Министерство образования РФ
Владимирский государственный университет
Кафедра физики и прикладной математики

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания к лабораторным работам

Составители:
К.В. ДЕМИДОВ
А. В. ДУХАНОВ

Владимир 2003

УДК 517.977

Рецензент
Кандидат физико-математических наук
генеральный директор ООО «Альянс Управляющих,
Консультантов и Аналитиков»
А.И. Масалович

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Методы оптимизации: Метод. указания к лабораторным работам / Сост.: К.В. Демидов, А.В. Духанов; Владим. гос. ун-т. Владимир, 2003, 32 с.

Содержат материалы для лабораторных работ по методам решения задач минимизации функций. Каждая лабораторная работа включает краткую постановку задачи, описание используемого метода и варианты индивидуальных заданий.

Предназначены для студентов очной формы обучения, обучающихся по специальности 010200 – прикладная математики и информатика.

Ил. 3. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.977

Лабораторная работа № 1. Минимизация функций одной переменной методами дихотомии и золотого сечения

Постановка задачи

Используя методы дихотомии и золотого сечения, найти на отрезке $[a, b]$ точку u^*, в которой достигается минимальное значение унимодальной функции $J(u)$. Вычислить минимальное значение $J(u^*)$.

Теоретическая часть

Опр. 1. Функция $J(u)$ является унимодальной на отрезке $[a, b]$, если $J(u)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\exists \alpha, \beta : a \le \alpha \le \beta \le b$, такие, что

1) $J(u)$ строго монотонно убывает при $a \le u \le \alpha$ (если $a < \alpha$);

2) $J(u)$ строго монотонно возрастает при $\beta \le u \le b$ (если $\beta < b$);

3) $J(u) = J^* = \inf\limits_{u \in [a,b]} J(u)$ при $\alpha \le u \le \beta$.

Случаи, когда один или два из отрезков $[a, \beta]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, b]$ вырождаются в точку, не исключаются.

Метод дихотомии (деления отрезка пополам)

Алгоритм

Пусть задана функция $J(u)$, унимодальная на отрезке $[a, b]$. Выберем значение точности $\varepsilon > 0$, с которой необходимо найти минимальное значение функции, а также значение $\delta < \varepsilon$, являющееся параметром метода.

Определим точки u_1, u_2 по формулам:

$$u_1 = \frac{a + b - \delta}{2}; u_2 = \frac{a + b + \delta}{2}. \quad (1)$$

Найдем и сравним значения функции J в точках u_1, u_2. Здесь возможны два случая:

1) $J(u_1) > J(u_2)$ (рис. 1);

2) $J(u_1) \le J(u_2)$.

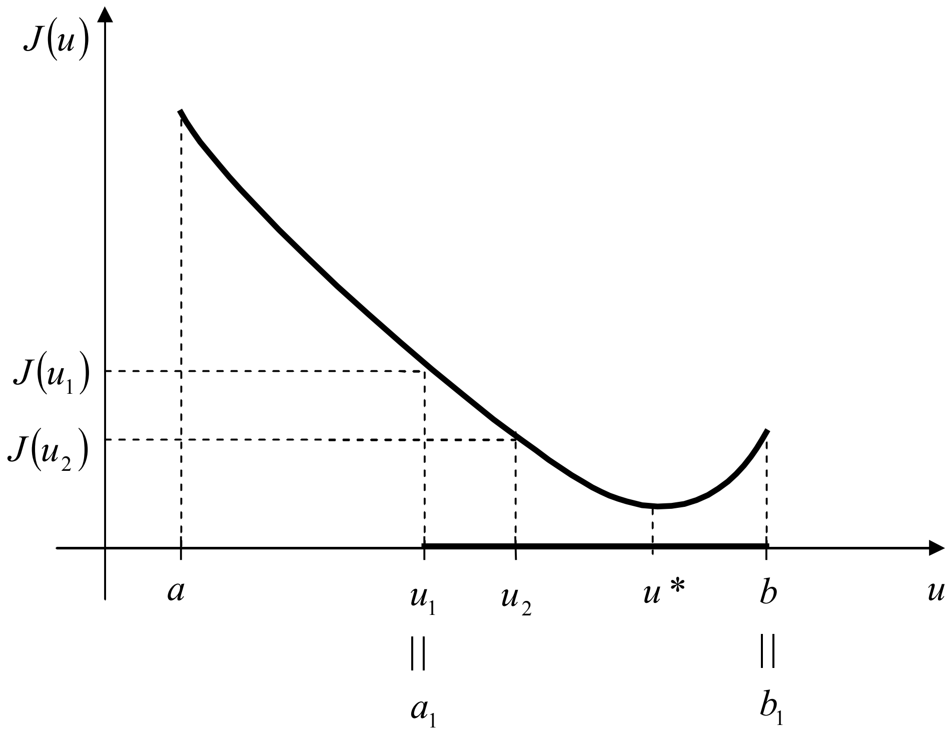

Рис. 1. Определение точек u_1 и u_2.

Определим новый отрезок $[a_1, b_1]$ в зависимости от того, какой из этих случаев имеет место. В первом случае концы отрезка $[a_1, b_1]$ определяются следующим образом:

$$a_1 = u_1, b_1 = b, \tag{2}$$

во втором случае

$$a_1 = a, b_1 = u_2. \tag{3}$$

Для нового отрезка $[a_1, b_1]$ заново вычисляются точки u_1, u_2 по формулам (1) и определяется очередной отрезок меньшей длины $[a_2, b_2]$ при помощи формул (2) или (3). Дальнейшие итерации выполняются аналогично. При этом в силу унимодальности функции искомая точка минимума u^* принадлежит каждому из построенных отрезков.

Итерации по определению отрезков продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность ε.

Определение количества итераций при заданной точности

После нахождения k-го отрезка $[a_k, b_k]$ в качестве приближенного значения к точке минимума следует взять середину этого отрезка $v_k = \dfrac{b_k + a_k}{2}$. В этом случае погрешность решения, т.е. расстояние $\rho(v_k, U^*)$ от точки v_k до множества точек минимума U^*, оценивается сверху величиной, равной половине длины отрезка $[a_k, b_k]$:

$$\frac{(b - a - \delta)}{2^{k+1}} + \frac{\delta}{2}.$$

Учитывая необходимость достижения заданной точности ε, получаем, что количество требуемых итераций k должно удовлетворять неравенству

$$\frac{(b - a - \delta)}{2^{k+1}} + \frac{\delta}{2} < \varepsilon,$$

или

$$k > \log_2 \frac{b - a - \delta}{2\varepsilon - \delta}.$$

Метод золотого сечения

Алгоритм

Метод золотого сечения от рассмотренного ранее метода отличается тем, что позволяет решить задачу минимизации унимодальной на отрезке $[a, b]$ функции с требуемой точностью при меньшем количестве вычислений значений функции.

