Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

И. Ф. КУРБЫКО, С. В. ЛЕВИЗОВ

МАТЕМАТИКА

I семестр

Практикум для студентов-заочников

Владимир 2003

ББК 22.1
УДК 51 (07)
К93

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
Владимирского государственного педагогического университета
В.В. Жиков;
Доктор физико-математических наук, профессор
Владимирского государственного университета
В.И. Данченко

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Курбыко И.Ф., Левизов С.В.

К93 Математика: I семестр: Практикум для студентов-заочников / Владим. гос. ун-т. Владимир, 2003. 56с.

ISBN 5–89368–394–3

Составлен в соответствии с новой программой курса высшей математики для технических специальностей вузов. Охватывает разделы: линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в анализ. Рассмотрены основные приемы решения типовых задач, предлагающихся учащимся в I семестре.

Предназначен в первую очередь для студентов заочной формы обучения. Может быть полезен для лиц, занимающихся самообразованием.

Ил. 19. Библиогр.: 5 назв.

ББК 22.1
УДК 51 (07)

ISBN 5–89368–394–3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие отражает опыт работы кафедры высшей математики ВлГУ со студентами заочной формы обучения. Предлагаемая система выполнения семестровых контрольных работ (с последующей их защитой во время сессии) успешно используется начиная с 1995-96 учебного года. В течение семестра студенты выполняют три контрольных работы. Защита проводится в форме собеседования.

Материал пособия соответствует программе 1-го семестра по курсу высшей математики для студентов инженерно-технических специальностей. В брошюру включены типовые задачи и методы их решения.

Обозначения и терминология, используемые в пособии (равно как и сами излагаемые методы), являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Отметим, однако, что пособие ни в коей мере не призвано заменить более подробные (или общие) курсы высшей математики, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с ним предполагает предварительное и параллельное изучение соответствующих разделов курса математики по вышеуказанным книгам.

В рассмотренных примерах сделана попытка охватить как можно более широкий круг вопросов, связанных с темой каждой задачи. Подробные объяснения к решениям направлены на формирование у обучающегося научного стиля изложения, умения выразить свою мысль. Авторы также сочли целесообразным акцентировать особое внимание на проверке получаемых при решении результатов (в некоторых случаях - даже используя приближенные вычисления) и их соответствии тщательно сделанным рисункам.

В заключение заметим, что пособие может быть использовано при подготовке типовых расчетов студентами очной формы обучения.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1.
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Задача № 1

Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить двумя способами:

1) методом Крамера;
2) средствами матричного исчисления.

Сделать проверку.

Решение

При исследовании системы на совместность воспользуемся теоремой Кромекера-Каппели: линейная система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. В нашем случае матрица левой части системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для определения ее ранга преобразуем ее, получая эквивалентные матрицы (с помощью комбинирования и перестановок строк, стремясь получить диагональную матрицу с нулями под главной диагональю):

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -31 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

Отсюда ясно, что единственный минор 3-го порядка, который имеет эта матрица, отличен от нуля. Следовательно, ее ранг равен трем.

Применяя аналогичные преобразования к расширенной матрице системы (с учетом столбца правой части), получим:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 3 & 15 \\ 5 & -3 & 2 & 15 \\ 10 & -11 & 5 & 36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 2 & 15 \\ 10 & -11 & 5 & 36 \\ 7 & 2 & 3 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 2 & 15 \\ 0 & -5 & 1 & 6 \\ 0 & -31 & -1 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 2 & 15 \\ 0 & -5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 36 & 36 \end{array}\right).$$

Здесь также понятно, что в качестве базисного минора можно взять тот же, что и в предыдущем случае:

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.е. и здесь ранг оказывается равным трем. Таким образом, $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|B) = 3$. Следовательно, система совместна (и имеет единственное решение).

Теперь решаем систему согласно правилу Крамера. Вычисляем главный и вспомогательные определители системы способом Саррюса:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{vmatrix} = 7\cdot(-3)\cdot 5 + 3\cdot 5\cdot(-11) + 2\cdot 2\cdot 10 - 3\cdot(-3)\cdot 10 - 7\cdot 2\cdot(-11) - 5\cdot 5\cdot 2$$

$= -36$. Аналогично

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{vmatrix} = -72\ ;\ \Delta_Y = \begin{vmatrix} 7 & 15 & 3 \\ 5 & 15 & 2 \\ 10 & 36 & 5 \end{vmatrix} = -36\ ;\ \Delta_Z = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 15 \\ 5 & -3 & 15 \\ 10 & -11 & 36 \end{vmatrix} = -36.$$

Отсюда находим: $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = 2,\ \ \mathrm{y} = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = -1,\ \mathrm{z} = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = 1$.

При решении системы средствами матричного исчисления обозначим через X матрицу-столбец неизвестных x, y, z.

Тогда левую часть системы можно записать в виде произведения:

$$\begin{pmatrix} 7x + 2y + 3z \\ 5x - 3y + 2z \\ 10x - 11y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\cdot X,$$

а всю систему – в виде $A\cdot X = B$, где $B = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 36 \end{pmatrix}$ - столбец правой части. Поскольку $\Delta = |A| \neq 0$ (см. выше), то матрица A имеет обратную A^{-1}. Умножив на нее обе части равенства $A\cdot X = B$, получим: $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, но $A^{-1}\cdot A = E$ (единичная матрица), а $E\cdot X = X$, поэтому $X = A^{-1}\cdot B$ – матричная форма записи решения данной системы.

Чтобы воспользоваться ею, найдем явный вид обратной матрицы A^{-1}: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^{\vee}$, где $A^{\vee}$ – присоединенная матрица, определяемая по формуле $A^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы коэффициентов A. Вычислим их:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -11 & 5 \end{vmatrix} = 7 \ ; \ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = -5 \ ; \ A_{13} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -11 \end{vmatrix} = -25 \ ;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -11 & 5 \end{vmatrix} = -43 \ ; \ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 5 \ ; \ A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 10 & -11 \end{vmatrix} = 97 \ ;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 13 \ ; \ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 15 & 2 \end{vmatrix} = 1 \ ; \ A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -31 \ .$$

Теперь построим $A^{\vee} = \begin{pmatrix} 7 & -43 & 13 \\ -5 & 5 & 1 \\ -25 & 97 & -31 \end{pmatrix}$.

Далее, поскольку $|A| = -36$, то по формуле $X = A^{-1} \cdot B$ получаем:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 7 & -43 & 13 \\ -5 & 5 & 1 \\ -25 & 97 & -31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 105 - 645 + 468 \\ -75 + 75 + 36 \\ -375 + 1455 - 1116 \end{pmatrix} = -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -72 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$.

Проверка:
$$\begin{cases} 7 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 15 \\ 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 15 \\ 10 \cdot 2 - 11 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = 36. \end{cases}$$

Подстановка найденных значений неизвестных x, y, z в исходные уравнения системы подтверждает их истинность.

Ответ: $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$.

Задача № 2

Найти общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3t = 2, \\ 4x + z - 7t = 3, \\ 2y - 3z + t = 1, \\ 2x + 3y - 4z - 2t = 3. \end{cases}$$

Сделать проверку и записать ответ в векторной форме, указав размерность пространства решений.

<u>Решение</u>

Будем действовать по методу Гаусса, последовательно исключая неизвестные с помощью равносильных (элементарных) преобразований уравнений системы. Для упрощения записи будем работать с расширенной матрицей коэффициентов системы:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Выбрав в качестве ведущей первую строку, умножим ее поочередно на (-2) и (-1) и сложим соответственно со 2-й и 4-й строками. Получим эквивалентную матрицу:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь сложим поочередно 2-ю строку с 3-й и 4-й, преследуя цель получить нули во 2-м столбце (под главной диагональю матрицы левой части системы). Получим новую матрицу, также эквивалентную исходной:

$$(A|B)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Это означает, что наша система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3t = 2, \\ 0x - 2y + 3z - t = -1, \\ 0x + 0y + 0z + 0t = 0, \\ 0x + 0y + 0z + 0t = 0. \end{cases}$$

Последние два уравнения можно отбросить (они дублируют друг друга и не несут полезной информации о неизвестных, являясь тождественными). Значит, исходная система сводится к двум уравнениям:

$$\begin{cases} 2x + \ y - \ z \ - \ 3t = 2, \\ \qquad 2y + 3z \ - \ t = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

Отсюда ясно, что ранг системы $r = 2$. Поскольку количество неизвестных у нас $n = 4$, то мы можем выбрать $n - r = 4 - 2 = 2$ неизвестных в качестве свободных переменных (т.е. произвольно изменяющихся). Пусть, например, $z = u$, $t = v$ (u, v – свободные переменные). Решая систему (укороченную по сравнению с исходной!) относительно оставшихся неизвестных x, y (базисных неизвестных), выразим их через u, v и получим $y = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}$; $x = -\frac{1}{4}u + \frac{7}{4}v + \frac{3}{4}$.

Следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}u + \frac{7}{4}v + \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2} \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

где u, v – любые действительные числа.

Сделаем проверку, подставив найденные значения неизвестных во все уравнения исходной системы. Получим верные равенства. Например, для 4-го уравнения:

$$2\left(-\frac{1}{4}u + \frac{7}{4}v + \frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}\right) - 4u - 2v = -\frac{1}{2}u + \frac{7}{2}v + \frac{3}{2} + \frac{9}{2}u - \frac{3}{2}v + \frac{3}{2} - 4u - 2v = 3 \ .$$

Это окончательно подтверждает справедливость полученного решения.

Переходя к векторной форме, запишем ответ в виде:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} -1/4 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 7/4 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Как видим, структура общего решения включает в себя два фундаментальных вектора: $\overline{E_1} = \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{3}{2}; 1; 0\right\}$, $\overline{E_2} = \left\{\frac{7}{4}; -\frac{1}{2}; 0; 1\right\}$, формирующих "многообразие" пространства решений (за счет изменения свободных переменных) и вектор "смещения" $\overline{E_0} = \left\{\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; 0; 0\right\}$, являющийся не связанным со свободными переменными. Размерность пространства решений, создаваемого свободными переменными, равна количеству этих переменных, т.е. в нашем случае: $n - r = 2$.

Задача № 3

Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -1 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку полученных результатов.

Решение

Согласно определению, если число λ и вектор $\overline{X}\left(\overline{X} \neq \bar{0}\right)$ таковы, что $A\left(\overline{X}\right) = \lambda \cdot \overline{X}$, то λ именуется собственным числом, а $\overline{X}$ – собственным вектором линейного преобразования (оператора) A. В трехмерном пространстве вышеприведенное векторное равенство эквивалентно матричному равенству

$$(A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где E – единичная матрица (матрица тождественного преобразования), а числа x_1, x_2, x_3 – координаты вектора $\overline{X}$ (пока не известного). В нашем случае последнее равенство эквивалентно системе уравнений относительно x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} (7-\lambda)x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 + (-1-\lambda)x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + (13-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

причем в силу условия $\overline{X} \neq 0$ нас интересуют только ненулевые решения этой системы. Так как система не однородна, то ненулевые решения могут возникнуть только при условии равенства нулю главного определителя этой системы, т.е. для таких чисел λ, при которых

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -1-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем так называемое характеристическое (или вековое) уравнение для определения λ.

Раскрывая определитель и приводя подобные, получим:

$$(7-\lambda)(-19-\lambda)(13-\lambda)-1440-1440-72(-19-\lambda)+240(7-\lambda)+120(13-\lambda)=$$
$$-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1)=0.$$

Таким образом, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ – собственные числа данного оператора. Найдем теперь собственные векторы, соответствующие этим числам.

1) При $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ система (*) принимает вид:

$$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0, \end{cases}$$

что равносильно (после сокращений и решения по методу Гаусса, аналогичного задаче № 2) одному уравнению: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$

Итак, здесь $r = 1$, $n = 3$, поэтому берем $x_2 = u$, $x_3 = v \Rightarrow x_1 = 2u - v$.

Значит, $\overline{X_{(1)}} = \begin{pmatrix} 2u-v \\ u \\ v \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda = 1$.

Проверим это, убедившись, что $A\left(\overline{X}_{(1)}\right) = 1\cdot\overline{X}$.

Имеем:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2u-v \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14u-7v-12u+6v \\ 20u-10u-19u+10v \\ 24u-12v-24u+13v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u-v \\ u \\ v \end{pmatrix},$$ что и требовалось.

2) При $\lambda_3 = -1$ система (*) становится такой:

$$\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0. \end{cases}$$ что равносильно $$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

2-е уравнение является следствием 1-го и 3-го (убедитесь в этом самостоятельно!), поэтому его можно отбросить и свести дело к решению системы

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Здесь $r = 2$, $n = 3$, поэтому берем $x_3 = t$, и тогда легко найти, что

$$x_1 = \frac{1}{2}t, x_2 = \frac{5}{6}t.$$

Значит, $\overline{X}_{(-1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{5}{6}t \\ t \end{pmatrix}$ – вектор, отвечающий числу $\lambda = -1$.

Проверка:

$$A\left(\overline{X}_{(-1)}\right) = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{5}{6}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}t - 10t + 6t \\ 5t - \frac{95}{6}t + 10t \\ 6t - 20t + 13t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ -\frac{5}{6}t \\ -t \end{pmatrix} = (-1)\cdot \overline{X}_{(-1)},$$

что и требовалось.

Замечание. В силу произвольности выбора значений u, v, t (по смыслу вводимых свободных переменных при решении систем) запись $\overline{X}_{(1)}$ и $\overline{X}_{(-1)}$ означает, что нами найдены не отдельные (частные) собственные векторы, а целые множества (классы) собственных векторов, отвечающих числам $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$.

Задача № 4

В стандартном базисе $\{\overline{i}; \overline{j}; \overline{k}\}$ даны векторы:

$\overline{a} = \{0, 2, 1\}$, $\overline{b} = \{0, 1, -1\}$, $\overline{c} = \{5, -3, 2\}$, $\overline{x} = \{15, -20, -1\}$.

Проверить, образуют ли базис векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и найти разложение вектора $\overline{x}$ по этим векторам (если таковое существует).

Решение

Составим определитель из координат векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, записав их построчно, и вычислим его:

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 5 & -3 & 2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=5(-2-1)=-15.$$

Поскольку $\Delta\neq0$, то его строки линейно независимы, поэтому линейно независимы и векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$. Следовательно, в трехмерном пространстве они образуют базис. Пусть теперь x_1, x_2, x_3 - координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе. Значит, имеет место равенство: $\bar{x}=x_1\cdot\bar{a}+x_2\cdot\bar{b}+x_3\cdot\bar{c}$, или, в координатной записи:

$$\begin{pmatrix}15\\ -20\\ -1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}5\\ -3\\ 2\end{pmatrix}.$$

Иными словами, получаем соотношение:

$$15\bar{j}-20\bar{j}-\bar{k}=x_1\cdot0\cdot\bar{i}+x_1\cdot2\cdot\bar{j}+x_1\cdot1\cdot\bar{k}+x_2\cdot0\cdot\bar{i}+x_2\cdot1\cdot\bar{j}+x_2\cdot(-1)\cdot\bar{k}+x_3\cdot5\cdot\bar{i}+$$
$$+x_3\cdot(-3)\cdot\bar{j}+x_3\cdot2\cdot\bar{k},$$

что после приведения подобных дает систему уравнений относительно x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases}5x_3=15,\\ 2x_1+x_2-3x_3=-20,\\ x_1-x_2+2x_3=-1,\end{cases}$$

откуда легко найти, что $x_1=-6,\ x_2=1,\ x_3=3$ (проверьте самостоятельно!)

<u>Ответ</u>: векторы $\bar{a},\bar{b},\ \bar{c}$ образуют базис, разложение вектора $\bar{x}$ в нем имеет вид: $\bar{x}=-6\bar{a}+\bar{b}+3\bar{c}$.

<u>Задача № 5</u>

Даны два линейных преобразования:

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+2x_3,\\ y_2=-3x_2+x_3,\\ y_3=2x_1+3x_3.\end{cases}\qquad\begin{cases}z_1=3y_1+y_2,\\ z_2=y_1-2y_2-y_3,\\ z_3=3y_2+2y_3.\end{cases}$$

Найти преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3. Сделать проверку.

