Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. Л. КОШКИН

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Владимир 2016

УДК 51
ББК 22.1
К76

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. В. Жиков

Кандидат физико-математических наук, доцент
начальник отдела обеспечения качества образовательных программ
Владимирского филиала Российской академии народного хозяйства
и государственной службы при Президенте РФ
И. В. Сидорова

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Кошкин, В. Л.
К76 Рабочая тетрадь по математике / В. Л. Кошкин ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2016. – 80 с. – ISBN 978-5-9984-0735-2.

Представляет собой ряд многовариантных задач по основным разделам математики, содержит рекомендации по решению, примеры с решениями по каждому разделу. Изложены материал и задания по трем контрольным работам.

Предназначена для студентов всех форм обучения по направлению подготовки 44.03.05 – Педагогическое образование по профилю «Технология».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил 9. Табл. 2. Библиогр.: 11 назв.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-9984-0735-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

В курсе математики студенты изучают три раздела: аналитическую геометрию с элементами линейной алгебры, математический анализ и теорию вероятностей с элементами математической статистики, пишут три контрольные работы. Этот курс необходим для успешного изучения общетехнических и специальных дисциплин, а также для развития навыков логического мышления.

Изучать материал рекомендуется по темам или главам учебника. Сначала следует прочитать содержание темы, не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится ясным из чтения последующего материала. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т. п.; в них существенно каждое слово и полезно знать, почему данное положение сформулировано именно так. Не следует заучивать определения, важно понять их смысл и уметь изложить своими словами. Закончив изучение темы, рекомендуется составить краткий конспект, по возможности не заглядывая в учебник.

При освоении курса особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, надо разобраться в решениях задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению.

Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли вы дать ответ на все вопросы программы курса по этой теме.

Контрольная работа № 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Вариант А

Задача 1

Дано уравнение линии в полярной системе координат

$r = 2\sin^2 2\varphi.$

Требуется:

1. Определить точки, лежащие на линии, давая φ значения от 0 до 2π через $\pi/8$.
2. Построить линию, соединив полученные точки от руки.
3. Найти уравнение линии в прямоугольной системе координат.

Решение. Для решения задачи нужно составить таблицу расчетных данных в произвольной форме, позволяющих вычислить полярные координаты точек. При соединении точек линией можно использовать лекало. Чтобы найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат, необходимо использовать формулы перехода от полярной системы координат к прямоугольной декартовой системе при условии, что полюс совпадает с началом координат, а полярный луч – с осью абсцисс. Для определения точек, лежащих на линии, заполним табл. 1 расчетными данными.

Таблица 1

№ п/п	φ^o	$2\varphi^o$	$\sin 2\varphi$	$\sin^2 2\varphi$	r	Координаты точек
1	0	0	0	0	0	(0; 0°)
2	22,5	45	0,71	0,50	1,00	(1; 22,5°)
3	45	90	1,00	1,00	2,00	(2; 45°)
4	67,5	135	0,71	0,50	1,00	(1; 67,5°)
5	90	180	0	0	0	(0; 90°)
6	112,5	225	-0,71	0,50	1,00	(1; 112,5°)
7	135	270	-1,00	1,00	2,00	(2; 135°)
8	157,5	315	-0,71	0,50	1,00	(1; 157,5°)
9	180	360	0	0	0	(0; 180°)
10	202,5	405	0,71	0,50	1,00	(1; 202,5°)
11	225	450	1,00	1,00	2,00	(2; 225°)
12	247,5	495	0,71	0,50	1,00	(1; 247,5°)
13	270	540	0	0	0	(0; 270°)
14	292,5	585	-0,71	0,50	1,00	(1; 292,5°)
15	315	630	-1,00	1,00	2,00	(2; 315°)
16	337,5	675	-0,71	0,50	1,00	(1; 337,5°)
17	360	720	0	0	0	(0; 360°)

Полярные точки $M_1 - M_{17}$ строим в полярной системе координат и соединим их плавной линией от руки (рис.1).

Чтобы найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат, воспользуемся формулами перехода от полярной системы координат к прямоугольной декартовой:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Линия $r = 2\sin^2 2\varphi$. Преобразуем уравнение линии, избавившись от синуса двойного аргумента:

$$r = 2(2\sin\varphi\cos\varphi)^2 = 8\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

Подставив в это уравнение линии значения *r;* cosφ; sinφ, получим уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат

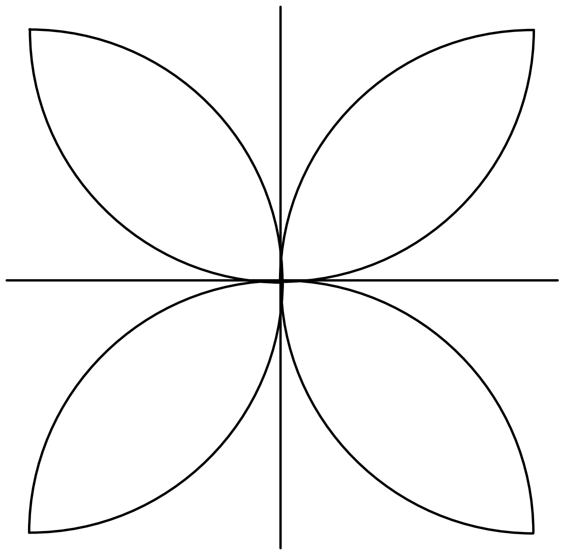


Рис. 1

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 8\frac{y^2 x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^5}}{x^2 y^2} = 8.$$

<u>Задача 2</u>

Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A* (–12; 6), *B* (12; –1), *C* (–6; 23). Найти: 1. Длину стороны *BC*. 2. Уравнение высоты, проведенной из вершины *B*. 3. Длину высоты, проведенной из вершины *A*. 4. Площадь треугольника.

Решение. Для решения задачи 2 нужно использовать формулы вычисления расстояния между двумя точками и расстояния от точки до прямой. Составить уравнение прямой по угловому коэффициенту и точке, найти угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной.

1. Изобразим произвольный треугольник *ABC* (рис. 2), проведем высоты *ВД* и *AE*. Длину стороны *BC* вычислим как расстояние между точками *B* и *C*.

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(-6-12)^2 + (23+1)^2} =$$
$$= 30(\text{ед}).$$

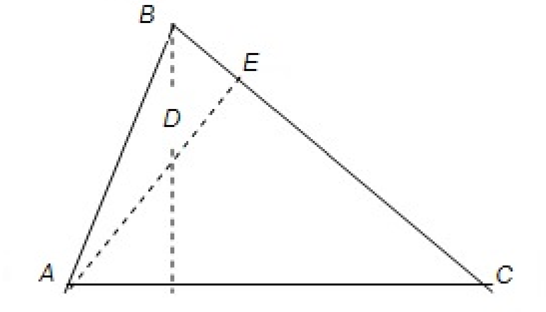


Рис. 2

2. Уравнение BD по угловому коэффициенту и точке запишем в следующем виде: $y - y_{в} = k_{BD}(x - x_{в})$, где k_{BD} – угловой коэффициент BD, так как $BD \perp AC$, то

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{23-6}{-6+12} = \frac{17}{6};$$

$k_{BD} = -1/\ k_{AC}$.

Тогда $k_{BD} = -6/17$ и уравнение BD примет вид

$$y + 1 = -\frac{6}{17}(x - 12).$$

3. Чтобы найти длину высоты, проведенной из вершины A, т. е. расстояние от т. A до прямой, проходящей через BC, необходимо в нормальное уравнение прямой BC подставить координаты точки A. Уравнение BC выведем по двум точкам

$$\frac{y-y_B}{x-x_B} = \frac{y_C-y_B}{x_C-x_B} \Rightarrow \frac{y+1}{x-12} = \frac{23+1}{-6-12} \Rightarrow 4x+3y-45=0.$$

Вычислим расстояние от точки A до прямой BC

$$AE = \left|\frac{4x_A + 3y_A - 45}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = \left|\frac{4(-12)+3\cdot 6 - 45}{\sqrt{4^2+3^2}}\right| = 15(\text{ед}).$$

4. Площадь треугольника ABC равна половине произведения основания BC на высоту AE

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} 30 \cdot 15 = 225\ (\text{ед}^2).$$

Ответ: 30 ед, 225 ед^2.

$6x + 17y - 55 = 0{,}15\ (\text{ед}).$

Задача 3

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: A (3; 1; –2), B (1; –2; 1), C (–2; 1; 0), D (2; 2; 5). Требуется средствами векторной алгебры найти:

1. Угол между ребрами AB и AD.
2. Площадь грани ABC.

3. Объем пирамиды.

Решение. При решении задачи 3 для вычисления угла между ребрами, площади грани и объема пирамиды необходимо использовать определения и свойства скалярного, векторного и смешанного произведения векторов соответственно.

Изобразим произвольную пирамиду *ABCD* (рис. 3). Построим три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, выходящие из одной точки:

$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\} = \{-2; -3; 3\}$;

$\overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A;\ y_C - y_A;\ z_C - z_A\} = \{-5; 0; 2\}$;

$\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A;\ y_D - y_A;\ z_D - z_A\} = \{-1; 1; 7\}$;

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 - \left(y_B - y_A\right)^2 - \left(z_B - z_A\right)^2} = \sqrt{22};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2 - \left(z_C - z_A\right)^2} = \sqrt{29};$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\left(x_D - x_A\right)^2 + \left(y_D - y_A\right)^2 + \left(z_D - z_A\right)^2} = \sqrt{51}.$$

1. Для вычисления угла между ребрами *AB* и *AD* воспользуемся определением скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right| \times \left|\overrightarrow{AD}\right| \cos\varphi\ ;$$

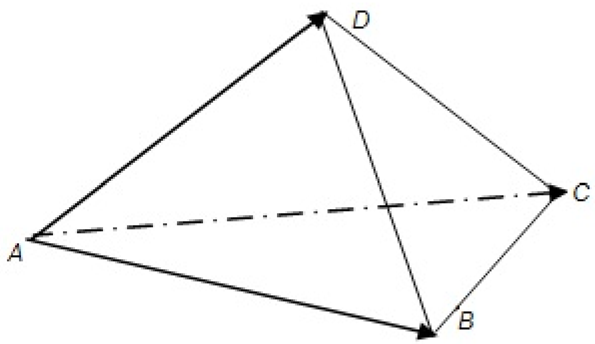


Рис. 3

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \times \left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{(-2)(-1) + (-3)1 + 3\cdot 7}{\sqrt{22}\sqrt{51}} = \frac{20}{\sqrt{22}\sqrt{51}} \approx 0,60;$$

$$\varphi = \arccos 0,60 \approx 53^\circ.$$

2. Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(-6-0) - \vec{j}\,(-4+15) + \vec{k}\,(0-15) = -6\vec{i} - 11\vec{j} - 15\vec{k} = \{-6; -11; -15\}.$$

Площадь треугольника ABC равна половине модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-11)^2+(-15)^2}=\frac{\sqrt{382}}{2}\left(\text{ед}^2\right).$$

Вычислим смешанное произведение трех векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$

$$\left\{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right\}=\begin{vmatrix}-2 & -3 & 3\\ -5 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 7\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 7\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -1 & 7\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-5 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-2(0-2)+3(-35+2)+3(-5+0)=-110.$$

Объем пирамиды $ABCD$ равен 1/6 модуля смешанного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|-110\right|=\frac{55}{3}\left(\text{ед}^3\right).$$

Ответ: $\approx 53^\circ$; $\dfrac{\sqrt{382}}{2}\text{ед}^2$; $\dfrac{55}{3}\text{ед}^3$.

Задача 4

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x+3y-z=8,\\ 2x-y+2z=-2,\\ x+2y-z=6.\end{cases}$$

Решение. Если определитель системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными отличен от нуля, то эта система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\ y\frac{\Delta_y}{\Delta};\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

где Δ – определитель системы, столбцами которого являются коэффициенты при неизвестных, Δ_x, Δ_y, Δ_z – определители, получаемые из определителя системы Δ путем замены в них столбцов, состоящих из коэффициентов при x, y, z, соответственно свободными членами.

Вычислим определители системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1(1-4)-3(-2-2)-1(4+1)=4;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}8&3&-1\\-2&-1&2\\6&2&-1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}-1&2\\2&-1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-2&2\\6&-1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2&-1\\6&2\end{vmatrix}=8(1-4)-3(2-12)-1(-4+6)=4;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&8&-1\\2&-2&2\\1&6&-1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-2&2\\6&-1\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}2&2\\1&-1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2&-2\\1&6\end{vmatrix}=1(2-12)-8(-2-2)-1(12+2)=8;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&3&8\\2&-1&-2\\1&2&6\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1&-2\\2&6\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&-2\\1&6\end{vmatrix}+8\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=1(-6+4)-3(12-2)+8(4+1)=-4;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{4}{4}=1;\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{8}{4}=2;\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-4}{4}=-1.$$

Проверка

$$\begin{cases}1+3\cdot 2+1=8,\\ 2\cdot 1-2+(-1)=-2\ ,\\ 1+2\cdot 2+1=6.\end{cases}$$

Ответ: $x=1;\ y=2;\ z=-1.$

Вариант № 1

Задача 1

$r=1+\cos 2\varphi.$

Дано уравнение линии в полярной системе координат.