Опр. 2. Золотым сечением отрезка называется деление отрезка на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей части равнялось отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка.

Нетрудно проверить, что золотое сечение отрезка $[a,b]$ производится двумя точками $u_1 = a + (3-\sqrt{5})(b-a)/2$ и $u_2 = a + (\sqrt{5}-1)(b-a)/2$, расположенными симметрично относительно середины отрезка, причем $a < u_1 < u_2 < b$.

Точки золотого сечения обладают следующими свойствами, которые используются в методе золотого сечения:

1. Точка u_2 производит золотое сечение отрезка $[u_1, b]$, так как $u_2 - u_1 < b - u_2$ и $(b-u_1)/(b-u_2) = (b-u_2)/(u_2-u_1)$. Аналогично точка u_1 производит золотое сечение отрезка $[a, u_2]$.

2. Для точек золотого сечения выполняется равенство

$u_2 = a + b - u_1$.

Алгоритм метода золотого сечения заключается в следующем. Положим, $a_1 = a, b_1 = b$. На отрезке $[a_1, b_1]$ возьмем точки u_1, u_2, производящие золотое сечение, и вычислим значения $J(u_1), J(u_2)$. Далее, если $J(u_1) \le J(u_2)$, то примем $a_2 = a_1, b_2 = u_2, \bar{u}_2 = u_1$. Если же $J(u_1) > J(u_2)$, то $a_2 = u_1, b_2 = b_1, \bar{u}_2 = u_2$. Здесь важно то, что внутри нового отрезка $[a_2, b_2]$ уже содержится точка $\bar{u}_2$, которая производит золотое сечение этого отрезка. Причем в этой точке уже известно значение функции $J(\bar{u}_2) = \min\{J(u_1), J(u_2)\}$.

Длина отрезка

$$b_2 - a_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)(b-a)}{2}.$$

Опишем n-й шаг алгоритма. Пусть уже определены точки $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$, вычислены значения $J(u_1), J(u_2), ..., J(u_{n-1})$, найден отрезок $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ такой, что $[a_{n-1}, b_{n-1}] \cap U^* \neq \varnothing$, $b_{n-1} - a_{n-1} = = \left(\left(\sqrt{5}-1\right)/2\right)^{n-2}(b-a)$, и известна точка $\bar{u}_{n-1}$, производящая золотое сечение отрезка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$, $n \geq 2$. Тогда в качестве следующей точки возьмем точку $u_n = a_{n-1} + b_{n-1} - \bar{u}_{n-1}$, которая в силу свойства (2) также производит золотое сечение отрезка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$. Вычислим значение $J(u_n)$. Пусть для определенности $a_{n-1} < u_n < \bar{u}_n < b_{n-1}$ (случай $\bar{u}_{n-1} < u_n$ рассматривается аналогично). Если $J(u_n) \leq J(\bar{u}_{n-1})$, то полагаем, $a_n = a_{n-1}, b_n = \bar{u}_{n-1}, \bar{u}_n = u_n$; если же $J(u_n) > J(\bar{u}_{n-1})$, то $a_n = u_n, b_n = b_{n-1}, \bar{u}_n = \bar{u}_{n-1}$. Новый отрезок $[a_n, b_n]$ таков, что $[a_n, b_n] \cap U^* \neq \varnothing$, $b_n - a_n = \left(\left(\sqrt{5}-1\right)/2\right)^{n-1}(b-a)$, точка $\bar{u}_n$ производит золотое сечение отрезка $[a_n, b_n]$ и $J(\bar{u}_n) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} J(u_i)$.

Определение количества итераций при заданной точности

После нахождения k-го отрезка $[a_k, b_k]$ в качестве приближенного значения к точке минимума можно взять точку $\bar{u}_k$. В этом случае погрешность решения, т.е. расстояние $\rho(\bar{u}_k, U^*)$ от точки $\bar{u}_k$ до множества точек минимума U^* оценивается сверху величиной, равной

$$\max\{b_k - \bar{u}_k, \bar{u}_k - a_k\}.$$

Учитывая необходимость достижения заданной точности ε, получаем, что количество требуемых итераций k должно удовлетворять неравенству

$$\varepsilon \geq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k (b-a),$$

или

$$k > \log_{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Задание к лабораторной работе

Разработать программу, реализующую оба описанных метода для функции $J(u)$; найти её минимальное значение на отрезке [-100,100].

Варианты заданий

<table>
<tr><th>№ вар.</th><th>$J(u)$</th><th>α</th><th>β</th><th>№ вар.</th><th>$J(u)$</th><th>α</th><th>β</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="10">$u^2 + \alpha e^{\beta u}$</td><td>1</td><td>-0.85</td><td>16</td><td rowspan="5">$u^4 + \alpha \operatorname{arctg} \beta u$</td><td>-0.3</td><td>3.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>-0.65</td><td>17</td><td>-0.1</td><td>4.0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>-0.45</td><td>18</td><td>0.2</td><td>4.5</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>-0.25</td><td>19</td><td>0.4</td><td>5.0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>-0.05</td><td>20</td><td>0.8</td><td>5.5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>0.15</td><td>21</td><td rowspan="10">$\beta u + e^{\lvert u-\alpha \rvert}$</td><td>0.2</td><td>-4.0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td><td>0.35</td><td>22</td><td>0.4</td><td>-3.4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>8</td><td>0.55</td><td>23</td><td>0.6</td><td>-2.8</td></tr>
<tr><td>9</td><td>9</td><td>0.75</td><td>24</td><td>0.8</td><td>-2.2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>10</td><td>0.95</td><td>25</td><td>1.0</td><td>-1.6</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="5">$u^4 + \alpha \operatorname{arctg} \beta u$</td><td>-1.5</td><td>1.0</td><td>26</td><td>1.2</td><td>-1.0</td></tr>
<tr><td>12</td><td>-1.3</td><td>1.5</td><td>27</td><td>1.4</td><td>-0.4</td></tr>
<tr><td>13</td><td>-1.1</td><td>2.0</td><td>28</td><td>1.6</td><td>-0.2</td></tr>
<tr><td>14</td><td>-0.9</td><td>2.5</td><td>29</td><td>1.8</td><td>0.8</td></tr>
<tr><td>15</td><td>-0.7</td><td>3.0</td><td>30</td><td>2.0</td><td>1.4</td></tr>
</table>

Контрольные вопросы

1. Дайте определение унимодальной функции.
2. Каким образом в методе дихотомии гарантируется попадание точки минимума u^* в отрезок $[a_k, b_k]$ при любом $k > 0$?
3. Чем отличается метод дихотомии от метода золотого сечения?
4. Почему в методе золотого сечения, начиная со второй итерации, необходимо вычислять только один раз значение функции $J(u)$ вместо двух в методе дихотомии?