Решение

Подставляя вместо y_1, y_2, y_3 их выражения через x_1, x_2, x_3, найдем зависимость между z_1, z_2, z_3 и x_1, x_2, x_3:

$$z_1 = 3(x_1 + 2x_2 + 2x_3) + (-3x_2 + x_3) = 3x_1 + 3x_2 + 7x_3,$$
$$z_2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3) - 2(-3x_2 + x_3) - (2x_1 + 3x_3) = -x_1 + 8x_2 - 3x_3,$$
$$z_3 = 3(-3x_2 + x_3) + 2(2x_1 + 3x_3) = 4x_1 - 9x_2 + 9x_3.$$

В матричной форме: $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, где матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & -3 \\ 4 & -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь ясно, что для получения искомого результата нужно воздействовать на переменные z_1, z_2, z_3 преобразованием, обратным к A, т.е. найти обратную матрицу A^{-1}.

Сделав это так же, как в решении задачи № 1, получим:

$$|A| = -35, \qquad A^{-1} = -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 45 & -90 & -65 \\ -3 & -1 & 2 \\ -23 & 39 & 27 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем ответ:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{35}(45z_1 - 90z_2 - 65z_3), \\ x_2 = -\dfrac{1}{35}(-3z_1 - z_2 + 2z_3), \\ x_3 = -\dfrac{1}{35}(-23z_1 + 39z_2 + 27z_3). \end{cases} \qquad (*)$$

Проверку полученного результата осуществим, подставив в соотношения (*) вместо z_i ($i = 1, 2, 3$) их выражения через y_i ($i = 1, 2, 3$), а затем вместо y_i - их выражения через x_i ($i = 1, 2, 3$), данные в условии. В конечном итоге должны получиться тождества.

Сделаем это, например, для 1-го из соотношений (*). Последовательно получаем:

$x_1 = -\frac{1}{35}\left[45(3y_1 + y_2) - 90(y_1 - 2y_2 - y_3) - 65(3y_2 + 3y_3)\right] = -\frac{1}{35}(45y_1 + 30y_2 - 40y_3) =$

$= -\frac{1}{35}\left[45(x_1 + 2x_2 + 2x_3) + 30(-3x_2 + x_3) - 40(2x_1 + 3x_3)\right] = -\frac{1}{35}(-35x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3) = x_1,$

что и требовалось. Аналогично проверяются 2-е и 3-е соотношения (*).

Задача № 6

а) найти матрицу X такую, что $X \cdot A = B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Сделать проверку.

Решение

Домножим обе части матричного уравнения на матрицу $(A)^{-1}$ справа, получим: $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot E = X = B \cdot A^{-1}$ (здесь E - единичная матрица размера 2×2). Матрица A^{-1} вычисляется аналогично тому, как это было сделано в решении задачи № 1:

$$|A| = 3 \cdot (-4) - (-2) \cdot 5 = -2 \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

Далее получаем ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$

Проверка: $X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = B$, что и требовалось. Задача имеет единственное решение.

б) найти все матрицы X, перестановочные с данной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Фактически мы должны найти все решения матричного уравнения $A \cdot X = X \cdot A$ (если таковые существуют). Вводя обозначения x_1, x_2, x_3, x_4 для неизвестных (пока) элементов матрицы X – из условия понятно, что она должна быть 2-го порядка, как и сама матрица A, – получаем:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = X \cdot A.$$

Перемножая матрицы и приравнивая результаты (на соответствующих местах), имеем систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = x_1 + 3x_2, \\ x_2 + 2x_4 = 2x_1 + 4x_2, \\ 3x_1 + 4x_3 = x_3 + 3x_4, \\ 3x_2 + 4x_4 = 2x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

Решая эту систему (по аналогии с задачей № 2), определяем, что ее ранг равен 3, а общее решение задается формулой: $x_1 = 0,\ x_2 = 2t,\ x_3 = 3t,\ x_4 = 3t$. Таким образом, существует целый класс матриц, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: множество подходящих матриц задается формулой $A = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 3t & 3t \end{pmatrix}$, где t - любое число.

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 3t & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 3t & 3t \end{pmatrix}$.

Результаты совпадают, т.е. $A \cdot X = X \cdot A$, значит, решение найдено верно.

Задача № 7

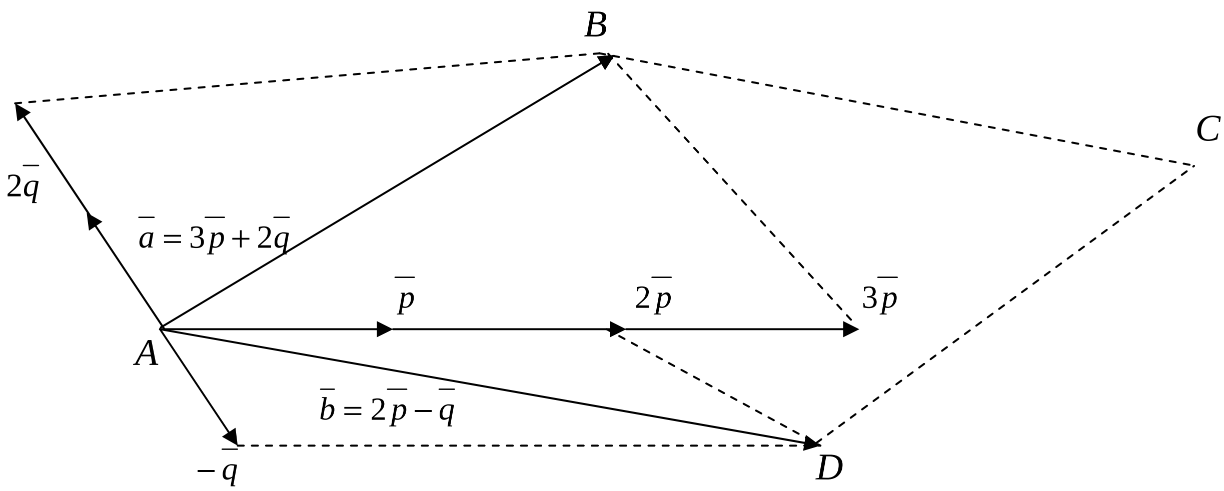
Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а также угол между его диагоналями. Дать схематический чертеж, используя исходные данные: $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q},\ \bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q},\ |\bar{p}| = 4,\ |\bar{q}| = 3$, угол между $\bar{p}$ и $\bar{q}$ равен $(\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Решение

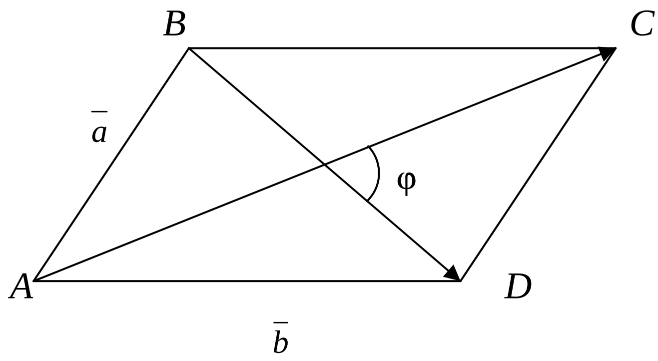
Площадь параллелограмма *ABCD* (см. рис.) найдем, используя свойства векторного произведения:

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}| = |(3\bar{p} + 2\bar{q}) \times (2\bar{p} - \bar{q})| = |6\bar{p} \times \bar{p} - 3\bar{p} \times \bar{q} + 4\bar{q} \times \bar{p} - 2\bar{q} \times \bar{q}| = |0 - 7\bar{p} \times \bar{q} + 0| = 7|\bar{p} \times \bar{q}| =$$

$$= 7|\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cdot \sin(\widehat{\bar{p}, \bar{q}}) = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2} \approx 59{,}4 \text{ (кв.ед.)}$$



Угол между диагоналями AC и BD найдем с помощью скалярного произведения векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$:



$$\cos\varphi=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{BD}\right|}=\frac{\left(\overline{AB}+\overline{BC}\right)\cdot\left(\overline{AD}-\overline{BB}\right)}{\left|\overline{AB}+\overline{BC}\right|\cdot\left|\overline{AD}-\overline{AB}\right|}=\frac{\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{b}-\bar{a}\right)}{\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{b}-\bar{a}\right|}=\frac{\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{b}-\bar{a}\bar{b}-\bar{a}\bar{a}}{\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{b}-\bar{a}\right|}=$$

$$=\frac{\left|\bar{b}\right|^2-\left|\bar{a}\right|^2}{\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{b}-\bar{a}\right|}.$$

Вычисляем модули векторов:

$$\left|\bar{a}\right|^2=\bar{a}\bar{a}=\left(3\bar{p}+2\bar{q}\right)\cdot\left(3\bar{p}+2\bar{q}\right)=9\left|\bar{p}\right|^2+12\bar{p}\bar{q}+4\left|\bar{q}\right|^2=9\cdot(4)^2+12\cdot4\cdot3\cos\frac{3\pi}{4}+4\cdot(3)^2=$$

$$=180-72\sqrt{2}.$$

Аналогично $\left|\bar{b}\right|^2=\bar{b}\bar{b}=\left(2\bar{p}-\bar{q}\right)\cdot\left(2\bar{p}-\bar{q}\right)=73+24\sqrt{2}$,

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|=\sqrt{\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}\right)}=\sqrt{\left(3\bar{p}+2\bar{q}+2\bar{p}-\bar{q}\right)^2}=\sqrt{\left(5\bar{p}+\bar{q}\right)^2}=\sqrt{25\left|\bar{p}\right|^2+10\bar{p}\bar{q}+\left|\bar{q}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{409-60\sqrt{2}}\quad,$$

$$\left|\bar{b}-\bar{a}\right|=\sqrt{\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\cdot\left(\bar{b}-\bar{a}\right)}=\sqrt{\left(2\bar{p}-\bar{q}-3\bar{p}-2\bar{q}\right)^2}=\sqrt{\left(-\bar{p}-3\bar{q}\right)^2}=\sqrt{\left|\bar{p}\right|^2+6\bar{p}\bar{q}+9\left|\bar{q}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{97-36\sqrt{2}}$$

(мы использовали свойство скалярного квадранта).

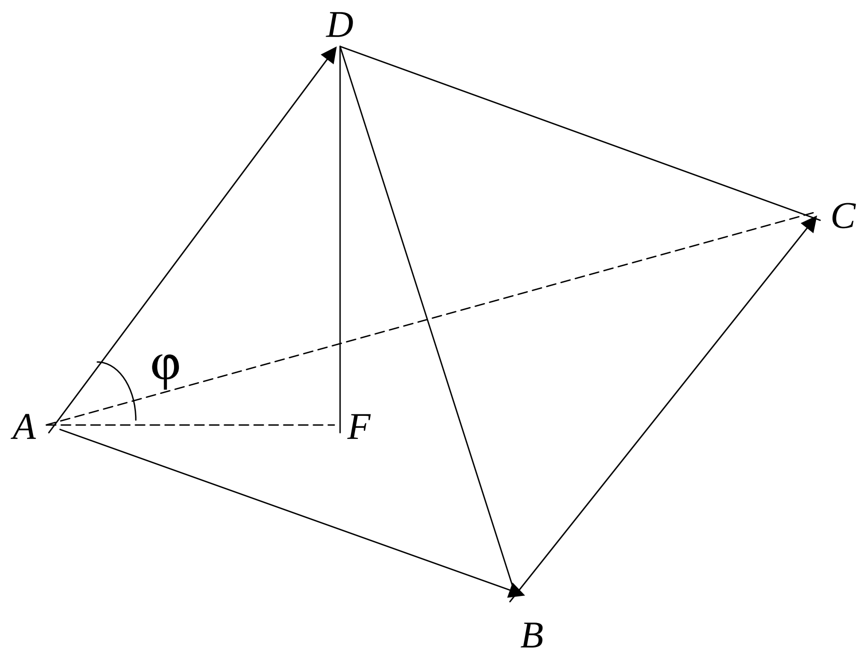
В итоге (после подстановки вычисленных значений модулей) получаем: $\cos\varphi \approx 0{,}2353$; следовательно, $\varphi = 76{,}4^\circ$.

Задача № 8

Даны координаты точек: A (0; -2; -1), B (2; 4; -2), C (3; 2; 0), D (-11; 8; 10).

Найти: а) объем пирамиды *ABCD*; б) длину высоты пирамиды, опущенной из точки *D*; в) проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{BC}$; г) величину угла наклона ребра $\overline{AD}$ к плоскости грани *ABC*. Сделать чертеж.

Решение



Вычислим вначале координаты векторов, имеющих начало в точке *A*:

$$\overline{AB} = \{2-0;\ 4-(-2);\ -2-(-1)\} = \{2;6;\ -1\};$$
$$\overline{AC} = \{3-0;\ 2-(-2);\ 0-(-1)\} = \{3;\ 4;\ 1\};$$
$$\overline{AD} = \{-11-0;\ 8-(-2);\ 10-(-1)\} = \{-11;\ 10;\ 11\}.$$

а) объем пирамиды найдем с помощью смешанного произведения векторов, на которых построена пирамида *ABCD*:

$$\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}2 & 6 & -1\\ 3 & 4 & 1\\ -11 & 10 & 11\end{vmatrix}=-270,$$

следовательно, $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\overline{AD}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-270|=45$ (куб.ед.) ;

б) высота пирамиды $H = AF$ связана с объемом формулой $H=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta\ ABC}}$, поэтому найдем площадь основания пирамиды:

$$S_{\Delta\ ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 6 & -1\\ 3 & 4 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|10\bar{i}-5\bar{j}-10\bar{k}\right|=\frac{5}{2}\left|2\bar{i}-\bar{j}-2\bar{k}\right|=$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=\frac{5}{2}\cdot 3=\frac{15}{2}\ \text{(кв.ед.)}.$$

Отсюда получаем: $H=\frac{3\cdot 45}{15/2}=18$ (ед.длины);

в) как известно, проекция вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$ – это число, определяемое равенством: $\overline{a_{\bar{b}}}=|\bar{a}|\cdot\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$, где $\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)$ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. В нашем случае имеем: $\overline{AD}_{\overline{BC}}=\left|\overline{AD}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\overline{AD},\overline{BC}}\right)=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|}$.

Координаты вектора $\overline{BC}$ вычислим так же, как вычисляли координаты $\overline{AD}$: $\overline{BC}=\{3-2,\ 2-4,\ 0-(-2)\}=\{1,\ -2,\ 2\}$, поэтому $\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$.

Теперь $\overline{AD}_{\overline{BC}}=\frac{(-11)\cdot 1+10\cdot(-2)+11\cdot 2}{3}=\frac{-9}{3}=-3$ (то, что проекция отрицательна, означает, что угол между векторами $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ – тупой);

г) искомый угол φ (см. рис.) найдем из геометрических соображений: поскольку $AF\perp ABC$ (AF - высота пирамиды), то из $\Delta\ ADF$: $\sin\varphi=\frac{AF}{AD}=\frac{H}{AD}=\frac{18}{\sqrt{121+100+121}}=\frac{18}{\sqrt{342}}\approx 0{,}973$, откуда $\varphi\approx 76{,}7^\circ$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2.
МЕТОД КООРДИНАТ. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задача № 1

Привести к простейшему (каноническому) виду уравнение линии 2-го порядка: $3x^2-4xy-2x+4y-5=0$.

Нарисовать кривую (в системе *XOY*), найти ее центр и точки пересечения с осями *OX, OY*.

Решение

Отметим, что в данном уравнении значения коэффициентов таковы: *A*= 3, *B*= -4, *C*= 0, *D*= -2, *E*= 4, *F* = -5, дискриминант $\Delta=4AC-B^2=-16<0$. Поэтому оно носит гиперболический тип и может представлять либо гиперболу, либо пару пересекающихся прямых. Установим это точнее, упрощая уравнение с помощью перехода к новой системе координат.

Вначале осуществим поворот осей на угол φ согласно формулам

$$\begin{cases} x=x'\cdot\cos\varphi-y'\sin\varphi, \\ y=x'\cdot\sin\varphi+y'\cdot\cos\varphi, \end{cases}$$

подобрав угол φ таким образом, чтобы в системе *X'OY* преобразованное уравнение линии не содержало произведения текущих координат.

Подставив в уравнение линии вместо *x, y* их выражение через переменные *x', y'* (новые координаты!) получим:

$$3(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)^2-4(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)(x'\cdot\sin\varphi+y'\cdot\cos\varphi)-2(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)+$$
$$+4(x'\cdot\sin\varphi+y'\cdot\cos\varphi)-5=0.$$

Приводя подобные, выделим коэффициент в слагаемом, содержащем произведение $x'\cdot y'$. Он равен $-6\sin\varphi\cdot\cos\varphi-4\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi$. Подбираем φ, обнуляя этот коэффициент. Для этого приходится решить тригонометрическое уравнение:

$$4(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)-6\sin\varphi\cdot\cos\varphi=0, \quad \text{или} \quad -4\cos2\varphi-3\sin2\varphi=0,$$

откуда $\mathrm{tg}2\varphi=-\dfrac{4}{3}$.