Определить точки, лежащие на линии, давая φ значения от 0 до 2π через $\pi/8$. Построить линию, соединив полученные точки от руки. Найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача 2

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (6; 2), B(30; –5), C (12; 19). Найти:

1. Длину стороны BC.
2. Уравнение высоты, проведенной из вершины B.
3. Длину высоты, проведенной из вершины A.
4. Площадь треугольника.

Задача 3

Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A* (5; 2; 3), *B* (4; 1; 2), *C* (3; –2; 1), *D* (1; 4; 0). Требуется средствами векторной алгебры найти:

1. Угол между ребрами *AB* и *AD*.
2. Площадь грани *ABC*.
3. Объем пирамиды.

Задача 4

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ 2x+3y+z=1, \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$$

Задача 5

Даны две смежные вершины квадрата *A* (3; –7) и *B* (–1; 4). Вычислить его площадь.

Задача 6

Даны две противоположные вершины квадрата *P* (3; 5) и *Q* (1; – 3). Вычислить его площадь.

Задача 7

Даны три вершины *A* (3; –7), *B* (5; –7), *C* (–2; 5) параллелограмма *ABCD*, четвертая вершина которого *D* противоположна *B*. Определить длину диагоналей этого параллелограмма.

Задача 8

Доказать, что точки *A* (3; –5), *B* (–2; –7) и *C* (18; 1) лежат на одной прямой.

Задача 9

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (1; 1), A_2 (2; 3) и A_3 (5; –1) прямоугольный.

Задача 10

Доказать, что точки *A* (2; 2), *B* (–1; 6), *C* (–5; 3) и *D* (–2; –1) являются вершинами квадрата.

Задача 11

Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами M_1 (1; 1), M_2 (0; 2) и M_3 (2; –1) тупой угол.

Задача 12

Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами *M* (–1; 3), *N* (1; 2) и *P* (0; 4) острые.

Задача 13

Через точку A (4; 2) проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить её центр C и радиус R.

Задача 14

Даны вершины треугольника A (1; 4), B (3; –9), C (–5; 2). Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

Задача 15

Даны три вершины параллелограмма A (3; –5), B (5; –3), C (–1; 3). Определить четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 16

Определить, какие из точек A_1 (–2; 3), A_2 (2; –2), A_3 (2; –4), A_4 (–1; 3), A_5 (–4; –3), A_6 (3; –1), A_7 (3; –1), A_8 (2; 1) и A_9 (0; –16) лежат на эллипсе $8x^2 + 5y^2 = 77$, какие внутри и какие вне его.

Задача 17

Определить полуоси каждого из следующих эллипсов и построить:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 3) $x^2 + 25y^2 = 25$;

4) $x^2 + 5y^2 = 15$; 5) $4x^2 + 9y^2 = 25$; 6) $9x^2 + 25y^2 = 1$;

7) $x^2 + 4y^2 = 1$; 8) $16x^2 + y^2 = 16$; 9) $25x^2 + 9y^2 = 1$;

10) $9x^2 + y^2 = 1$.

Задача 18

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти координаты его центра C и построить:

1) $9x^2 - 36x + 16y^2 + 96y + 36 = 0$;

2) $16x^2 + 25y^2 + 32x + 100y - 284 = 0$;

3) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

Задача 19

Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; 3) $x^2 - 4y^2 = 16$;

4) $x^2 - y^2 = 1$; 5) $4x^2 - 9y^2 = 25$; 6) $25x^2 - 16y^2 = 1$;

7) $9x^2 - 64y^2 = 1$.

Задача 20

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти координаты ее центра C и полуоси, построить:

1) $16x^2-9y^2+64x-54y-161=0$;

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$;

3) $16x^2-9y^2-64x+18y+199=0$.

Задача 21

Доказать, что треугольник с вершинами A (3; –1; 2), B (0; –4; 2) и C (–3; 2; 1) равнобедренный.

Задача 22

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (3; –1; 6), A_2 (–1; 7; –2) и A_3 (1; –2; 2) прямоугольный.

Задача 23

Определить, есть ли тупой угол среди внутренних углов треугольника M_1 (4; –1; 4), M_2 (0; 7; –4), M_3 (3; 1; –2).

Задача 24

Доказать, что внутренние углы треугольника M (3; –2; 5), N (–2; 1; –3), P (5; 1; –1) острые.

Задача 25

На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки A (–3; 4; 8) равно 12.

Задача 26

На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (1; –3; 7) и B (5; 7; –5).

Задача 27

Даны три вершины A (3; –4; 7), B (–5; 3; –2) и C (1; 2; –3) параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 28

На плоскости даны три вектора $\vec{a}=\{3; -2\}$, $\vec{b}=\{-2; 1\}$ и $\vec{c}=\{7; -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

Задача 29

Даны вершины четырехугольника A (2; –3; 1), B (1; 4; 0), C (–4; 1; 1) и D (–5; –5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Задача 30

Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}=a\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{i}+2\vec{j}-a\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

Задача 31

Даны точки A (1; 2; 0), B (3; 0; –3) и C (5; 2; 6). Вычислить площадь треугольника ABC.

Задача 32

Даны вершины треугольника A (1; –1; 2), B (5; – 6; 2), C (1; 3; – 1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Задача 33

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A (2; –1; 1), B (5; 5; 4), C (3; 2; –1) и D (4; 1; 3).

Вариант № 2

Задача 1

Дано уравнение линии в полярной системе координат $r = 2\sin^2 \varphi$.

Определить точки, лежащие на линии, давая φ значения от 0 до 2π через $\pi/8$. Построить линию, соединив полученные точки от руки. Найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача 2

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (1; 1), B (–15; 11), C (–8; 13). Найти:

1. Длину стороны BC.
2. Уравнение высоты, проведенной из вершины B.
3. Длину высоты, проведенной из вершины A.
4. Площадь треугольника.

Задача 3

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: A (1; 0; 3), B (3; 2; –1), C (4; 2; –2), D (1; –5; 1). Требуется средствами векторной алгебры найти:

1. Угол между ребрами AB и AD.
2. Площадь грани ABC.
3. Объем пирамиды.

Задача 4

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

Задача 5

Даны две смежные вершины квадрата A (4; 1) и B (2; 5). Вычислить его площадь.

Задача 6

Даны две противоположные вершины квадрата P (–1; 7) и Q (5; 3). Вычислить его площадь.

Задача 7

Даны три вершины A (1; 4), B (2; 5), C (–3; –7) параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B. Определить длину диагоналей этого параллелограмма.

Задача 8

Доказать, что точки A (1; –1), B (3; 3) и C (–2; –7) лежат на одной прямой.

Задача 9

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (2; 3), A_2 (5; 9) и A_3 (6; 1) прямоугольный.

Задача 10

Доказать, что точки A (–2; –1), B (1; 5), C (7; 2) и D (4; –4) являются вершинами квадрата.

Задача 11

Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами M_1 (2; 2), M_2 (5; 1) и M_3 (–1; 9) тупой угол.

Задача 12

Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами M (2; 1), N (4; 8) и P (5; 2) острые.

Задача 13

Через точку A (5; 3) проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить её центр C и радиус R.

Задача 14

Даны вершины треугольника A (2; 5), B (–3; –1), C (6; 3). Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

Задача 15

Даны три вершины параллелограмма A (5; 7), B (2; 3), C (–3; –1). Определить четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 16

Определить, какие из точек A_1 (3; 1), A_2 (4; 2), A_3 (2; –4), A_4 (–1; 3), A_5 (–4; –3), A_6 (3; –1), A_7 (3; –1), A_8 (2; 1) и A_9 (0; –16) лежат на эллипсе $8x^2+5y^2=77$, какие внутри и какие вне его.

Задача 17

Определить полуоси каждого из следующих эллипсов и построить:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;$ 2) $\frac{x^2}{4}+y^2=1;$ 3) $x^2+25y^2=25;$

4) $x^2+5y^2=15;$ 5) $4x^2+9y^2=25;$ 6) $9x^2+25y^2=1;$

7) $x^2+4y^2=1;$ 8) $16x^2+y^2=16;$ 9) $25x^2+9y^2=1;$

10) $9x^2+y^2=1.$

Задача 18

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти координаты его центра C и полуоси и построить:

1) $5x^2+9y^2+30x+18y+9=0;$

2) $16x^2+25y^2+32x+100y-284=0;$

3) $4x^2+3y^2+8x+12y-32=0.$

Задача 19

Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;$ 2) $\frac{x^2}{16}-y^2=1;$ 3) $x^2-4y^2=16;$

4) $x^2-y^2=1;$ 5) $4x^2-9y^2=25;$ 6) $25x^2-16y^2=1;$

7) $9x^2-64y^2=1.$

Задача 20

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти координаты ее центра C и построить:

1) $16x^2-9y^2+64x-54y-161=0;$

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0;$

3) $16x^2-9y^2-64x+18y+199=0.$

Задача 21

Доказать, что треугольник с вершинами A (3; –1; 2), B (0; –4; 2) и C (–3; 2; 1) равнобедренный.

Задача 22

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (3; –1; 6), A_2 (–1; 7; –2) и A_3 (1; –2; 2) прямоугольный.

Задача 23

Определить, есть ли тупой угол среди внутренних углов треугольника M_1 (4; –1; 4), M_2 (0; 7; –4), M_3 (3; 1; –2).

Задача 24

Доказать, что внутренние углы треугольника M (3; –2; 5), N (–2; 1; –3), P (5; 1; –1) острые.

Задача 25

На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки A (2; 1; 4) равно 12.

Задача 26

На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (2; 1; 3) и B (5; 4; –3).

Задача 27

Даны три вершины A (1; 2; –8), B (–5; 3; –2) и C (5; 4; 2) параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 28

На плоскости даны три вектора $a = \{3; -2\}$, $b = \{-2; 1\}$ и $c = \{7; -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

Задача 29

Даны вершины четырехугольника A (2; –3; 1), B (1; 4; 0), C (–4; 1; 1) и D (–5; –5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Задача 30

Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - a\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 3a\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

Задача 31

Даны точки A (2; 3; 5), B (4; 1; –3) и C (7; 1; 3). Вычислить площадь треугольника ABC.

Задача 32

Даны вершины треугольника A (2; 1; 3), B (4; –3; 2), C (7; 1; 3). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Задача 33

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A (3; 2; –4), B (–1; 2; 3), C (5; 1; 7) и D (–2; –4; –1).

Вариант № 3

Задача 1

Дано уравнение линии в полярной системе координат

$$r = \frac{3}{2 + \sin\varphi}.$$

Определить точки, лежащие на линии, давая φ значения от 0 до 2π через π/8. Построить линию, соединив полученные точки от руки. Найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача 2

Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A* (1; 1), *B* (–15; 11), *C* (–8; 13). Найти:

1. Длину стороны *BC*.
2. Уравнение высоты, проведенной из вершины *B*.
3. Длину высоты, проведенной из вершины *A*.
4. Площадь треугольника.

Задача 3

Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A* (6; 1; 5), *B* (–1; 3; 0), *C* (4; 5; –2), *D* (1; –1; 6).

Требуется средствами векторной алгебры найти:

1. Угол между ребрами *AB* и *AD*.
2. Площадь грани *ABC*.
3. Объем пирамиды.

Задача 4

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

Задача 5

Даны две смежные вершины квадрата *A* (2; –1) и *B* (3; –5). Вычислить его площадь.

Задача 6

Даны две противоположные вершины квадрата *P* (7; 1) и *Q* (–2; 3). Вычислить его площадь.

Задача 7

Даны три вершины A (1; 4), B (2; 1), C (–3; 8) параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B. Определить длину диагоналей этого параллелограмма.

Задача 8

Доказать, что точки A (–1; –5), B (3; 3) и C (2; 1) лежат на одной прямой.

Задача 9

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (2; 1), A_2 (6; –1) и A_3 (5; 7) прямоугольный.

Задача 10

Доказать, что точки A (–3; 2), B (3; 5), C (9; 2) и D (3; –1) являются вершинами квадрата.

Задача 11

Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами M_1 (1; 3), M_2 (–1; 8) и M_3 (6; 1) тупой угол.

Задача 12

Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами M (3; 3), N (5; 7) и P(6; 2) острые.

Задача 13

Через точку A (–2; 1) проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить её центр C и радиус R.

Задача 14

Даны вершины треугольника A (2; –5), B (1; 4), C (6; –3). Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

Задача 15

Даны три вершины параллелограмма A (7; 1), B (2; –1), C (3; 5). Определить четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 16

Определить, какие из точек A_1 (3; 1), A_2 (4; 2), A_3 (2; –4), A_4 (–1; 3), A_5 (–4; –3), A_6 (3; –1), A_7 (3; –1), A_8 (2; 1) и A_9 (0; –16) лежат на окружности $5x^2+5y^2=11$, какие внутри и какие вне его.

Задача 17

Определить полуоси каждого из следующих эллипсов и построить:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;   2) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$;   3) $x^2+25y^2=25$;

4) $x^2+5y^2=15$; 5) $4x^2+9y^2=25$; 6) $9x^2+25y^2=1$;

7) $x^2+4y^2=1$; 8) $16x^2+y^2=16$; 9) $25x^2+9y^2=1$;

10) $9x^2+y^2=1$.