5. Какой из рассмотренных в лабораторной работе методов сходится быстрее и почему?

Лабораторная работа № 2. Метод ломаных

Конечной целью любой практической задачи оптимизации, как правило, является определение глобального на данном множестве экстремума функции. Большинство же методов минимизации функции одной переменной позволяют найти лишь один из локальных минимумов функции. Одним из немногих методов нахождения глобального экстремума функции одной переменной на отрезке является метод ломаных.

Постановка задачи

Найти при помощи метода ломаных точку глобального минимума функции $J(u)$ на отрезке $[a,b]$. Найти минимальное значение функции.

Теоретическая часть

Метод ломаных применим для функций $J(u)$, удовлетворяющих условию Липшица на отрезке $[a,b]$.

Опр. Функция $J(u)$ удовлетворяет условию Липшица (такие функции называют «липшицевыми») на отрезке $[a,b]$, если существует такое число $L > 0$, называемое константой Липшица, что для него выполняется условие

$$\begin{aligned} &|J(u) - J(v)| \le L|u - v| \\ &\forall u, v \in [a,b] \end{aligned}. \qquad (4)$$

Теперь рассмотрим собственно сам метод.

Будем предполагать, что константа Липшица L известна.

Возьмем произвольную точку $u_0 \in [a,b]$; например, можно взять:

$u_0 = a, u_0 = b$ или $u_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

Построим функции $g(u,u_0) = J(u_0) - L|u - u_0|$, $p_0(u) = g(u,u_0)$.

Определим точку u_1 исходя из условия $p_0(u_1) = \min\limits_{u\in[a,b]} p_0(u)$. Нулевая итерация завершена.

На следующей итерации построим функцию $g(u,u_1) = J(u_1) - L|u - u_1|$, затем - функцию $p_1(u) = \max\{g(u,u_1), p_0(u)\}$, и, наконец, определим новую точку u_2 исходя из условия $p_1(u_2) = \min\limits_{u\in[a,b]} p_1(u)$.

Рассмотрим n-ю итерацию. К её началу известна последовательность точек $u_0, u_1, \ldots, u_n$. В этом случае построим функцию $p_n(u) = \max\{g(u,u_n), p_{n-1}(u)\} = \max\limits_{0\le i\le n} g(u,u_i)$ и определим следующую точку u_{n+1} исходя из условия $p_n(u_{n+1}) = \min\limits_{u\in[a,b]} p_n(u)$.

Примечание. Легко доказывается, что функции $p_n(u)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, представляют собой ломаные линии, удовлетворяющие неравенствам:

$p_n(u) \le J(u)$, $p_n(u) \le p_{n+1}(u)$.

Это означает, что ломаная линия $p_n(u)$ по мере увеличения числа n приближается к функции $J(u)$ снизу.

Итерации выполняются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность ε, см. «Сходимость и оценка погрешности метода».

Сходимость и оценка погрешности метода

Метод ломаных сходится, что утверждается в следующей теореме.

Теорема. Пусть $J(u)$ - произвольная функция, удовлетворяющая на $[a, b]$ условию (4). Тогда последовательность $\{u_n\}$, полученная с помощью метода ломаных, такова, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(u_{n+1}) = J^* = \inf\limits_{u\in[a,b]} J(u)$, причем справедлива оценка

$$0 \le J(u_{n+1}) - J^* \le J(u_{n+1}) - p_n(u_{n+1}),\ n = 0, 1, \ldots; \tag{5}$$

2) $\{u_n\}$ сходится к множеству U^* точек минимума $J(u)$ на $[a, b]$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n, U^*) = 0$.

Оценка константы Липшица

Для применения метода ломаных необходимо знать константу Липшица функции $J(u)$. Для её оценки можно воспользоваться следующим алгоритмом.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на m подотрезков:

$a = v_0 < v_1 < \ldots < v_m \le b$.

Обозначим

$$L_m = \max_{i=\overline{1,m}} \frac{|J(u_i) - J(u_{i-1})|}{u_i - u_{i-1}}.$$

Несложно доказать, что для последовательности L_m справедливы следующие утверждения:

$$L_m \le L_{m+1} \le L,\ m = 1, 2, \ldots.;\ \lim_{m\to\infty} L_m = L.$$

Следовательно, при достаточно большом m в качестве приближенного значения константы Липшица можно взять величину L_m.

Примечание. Заниженная оценка константы Липшица может привести к неправильному нахождению минимального значения и точки минимума функции.

Задание к лабораторной работе

Разработать программу, реализующую метод ломаных для заданной функции $J(u)$ на отрезке $[a,b]$.

В программе предусмотреть выполнение итераций до тех пор, пока разность $J(u_{n+1}) - J^*$ не станет меньше 10^{-4} [см. оценку (5)].

В результатах должно быть представлено: значение точки глобального минимума u^*, минимальное значение функции $J(u^*)$, а также количество итераций.

Варианты заданий

№ вар.	$J(u)$	$a;b$	α	β	γ
1	$\mathrm{tg}\,\alpha u - \beta u$	-0.9; 0.5	1.5773	2.3041	-
2		-0.5; 0.7	2.2982	3.2258	-
3		-0.4; 0.2	3.7855	5.5300	-
4		-0.15; 0.09	9.1484	13.3641	-
5		-0.1; 0.2	5.9937	8.7558	-
6		-0.15; 0.1	7.8864	11.5207	-
7	$\ln(\alpha u) - \beta u + \gamma$	0.4; 3.0	7.6220	8.5900	0.5
8		1.0; 3.0	6.0976	6.8720	1.0
9		2.0; 7.0	4.5732	5.1540	1.5
10		3.5; 7.5	3.9634	4.4868	2.0
11		4.0; 8.0	3.0488	3.4360	2.5
12		6.0; 9.9	1.5244	1.7180	3.0
13	$\alpha \sin \beta u - \gamma u$	-0.3; 4.0	9.3300	6.9770	7.25
14		-1.8; 6.2	7.6670	5.9830	6.00
15		-2.1; 6.9	6.6700	5.3870	5.25
16		-3.0; 7.5	5.6700	4.7940	4.50
17		-3.5; 8.1	4.3300	4.0080	3.50
18		-5.0; 9.7	2.6700	3.0440	2.25
19	$\alpha e^{-\beta u} - u$	-2.1; 2.7	0.9737	0.5067	-
20		-2.2; 2.3	0.9286	0.5185	-
21		-2.8; 2.2	0.5458	0.5391	-
22		-2.4; 2.4	0.7593	0.5683	-
23		-1.9; 2.1	0.5909	0.6286	-
24		-2.6; 2.0	0.4474	0.6909	-
25		-2.2; 2.4	0.1667	0.8571	-
26		-1.8; 2.3	0.7308	0.5778	-
27		-2.5; 1.9	0.8330	0.5455	-