С помощью формул тригонометрии легко установить, что при этом $\mathrm{tg}\varphi = -\dfrac{1}{2}$ или $\mathrm{tg}\varphi = 2$. Эти значения соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям (что соответствует смене ролей осей OX' и OY'). Для определенности выберем угол $\varphi = \mathrm{arctg}2$ $(\varphi \approx 63{,}4^\circ)$: другие выборы приводят, в конечном итоге, к тем же результатам.

Тогда $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, и в системе $X'OY'$ уравнение принимает вид: $3\left(\dfrac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\dfrac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right) - 2\left(\dfrac{x'-2y'}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(\dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}\right) - 5 = 0$ или, после упрощений: $(x')^2 - 4(y')^2 - \dfrac{6}{\sqrt{5}}x' - \dfrac{8}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0$.

Выделяя полные квадраты относительно x' и y', получим:

$$\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4 = 0.$$

Сделаем теперь параллельный перенос координатной системы $X'OY'$, введя переменные $x'' = x' - \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $y'' = y' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

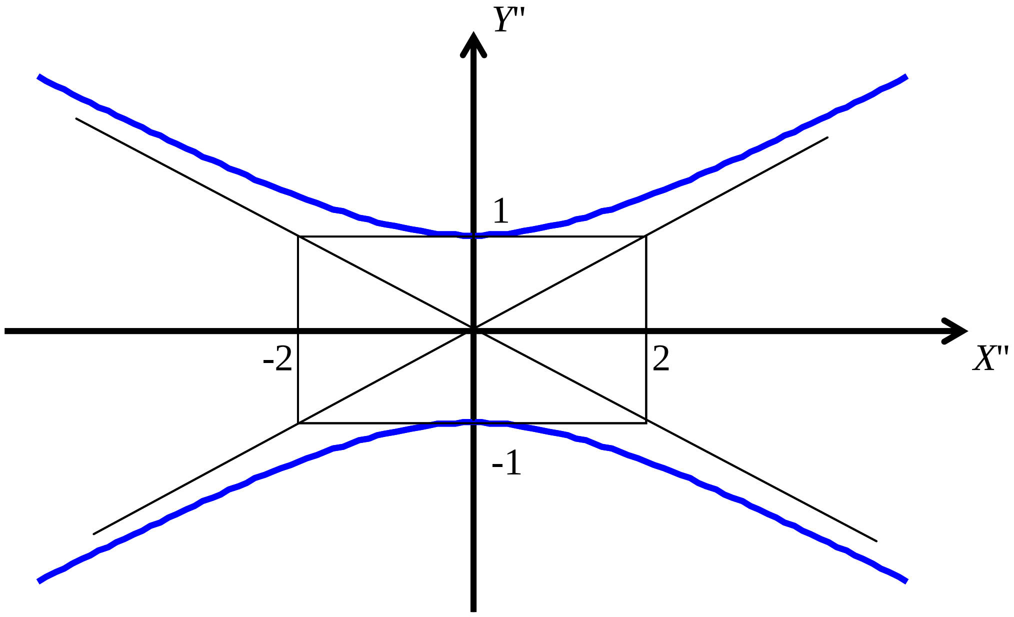
При этом начало координат – точка (0; 0), остававшаяся на месте при повороте осей, перейдет в точку O': $x'_0 = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $y'_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (новое начало координат – центр нашей линии в системе $X'OY'$). Уравнение линии в системе координат (x'', y'') станет каноническим:

$$(x'')^2 - 4(y'')^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x'')^2}{4} - (y'')^2 = -1.$$

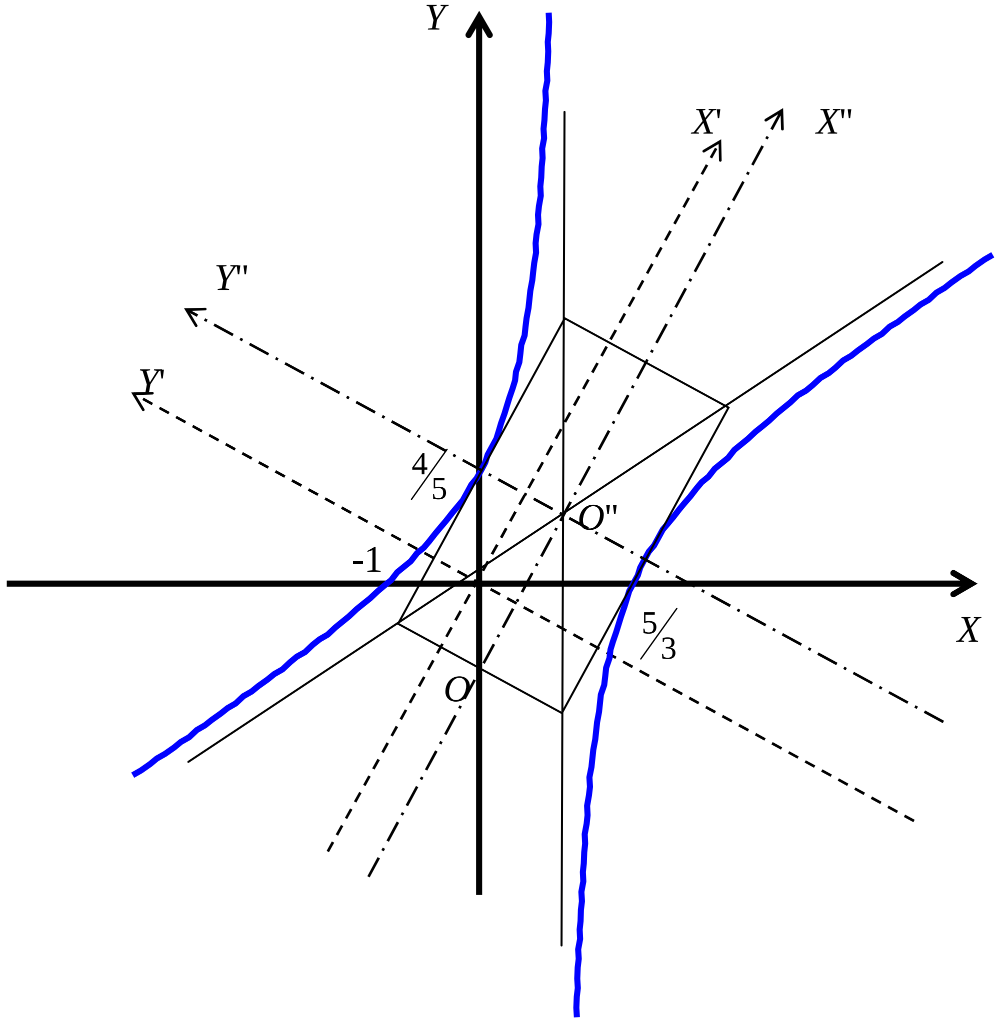
Теперь ясно, что данная линия – гипербола с полуосями $a = 2$ и $b = 1$. Ее центр имеет координаты $x'' = y'' = 0 \Rightarrow x' = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ в системе XOY:

$$x = x'_0 \cdot \cos\varphi - y'_0 \cdot \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1.$$

Ее изображение в канонической системе $(x'', y''): (y'')^2 - \dfrac{(x'')^2}{4} = 1$ (сопряженная гипербола).



В исходной системе XOY картинка такая:



Точки пересечения линии с осями найдем поочередно, полагая (в уравнении линии) $x = 0$, затем $y = 0$.

С осью OY: при $x = 0$ получим $4y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{5}$.

С осью OX: при $y = 0$ получим $3x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{3}$ (что соответствует рисунку).

Задача № 2

Составить уравнение, описывающее геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до точек $F_1(-3;\,0)$ и $F_2(3;\,0)$ постоянно и равно 9. Дать схематический рисунок.

Решение

Пусть $M\ (x,\, y)$ - произвольная (текущая) точка искомого множества. Ее расстояния от точек F_1 и F_2 будут соответственно

$$MF_1 = \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2};\quad MF_2 = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}.$$

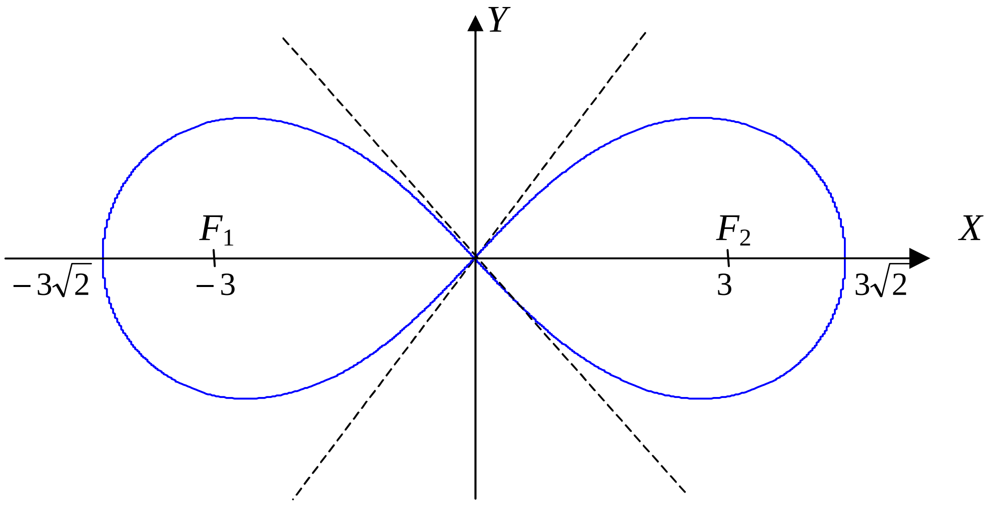
Согласно условию, $MF_1 \cdot MF_2 = 9$, поэтому $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 9$. Приводя к рациональному виду и упрощая, получим:

$$\begin{aligned}
&(x^2 + y^2 + 6x + 9)(x^2 + y^2 - 6x + 9) = 81,\\
&(x^2 + y^2 + 9)^2 - (6x)^2 = 81,\\
&(x^2 + y^2) + 18(x^2 + y^2) + 81 - 36x^2 = 81,\\
&(x^2 + y^2)^2 = 18(x^2 + y^2).
\end{aligned} \qquad (*)$$

Это и есть искомое уравнение. Эскиз линии можно построить, используя таблицу соответствующих значений переменных $x,\, y$ (предварительно составив такую таблицу), но еще проще перейти к полярным координатам (по формулам $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$). В этом случае получаем: $(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = 18(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)$.

Для $r > 0$ получается уравнение: $r^2 = 18\cos 2\varphi$, или $r = +\sqrt{18\cos 2\varphi}$.

Отсюда ясно, что линия существует только при тех φ, для которых $\cos 2\varphi > 0$. В I квадранте системы XOY это соответствует изменению φ от 0 до 90°. При $\varphi = 0$ имеем $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. С возрастанием φ от 0 до 45° величина r убывает (до $r = 0$ при $\varphi = 45°$). Учитывая еще, что уравнение (*) не изменяется при замене x на $(-x)$ и y на) $(-y)$, т.е. имеет место симметрия, легко строим изображение кривой во всей области допустимых значений полярного угла φ:



Отметим, что точка $r = 0$, $\varphi = 45°$ (соответственно $x = y = 0$ – начало координат) также входит в искомое множество (это легко проверить, подставив эти координаты в (*)). Найденная кривая называется лемнискатой Бернулли.

Задача № 3

Дано уравнение линии в полярных координатах: $r = r(\varphi) = 2\operatorname{ctg}\varphi \cdot \cos\varphi$.

Требуется:

а) построить линию по точкам (придавая φ допустимые значения в пределах от 0 до 2π);

б) найти вид уравнения в декартовой системе координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью;

в) указать название линии.

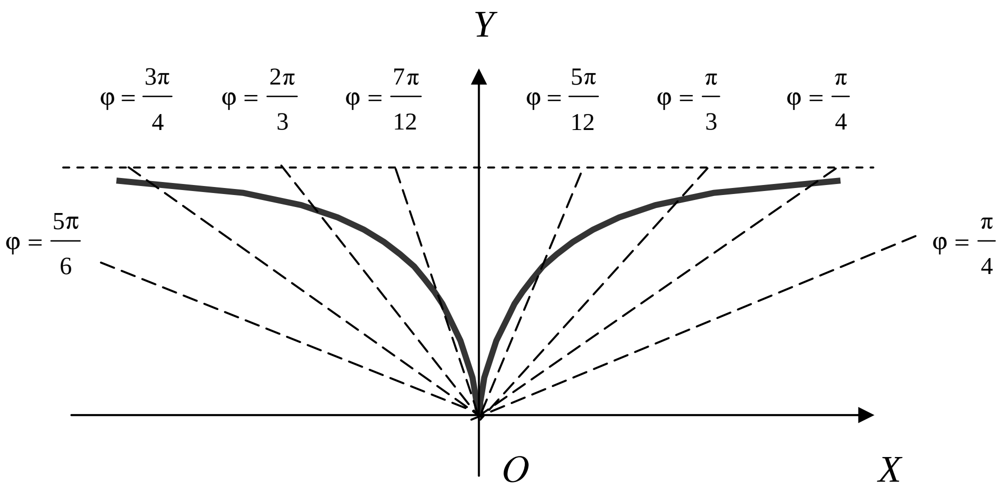
Решение

а) прежде всего определим ОДЗ (для φ), исходя из неравенства: должно быть $r \geq 0$ для всех допустимых φ. Значит, в нашем случае $2\operatorname{ctg}\varphi \cdot \cos\varphi = \dfrac{2\cos^2\varphi}{\sin\varphi} \geq 0 \Leftrightarrow \sin\varphi > 0 \Leftrightarrow 2\pi \cdot n < \varphi < 2\pi \cdot n + \pi \;\; (n = 0, \pm 1, \ldots)$.

Теперь построим таблицу соответствующих значений (в промежутке от 0 до 2π допустимыми для φ являются значения $0 < \varphi < \pi$, внося в нее округленные значения r.

φ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$11\pi/12$	π
r	∞	7,21	3	1,41	0,58	0	0,58	1,41	3	7,21	∞

(символ ∞ для крайних значений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ означает стремление $r \to \infty$ при $\varphi \to 0$ и $\varphi \to \pi$). Учитывая монотонность изменения r на участках $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, а также симметрию кривой относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{2}$, изображаем линию:



б) формулы связи декартовых и полярных координат $(x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$ приводят к соотношениям: $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y}$, $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, в результате чего наше уравнение принимает вид:

$$r = 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{r} \Rightarrow y \cdot r^2 = 2x^2 \Rightarrow y \cdot \left(x^2 + y^2\right) = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{y^3}{2 - y}.$$

Из этого уравнения ясно, что при $y \to 2$ получается $x^2 \to \infty$, т.е. $y = 2$ – горизонтальная асимптота данной кривой;

в) с помощью справочника устанавливаем имя линии: *циссоида*.

Задача № 4

В декартовой системе координат XOY даны точки: $A(3; -2)$, $B(2; 1)$, $C(9; 4)$, $D(20; -5)$.

Требуется:

а) проверить (без чертежа), что $ABCD$ - выпуклый четырехугольник;

б) вычислить его площадь;

в) вычислить, в каком соотношении делятся диагонали AC и BD точкой их пересечения;

г) написать уравнение биссектрисы внутреннего угла при вершине A;

д) дать чертеж.

