Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Ю. К. КОКУРИНА

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, АНАЛИЗ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2016

УДК 51
ББК 22.1
К57

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Т. В. Прохорова

Кандидат экономических наук
доцент кафедры математики и информатики
Владимирского филиала Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации
С. В. Никифорова

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Кокурина, Ю. К.
К57 Арифметика, алгебра, анализ : учеб.-практ. пособие / Ю. К. Кокурина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2016. – 143 с.
ISBN 978-5-9984-0705-5

Составлено на основе задач вступительных экзаменов последних 15 лет. Содержит необходимый справочный и теоретический материал, разбор решений типичных примеров и задания для самостоятельного решения.

Предназначено для преподавателей и слушателей подготовительных курсов и лицеев при ВлГУ. Пособие может быть использовано для подготовки к экзамену в университет.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 37. Табл. 6. Библиогр.: 5 назв.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-9984-0705-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие предназначено для абитуриентов (в том числе и для иностранных), желающих расширить и углубить свои знания по математике, приобрести навыки решения типовых задач и самостоятельно оценить уровень своей подготовки в соответствии с основными требованиями, принятыми в России. Задачи, изложенные в пособии, отвечают минимальным требованиям программы для поступающих в российские вузы и охватывают основные разделы школьного курса. Конечно, формат укороченных вступительных испытаний иностранных абитуриентов вносит определенные особенности как в тематику задач, так и в стиль их выполнения.

В пособии дано краткое описание программы по математике, приведен справочный материал и некоторые примеры заданий. Для части этих заданий дано подробное решение, а для остальных приведены ответы, что позволит учащимся самостоятельно контролировать правильность своих решений.

Книга может быть полезна слушателям подготовительных отделений вузов, а также школьным учителям в их повседневной работе.

Перечень обозначений

N − множество натуральных чисел
Z − множество целых чисел
Q − множество рациональных чисел
R − множество действительных чисел
$a \in A$ − элемент a принадлежит множеству A
$a \notin A$ − элемент a не принадлежит множеству A
$=$ − равно
$\neq$ − не равно
$>$ − больше
$<$ − меньше
$\geq$ − больше или равно
$\leq$ − меньше или равно
$\approx$ − приближённо равно
$\sqrt[n]{\ }$ − корень n-й степени
$\rightarrow$ − знак следствия
$\leftrightarrow$ − знак равносильности
Ø − пустое множество
$\cup$ − знак объединения множеств
$\cap$ − знак пересечения множеств
% − процент
( ) − круглые скобки
[ ] − квадратные скобки
{ } − фигурные скобки
∞ − бесконечность
' − производная
$\int$ − интеграл

ПРОГРАММА КУРСА ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Арифметика, алгебра и начала анализа

✓ Натуральные числа и нуль. Сложение, вычитание, умножение, деление и сравнение натуральных чисел. Квадрат и куб натурального числа. Простые и составные числа. Делитель, кратное. Четные и нечетные числа.

✓ Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25.

✓ Деление с остатком.

✓ Разложение натурального числа на простые множители. Делитель общий, кратное общее. Делитель общий наибольший, кратное общее наименьшее.

✓ Целые числа. Противоположные числа. Действия над целыми числами.

✓ Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Целая и дробная части числа. Основное свойство дроби. Сокращение обыкновенных дробей. Сравнение обыкновенных дробей. Их сложение, вычитание, умножение и деление.

✓ Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей. Приближенное значение числа. Округление чисел.

✓ Рациональные числа. Действия над рациональными числами.

✓ Иррациональные числа. Действительные числа. Представление действительных чисел в форме десятичных дробей. Числовая прямая. Изображение чисел на числовой прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.

✓ Проценты. Пропорции. Основные свойства пропорции. Прямая и обратная пропорциональность.

✓ Степень с натуральным и целым показателем. Свойства степеней с натуральным и целым показателями.

✓ Числовые выражения. Алгебраические выражения. Тождественно равные выражения. Формулы сокращенного умножения.

- ✓ Одночлен и многочлен. Действия над многочленами. Разложение многочлена на множители. Тождественные преобразования многочленов.
- ✓ Алгебраическая дробь. Основное свойство дроби. Действия над алгебраическими дробями. Тождественные преобразования рациональных выражений.
- ✓ Корень n-й степени ($n \in N$), его свойства для случаев четного и нечетного значений числа n. Арифметический корень. Свойства арифметических корней.
- ✓ Степень с рациональным показателем. Свойства степеней с рациональными показателями.
- ✓ Степень с действительным показателем.
- ✓ Арифметическая прогрессия. Формулы n-го члена и суммы первых n членов.
- ✓ Геометрическая прогрессия. Формулы n-го члена и суммы первых n членов.
- ✓ Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
- ✓ Уравнения. Корень уравнения. Равносильные уравнения. Линейные уравнения.
- ✓ Квадратное уравнение. Формулы корней квадратного уравнения.
- ✓ Приведенное квадратное уравнение.
- ✓ Теорема Виета (прямая и обратная).
- ✓ Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.
- ✓ Биквадратное уравнение. Решение биквадратных уравнений.
- ✓ Решение рациональных уравнений.
- ✓ Решение иррациональных уравнений.
- ✓ Свойства числовых неравенств.
- ✓ Неравенство с одной переменной. Равносильные неравенства. Решение линейных неравенств вида $ax > b$; $ax < b$; $ax \geq b$; $ax \leq b$; $b < ax < c$; $b \leq ax < c$; $b < ax \leq c$; $b \leq ax \leq c$.
- ✓ Квадратичное неравенство. Решение квадратичных неравенств.
- ✓ Решение рациональных неравенств.
- ✓ Решение уравнений и неравенств, которые содержат переменную под знаком модуля.
- ✓ Решение систем линейных и квадратных уравнений и неравенств.

✓ Расстояние между двумя точками координатной плоскости. Уравнение окружности.

✓ Единичная окружность. Определения тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Основные тригонометрические тождества.

✓ Синус, косинус, тангенс суммы (разности) двух аргументов (формулы сложения).

✓ Формулы приведения.

✓ Синус, косинус, тангенс двойного аргумента.

✓ Синус, косинус, тангенс половинного аргумента.

✓ Преобразование в произведение сумм $\sin \alpha \pm \sin \beta$, $\cos \alpha \pm \cos \beta$, $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta$.

✓ Арксинус числа *a*.

✓ Арккосинус числа *a*.

✓ Арктангенс числа *a*.

✓ Решение простейших тригонометрических уравнений: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

✓ Решение тригонометрических уравнений, которые приводятся к простейшим.

✓ Свойства функции $y = ax + b$ и её график.

✓ Свойства функции $y = k/x$ (где $k \neq 0$) и её график.

✓ Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ (где $a \neq 0$) и её график.

✓ Свойства функции $y = \sqrt{x}$ и её график.

✓ Свойства функции $y = x^n$ ($n \in R$) и её график.

✓ Свойства функции $y = a^x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) и её график.

✓ Свойства функции $y = \log_a x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) и её график.

✓ Свойства функции $y = \sin x$ и её график.

✓ Свойства функции $y = \cos x$ и её график.

✓ Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ и её график.

✓ Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

✓ Определение логарифма. Логарифм произведения, степени, частного.

✓ Десятичные логарифмы. Натуральные логарифмы. Формула перехода от одного основания логарифма к другому.

✓ Тождественные преобразования выражений, содержащих логарифмы.

✓ Понятие функции. Область определения функции. Область значений функции. Способы задания функции. График функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства функции. Чётность и нёчетность функции. Периодичность функции. Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум функции.

✓ Производные основных функций. Касательная к графику функции.

✓ Решение задач с параметрами.

Основные умения и навыки

Абитуриент должен ***уметь:***

✓ выполнять арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; округлять с нужной точностью числа и результаты вычислений;

✓ проводить тождественные преобразования многочленов, рациональных выражений и выражений, которые содержат степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции;

✓ строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций;

✓ решать уравнения, системы уравнений и неравенств первой и второй степеней, уравнения и неравенства, которые приводятся к ним;

✓ решать рациональные уравнения и неравенства;

✓ решать текстовые задачи (включая задачи на проценты) по действиям или методом составления уравнений и их систем;

✓ решать иррациональные уравнения;

✓ решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства, их системы, тригонометрические уравнения;

✓ решать уравнения и неравенства, которые содержат переменную под знаком модуля;

✓ решать задачи с векторами;

✓ решать задачи на исследование функций и построение их графиков;

✓ решать задачи на нахождение производных функций;

✓ решать задачи на нахождение касательных к графикам функций;

✓ решать уравнения, неравенства и системы с параметрами.

1. АРИФМЕТИКА

1.1. Признаки делимости натуральных чисел

1. Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или является четным числом.

2. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры 00 или образуют двузначное число, делящееся на 4.

3. Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры 000 или образуют трехзначное число, делящееся на 8.

4. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 3.

5. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9.

6. Число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.

7. Число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.

8. Число делится на 25 тогда и только тогда, когда две его последние цифры 00 или образуют двузначные числа 25, 50, 75.

9. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой его цифр, стоящих на четных местах, и суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, равна 0 или делится на 11.

Пример. Найти сумму всех натуральных двузначных чисел, которые при делении на 6 дают в остатке 4.

Решение. Выпишем натуральные числа, которые при делении на 6 дают в остатке 4, выделим двузначные и зачеркнём числа, не являющиеся двузначными: 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, 70, 76, 82, 88, 94. Сумма выделенных чисел равна 780.

Ответ: 780.

1.2. НОД, НОК

Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел называется наибольшее натуральное число, являющееся делителем всех данных чисел.

Способ нахождения НОД: разложить числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел.

Способ нахождения НОК: разложить числа на простые множители и найти произведение всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

Для двух натуральных чисел a и b выполняется равенство

$$\text{НОД}(a; b) \cdot \text{НОК}(a; b) = a \cdot b.$$

Пример. Найти частное от деления наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель чисел 540 и 504.

Решение. $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0$; $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1$.

$\text{НОД}(540; 504) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 36$; $\text{НОК}(540; 504) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 =$ $= 7560$.

Следовательно, $\frac{\text{НОК}}{\text{НОД}} = \frac{7560}{36} = 210$.

Ответ: 210.

1.3. Пропорция

Пропорцией называется верное равенство вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $bd \neq 0$.

Свойства пропорции.

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$.
2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, ac \neq 0$.
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$.
4. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, a \neq b, c \neq d$.
5. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Пример. Числители трёх дробей пропорциональны числам 1, 3, 2, а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1, 5, 3. Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{34}{135}$. Найти наименьшую из дробей.

Решение. Дроби, о которых идёт речь, можно записать так: $a=\frac{1x}{1y}; b=\frac{3x}{5y}; c=\frac{2x}{3y}$.

После приведения к общему знаменателю $a=\frac{15x}{15y}; b=\frac{9x}{15y}; c=\frac{10x}{15y}$.

Ясно, что наименьшей дробью является b. Среднее арифметическое всех дробей равно $\frac{a+b+c}{3}=\frac{34x}{45y}=\frac{34}{135}$. Отсюда $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$. Следовательно, $b=\frac{3x}{5y}=\frac{3}{5}\cdot\frac{x}{y}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

1.4. Проценты

Процентом числа называется сотая его часть.

Если число a n раз последовательно увеличивать на p %, то получится число $a\cdot\left(1+\frac{p\%}{100\%}\right)^n$.

Если число a n раз последовательно уменьшать на p %, то получится число $a\cdot\left(1-\frac{p\%}{100\%}\right)^n$.

Процент изменения любой величины вычисляется по формуле $\frac{(\text{конечное значение})-(\text{начальное значение})}{(\text{начальное значение})}\cdot 100\%$.

Если результат получится положительным, то величина увеличилась.

Если результат получился отрицательным, то величина уменьшилась.

Пример. Два числа относятся как 4 : 3. Первое увеличили на 5 %, второе уменьшили на 2 %. На сколько процентов изменилась их сумма?

Решение. Пусть $4x$ и $3x$ – первоначально данные числа. Их сумма равна $\sum_{нач} = 4x + 3x = 7x$. После изменения чисел сумма стала равняться $\sum_{кон} = (4x + 5\% \cdot 4x) + (3x - 2\% \cdot 3x) = (4x + 0{,}05 \cdot 4x) + (3x - 0{,}02 \cdot 3x) = 7{,}14x.$

Процент изменения суммы равен

$$\frac{\sum_{кон} - \sum_{нач}}{\sum_{нач}} \cdot 100\% = \frac{7{,}14x - 7x}{7x} = 2\%.$$

Ответ: Сумма увеличилась на 2 %.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму первых двадцати натуральных чётных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 6.
2. Найти сумму всех чётных чисел k, каждое из которых делится без остатка на 7 и удовлетворяет условию $140 \le k < 295$.
3. Найдите частное от деления наименьшего общего кратного чисел 156, 234, 78 на их наибольший общий делитель.
4. На сколько процентов изменится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 10 %, а другое уменьшить на 20 %?
5. Числитель дроби уменьшили на 1 %, а знаменатель – на 12 %. На сколько процентов изменилась дробь?

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ЧИСЛОВЫЕ УПРОЩЕНИЯ

2.1. Формулы сокращённого умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов;

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab \cdot (a + b)$ – куб суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab \cdot (a - b)$ – куб разности.

2.2. Свойства степеней

Произведение $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$ n сомножителей, равных a, называется n-й степенью числа a и обозначается через a^n ($a \in R, n \in N, n \neq 1$). При этом a называется основанием, а n − показателем степени. При $n = 1$ просто полагают $a^1 = a$.

Свойства степени с натуральным показателем:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;
2. $a^n : a^m = a^{n-m}, n \geq m$;
3. $(a^n)^m = a^{nm}$;
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$.

Степенью с отрицательным целым показателем называется число, где $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, где $a \in R, a \neq 0, n \in N$. Нулевую степень числа $a \neq 0$ полагают по определению равной единице: $a^0 = 1$, $a \neq 0$.

Свойства 1 – 5 степени с натуральным показателем справедливы и для степени с целым показателем.

2.3. Корень *n*-й степени

Корнем n-й степени $(n \in N, n \neq 1)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a (т. е. $b^n = a$).

Арифметическим корнем n-й степени $(n \in N, n \neq 1)$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Свойства арифметического корня:

1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, a \geq 0, n, m, k \in N, n \neq 1$;
2. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, a \geq 0, b \geq 0, n \in N, n \neq 1$;
3. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0, n \in N, n \neq 1$;
4. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}, a \geq 0, b \geq 0, n, m \in N, n \neq 1, m \neq 1$;

5. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\dfrac{a^m}{b^n}}, a \geq 0, b > 0, n, m \in N, n \neq 1, m \neq 1;$

6. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, a \geq 0, n, m \in N, n \neq 1, m \neq 1;$

7. $(\sqrt[n]{a})^n = a, a \geq 0, n \in N, n \neq 1;$

8. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, a \in R, n \in N;$

9. $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, a \in R, n \in N.$

Степенью с рациональным показателем называется число $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0, m \in Z, n \in N, n \neq 1.$

2.4. Модуль

Алгебраическое определение модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, \textit{если} \quad a \geq 0, \\ -a, \textit{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Геометрическое определение модуля: модуль числа *a* равен расстоянию на числовой прямой от точки, соответствующей числу *a*, до начала отсчета 0.