Задача 18

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти координаты его центра C, полуоси и построить:

1) $9x^2+36x+16y^2+96y+36=0$;

2) $16x^2+25y^2+32x+100y-284=0$;

3) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

Задача 19

Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}-y^2=1$; 3) $x^2-4y^2=16$;

4) $x^2-y^2=1$; 5) $4x^2-9y^2=25$; 6) $25x^2-16y^2=1$;

7) $9x^2-64y^2=1$.

Задача 20

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти координаты ее центра C и построить:

1) $4x^2-24x-9y^2+36y-36=0$;

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$;

3) $16x^2-9y^2-64x+18y+199=0$.

Задача 21

Доказать, что треугольник с вершинами A (3; –1; 2), B (0;–4; 2) и C (–3; 2; 1) равнобедренный.

Задача 22

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (3; –1; 6), A_2 (–1; 7; –2) и A_3 (1; –2; 2) прямоугольный.

Задача 23

Определить, есть ли тупой угол среди внутренних углов треугольника M_1 (4; –1; 4), M_2 (0; 7; –4), M_3 (3; 1; –2).

Задача 24

Доказать, что внутренние углы треугольника M (3; –2; 5), N (–2; 1; –3), P (5; 1; –1) острые.

Задача 25

На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки A (2; 1; 4) равно 12.

Задача 26

На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (2; 1; 3) и B (5; 4; –3).

Задача 27

Даны три вершины A (1; 2; –8), B (–5; 3; –2) и C (5; 4; 2) параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 28

На плоскости даны три вектора $\vec{a} = \{3; -2\}$, $\vec{b} = \{-2; 1\}$ и $\vec{c} = \{7; -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

Задача 29

Даны вершины четырехугольника A (2; –3; 1), B (1; 4; 0), C (–4; 1; 1) и D (–5; –5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Задача 30

Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - a\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 3a\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

Задача 31

Даны точки A (2; 3; 5), B (4; 1; –3) и C (7; 1; 3). Вычислить площадь треугольника ABC.

Задача 32

Даны вершины треугольника A (2; 1; 3), B (4; –3; 2), C (7; 1; 3). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Задача 33

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A (3; 2; –4), B (–1; 2; 3), C (5; 1; 7) и D (–2; –4; –1).

Вариант № 4

Задача 1

Дано уравнение линии в полярной системе координат

$r = 3\cos 2\varphi.$

Определить точки, лежащие на линии, давая φ значения от 0 до 2π через $\pi/8$. Построить линию, соединив полученные точки от руки. Найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача 2

Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A* (–1; 7), *B* (11; 2), *C* (17; 10). Найти:

1. Длину стороны *BC*.
2. Уравнение высоты, проведенной из вершины *B*.
3. Длину высоты, проведенной из вершины *A*.
4. Площадь треугольника.

Задача 3

Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A* (1; –1; 6), *B* (4; 5; –2), *C* (–1; 3; 0), *D* (6; 1; 5). Требуется средствами векторной алгебры найти:

1. Угол между ребрами *AB* и *AD*.
2. Площадь грани *ABC*.
3. Объем пирамиды.

Задача 4

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$$

Задача 5

Даны две смежные вершины квадрата *A* (5; 1) и *B* (1; 7). Вычислить его площадь.

Задача 6

Даны две противоположные вершины квадрата *P* (4; –3) и *Q* (2; –5). Вычислить его площадь.

Задача 7

Даны три вершины *A* (1; 4), *B* (1; 3), *C* (–7; 1) параллелограмма *ABCD*, четвертая вершина которого *D* противоположна *B*. Определить длину диагоналей этого параллелограмма.

Задача 8

Доказать, что точки *A* (0; –3), *B* (2; 1) и *C* (–3; –9) лежат на одной прямой.

Задача 9

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (2; 1), A_2 (6; –1) и A_3 (5; 7) прямоугольный.

Задача 10

Доказать, что точки A (–3; 3), B (3; 6), C (9; 3) и D (3; 0) являются вершинами квадрата.

Задача 11

Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами M_1 (2; 3), M_2 (4; 9) и M_3 (6; 1) тупой угол.

Задача 12

Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами M (2; 1), N (5; 8) и P (6; 1) острые.

Задача 13

Через точку A (–3; 2) проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить её центр C и радиус R.

Задача 14

Даны вершины треугольника A (7; –3), B (2; 4), C (1; 5). Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

Задача 15

Даны три вершины параллелограмма A (7; 1), B (–1; –4), C (3; 5). Определить четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 16

Определить, какие из точек A_1 (3; 1), A_2 (4; 2), A_3 (2; –4), A_4 (–1; 3), A_5 (–4; –3), A_6 (3; –1), A_7 (3; –1), A_8 (2; 1) и A_9 (0; –16) лежат на окружности $4x^2+4y^2=19$, какие внутри и какие вне его.

Задача 17

Определить полуоси каждого из следующих эллипсов и построить:

1) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$; 3) $x^2+25y^2=25$;

4) $x^2+5y^2=15$; 5) $4x^2+9y^2=25$; 6) $9x^2+25y^2=1$;

7) $x^2+4y^2=1$; 8) $16x^2+y^2=16$; 9) $25x^2+9y^2=1$;

10) $9x^2+y^2=1$.

Задача 18

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти координаты его центра C и полуоси и построить:

1) $9x^2+36x+16y^2-96y+36=0;$

2) $16x^2+25y^2+32x+100y-284=0;$

3) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0.$

<u>Задача 19</u>

Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;$ 2) $\frac{x^2}{16}-y^2=1;$ 3) $x^2-4y^2=16;$

4) $x^2-y^2=1;$ 5) $4x^2-9y^2=25;$ 6) $25x^2-16y^2=1;$

7) $9x^2-64y^2=1.$

<u>Задача 20</u>

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти координаты ее центра C и построить:

1) $16x^2-9y^2+64x+54y-161=0;$

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0;$

3) $16x^2-9y^2+64x-18y+199=0.$

<u>Задача 21</u>

Доказать, что треугольник с вершинами A (3; –1; 2), B (0; –4; 2) и C (–3; 2; 1) равнобедренный.

<u>Задача 22</u>

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (3; –1; 6), A_2 (–1; 7; –2) и A_3 (1; –2; 2) прямоугольный.

<u>Задача 23</u>

Определить, есть ли тупой угол среди внутренних углов треугольника M_1 (4; –1; 4), M_2 (0; 7; –4), M_3 (3; 1; –2).

<u>Задача 24</u>

Доказать, что внутренние углы треугольника M (3; –2; 5), N (–2; 1; –3), P (5; 1; –1) острые.

<u>Задача 25</u>

На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки A (2; 3; 5) равно 12.

<u>Задача 26</u>

На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (3; 7; 1) и B (5; 1; 3).

Задача 27

Даны три вершины A (1; 2; –8), B (–5; 3; –2) и C (5; 4; 2) параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 28

На плоскости даны три вектора $\vec{a} = \{3;\ -2\}$, $\vec{b} = \{-2;\ 1\}$ и $\vec{c} = \{7;\ -4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

Задача 29

Даны вершины четырехугольника A (2; –3; 1), B (1; 4; 0), C (–4; 1; 1) и D (–5; –5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Задача 30

Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - a\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = a\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

Задача 31

Даны точки A (3; 4; 1), B (2; –3; 7) и C (5; 4; –1). Вычислить площадь треугольника ABC.

Задача 32

Даны вершины треугольника A (7; 5; 1), B (1; 3; –3), C (1; –1; 5). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Задача 33

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A (–3; 1; 5), B (7; 2; 4), C (3; –5; 1) и D (6; 1; –5).

Вариант № 5

Задача 1

Дано уравнение линии в полярной системе координат

$r = 3(1 + \sin\varphi)$.

Определить точки, лежащие на линии, давая φ значения от 0 до 2π через $\pi/8$. Построить линию, соединив полученные точки от руки. Найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат.

Задача 2

Даны координаты вершин треугольника ABC: A (4; 3), B (–12; –9), C (–5; 15). Найти:

1. Длину стороны BC.
2. Уравнение высоты, проведенной из вершины B.
3. Длину высоты, проведенной из вершины A.
4. Площадь треугольника.

Задача 3

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: A (–2; 1; 0), B (2; 2; 5), C (3; 1; 2), D (1; 2; 1). Требуется средствами векторной алгебры найти:

1. Угол между ребрами AB и AD.
2. Площадь грани ABC.
3. Объем пирамиды.

Задача 4

Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

Задача 5

Даны две смежные вершины квадрата A (–7; 8) и B (4; –2). Вычислить его площадь.

Задача 6

Даны две противоположные вершины квадрата P (7; –3) и Q (2; –5). Вычислить его площадь.

Задача 7

Даны три вершины A (1; 5), B (2; –3), C (–5; 3) параллелограмма $ABCD$, четвертая вершина которого D противоположна B. Определить длину диагоналей этого параллелограмма.

Задача 8

Доказать, что точки A (1; 3), B (–1; –1) и C (3; 7) лежат на одной прямой.

Задача 9

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (2; 4), A_2 (5; 10) и A_3 (6; 2) прямоугольный.

Задача 10

Доказать, что точки A (–3; –1), B (0; 5), C (6; 2) и D (3; –4) являются вершинами квадрата.

Задача 11

Определить, есть ли среди внутренних углов треугольника с вершинами M_1 (5; 2), M_2 (6; 9) и M_3 (9; 1) тупой угол.

Задача 12

Доказать, что все внутренние углы треугольника с вершинами M (2; 1), N (5; 8) и P (6; 1) острые.

Задача 13

Через точку A (–4; –3) проведена окружность, касающаяся обеих координатных осей. Определить её центр C и радиус R.

Задача 14

Даны вершины треугольника A (5; 1), B (2; 1), C (–7; 5). Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

Задача 15

Даны три вершины параллелограмма A (6; –3), B (1; 3), C (4; –5). Определить четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 16

Определить, какие из точек A_1 (3; 1), A_2 (4; 2), A_3 (2; –4), A_4 (–1; 3), A_5 (–4; –3), A_6 (3; –1), A_7 (3; –1), A_8 (2; 1) и A_9 (0; –16) лежат на окружности $x^2 + y^2 = 3$, какие внутри и какие вне его.

Задача 17

Определить полуоси каждого из следующих эллипсов и построить:

1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$ 2) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$ 3) $x^2 + 25y^2 = 25;$

4) $x^2 + 5y^2 = 15;$ 5) $4x^2 + 9y^2 = 25;$ 6) $9x^2 + 25y^2 = 1;$

7) $x^2 + 4y^2 = 1;$ 8) $16x^2 + y^2 = 16;$ 9) $25x^2 + 9y^2 = 1;$

10) $9x^2 + y^2 = 1.$

Задача 18

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти координаты его центра C, полуоси и построить:

1) $5x^2 + 9y^2 + 30x + 18y + 9 = 0;$

2) $16x^2 + 25y^2 + 32x + 100y - 284 = 0;$

3) $4x^2 + 3y^2 + 8x + 12y - 32 = 0.$

Задача 19

Определить полуоси a и b каждой из следующих гипербол:

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1;$ 2) $\frac{x^2}{16}-y^2=1;$ 3) $x^2-4y^2=16;$

4) $x^2-y^2=1;$ 5) $4x^2-9y^2=25;$ 6) $25x^2-16y^2=1;$

7) $9x^2-64y^2=1.$

Задача 20

Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти координаты ее центра C и построить:

1) $16x^2-9y^2+64x+54y-161=0;$

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0;$

3) $16x^2-9y^2+64x-18y+199=0.$

Задача 21

Доказать, что треугольник с вершинами A (3; –1; 2), B (0; –4; 2) и C (–3; 2; 1) равнобедренный.

Задача 22

Доказать, что треугольник с вершинами A_1 (3; –1; 6), A_2 (–1; 7; –2) и A_3 (1; –2; 2) прямоугольный.

Задача 23

Определить, есть ли тупой угол среди внутренних углов треугольника M_1 (4; –1; 4), M_2 (0; 7; –4), M_3 (3; 1; –2).

Задача 24

Доказать, что внутренние углы треугольника M (3; –2; 5), N (–2; 1; –3), P (5; 1; –1) острые.

Задача 25

На оси абсцисс найти точку, расстояние до которой от точки A (7; 1; –2) равно 12.

Задача 26

На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (–3; 1; 4) и B (2; –3; 7).

Задача 27

Даны три вершины A (1; –4; 7), B (1; –3; 2) и C (7; –6; 3) параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D, противоположную B.

Задача 28

На плоскости даны три вектора $\vec{a}=\{3;-2\}$, $\vec{b}=\{-2;1\}$ и $\vec{c}=\{7;-4\}$. Определить разложение каждого из этих трех векторов, принимая в качестве базиса два других.

Задача 29

Даны вершины четырехугольника A (2; –3; 1), B (1; 4; 0), C (–4; 1; 1) и D (–5; –5; 3). Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

Задача 30

Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - a\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = a\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

Задача 31

Даны точки A (8; 4; 1), B (2; 5; 7) и C (5; 4; –1). Вычислить площадь треугольника ABC.