Решение

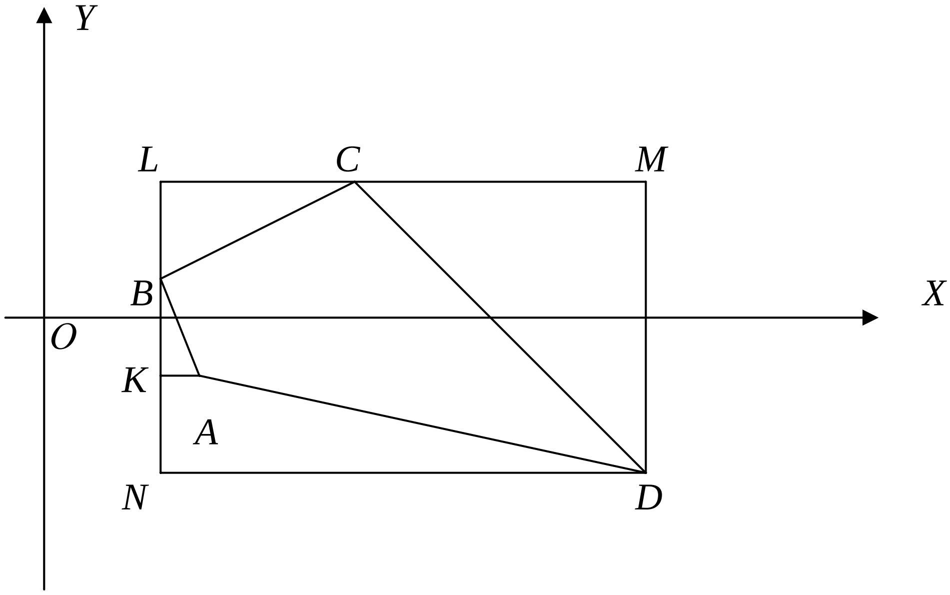
а) многоугольник именуется выпуклым, если он целиком располагается по одну сторону от прямой, содержащей любую из его сторон. В нашем случае проверим это свойство относительно прямых AB, BC, CD, DA. Установим вначале уравнение AB. Общее уравнение прямой (если она не параллельна оси) имеет вид: $y = kx + b$ (k – угловой коэффициент, b – величина смещения по оси ординат). Поскольку искомая прямая проходит чрез точки A и B, то, "привязывая" их координаты к уравнению $y = kx + b$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2 = 3k + b, \\ 1 = 2k + b, \end{cases} \text{ откуда } k = -3,\ b = 7.$$

Итак, $y = -3x + 7$ или $3x + y - 7 = 0$ – уравнение прямой, содержащей сторону AB. Чтобы убедиться, что четырехугольник $ABCD$ целиком лежит по одну сторону от AB, достаточно проверить, что вершины C и D лежат по одну сторону от AB. "Отклонение" от AB (в ту или иную сторону) для точки с координатами (u, v) определяется с помощью знака величины $3u + v - 7$. Для точки C имеем: $3 \cdot 9 + 4 - 7 = 24 > 0$; для точки D: $3 \cdot 20 - 5 - 7 = 48 > 0$. Оба отклонения имеют один и тот же знак, следовательно, C и D расположены по одну сторону от AB.

Аналогично выполняются проверки свойства выпуклости относительно сторон BC, CD, DA (проделайте самостоятельно!);

б)



Для поиска площади *ABCD* изобразим его схематично в системе *XOY* и окаймим прямоугольником, как показано на рисунке. Легко видеть, что при этом искомая площадь вычисляется как разность площадей "окаймляющего" прямоугольника *NLMD* и прямоугольных треугольников *BLC*, *CMD, KBA*, а также трапеции *NKAD*. Получаем:

$$S_{NLMD} = ND \cdot NL = (20-2)\cdot(4-(-5)) = 18\cdot 9 = 162;$$

$$S_{BLC} = \frac{1}{2}BL\cdot LC = \frac{1}{2}(9-2)\cdot(4-1) = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 3 = \frac{21}{2};$$

аналогично находим, что $S_{CMD} = \frac{99}{2}; S_{KBA} + \frac{3}{2}; S_{NKAD} = \frac{57}{2}$, откуда следует, что

$$S_{ABCD} = 162 - \frac{1}{2}(21+99+3+57) = 72 \text{ (кв.ед.)};$$

в) установим уравнения диагоналей *AC* и *BD*. Применяя тот же метод, что и для стороны *AB* (см. п. а), получим: уравнение *AC* : $y = x-5$, уравнение *BD* : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. Точку их пересечения *P* найдем, решая систему: $\begin{cases} y = x-5, \\ 3y = -x+5, \end{cases}$ отсюда $x = 5$, $y = 0$, т.е. $P(5; 0)$.

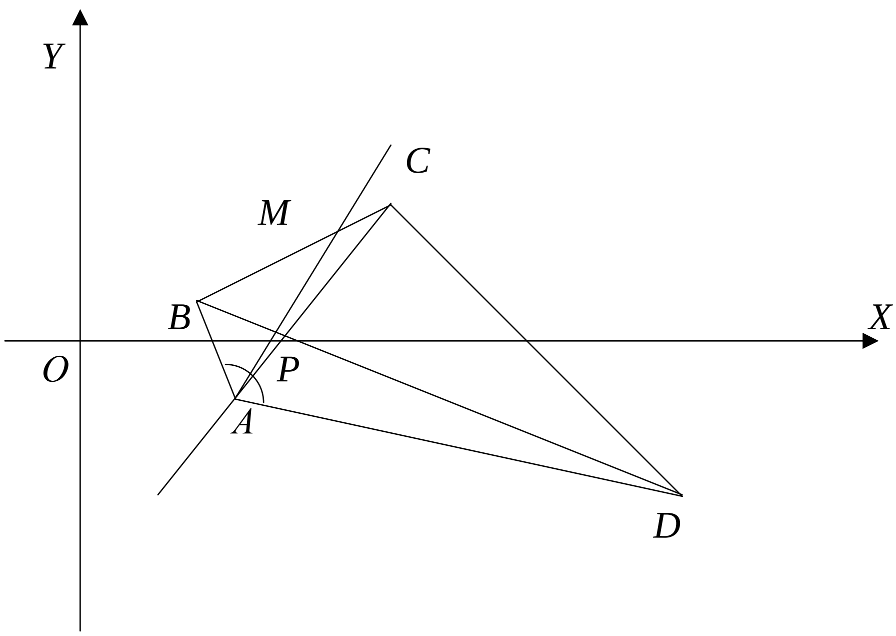
Теперь рассчитаем длины отрезков: $AP = \sqrt{(5-3)^2 + (0-(-2))^2} = 2\sqrt{2}$; аналогично $CP = 4\sqrt{2}; BP = \sqrt{10}; DP = 5\sqrt{10}$, после чего находим искомые отношения: $AP : CP = 1:2; BP : DP = 1:5$;

г) пусть $M(u;\ v)$ – точка пересечения биссектрисы угла A с отрезком BC (или его продолжением).

Уравнение прямой BC устанавливается "привязкой" координат точек $B(2;\ 1)$ и $C(9;\ 4)$ к общему уравнению прямой аналогично тому, как это делалось в п. а) для определения уравнения AB. Получим: $y=\dfrac{3x+1}{7}$ или $3x-7y+1=0$. Поскольку точка M лежит на этой прямой, то ее координаты $(u,\ v)$ подчиняются условию $3u - 7v + 1 = 0$. Кроме того, вектор $\overline{AM}=\{u-3;\ v-(-2)\}=\{u-3;\ v+2\}$ направлен вдоль биссектрисы $\Rightarrow$ составляет одинаковые углы с векторами $\overline{AB}=\{2-3;\ 1-(-2)\}$ и $\overline{AD}=\{20-3;\ -5-(-2)\}=\{17;\ -3\}$, направленными вдоль сторон угла. Поэтому $\cos\left(\widehat{\overline{AM},\overline{AB}}\right)=\cos\left(\widehat{\overline{AM},\overline{AD}}\right)$, откуда $\dfrac{\overline{AM}\cdot\overline{AB}}{\left|\overline{AM}\right|\cdot\left|\overline{AB}\right|}=\dfrac{\overline{AM}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AM}\right|\cdot\left|\overline{AD}\right|}$ или, после сокращения на $\left|\overline{AM}\right|\neq 0$, $\dfrac{(u-3)\cdot(-1)+3(v+2)}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\dfrac{(u-3)\cdot 17-3(v+2)}{\sqrt{17^2+(-3)^2}}$. В итоге получаем систему уравнений: $\begin{cases} 3u-7v+1=0, \\ \dfrac{-u+3v+9}{\sqrt{10}}=\dfrac{17u-3v-57}{\sqrt{298}}, \end{cases}$ решив которую, получим $u\approx 7{,}67; v\approx 3{,}43$.

Теперь, поскольку оказалось, что $x_B<u<x_C$ и $y_B<v<y_C$, ясно, что точка $M(u;\ v)$ попадает внутрь отрезка BC.

д) рисунок подтверждает предыдущие вычисления.



Задача № 5

Найти координаты точки M', симметричной точке $M(-2;\ 0;\ 3)$ относительно плоскости π, заданной уравнением $2x-2y+10z+1=0$. Дать схематический чертеж.

Решение

Проведем через точку M прямую l перпендикулярно плоскости π. Координаты направляющего вектора прямой определяются коэффициентами уравнения плоскости: $\overline{n}=\{2;\ -2;\ 10\}$, а в качестве начальной точки возьмем собственно точку M. Получим каноническое уравнение прямой l:

$$\frac{x-(-2)}{2}=\frac{y-0}{-2}=\frac{z-3}{10}.$$

Далее найдем точку пересечения l с плоскостью π – точку P. Для этого, перейдя к параметрической форме записи уравнения прямой, решим систему:

$$\begin{cases} x=2t-2, \\ y=-2t, \\ z=10t+3, \\ 2x-2y+10z+1=0, \end{cases}$$

откуда

$$2(2t-2)-2\cdot(-2t)+10(10t+3)+1=0 \Leftrightarrow 108t+27=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{4} \Rightarrow x=-\frac{5}{2}; y=\frac{1}{2}; t=\frac{1}{2}.$$

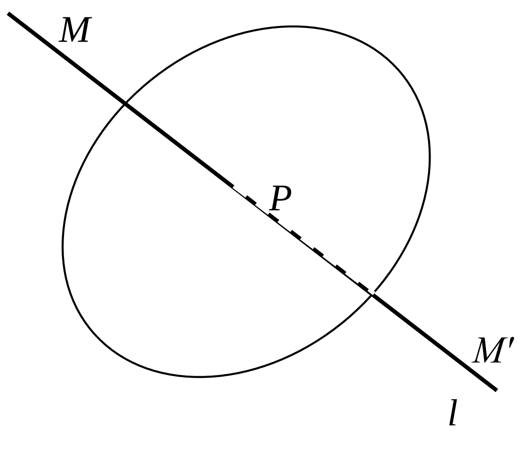
Итак, $P\left(-\frac{5}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. Из нашего построения ясно, что искомая точка M' лежит на прямой l ($M'\in l$) и, кроме того, $MP = M'P$, т.е. P – середина отрезка MM'. Значит, ее координаты подчинены формулам: $x_P=\frac{1}{2}(x_M+x_{M'})$;

$y_P=\frac{1}{2}(y_M+y_{M'})$; $z_P=\frac{1}{2}(z_M+z_{M'})$.

Отсюда легко находим, что

$$x_{M'}=2x_P-x_M=2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-(-2)=-3;$$

аналогично $y_{M'}=1, z_{M'}=-2$.



Ответ: $M'(-3;\ 1;\ -2)$.

Задача № 6

Даны канонические уравнения двух прямых в пространстве:

$$l_1 = \frac{x-8}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-9}{1} \text{ и } l_2 = \frac{x-0}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{0}.$$

Оценить их взаимное расположение и найти расстояние между ними. Дать схематический рисунок.

Решение

Направляющие векторы прямых $\bar{n}_1 = \{3;\ 4;\ 1\}$ и $\bar{n}_2 = \{5;\ 3;\ 0\}$ не являются коллинеарными (т.к. $\frac{3}{5} \neq \frac{4}{3} \neq \frac{1}{0}$), поэтому l_1 и l_2 не параллельны. Попытаемся найти их точку пересечения. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-9}{1}, \\ \dfrac{x-0}{5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+2}{0}. \end{cases}$$

Переписав эти соотношения в параметрической форме, получим, что для l_1: $x = 3u + 8;\ y = 4u - 1;\ z = u + 9;$ для l_2: $x = 5t;\ y = 3t + 1;\ z = 0 \cdot t - 2 = -2$ (здесь u, t - произвольные числа (параметры), с помощью которых находятся координаты точек на прямых l_1 и l_2). Из последнего равенства следует, что $z = -2$ для любых t, тогда из равенства $z = u + 9 = -2$ следует, что $u = -11 \Rightarrow$ $x = 3 \cdot (-11) + 8 = -25;\ y = 4 \cdot (-11) - 1 = -45$. Возвращаясь теперь к t, получаем, что $x = 5t = -25 \Rightarrow t = -5$, но тогда $y = 3 \cdot (-5) + 1 = -14 \neq -45$. Это противоречие показывает, что наша система несовместна, т.е. l_1 и l_2 не имеют общих точек (не пересекаются).

Итак, l_1 и l_2 не параллельны и не пересекаются, значит, они являются скрещивающимися (т.е. в трехмерном пространстве не лежат в одной плоскости).

Для нахождения расстояния между l_1 и l_2 построим общий перпендикуляр к ним – вектор $\overline{AB}$ такой, что $\overline{AB} \perp \overline{n_1};\ \overline{AB} \perp \overline{n_2};\ A \in l_1;\ B \in l_2$.

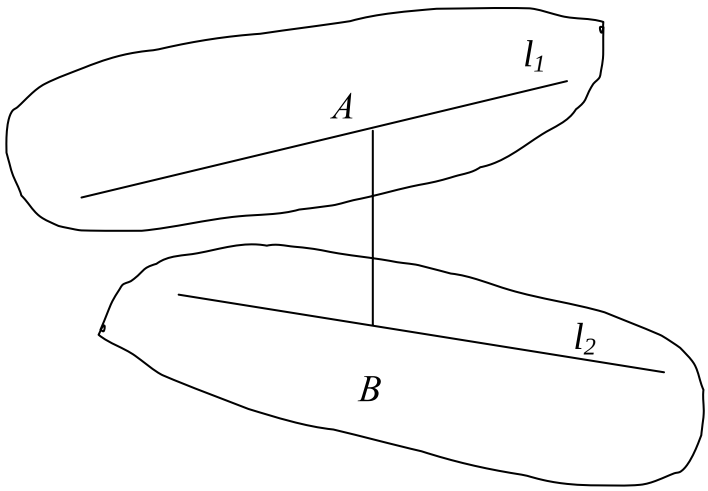
Его длина и будет искомым расстоянием. Поэтому ищем координаты точек A и B. Текущая точка прямой l_1 – $A(3u + 8;\ 4u – 1;\ u + 9)$; прямой l_2 – $B(5t;\ 3t+1;\ -2)$, где $u, t \in R$. Значит, $\overline{AB} = \{5t - 3u - 8;\ \ 3t - 4u + 2;\ \ -u - 11\}$.

В силу перпендикулярности $\overline{AB}$ векторам $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ соответствующие скалярные произведения равны нулю:

$$\begin{cases} \overline{AB}\cdot\overline{n_1}=0, \\ \overline{AB}\cdot\overline{n_2}=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5t-3u-8)\cdot 3+(3t-4u+2)\cdot 4+(-u-11)\cdot 1=0, \\ (5t-3u-8)\cdot 5+(3t-4u+2)\cdot 3+(-u-11)\cdot 0=0. \end{cases}$$

После упрощений: $\begin{cases} 27t-26u-27=0, \\ 34t-27u-34=0, \end{cases}$ откуда $u = 0$, $t = 1$.

Значит, $A(8; -1; 9)$ и $B(5; 4; -2)$, тогда $\overline{AB}=\{-3;5;-11\}$. Расстояние между прямыми равно $\left|\overline{AB}\right|=\rho(l_1,l_2)=\sqrt{(-3)^2+5^2+(-11)^2}=\sqrt{155}\approx 12{,}45$ (ед.).



Задача № 7

Даны координаты вершин треугольника: $A(4; 3)$; $B(16; -6)$; $C(20; 16)$.

Найти: а) параметры треугольника (периметр, углы, площадь); б) точку пересечения K высоты CD с медианой AE и длину высоты; в) координаты центра вписанной окружности, ее радиус (при необходимости округляя вычисления до 0,01); г) сделать чертеж.

Решение

а) Находим длины сторон треугольника, используя формулу расстояния между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$:

$$d = M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$
$$AB = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144+81} = 15;$$
$$AC = \sqrt{(20-4)^2 + (16-3)^2} = \sqrt{256+169} = 5\sqrt{17};$$
$$BC = \sqrt{(20-16)^2 + (16-(-6))^2} = \sqrt{16+484} = 10\sqrt{5}.$$

Периметр треугольника составляет величину:

$AB + AC + BC = 5\left(3 + \sqrt{17} + 2\sqrt{5}\right) \approx 58$ (ед.дл.)