Свойства модуля (здесь везде $a \in R, b \in R$):

1. $|a| \geq 0;$
2. $|a| = |-a|;$
3. $|a| \geq a;$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$
5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0;$
6. $|a|^2 = a^2;$
7. $|a^n| = |a|^n;$
8. $|a+b| \leq |a| + |b|;$
9. $|a| - |b| \leq |a-b|;$
10. $|a| + |b| = |a+b| \leftrightarrow ab \geq 0;$
11. $|a| + |b| = |a-b| \leftrightarrow ab \leq 0.$

Пример. Дано $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-5}$. Упростить выражение $f(x+2)-f(x+8)$.

Решение

$$f(x+2)-f(x+8)=\frac{3\cdot(x+2)+2}{(x+2)-5}-\frac{3\cdot(x+8)+2}{(x+8)-5}=\frac{3x+8}{x-3}-\frac{3x+26}{x+3}=\frac{102}{x^2-9}.$$

Пример. Дано $\sqrt{8-t}-\sqrt{3-t}=2$. Вычислить $\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}$.

Решение. Обе части данного уравнения умножим на сопряжённое выражение. Получим $(\sqrt{8-t}-\sqrt{3-t})\cdot(\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t})=2\cdot(\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t})$;

$(8-t)-(3-t)=2\cdot(\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t})$. Отсюда $\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}=\dfrac{5}{2}$.

Ответ: $\dfrac{5}{2}$.

Пример. Вычислить $A=\sqrt{(\sqrt{6}+1)^3+1-\sqrt{6}}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

Решение. Сначала упростим подкоренное выражение.

$(\sqrt{6}+1)^3+1-\sqrt{6}=(\sqrt{6})^3+3\cdot(\sqrt{6})^2+3\cdot\sqrt{6}+1+1-\sqrt{6}=$

$=6\cdot\sqrt{6}+18+3\cdot\sqrt{6}+2-\sqrt{6}=8\cdot\sqrt{6}+20.$

Итак,

$A=\sqrt{8\cdot\sqrt{6}+20}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})=-\sqrt{(8\cdot\sqrt{6}+20)\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=$

$=-\sqrt{(8\cdot\sqrt{6}+20)\cdot(3-2\cdot\sqrt{6}+2)}=-\sqrt{4}=-2.$

Ответ: –2.

Пример. Вычислить $A=\dfrac{10}{1-\sqrt{6}}+\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{3}{\sqrt{6}-3}$.

Решение. Числители и знаменатели всех дробей домножим на «сопряжённые выражения». Получим

$$A=\frac{10\cdot(1+\sqrt{6})}{(1-\sqrt{6})\cdot(1+\sqrt{6})}+\frac{2\cdot(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)\cdot(\sqrt{6}+2)}-\frac{3\cdot(\sqrt{6}+3)}{(\sqrt{6}-3)\cdot(\sqrt{6+3})}=$$

$$=\frac{10\cdot(1+\sqrt{6})}{1-6}+\frac{2\cdot(\sqrt{6}+2)}{6-4}-\frac{3\cdot(\sqrt{6}+3)}{6-9}=$$

$=-2\cdot(1+\sqrt{6})+(\sqrt{6}+2)+(\sqrt{6}+3)=3.$

Ответ: 3.

Задачи для самостоятельного решения

1. Упростить выражение $A=\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}+\dfrac{x^2-18x-40}{x^2-x-6}+\dfrac{x^3+27}{x^2-9}.$

2. Дано $\sqrt{3-t}-\sqrt{2-t}=1.$ Вычислить $\sqrt{3-t}+\sqrt{2-t}.$

3. Дано $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-4}.$ Упростить выражение $f(x^2)-f(x+2).$

4. Вычислить $\dfrac{(2-\sqrt{3})^3+4}{\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}}.$

5. Вычислить $\sqrt{(3-\sqrt{5})^3+24}\cdot(1+\sqrt{5}).$

3. ПРОГРЕССИИ

3.1. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется такая последовательность действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, у которой каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же действительным числом d, называемым разностью арифметической прогрессии. То есть $a_{n+1}=a_n+d \quad (n\in N, d\in R)$.

Формула общего члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Свойства членов арифметической прогрессии:

1. Любой член арифметической прогрессии, кроме первого, равен среднему арифметическому своих соседних: $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$.

2. Суммы членов конечной арифметической прогрессии, равноотстоящих от её концов, равны между собой и равны сумме первого и последнего:

$$a_k+a_{n-k+1}=a_1+a_n.$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n.$$

Пример. В арифметической прогрессии сумма пятого и девятого членов равна 36. Найти сумму первых тринадцати членов прогрессии.

Решение. Имеем

$$a_5 + a_9 = a_1 + 4d + a_1 + 8d = 2a_1 + 12d = 2 \cdot (a_1 + 6d) = 36.$$

Отсюда $a_1 + 6d = 18$. Следовательно,

$$S_{13} = \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = (a_1 + 6d) \cdot 13 = 18 \cdot 13 = 234.$$

Ответ: 234.

Пример. В арифметической прогрессии сумма первых шести членов равна 12, разность прогрессии равна –2, последний член равен –19. Найти количество членов прогрессии.

Решение. По условию d = –2, а также $S_6 = \dfrac{2a_1 + 5d}{2} 6 = (2a_1 + 5(-2))\, 3 = 12$.

Следовательно, $a_1 = 7$. Затем используем формулу общего члена.

$a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + (n-1) \cdot (-2) = -19$. Отсюда $n = 14$.

Ответ: 14.

Пример. Сумма первых n членов некоторой последовательности задана формулой $S_n = \dfrac{3n^2 - 11n}{4}$. Найти четвёртый член этой последовательности.

Решение. По определению

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 = S_3 + a_4.$$

Следовательно, $a_4 = S_4 - S_3 = \dfrac{3 \cdot 4^2 - 11 \cdot 4}{4} - \dfrac{3 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3}{4} = 2{,}5.$

Ответ: 2,5.

3.2. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется такая последовательность действительных чисел b_1, b_2, …, b_n, …, у которой каждый её член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же действительное число $q \neq 0$, называемое знаменателем геометрической прогрессии. То есть $b_{n+1} = b_n \cdot q \quad (n \in N, q \in R, q \neq 0)$.

Формула общего члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Свойства членов геометрической прогрессии:

1. Любой член знакоположительной геометрической прогрессии, кроме первого, равен среднему геометрическому своих соседних:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Любой член произвольной геометрической прогрессии, кроме первого, обладает тем свойством, что $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

2. Произведения членов конечной геометрической прогрессии, равноотстоящих от её концов, равны между собой и равны произведению первого и последнего:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n.$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна $S_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ при $q \neq 1$ и равна $S_n = n \cdot b_1$ при $q = 1$.

Бесконечная геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей, если $|q| < 1$. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

Пример. Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 5, а сумма последних двух равна 20. Найти первый член прогрессии.

Решение

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q = 5 \\ b_1 q^2 + b_1 q^3 = 20. \end{cases}$$

Разделив вторую строку на первую, получим $q^2 = 4$, $q = \pm 2$. Так как по условию прогрессия возрастает, $q = 2$. Из первого уравнения системы получим $b_1 = \dfrac{5}{1+q} = \dfrac{5}{3}$.

Ответ: $\dfrac{5}{3}$.

Пример. Найти первый член убывающей геометрической прогрессии, если произведение её первых трёх членов равно 8, а их сумма равна $\frac{19}{3}$.

Решение

$$\begin{cases} b_1^3 q^3 = 8, \\ b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = \dfrac{19}{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = \dfrac{2}{b_1}, \\ b_1 + 2 + \dfrac{4}{b_1} = \dfrac{19}{3}. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдём $b_1 = 3$ или $\frac{4}{3}$. С учётом убывания последовательности оставляем первый вариант.

Ответ: 3.

Пример. Сумма первых n членов геометрической прогрессии задана формулой $S_n = \frac{3^n + (-1)^{n+1}}{3^{n-1}}$. Найти b_3.

Решение

$$b_3 = S_3 - S_2 = \frac{3^3 + (-1)^4}{3^2} - \frac{3^2 + (-1)^3}{3} = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $\frac{4}{9}$.

Пример. В геометрической прогрессии, все члены которой отрицательны, произведение первого и седьмого членов равно 81. Найти $A = a_4^2 + a_4 + 12$.

Решение. $a_1 \cdot a_7 = a_1 \cdot a_1 q^6 = a_1^2 q^6 = (a_1 q^3)^2 = a_4^2 = 81.$ Отсюда $a_4 = \pm\sqrt{81} = \pm 9$.

Условию задачи удовлетворяет $a_4 = (-9)$. Следовательно, $A = (-9)^2 - 9 + 12 = 84$.

Ответ: 84.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 12, а сумма второго и седьмого равна 3. Найти шестой член прогрессии.

2. Найдите наименьшую из сумм первых n членов арифметической прогрессии, если $a_1 = -157$ и $a_2 = -143$.

3. В арифметической прогрессии известны члены $a_{10} = 3$ и $a_{100} = 543$. Укажите номер K члена этой прогрессии, начиная с которого все её члены не меньше 213.

4. В арифметической прогрессии $a_{15} = -19$ и $a_{22} = -14$. Найдите количество положительных членов прогрессии, каждый из которых не больше 21.

5. Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 2, а сумма последних двух равна 18. Найти первый член прогрессии.

6. В знакочередующейся геометрической прогрессии первый член равен 2, а сумма третьего и пятого членов равна 180. Найдите второй член прогрессии.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА

4.1. Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и её графика

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ и её графика определяются прежде всего значениями коэффициента a и дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

При $a > 0$ график – парабола с ветвями, направленными вверх (рис. 1, *а*, *б*, *в*). При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз (рис. 1, *г*, *д*, *е*). Если $a = 0$, графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является прямая, наклонная, если $b \neq 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ при этом имеет единственный корень, (рис. 1, *ж*); горизонтальная, если $b = 0$, причём, если $c \neq 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, (рис. 1, *з*), если $c = 0$, линия $y = ax^2 + bx + c$ совпадает с осью OX, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет бесконечно много корней, (рис. 1, *и*).

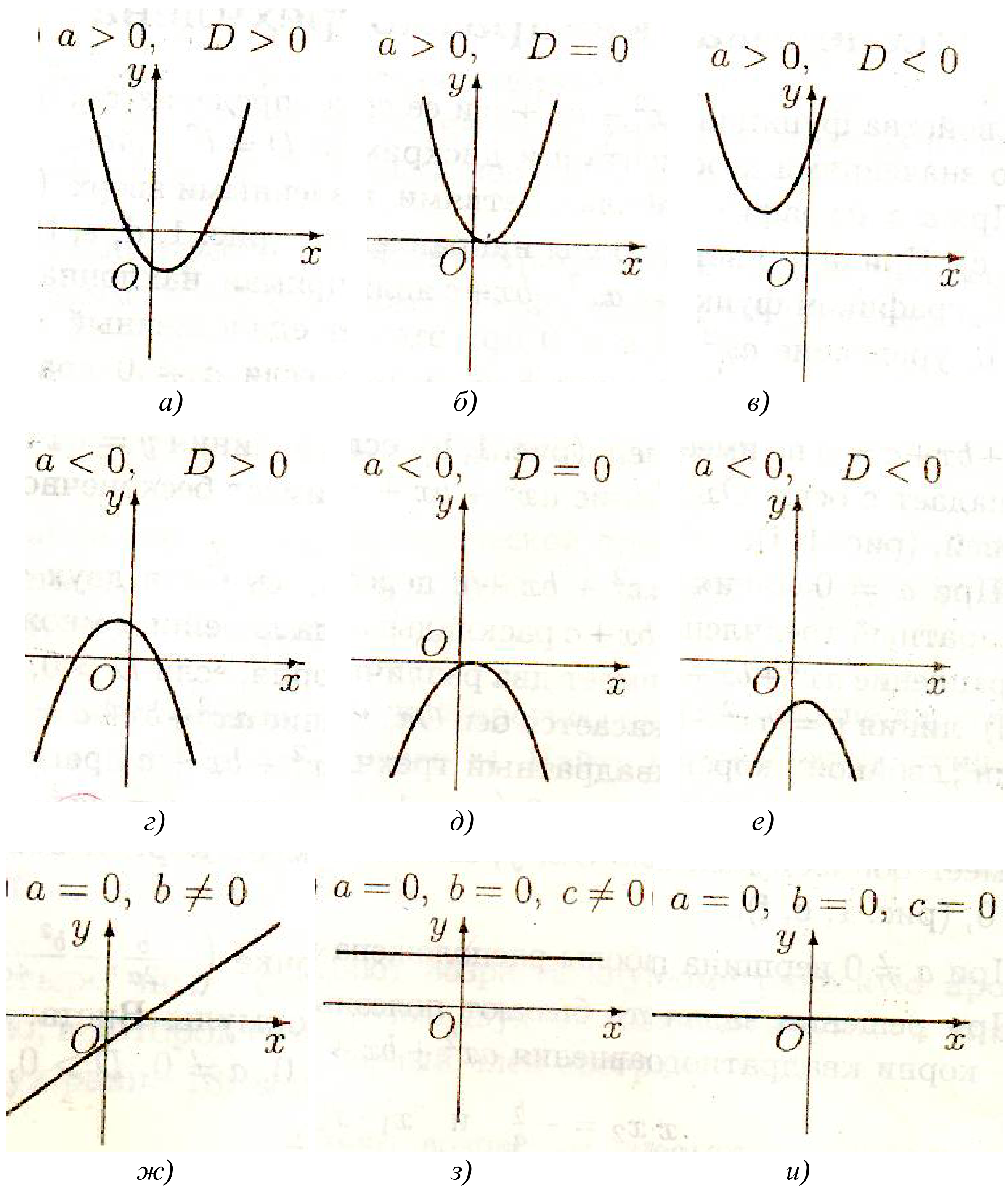


Рис. 1

При $a \neq 0$ линия $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось OX в двух точках, квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ раскладывается на линейные множители, а уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня, если $D > 0$, (рис. 1, *а*, *г*); линия $y = ax^2 + bx + c$ касается оси OX, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один «двойной» корень, а квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ представляет собой полный квадрат при $D = 0$, (рис. 1, *б*, *д*); линия $y = ax^2 + bx + c$ не имеет общих точек с осью OX, уравнение не имеет корней вовсе, если $D < 0$, (рис. 1, *в* , *е*).

При $a \neq 0$ вершина параболы расположена в точке $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = a(a+1)x^2 + 2(a+1)x + 2$ не имеет общих точек с осью OX.

Решение. Рассмотрим отдельно случай равенства нулю коэффициента при x^2: $a(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = -1$. При $a = 0$ уравнение линии имеет вид $y = 2x + 2$.

Имеется общая с осью OX точка $(-1, 0)$. При $a = -1$ уравнение линии имеет вид $y = 2$, линия общих точек с осью OX не имеет, следовательно, $a = -1$ – часть ответа.

Если коэффициент при x^2, $a(a+1) \neq 0$, то график функции является параболой и общих точек с осью OX он иметь не будет тогда и только тогда, когда дискриминант отрицателен:

$$D < 0 \Leftrightarrow 4(a+1)^2 - 8a(a+1) < 0 \Leftrightarrow 4(a+1)(1-a) < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Объединяя оба результата, получим ответ.

Ответ: $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = (a+2)x^2 + 2ax - a$ имеет с осью абсцисс две общие точки.

Решение. График имеет две общие точки с осью OX в случае, когда это парабола и $D > 0$:

$$\begin{cases} a + 2 \neq 0, \\ (2a)^2 - 4(a+2)(-a) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq -2, \\ 4a(a+1) > 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (0, \infty)$.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = (a + 1)x^2 + (a - 2)x + 1$ имеет с осью OX только одну общую точку.

