the center of your polygon to label the size of all of the interior angles, the angles inside the polygon.



- Select the DISTANCE OR LENGTH tool and label the lengths of all of the sides of your polygon.
- Finally, click on the “3” checkbox to see the name of this polygon that you have constructed.

Add to the Data Table

- Complete the row in the data table for a 3-sided regular polygon.
- Then delete your polygon and create the next regular polygon in the table. Fill in that row in the table.

Data Table			
Number of Sides	Name	Size of Interior Angles	Length of Sides
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Conclusions

- Having completed the table, how would you define a *regular polygon*?

Lesson Plan Template

Instructions: download this lesson plan template and complete each section of the lesson plan template providing details necessary to better understand the flow of your lesson and how you and your students use GeoGebra.

Student Name:	Lesson Title/Topic:		
Subject Area:	Grade Level:	Number of students:	
Type of classroom (general education, ICT, self-contained, etc.):		Time Allotment:	
Description of Lesson (include grouping of students):			
<i>Write a brief, yet concise, description of what occurs in this lesson. Explain how students will use GeoGebra and how students will be grouped when working with GeoGebra.</i>			
State Curriculum Standards met in this lesson:			
<i>Go to the NY state curriculum standards and select the grade content/level appropriate standards that are being met in this lesson. Copy and paste here, including standard code.</i>			

Instructional Objective(s):

Write the instructional objectives (learning outcomes) that the student should meet in this lesson. Start each objective from a new line.

Materials, Resources and Technology:

List the materials, resources and technology required for the lesson. You should also include a reference to at least one reputable printed or on-line resource used for subject knowledge presentation in the lesson (this could be a textbook for a given grade and subject, curriculum on-line resource, etc.). If students will be using websites, include name that could be used for bookmarking and valid URL address for each website.

Teacher Preparation:

Explain (use the numbering tool) each task that the teacher has to complete to get ready for the lesson after this lesson plan has been created, including activities such as gather materials, bookmark websites, make copies, schedule labs, gather parent permissions (for fieldtrips), etc. List each task separately.

Student Participation:

Explain how the students are actively involved during the lesson. Explain how the students move through the lesson and complete the tasks required of them. Make sure to provide a brief description of each part of the lesson (In a formal lesson plan, this would be a step by step guide to the instructional procedures that occur during the lesson. In this format this section should be in a narrative consisting of 2-3 paragraphs, complete, but concise.) The main emphasis on this section is on tasks that students complete with GeoGebra. This description on its own should be sufficient to evaluate the use of technology in the lesson against the principles of the effective use of GeoGebra.

Assessment/Evaluation:

Describe the evaluation process (both formative and summative) that you will use to measure whether the students have successfully achieved the instructional objectives.

What are the criteria for achievement, and performance level? How will you assess what students have learned? The criteria should directly align to the instructional objectives and standards. How will you monitor student progress? Also describe your plan for providing feedback to your students.

In addition to this template you will provide two separate files: student activity handout for the use with GeoGebra and GeoGebra file. Accompanying student activity handout will give the students instructions on using technology to complete the activity's tasks. In addition to the tasks, the directions for students to follow should include the questions that students are to answer to complete the objectives of the lesson. The handout should be attractive and neat, include title, introduction and learning goals for students, and place for student name and the date. The use of a related graphic for technology instructions is required. Refer to *GeoGebra Lessons for Elementary Geometry* for example of student activity handout and corresponding GeoGebra file (if applicable).

CONCLUSIONS

Dynamic Geometry software such as GeoGebra has been widely adopted in the last 20 years and a vast amount of creativity has been brought to bear on applying it to the educational process. Wide exposure of dynamic geometry software to millions of creative minds, both teachers and students, has resulted in a plethora of pedagogic uses for the tool in school. Recently these tools found their way to the elementary schools.

In this student teaching manual we introduced instructional strategies for using GeoGebra in teaching elementary geometry, specifically using topics of symmetry and properties of geometric figures. We suggest the readers to expand these ideas to other topics in the elementary geometry curriculum.

RECOMMENDED LITERATURE

1. Bu, L. and Schoen, R. (Eds.) *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*. – Rotterdam: Sense Publishers, 2011. – 258 pp.
2. Cox Currier, S. *Unfolding a Problem*. – *Teaching Children Mathematics*, 2015, Vol. 21, #8. – pp. 476 – 482.
3. Gardner, M. *The Ambidextrous Universe. Left, Right and the Fall of Parity*. – London: Penguin Books, 1964. – 276 pp.
4. Holden, A. *Shapes, Space, and Symmetry*. – Mineola, NY: Dover Publications, 2012. – 208 pp.
5. Kinsey, L.C., Moore, T.E., and Prassidis, E. *Geometry and Symmetry*. – Upper Saddle River, NJ: Wiley. – 459 pp.
6. Moyer, P. *Patterns and Symmetry: Reflections of Culture*. – *Teaching Children Mathematics*, 2001, Vol. 8, #3. – pp. 140 – 144.
7. Pedoe, D. *Geometry and the Visual Arts*. – Mineola, NY: Dover Publications, 2011. – 320 pp.
8. Stahl, G. *Adventures in Dynamic Geometry*. – lulu.com, 2016. – 350 pp.
9. Weyl, H. *Symmetry*. – Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1952. – 168 pp.
10. Wigner, E. P. *Symmetries and Reflections: Scientific Essays*, 1967. – Santa Barbara, CA: Greenwood Press. – 288 pp.

Educational edition

LYUBLINSKAYA Irina E.
TIKHOMIROVA Svetlana V.

TEACHING GEOMETRY USING GEOGEBRA APPLICATION

Elective course for pre-service elementary school teachers

Student teaching manual

Published in author's edition

Approved for printing 24.01.17.

Format 60×84/16. Conditional printer's sheets 3,72. Circulation 300 copies.

Order

Publisher

Vladimir State University named after Alexander and Nicolay Stoletovs
600000, Vladimir, ul. Gorkogo, 87.