Теперь установим уравнения сторон треугольника (аналогично тому, как это делалось в задаче № 4), используя метод "привязки" точек к уравнению вида $y = kx + b$; получим для *AB*: $\begin{cases} 3 = 4k + b, \\ -6 = 16k + b, \end{cases}$ откуда $k = -\frac{3}{4}, b = 6$, т.е. $y = -\frac{3}{4}x + 6$ – уравнение *AB*.

Таким же образом для *AC*: $y = \frac{13}{16}x + \frac{11}{8}$; для *BC*: $y = \frac{11}{2}x - 94$.

Как известно, угол между прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 определяется с помощью формулы: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_2}{1 + k_1k_2}$.

Угол *A* образован прямыми *AB* и *AC*, угловые коэффициенты которых найдены: $k_{AB} = -\frac{3}{4}; k_{AC} = \frac{13}{16}$.

Поэтому имеем: $\operatorname{tg}A = \dfrac{\frac{13}{16} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \frac{13}{16}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = 4,$ отсюда $\angle A \approx 76^\circ$.

Так же находим, что $\operatorname{tg}B = 2 \Rightarrow \angle B \approx 63{,}5^\circ$; $\operatorname{tg}C = \frac{6}{7} \Rightarrow \angle C \approx 40{,}5^\circ$.

<u>Контроль:</u> $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (проверьте!)

Площадь треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin A = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 5\sqrt{17}\cdot\frac{\operatorname{tg}A}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}} = \frac{1}{2}\cdot 75\sqrt{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = 150 \text{ (кв.ед);}$$

б) высота *CD* перпендикулярна стороне *AB*, поэтому угловые коэффициенты этих прямых связаны условием: $k_{CD}\cdot k_{AB} = -1$, отсюда $k_{CD} = \frac{4}{3}$.

После этого, зная координаты точки C (20; 16), устанавливаем уравнение CD: $y=\frac{4}{3}x-\frac{32}{3}$.

Для определения уравнения медианы AE находим вначале координаты точки E - середины стороны BC, применяя формулы деления отрезка (в данном случае – отрезка BC) в отношении $\lambda=1:1$:

$x_E=\frac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{16+20}{2}=18$; аналогично $y_E=\frac{-6+16}{2}=5$. Итак, $E(18; 5)$.

Зная координаты точек A и E, легко найти уравнение медианы AE; после "привязки" получим результат: $y=\frac{1}{7}x+\frac{17}{7}$.

Координаты точки K (пересечения отрезков CD и AE) ищем через систему уравнений: $\begin{cases} y=\frac{4}{3}x-\frac{32}{3} & (CD), \\ y=\frac{1}{7}x+\frac{17}{7} & (AE), \end{cases}$ откуда $x=11, y=4$, т.е. $K(11; 4)$.

Найдем теперь точку D – основание высоты CD. Пересекая CD с AB, решим систему уравнений: $\begin{cases} y=\frac{4}{3}x-\frac{32}{3} & (CD), \\ y=-\frac{3}{4}x+6 & (AB), \end{cases}$ отсюда $x=8, y=0$, т.е. $D(8; 0)$.

Длина высоты – это расстояние между C и D, оно равно:

$$CD=\sqrt{(20-8)^2+(16-0)^2}=20.$$

<u>Контроль</u>: с другой стороны, т.к. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB$, должно быть: $CD=\frac{2S_{ABC}}{AB}$. В нашем случае это дает $\frac{2\cdot 150}{15}=20$ – тот же результат!

в) центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения биссектрис этого треугольника, поэтому нам достаточно найти уравнения хотя бы двух из них.

Пусть вектор $\overline{a}=\{u; v\}$ – направляющий для прямой, являющейся биссектрисой угла A. Тогда он составляет равные углы с векторами $\overline{AB}=\{12;-9\}$ и $\overline{AC}=\{16;13\}$, т.е. $\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{AB}}\right)=\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{AC}}\right)$, откуда по формуле скалярного произведения получаем $\frac{12u-9v}{|\bar{a}|\cdot|\overline{AB}|}=\frac{16u+13v}{|\bar{a}|\cdot|\overline{AC}|}\Rightarrow\frac{12u-9v}{15}=\frac{16u+13v}{5\sqrt{17}}$,

что приводит после упрощений к приближенному равенству $2u\approx 103v$. Значит, в качестве направляющего вектора биссектрисы можно взять (с небольшой погрешностью) вектор $\bar{a}=\{103;2\}$. Тогда, используя точку $A(4,3)$ как начальную, получим, что $\frac{x-4}{103}=\frac{y-3}{2}$ – каноническое уравнение биссектрисы угла A.

Совершенно аналогично, найдя векторы $\overline{BA}=\{-12;9\}$ и $\overline{BC}=\{4;22\}$, можно получить направляющий вектор биссектрисы угла B (приближенно $\bar{b}=\{-2;5\}$) и, соответственно, уравнение этой биссектрисы: $\frac{x-16}{-2}=\frac{y+6}{5}$.

Точку пересечения биссектрис найдем, решая систему

$$\begin{cases}2(x-4)=103(y-3),\\5(x-16)=-2(y+6).\end{cases}$$

Отсюда $x_0\approx 12{,}34; y_0\approx 3{,}16$. Итак, $Q(12{,}34;\ 3{,}16)$ – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Радиус этой окружности вычислим, исходя из формулы: $r\cdot p=S$, где p – полупериметр треугольника. Находим:

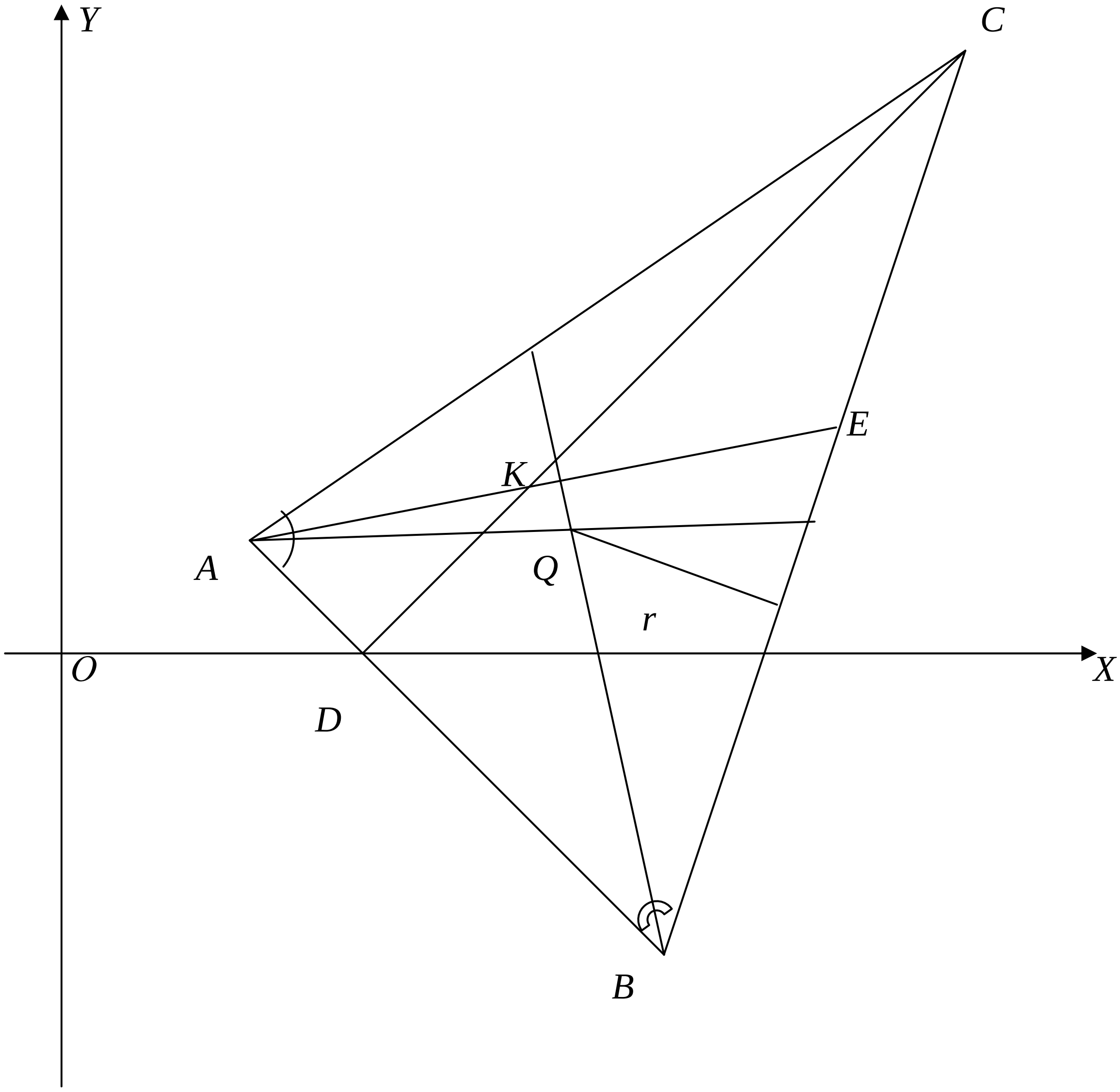
$$r=\frac{S}{p}=\frac{150}{1/2\cdot 58}\approx 5{,}17\,.$$

<u>Контроль</u>: радиус равен расстоянию от центра Q до любой из сторон треугольника. Проверим это, например, для стороны BC. Ее уравнение: $y=\frac{11}{2}x-94$ или $11x-2y-188=0$, поэтому расстояние

$$\rho(O;BC)=\frac{|11x_0-2y_0-188|}{\sqrt{(11)^2+(-2)^2}}\approx 5{,}24\,.$$

Это соответствует ожидаемому результату.

г)



Задача № 8

Даны координаты точек: $A(0; -2; -1)$; $B(2; 4; -2)$; $C(3; 2; 0;)$; $D(-11; 8; 10)$.

Требуется: а) найти точку пересечения высоты пирамиды, проведенной из точки D, с плоскостью основания ABC; б) координаты центра и радиус шара, описанного вокруг пирамиды $ABCD$.

Решение

а) пусть $M(x;\ y;\ z)$ – текущая точка плоскости ABC. Тогда векторы $\overline{AM}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ компланарны и, следовательно, их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-(-2) & 7-(-1) \\ 2-0 & 4-(-2) & -2-(-1) \\ 3-0 & 2-(-2) & 0-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрывая определитель, получим условие, которому должны удовлетворять координаты *x* ,*y*, *z*:

$$10x-5(y+2)-10(z+1)=0 \text{ или } 2x-y-2z-4=0 -$$

уравнение плоскости, проходящей через точки *A*, *B*, *C* (плоскости основания пирамиды).

Отсюда ясно, что направляющий вектор высоты пирамиды, опущенной на основание *ABC*, имеет координаты: $\bar{n}=\{2;-1;-2\}$, поэтому каноническое уравнение этой высоты таково:

$$\frac{x-(-11)}{2}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-10}{-2} .$$

Ищем точку пересечения этой прямой с плоскостью *ABC*, записав уравнения прямой в параметрической форме:

$$x=2t-11, y=-t+8, z=-2t+10 .$$

Подставляя эти соотношения в уравнение плоскости, получаем:

$$2(2t-11)-(-t+8)-2(-2t+10)-4=0 \text{, откуда}$$

$9t-54=0 \Rightarrow t=6 \Rightarrow x-1, y=2, z=-2$, т.е. *P*(1; 2; -2) – основание высоты пирамиды.

<u>Контроль</u>: длина высоты получается равной

$$DP=\sqrt{(1-(-11))^2+(2-8)^2+(-2-10)^2}=18 .$$

Это совпадает с вычислениями, приведенными в решении задачи № 8 из контрольной работы № 1, где исследуется та же пирамида, что и в данной задаче;

б) если *Q*(*a*; *b*; *c*) – центр сферы, описанной вокруг пирамиды *ABCD*, то должны выполняться равенства: *QA* = *QB* = *QC* = *QD* = *R*, где *R* – величина радиуса сферы. Возводя в квадрат и подставляя координаты точек *A*, *B*, *C*, *D*, приходим к системе уравнений относительно *a*, *b*, *c* и *R*:

$$\begin{cases}(a+0)^2+(b+2)^2+(c+1)^2=R^2,\\(a-2)^2+(b-4)^2+(c+2)^2=R^2,\\(a+11)^2+(b-8)^2+(c-10)^2=R^2,\\(a-3)^2+(b-2)^2+(c-0)^2=R^2.\end{cases}$$

Вычитая поочередно из 1-го уравнения все остальные, после упрощений получим:

$$\begin{cases}4a+12b-2c=19,\\-11a+10b+11c=140,\\3a+4b+c=4.\end{cases}$$

Решив эту систему (например, по правилу Крамера), найдем, что $a\approx-5{,}26; b\approx3{,}98; c\approx3{,}86$. После этого уже легко найти, что $R\approx9{,}32$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3.
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Задача № 1

Построить график функции $y=Af\left(ax+b\right)+B$ путем последовательных элементарных преобразований графика $y=f(x)$. Указать точки пересечения с осями координат.

1.1. $y=-3\sin(2x+1)+1$.

Решение

В данном случае A = -3, B = 1, a = 2, b = 1, $f(x)=\sin x$ (этот график считается известным).

Запишем нашу функцию в виде $y=-3\sin\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+1$.

От графика к искомому можно перейти с помощью следующей цепочки преобразований: $y_1=\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)$, $y_2=\sin\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$,

$$y_3=-3\sin\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right],\quad y_4=-3\sin\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+1.$$

Геометрически это приводит к следующим построениям:

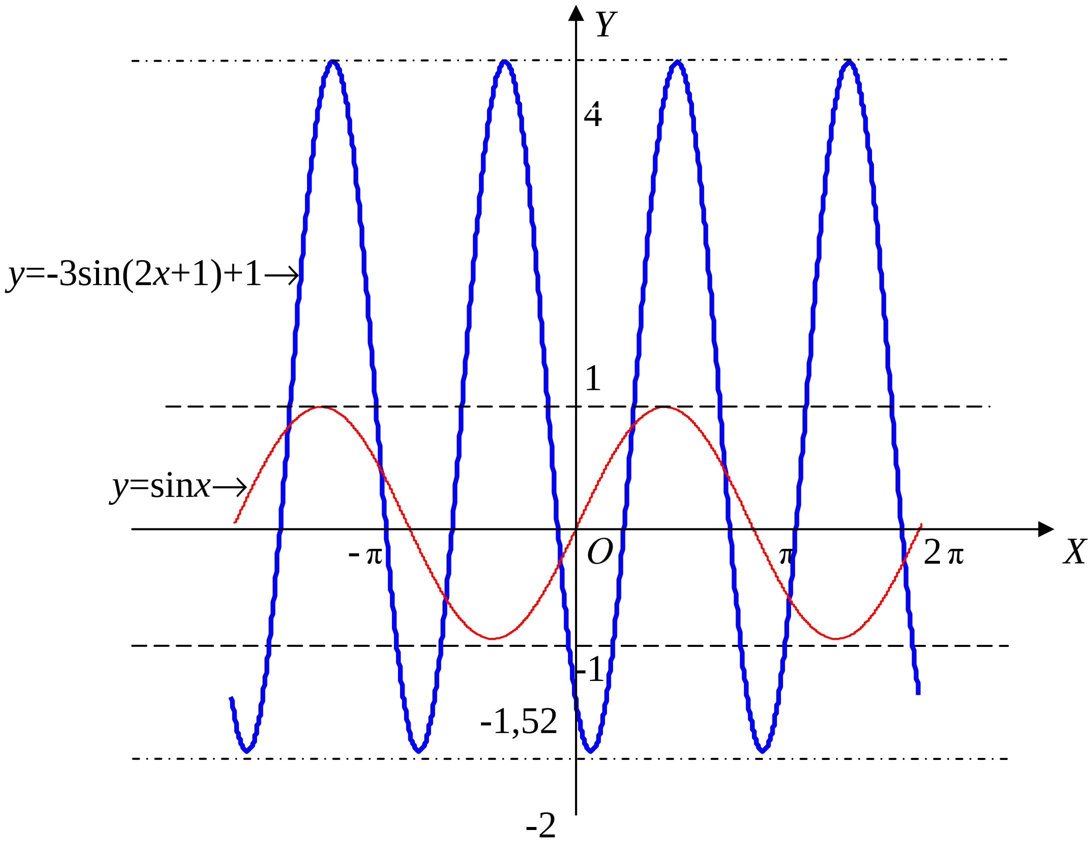
1) строим синусоиду $y = \sin x$ и смещаем ее точки на $\left(-\frac{1}{2}\right)$ относительно направления оси OX, то есть на $\left(-\frac{1}{2}\right)$ влево – получим "смещенный" график $y_1 = \sin\left(x + \frac{1}{2}\right)$;
2) абсциссы точек графика, построенного в п.1, уменьшаем вдвое, не изменяя их ординат тем – самым "сжимаем" график в два раза вдоль оси OX, приходя к графику $y_2 = \sin\left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$;
3) ординаты точек полученного в п.2 графика увеличиваем в три раза, а затем меняем их знаки на противоположные (не меняя абсцисс); таким образом, мы получаем график $y_3 = -3\sin\left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$, являющийся результатом "растяжения" предыдущего графика вдоль оси OY втрое (с последующим зеркальным отражением относительно оси OX);
4) ординаты точек последнего из построенных графиков увеличиваем на единицу (без изменения абсцисс) - т.е. "смещаем" график на единицу вверх вдоль оси OY. Этим шагом мы получаем требуемый график.