№ вар.	$J(u)$	$a;b$	α	β	γ
28	$\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta$	-17; 14	0.1697	-0.5693	-1.600
29		-11; 11	1.0390	-3.1450	-1.940
30		-3; 8	4.6839	-14.0400	-2.448

Примечание. Вар. 28 - $\delta=3.73$; 29 - $\delta=8.00$; 30 - $\delta=23.50$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение липшицевой функции.
2. Дайте геометрическую интерпретацию условия Липшица.
3. Будет ли ломаная линия, получаемая при помощи метода ломаных, пересекать график функции $J(u)$ и почему?
4. Из чего следует соотношение (6)? Обосновать ответ.
5. К чему может привести заниженная оценка константы Липшица и почему?

Лабораторная работа № 3. Метод касательных

Метод касательных, как и метод ломаных, позволяет найти глобальный минимум функции на отрезке. Метод касательных применим для выпуклых на отрезке функций.

Постановка задачи

Найти точку минимума выпуклой функции $J(u)$ на отрезке $[a,b]$. Вычислить минимальное значение функции.

Теоретическая часть

Алгоритм

Опр. Функция $J(u)$ называется выпуклой на отрезке $[a,b]$, если для любых $u,v\in[a,b], u<v$, и для любого $\alpha\in[0,1]$справедливо

$$J(\alpha u+(1-\alpha)v)\le\alpha J(u)+(1-\alpha)J(v). \qquad (7)$$

Соотношение (7) имеет следующий геометрический смысл. Хорда, соединяющая точки $(u, J(u)), (v, J(v))$, должна быть не ниже значения функции на отрезке $[u, v]$ (рис. 2).

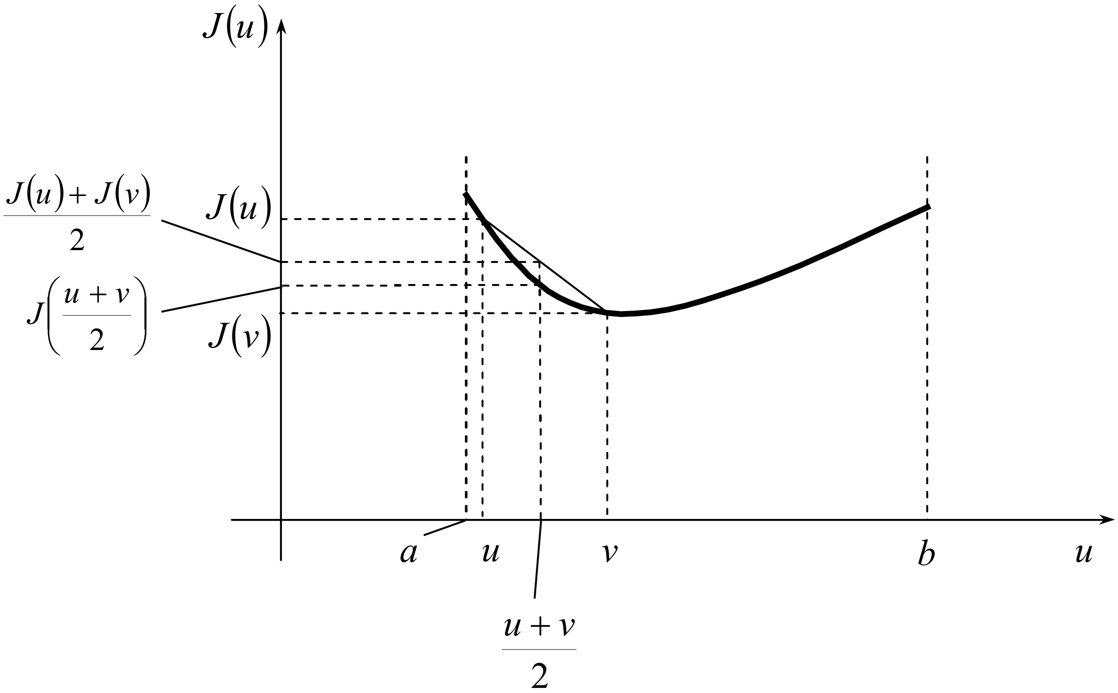

Рис. 2. Геометрический смысл выпуклой функции для $\alpha = \frac{1}{2}$.

Теперь опишем сам метод касательных.

Выберем произвольную точку $u_0 \in [a, b]$; например, можно взять:

$u_0 = a, u_0 = b$ или $u_0 = \frac{a+b}{2}$.

В данной точке построим касательную к графику функции

$$p(u, u_0) = J(u_0) + J^{/}(u_0)(u - u_0) = g_0(u).$$

После ее построения найдем точку u_1, удовлетворяющую соотношению.

$$g_0(u_1) = \min_{u \in [a, b]} g_0(u)$$

Нулевая итерация завершена.

На следующей итерации построим новую касательную, соответствующую точке u_1, $p(u, u_1) = J(u_1) + J^{/}(u_1)(u - u_1)$; найдем функцию $g_1(u) = \max\{g_0(u), p(u, u_1)\}$ и затем - следующую точку u_2, удовлетворяющую соотношению $g_1(u_2) = \min\limits_{u \in [a, b]} g_1(u)$.

Рассмотрим k-ю итерацию. К её началу известна точка u_k и функция $g_{k-1}(u)$. Строим касательную $p(u, u_k) = J(u_k) + J^{/}(u_k)(u - u_k)$, затем - функцию $g_k(u) = \max\{g_{k-1}(u), p(u, u_k)\} = \max\limits_{i=\overline{0,k}}\{p(u, u_i)\}$ и находим следующую точку u_{k+1}, удовлетворяющую соотношению $g_k(u_{k+1}) = \\ = \min\limits_{u \in [a, b]} g_k(u)$.