Решение. График будет иметь с осью ОХ только одну общую точку в одном из двух случаев: график – наклонная прямая или график – парабола, касающаяся оси *OX*. Для определения параметра получаем систему

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+1=0, \\ a-2\neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a+1\neq 0, \\ (a-2)^2-4(a+1)\cdot 1=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Первая подсистема даёт $a = -1$, вторая $a = 0$, $a = 8$.

Ответ: –1, 0, 8.

4.2. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$

Обозначим $f(x)=x^2+px+q$; $D=p^2-4q$ – дискриминант.

1. При каких значениях уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, меньшие данного значения x_0? Ответ на этот вопрос следующий:

$$\begin{cases} D\geq 0 \ (\textit{существование корней}), \\ -\dfrac{p}{2}<x_0 \ (\textit{абсцисса вершины параболы } y=f(x) \textit{ находится слева от } x_0), \\ f(x_0)>0. \end{cases}$$

Замечание. Если в условии задачи явно написано, что уравнение имеет два корня, то вместо $D \geq 0$ следует писать $D > 0$.

2. При каких значениях уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, большие данного значения x_0? Ответ на этот вопрос следующий.

$$\begin{cases} D\geq 0 \ (\textit{существование корней}), \\ -\dfrac{p}{2}>x_0 \ (\textit{абсцисса вершины параболы } y=f(x) \textit{ находится слева от } x_0), \\ f(x_0)>0. \end{cases}$$

Замечание. Если в условии задачи явно написано, что уравнение имеет два корня, то вместо $D \geq 0$ следует писать $D > 0$.

3. При каких значениях уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, один из которых больше, а другой меньше, чем x_0? Ответ на этот вопрос следующий: $f(x_0) < 0$.

<u>*Пример*</u>. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a + 3)x^2 + 4x + 2 - a = 0$ имеет только отрицательные корни.

Решение. Допустим, что коэффициент при x^2 равен нулю, т. е. $a = -3$.

Тогда получим уравнение $4x + 5 = 0$, корень которого $x = -1{,}25 < 0$, что соответствует условию задачи. Следовательно, $a = -3$ нужно включить в ответ.

Допустим, что коэффициент при x^2 не равен нулю, т. е. $a \neq -3$. Разделим уравнение на $a + 3$ и введём обозначения:

$$f(x) = x^2 + \frac{4}{a+3} \cdot x + \frac{2-a}{a+3} = 0; \qquad p = \frac{4}{a+3}; \qquad q = \frac{2-a}{a+3}; \qquad x_0 = 0;$$

$D = p^2 - 4q = \dfrac{4a^2 + 4a - 8}{(a+3)^2}$. Нужно решить систему $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\dfrac{p}{2} < x_0, \\ f(x_0) > 0. \end{cases}$ т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{4a^2 + 4a - 8}{(a+3)^2} \geq 0, \\ -\dfrac{2}{a+3} < 0, \\ f(0) = \dfrac{2-a}{a+3} > 0. \end{cases}$$ Отсюда $a \in (-3; -2] \cup [1; 2)$.

Ответ: $[-3; -2] \cup [1; 2)$.

<u>*Пример*</u>. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $ax^2 - 6x + a - 8 = 0$ больше, а другой меньше, чем 2.

Решение. Так как уравнение имеет два корня, то коэффициент при x^2 не равен нулю, т. е. $a \neq 0$. Разделим уравнение на a и обозначим $f(x) = x^2 - \dfrac{6}{a} \cdot x + \dfrac{a-8}{a} = 0$; $x_0 = 2$. Нужно решить неравенство $f(x_0) = f(2) = 4 - \dfrac{12}{a} + \dfrac{a-8}{a} < 0$.

Ответ. (0; 4).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = (a+4)x^2 + 6x + a - 4$ имеет с осью абсцисс две общие точки.

2. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = a(4-a)x^2 + 2ax + 1$ не имеет общих точек с осью OX.

3. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=(a+2)x^2+4x+3-a$ имеет с осью OX только одну общую точку.

4. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=a(a+1)x^2+2(a+1)x-a-1$ имеет с осью OX более одной общей точки.

5. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $(a+3)x^2+4x+2-a=0$ больше, а другой меньше, чем –1.

5. УРАВНЕНИЯ

5.1. Квадратные уравнения. Теорема Виета

Квадратным относительно переменной x называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Количество корней квадратного уравнения определяется значением дискриминанта квадратного трехчлена: $D = b^2 - 4ac$.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных корня $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Теорема Виета (прямая). Если x_1 и x_2 − корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Теорема Виета (обратная). Если два действительных числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Следствия *из теоремы Виета (разложение квадратного трёхчлена на множители):*

1. Если x_1 и x_2 − корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2. Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c = 0$ имеет равные корни $x_1 = x_2$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

3. Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней, то он не разлагается на множители.

Исследование знаков корней квадратного уравнения

1. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если они существуют, положительны тогда и только тогда, если
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

2. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если они существуют, отрицательны тогда и только тогда, если
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} < 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0. \end{cases}$$

3. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ имеют разные знаки тогда и только тогда, если $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} < 0$.

4. Один из корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен нулю тогда и только тогда, если $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \neq 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = 0. \end{cases}$

5. Оба корня квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны нулю тогда и только тогда, когда $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = 0, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = 0. \end{cases}$

Пример. Найти сумму кубов корней уравнения $x^2 - x - 10 = 0$.

Решение. Легко видеть, что дискриминант уравнения положителен и существуют два различных корня x_1 и x_2. Возможно и непосредственное вычисление суммы $x_1^3 + x_2^3$, но проще воспользоваться формулами Виета и тождеством

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1^3 - 3 \cdot (-10) \cdot 1 = 31.$$

Ответ. 31.

<u>*Пример*</u>. Найти площадь прямоугольника, длины сторон которого численно равны корням уравнения $\sqrt{2}x^2 - 17x + 3 = 0$.

Решение. $S = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1{,}5\sqrt{2}.$

Ответ: $1{,}5\sqrt{2}$.

<u>*Пример*</u>. Найти $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1}$, где x_1, x_2 – корни уравнения $2x^2 + 2x - 11 = 0$.

Решение. По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = -1$ и $x_1 \cdot x_2 = -\frac{11}{2}$.

Преобразуем исходное выражение: $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{(x_1 + x_2) - 2}{x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1} =$

$$= \frac{-1 - 2}{-\frac{11}{2} - (-1) + 1} = \frac{6}{7}.$$

Ответ: 6/7.

<u>*Пример*</u>. Найти значения k, при которых корни уравнения $x^2 + x + k = 0$ связаны соотношением $2x_1 + x_2 = 2$.

Решение. Из теоремы Виета следует, что $x_1 + x_2 = -1$, и для определения корней получаем систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = -1, \end{cases}$ отсюда

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

Опять используя теорему Виета, находим $k = x_1 \cdot x_2 = -12$.

Ответ: –12.

Пример. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа x_1^2 и x_2^2, где x_1, x_2 – корни уравнения $x^2+4x-7=0$.

Решение. По формулам Виета $x_1 \cdot x_2 = -7, x_1 + x_2 = -4$. Пусть искомое уравнение $x^2 + px + q = 0$. Тогда $q = x_1^2 x_2^2 = (-7)^2 = 49$, $-p = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4)^2 - 2(-7) = 30$.

Ответ: $x^2-30x+49=0$.

Теорема Безу. Если x_1 является корнем некоторого многочлена, то этот многочлен делится на $x-x_1$.

Пример. Решить уравнение $x^3-4x^2-27x+90=0$.

Решение. Подставляя в данное уравнение числа ±1, ±2, ±3, …, найдём первый корень уравнения $x_1 = 3$. По теореме Безу левая часть уравнения делится на $x - 3$. Процесс деления показан.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3-4x^2-27x+90 & x-3 \\
 & \underline{x^3-3x^2} & x^2-x-30 \\
- & -x^2-27x+90 & \\
 & \underline{-x^2+3x} & \\
- & -30x+90 & \\
 & \underline{-30x+90} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Приравниваем к нулю то, что получилось в результате деления: $x^2-x-30=0$, и находим остальные корни $x_2 = -5$, $x_3 = 6$.

Ответ: 3; –5; 6.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму квадратов корней уравнения $x^2-6x-2=0$.

2. Найти длину средней линии трапеции, длины оснований которой численно равны корням уравнения $\sqrt{3}x^2 - 9x + 5 = 0$.

3. Найти $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$, где x_1, x_2 – корни уравнения $3x^2-x-1=0$.

4. Найти значения k, при которых корни уравнения $x^2 - 5x + k = 0$ связаны соотношением $2x_1-x_2=4$.

5. Решить уравнение $x^3 - 12x + 16 = 0$.

5.2. Рациональные уравнения

<u>*Пример*</u>. Решить уравнение $\frac{x^2-2x-3}{x-3}=x^2+3x-14$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) $x-3\neq 0$, т.е. $x\neq 3.$ Заметим, что значение $x = 3$ является корнем числителя $x^2-2x-3.$ По теореме Безу числитель делится на x – 3. Разделив числитель на x – 3, получим x + 1. Следовательно, уравнение примет вид $x+1=x^2+3x-14$. Корни этого уравнения $x_1=3\notin ОДЗ,$ $x_2=-5\in ОДЗ.$

Ответ: –5.

<u>*Пример*</u>. Найти целые корни уравнения $\frac{3x^2+6x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}=2$.

Решение. $3\cdot\frac{x^2+2x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}=2$. Обозначим $t=\frac{x^2+2x}{x^2-x+1}$. Получим уравнение $3t-\frac{1}{t}=2$. Его корнями являются числа $t_1=1, t_2=-\frac{1}{3}$. После обратной замены получим два уравнения: 1) $\frac{x^2+2x}{x^2-x+1}=1$ и 2) $\frac{x^2+2x}{x^2-x+1}=-\frac{1}{3}$. Корни этих уравнений: $x_1=\frac{1}{3}, x_2=-1, x_3=-\frac{1}{4}$.

Ответ: –1.

Задачи для самостоятельного решения

6. Решить уравнение $\frac{x^2+x-2}{x-1}=x^2-6x+8$.

7. Найти рациональные корни уравнения $\frac{5x^2-4}{x}+\frac{2x}{5x^2-4}=3$.

8. Найти сумму корней или корень (если он единственный) уравнения

$$\frac{x(3-x)}{\frac{1}{x-7}-\frac{2}{x-10}}=\frac{4}{\frac{2}{x-10}+\frac{1}{7-x}}.$$

5.3. Иррациональные уравнения

Схемы решения простейших иррациональных уравнений, содержащих квадратные корни

1. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=a$:
− при $a<0$ не имеет решений;
− $a=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$;
− $a>0$ равносильно уравнению $f(x)=a^2$.

2. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0. \end{cases}$

3. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$

Пример. Найти наибольший корень уравнения $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$.

Решение. В области допустимых значений: $x\geq -1$ являются равносильными следующие уравнения: $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$,

$$\sqrt{2x+5}=\sqrt{x+1}+\sqrt{3},$$

$$2x+5=x+1+2\sqrt{3}\sqrt{x+1}+3,$$

$$x+1=2\sqrt{3}\sqrt{x+1},$$

$$\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-2\sqrt{3})=0.$$

В квадрат возводились положительные выражения. Отсюда или $x+1=0, x_1=-1,$ или $\sqrt{x+1}-2\sqrt{3}=0, x_2=11$. Оба значения являются корнями, так как входят в область допустимых значений, и нужно только выбрать из них наибольший.

Ответ: 11.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+5x+1}=5-2x^2-5x$.

Решение. С помощью замены $t=2x^2+5x$ приведём уравнение к виду $\sqrt{t+1}=5-t$. ОДЗ: $t+1\geq 0$. ДУ: $5-t\geq 0$. Возведём уравнение в квадрат. $t+1=25-10t+t^2; t^2-11t+24=0; t_1=8$ (не удовлетворяет ДУ); $t_2=3$ (удовлетворяет ОДЗ и ДУ). После обратной замены получим $2x^2+5x=3$, откуда $x_1=-3,\ x_2=\frac{1}{2}$.

Ответ: –3; 1/2.

Пример. Найти количество различных корней уравнения $\sqrt{\sqrt{11x^2+1}-2x}=x-1$.

Решение. ОДЗ: $\sqrt{11x^2+1}-2x\geq 0$. ДУ: $x-1\geq 0$. Возведём уравнение в квадрат. Получим $\sqrt{11x^2+1}-2x=x^2-2x+1$; $\sqrt{11x^2+1}=$ $=x^2+1$. Ещё раз возведём в квадрат. Получим $11x^2+1=x^4+2x^2+1;$ $x^4-9x^2=0; x^2(x^2-9)=0$. Последнее уравнение имеет три корня 0, 3, –3, из которых лишь x = 3 удовлетворяет ОДЗ и ДУ.

Ответ: 1.

Задачи для самостоятельного решения

9. Найти произведение корней или корень, если он единственный, уравнения $x=4+\sqrt{23-2x}$.

10. Решить уравнение $\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{6-3x}=2-x$.

11. Решить уравнение $\sqrt{3x^2+6x+16}+\sqrt{x^2+2x}=2\sqrt{x^2+2x+4}$.

12. Найти целый корень уравнения $\sqrt{x+4}+\sqrt{-x-2}=x^2-7$.

13. Решить уравнение $\sqrt{5x+3-2x^2}=(3x+1)\cdot\sqrt{3-x}$.

5.4. Уравнения с модулем

Схемы решения простейших уравнений, содержащих модуль:

1. Уравнение вида $|f(x)|=a$:

− при $a<0$ не имеет решений;

− $a=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$;

− $a>0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$

2. Уравнение вида $|f(x)|=|g(x)|$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$

3. Уравнение вида $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \text{ при условии, что } g(x) \geq 0.$$

Иногда полезно использовать равенство $|x| = \sqrt{x^2}$ и соотношения при $a > 0$:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a,$$

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \quad \text{или} \quad x \leq -a.$$

Решение уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля, производится на основе его определения путём перебора вариантов знаков выражения, стоящего под знаком модуля. Уравнение с модулем таким образом заменяется на равносильную систему, не содержащую модулей.

Пример. Найти корень уравнения $|7x - 2| - |8 + 4x| = -7 - 3x$, принадлежащий промежутку $(-1; \frac{1}{3})$.

Решение. Найдём точки, принадлежащие данному промежутку, в которых имеющиеся модули равны нулю: $7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \in (-1; \frac{1}{3})$, $8 + 4x = 0 \Rightarrow x = -2 \notin (-1; \frac{1}{3})$. Следовательно, данный промежуток можно представить в виде объединения двух промежутков. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \in \left(-1; \frac{2}{7}\right]$. Тогда $|7x - 2| = -7x + 2, |8 + 4x| = 8 + 4x,$ и уравнение примет вид $-7x + 2 - (8 + 4x) = -7 - 3x,$ откуда $x = \frac{1}{8} \in \left(-1; \frac{2}{7}\right]$ является решением данного уравнения.

2. Пусть $x \in \left[\frac{2}{7}; \frac{1}{3}\right)$. Тогда $|7x - 2| = 7x - 2, |8 + 4x| = 8 + 4x,$ и уравнение примет вид $7x - 2 - (8 + 4x) = -7 - 3x,$ откуда $x = \frac{1}{2} \notin \left[\frac{2}{7}; \frac{1}{3}\right)$ не является решением данного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Пример. Найти корень уравнения $\left|15-|5x+3|\right|=11$, принадлежащий промежутку $(-6;-2]$.