Точка пересечения графика с осью OY: при $x = 0 \Rightarrow y = -3\sin(2 \cdot 0 + 1) + 1 = -3\sin 1 = 1 \approx -1{,}52$ (напомним, что по оси OX откладывается радианная мера угла).

Для поиска точек пересечения с осью OX полагаем $y = 0$ и решаем уравнение: $0 = -3\sin(2x + 1) + 1$, откуда получаем серию решений:

$$x = \frac{1}{2}\left[(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k - 1\right],\text{ где } k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Для удобства построения можно взять $\arcsin\frac{1}{3} \approx \frac{\pi}{9}$.



1.2. $y=\dfrac{10-3x}{6x-12}$.

<u>Решение</u>

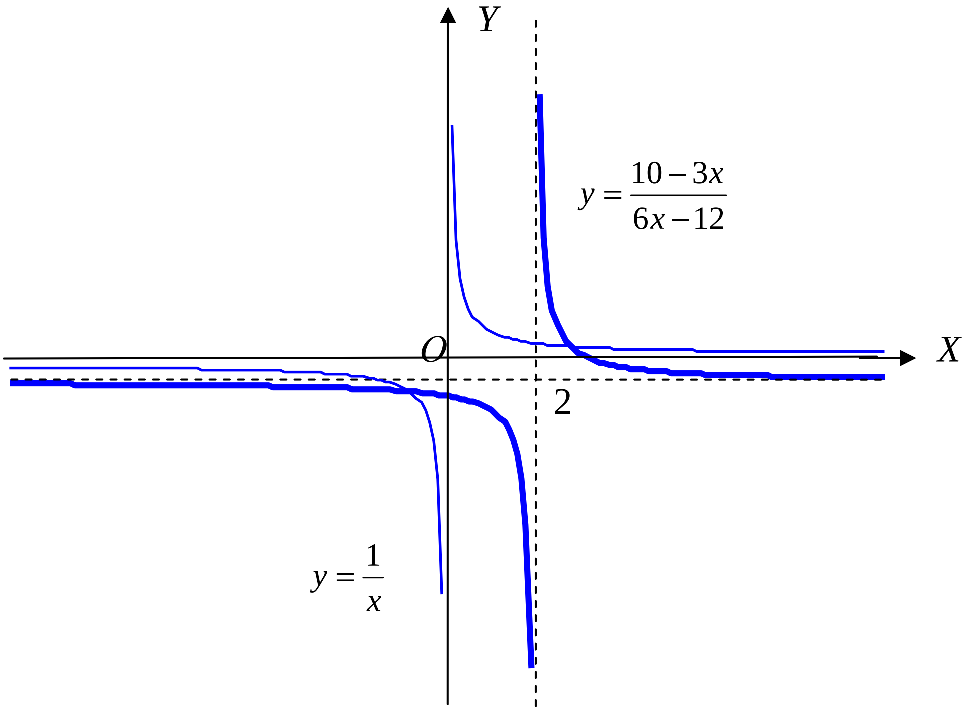
Преобразуя дробь, получим:

$$y=\frac{-3(x-\frac{10}{3})}{6(x-2)}=\frac{-3\left[(x-2)-\frac{4}{3}\right]}{6(x-2)}=-\frac{3}{6}+\frac{4}{6(x-2)}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

Здесь в качестве $f(x)$ удобно взять $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (график обратно пропорциональной зависимости – гипербола); $A=\dfrac{2}{3}, B=-\dfrac{1}{2}, a=1, b=-2$.

Действуя далее по схеме решения задачи 1.1, приходим к искомому графику. Это *гипербола с асимптотами* $x=2$ и $y=-\dfrac{1}{2}$.

Точки пересечения с осями: при $x=0 \Rightarrow y=-\dfrac{10}{12}=-\dfrac{5}{6}$ (ось OY); при $y=0 \Rightarrow x=\dfrac{10}{3}$ (ось OX).



<u>Задача № 2</u>

Дана функция $y=f(x)$. Требуется: а) найти точки разрыва, если они существуют; б) установить скачок функции в точке разрыва; в) дать схематический чертеж.

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если } x\le -2; \\ x^2-4, & \text{если } -2<x<1; \\ 4-2x, & \text{если } x\ge 1. \end{cases}$$

<u>Решение</u>

а) данная функция определена и непрерывна на интервалах: $(-\infty;-2)$, $(-2;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$, т.к. задана на этих участках как элементарная, а элементарные функции являются непрерывными в своей области определения. При $x=-2$ и $x=1$ меняется аналитическое выражение функции $f(x)$, и только в этих точках она может иметь разрывы. Определим односторонние пределы в этих точках:

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(x+2)=0; \quad \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(x+2)=0.$$

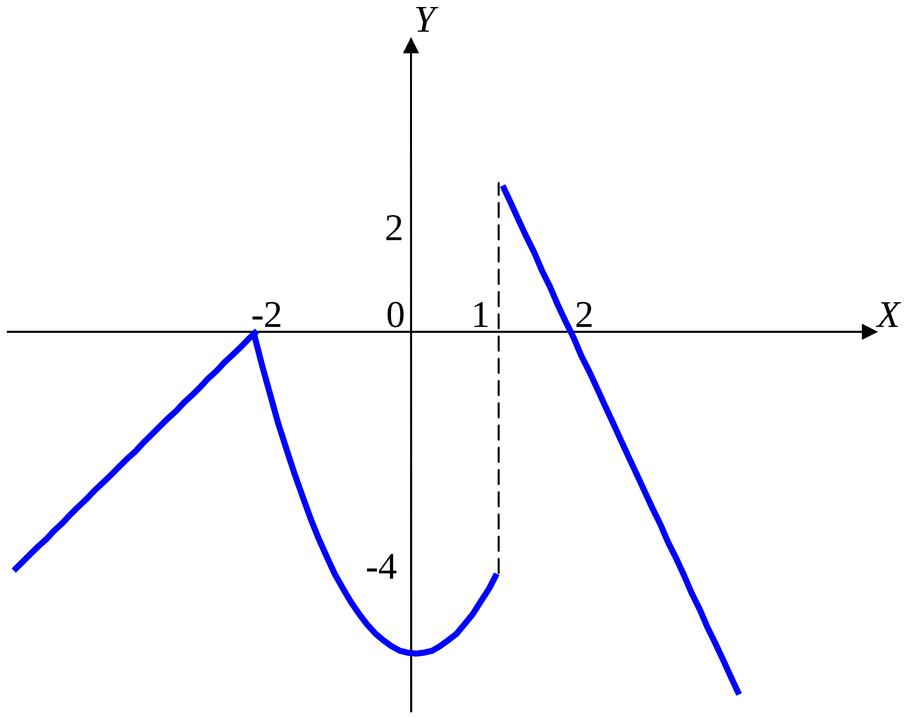
Односторонние пределы в точке $x=-2$ совпадают, к тому же и $f(-2)=0$ (по определению), поэтому функция непрерывна в точке $x=-2$. Далее

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(x^2-4\right)=-3;\quad \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(4-2x)=2.$$

Эти пределы существуют, конечны и не равны между собой. Значит, в точке $x=1$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода;

б) *скачком функции* (в точке) называется абсолютная величина разности между ее правым и левым предельными значениями. Следовательно, в точке $x=1$ скачок конечен и равен $\delta=|2-(-3)|=5$.

в)



Задача № 3

Последовательность $\{a_n\}$ задана с помощью формулы: $a_n=\dfrac{n^2+1}{14-3n}$.

Требуется:

а) вычислить пять первых элементов этой последовательности;

б) исследовать $\{a_n\}$ на монотонность;

в) найти предел последовательности (или показать, что он не существует);

г) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$, то определить, начиная с какого номера n модуль отклонения элементов последовательности от величины A не превысит 0,01;

д) изобразить поведение $\{a_n\}$ графически и указать наименьший и наибольший из элементов a_n (если таковые существуют).

Решение

а) подставляя в формулу, задающую $\{a_n\}$, поочередно значения $n=1,\ n=2, ..., n=5$, получим:

$$a_1 = \frac{2}{11} \approx 0{,}18; \quad a_2 = \frac{5}{2} = 2{,}5; \quad a_3 = \frac{10}{-13} \approx -0{,}77; \quad a_4 = \frac{17}{-34} = -0{,}5; \quad a_5 = \frac{26}{-61} \approx -0{,}43.$$

б) для выявления тенденции возрастания или убывания последовательности $\{a_n\}$ изучим поведение величины $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$ (разности двух соседних элементов). Имеем:

$$\Delta_n = a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2+1}{14-3(n+1)^2} - \frac{n^2+1}{14-3n^2} = \frac{34n+17}{\left[14-3(n+1)^2\right]\left[14-3n^2\right]}$$

(упрощающие выкладки мы здесь не приводим).

Определяя знак величины Δ_n с помощью решения неравенств $\Delta_n > 0$ или $\Delta_n < 0$ (например, методом интервалов) и учитывая, что n может принимать только натуральные значения 1, 2, 3,… несложно получить, что $\Delta_n > 0$ при $n > 2$. Этот вывод означает, что $a_{n+1} - a_n > 0$ при $n > 0$, т.е. $a_{n+1} > a_n$ при $n \geq 3$. Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает, начиная с 3-го номера;

в) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{14-3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{14}{n^2}-3} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{14}{n^2}\right)-3} = \frac{1+0}{0-3} = -\frac{1}{3}.$$

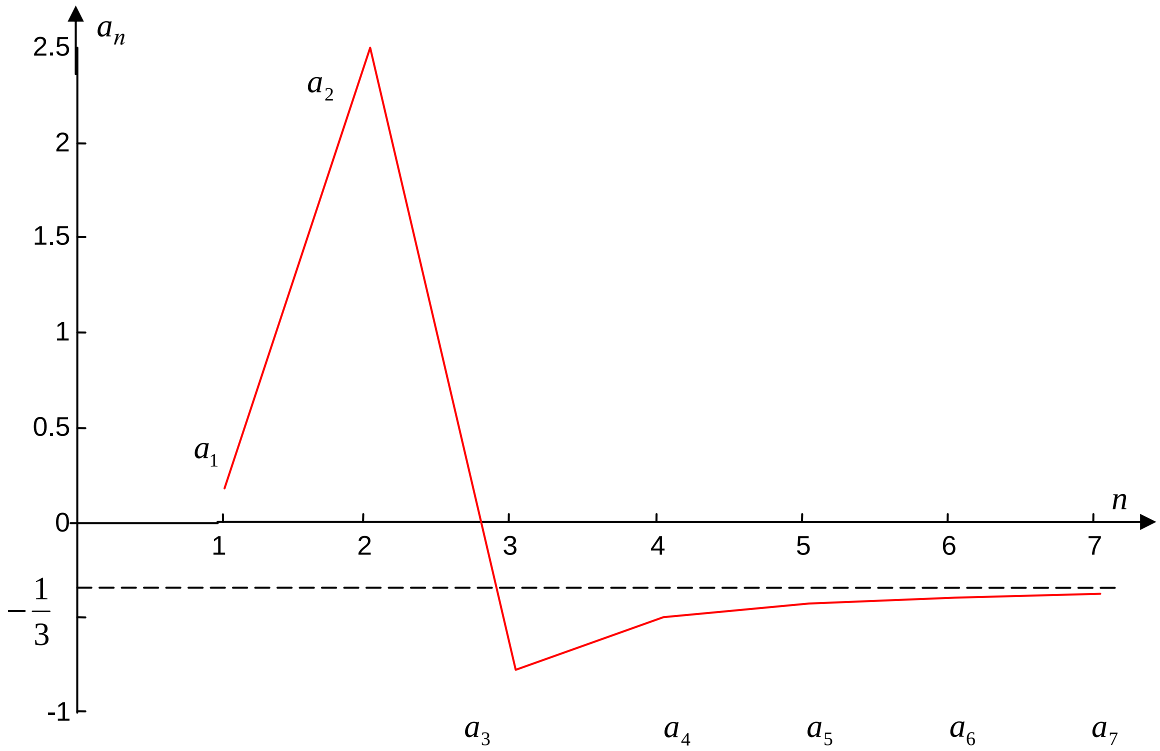
Итак, $A = -\frac{1}{3}$;

г) отклонение элемента a_n от предельного значения $A = -\frac{1}{3}$ составляет величину $a_n - A = a_n - \left(-\frac{1}{3}\right) = a_n + \frac{1}{3}$. Таким образом, нам нужно решить неравенство: $\left|a_n + \frac{1}{3}\right| < 0{,}01$. Получаем:

$$\left|\frac{n^2+1}{14-3n^2} + \frac{1}{3}\right| < 0{,}01 \Leftrightarrow \left|\frac{3n^2+3+14-3n^2}{3(14-3n^2)}\right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|14-3n^2\right| > \frac{1700}{3}.$$

Несложно вычислить, что это неравенство выполняется, начиная с номера $n = 14$ (т.е. при всех $n \geq 14$);

д) откладывая по горизонтальной оси значения $n = 1, 2, 3,..$ (т.е. номера элементов последовательности), а по вертикальной оси - величину a_n (выбрав удобный масштаб), получим картинку, иллюстрирующую поведение $\{a_n\}$:



Ясно, что $\min\limits_n a_n = a_3 = -\dfrac{10}{13}$, $\max\limits_n a_n = a_2 = \dfrac{5}{2}$.

Задача №4

Вычислить пределы последовательностей $\{a_n\}$, указав характер предела – тип неопределенности.

а) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2 - n} - n + 1}{\sqrt[3]{n^4(n^2+5)} + \sqrt[3]{2n - n^6}}$.

Решение

Легко увидеть, что при $n \to \infty$ имеют место соотношения:

$$\sqrt{n^2 - n} \sim n, \quad \sqrt[3]{n^4(n^2+5)} \sim n^2, \quad \sqrt[3]{2n - n^6} \sim -n.$$

Поэтому мы имеем дело с *неопределенностью вида* $\frac{\infty-\infty}{\infty+(-\infty)}$, которая требует преобразований. В подобных случаях уместно использовать формулы сопряжения:

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}} \div \sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}=\frac{a\pm b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\mp\sqrt[3]{ab}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$$

(знаки "+" и "–" согласовываются по нижней или верхней строке в обеих частях вышеприведенных равенств).

После несложных вычислений получим:

$$a_n=\frac{\left[\left(n^2-n\right)-(n-1)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt[3]{n^4\left(n^2+5\right)}\right)^2-\sqrt[3]{n^5\left(n^2+5\right)\left(2-n^5\right)}+\left(\sqrt[3]{n\left(2-n^5\right)}\right)^2\right]}{\left(\sqrt{n^2-n}+n-1\right)\cdot\left[n^4\left(n^2+5\right)+n\left(2-n^5\right)\right]}=$$

$$=\frac{(-3n+1)\cdot\left[\sqrt[3]{n^{12}+10n^{10}+25n^8}-\sqrt[3]{-n^{12}-5n^{10}+2n^7+10n^5}+\sqrt[3]{n^{12}-2n^7+4n^2}\right]}{\left(\sqrt{n^2-n}+n-1\right)\cdot\left(5n^4+2n\right)}.$$

Заметив, что при $n\to\infty$ знаменатель имеет порядок n^5 (т.к. $\sqrt{n^2-n}+n-1\sim 2n$, $5n^4+2n\sim 5n^4$), разделим числитель и знаменатель на n^5 (дробь при этом не изменяется) и преобразуем, внося под знак радикала, где это необходимо:

$$a_n=\frac{\left(\frac{-3n+1}{n}\right)\cdot\left[\sqrt[3]{\frac{n^{12}+10n^{10}+25n^8}{n^{12}}}-\sqrt[3]{\frac{-n^{12}-5n^{10}+2n^7+10n^5}{n^{12}}}+\sqrt[3]{\frac{n^{12}-2n^7+4n^2}{n^{12}}}\right]}{\left(\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}+1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(5+\frac{2}{n^3}\right)}.$$

Теперь ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-3+\frac{1}{n}\right)\cdot\left[\sqrt[3]{1+\frac{10}{n^2}+\frac{25}{n^4}}-\sqrt[3]{-1-\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^5}+\frac{10}{n^7}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^5}+\frac{4}{n^{10}}}\right]}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(5+\frac{2}{n^3}\right)}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=0$ при любых фиксированных $\alpha>0$ и применяя теоремы об арифметических действиях с пределами, окончательно получаем:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{(-3+0)\cdot\left[\sqrt[3]{1+0}-\sqrt[3]{-1-0}+\sqrt[3]{1-0}\right]}{\left(\sqrt{1-0}+1-0\right)\cdot(5+0)}=\frac{(-3)\cdot 3}{2\cdot 5}=-\frac{9}{10}.$$

Итак, $a_n\to -0{,}9$ при $n\to\infty$.