В итоге мы получаем ломаную линию $g_k(u)$, которая по мере увеличения числа k приближается к функции $J(u)$ снизу (рис. 3).

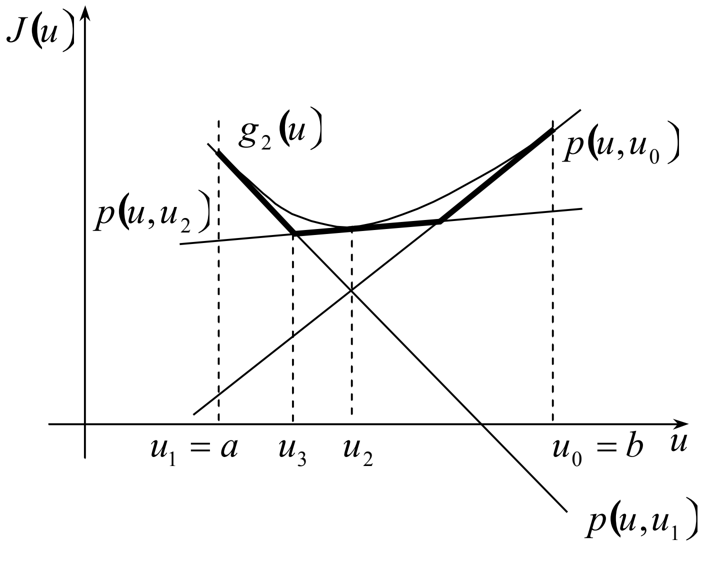

Рис. 3. Ломанная линия приближается снизу по мере увеличения k

Итерации выполняются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность ε, см. «Сходимость и оценка погрешности метода».

Сходимость и оценка погрешности метода

Метод касательных сходится, что утверждается в следующей теореме.

Теорема. Пусть $J(u)$ на $[a,b]$ выпукла и дифференцируема, а последовательность $\{u_n\}$ получена описанным выше методом касательных, причем $u_n \notin U^*$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n(u_{n+1}) = J^*$, и справедлива оценка

$0 \le J(u_{n+1}) - J^* \le J(u_{n+1}) - p_n(u_{n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n, U^*) = 0$.

Задание к лабораторной работе

Разработать программу, реализующую алгоритм метода касательных для функции $J(u)$ на отрезке $[a, b]$. В качестве начальной точки u_0 взять b. Итерации выполнять до тех пор, пока разность $J(u_{n+1}) - p_n(u_{n+1})$ будет больше 10^{-3}.

В результатах представить: значение точки минимума u^* для $J(u)$ (см. «Варианты заданий»), минимальное значение функции $J(u^*)$, количество итераций $n+1$.

Варианты заданий

См. «Варианты заданий» к лабораторной работе № 2.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение выпуклой функции.
2. Дайте геометрическую интерпретацию выпуклой функции.
3. Всякая ли липшицева функция является выпуклой, и наоборот, всякая ли выпуклая функция является липшицевой и почему?
4. Каким образом определяется точка u_{k+1} после построения ломаной $g_k(u)$?

Лабораторная работа № 4. Градиентные методы

Постановка задачи

Найти при помощи градиентных методов точку минимума дифференцируемой функции многих переменных $J(u), u \in U$.

Теоретическая часть

В данной лабораторной работе рассматриваются два метода:

1) метод наискорейшего спуска;
2) метод условного градиента.

Метод наискорейшего спуска

Алгоритм

Метод наискорейшего спуска является одной из разновидностей семейства градиентных методов. В общем виде градиентный метод заключается в построении минимизирующей последовательности $\{u_k\}$ по правилу:

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k J'(u_k),\ \alpha_k > 0,\ k = 0,1,2,..., \tag{8}$$

где $J'(u_k)$ - градиент функции $J(u)$ в точке u_k.

Число α_k из (8) называется шагом. Именно способом выбора α_k один градиентный метод отличается от другого.

В случае градиентного метода наискорейшего спуска шаг α_k определяется из следующего соотношения:

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha \geq 0} f_k(\alpha) = f_{k*},\ \alpha_k > 0,$$

где $f_k(\alpha) = J(u_k - \alpha J'(u_k)), \alpha \geq 0$.

Это означает, что для нахождения значения α_k на каждом шаге метода наискорейшего спуска приходится решать вспомогательную задачу минимизации функции одной переменной. Такая задача не всегда решается просто. Тем не менее, для некоторых классов функций $J(u)$ значение α_k удается найти аналитически. В настоящей лабораторной работе рассматривается один из этих классов, а именно:

$$J(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (b, u). \tag{9}$$

Здесь A – положительно определенная симметричная матрица порядка n; b - вектор из E^n.

Градиент функции (8) имеет вид $J^/(u) = Au - b$. В силу (8) имеем итерационную формулу градиентного метода

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k(Au_k - b), k = 0,1,..., \tag{10}$$

где $\alpha_k = \dfrac{|Au_k - b|^2}{(A(Au_k - b), Au_k - b)} > 0$. (11)

В качестве u_0 можно выбирать любую точку пространства E^n. В качестве критериев окончания счета можно использовать следующие неравенства:

$$|u_{k+1} - u_k| < \varepsilon; \ |J(u_{k+1}) - J(u_k)| < \varepsilon; \ |J^/(u)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Сходимость и оценка погрешности метода

Сходимость метода будем рассматривать при следующих ограничениях на α_k:

$$f_{k*} \le f_k(\alpha_k) \le f_{k*} + \delta_k, \tag{13}$$

где $f_k(\alpha) = J(u_k - \alpha J^/(u_k))$; $f_{k*} = \inf\limits_{\alpha \ge 0} f_k(\alpha)$; $\delta_k \ge 0, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k = \delta < \infty$.

В этом случае справедлива теорема.

Теорема. Пусть $J^* = \inf J(u) > -\infty, J(u) \in C^{1,1}(E^n)$ и $J(u)$ выпукла на E^n. Тогда для последовательности $\{u_k\}$, определяемой условиями (10), (13), имеют место соотношения:

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J^*, \lim_{k\to\infty} \rho(u_k, U^*) = 0 .$$

Если, кроме того, в (13) $\{\delta_k\} = O\left(k^{-2}\right)$ ($0 \le \delta_k \le c_k k^{-2}, c_k = \mathrm{const} \ge 0$), то справедлива оценка

$$0 \le J(u_k) - J_* \le c_0 k^{-1}, c_0 = \mathrm{const} \ge 0 .$$

Следует заметить, что α_k, найденное по формуле (11), удовлетворяет (13) при $\delta_k = 0$.