Решение. Ход решения данной задачи:

$15-|5x+3|=11;$ $\quad$ $15-|5x+3|=-11;$

$|5x+3|=4;$ $\quad$ $|5x+3|=26;$

$5x+3=\pm 4;$ $\quad$ $5x+3=\pm 26;$

$x_1=\frac{1}{5};\, x_2=-\frac{7}{5}.$ $\quad$ $x_3=\frac{23}{5};\, x_4=-\frac{29}{5}.$

Ответ: $-\frac{29}{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

14. Найти наименьший корень уравнения $(x+2)(|x|-2)=-1$.
15. Найти сумму корней уравнения $|x^2-12|=-4x$.
16. Найти произведение корней уравнения $|x+2|\cdot x^2=16x+32$.
17. Найти сумму корней уравнения $\left||x-2|+2\right|=3$.
18. Решить уравнение $|3x-8|-|3x-2|=6$.

6. НЕРАВЕНСТВА

6.1. Рациональные неравенства

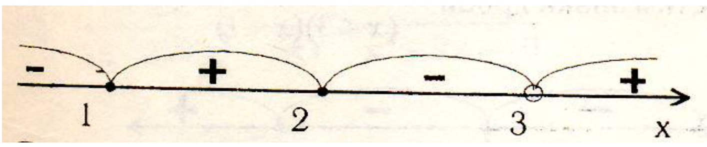
Решать дробно-линейные, а также другие рациональные неравенства можно с помощью интервалов, который объясним на примерах.

Пример. Решить неравенство $\frac{x^2-3x+2}{x-3}\geq 0$.

Решение. Найдём критические точки, которые являются корнями как числителя, так и знаменателя: $x^2-3x+2=0$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=2$, а корень знаменателя $x_3=3$.

Критические точки отметим на числовой оси (заштриховывая корни числителя, так как неравенство нестрогое, и «вырезая» корни знаменателя) и посмотрим знаки функции $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$ в каждом полученном интервале.

Из интервала (–∞; 1) возьмём, например, точку 0 и вычислим $f(0)=-\dfrac{2}{3}$. Следовательно, на самом левом интервале ставим знак «–» (минус). Так как $\dfrac{3}{2}\in(1;2)$ и $f\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$, то на следующем интервале ставим знак «+» (плюс). Аналогично, подставляем вместо x числа $\dfrac{5}{2}$ и 6, находим знаки функции $f(x)$ на остальных интервалах:



Так как по условию $f(x)\geq 0$, то выбираем знаки «+».

Ответ: $x\in[1;2]\cup(3;\infty)$.

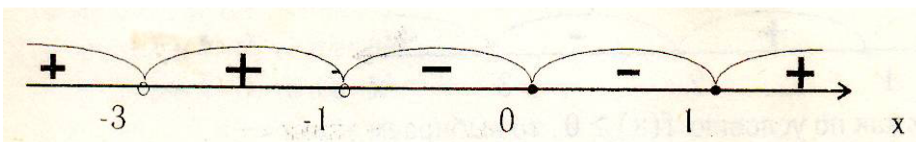
При решении примеров абитуриенты стараются избегать словарных описаний. Решение примера можно оформить так.

<u>Пример</u>. Решить неравенство $\dfrac{x^2+10x+27}{x+3}<11$.

Решение.

$$\frac{x^2+10x+27}{x+3}<11\Leftrightarrow\frac{x^2+10x+27}{x+3}-11<0\Leftrightarrow\frac{x^2-x-6}{x+3}<0.$$

Корни числителя $x_1=-2, x_2=3$, а корень знаменателя $x_3=-3$. Отметим знаки дроби $\dfrac{x^2-x-6}{x+3}$:



Ответ: $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;3)$.

Правило чередования знаков.

Если сомножитель $x - x_0$ стоит в нечётной степени (например, в 1-й, 3-й, 5-й и т. д.), то при переходе через точку x_0 знаки чередуются.

Если сомножитель $x - x_0$ стоит в чётной степени (например, в 0-й, 2-й, 4-й и т. д.), то при переходе через точку x_0 знаки не чередуются.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти наименьшее целое решение неравенства
$\frac{(x+1)(x^2-4x-5)}{x^4-1} \geq 0$.

2. Найти число целых решений неравенства
$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$.

3. Найти сумму целых решений неравенства
$\frac{5x-31}{(x^2-7x+6)(x^2-5x+6)} \geq \frac{1}{x^2-3x+2}$.

4. Решить двойное неравенство $-1 < \frac{x^2+10x+27}{x+3} \leq 11$.

6.2. Иррациональные неравенства

Неравенства, в которых переменная содержится под знаком корня, называются иррациональными. Основным методом решения таких неравенств является метод возведения в квадрат. При решении важен учёт ОДЗ. При возведении в квадрат неравенства также можно приобрести побочные решения, но в отличие от уравнения отсечение побочных решений с помощью проверки невозможно и приходится внимательно следить за эквивалентностью совершаемых преобразований. Безнаказанно можно возводить в квадрат лишь неравенства, правая и левая части которых положительны. Решение иррациональных неравенств сводится к решению рациональных неравенств или систем рациональных неравенств.

1. $\sqrt{f(x)} < a \quad (a > 0 - \textit{число}) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < a^2. \end{cases}$

Пример. $\sqrt{\dfrac{5x-2}{x^2-5x+6}}<3$.

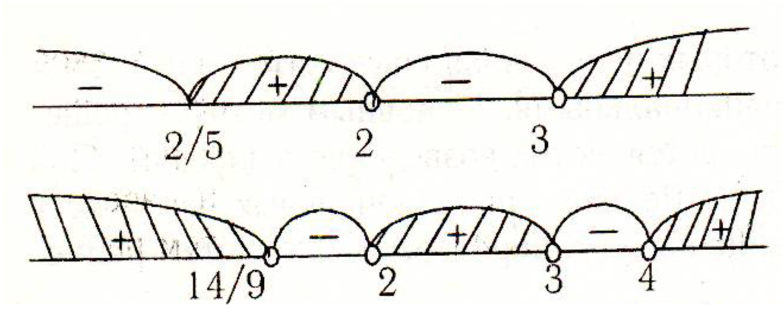
Решение. С учётом ОДЗ исходное неравенство эквивалентно двойному неравенству $0\le\dfrac{5x-2}{x^2-5x+6}<9$, что, в свою очередь, равносильно системе $\begin{cases}\dfrac{5x-2}{x^2-5x+6}\ge 0,\\ \dfrac{5x-2}{x^2-5x+6}<9\end{cases}$. Найдём корни знаменателей: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Второе из этих неравенств преобразуем к виду $\dfrac{-9x^2+50x-56}{x^2-5x+6}<0$,

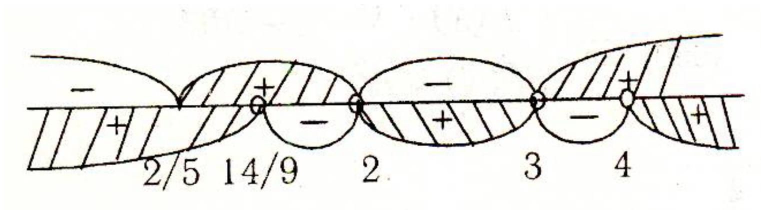
или $\dfrac{9\left(x-\dfrac{14}{9}\right)(x-4)}{(x-2)(x-3)}>0.$

Таким образом, имеем систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{5(x-2/5)}{(x-2)(x-3)}\ge 0,\\ \dfrac{9(x-14/9)(x-4)}{(x-2)(x-3)}>0.\end{cases}$

Решим каждое неравенство методом интервалов.



Перенесём решения неравенств на общий рисунок.



Ответ. $\left[\dfrac{2}{5};\dfrac{14}{9}\right)\cup(4;+\infty)$.

2. $\sqrt{f(x)} < \sqrt{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) < \varphi(x). \end{cases}$

<u>*Пример*</u>. $\sqrt{\dfrac{3x+10}{x-1}} < \sqrt{5x+6}$.

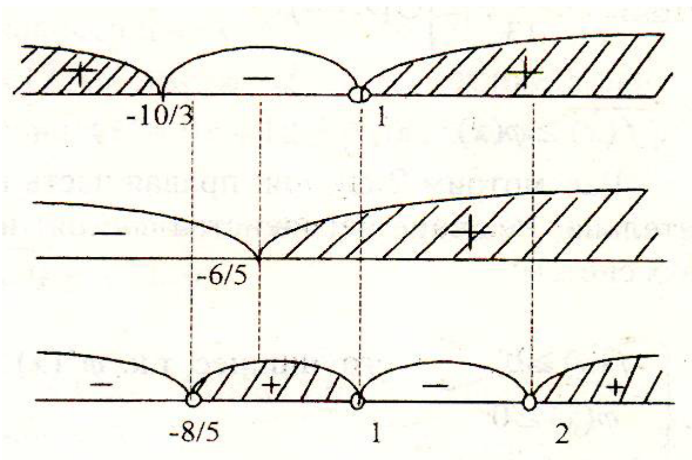
Решение. Перейдём к системе неравенств $\begin{cases} \dfrac{3x+10}{x-1} \geq 0, \\ 5x+6 \geq 0, \\ \dfrac{3x+10}{x-1} < 5x+6. \end{cases}$

Упростим последнее неравенство $\dfrac{3x+10}{x-1} - (5x+6) < 0$,

$\dfrac{3x+10-(5x+6)(x-1)}{x-1} < 0$, $\dfrac{3x+10-(5x^2+6x-5x-6)}{x-1} < 0$, $\dfrac{-5x^2+2x+16}{x-1} < 0$,

$\dfrac{5x^2-2x-16}{x-1} > 0$. Корни числителя: $x_1 = 2$; $x_2 = -\dfrac{8}{5}$.

Получили систему $\begin{cases} \dfrac{3(x+10/3)}{x-1} \geq 0, \\ 5(x+6/5) \geq 0, \\ \dfrac{5(x-2)(x+8/5)}{x-1} > 0. \end{cases}$



Тройное пересечение будет $x \in (2; +\infty)$.

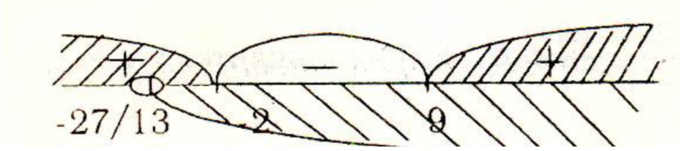
Ответ: $x \in (2; +\infty)$.

3. $\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) < \varphi^2(x). \end{cases}$ (при φ (*x*) < 0 нет решений, так как $\sqrt{f(x)} \geq 0$).

<u>*Пример*</u>. $\sqrt{x^2 - 7x - 18} < x + 3$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 7x - 18 \geq 0, \\ x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 7x - 18 < (x+3)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-9) \geq 0, \\ x + 3 \geq 0, \\ 13x > -27. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-9) \geq 0, \\ x \geq -3, \\ x > -27/13. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-9) \geq 0, \\ x > -27/13. \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\dfrac{27}{13}; -2\right] \cup [9; +\infty)$.

4. $\sqrt{f(x)} \geq \varphi(x)$

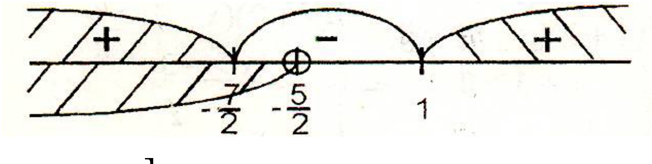
Рассмотрим 2 случая: правая часть положительна или отрицательна. Решение неравенства состоит из объединения решений двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) \geq \varphi^2(x). \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

<u>*Пример*</u>. $\sqrt{4x^2 + 10x - 14} > 2x + 5$.

Решение

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x + 5 \geq 0, \\ 4x^2 + 10x - 14 > (2x+5)^2. \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 5 < 0, \\ 4x^2 + 10x - 14 \geq 0. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -5/2 \\ x < -39/10 \end{cases} \Rightarrow \textit{нет решений} \\ \begin{cases} x < -5/2, \\ 4(x + 7/2)(x - 1) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$



Ответ: $(-\infty; -7/2]$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

5. $\sqrt{\dfrac{2x-2}{4x+3}} < 2$.

6. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+1}} \ge \sqrt{x-1}$.

7. $\sqrt{x^2+8x+7} < x+3$.

8. $\sqrt{25+8x} + 2x+1 > 0$.

9. $(x-3)\sqrt{x^2+9} \le x^2-9$.

6.3. Неравенства с модулем

1. Неравенство вида $|f(x)| > a$:

− при $a<0$ выполняется для всех значений x, удовлетворяющих области допустимых значений неравенства;

− $a=0$ равносильно неравенству $f(x) \ne 0$;

− $a>0$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x)>a, \\ f(x)<-a. \end{array}\right.$

2. Неравенство вида $|f(x)| \ge a$:

− при $a \le 0$ выполняется для всех значений x, удовлетворяющих области допустимых значений неравенства;

− $a>0$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x)\ge a, \\ f(x)\le -a. \end{array}\right.$

3. Неравенство вида $|f(x)| < a$:

− при $a \le 0$ не имеет решений;

− $a>0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x)<a, \\ f(x)>-a. \end{cases}$

4. Неравенство вида $|f(x)| \le a$:

− при $a<0$ не имеет решений;

− $a=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$;

− $a>0$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x)\le a, \\ f(x)\ge -a. \end{cases}$

5. Неравенство вида $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} g(x) < 0, \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x), \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$ или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

6. Неравенство вида $|f(x)| \ge g(x)$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} g(x) \le 0, \\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x), \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$ или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) \ge g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

7. Неравенство вида $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x), \end{cases}$ или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

8. Неравенство вида $|f(x)| \le g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x), \end{cases}$ или совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) \le g(x). \end{cases} \end{array}\right.$

9. Неравенство вида $|f(x)| \le |g(x)|$ равносильно неравенству $(f(x))^2 \le (g(x))^2$.

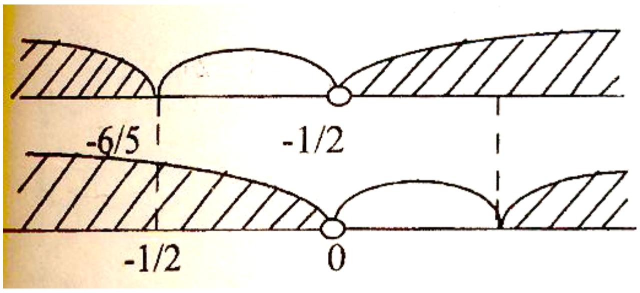
Пример. $\left|\dfrac{x-3}{2x+1}\right| \le 3$.

Решение. Перейдём к двойному неравенству:

$$-3 \le \frac{x-3}{2x+1} \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{2x+1} \le 3, \\ \dfrac{x-3}{2x+1} \ge -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{2x+1} - 3 \le 0, \\ \dfrac{x-3}{2x+1} + 3 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3-3(2x+1)}{2x+1} \le 0 \\ \dfrac{x-3+3(2x+1)}{2x+1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3-6x-3}{2x+1} \le 0, \\ \dfrac{x-3+6x+3}{2x+1} \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-5x-6}{2x+1} \le 0, \\ \dfrac{7x}{2x+1} \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5(x+6/5)}{2(x+1/2)} \ge 0, \\ \dfrac{7x}{2(x+1/2)} \ge 0. \end{cases}$$

Отсюда легко находим корни числителя и знаменателя и отмечаем на графиках множество решений каждого неравенства. В ответ включаем общую часть.