б) $a_n=\left(\dfrac{2n-1-3n^2}{4-5n-3n^2}\right)^{1-2n}$.

Решение

Преобразуем выражение в скобках, выделяя целую часть из дроби:

$$\frac{2n-1-3n^2}{4-5n-3n^2}=\frac{\left(4-5n-3n^2\right)+7n-5}{4-5n-3n^2}=1+\frac{7n-5}{4-5n-3n^2}.$$

Оценим остаток:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n-5}{4-5n-3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n}-3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n}-3\right)}=\frac{0-0}{0-0-3}=0.$$

Поэтому выражение в скобках (в формуле, определяющей a_n) стремится к 1 (при $n\to\infty$). В то же время показатель $1-2n\to-\infty$. Значит, мы имеем неопределенность типа $(1)^{\infty}$, иными словами – типа "числа e". Для вычисления предела воспользуемся известными соотношениями:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad , \quad \lim_{z\to 0}(1+z)^{1/z}=e.$$

Обозначив величину $\dfrac{7n-5}{4-5n-3n^2}$ через z, запишем:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(1+z)^{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+z)\right]^{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+z)^{1/z}\right]^{z\cdot(1-2n)}=\left[\lim_{n\to\infty}(1+z)^{1/z}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[z\cdot(1-2n)\right]}$$

(такой переход возможен, если оба предела – в основании и в показателе – существуют и конечны).

В нашем случае: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+z)^{1/z}=\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{1/z}=e$, поскольку $z\to 0$ при $n\to\infty$, как было показано выше. В то же время

$$\lim_{n\to\infty}[z(1-2n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{(7n-5)(1-2n)}{4-5n-3n^2}=\frac{-14+0-0}{-3-0+0}=\frac{14}{3}.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to 0} a_n=(e)^{14/3}$, т.е. $a_n \to (e)^{14/3}\approx 106{,}3$.

Для решения двух следующих задач необходимо использовать замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{n\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

и следствия из них: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(a)^x-1}{x}\ln a\quad (a>0, a\neq 0),\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

(α - любое действительное число).

На основании этих предельных соотношений составляется таблица эквивалентных бесконечно малых (при $z\to 0$) величин, применяемая в предельных переходах:

$$(*)\ \sin\sim,\quad \arcsin z\sim z,\quad \mathrm{tg}z\sim z,\quad \mathrm{arctg}z\sim z;$$
$$(**)\log_a(1+z)\sim z\ln a,\quad (a)^z-1\sim z\ln a;$$
$$(***)(1+z)^a-1\sim \alpha z,\ \text{при}\quad z\to 0.$$

Задача № 5

Вычислить предел и указать тип неопределенности, используя теорию бесконечно малых:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{\log_2 x}-2}{\sin(\pi x)}.$$

Решение

В данном случае $\log_2 x\to\log_2 16=4,\ \sin(\pi x)\to 0$, поэтому дробь представляет собой неопределенность вида $\frac{\sqrt{4}-2}{0}=\frac{0}{0}$.

Применяя формулы сопряжения, получим:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\log_2 x-4}{\sin(\pi x)\left(\sqrt{\log_2 x}+2\right)}=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}+2}\cdot\frac{\log_2\left(\frac{x}{16}\right)}{\sin(\pi x)}.$$

Так как величина $\sqrt{\log_2 x+2} \to \sqrt{\log_2 16+2}=4$ при $x \to 16$, то можно утверждать, что искомый предел равен

$$\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{\log_2 x+2}}\cdot\lim_{x\to16}\frac{\log_2\left(\frac{x}{16}\right)}{\sin(\pi x)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to16}\frac{\log_2\left(\frac{x}{16}\right)}{\sin(\pi x)}.$$

Чтобы применить эквивалентные соотношения бесконечно малых величин, введем новую переменную t так, чтобы $t \to 0$ (при условии, что $x \to 16$). Например, $x=t-16$ (смещение переменной). Тогда $x=t+16$, и наш предел примет следующий вид:

$$\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\log_2\left(\frac{t+16}{16}\right)}{\sin(\pi(t+16))}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\log_2\left(\frac{t}{16}+1\right)}{\sin(\pi t+16\pi)}.$$

По формулам приведения для тригонометрических функций имеем:

$$\sin(\pi t+16\pi)=\sin\pi t.$$

Далее используем эквивалентности (*) и (**):

$$\sin(\pi t)\sim\pi t \ \text{при}\, t\to0,\ \log_2\left(1+\frac{t}{16}\right)\sim\frac{t}{16}\cdot\ln2 \ \text{при}\ t\to0$$

(здесь роль z исполняют соответственно величины πt и $\frac{t}{16}$). Искомый предел равен $\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{t}{16}\cdot\ln2}{\pi t}=\frac{\ln2}{64\pi}$.

<u>Задача № 6</u>

Вычислить пределы, используя теорию эквивалентности бесконечно малых величин:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(3)^{1/x}-(2)^{1/x}}{\pi-\text{arcctg}(x)}$.

<u>Решение</u>

Поскольку $\text{arcctg}(x)\to\pi-0$ при $x\to-\infty$, то знаменатель дроби (в условии задачи) стремится к нулю; в то же время показатель $\frac{1}{x}\to0$ при $x\to-\infty$, поэтому $(3)^{1/x}\to(3)^0=1$ и $(2)^{1/x}\to(2)^0=1$. Значит, мы имеем неопределенность типа $\frac{1-1}{0}$, т.е. $\frac{0}{0}$. Преобразуем ее с помощью замены переменной: обозначим через y величину $\pi-\operatorname{arcctg}(x)$. Тогда при $x\to-\infty$ будет: $y\to\pi-(\pi-0)=+0$. Выразим x:

$$y=\pi-\operatorname{arcctg}(x)\Rightarrow \operatorname{arcctg}(x)=\pi-y\Rightarrow x=\operatorname{ctg}(\pi-y)=-\operatorname{ctg}(y).$$

Отсюда $\frac{1}{x}=-\operatorname{tg}y$.

Данный предел принимает вид:

$$\lim_{y\to+0}\frac{(3)^{-\operatorname{tg}y}-(2)^{-\operatorname{tg}y}}{y}=\lim_{y\to+0}\frac{(2)^{-\operatorname{tg}y}}{y}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\operatorname{tg}y}-1\right].$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}y\to0$ при $y\to0$, воспользуемся соотношениями (*), (**) и получим:

$$\left\{\lim_{y\to+0}(2)^{-\operatorname{tg}y}\right\}\cdot\lim_{y\to+0}\frac{1}{y}\cdot\left(\operatorname{tg}y\cdot\ln\frac{2}{3}\right)=(2)^{-0}\cdot\ln\frac{2}{3}\cdot\lim_{y\to+0}\frac{\operatorname{tg}y}{y}=1\cdot\ln\frac{2}{3}\lim_{y\to+0}\frac{y}{y}=\ln\frac{2}{3}=\ln2-\ln3\approx-0{,}4.$$

б) $\lim\limits_{y\to-2}(\sec(x+2))^{\beta(x)}$, где $\beta(x)=\left[(5)^{\sqrt[3]{x^2-3}}-5\right]^{-1}$.

Решение

Поскольку $\sec(x+2)=\frac{1}{\cos(x+2)}\to\frac{1}{\cos0}=1$ при $x\to-2$, а $\beta(x)\to\left[(5)^{\sqrt[3]{x^2-3}}-5\right]^{-1}=(5^1-5)^{-1}=\infty$ при $x\to-2$, то мы имеем дело с неопределенностью вида $(1)^\infty$,т.е. "типа e ".

Воспользовавшись свойствами предельных переходов для показательной и логарифмической функций (подобно тому, как это было в задаче № 4), запишем:

$$\lim_{y\to-2}(\sec(x+2))^{\beta(x)}=\lim_{y\to-2}(e)^{\ln[\sec(x+2)]^{\beta(x)}}=\lim_{y\to-2}(e)^{\beta(x)\ln[\sec(x+2)]}=(e)^{\lim\limits_{x\to-2}\{-\beta(x)\ln\cos(x+2)\}}.$$

Предел в показателе вычислим отдельно. Вначале сделаем замену ("смещение") переменной: $t=x+2$, так, чтобы $t\to0$ при $x\to-2$. Тогда (для $t\to0$) мы можем применить эквивалентности (*) – (***) и получить:

$$\ln[\cos(x+2)] = \ln(\cos t) = \ln\left(1 - 2\sin^2\frac{t}{2}\right) \approx -2\sin^2\frac{t}{2} \approx -2\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^2 = -\frac{t^2}{2};\ \beta(x) = \left\{5\cdot\left(5^{\sqrt[3]{x^2-3}-1} - 1\right)\right\}^{-1},$$

при этом $\sqrt[3]{x^2-3} = \sqrt[3]{(t-2)^2-3} = \sqrt[3]{t^2-4t+4-3} = \left(1+t^2-4t\right)^{1/3}$, следовательно,

$$\sqrt[3]{x^2-3} - 1 = \left(1+t^2-4t\right)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3}\left(t^2-4t\right) \Rightarrow (5)^{\sqrt[3]{x^2-3}-1} - 1 \sim (5)^{\frac{1}{3}\left(t^2-4t\right)} - 1 \sim \frac{1}{3}\left(t^2-4t\right)\cdot\ln 5 .$$

Теперь

$$\lim_{x\to -2}\{-\beta(x)\cdot\ln[\cos(x+2)]\} = -\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{5\cdot\frac{1}{3}\left(t^2-4t\right)\ln 5} = +\lim_{t\to 0}\frac{3}{10}\cdot\frac{t}{(t-4)\ln 5} = \frac{3}{10\ln 5}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{t-4} =$$

$$= \frac{3}{10\ln 5}\cdot\frac{0}{0-4} = 0.$$

Значит, искомый предел равен $(e)^0 = 1$.

Задача № 7

Найти корни уравнения $f(x) = 0$ (приближенно – с точностью до 0,05) для функции $f(x) = (2)^x - x^3$ методом половинного деления.

Решение

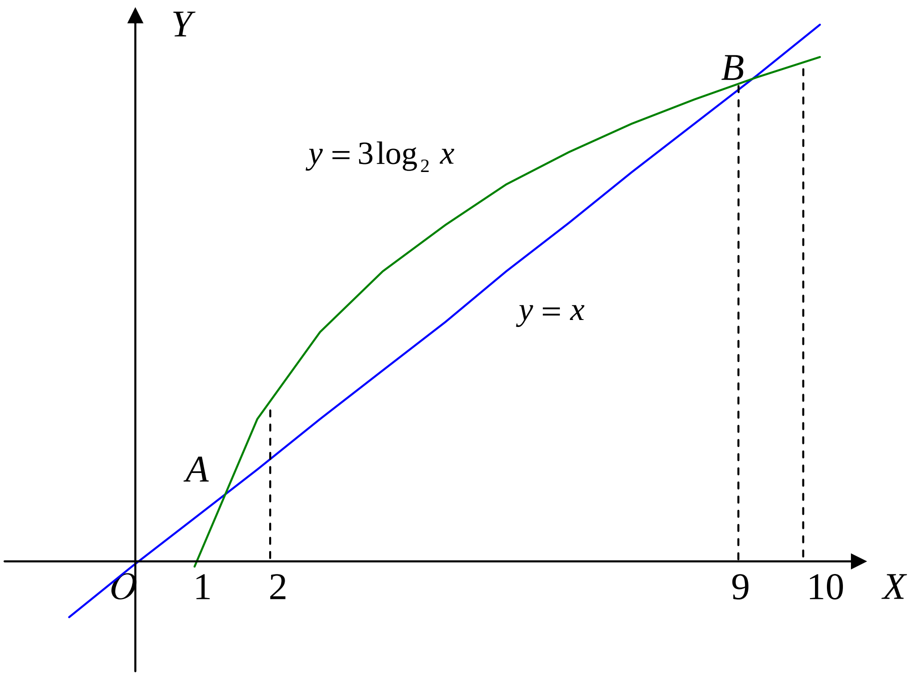
Указать корень x_0 с точностью до 0,05 – это значит найти такое число x^*, что заведомо будет выполнено неравенство:

$$x^* - 0{,}05 \le x_0 \le x^* + 0{,}05,\ \text{т.е.}\ x_0 \in \left[x^* - 0{,}05; x^* + 0{,}05\right].$$

Вначале перепишем уравнение в виде $2^x = x^3$, откуда ясно, что корни могут находиться только на промежутке $(0,\infty)$. Логарифмируя по основанию 2, получим равносильное уравнение: $\log_2\left(2^x\right) = \log_2\left(x^3\right) \Rightarrow x = 3\log_2 x$.

Построив (на миллиметровой бумаге) графики функций $y_1 = x$ и $y_2 = 3\log_2 x$ (левой и правой частей этого уравнения), несложно заметить, что кривые пересекаются в двух точках (A и B), абсциссы которых и являются искомыми корнями уравнения.

При этом ясно, что $1 < x_A < 2,\ \ 9 < x_A < 10$ (т.е. графически мы находим корни в первом приближении).



Дальнейший поиск корней будет опираться на теорему (имя ее автора установите самостоятельно, обратившись к литературе): если непрерывная функция $f(x)$ на концах отрезка $[a;b]$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то внутри отрезка $[a;b]$ имеется, по меньшей мере, одна точка x_0, такая, что $f(x_0)=0$. Этот корень будет единственным, если $f(x)$ монотонна на рассматриваемом отрезке. В нашем случае будем рассматривать функцию $f(x)=(2)^x - x^3$. На отрезке $[a;b]=[1;\ 2]$ (где мы из графика "увидели" первый корень) эта функция является непрерывной (как разность двух элементарных функций в естественной области определения), монотонной (это устанавливается путем изучения знака производной $f'(x)$, но не существенно для самого поиска корня), а также меняет знак, т.е. $f(1)=2^1-(1)^3=1>0$, $f(2)=2^2-2^3=-4<0$.

Разделим отрезок $[1;2]$ пополам (точкой $x=\dfrac{3}{2}$) и выясним значение функции в точке – середине отрезка. Получаем

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=(2)^{3/2}-\left(\frac{3}{2}\right)^3\approx 2{,}828-3{,}375<0.$$

Учитывая, что (см. выше) $f(1)>0$, делаем вывод, что функция $f(x)$ изменила знак на отрезке $\left[1;\ 3/2\right]$, следовательно (по теореме), на этом отрезке содержится корень уравнения $f(x)=0$. Заметим, что если бы оказалось, что $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$, то это означало бы, что мы нашли точное значение корня, и поиск бы прекратился. Таким образом, промежуток поиска корня "сузился" с первоначального $[1;\ 2]$ до $\left[1;\ 3/2\right]$.

Снова применим тот же прием: разделяя отрезок $\left[1;\ 3/2\right]$ пополам точкой $x = 5/4$, находим $f\left(\frac{5}{4}\right)=(2)^{5/4}-\left(\frac{5}{4}\right)^3 \approx 2{,}378-1{,}95>0$. Поскольку ранее установлено, что $f\left(\frac{3}{2}\right)<0$, то делаем вывод, что $f(x)$ изменила знак на отрезке $\left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$, значит , корень находится на этом (еще более "суженном ") промежутке.