Метод условного градиента

Алгоритм

Метод наискорейшего спуска не пригоден для нахождения минимального значения функции, если на задачу накладываются ограничения вида $u \in U \ne E^n$. Одной из модификаций градиентных методов, позволяющей решать подобные задачи, является метод условного градиента.

Он может быть использован для задач следующего вида:

$$J(u) \to \inf;\ u \in U , \tag{14}$$

где U - выпуклое замкнутое ограниченное множество из E^n; функция $J(u) \in C^1(U)$.

Опишем метод.

Пусть известно k-е приближение $u_k \in U, k \ge 0$. Приращение функции $J(u)$ в точке u_k можно представить в виде

$$J(u) - J(u_k) = \left(J^/(u_k), u - u_k\right) + o(|u - u_k|).$$

Возьмем главную линейную часть этого приращения

$$J_k(u) = \left(J^/(u_k), u - u_k\right)$$

и определим вспомогательное приближение u_k из условий

$$\overline{u}_k \in U, J_k(\overline{u}_k) = \inf_U \left(J^/(u_k), \overline{u}_k - u_k\right). \tag{15}$$

Так как множество U замкнуто и ограничено, а линейная функция $J_k(u)$ непрерывна, то точка $\overline{u}_k$ из (15) всегда существует. Если функция достигает своей нижней грани на U более чем в одной точке, то в качестве $\overline{u}_k$ возьмем любую из них.

Рассмотрим в качестве примера нахождение точки u_k в случае, когда множество U представляет собой n-мерный параллелепипед:

$$U = \left\{u = \left(u^1,...,u^n\right): \alpha_i \le u^i \le \beta_i, i = \overline{1,n}\right\}.$$

В этом случае функция $J_k(u) = \sum_{i=1}^{n} J_{u^i}(u_k)\left(u^i - u_k^i\right)$, или $J_k(u) = \sum_{i=1}^{n} J_{u^i}(u_k)u^i$, очевидно достигает своей нижней грани на U в точке $\overline{u}_k = \left(\overline{u}_k^1,...,\overline{u}_k^n\right)$, где

$$\overline{u}_k^i = \begin{cases} \alpha_i, \textit{если } J_{u^i}(u_k) > 0 \\ \beta_i, \textit{если } J_{u^i}(u_k) < 0 \end{cases}.$$

В случае $J_{u^i}(u_k) = 0$ здесь возникает неопределенность, и в качестве $\overline{u}_k^i$ можно взять любое число на отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$ (иногда берут $\overline{u}_k^i = (\alpha_i + \beta_i)/2$).

В общем случае не всегда удается получить в явном виде вспомогательное приближение $\overline{u}_k$. В таких ситуациях вместо (15) используют следующие условия:

$$\overline{u}_k \in U,\ J_k\left(\overline{u}_k\right) \le \min_U J_k(u) + \varepsilon_k,\ \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0. \tag{16}$$

Допустим, что точка $\overline{u}_k$, удовлетворяющая условиям (16) или (15), уже найдена. Тогда приближение $k+1$ будем искать в виде

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k\left(\overline{u}_k - u_k\right),\ 0 \le \alpha_k \le 1. \tag{17}$$

В силу выпуклости множества U всегда $u_{k+1} \in U$.

Если $\bar{u}_k = u_k$ (это может случиться, например, когда $J^{/}(u_k) = 0$) имеем $u_{k+1} = u_k$ независимо от способа выбора α в (13). При определении $\bar{u}_k$ точно из условия (17) имеем

$$J_k(\bar{u}_k) = J_k(u_k) = 0 = \min_U J_k(u) \text{ или } \left(J^{/}(u_k), u - u_k\right) \geq 0$$

при всех $u \in U$. Как известно, это означает, что точка u_k удовлетворяет необходимому условию минимума в задаче (14). Более того, если $J(u)$ выпукла, то данное условие является и достаточным, т.е. в этом случае задача (14) решена.

Теперь рассмотрим один из способов выбора шага α_k.

Данная величина может быть определена из следующих условий:

$$\alpha_k \in [0,1],\ f_k(\alpha_k) = \min_{\alpha \in [0,1]} f_k(\alpha) = f_{k*},\ f_k(\alpha) = J\left(u_k + \alpha\left(\bar{u}_k - u_k\right)\right).$$

В частности, для функции

$$J(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (b, u),$$

где A - симметричная положительно определенная матрица порядка n, $b \in E^n$, α_k, вычисляется следующим образом. Вначале определяется промежуточная величина

$$\alpha_k^* = -\frac{\left(J^{/}(u_k), \bar{u}_k - u_k\right)}{\left(A\left(\bar{u}_k - u_k\right), \bar{u}_k - u_k\right)}.$$

Затем находится искомое значение α_k:

$$\alpha_k = \min\left\{\max\left\{0, \alpha_k^*\right\}, 1\right\}.$$

В качестве u_0 можно выбирать любую точку $u_0 \in U$. В качестве критериев окончания счета можно использовать неравенства (12).

Метод условного градиента описан.

Сходимость метода и оценка погрешности

Метод условного градиента сходится с оценкой

$$0 \le J(u_k) - J_* \le c_0 k^{-\rho},\ k = 1, 2, \ldots, c_0 = \text{const} \ge 0,\ \rho \in [1/2, 1].$$

Задание к лабораторной работе

Разработать программу нахождения минимума функции вида (2), зависящей от двух переменных, при помощи метода наискорейшего спуска и метода условного градиента. Для метода условного градиента в качестве множества U взять прямоугольник

$$U = \left\{ u = (u^1, u^2): \alpha_i \le u^i \le \beta_i, i = 1,2 \right\}.$$

Программа должна предлагать пользователю меню, состоящее из трех элементов, первые два из которых позволяют выбрать один из рассмотренных методов, третий – «Выход». При этом требуется предусмотреть ввод матрицы A и вектора b и проверку условия положительной определенности и симметричности матрицы A.

Начальная точка u_0 выбирается произвольно.

Результаты должны содержать: координаты точки минимума для функции $J(u)$, минимальное значение функции и количество итераций.