Задача 32

Даны вершины треугольника A (7; 5; 4), B (1; 3; –3), C (1; –1; 3). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Задача 33

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A (7; 2; 1), B (–3; 4; –1), C (2; –3; 5) и D (4; 5; 3).

Контрольная работа № 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Вариант А

Задача 1

Найти область определения функции

$$y = \ln \frac{x^2 - 4x - 12}{x^3 + 3x - 10}.$$

Решение 1. Область определения функции – это множество значений аргумента, при которых аналитическое выражение функции имеет смысл:

1) знаменатель не может быть равным нулю;

2) под знаком четного корня выражение не может быть отрицательным;

3) под знаком логарифма выражение всегда больше нуля;

4) под знаком арксинуса и арккосинуса выражение по модулю не может быть больше единицы.

Решение 2. Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть больше нуля

$$\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 + 3x - 10} \rangle 0.$$

Чтобы решить это неравенство, нужно числитель и знаменатель представить в виде произведения сомножителей. Для этого надо решить два уравнения: $x^2 - 4x - 12 = 0$; $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Найдем корни первого уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{4^2 + 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 8}{2};\ x_1 = \frac{4 - 8}{2} = -2;\ x_2 = \frac{4 + 8}{2} = 6.$$

Числитель можно представить в виде следующего произведения сомножителей: $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$.

Найдем корни второго уравнения:

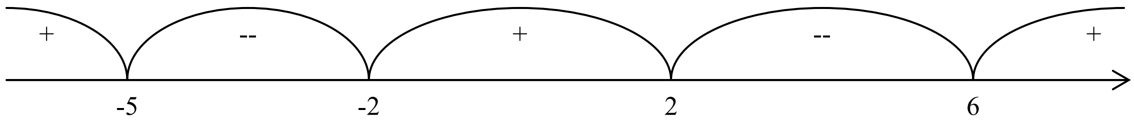
$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2};$$

$$x_1 = \frac{-3 - 7}{2} = -5;\ x_2 = \frac{-3 + 7}{2} = 2.$$

Знаменатель можно представить в виде следующего произведения сомножителей: $x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$, а неравенство примет вид

$$\frac{(x+2)(x-6)}{(x+5)(x-2)}\rangle 0.$$

Нанесем на числовую ось критические точки и решим это неравенство методом интервалов.



Отсюда область определения функции определяется условиями:

$x <-5$; $-2 < x < 2$; $x > 6$.

Ответ: $x <-5$; $-2 < x < 2$; $x > 6$.

<u>Задача 2</u>

Пользуясь определением производной, найти производную функции $y = x^2 + 3x + 7$.

Решение 1

При решении этой задачи нужно воспользоваться определением производной $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ по следующей схеме:

1. Задаем приращение аргументу Δx.
2. Определяем приращение функции
   $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
3. Составляем отношение $\Delta y \,/\, \Delta x$.
4. Находим предел
   $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Решение 2

1. Задаем приращение аргумента Δx

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+7=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+3x+3\Delta x+7.$$

2. Определяем приращение функции

$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right) = x^2 + 2x\cdot\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 + 3x + 3\cdot\Delta x + 7 - x^2 - 3x - 7 =$$
$$= 2x\cdot\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 + 3\cdot\Delta x.$$

3. Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x\cdot\Delta x + \left(\Delta x\right)^2 + 3\cdot\Delta x}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x.$

4. Найдем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2x + 3 + \Delta x\right) = 2x + 3,$

$\left(x^2 + 3x + 7\right)' = 2x + 3.$

Ответ: 2 x +3.

<u>Задача 3</u>

Найти производную функции $y = \cos^2\dfrac{1}{x}.$

Решение. Так как y – сложная функция от аргумента x, т. е. ее можно представить в виде цепочки из нескольких (например, трех) функций $y = f(u),\ u = \varphi(\nu),\ \nu = \psi(x),$ то производная этой сложной функции равна произведению производных составляющих ее функций

$$y' = f'(u)\varphi'(\nu)\psi'(x).$$

1. Представим сложную функцию в виде цепочки элементарных функций:

$$y = u^2,\ u = \cos\nu,\ \nu = \frac{1}{x};$$
$$y' = 2u;\ u' = (-\sin\nu);\ \nu' = -\frac{1}{x^2}.$$

2. Найдем производные этих функций.

3. Перемножим найденные производные $y' = 2u(-\sin\nu)(-1/x^2).$

4. Подставив в выражение u и v , получим

$$y' = 2\cos\nu(-\sin\nu)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}.$

Задача 4

Вычислить максимальный объем коробки, изготовленной из заготовки размерами 18×18 см (рис. 4).

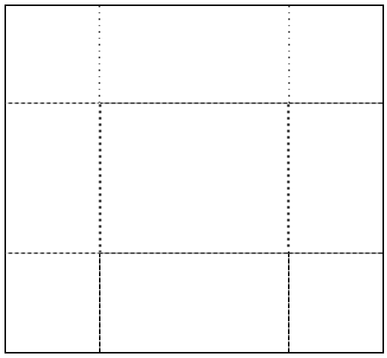


Рис. 4

Решение. Решение задачи осуществляется составлением аналитического выражения функции и исследования данной функции на экстремум с помощью дифференциального исчисления.

Пусть y – объем коробки, x – сторона вырезанного из заготовки квадрата. Тогда объем коробки

$$y = (18-2x)^2 x = 4x^3 - 72x^2 + 324x.$$

Исследуем данную функцию на экстремум:

1. Найдем производную $y' = 12x^2 - 144x + 324$.

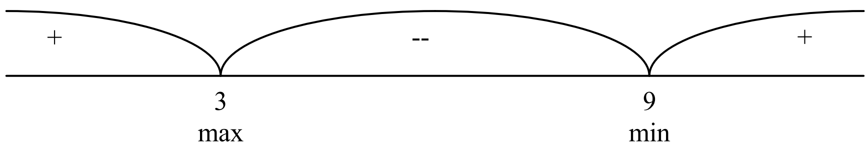
2. Определим критические точки, т. е. значения x, при которых производная равна нулю или не существует. Для этого нужно решить уравнение

$$12x^2 - 144x + 324 = 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 27 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 1\cdot 27}}{2\cdot 1} = \frac{12 \pm 6}{2};$$

$$x_1 = \frac{12-6}{2} = 3;\ x_2 = \frac{12+6}{2} = 9.$$

Изобразим эти точки на числовой оси и определим знак производной в каждом интервале.



Видим, что при переходе через точку $x = 3$ производная меняет свой знак с плюса на минус, значит

$$y_{\max} = y(3) = (18 - 2\cdot 3)^2\, 3 = 432\ \text{см}^3,$$

а при переходе через точку $x = 9$ производная меняет свой знак с минуса на плюс, значит

$$y_{\min} = y(9) = (18 - 2\cdot 9)^2\, 9 = 0\ \text{см}^3.$$

Окончательно получаем, что из данной заготовки можно склеить коробку максимальным объемом 432 см^3.

Ответ: 432 см^3.

Задача 5

Провести полное исследование и построить график функции

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

Решение. Исследование функции и построение графика функции проводятся по следующей схеме:

1. Область определения функции.
2. Четность или нечетность.
3. Периодичность функции.
4. Точки пересечения графика функции с осями координат.
5. Точки разрыва функции, предельные значения в точках разрыва слева и справа. Уравнение вертикальных асимптот.
6. Интервалы монотонности функции, точки экстремума, экстремальные значения.
7. Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
8. Поведение функции в бесконечности, наклонные асимптоты.

Рассмотрим пример по приведенной выше схеме:

1. Функция определена при всех значениях x, кроме точек $x_1 = -1$, $x_2 = +1$, где она обращается в бесконечность.

2. Функция нечетная

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}};\ f(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = -f(x),$$

график симметричен относительно начала координат.

3. Функция непериодическая.

4. Если $x = 0$, то $y = 0$, т. е. график функции пересекает оси координат в одной точке 0(0,0).

5. Точки разрыва $x_1 = -1$, $x_2 = +1$:

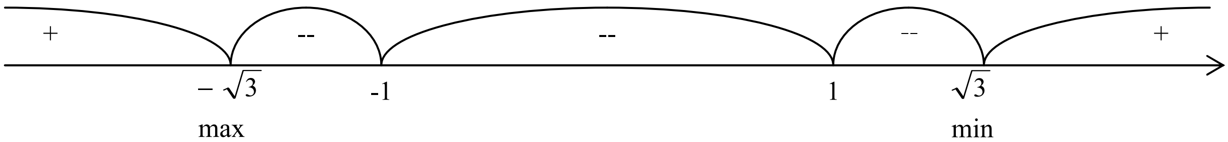
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = +\infty.$$

Уравнения вертикальных асимптот: $x = -1$; $x = 1$.

6. Находим интервалы монотонности, точки экстремума, экстремальные значения

$$y' = \left[\frac{x}{\left(x^2-1\right)^{1/3}}\right]' = \frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}} - x\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}2x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^2-3}{3\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{3}}};$$

Критические точки: $x_1 = -\sqrt{3};\ x_2 = \sqrt{3}\left(y' = 0\right);\ x_3 = -1;\ x_4 = 1$. y' (не существует) отметим на числовой оси и определим знак производной в каждом интервале



От $-\infty$ до $-\sqrt{3}$ и от $+\sqrt{3}$ до $+\infty$ функция возрастает, а от $-\sqrt{3}$ до $+\sqrt{3}$ функция убывает

$$y_{\max} = y\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3-1}} \approx -1,37;$$

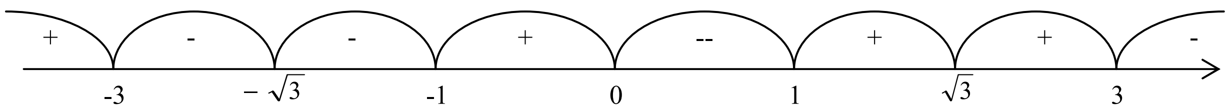
функция убывает

$$y_{\min} = y\left(+\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3-1}} \approx +1,37.$$

7. Находим интервалы выпуклости и вогнутости точки перегиба.

$$y'' = \left[\frac{x^2-3}{3\left(x^2-1\right)^{4/3}}\right]' = \frac{2x\cdot 3\left(x^2-1\right)^{4/3} - \left(x^2-3\right)3\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)^{1/3}2x}{9\left(x^2-1\right)^{8/3}} = \frac{2x\left(9-x^2\right)}{9\left(x^2-1\right)^{7/3}}.$$

Критические точки: $x_1 = 0, x_2 = -3;\ x_3 = +3(y'' = 0);\ \ x_4 = -1;\ x_5 = +1.$ y'' (не существует) отметим на числовой оси и определим знак второй производной в каждом интервале



От $-\infty$ до –3, от 1 до 3 график функции – вогнутая линия, от –3 до –1, от 0 до 1, от 3 до $+\infty$ график функции – выпуклая линия.

8. Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(y - kx \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \infty.$$

Наклонных асимптот нет.

Составляем табл. 2 и строим график функции по полученным данным (рис. 5), причем для значений x от 0 до $+\infty$, так как график функции симметричен относительно начала координат.

Таблица 2

X	0	(0,1)	1	(1,√3)	√3	(√3,3)	3	(3,+∞)
Y'	–	–	Не сущ.	–	0	+	+	+
Y''	0	–	Не сущ.	+	+	+	0	–
Точка перегиба		⌒ ↘	Не сущ.	⌣ ↘	$y_{min} \approx$ 1,37	⌣ ↗	Точка перегиба	⌒ ↗

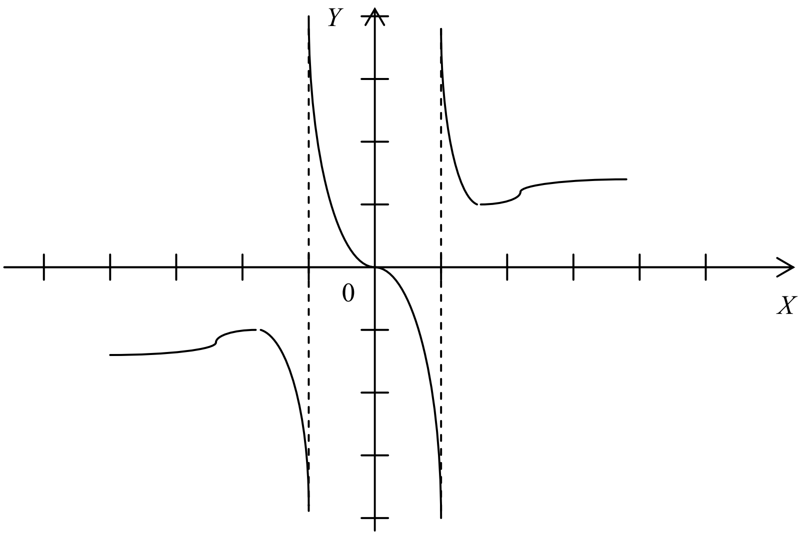


Рис. 5

Задача 6

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{3x-2}{2x+1}\, dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 11}\, dx$; в) $\int \frac{x-3}{x^2+9}\, dx$.