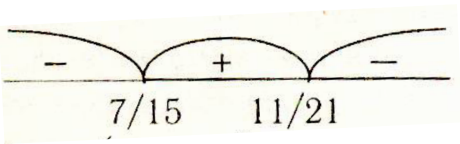


Ответ: $(-\infty;-6/5]\cup[0;+\infty)$.

<u>*Пример*</u>. $|2-3x|\le 3|3-6x|$.

Решение. Возведём обе части неравенства в квадрат, это не нарушит неравенство, так как слева и справа стоят неотрицательные числа.

$$(2-3x)^2\le 3^2(3-6x)^2 \Leftrightarrow (2-3x)^2-(9-18x)^2\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2-3x-(9-18x))(2-3x+(9-18x)) \Leftrightarrow (15x-7)(11-21x)\le 0.$$



Ответ: $(-\infty;7/15]\cup[11/21;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

10. Найти число целых решений неравенства $|10-2x|-2\le 0$.

11. Найти количество целых решений неравенства $x^2+12x+36<$ $<5|x+6|$.

12. Найти количество целых решений неравенства $x^3|x^2-8x+7|>0$ на промежутке [0; 6].

13. Найти длину промежутка на числовой оси, который заполняет все решения неравенства $x^2+\sqrt{x^2}<1/4$.

14. Решить неравенство $|4x-1|\ge 3|2x+4|$.

15. Решить неравенство $\dfrac{2}{|x+3|}<\dfrac{1}{2x-1}$.

7. ВЕКТОРЫ

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом.

Даны векторы в пространстве: $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$.

Скалярное произведение этих векторов равно $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=a_1b_1+$ $+a_2b_2+a_3b_3$.

Длина (или модуль) вектора $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

Замечание. Если векторы находятся не в пространстве, а на плоскости (т. е. имеют две координаты), то «третьи слагаемые» в двух вышеприведённых формулах отсутствуют.

Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен: $\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=$

$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, если $(\vec{a}\cdot\vec{b})>0$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ прямой, или $\vec{a}\perp\vec{b}$, если $(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тупой, если $(\vec{a}\cdot\vec{b})<0$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (или параллельны), если $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, если существует такое число k ($k>0$ в случае сонаправленных векторов, и $k<0$ в случае противоположно направленных векторов), при котором $\vec{b}=k\vec{a}$.

<u>*Пример*</u>. Даны векторы $\vec{a}(3;-2;1)$ и $\vec{b}(-2;4;-3)$. Найти длину вектора $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

Решение.

$\vec{c}=2(3;-2;1)+3(-2;4;-3)=(6;-4;2)+(-6;12;-9)=(0;8;-7)$.

$|\vec{c}|=\sqrt{0^2+8^2+(-7)^2}=\sqrt{113}$.

Ответ. $\sqrt{113}$.

<u>*Пример*</u>. При каких значениях m длина вектора $\vec{a}(-7;2m;4)$ не превосходит длины вектора $\vec{b}(3m;6;-3)$?

Решение. Сначала подсчитаем длины данных векторов:

$|\vec{a}| = \sqrt{49 + 4m^2 + 16} = \sqrt{4m^2 + 65}$; $|\vec{b}| = \sqrt{9m^2 + 36 + 9} = \sqrt{9m^2 + 45}$.

По условию $|\vec{a}| \le |\vec{b}|$. Следовательно, $\sqrt{4m^2 + 65} \le \sqrt{9m^2 + 45}$; $4m^2 + 65 \le 9m^2 + 45$; $5m^2 - 20 \ge 0$.

Решениями этого неравенства являются $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

<u>Пример</u>. Найти угол между векторами $\vec{a}(-3;0;4)$ и $\vec{b}(7;0;-1)$.

Решение

Так как $\cos\varphi = \dfrac{-3\cdot 7 + 0\cdot 0 + 4\cdot(-1)}{\sqrt{9+0+16}\cdot\sqrt{49+0+1}} = \dfrac{-25}{3\cdot\sqrt{50}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $\varphi = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{4}$.

<u>Пример</u>. При каких значениях p вектор $\vec{c}(3 - p; p^2 + 6p)$ равен вектору $\vec{a} - 2\vec{b}$, где $\vec{a}(2;1)$, $\vec{b}(-1;3)$?

Решение. Нужно координаты вектора $\vec{c}$ приравнять к соответствующим координатам вектора $\vec{a} - 2\vec{b} = (4;-5)$ и решить систему

$$\begin{cases} 3 - p = 4, \\ p^2 + 6p = -5. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $p = -1$.

Ответ: –1.

<u>Пример</u>. Даны векторы $\overrightarrow{AB}(\alpha;6;\beta)$ и $\overrightarrow{BC}(2;-3;5)$. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найти α + β.

Решение. Из условия следует, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны. Следовательно, их координаты пропорциональны, т. е. $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{6}{-3} = \dfrac{\beta}{5}$. Отсюда $\alpha = -4, \beta = -10, \alpha + \beta = -14$.

Ответ: –14.

Пример. Вектор $\vec{p}$ одинаково направлен с вектором $\vec{q}(-5;3;-2)$ и $|\vec{p}| = 4\sqrt{38}$. Найти сумму координат вектора $\vec{p}$.

Решение. Из условия следует, что векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны. Тогда $\vec{p} = k\vec{q} = (-5k;3k;-2k)$. Так как вектор $\vec{p}$ одинаково направлен с вектором $\vec{q}$, то $k > 0$.

$|\vec{p}| = \sqrt{25k^2 + 9k^2 + 4k^2} = \sqrt{38k^2} = |k| \cdot \sqrt{38} = k \cdot \sqrt{38} = 4\sqrt{38}$. Отсюда $k = 4$, $\vec{p}(-20;12;-8)$; сумма координат вектора $\vec{p}$ равна –16.

Ответ: –16.

Пример. Найти координату вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\vec{a}(3;1)$, в два раза длиннее $\vec{a}$ и имеющего положительную первую координату.

Решение. Пусть искомый вектор $\vec{b}(x;y)$. Так как $\vec{a} \perp \vec{b}$, то скалярное произведение $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3x + y = 0$. Так как $|\vec{b}| = 2 \cdot |\vec{a}|$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}$.

Система $\begin{cases} 3x + y = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{10} \end{cases}$ имеет два решения $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

Поскольку x-координата должна быть положительной, то условию задачи удовлетворяет лишь первое решение.

Ответ: (2; –6).

Задачи для самостоятельного решения

1. При каком наименьшем целом значении p угол между векторами $\vec{a}(p-2;1)$ и $\vec{b}(p-1;-2)$ тупой?

2. При каких значениях m угол между векторами $\vec{a}(m;-3;5)$ и $\vec{b}(3;2m;3)$ не превосходит 90º?

3. При каком значении параметра p линейная комбинация $3\vec{a} - 2\vec{b}$ векторов $\vec{a}(p+2;\ 3)$ и $\vec{b}(1;p^2)$ равна вектору $\vec{c}(10;1)$?

4. Найти наибольшее значение параметра p, при котором длина вектора $\vec{a}(3;p-1)$ равна длине вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(2;0)$, $B(4;3)$.

5. Даны четыре точки: $A(-4;0), B(2;-3), C(-1;1), D(3;2)$. Найти скалярное произведение $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB})$.

6. Даны векторы $\vec{a}(3;-2), \vec{b}(6;1), \vec{c}(81;6)$. Векторы $(\vec{a}+k\vec{b})$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Найти значение *k*.

7. Даны вектор $\vec{a}(1;-2;3)$ и точка $A(2;4;5)$. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка *B* принадлежит оси *OX*.

8. Найти скалярное произведение $(\vec{m}+\vec{n})\cdot(2\vec{m}-\vec{n})$, если известно, что $|\vec{m}|=5, |\vec{n}|=6$, и угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 120º.

9. Вектор $\vec{a}$ составляет с положительным направлением оси *OX* угол 135º. Найти координату *x* вектора $\vec{a}$, если известно, что $|\vec{a}|=2\sqrt{2}$.

10. Даны векторы $\overrightarrow{AB}(3;5;-4)$ и $\overrightarrow{BC}(\alpha;\beta;8)$. Точки *A*, *B* и *C* лежат на одной прямой. Найти $\alpha+\beta$.

11. Найти координату вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\vec{b}(-3;4)$, в 2 раза длиннее $\vec{b}$ и имеющего положительную первую координату.

12. Даны три точки: $A(1;1), B(-1;0), C(3;1)$. Найти длину вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}$.

13. Дано: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы на плоскости; $|\vec{b}|=7, |\vec{a}+\vec{b}|=12, |\vec{a}-\vec{b}|=14$. Найти $|\vec{a}|$.

8. МЕТОД КООРДИНАТ

Если на плоскости задана прямоугольная система координат *OXY*, то каждой точке плоскости поставлена в соответствие пара чисел *(x, y)*, которые называются координатами точки.

Расстояние между двумя точками плоскости $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ определяется по формуле $\rho(A,B)=|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Координаты точки $C(x_3;y_3)$, делящей отрезок *AB* в отношении λ $\left(\frac{AC}{CB}=\lambda>0\right)$, находим по формулам $x_3=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_3=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

Эти формулы называются формулами деления отрезка в данном отношении. В частности, при $\lambda = 1$, т. е. *AC* = *CB*, они примут вид

$x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y_3=\dfrac{y_1+y_2}{2}$. В этом случае точка $C(x_3;y_3)$ является серединой отрезка *AB*.

Замечание. Если $\lambda = 0$, то это означает, что точки *A* и *C* совпадают, если $\lambda < 0$, то точка *C* лежит вне отрезка *AB*.

Если в пространстве задана прямоугольная система координат *OXYZ*, то каждой точке пространства поставлена в соответствие тройка чисел *(x, y, z)*, так называемых координат точки. Первая координата называется абсциссой, вторая – ординатой, а третья – аппликатой.

Расстояние между двумя точками пространства $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$ определяется по формуле $\rho(A,B)=|AB|=$ $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Координаты точки $C(x_3;y_3;z_3)$, делящей отрезок *AB* в отношении λ $\left(\dfrac{AC}{CB}=\lambda>0\right)$, находим по формулам $x_3=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_3=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z_3=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

Эти формулы называются формулами деления отрезка в данном отношении. В частности, при $\lambda = 1$, т. е. *AC* = *CB*, они примут вид $x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y_3=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $z_3=\dfrac{z_1+z_2}{2}$. В этом случае точка $C(x_3;y_3;z_3)$ является серединой отрезка *AB*.

<u>*Пример*</u>. Даны точки $A(1;-2), B(-6;-3), C(-2;9)$. Найти расстояние от точки *A* до середины отрезка *BC*.

Решение. Обозначим середину отрезка *BC* через *D*. Тогда по формулам середины отрезка имеем $D\left(\dfrac{-6+(-2)}{2};\dfrac{-3+9}{2}\right)=D(-4;3)$. Далее по формуле расстояния между точками вычисляем $|AD|=$ $=\sqrt{(-5)^2+5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

<u>*Пример*</u>. Найти координаты точки *C*, которая делит отрезок *AB* в отношении 2 : 3, считая от точки *A*, если $A(12;-2)$, $B(7;8)$.

Решение. Мы имеем $\lambda = \frac{2}{3}$, так как $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$. По формулам деления отрезка в данном отношении λ получаем $x_3 = \frac{12 + \frac{2}{3} \cdot 7}{1 + \frac{2}{3}} = 10$,

$$y_3 = \frac{-2 + \frac{2}{3} \cdot 8}{1 + \frac{2}{3}} = 2.$$

Мы получили координаты точки $C(10;2)$.

Ответ: (10;2).

<u>*Пример*</u>. Найти координаты точки *M*, лежащей на оси *OY*, равноудалённой от точек $A(3;1)$ и $B(-1;-5)$.

Решение. Так как точка *M* лежит на оси *OY*, её первая координата равна нулю: $M(0;y_0)$.

$|AM| = \sqrt{(0-3)^2 + (y_0 - 1)^2}$, $|BM| = \sqrt{(0-(-1))^2 + (y_0 - (-5))^2}$.

Приравнивая правые части, получим уравнение $y_0^2 - 2y_0 + 10 = y_0^2 + 10y_0 + 26$, откуда находим, что $y_0 = -\frac{4}{3}$.

Ответ: *M*(0; –4/3).

<u>*Пример*</u>. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок *AB*, где $A(3;1), B(-5;3)$.

Решение. Центр окружности *O* – середина отрезка *AB*, координаты $x_0 = \frac{3+(-5)}{2} = -1$, $y_0 = \frac{1+3}{2} = 2$.

Радиус окружности $r = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{(3-(-5))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{17}$.

Уравнение окружности: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 17$.

Ответ: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 17$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти расстояние от точки $A(2;-1)$ до середины отрезка *BC*, где $B(3;4), C(-7;-2)$.

2. Найти координаты точки *C*, которая делит отрезок *AB* в отношении 3:1, считая от точки *A*, если $A(3;1), B(-1;9)$.

3. Найти координаты точки *M*, лежащей на оси *OX*, равноудалённой от точек $A(-2;1)$ и $B(8;11)$.

4. Найти координаты точки *M*, лежащей на прямой $y = x$, равноудалённой от точек $A(4;2)$ и $B(6;-4)$.

5. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок *AB*, где $A(4;1), B(-2;9)$.

6. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках $A(2;1), B(1;-2), C(9;2)$.

7. Укажите уравнение, которое задаёт геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от двух точек $A(1;3)$ и $B(3;1)$.

9. ТРИГОНОМЕТРИЯ

9.1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Связь между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$$

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} \quad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha},$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1}{1 + ctg^2\alpha},$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{ctg^2\alpha}{1 + ctg^2\alpha},$$

$$tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{ctg^2\alpha},$$

$$ctg^2\alpha = \frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{1}{tg^2\alpha}.$$

Тригонометрические функции суммы и разности углов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta},$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}.$$

Тригонометрические функции двойного, тройного и половинного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha},$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^3\alpha} \qquad ctg3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1 - 3ctg^3\alpha},$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}},$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}},$$

$$\left|tg\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

Прочие формулы кратных углов:

$$\sin 4\alpha = \cos\alpha\left(4\sin\alpha - 8\sin^3\alpha\right),$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1,$$

$$\mathrm{tg}\, 4\alpha = \frac{4\,\mathrm{tg}\,\alpha - 4\,\mathrm{tg}^3\,\alpha}{1 - 6\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{tg}^4\,\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\, 4\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^4\,\alpha - 6\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha + 1}{4\,\mathrm{ctg}^3\,\alpha - 4\,\mathrm{ctg}\,\alpha};$$

$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha,$$
$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 5\alpha = \operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}^4\alpha - 10\operatorname{tg}^2\alpha + 5}{5\operatorname{tg}^4\alpha - 10\operatorname{tg}^2\alpha + 1},$$
$$\operatorname{ctg} 5\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\frac{\operatorname{ctg}^4\alpha - 10\operatorname{ctg}^2\alpha + 5}{5\operatorname{ctg}^4\alpha - 10\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}.$$

Формулы понижения степени:

$$\sin^2 k\alpha = \frac{1-\cos 2k\alpha}{2}, \quad \cos^2 k\alpha = \frac{1+\cos 2k\alpha}{2},$$
$$\sin^3 k\alpha = \frac{3\sin k\alpha - \sin 3k\alpha}{4}, \quad \cos^3 k\alpha = \frac{3\cos k\alpha - \cos 3k\alpha}{4}.$$

Степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha},$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}, \qquad \operatorname{tg}^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{3\cos\alpha + \cos 3\alpha},$$

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}, \qquad \operatorname{ctg}^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{3\sin\alpha - \sin 3\alpha},$$

$$\sin^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}{8}, \qquad \operatorname{tg}^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3},$$

$$\cos^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3}{8}, \qquad \operatorname{ctg}^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3}{\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3}.$$

Формулы, которые выражают тригонометрические функции через тангенс половинного угла:

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad ctg\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)).$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$ctg\alpha \pm ctg\beta = -\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha),$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha),$$

$$tg\alpha + ctg\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha},$$

$$tg\alpha - ctg\alpha = -2ctg2\alpha,$$

$$1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$tg^2\alpha - \sin^2\alpha = tg^2\alpha\sin^2\alpha,$$

$$ctg^2\alpha - \cos^2\alpha = ctg^2\alpha\cos^2\alpha,$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi),$$

где
$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad tg\varphi = \frac{b}{a}.$$

Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса для некоторых углов приведены в табл. 1 («∞» означает, что функция в указанной точке не определена, а в её окрестности стремится к бесконечности).