Варианты заданий

№ вар.	*A, b,* $\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2$	**№ вар.**	*A, b,* $\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2$
1	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, 0; 2; 3; 7	**16**	$\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, 2; 4; 3; 4
2	$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, 0; 2; 3	**17**	$\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$, -1; 1; 0; 2
3	$\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, 1; 3; -4; -1	**18**	$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$, 0; 2; -4; -1
4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}$, 0; 5; 0; 3	**19**	$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, 1; 3; -3; 1
5	$\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, 3; 7; 1; 4	**20**	$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, 0; 2; 0; 2

№ вар.	*A, b,* $\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2$	№ вар.	*A, b,* $\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2$
6	$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ -1; 1; 0; 2	**21**	$\begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$, -1; 0; -4; -2
7	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$, 0; 1; 0; 2	**22**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 1; 2; 0; 2
8	$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, 1; 3; 1; 3	**23**	$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 11 \end{pmatrix}$, 6; 9; 4; 8
9	$\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, -3; 1; 0; 7	**24**	$\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \end{pmatrix}$, -1; 1; 2; 3
10	$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, 0; 1; 0; 1	**25**	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$, 1; 5; 0;1
11	$\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$, -2, 11; 20; 30	**26**	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, 1; 3; 2; 3
12	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, 1; 3; 0; 2	**27**	$\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 1; 3; -3; 1
13	$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, 0; 1; 0; 1	**28**	$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$, -2; 0; 2; 4
14	$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$, 2; 6; 1; 5	**29**	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$, -3; -1; 2; 3
15	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 15 \end{pmatrix}$, -20; 0; -10; 20	**30**	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$, -5; -2; 0; 2

Контрольные вопросы

1. Дайте определение градиента функции.
2. В какую сторону направлен вектор градиента?
3. Чем отличается метод условного градиента от метода наискорейшего спуска? Для какого класса задач используется метод условного градиента?
4. Дайте определения выпуклого множества.
5. Докажите, что отрезок является выпуклым множеством.
6. Что такое вспомогательное приближение, и для чего оно используется?

7. Почему приближение $k+1$, получаемое по формуле (17), не выходит за пределы выпуклого множества U?

Лабораторная работа № 5. Метод покоординатного спуска

Постановка задачи

Требуется решить задачу оптимизации:

$$J(u) \to \inf, u \in U,$$

где $J(u) \in C^1(U)$, $U = \left\{ u = \left(u^1, ..., u^n\right) : a_i \le u^i \le b_i, i = \overline{1,n} \right\}$, $a_i < b_i$ - заданные числа.

Теоретическая часть

Алгоритм

Будем использовать набор векторов $e_i = (0,...,1,...,0)$, с i-й координатой, равной 1, $i = \overline{1,n}$.

Пусть u_0 - начальное приближение, $\alpha_0 > 0$ - параметр метода. Допустим, что уже известны $u_k \in U, \alpha_k > 0 \, (k > 0)$.

Пусть $p_k = e_{i_k}$, где $i_k = k - n\left[\frac{k}{n}\right] + 1$, $k = 0, 1, 2, ...$. (12)

Здесь $\left[\frac{k}{n}\right]$ - целая часть от $\frac{k}{n}$.

Соотношения (18) обеспечивают циклический перебор координатных векторов $e_1, ..., e_n$.

Пусть $u = u_k + \alpha_k p_k$, тогда если

$$J(u_k + \alpha_k p_k) < J(u_k) \ \wedge \ u \in U, \qquad (19)$$

то $u_{k+1} = u_k + \alpha_k p_k, \alpha_{k+1} = \alpha_k$.

Иначе $u = u_k - \alpha_k p_k$. Если

$$J(u_k - \alpha_k p_k) < J(u_k) \ \wedge \ u \in U \qquad (20)$$

то $u_{k+1} = u_k - \alpha_k p_k, \alpha_{k+1} = \alpha_k$

Назовем $k+1$ итерацию удачной, если выполнилось хотя бы одно из условий (19) или (20). Если итерация неудачна, то определим

$$u_{k+1} = u_k, \; \alpha_k = \begin{cases} \lambda\alpha_k, i_k = n, u_k = u_{k-n+1} \\ \alpha_k, i_k \neq n \vee u_k \neq u_{k-n+1} \vee 0 \leq k \leq n-1 \end{cases}. \tag{21}$$

Здесь λ, $0 < \lambda < 1$, - параметр метода.

Соотношения (21) означают, что если при переборе всех направлений (координатных осей $e_1,...,e_n$) с шагом α_k реализовалась хотя бы одна удачная итерация, то α_k не дробится и сохраняется, по крайней мере, в течение следующего цикла из n итераций.

Сходимость метода и оценка погрешности

Теорема. Пусть функция $J(u)$ выпукла на E^n и принадлежит классу $C^1(E^n)$, а начальное приближение u_0 таково, что множество $M(u_0) = \{ u \in E^n, J(u) \leq J(u_0) \}$ ограничено. Тогда последовательность $\{ u_k \}$, получаемая описанным методом, минимизирует $J(u)$ на E^n и сходится к множеству U^*, причем справедлива следующая оценка погрешности:

$$\rho(u_{k+1}, U^*) \leq \sqrt{n\alpha_k^2}\,.$$

Задание к лабораторной работе

Разработать программу, реализующую метод покоординатного спуска для функции $J(u) = au_1 + bu_2 + e^{cu_1^2 + du_2^2}$ (значения a, b, c, d определяются вариантами заданий) и $U = \{ (u_1, u_2) \in E^2 : 0 \leq u_1 \leq 4; -1 \leq u_2 \leq 6 \}$, $\lambda = 1/2$, $\alpha_0 = 1$. Результаты должны содержать: координаты точки минимума u^*; значение функции в данной точке $J(u^*)$; количество итераций, после которых достигается точность $\varepsilon = 10^{-3}$.

Варианты заданий

№ вар.	*a*	*b*	*c*	*d*	№ вар.	*a*	*b*	*c*	*d*
1	1	-1.4	0.01	0.11	**16**	16	0.0	1.99	0.26
2	2	-1.3	0.04	0.12	**17**	17	0.1	2.56	0.27
3	3	-1.2	0.02	0.13	**18**	18	0.2	2.89	0.28
4	4	-1.1	0.16	0.14	**19**	19	0.3	3.24	0.29
5	5	-1.0	0.25	0.15	**20**	20	0.4	3.81	0.30
6	6	-0.9	0.36	0.16	**21**	21	0.5	4.00	0.31
7	7	-0.8	0.49	0.17	**22**	22	0.6	5.02	0.32
8	8	-0.7	0.64	0.18	**23**	23	0.7	4.84	0.33
9	9	-0.6	0.81	0.19	**24**	24	0.8	5.29	0.34
10	10	-0.5	0.94	0.20	**25**	25	0.9	5.76	0.35
11	11	-0.4	1.00	0.21	**26**	26	1.0	6.25	0.36
12	12	-0.3	1.21	0.22	**27**	27	1.1	6.76	0.37
13	13	-0.2	1.44	0.23	**28**	28	1.2	6.98	0.38
14	14	-0.1	1.69	0.24	**29**	29	1.3	7.29	0.39
15	15	0.0	1.96	0.25	**30**	30	1.4	8.41	0.40