Решение. Для нахождения интеграла: а) можно использовать метод непосредственного интегрирования; б) в знаменателе подынтегрального выражения выделить полный квадрат; в) числитель подынтегрального выражения почленно поделить на знаменатель.

а) $\int\frac{3x-2}{2x+1}dx=\int\frac{(6x-4)3}{(6x+3)2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{6x-4}{6x+3}dx=\frac{3}{2}\int\frac{6x+3-7}{6x+3}dx=\frac{3}{2}\int\left(\frac{6x+3}{6x+3}-\frac{7}{6x+3}\right)dx=$

$=\frac{3}{2}\int\left(1-\frac{7}{6x+3}\right)dx=\frac{3}{2}\int dx-\frac{3}{2}\int\frac{7}{6x+3}dx=\frac{3}{2}x-\frac{21}{6}\int\frac{dx}{2x+1}=\frac{3}{2}x-\frac{7}{2}\int\frac{\frac{1}{2}d(2x+1)}{2x+1}=$

$=\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}=\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}\ln|2x+1|+c.$

Ответ: $\frac{3}{2}x-\frac{7}{4}\ln|2x+1|+c.$

б) $\int\frac{dx}{x^2-6x+11}dx=\int\frac{dx}{(x^2-6x+9)+2}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+2}=\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{2}}+c.$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{2}}+c.$

в) $\int\frac{x-3}{x^2+9}dx=\int\left(\frac{x}{x^2+9}-\frac{3}{x^2+9}\right)dx=\int\frac{xdx}{x^2+9}-3\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+9}-3\int\frac{dx}{x^2+3^2}=$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+9)}{x^2+9}-3\int\frac{dx}{x^2+3^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-3\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c=\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c.$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c.$

Задача 7

Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{2x+5x^2-3x^4+2x^3+3x^5-7}{x+2}dx=\int\frac{3x^5-3x^4+2x^3+5x^2+2x-7}{x+2}dx.$$

Решение. Необходимо выделить целую часть, используя деление многочлена на многочлен.

Выделим делением целую часть

$$
\begin{array}{l|l}
-\,3x^5-3x^4+2x^3+5x^2+2x-7 & \;x+2 \\
\underline{3x^5+6x^4} & \overline{3x^4-9x^3+20x^2-35x+72} \\
\quad -\,9x^4+2x^3 & \\
\quad \underline{9x^4-18x^3} & \\
\qquad -\,20x^3+52x^2 & \\
\qquad \underline{20x^3+40x^2} & \\
\qquad\quad -\,-35x^2+2x & \\
\qquad\quad \underline{35x^2-70x} & \\
\qquad\qquad 72x-7 & \\
\qquad\qquad -\,\underline{72x+144} & \\
\qquad\qquad\quad -155 &
\end{array}
$$

Подынтегральное выражение примет вид

$$
\int\left(3x^4-9x^3+20x^2-35x+72-\frac{151}{x+2}\right)dx=3\int x^4dx-9\int x^3dx+20\int x^2dx-35\int xdx+72\int dx-
$$

$$
-151\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\frac{3x^5}{5}-\frac{9x^4}{4}+\frac{20x^3}{3}-\frac{35x^2}{2}+72x-151\ln|x+2|+c.
$$

Ответ: $\frac{3x^5}{5}-\frac{9x^4}{4}+\frac{20x^3}{3}-\frac{35x^2}{2}+72x-151\ln|x+2|+c.$

<u>Задача 8</u>

Найти неопределенный интеграл

$\int e^x\cdot\sin 2xdx.$

Решение. Так как под знаком интеграла произведение двух функций, необходимо использовать метод интегрирования по частям.

Воспользуемся этим методом

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\int udv=uv-\int vdu \\
u=e^x;\quad du=e^xdx \\
dv=\sin 2xdx;\quad v=\int\sin 2xdx=\frac{1}{2}\cos 2x
\end{array}
}
$$

$$
\int e^x\cdot\sin 2xdx=e^x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\frac{1}{2}\int e^x\cdot\cos 2xdx=-\frac{1}{2}e^x\cdot\cos 2x+\frac{1}{2}\int e^x\cdot\cos 2xdx.
$$

Воспользуемся методом интегрирования по частям еще раз:
$\int e^x \cdot \cos 2xdx.$

$$u = e^x;\ du = e^x dx;$$
$$dv = \cos^2 xdx;\ v = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

$$\int e^x \cdot \cos 2xdx = \frac{1}{2}e^x \sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2xdx.$$

Подставляем полученное значение вместо интеграла, получим:

$$\int e^x \cdot \sin 2xdx = -\frac{1}{2}\, e^x \cdot \cos 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^x \cdot \sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \cdot \sin 2xdx\right);$$

$$\int e^x \cdot \sin 2xdx = \frac{1}{4}e^x \cdot \sin 2x - \frac{1}{2}e^x \cdot \cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cdot \sin 2x;$$

$$\frac{5}{4}\int e^x \cdot \sin 2xdx = \frac{1}{4}\ e^x\left(\sin 2x = 2\cos 2x\right);$$

$$\int e^x \cdot \sin 2xdx = \frac{e^x}{5}\left(\sin 2x - 2\cos 2x\right) + c.$$

Ответ: $\frac{e^x}{5}\left(\sin 2x - 2\cos 2x\right) + c.$

<u>Задача 9</u>

Вычислить определенный интеграл

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}.$$

Решение. Данная задача решается с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Введем новую переменную:

$$t = \sqrt{x};$$
$$x = t^2;$$
$$dx = 2tdt.$$

Интеграл примет вид

$$\int_2^3 \frac{2tdt}{t-1} = 2\int_2^3 \frac{tdt}{t-1} = 2\int_2^3 \frac{(t-1)+1}{t-1}\,dt = 2\int_2^3 \left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2\int_2^3 dt + 2\int_2^3 \frac{d(t-1)}{t-1} = 2t + 2\ln|t-1|\Big|_2^3 =$$

$$= (2\cdot 3 + 2\ln|3-1|) - (2\cdot 2 + 2\cdot\ln|2-1|) = 6 + 2\ln 2 - 4 - 0 = 2 + 2\ln 2.$$

Ответ: $2 + 2\ln 2$.

Задача 10

Вычислить площадь, ограниченную линиями

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 7, \\ y = x + 1. \end{cases}$$

Использовать определенный интеграл для вычисления площади.

Решение: а) строим данные линии на координатной плоскости (рис. 6).

$$\begin{cases} y = (x^2 - 6x + 9) - 2 = (x-3)^2 - 2, \\ y = x + 1. \end{cases}$$

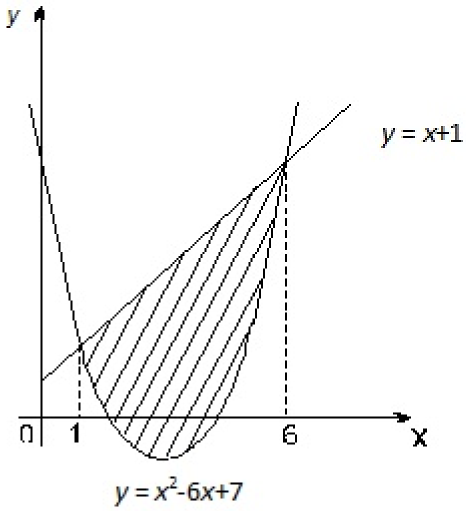


Рис. 6

б) $S = \int_1^6 \left[(x+1) - (x^2 - 6x + 7)\right] dx = \int_1^6 (7x - x^2 - 6)\,dx = \left(\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x\right)\Big|_1^6 =$

$$= \left(\frac{7\cdot 36}{2} - \frac{216}{3} - 36\right) - \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{3} - 6\right) = 20\frac{5}{6}\left(\text{ед}^2\right).$$

Ответ: $20\frac{5}{6}\left(\text{ед}^2\right)$.

Задача 11

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 6y' + 5y = 3x^2 + 4x + 8.$$

Решение. Решение данного дифференциального уравнения необходимо искать в виде суммы двух функций $y = u + v$, где u – общее решение соответствующего однородного уравнения; v – частное решение данного неоднородного уравнения.

Решение ищем в виде суммы двух функций $y = u + v.$

1. Рассмотрим соответствующее однородное дифференциальное уравнение $y'' - y' + 5y = 0.$

Решим его с помощью характеристического уравнения

$k^2 - 6k + 5 = 0;$

$D = 36 - 20 = 16;\ \sqrt{D} = 4;$

$k_1 = \dfrac{6-4}{2} = 1;\ k_2 = \dfrac{6+4}{2} = 5.$

Общее решение однородного уравнения имеет следующий вид:

$u = c_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{k_2 \cdot x} = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{5x}.$

2. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $v = ax^2 + bx + c,$ так как в правой части искомого дифференциального уравнения стоит квадратный трехчлен. Значения *a, в, c* найдем методом неопределенных коэффициентов $v' = 2ax + b;\ v'' = 2a.$

Подставляя v, v' и v'' вместо y, y' и y'' в искомом уравнении, получим:

$$2a - 6(2ax + b) + 5\left(ax^2 + bx + c\right) = 3x^2 + 4x + 8;$$

$$2a - 12ax - 6b + 5ax^2 + 5bx + 5c = 3x^2 + 4x + 8.$$

Коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях равенства должны быть одинаковые

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 5a = 3 \\ x^1 & 5b - 12a = 4 \\ x^0 & 2a - 6b + 5c = 8 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{5} \\ 5b - 12\dfrac{3}{5} = 4 \\ 2\dfrac{3}{5} - 6b + 5c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{5} \\ 5b = \dfrac{56}{5} \\ 5c - 6b = \dfrac{35}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{5} \\ b = \dfrac{56}{25} \\ 5c = \dfrac{511}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{5} \\ b = \dfrac{56}{25} \\ c = \dfrac{511}{125} \end{cases}$$

$v = \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{56}{25}x + \dfrac{511}{125}.$

Ответ: $y = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{5x} + \dfrac{3x^2}{5} + \dfrac{56x}{25} + \dfrac{511}{125}.$

<u>Задача 12</u>

Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $z = e^{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

Решение. При нахождении частных производных используется правило о том, что все величины считаются постоянными, кроме величины, по которой ищем производную.

$$z'_x = e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+0\right)=\frac{e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{2\sqrt{x}};$$

$$z'_y = e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)=\frac{e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}.$$

Ответ: $\dfrac{e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{2\sqrt{x}}$; $\dfrac{e^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$.

Вариант № 1

Задача 1

Найти область определения функций

а) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$; б) $y=\lg\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}$.

Задача 2

Пользуясь определением производной, найти производные функции

$$y=(x+1)^3.$$

Задача 3

Найти производные функций

а) $y=\dfrac{1+\mathrm{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Задача 4

Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиусом R=10 см.

Задача 5

Провести полное исследование и построить график функции

$$y=\frac{x}{\ln x}.$$

Задача 6

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{3x-5}{2x+4}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x^2+6x+17}$; в) $\int \frac{x+6}{x^2-4}\,dx$.

Задача 7

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x^5+5x^4-3x^3+6x^2-2x+3}{x-2}\,dx.$$

Задача 8

Найти неопределенный интеграл

$$\int e^{2x}\cos 3x dx.$$

Задача 9

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Задача 10

Вычислить площадь, ограниченную линиями

$y = x^2 - 6x + 10$;

$y = x + 4$.

Задача 11

Решить дифференциальное уравнение

$y'' - 8y' + 7y = 4\sin 2x$.

Задача 12

Найти частные производные первого порядка от функции двух переменных

$$z = x^2 y^2 \ln^3\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Вариант № 2

Задача 1

Найти область определения функций

а) $y = \frac{1}{x^2-4x-12}$; б) $y = l\frac{x+1}{x^3-7x^2-8x}$.

Задача 2

Пользуясь определением производной, найти производные функции

$y=(x-2)^2$.

Задача 3

Найти производные функций

а) $y=\operatorname{arctg}^3(x^2+4x)$; б) $y=\sqrt{x^3+\sin^2 3x}$.

Задача 4

Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиусом $R = 10$ см.

Задача 5

Провести полное исследование и построить график функции

$y = x \cdot \ln x$

Задача 6

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{5x-2}{2x+1}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{2x^2+8x+12}$; в) $\int \frac{x+3}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$.

Задача 7

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x^4-3x^3+2x^2-5x+3}{x+3}\,dx.$$

Задача 8

Найти неопределенный интеграл

$\int e^{2x} \cdot \sin 2x dx$.

Задача 9

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^2 \frac{xdx}{x^2+5}.$$

Задача 10

Вычислить площадь, ограниченную линиями

$y=x^2-2x+2$;

$y=x+6$.

Задача 11

Решить дифференциальное уравнение

$y'' - 10y' + 24y = 5\cos x.$

Задача 12

Найти частные производные первого порядка от функции двух переменных

$$z = \sin\ (x^2 + y^2)\ln^2\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right).$$

Вариант № 3

Задача 1

Найти область определения функций

а) $y = \dfrac{1}{x^3 - 4x}$; б) $y = \log_3 \dfrac{x+4}{x^3 - 3x^2 - 10x}$.