Повторяя процедуру половинного деления еще несколько раз, мы получаем сужающуюся последовательность отрезков, содержащих искомый корень:

$$f\left(\frac{5/4+3/2}{2}\right)=f\left(\frac{11}{8}\right)=(2)^{11/8}-\left(\frac{11}{8}\right)^3 \approx 2{,}594-2{,}597<0 \Rightarrow x_A \in \left(\frac{5}{4};\frac{11}{8}\right);$$

$$f\left(\frac{5/4+11/8}{2}\right)=f\left(\frac{21}{16}\right)\approx 2{,}484-2{,}261>0 \Rightarrow x_A \in \left(\frac{21}{16};\frac{11}{8}\right) \text{ или же } 1{,}3125<x_A<1{,}375.$$

Поскольку длина последнего промежутка $\Delta=\frac{11}{8}-\frac{21}{6}=\frac{1}{16}=0{,}0625<0{,}1$, то мы достигли нужной точности, и можно сказать, что искомый корень (абсцисса точки A) содержится в промежутке $\left(\frac{43}{32}-\frac{1}{32};\frac{43}{32}+\frac{1}{32}\right)$, т.е. $x_A \in (1{,}35-0{,}03;1{,}35+0{,}03)$. Уточняя подсчет, можно найти, что $x_A \approx 1{,}374$. Аналогичным образом можно найти, что $x_B \in \left(\frac{159}{16};10\right)$, т.е. $x_B \in (9{,}97-0{,}03;9{,}97+0{,}03)$. Более точно: $x_B \approx 9{,}9395$.

Контрольные проверки должны подтвердить правильность расчетов: с помощью МК получаем, что $\begin{cases} \text{для} \quad f(1{,}374)\approx -0{,}002; \\ \text{для} \quad f(9{,}9395)\approx -0{,}013 \end{cases}$ (т.е. "почти ноль").

Задача №8.

Для заданной функции $y = f(x)$ и значения аргумента $x = a$

1) найти область определения (ОДЗ) функции $f(x)$;
2) с помощью элементарных преобразований построить график $y = f(x)$;
3) определить величину δ такую, что:

   а) если $a \in$ ОДЗ, то $|f(x) - f(a)| < \varepsilon = 0{,}1$;

   б) если $a \notin$ ОДЗ, то $|f(x)| > 100$, как только $|x-a| < \delta,\ x \neq a$.

I. Дано: $y = f(x) = \left|2\sin\left(\dfrac{x}{3}+1\right)-1\right|$; $a = 7$.

Решение

Напомним, что графики функций: а) $f(-x)$; б) $-f(x)$; в) $f(x-a)$; г) $f(x)+A$; д) $f(kx)\ k>0$; е) $k\,f(x)\,k>0$; ж) $|f(x)|$; з) $f(|x-a|)$ получаются из графика функции $y = f(x)$ следующими геометрическими преобразованиями: а) отражением относительно оси OY; б) отражением относительно оси OX; в) смещением вдоль оси OX на a единиц (влево – если $a < 0$, вправо – если $a > 0$); сдвигом вдоль оси OY на A единиц (вниз – для $A < 0$, вверх – для $A > 0$); д) сжатием вдоль оси OX в k раз (при $k < 1$) или растяжением вдоль оси OX в k раз (при $0 < k < 1$); е) растяжением (при $k < 1$) или сжатием (при $0 < k < 1$) в k раз вдоль оси OY; ж) отражением относительно оси OX той части графика, которая лежит ниже этой оси; з) отражением относительно прямой $x = a$ той части графика, которая лежит правее этой прямой.

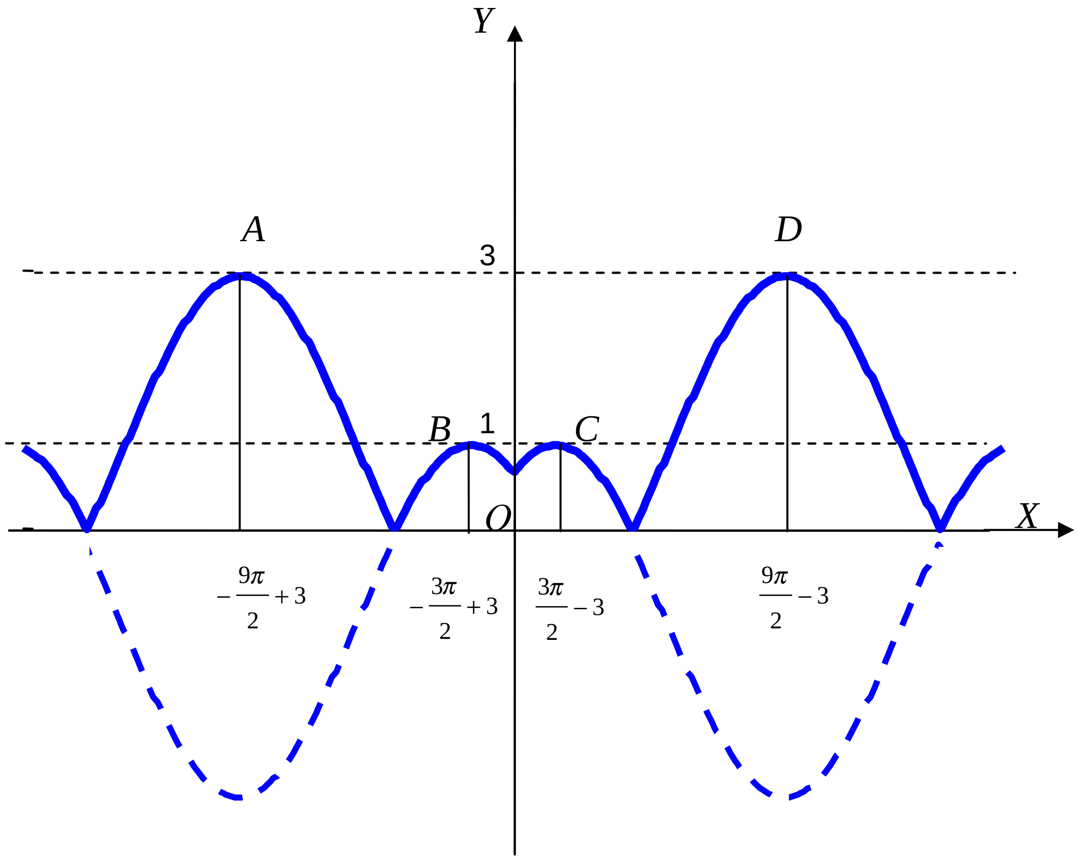
1) в нашем случае функция $y = f(x)$ определена при любых значениях x, т.е. действия, "заложенные" в формуле $f(x)$, выполнимы при $x \in (-\infty; +\infty)$;

2) записав функцию в виде $y = f(x) = 2\left|\sin\left[\dfrac{1}{3}(|x|+3)\right]-\dfrac{1}{2}\right|$ и учитывая, что

$$|x| = \begin{cases} x, & если\ x \geq 0, \\ -x, & если\ x < 0, \end{cases}$$

строим график из двух "ветвей": $y=\begin{cases} 2\left|\sin\left[\frac{1}{3}(x+3)\right]-\frac{1}{2}\right|, \text{ если } x\ge 0, \\ 2\left|\sin\left[\frac{1}{3}(-x+3)\right]-\frac{1}{2}\right|, \text{ если } x<0. \end{cases}$

Взяв за основу график синусоиды $y=\sin x$ и применяя последовательно преобразования $x\to\sin(x+3)\to\sin\left[\frac{1}{3}(x+3)\right]\to\sin\left[\frac{1}{3}(x+3)\right]-\frac{1}{2}\to$ $\to\left|\sin\left[\frac{1}{3}(x+3)\right]-\frac{1}{2}\right|\to 2\left|\sin\left[\frac{1}{3}(x+3)\right]-\frac{1}{2}\right|$, т.е. в), д), г), е), ж), получаем график первой "ветки" – на участке $x\ge 0$. Аналогично строится "ветка" для $x<0$. Общая картина получается такой:



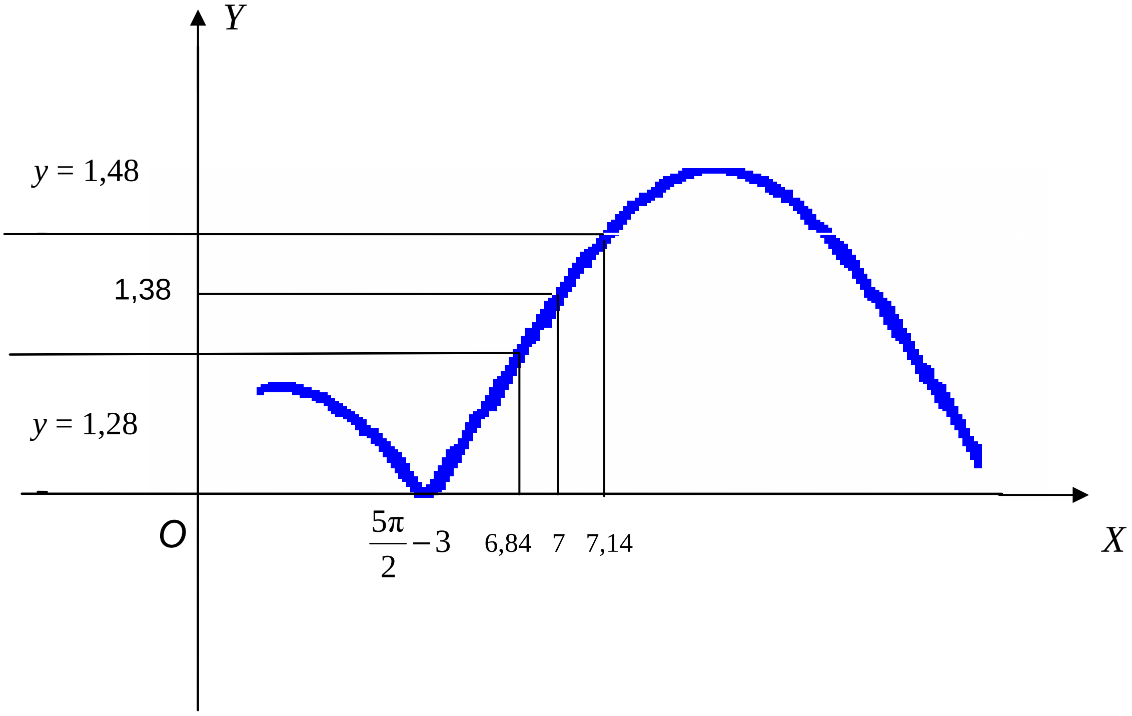
Заметим, что в данном случае получается $f(-x)=f(x)$ (четная функция) и график симметричен относительно оси *OY*. Отметим характерные точки: пересечение с осью *OY* происходит при $x=0\Rightarrow y_0=|2\sin 1-1|\approx 0{,}68$; точки пересечения с осью *OX* рассчитываются из уравнения:

$$f(x)=0\Rightarrow\sin\left[\frac{1}{3}(|x|+3)\right]=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{|x|+3}{3}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + 3\pi k - 3 \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Аналогично рассчитываются координаты "верхушек" *A*, *B*, *C*, *D*, расположенных на уровнях $y = 1$ и $y = 3$ (см. рисунок);

3) для выполнения этого задания необходимо решить неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ в окрестности точки $x = a$. В нашем случае имеем: $\varepsilon = 0{,}1$; $f(a) = f(7) = \left|2\sin\left(\frac{7}{3} + 1\right) - 1\right| = \left|2\sin\left(\frac{10}{3}\right) - 1\right| \approx 1{,}38$ (все углы берутся в радианном измерении).



Решая приближенно, с помощью МК неравенство $|f(x) - f(7)| < 0{,}1$, получаем $-0{,}1 < f(x) - 1{,}38 < 0{,}1$ т.е. $1{,}28 < f(x) < 1{,}48$. Подставляя выражение для $f(x)$, приходим к неравенству $1{,}28 < \left|2\sin\left(\frac{|x|}{3} + 1\right) - 1\right| < 1{,}48$, отсюда

$$-0{,}24 < \sin\left(\frac{|x|}{3} + 1\right) < -0{,}14, \quad (-1)^k \cdot \arcsin(-0{,}24) + \pi k < \frac{|x|}{3} + 1 < (-1)^k \cdot \arcsin(-0{,}14) + \pi k.$$

Для окрестности точки $x = a = 7$ подбираем $k = 1$ и получаем окончательно: $6{,}84 < x < 7{,}14$ (соответствующий промежуток выделен на рисунке). При этом отклонение аргумента x от точки a =7 не должно превышать искомой величины δ. Оцениваем это отклонение модулем разности $|x - 7|$ и видим, что, поскольку $-0{,}16 < x-7 < 0{,}14$; то во всяком случае $|x-7| < 0{,}14$. Итак, в качестве δ мы выбираем число $\delta = 0{,}14$.

II. Дано: $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{|x-1|-2}$, $a=-1$.

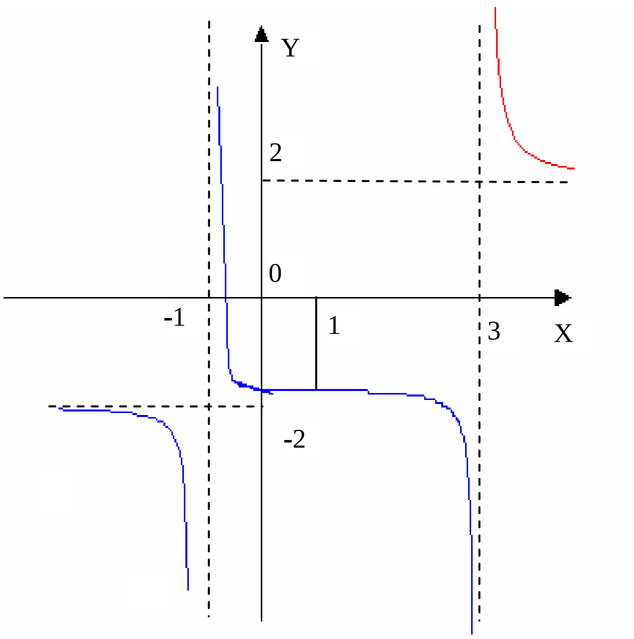
Решение

Раскрывая модуль $|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ если } x \ge 0, \\ -(x-1), \text{ если } x<0 \end{cases}$, получим

$$y = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-3}, \text{ если } x>1; \\ \dfrac{2x+1}{-x-1}, \text{ если } x<1. \end{cases} \qquad (*)$$

1) из формул (*) ясно, что здесь ОДЗ такова: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$;

2) графики функций $y = \dfrac{2x+1}{x-1} = 2 + \dfrac{7}{x-3}$ и $y = \dfrac{2x+1}{-x-1} = -2 + \dfrac{1}{x+1}$ получаются из графика $y = \dfrac{1}{x}$ преобразованиями, аналогичными приведенным в решении предыдущей задачи и являют собой ветви гипербол на участках $x>1$ и $x<1$. Получаем общую картинку:



3) поскольку точка $x = a = -1$ не входит в ОДЗ, то решаем неравенство $|f(x)| > 100$ (в окрестности точки $x = -1$). Имеем: $y = f(x) = \frac{2x+1}{-x-1}$ (в искомой окрестности – это следует из (*)).

$$\left|\frac{2x+1}{-x-1}\right| > 100 \Leftrightarrow |2x+1| > 100 \cdot |-x-1| = 100|x+1|.$$

При $x < -1 \Rightarrow -2x-1 > -100x-100 \Rightarrow x > -\frac{99}{98}$; при

$-1 < x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2x-1 > 100x+100 \Rightarrow x < -\frac{101}{102}$. Значит, $x \in \left(-\frac{99}{98}; -\frac{101}{102}\right)$, $x \neq -1$.

Поэтому $\frac{1}{98} < x-(-1) < \frac{1}{102}$, и тогда очевидно, что $|x-(-1)| = |x+1| < \frac{1}{102}$.

В качестве δ берем число $\delta = \frac{1}{102}$.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1986. – 516 с.

2. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969. – 640 с.

3. Ефимов В.А., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для вузов: В 3 т. Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 464 с.

4. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. Ч. 1. – М.: Наука, 1974. – 416 с.

5. Дубровин Н.И. Задания к типовым расчетам по высшей математике / Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1993. – 64 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КУРБЫКО Инна Федоровна
ЛЕВИЗОВ Сергей Всеволодович

МАТЕМАТИКА
I семестр
Практикум для студентов-заочников

Редактор-корректор И.В. Бойцова
Компьютерная верстка И.В. Бойцова

ЛР № 020275. Подписано в печать 23.04.03.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,45. Тираж 400 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.