Таблица 1

α	0° (0 рад)	30° (π/6)	45° (π/4)	60° (π/3)	90° (π/2)	180° (π)	270° (3π/2)	360° (2π)
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞
sec α	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	–1	∞	1
cosec α	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	∞	–1	∞

Значения косинуса и синуса на окружности приведены на рис. 2.

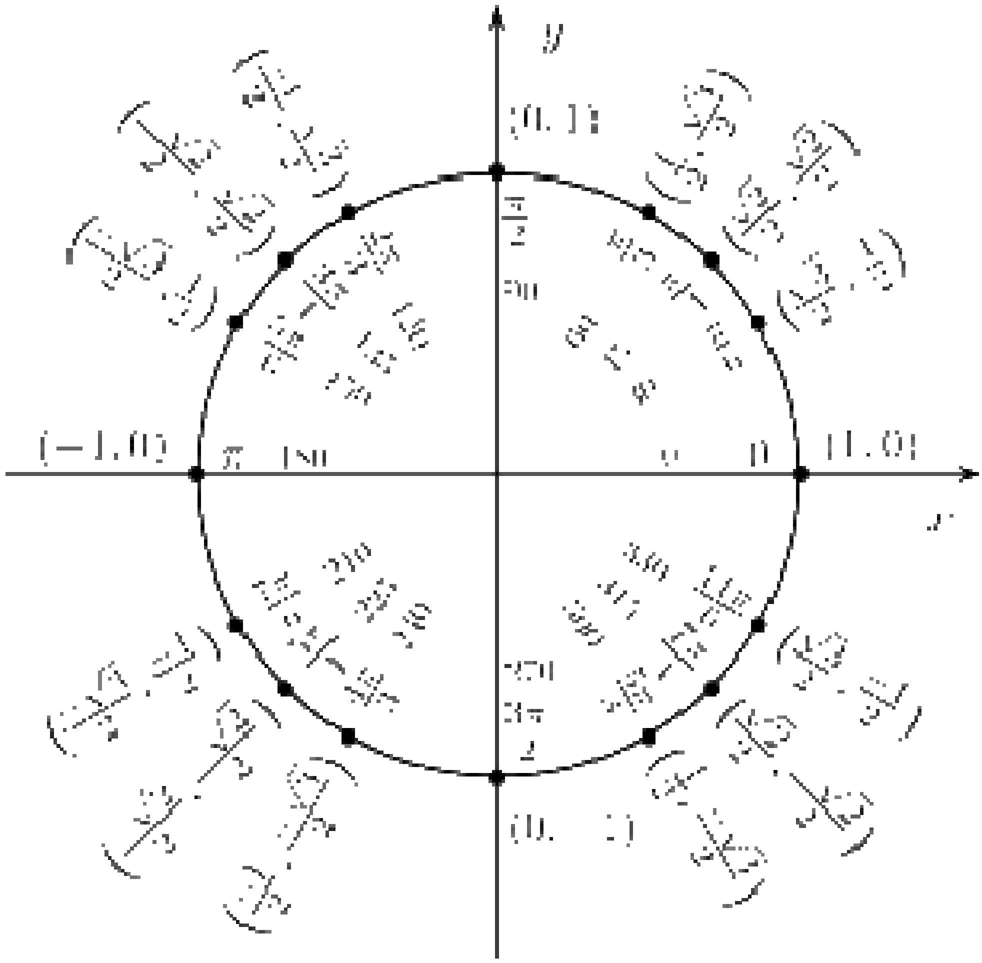


Рис. 2

Непрерывность

Синус и косинус – непрерывные функции. Тангенс и секанс имеют точки разрыва ±90°, ±270°, ±450°; котангенс и косеканс – 0°, ±180°, ±360°.

Чётность

Косинус и секанс – чётные функции, остальные четыре – нечётные, т. е.:

sin (–α) = –sin α,

cos (–α) = cos α,

tg (–α) = –tg α,

ctg (–α) = –ctg α,

sec (–α) = sec α,

cosec (–α) = –cosec α.

Периодичность

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ – периодические с периодом 2π, функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ – с периодом π.

Формулы приведения

Формулами приведения называются формулы следующего вида:

$$f(n\pi + \alpha) = \pm f(\alpha),$$

$$f(n\pi - \alpha) = \pm f(\alpha),$$

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} + \alpha\right) = \pm g(\alpha),$$

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} - \alpha\right) = \pm g(\alpha).$$

Здесь f – любая тригонометрическая функция, g – соответствующая ей кофункция (т. е. косинус для синуса, синус для косинуса, тангенс для котангенса, котангенс для тангенса, секанс для косеканса и косеканс для секанса), n – целое число. Перед полученной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в заданной координатной четверти при условии, что угол α острый, например, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$.

Некоторые формулы приведения представлены в табл. 2.

Таблица 2

β	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}\beta$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\beta$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Пример. Вычислить $A = \frac{\cos 76° - \cos 16°}{1 - 2\sin^2 22°}$.

Решение. Числитель разложим в произведение, а к знаменателю применим формулу понижения степени. Получим

$$A = \frac{2\sin 46° \sin(-30°)}{1 - 2\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 44°\right)} = \frac{-\sin 46°}{\cos 44°} = \frac{-\sin 46°}{\cos(90° - 46°)} = \frac{-\sin 46°}{\sin 46°} = -1$$

Ответ: –1.

<u>Пример</u>. Упростить $\dfrac{\cos 2x}{(ctg^2 x - tg^2 x)\sin^2 2x}$.

Решение. $\dfrac{\cos 2x}{(ctg^2 x - tg^2 x)\sin^2 2x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4(\cos^4 x - \sin^4 x)} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)} = \frac{1}{4}.$$

Ответ. 1/4.

<u>Пример</u>. Упростить выражение $A = \left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \dfrac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha + \cos 5\alpha}$.

Решение. Приведём к общему знаменателю, суммы и разности разложим в произведения, затем сократим дроби.

$$A = \frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha\sin 3\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha + \cos 5\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha\sin 3\alpha}\cdot\frac{1}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2}{2\sin 3\alpha\cos 3\alpha} = \frac{2}{\sin 6\alpha}$$

Ответ: $\dfrac{2}{\sin 6\alpha}$.

<u>Пример</u>. Дано: $\dfrac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\sin\alpha + 4\cos\alpha} = \dfrac{3}{2}$. Найти tg α.

Решение. После перемножения «крест-накрест» получим $4\sin\alpha +$

$+6\cos\alpha = 3\sin\alpha + 12\cos\alpha$; $\sin\alpha = 6\cos\alpha$; $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 6$; tg α = 6.

Ответ: 6.

<u>Пример</u>. Дано: $ctg\dfrac{\alpha}{2} = 3$. Найти $A = \dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha}$.

Решение. Из условия задачи следует, что $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$. Используя формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного угла, найдём:

$$\sin\alpha = \frac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\dfrac{1}{3}}{1 + \dfrac{1}{9}} = 0{,}6; \quad \cos\alpha = \frac{1 - tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \dfrac{1}{9}}{1 + \dfrac{1}{9}} = 0{,}8.$$

Следовательно, $A = \dfrac{2 \cdot 0{,}6 + 0{,}8}{0{,}6 - 2 \cdot 0{,}8} = -2$.

Ответ: –2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\dfrac{\cos 15°}{\cos 65°} - \dfrac{\sin 15°}{\sin 65°}$.

2. Дано: $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = -3$. Найти значение ctg 2α.

3. Упростить выражение $\cos^2(765° + \beta) - \sin^2(\beta + 405°)$.

4. Вычислите $\sin\alpha$, если $3\cos^2\alpha + \sqrt{7}\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0, \dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

5. Найти значение $\sin(\varphi + 30°)$, если $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ и $90° < \varphi < 180°$.

9.2. Графики тригонометрических функций

Построим график функции $y = \sin x$ (рис. 3).

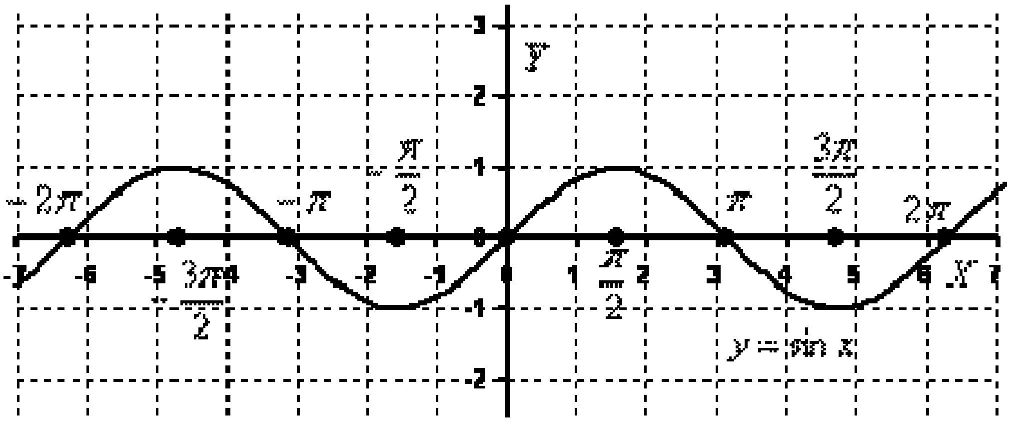


Рис. 3

Данная линия называется *синусоидой*.

Напомним, что «пи» – иррациональное число: $\pi \approx 3{,}14$, и в тригонометрии от него в глазах рябит.

Данная функция является периодической с периодом 2π. Что это значит? Посмотрим на отрезок $[0; 2\pi]$. Слева и справа от него бесконечно повторяется точно такой же кусок графика.

Область определения: $D(f) \in R$, т. е. для любого значения «икс» существует значение синуса.

Область значений: $E(f) = [-1;\ 1]$. Функция $y = \sin x$ является ограниченной: $-1 \le \sin x \le 1$, т. е., все «игреки» ”сидят” строго в отрезке $[-1;\ 1]$. Такого не бывает: $\sin x = 1{,}5$, или $\sin x = -2$, точнее говоря, бывает, но указанные уравнения не имеют решения.

Синус – это функция нечётная, синусоида симметричная относительно начала координат, и справедлив следующий факт: $\sin(-x) = -\sin x$. Таким образом, если в вычислениях встретится, например, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, то минус терять здесь ни в коем случае нельзя! Он выносится: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Построим график функции $y = \cos x$ (рис. 4).

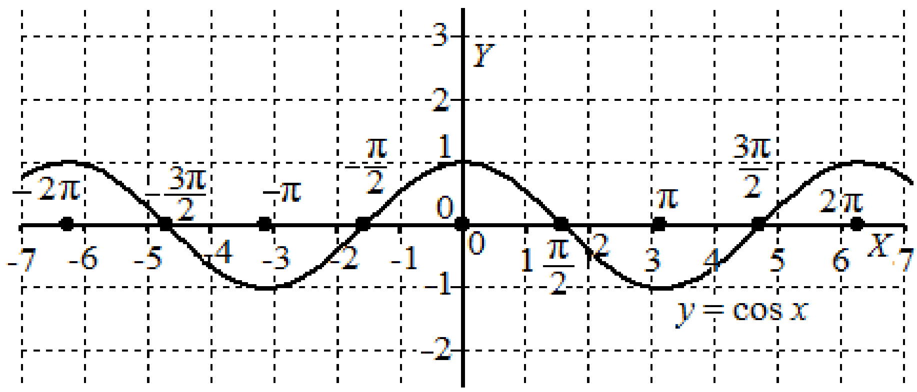


Рис. 4

График косинуса – это та же самая синусоида, сдвинутая вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ влево. Поэтому почти все свойства синуса справедливы и для косинуса за некоторым, но существенным исключением.

Косинус – это функция чётная, ее график симметричен относительно оси OY, и справедлив следующий факт: $\cos(-x) = \cos x$. То есть минус перед аргументом косинуса можно безболезненно убирать (или, наоборот, ставить). В отличие от синуса в косинусе минус «бесследно пропадает».

Построим график функции $y = \mathrm{tg}x$ (рис. 5).

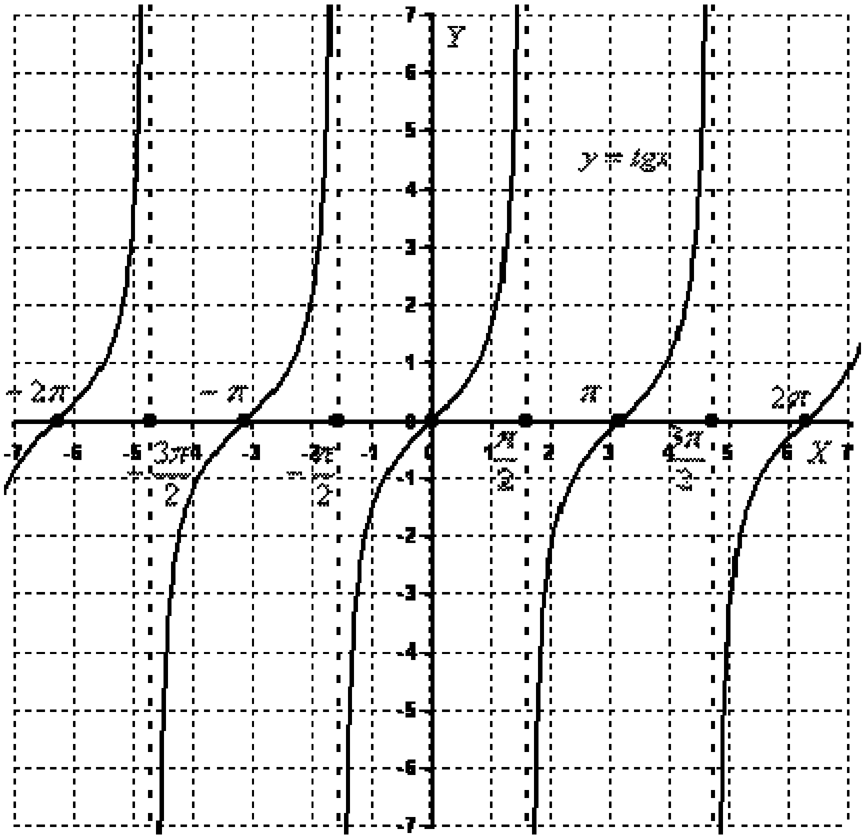


Рис. 5

Данная функция является периодической с периодом π. То есть достаточно рассмотреть отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, слева и справа от него ситуация будет бесконечно повторяться.