Задача 2

Пользуясь определением производной, найти производные функции $y = x^4$.

Задача 3

Найти производные функций

а) $y = e^{3x} \cdot \sin x^2$; б) $y = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$.

Задача 4

Найти радиус основания цилиндра, имеющего наибольшую боковую поверхность и вписанного в шар радиусом R = 10 см.

Задача 5

Провести полное исследование и построить график функции

$y = \dfrac{1}{x} + 4 \cdot x^2.$

Задача 6

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \dfrac{5x-3}{2x+4}dx$; б) $\int \dfrac{dx}{2x^2 + 8x + 10}$; в) $\int \dfrac{x-2}{\sqrt{4-2x^2}}\,dx.$

Задача 7

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{3x^5 - x^6 + 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{x-2}\,dx.$$

Задача 8

Найти неопределенный интеграл

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx.$$

Задача 9

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}.$$

Задача 10

Вычислить площадь, ограниченную линиями

$y = x^2 + 2x + 2;$

$y = -x + 2.$

Задача 11

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 6y' + 5y = x^2 + 3x - 2.$$

Задача 12

Найти частные производные первого порядка от функции двух переменных

$$z = \sqrt{x^3 - y^3} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Вариант № 4

Задача 1

Найти область определения функций

а) $y = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 28x};$ б) $y = \ln \dfrac{x-5}{x^3 + 9x^2 + 24x}.$

Задача 2

Пользуясь определением производной, найти производные функции $y = 2x^2 - x.$

Задача 3

Найти производные функций

а) $y=\ln^2(\sqrt{1-x^2}-\cos^2 x)$; б) $y=\sqrt[3]{\left(x^2-3\right)^2}$.

Задача 4

Найти радиус основания цилиндра, имеющего наибольший объем и вписанного в конус высотой H = 20 см и радиусом основания R = 10 см.

Задача 5

Провести полное исследование и построить график функции

$$y=\frac{x^2+2}{x+2}.$$

Задача 6

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{4x+3}{5x-1}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{8x-2x^2-10}$; в) $\int\frac{2-x}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$

Задача 7

Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{3x^4-2x+4x^3-x^5+3x^2+7}{x+1}\,dx.$$

Задача 8

Найти неопределенный интеграл

$$\int e^{-x}\cdot\cos 4x dx.$$

Задача 9

Вычислить определенный интеграл

$$\int_2^3\frac{dx}{2x^2+3x-2}.$$

Задача 10

Вычислить площадь, ограниченную линиями

$y=x^2-2x-1$;

$y=x+3$.

Задача 11

Решить дифференциальное уравнение

$$y''+4y'+3y=2x^2-3x+5.$$

Задача 12

Найти частные производные первого порядка от функции двух переменных

$$z=\frac{\sqrt{xy-x^3}}{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}.$$

Вариант № 5

Задача 1

Найти область определения функций

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$; б) $y=\lg\dfrac{x^3+3x^2-10x}{x^2-10x+24}$.

Задача 2

Пользуясь определением производной, найти производные функции $y=(x-4)^2$.

Задача 3

Найти производные функций

а) $y=\sqrt{x^2+\sin^2 3x}$; б) $y=\ln\left(\sqrt{x^3-8}\right)$.

Задача 4

Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Задача 5

Провести полное исследование и построить график функции

$$y=\frac{3\cdot x}{1+x}.$$

Задача 6

Найти неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{2x+5}{3x-3}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{6x-x^2-8}$; в) $\displaystyle\int\frac{5+x}{x^2-9}dx$.

Задача 7

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{5x^3 - 3x^2 - x^4 + 6x - 10}{x-3}\,dx.$$

Задача 8

Найти неопределенный интеграл

$$\int e^{3x} \cdot \cos 2x dx.$$

Задача 9

Вычислить определенный интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

Задача 10

Вычислить площадь, ограниченную линиями

$$y = x^2 + 2x - 1;$$

$$y = 2x + 3.$$

Задача 11

Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 8y' + 15y = x^2 - 3x + 2.$$

Задача 12

Найти частные производные первого порядка от функции двух переменных

$$z = \ln^2\left(x^2 y^2 + \ln\frac{y}{x}\right).$$

Контрольная работа № 3

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Вариант А

Задача 1

В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает пять деталей. Найти вероятность того, что три извлеченные детали окажутся окрашенными.

Дано:	Решение:
$N = 15$;	Формула гипергеометрического распределения
$M = 10$;	$P(m) = \dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^m}$,
$n = 5$;	где N – общее количество деталей;
$m = 3$	M – количество окрашенных деталей;
$P(m) = ?$	n – количество отобранных деталей;
	m – количество окрашенных деталей среди отобранных;
	$P(3) = \dfrac{C_{10}^3 \cdot C_5^2}{C_{15}^5} = 0,3996.$
	Ответ: 39,96 %.

Задача 2

В ящике 120 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных; в) хотя бы одна бракованная; г) больше половины годных.

Дано:	Решение:
$N = 120$;	Формула гипергеометрического распределения
$M = 10$;	$P(m) = \dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^m}$,
$n = 4$;	
а) $m = 0$;	где N – общее количество деталей;
б) $m = 4$;	M – количество бракованных деталей;
в) $m \geq 1$;	n – количество извлеченных деталей;
г) $m > 2$	

$P(m) = ?$

m – количество бракованных среди отобранных;

а) $P(0)=\dfrac{C_4^0 \cdot C_{116}^4}{C_{120}^4}=0,8717=87,17\ \%;$

б) $P(4)=\dfrac{C_4^4 \cdot C_{116}^0}{C_{120}^4}=0,00000012=0,000012\ \%;$

в) $P(\geq)$ = 1 – P(0) = 1 – 0,8717 = 0,1283 = 12,83 %;

г) $P(>2)=P(3)+P(4);$

$$P(3)=\frac{C_4^3 \cdot C_{116}^1}{C_{120}^4}=0,00005649;$$

$$P(>2)=0,00000012+0,00005649=0,00005661=0,005661\ \%.$$

Ответ: а) 87,17 %; б) 0,000012 %; в) 12,83 %;
г) 0,00005649 %.

Задача 3

В группе студентов 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов более пяти отличников.

Дано:
$N = 14;$
$M = 8;$
$n = 9;$
$m > 5$

$P(m) = ?$

Решение:

$$P(>5)=P(6)+P(7)+P(8);$$

$$P(6)=\frac{C_9^6 \cdot C_5^2}{C_{14}^8}=0,2797=27,97\ \%;$$

$$P(7)=\frac{C_9^7 \cdot C_5^1}{C_{14}^8}=0,0599=5,99\ \%;$$

$$P(8)=\frac{C_9^8 \cdot C_5^0}{C_{14}^8}=0,0030=0,30\ \%;;$$

$$P(>5)=27,97\ \%+5,99\ \%+0,30\ \%=34,26\ \%.$$

Ответ: 34,26 %.

Задача 4

В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены три изделия. Найти вероятность того, что среди извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное; б) два окрашенных; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Дано:
$N = 120$;
$M = 10$;
$n = 4$;
а) $m = 1$;
б) $m = 2$;
в) $m > 1$

$P(m) = ?$

Решение:

а) $P(1) = \dfrac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_5^3} = 0,3000 = 30,00\ \%$;

б) $P(2) = \dfrac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} = 0,6000 = 60,00\ \%$;

в) $P(\geq 1) = P(1) + P(2) + P(3)$;

$P(3) = \dfrac{C_3^3 \cdot C_2^0}{C_5^3} = 0,1000 = 10,00\ \%$;

$P(\geq 1) = 30,00\ \% + 60,00\ \% + 10,00\ \% = 100,00\ \%$.

Ответ: а) 30,0 %; б) 60,0 %; в) 100 %.

Задача 5

Наудачу взяты два положительных числа *x и y,* каждое из которых не превышает четырех. Найти вероятность того, что произведение *xy* будет больше четырех, а частное *y/x* не больше единицы.

Дано:
$x \in [0; 4]$;
$y \in [0; 4]$;
$xy > 4$;
$\dfrac{x}{y} \leq 1$

$P(A) = ?$

Построим фигуру, ограниченную линиями $x = 0$; $x = 4$; $y = 0$; $y = 4$. Это квадрат, в который попадают все возможные значения пары x и y. Его площадь $S = 16$ ед^2. Построим фигуру $y = \dfrac{4}{x}$ и $y = x$. Заштрихованная фигура – это все возможные пары x и y, удовлетворяющие заданным условиям (рис. 7).

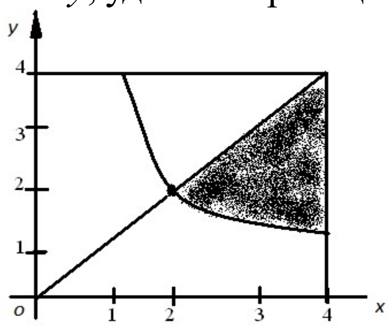


Рис. 7

Площадь фигуры

$$S_ф = \int_2^4 (x - \frac{4}{x})\, dx = (\frac{x^2}{2} - 4\ln x)\, \Big[_2^4 = (\frac{4^2}{2} - 4\ln 4) - (\frac{2^2}{2} - 4\ln 2) = 3,2274 \text{ ед}^2.$$

Искомую вероятность вычислим исходя из геометрического смысла вероятности события A:

$$P(A) = \frac{S_ф}{S} = \frac{3,2274}{16} = 0,2017 = 20,17\ \%.$$

Ответ: 20,17 %.

Задача 6

Наудачу взяты два положительных числа *x и y,* каждое из которых не превышает трех. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает трех, а произведение xy не меньше двух.

Дано:	Решение:
$x \in [0; 3]$; $y \in [0; 3]$; $x+y \le 3$; $xy \ge 2$	Построим фигуру, ограниченную линиями $x = 0$; $x = 3$; $y = 0$; $y = 3$. Это квадрат, в который попадают все возможные значения пары x и y (рис. 8). Его площадь $S = 9$ ед^2.
$P(A) = ?$	

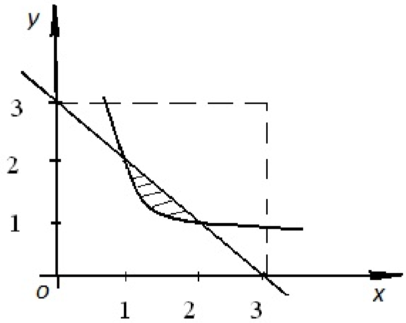


Рис. 8

Построим фигуру, ограниченную линиями $y = \frac{2}{x}$ и $y = 3 - x$. Заштрихованная фигура – это все значения пары x и y, удовлетворяющие заданным условиям. Площадь этой фигуры

$$S_{\text{ф}} = \int_1^2 (3 - x - \frac{2}{x})\, dx = (3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln x)\Big|_2^1 = (3\cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2\ln 2) - (3\cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 2\text{n}1) = 0{,}1137.$$

Неполную вероятность вычислим исходя из геометрического смысла вероятности события A

$$P(A) = \frac{S_{\text{ф}}}{S} = \frac{0{,}1137}{9} = 0{,}0126 = 1{,}26\ \%.$$

Ответ: 1,26 %.

Задача 7

Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,97 для первого и 0,92 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Дано:	Решение:
$P(A_1)=0{,}97$; $P(A_2)=0{,}92$	$P(\overline{A}_1)$ – вероятность того, что первый сигнализатор не сработает. $P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=0{,}03.$ $P(\overline{A}_2)$ – вероятность того, что второй сигнализатор не сработает. $P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=0{,}08.$
$P(1)=?$	

Вероятность, что из двух сработает только один сигнализатор, вычисляется по формуле

$$P(1)=P(A_1)P(\overline{A}_1)+P(A_2)P(\overline{A}_2)=0{,}97\cdot 0{,}08+0{,}03\cdot 0{,}92=0{,}1052=10{,}52\ \%.$$

Ответ: 10,52 %.

Задача 8

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,72, а для второго – 0,74. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает хотя бы один из стрелков.

Дано:	Решение:
$P(A_1)=0{,}72$; $P(A_2)=0{,}74$	$P(\geq 1)=P(1)+P(2)$; $P(1)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2),$ где $P(\overline{A}_1)=0{,}28$ – вероятность промаха первого стрелка; $P(\overline{A}_2)=0{,}26$ – вероятность промаха второго стрелка; $P(1)=0{,}72\cdot 0{,}26+0{,}28\cdot 0{,}74=0{,}3944$; $P(2)=0{,}72\cdot 0{,}74=0{,}5328.$ $P(\geq 1)=0{,}3944+0{,}5328=0{,}9272=92{,}72\ \%.$ Ответ: 92,72 %.
$P(\geq 1)=?$	

Задача 9

Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,23. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,85.

Дано:	Решение:
$P(1)=0{,}23$;	$P(1)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)$,
$P(A_2)=0{,}85$	где $P(1)=0{,}23$; $P(A_1)=x$; $P(A_2)=0{,}85$; $P(\overline{A}_2)=0{,}15$;
$P(A_1)=?$	$P(\overline{A}_1)=1-x$; $0{,}23=x\cdot 0{,}15+(1-x)\,0{,}85$;
	$0{,}23=0{,}15x+0{,}85-0{,}85\,x$;
	$0{,}70\,x=0{,}62$;
	$x=0{,}8856=88{,}57$ %.
	Ответ: 88,57 %.