Лабораторная работа № 6. Метод штрафных функций

Постановка задачи

Требуется решить задачу оптимизации

$$J(u) \to \inf,\ u \in U\ , U \neq E^n. \qquad (22)$$

Теоретическая часть

Алгоритм

В методе штрафных функций задача (22) сводится к последовательности задач минимизации

$$\Phi_k(u) \to \inf,\ u \in U_0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

где $U_0 \supset U$; $\Phi_k(u)$ - некоторая вспомогательная функция, причем $\Phi_k(u)$ должна быть такой, что с ростом k она мало отличается от $J(u)$ на U и быстро возрастает на $U_0 \setminus U$. В качестве множества U_0 обычно выбирается множество простой структуры типа параллелепипеда или шара.

Опр. Последовательность функций $\{P_k,\, k=1,2,...\}$, определенных и неотрицательных на множестве U_0, содержащем U, называют штрафами или штрафными функциями множества U на множестве U_0, если

$$\lim_{k\to\infty} P_k(u) = \begin{cases} 0,\, u \in U \\ +\infty,\, u \in U_0 \setminus U \end{cases}.$$

Так, если множество U имеет вид

$$U = \left\{ u \in E^n : u \in U_0,\, g_i(u) \le 0,\, i = \overline{1,m};\, g_i(u) = 0,\, i = \overline{m+1,s} \right\}, \tag{23}$$

то в качестве штрафных могут выбираться следующие функции:

$$P_k(u) = A_k \sum_{i=1}^{s} \left(g_i^+(u)\right)^p,\; p \ge 1$$

или

$$P_k(u) = A_k^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} e^{A_k g_i(u)} + \sum_{i=m+1}^{s} e^{A_k g_i^2(u)} \right),\, u \in U_0,$$

где $g_i^+ = \begin{cases} \max\{ g_i(u);\, 0\},\, i = \overline{1,m} \\ |g_i(u)|,\, i = \overline{m+1,s} \end{cases}$; $A_k > 0,\, k = 1,2,...,\; \lim\limits_{k\to\infty} A_k = +\infty$.

Пусть $U_0 \supset U$, $\{P_k(u)\}$ уже выбраны, $J(u)$ определена на U_0. В качестве функции $\Phi_k(u)$ будем брать:

$$\Phi_k(u) = J(u) + P_k(u),\, u \in U_0.$$

Будем считать, что

$$\Phi_{k_*} = \inf_{U_0} \Phi_k(u) > -\infty,\, k = 1,2,3,....$$

Если при каждом $k = 1,2,...$ нижняя граница достигается, то условия

$$\Phi_k(u_k) = \Phi_{k_*},\, u_k \in U_0 \tag{24}$$

определяют последовательность $\{u_k\}$. Если же нижняя грань не достигается, то в качестве элементов последовательности $\{u_k\}$ будем брать точки u_k, удовлетворяющие условиям:

$$u_k \in U_0, \Phi_k(u_k) \le \Phi_{k*} + \varepsilon_k, \qquad (25)$$

где $\varepsilon_k \ge 0$ для всех k и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Сходимость метода

Теорема. Пусть U_0 - замкнутое множество из E^n; функции $J(u); g_1(u), \ldots, g_m(u), |g_{m+1}(u)|, \ldots, |g_s(u)|$ полунепрерывны снизу на U_0; $J^* = \inf_U J(u) > -\infty$. Пусть последовательность $\{u_k\}$, определяемая условиями (24), (25), имеет хотя бы одну предельную точку. Тогда все предельные точки $\{u_k\}$ принадлежат множеству U^* точек минимума задачи (22), (23). Кроме того, если

$$U_\delta = \{u \in U_0, g_i(u) \le \delta, i = \overline{1, m}; |g_i(u)| \le \delta, i = \overline{m+1, s}\}$$

ограничено хотя бы при одном значении $\delta > 0$, то

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_k(u_k) = \lim_{k\to\infty} \Phi_{k*} = \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*, \lim_{k\to\infty} \rho(u_k, U_*) = 0.$$

Задание к лабораторной работе

Разработать программу, реализующую метод штрафных функций для минимизации функции $J(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (b, u)$ (варианты функции определяются вариантами заданий к лабораторной работе № 4) на множестве $U = \{u \in U_0, (c, u) + d = 0\}$, где $U_0 = E^2$. В качестве штрафной функции следует взять $P_k(u) = k^2((c, u) + d)^2$. Количество итераций k должно быть таким, чтобы $\rho(u_k, u_{k-1}) \le \varepsilon = 0.001$. Результаты должны содержать: координаты точки минимума u^*, значение функции в данной точке $J(u^*)$ и количество итераций.

Варианты заданий

№ вар.	*c*	*d*	№ вар.	*c*	*d*	№ вар.	*c*	*d*
1	(1, 1)	-5	**11**	(2, -1)	44	**21**	(3, 1)	2
2	(1, -1)	-3	**12**	(7, 2)	4	**22**	(-3, 2)	-3
3	(3, -2)	4	**13**	(3, 1)	1	**23**	(1, -2)	1
4	(1, -1)	0	**14**	(1, 4)	8	**24**	(-2, 1)	7
5	(3, 4)	-1	**15**	(2, -1)	20	**25**	(1, -1)	6
6	(1, -1)	2	**16**	(-4, 2)	3	**26**	(2, 6)	1
7	(1, 4)	5	**17**	(5, 3)	4	**27**	(5, -1)	2
8	(5, 2)	-1	**18**	(-1, 2)	0	**28**	(1, -1)	1
9	(2, -1)	2	**19**	(2, -3)	2	**29**	(2, -1)	-1
10	(3, 1)	-4	**20**	(-2, 5)	1	**30**	(3, 5)	-2

Библиографический список

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 552 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы.Ч.1. – М.: Наука, 1973. – 631 с.

Оглавление

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания к лабораторным работам

Составители:
ДЕМИДОВ Константин Владимирович
ДУХАНОВ Алексей Валентинович

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор С.М. Аракелян

Редактор И.А. Арефьева
Корректор
Компьютерная верстка А.В. Духанов
Дизайн и обложка А.В. Духанов

ЛР № 020275. Подписано в печать 00.03.03.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,12. Тираж 70 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета

600000, Владимир, ул. Горького, 87.