Область определения: $D(f) = R \Big/ \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\}$ – все действительные числа, кроме $...x = -\frac{3\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ и т. д., или коротко: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, где k – любое целое число. Множество целых чисел (… –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, …) в высшей математике обозначают жирной буквой **Z**.

Область значений: $E(f) = R$. Функция $y = tgx$ неограничена.

Тангенс – функция нечётная, как и в случае с синусом минус из-под тангенса не теряется, а выносится: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$.

График котангенса – это почти тот же самый тангенс, функции связаны тригонометрическим соотношением $ctgx = \frac{1}{tgx}$. Вот его график (рис. 6). Свойства попробуйте сформулировать самостоятельно, они практически такие же, как и у тангенса.

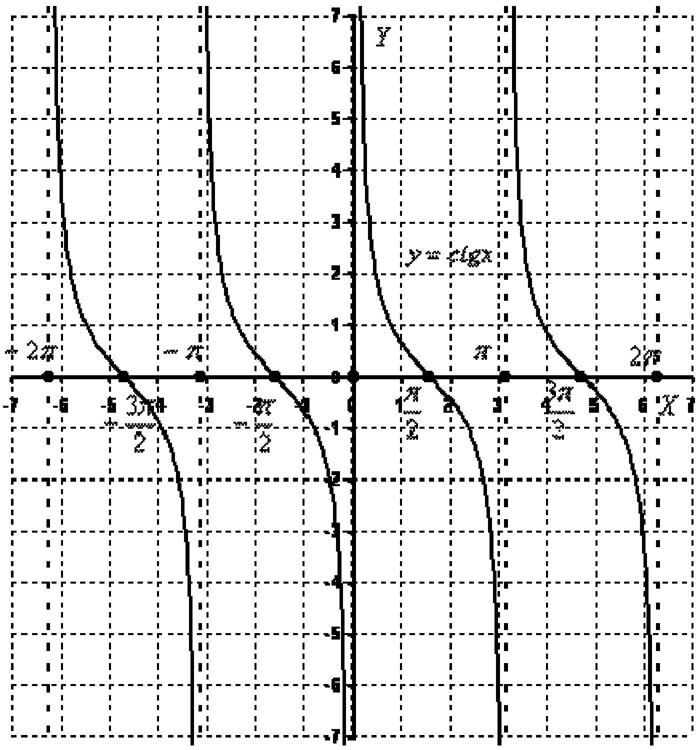


Рис. 6

Преобразование графиков тригонометрических функций

График функции $\boldsymbol{y = f(x + в)}$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на (–в) единиц вдоль оси абсцисс. График функции $\boldsymbol{y = f(x) + a}$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на (a) единиц вдоль оси ординат.

График функции $\boldsymbol{y = f\,(kx)}$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем его сжатия в k раз (при $k > 1$) вдоль оси абсцисс. График функции $\boldsymbol{y = f\,(kx)}$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем его растяжения в k раз (при $0 < k < 1$) вдоль оси абсцисс.

График функции $\boldsymbol{y = f(kx + b)}$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем его параллельного переноса на (–в/k) единиц вдоль оси абсцисс и путем сжатия в k раз (при $k > 1$) или растяжения в k раз (при $0f(kx + b) = f(k(x + b/k))$.

Пример. С помощью преобразования графика функции $y = \sin x$ построить $y = -3\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) - 2$.

Решение. Приводим функцию к виду шаблона $-k_1 \cdot f(-k_2 \times \times (x + a)) + b$, $y = -3\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) - 2 = -3\sin\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) - 2$. Имеем $k_1 = 3$, $k_2 = \frac{1}{2}, a = -3, b = -2$.

Таким образом, цепочка преобразований графика функции $y = \sin x$ примет вид $y = \sin(x) \to y = 3\sin(x) \to y = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \to y = -3\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \to \to y = -3\sin\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) \to y = -3\sin\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) - 2$.

Поэтапное преобразование графика синусоиды изображено графическими иллюстрациями.

График исходной синусоиды $y = \sin x$ (рис. 7).

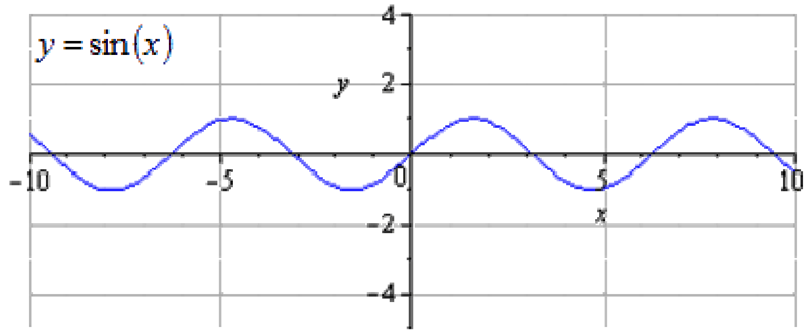


Рис. 7

Растягиваем синусоиду вдоль оси ординат втрое (амплитуда колебаний при этом возрастает в три раза) (рис. 8).

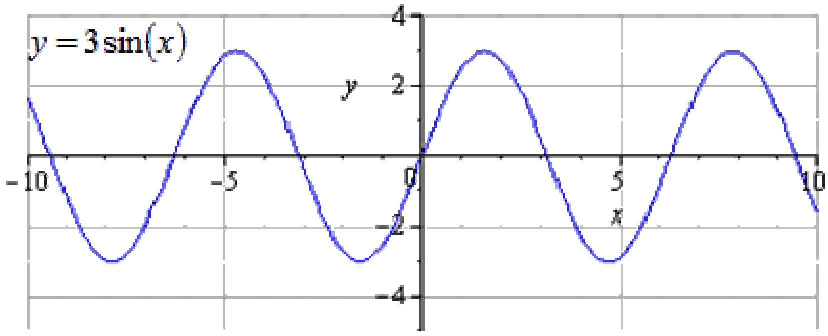


Рис. 8

Растягиваем вдоль оси абсцисс вдвое (рис. 9).

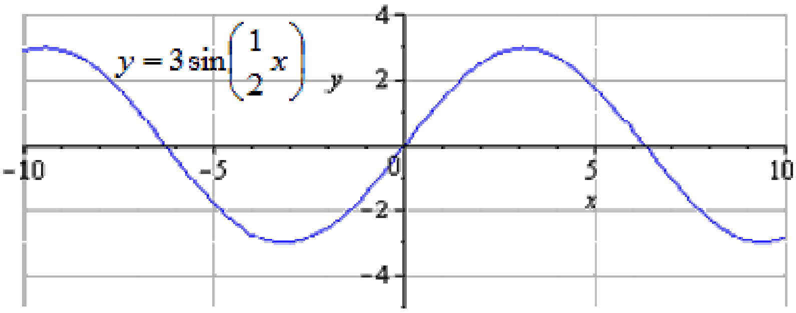


Рис. 9

Симметрично отображаем относительно оси абсцисс (рис. 10).

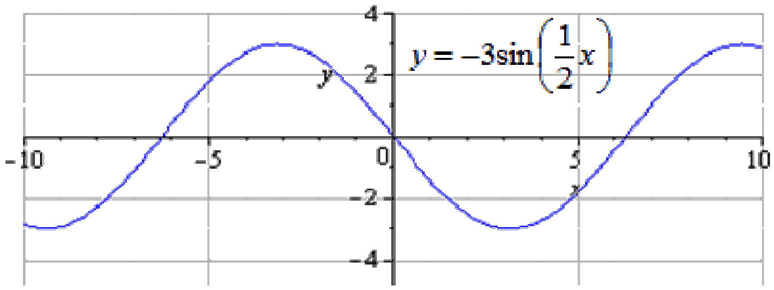


Рис. 10

Сдвигаем график вправо на 3 единицы (рис. 11).

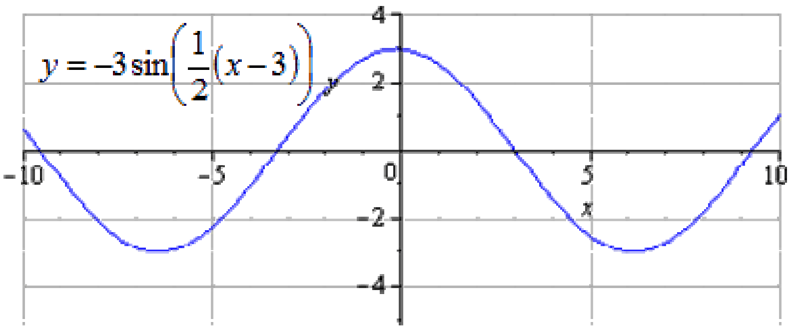


Рис. 11

Сдвигаем график вниз на 2 единицы (рис. 12).

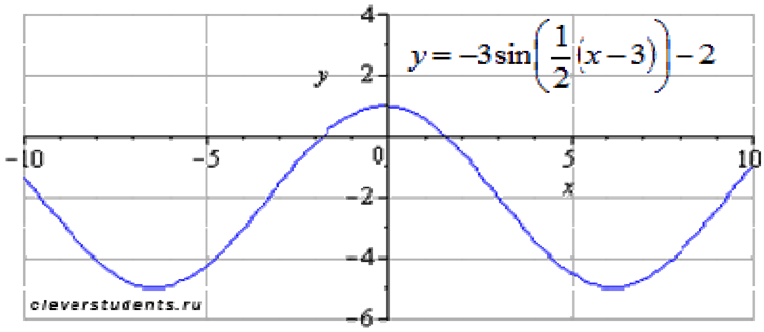


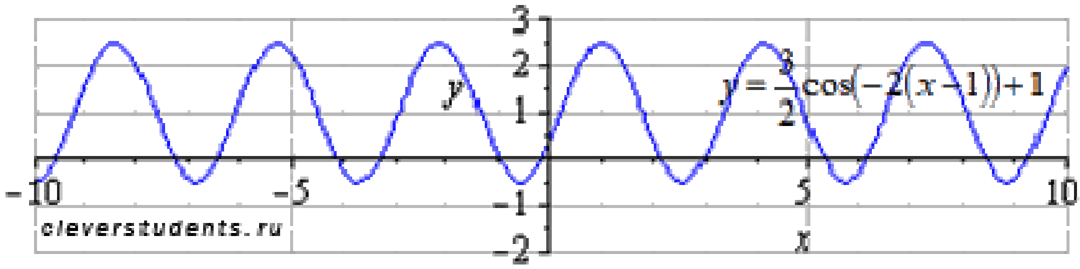
Рис. 12

Этим этапом задача преобразования графика тригонометрической функции $y = \sin x$ завершается.

Задача для самостоятельного решения

6. Построить график функции $y = \frac{3}{2}\cos(2 - 2x) + 1$ преобразованием косинусоиды $y = \cos x$.

Ответ



9.3. Обратные тригонометрические функции

Графики обратных тригонометрических функций

Построим график арксинуса $y = \arcsin x$ (рис. 13).

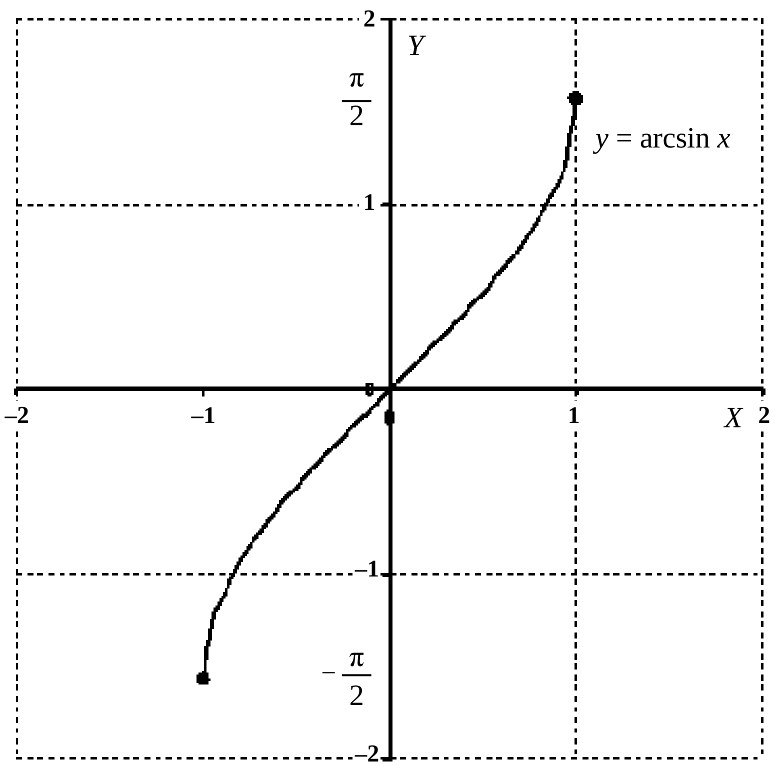


Рис. 13

Перечислим основные свойства функции y = arcsin x:

<u>Область определения</u>: D (f) = [–1;1], не существует значений вроде arcsin (–1,5) или arcsin 2.

Область значений: E (f) = $[-\pi/2;\pi/2]$, т. е., функция y = arcsin x ограничена.

Арксинус – функция нечётная, здесь минус опять же выносится: arcsin (–x) = –arcsin x.

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения арксинуса: arcsin 0 = 0, arcsin (–1) = –π/2 arcsin 1 = π/2. Другие распространенные значения арксинуса (а также других «арков») можно найти с помощью таблицы значений обратных тригонометрических функций.

Построим график y = arcsin x (рис. 14).

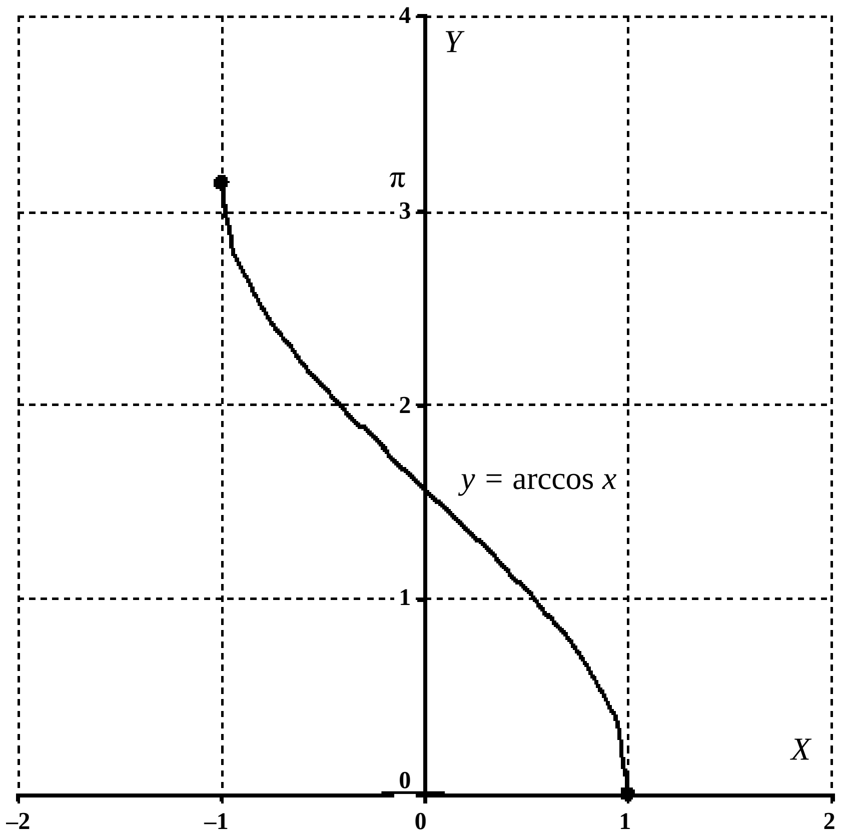


Рис. 14

Очень похоже на арксинус. Арккосинус не является четной или нечетной функцией, он как раз «никакой».