Задача 10

Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,862. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

Дано:	Решение:
$n=3$;	Воспользуемся формулой Бернулли
$m=2$;	$P(m)=C_n^m\cdot p^m(1-p)^{n-m}$;
$p=0{,}862$	$P(2)=C_3^2\cdot 0{,}862^2(1-0{,}862)^1=0{,}3076=30{,}76$ %.
$P(2)=?$	Ответ: 30,76 %.

Задача 11

Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящиках, соответственно равны 0,62; 0,72; 0,82; 0,92. Найти вероятность того, что деталь содержится: не более чем в трех ящиках; не менее чем в двух ящиках.

Дано:	Решение:
$P(A_1)=0{,}62$;	$P(2\le x\le 3)=P(2)+P(3)$;
$P(A_2)=0{,}72$;	$P(3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)+$
$P(A_3)=0{,}82$;	$+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$,
$P(A_4)=0{,}92$	где $P(\overline{A}_1)=0{,}38$; $P(\overline{A}_2)=0{,}28$; $P(\overline{A}_3)=0{,}18$; $P(\overline{A}_4)=0{,}08$.
$P(2\le x\le 3)=?$	$P(3)=0{,}62\cdot 0{,}72\cdot 0{,}82\cdot 0{,}08+0{,}62\cdot 0{,}72\cdot 0{,}18\cdot 0{,}92+$
	$+0{,}62\cdot 0{,}28\cdot 0{,}82\cdot 0{,}92+0{,}38\cdot 0{,}72\cdot 0{,}82\cdot 0{,}92=0{,}3374$;
	$P(2)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)+$
	$+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)+$
	$+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4)=$

$= 0{,}62 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}08 + 0{,}62 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}08 +$
$+ 0{,}62 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}92 + 0{,}38 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}92 +$
$+ 0{,}38 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}08 + 0{,}38 \cdot 0{,}28 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}92 = 0{,}1901;$

$P(2 \le x \le 3) = 0{,}3374 + 0{,}1901 = 0{,}5275.$

Ответ: 52,75 %.

Задача 12

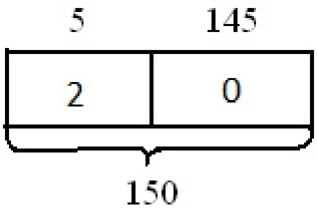
Среди 150 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Дано:
$N = 150;$
$M = 5;$
$n = 2;$
$m = 2$

$P(2) = ?$

Решение:

$$P(m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^m}.$$



$$P(2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{145}^0}{C_{150}^2} = 0{,}0009 = 0{,}09\ \%.$$

Ответ: 0,09 %.

Задача 13

В ящике 30 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна деталь окажется окрашенной.

Дано:
$N = 30;$
$M = 6;$
$n = 4$

$P(\ge 1) = ?$

Решение:

$$P(\ge 1) = 1 - P(0);$$

$$P(0) = \frac{C_6^0 \cdot C_{24}^4}{C_{30}^4} = 0{,}3877;$$

$$P(\ge 1) = 1 - 0{,}3877 = 0{,}6123 = 61{,}23\ \%.$$

Ответ: 61,23 %.

Задача 14

Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Дано:

$P(A_1) = 0{,}05$;

$P(A_2) = 0{,}08$

$P(\geq 1) = ?$

Решение:

$P(\geq 1) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)$,

где $P(\overline{A}_1)$ – вероятность, что первый элемент не откажет;

$P(\overline{A}_2)$ – вероятность, что второй элемент не откажет.

$P(\overline{A}_1) = 0{,}95$; $P(\overline{A}_2) = 0{,}92$;

$P(\geq 1) = 1 - 0{,}95 \cdot 0{,}92 = 0{,}1260 = 12{,}60$ %.

Ответ: 12,6 %.

Задача 15

Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,8956. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Дано:

$P(A_1) = P(A_2) =$

$= P(A_3) = P(A_4) = p$;

$P(\geq 1) = 0{,}8956$

$p = ?$

Решение:

$P(\geq 1) = 1 - (1 - p)^4$;

$(1 - p)^4 = 1 - P(\geq 1)$;

$p = 1 - \sqrt[4]{1 - p(\geq 1)}$;

$p = 1 - \sqrt[4]{1 - 0{,}8956} = 0{,}4316$.

Ответ: 43,16 %.

Задача 16

В первой урне 12 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Дано:

$P(H_1) = \frac{1}{2}$;

$P(H_2) = \frac{1}{2}$;

$P(A/H_1) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$;

$P(A/H_2) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

$P(A) = ?$

Решение:

Воспользуемся формулой полной вероятности

$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)$;

$$P(A) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = 0{,}4333 = 43{,}33\ \%.$$

Ответ: 43,33 %.

Задача 17

Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,75, для второго – 0,82, для третьего – 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

Дано:

$P(A_1) = 0{,}75$;

$P(A_2) = 0{,}82$;

$P(A_3) = 0{,}90$

а) $P(3) = ?$

б) $P(2) = ?$

в) $P(1) = ?$

г) $P(0) = ?$

д) $P(\geq 1) = ?$

Решение:

а) $P(3) = \overline{P}(A_1)P(A_2)P(A_3)$;

$P(3) = 0{,}75 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}90 = 0{,}5535 = 55{,}35\,\%$;

б) $P(2) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) +$

$+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)$;

$P(2) = 0{,}75 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}10 + 0{,}75 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}90 +$

$+0{,}25 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}90 = 0{,}3675 = 36{,}75\,\%$;

в) $P(2) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) +$

$+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)$;

$P(2) = 0{,}75 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}10 + 0{,}25 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}10 +$

$+0{,}25 \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}90 = 0{,}0745 = 7{,}45\,\%$;

г) $P(0) = 100\,\% - 99{,}55\,\% = 0{,}45\,\%$;

д) $P(\geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) =$

$= 7{,}45\% + 36{,}75\% + 55{,}35 = 99{,}55\,\%$.

Ответ: а) 55,35 %; б) 36,75%; в) 7,45%; г) 0,45 %; д) 99,55 %.

Задача 18

В партии 21 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Дано:

$p = 21\,\% = 0{,}21$;

$q = 0{,}79$;

$n = 4$;

$m = x$

$P(m) = ?$

Решение:

Воспользуемся формулами биноминального распределения:

$$P(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m};$$

$$P(0) = C_4^0 \cdot 0{,}21^0 \cdot 0{,}79^4 = 0{,}3895;$$

$$P(1) = C_4^1 \cdot 0{,}21^1 \cdot 0{,}79^4 = 0{,}4142;$$

$$P(2) = C_4^2 \cdot 0,21^2 \cdot 0,79^4 = 0,1651;$$
$$P(3) = C_4^3 \cdot 0,21^3 \cdot 0,79^1 = 0,0293;$$
$$P(0) = C_4^4 \cdot 0,21^4 \cdot 0,79^0 = 0,0019.$$

Запишем закон биноминального распределения в виде таблицы.

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	0,3895	0,4142	0,1657	0,0293	0,0019	0

Построим многоугольник распределения вероятностей (рис. 9).

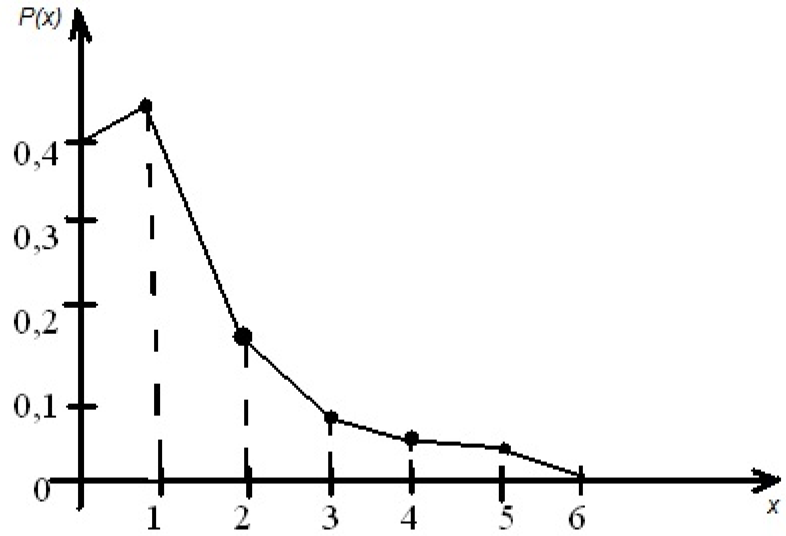


Рис. 9

Задача 19

В партии из 12 деталей имеются 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Дано:
$N = 12$;
$M = 8$;
$n = 2$
$P(m) = ?$

Решение:

Воспользуемся формулами гипергеометрического распределения:

$$P(m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^m};$$

$$P(0) = \frac{C_8^0 \cdot C_4^2}{C_{12}^2} = 0,0910;$$

$$P(1) = \frac{C_8^1 \cdot C_4^1}{C_{12}^2} = 0,4848;$$

$$P(2) = \frac{C_8^2 \cdot C_4^0}{C_{12}^2} = 0,4242.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы.

m	0	1	2	3
P(m)	0,0910	0,4848	0,4242	0

Задача 20

Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,04. Найти вероятность того, что среди 300 деталей окажется ровно четыре бракованных.

Дано:
$p = 0,04$;
$q = 0,96$;
$n = 300$;
$m = 4$
$P(m) = ?$

Решение:

Воспользуемся формулой Бернулли

$$P(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m};$$

$$P(m) = C_{300}^4 \cdot 0,04^4 \cdot 0,96^{296} = 0,0048 = 0,48\%.$$

Ответ: 0,48 %.

Задача 21

Из колоды в 36 карт наугад берут 10 карт. Какова вероятность того, что больше половины взятых карт не бубновой масти?

Дано:
$N = 36$;
$M = 27$;
$n = 10$;
$m > 5$
$P(>5) = ?$

Решение:

$$P(>5) = n(6) + n(7) + n(8) + n(9) + n(10);$$

$$P(6) = \frac{C_{27}^6 \cdot C_9^4}{C_{36}^{10}} = 0,1467;$$

$$P(7) = \frac{C_{27}^7 \cdot C_9^3}{C_{36}^{10}} = 0,2935;$$

$$P(8) = \frac{C_{27}^8 \cdot C_9^2}{C_{36}^{10}} = 0,3144;$$

$$P(9) = \frac{C_{27}^9 \cdot C_9^1}{C_{36}^{10}} = 0,1659;$$

$$P(6)=\frac{C_{27}^{10}\cdot C_{9}^{0}}{C_{36}^{10}}=0,0332;$$

$P(>5) = 0,9537 = 95,37$ %.

Ответ: 95,37 %.

Задача 22

В приборе 4 элемента. Вероятность поломки первого элемента – 0,10; второго – 0,05; третьего – 0,20; четвертого – 0,15. Какова вероятность, что в приборе сломается 1 элемент?

Дано:

$P(A_1)=0,10$;

$P(A_2)=0,05$;

$P(A_3)=0,20$;

$P(A_3)=0,15$

$P(1)=?$

Решение:

$$P(1)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)+$$
$$+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4),$$

где $P(\overline{A}_1)=0,90$ – вероятность, что первый элемент не сломается;

$P(\overline{A}_2)=0,95$ – вероятность, что второй элемент не сломается;

$P(\overline{A}_3)=0,80$ – вероятность, что третий элемент не сломается;

$P(\overline{A}_4)=0,85$ – вероятность, что четвертый элемент не сломается;

$P(1) = 0,10\cdot0,95\cdot0,80\cdot0,85 + 0,90\cdot0,05\cdot0,80\cdot0,85 +$
$+ 0,90\cdot0,95\cdot0,20\cdot0,85 + 0,90\cdot0,95\cdot,80\cdot0,15 = 0,3432 =$
$= 34,32$ %.

Ответ: 34,32 %.

Задача 23

Студент выучил из 60 экзаменационных вопросов 40. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает хотя бы один вопрос.

Дано:

$N = 60$;

$M = 40$;

$n = 4$;

$m \geq 1$

$P(\geq 1)=?$

Решение:

$$P(\geq 1)=1-P(0);$$

$$P(0)=\frac{C_{40}^{0}\cdot C_{20}^{4}}{C_{60}^{4}}=0,0099;$$

$$P(\geq 1)=1-0,0099=9901=99,01\ \%.$$

Ответ: 99,01 %.

Задача 24

При приемке партии проверяют 25 % изделий. Условие приемки – наличие брака не выше 4 %. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 6 % брака, будет принята.

Дано:
$N = 100$;
$M = 25$;
4 % – норма;
6 % – факт

$P(A) = ?$

Решение:

1. Вычислим максимальное количество бракованных изделий в проверяемой части партии

4 % от 25 = 0,04·25 = 1.

Если в проверяемой части бракованных изделий 0 или 1, то партия принимается.

2. Вычислим фактическое количество бракованных изделий во всей партии.

6 % от 100 = 0,06·100 = 6.

В партии 6 бракованных изделий, партия принимается при следующем распределении брака:

$$P(0) = \frac{C_{25}^{0} \cdot C_{75}^{6}}{C_{100}^{6}} = 0,1689;$$

$$P(1) = \frac{C_{25}^{1} \cdot C_{75}^{5}}{C_{100}^{6}} = 0,3620;$$

$P(\le 1) = P(0) + P(1)$ – условие принятия партии;

$P(\le 1) = 0,1689 + 0,3620 = 0,5309 = 53,09$ %.

Ответ: 53,09 %.

Задача 25

В группе 10 студентов, пришедших на экзамен. Из них: 3 отличника, 4 хорошиста, 2 троечника, 1 двоечник. В экзаменационных билетах 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент – отличник.

Дано:
$P(H_1) = 0,3$;
$P(H_2) = 0,4$;
$P(H_3) = 0,2$;
$P(H_4) = 0,1$

Решение:

Воспользуемся теоремой Бейеса

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1):[P(H_2)P(A/H_1) + P(H_2)\times$$
$$\times P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A/H_4)],$$

где $P(A/H_1)$ – вероятность, что отличник ответит на

$P(H / A_1) = ?$	все три вопроса билета; $P(A/H_2)$ – вероятность, что хорошист ответит на все три вопроса билета; $P(A/H_3)$ – вероятность, что троечник ответит на все три вопроса билета; $P(A/H_4)$ – вероятность, что двоечник ответит на все три вопроса билета; $P(A/H_1)=1$; $P(A / H_2) = \frac{C_{16}^3 \cdot C_4^0}{C_{20}^3} = 0{,}4912$; $P(A / H_3) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{10}^0}{C_{20}^3} = 0{,}1053$; $P(A / H_4) = \frac{C_5^3 \cdot C_{15}^0}{C_{20}^3} = 0{,}0088$; $P(H / A_1) = \frac{1 \cdot 0{,}3}{(1 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}4912 + 0{,}2 \cdot 0{,}1053 + 0{,}1 \cdot 0{,}0088)} =$ $= 0{,}5787 = 57{,}87$ %. Ответ: 57,87 %.

Вариант № 1

Задача 1

В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 2

В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

Задача 3

В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

Задача 4

В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное; б) два окрашенных; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Задача 5

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

Задача 6

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

Задача 7

Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Задача 8

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Задача 9

Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

Задача 10

Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

Задача 11

Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящиках, соответственно равны

0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

Задача 12

Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных окажутся выигрышными.

Задача 13

В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 14

Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Задача 15

Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Задача 16

В первой урне 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Задача 17

Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,8, для второго – 0,85, для третьего – 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

Задача 18

В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных – и построить многоугольник полученного распределения.

Задача 19

В партии из 10 деталей имеются 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задача 20

Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажутся ровно четыре бракованных.

Задача 21

Из колоды в 36 карт наугад берут 4 карты. Какова вероятность того, что все вынутые карты будут одной масти?

Задача 22

Юноша, поступающий в вуз, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания – 0,9; 2-го – 0,95; 3-го – 0,8; 4-го – 0,85. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет не менее двух испытаний?

Задача 23

Студент выучил из 60 экзаменационных вопросов 40. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает больше половины вопросов.

Задача 24

При приемке партии проверяют 75 % изделий. Условие приемки – наличие брака не выше 4 %. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 6 % брака, будет принята.

Задача 25

В группе 10 студентов, пришедших на экзамен. Из них: 3 отличника, 4 хорошиста, 2 троечника, 1 двоечник. В экзаменационных билетах 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент – отличник.

Вариант № 2

Задача 1

В ящике имеется 25 деталей, среди которых 13 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 2

В ящике 130 деталей, из них 25 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

Задача 3

В группе 14 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 6 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

Задача 4

В коробке восемь одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное; б) два окрашенных; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Задача 5

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает пяти. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

Задача 6

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает трех, а произведение xy не меньше 0,09.

Задача 7

Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,75 для первого и 0,7 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Задача 8

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,75, а для второго – 0,6. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Задача 9

Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,46. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,65.

Задача 10

Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,9. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

Задача 11

Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящиках, соответственно равны 0,65; 0,75; 0,85; 0,95. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

Задача 12

Среди 300 лотерейных билетов есть 12 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

Задача 13

В ящике 14 деталей, среди которых 5 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 2 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 14

Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,02 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Задача 15

Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9584. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Задача 16

В первой урне 12 шаров, из них 4 белых; во второй урне 20 шаров, из них 3 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Задача 17

Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,7, для второго – 0,85, для третьего – 0,93. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

Задача 18

В партии 30 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных – и построить многоугольник полученного распределения.

Задача 19

В партии из 17 деталей имеются 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задача 20

Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,03. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

Задача 21

Из двух колод в 36 карт наугад берем по карте. Какова вероятность того, что при этом вынем хотя бы одного туза?

Задача 22

Юноша, поступающий в вуз, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания – 0,95; 2-го – 0,9; 3-го – 0,85; 4-го – 0,7. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет не более одного испытания?

Задача 23

Студент выучил из 80 экзаменационных вопросов 50. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не меньше 2 вопросов.

Задача 24

При приемке партии подвергается проверке половина изделий. Условие приемки – наличие брака не выше 2,5 %. Вычислить вероятность того, что партия из 200 изделий, содержащая 5 % брака, будет принята.

Задача 25

В группе 15 студентов, пришедших на экзамен. Из них: 4 отличника, 6 хорошистов, 2 троечника, 3 двоечника. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответит на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент – двоечник.

Вариант № 3

Задача 1

В ящике имеется 19 деталей, среди которых 11 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 2

В ящике 140 деталей, из них 24 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

Задача 3

В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 5 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

Задача 4

В коробке пять одинаковых изделий, причем два из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное; б) два окрашенных; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Задача 5

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает четырех. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

Задача 6

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,25.

Задача 7

Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,86 для первого и 0,93 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Задача 8

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,95, а для второго – 0,84. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Задача 9

Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,48. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,9.

Задача 10

Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,96. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

Задача 11

Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящиках, соответственно равны 0,4; 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

Задача 12

Среди 150 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 4 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Задача 13

В ящике 55 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 14

Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,15 и 0,18. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Задача 15

Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,8984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Задача 16

В первой урне 12 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 2 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Задача 17

Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,84, для второго – 0,87, для третьего – 0,92. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

Задача 18

В партии 20 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных – и построить многоугольник полученного распределения.

Задача 19

В партии из 10 деталей имеются 6 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задача 20

Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,06. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

Задача 21

Из колоды в 36 карт наугад берут 4 карты. Какова вероятность того, что все вынутые карты будут разной масти?

Задача 22

Юноша, поступающий в вуз, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания – 0,9; 2-го – 0,95; 3-го – 0,8; 4-го – 0,85. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет 2 испытания?

Задача 23

Студент выучил из 80 экзаменационных вопросов 60. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не больше 2 вопросов.

Задача 24

При приемке партии проверяют 25 % изделий. Условие приемки – наличие брака не выше 4 %. Вычислить вероятность того, что партия из 200 изделий, содержащая 8 % брака, будет принята.

Задача 25

В группе 20 студентов, пришедших на экзамен. Из них: 8 отличников, 6 хорошистов, 4 троечника, 2 двоечника. В экзаменационных билетах 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент – отличник.

Вариант № 4

Задача 1

В ящике имеется 45 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 2

В ящике 110 деталей, из них 7 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

Задача 3

В группе 16 студентов, среди которых 5 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

Задача 4

В коробке семь одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Задача 5

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

Задача 6

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

Задача 7

Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,75 для первого и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Задача 8

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,72, а для второго 0,87. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Задача 9

Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,68. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,87.

Задача 10

Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,6. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два – высшего сорта.

Задача 11

Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящиках, соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

Задача 12

Среди 200 лотерейных билетов есть 15 выигрышных. Найти вероятность того, что 3 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Задача 13

В ящике 20 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 14

Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,06 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Задача 15

Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9796. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Задача 16

В первой урне 12 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 2 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Задача 17

Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,7, для второго – 0,95, для третьего – 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

Задача 18

В партии 20 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных – и построить многоугольник полученного распределения.

Задача 19

В партии из 15 деталей имеются 6 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задача 20

Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,03. Найти вероятность того, что среди 150 деталей окажется ровно четыре бракованных.

Задача 21

Из колоды в 36 карт наугад берут 8 карт. Какова вероятность того, что 4 вынутые карты будут бубновой масти?

Задача 22

Юноша, поступающий в вуз, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания – 0,8; 2-го – 0,7; 3-го – 0,6; 4-го – 0,5. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет не менее 3 испытаний?

Задача 23

Студент выучил из 60 экзаменационных вопросов 50. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не менее 3 вопросов.

Задача 24

При приемке партии проверяют 25 % изделий. Условие приемки – наличие брака не выше 5 %. Вычислить вероятность того, что партия из 80 изделий, содержащая 10 % брака, будет принята.

Задача 25

В группе 10 студентов, пришедших на экзамен. Из них: 2 отличника, 3 хорошиста, 4 троечника, 1 двоечник. В экзаменационных билетах 30 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 30 вопросов, хорошо подготовленный – на 25, посредственно – на 15, плохо – на 10. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент – двоечник.

Вариант № 5

Задача 1

В ящике имеется 18 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 2

В ящике 200 деталей, из них 13 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

Задача 3

В группе 16 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

Задача 4

В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное; б) два окрашенных; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Задача 5

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

Задача 6

Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает трех. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает трех, а произведение xy не меньше 0,085.

Задача 7

Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,93 для первого и 0,88 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Задача 8

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,93. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Задача 9

Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,54. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым орудием, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,73.

Задача 10

Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,6. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два – высшего сорта.

Задача 11

Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящиках, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

Задача 12

Среди 140 лотерейных билетов есть 6 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Задача 13

В ящике 15 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

Задача 14

Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Задача 15

Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9388. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Задача 16

В первой урне 10 шаров, из них 5 белых; во второй урне 25 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Задача 17

Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,77, для второго – 0,82, для третьего – 0,93. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

Задача 18

В партии 15 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных – и построить многоугольник полученного распределения.

Задача 19

В партии из 13 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Задача 20

Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,03. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

Задача 21

Из колоды в 36 карт наугад берут 6 карт. Найти вероятность того, что 5 вынутых карт будут пиковой масти.

Задача 22

Юноша, поступающий в вуз, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания – 0,9; 2-го – 0,8; 3-го – 0,7; 4-го – 0,6. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет не менее 3 испытаний?

Задача 23

Студент выучил из 80 экзаменационных вопросов 55. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не менее 1 вопроса.

Задача 24

При приемке партии проверяют 40 % изделий. Условие приемки – наличие брака не выше 2,5 %. Вычислить вероятность того, что партия из 200 изделий, содержащая 6 % брака, будет принята.

Задача 25

В группе 10 студентов, пришедших на экзамен. Из них: 5 отличников, 2 хорошиста, 2 троечника, 1 двоечник. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент – отличник.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика для экономического бакалавриата / Н. Ш. Кремер [и др.] – М. : Юрайт, 2012. – 909 с. – ISBN 978-5-9916-1523-6.
2. Высшая математика для экономических специальностей / Н. Ш. Кремер [и др.]. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 476 с. – ISBN 5-238-01122-9.
3. *Колямаев, В. А.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колямаев, В. Н. Калинина. – М. : КНОРУС, 2009. – 384 с. – ISBN 978-5-390-00204-9.

4. *Гмурман, В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. образование, 2006. – 404 с. – ISBN 5-9692-0032-8.
5. *Барашков, А. С.* Математика / А. С. Барашков. – М. : Слово, 2011. – 480 с. – ISBN 978-5-8123-0737-0.
6. Мир математических уравнений [Электронный ресурс]. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm (дата обращения: 14.10.2015).

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика для экономистов [Электронный ресурс] : учеб. для студентов вузов, обучающихся по эконом. специальностям / Н. Ш. Кремер [и др.]. − Электрон. текстовые данные. − М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2015. − 481 с. − URL: http://www.iprbookshop.ru/52071 (дата обращения: 31.10.2016).

2. Высшая математика для экономистов : учеб. для вузов по эконом. специальностям / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. − 3-е изд., стер. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2008. − 479 с. − (Золотой фонд российских учебников). − ISBN 978-5-238-00991-9.

3. Веретенников, В. Н. Высшая математика. Математический анализ функций одной переменной [Электронный ресурс] / В. Н. Веретенников. − Электрон. текстовые данные. − СПб. : Рос. гос. гидрометеорол. ун-т, 2013. − 254 с. − URL: http://www.iprbookshop.ru/17901.html (дата обращения: 31.10.2016).

4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. − 11-е изд., перераб. − М. : Высш. образование, 2008. − 404 с. − (Основы наук). − ISBN 978-5-9692-0194-1.

5. *Он же.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. −12-е изд., перераб. – М. : Высш. образование, 2008. − 479 с. − (Основы наук). − ISBN 978-5-9692-0192-7.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КОШКИН Виктор Леонидович

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ ПО МАТЕМАТИКЕ

Редактор А. П. Володина
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева
Корректор Е. С. Глазкова
Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой

Подписано в печать 24.11.16.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 4,65. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.