Построим график y = arctg x (рис. 15).

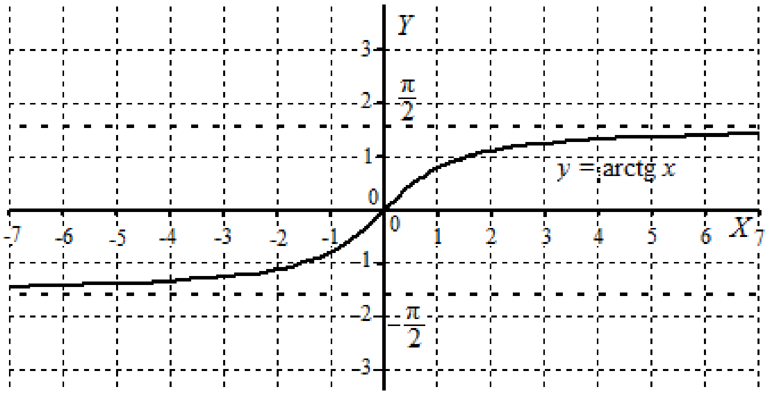


Рис. 15

Всего лишь перевернутая ветка тангенса. Перечислим основные свойства функции y = arctg x.

<u>Область определения</u>: $D\,(f) = R$

Область значений: $E\,(f) = (-\pi/2; \pi/2)$, т. е. функция y = arctg x ограничена.

У рассматриваемой функции есть две асимптоты: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\operatorname{arctg}\ x)=-\dfrac{\pi}{2}$.

Арктангенс – функция нечётная: arctg $(-x)$ = –arctg x.

Самые «популярные» значения арктангенса, которые встречаются на практике, следующие: arctg 0 = 0, arctg 1 = $\dfrac{\pi}{4}$.

К графику арккотангенса y = arcctg x приходится обращаться значительно реже, но тем не менее вот его чертеж (рис. 16).

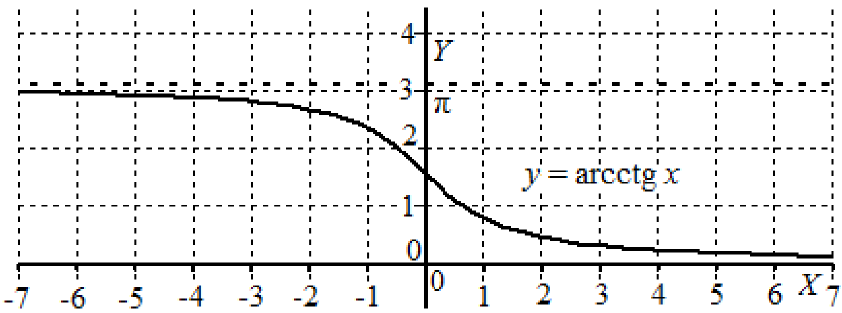


Рис. 16

Арккотангенс, как и арккосинус, не является чётной или нечётной функцией.

9.4. Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения.

Уравнения, содержащие косинус – cos x, представлены в табл. 3.

Таблица 3

Уравнение	Решение	
$\cos x = 0$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$	
$\cos x = 1$	$x=2\pi k,\ k\in Z$	
$\cos x = -1$	$x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$	
$\cos x = \frac{1}{2}$	$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$	$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$
$\cos x = -\frac{1}{2}$	$x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$	$x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$
$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$	$x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$	$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$	$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$

Общий вид решения уравнения $\cos x = a$, где $|a| \le 1$, определяется формулой $x = \pm \arccos(a) + 2\pi k$, $k \in$ Z (целые числа).

При $|a| > 1$ уравнение $\cos x = a$ не имеет решений среди вещественных чисел.

Уравнения, содержащие синус – sin x (табл. 4).

Таблица 4

Уравнение	Решение
$\sin x = 0$	$x=\pi k,\ k\in Z$
$\sin x = 1$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

Окончание табл. 4

Уравнение	Решение	
$\sin x = -1$	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	
$\sin x = \dfrac{1}{2}$	$x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = -\dfrac{1}{2}$	$x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$	$x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$

Общий вид решения уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leq 1$, определяется формулой $x = (-1)^k \arcsin(a) + \pi k,\ k \in Z$ (целые числа).

При $|a| > 1$ уравнение $\sin x = a$ не имеет решений среди вещественных чисел.

Уравнения, содержащие тангенс и котангенс, – $\text{tg}\, x$ и $\text{ctg}\, x$ (табл. 5).

Таблица 5

Уравнение	Уравнение	Решение
$\text{tg}\, x = 0$	–	$x = \pi k, k \in Z$
$\text{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{ctg}\, x = \sqrt{3}$	$x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\text{tg}\, x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{ctg}\, x = -\sqrt{3}$	$x = -\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\text{tg}\, x = 1$	$\text{ctg}\, x = 1$	$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$
$\text{tg}\, x = -1$	$\text{ctg}\, x = -1$	$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$

Окончание табл. 5

Уравнение	Уравнение	Решение
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$
$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	$\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$
–	$\operatorname{ctg} x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

Общий вид решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ определяется формулой $x = \operatorname{arctg}(a) + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$ (целые числа).

Общий вид решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ определяется формулой $x = \operatorname{arcctg}(a) + \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$ (целые числа).

Методы решения тригонометрических уравнений

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида (см. выше) и *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения. Существуют семь основных методов решения тригонометрических уравнений.

1. *Алгебраический метод.* Этот метод нам хорошо известен из алгебры (метод замены переменной и подстановки).

Пример. Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6) - 3\sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6) - 3\cos(x+\pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6) = 1$, 2). $\cos(x+\pi/6) = 1/2$,

$x + \pi/6 = 2\pi k$, $x + \pi/6 = \pm\arccos(1/2) + 2\pi n$,

$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k$; $x_2 = \pm\pi/3 - \pi/6 + 2\pi n$.

2. *Разложение на множители.* Этот метод рассмотрим на примерах.

Пример. Решить уравнение: $\sin x + \cos x = 1$.

Решение. Перенесём все члены уравнения влево:

$$\sin x + \cos x - 1 = 0,$$

преобразуем и разложим на множители выражение в левой части уравнения:

$$\sin x - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2) - 2\sin^2(x/2) = 0,$$

$$2\sin(x/2)\cdot[\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$$

1). $\sin(x/2) = 0$,

$x/2 = \pi k$,

$x_1 = 2\pi k$;

2). $\cos(x/2) - \sin(x/2) = 0$,

$\tan(x/2) = 1$,

$x/2 = \arctan 1 + \pi n$,

$x/2 = \pi/4 + \pi n$,

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n$.

Пример. Решить уравнение: $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

Решение. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$,
$\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$,
$\sin x\,(\cos x - \sin x) = 0$,

1). $\sin x = 0$,

$x_1 = \pi k$;

2). $\cos x - \sin x = 0$,

$\tan x = 1$,

$x_2 = \pi/4 + \pi n$,

Пример. Решить уравнение: $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.
Решение. $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$,
$2\cos 4x \cos 2x = 2\cos^2 4x$,
$\cos 4x\,(\cos 2x - \cos 4x) = 0$,
$\cos 4x\; 2\sin 3x \cdot \sin x = 0$,

1) $\cos 4x = 0$; 2) $\sin 3x = 0$; 3) $\sin x = 0$;

$4x = \pi/2 + \pi k$, $3x = \pi n$, $x_3 = \pi m$.

$x_1 = \pi/8 + \pi k/4$; $x_2 = \pi n/3$;

3. *Приведение к однородному уравнению.* Уравнение называется *однородным относительно* sin *и* cos, *если все его члены одной и той же степени относительно* sin *и* cos *одного и того же угла*. Чтобы решить однородное уравнение, надо:

а) перенести все его члены в левую часть;

б) вынести все общие множители за скобки;

в) приравнять все множители и скобки нулю;

г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;

д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно tan.

Пример. Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$.

Решение. $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$$\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 3 = 0, \text{ отсюда } y^2 + 4y + 3 = 0,$$

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда

1) $\operatorname{tg} x = -1$; 2) $\operatorname{tg} x = -3$;

$x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $x_2 = -\mathrm{arc}yg\, 3 + \pi n$.

4. *Переход к половинному углу.* Рассмотрим этот метод на примере:

$$11\sin x - 2\cos x - 10,$$

$$22\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} = 10\sin^2\frac{x}{2} + 10\cos^2\frac{x}{2},$$

$$4\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 11\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 6 = 0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{11 + \sqrt{121 - 96}}{8} = \frac{11+5}{8}.$$

$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 2$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{4}$,

$x = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

5. *Введение вспомогательного угла.* Рассмотрим уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$, где a, b, c – коэффициенты; x – неизвестное.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$ (корректно ли это?) :

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi} \sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi} \cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{C},$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса, а именно: модуль (абсолютное значение) каждого из них не больше 1, а сумма их квадратов равна 1. Тогда можно обозначить их соответственно как $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ (здесь φ – так называемый *вспомогательный угол*), и наше уравнение принимает вид

$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = C,$$

или $$\sin(x + \varphi) = C,$$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k$,

где $\varphi = \arccos \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arcsin \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Заметим, что введённые обозначения $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ взаимно заменяемы.

__*Пример.*__ Решить уравнение: $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1$.

Решение. Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1} = 2$:

$$(\sqrt{3}/2) \cdot \sin 3x - (1/2) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\cos(\pi/6) \cdot \sin 3x - \sin(\pi/6) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\sin(3x - \pi/6) = 1/2,$$

отсюда, $x = (-1)^k \cdot \pi/18 + \pi/18 + \pi k/3$.

6. *Преобразование произведения в сумму.* Здесь используются соответствующие формулы.

Пример. Решить уравнение: $2\sin x \cdot \sin 3x = \cos 4x$.

Решение. Преобразуем левую часть в сумму:

$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x$,

$\cos 8x = 0$,

$8x = \pi/2 + \pi k$,

$x = \pi/16 + \pi k/8$.

7. *Универсальная подстановка.* Рассмотрим этот метод на примере.

Пример. Решить уравнение $3\sin x - 4\cos x = 3$.

Решение. Здесь возможны два случая:

1). $x \neq (2m+1)\pi$, тогда

$$3\,\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} - 4\,\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = 3,$$

$6\tan(x/2) - 4 + 4\tan^2(x/2) = 3 + 3\tan^2(x/2)$,

$\tan^2(x/2) + 6\tan(x/2) - 7 = 0$,

делаем замену: $\tan(x/2) = u$, тогда $u^2 + 6u - 7 = 0$,

корни этого уравнения: $u_1 = -7$, $u_2 = 1$.

1*а*). $\tan(x/2) = -7$, $x_1 = -2\arctan 7 + 2\pi k$;

1*б*). $\tan(x/2) = 1$, $x_2 = \pi/2 + 2\pi n$.

2). $x = (2m+1)\pi$, тогда

$3\sin[(2m+1)\pi] - 4\cos[(2m+1)\pi] = 4 \neq 3$.

Таким образом, решение даёт только первый случай.

Задачи для самостоятельного решения

7. Найти среднее арифметическое корней уравнения $\cos^2 x - \sin x\cos x = 1$, принадлежащих отрезку $[-200°;\ 270°]$.

8. Найти сумму корней уравнения $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2 x = 0{,}25$, принадлежащих отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{6};\ 2\pi\right]$.

9. Найти сумму корней уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} tgx$, принадлежащих отрезку $[-270°;90°]$.

10. Найти количество корней уравнения $3\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$, принадлежащих отрезку $[0;2\pi]$.

11. Решить уравнение $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 1$ двумя способами с помощью перехода к половинному аргументу и введения вспомогательного угла.

12. Найти сумму корней уравнения $\sin 3x \sin 5x = \sin x \sin 7x$, принадлежащих отрезку $[0°;90°]$.

13. Найти все корни уравнения $\frac{\sin 4x}{\cos 5x} + 1 = 0$, принадлежащие отрезку [45º; 180º].

9.5. Тригонометрические неравенства

Простейшие тригонометрические неравенства

Неизвестные переменные (величины углов) *x*.

Множество целых чисел *Z*.

Целые числа *n*.

Множество действительных чисел *R*.

Действительные числа *a*.

Тригонометрические функции: sin *x*, cos *x*, tg *x* (допускается tan *x*), ctg *x* (допускается cot *x*).

Обратные тригонометрические функции: arcsin *a*, arccos *a*, arctg *a* (допускается arctan *a*), arcctg *a* (допускается arccot *a*).

Неравенство, в котором неизвестная переменная находится под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим неравенством*.

К *простейшим тригонометрически неравенствам* относятся следующие 16 неравенств:

$\sin x > a$, $\sin x \geq a$, $\sin x < a$, $\sin x \leq a$,
$\cos x > a$, $\cos x \geq a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$,
$\mathrm{tg}\, x > a$, $\mathrm{tg}\, x \geq a$, $\mathrm{tg}\, x < a$, $\mathrm{tg}\, x \leq a$,
$\mathrm{ctg}\, x > a$, $\mathrm{ctg}\, x \geq a$, $\mathrm{ctg}\, x < a$, $\mathrm{ctg}\, x \leq a$.

Здесь x является неизвестной переменной, a может быть любым действительным числом.

Неравенства вида $\sin x > a$, $\sin x \ge a$, $\sin x < a$, $\sin x \le a$

Неравенство $\sin x > a$

При $a \ge 1$ неравенство $\sin x > a$ не имеет решений: $x \in \varnothing$.

При $a < -1$ решением неравенства $\sin x > a$ является любое действительное число: $x \in R$.

При $-1 \le a < 1$ решение неравенства $\sin x > a$ выражается в виде $\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$ (рис. 17).

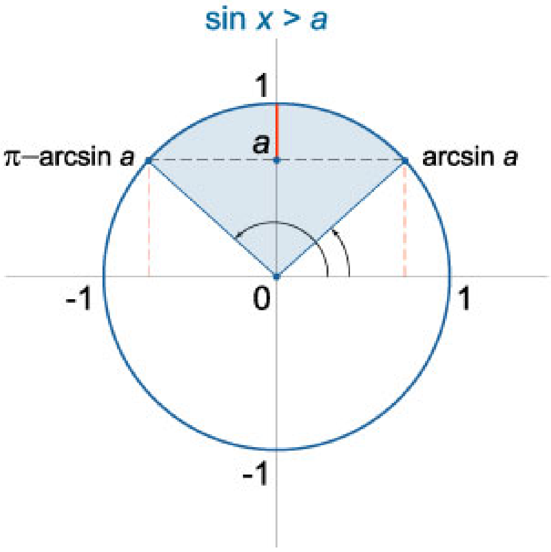


Рис. 17

Неравенство $\sin x \ge a$

При $a > 1$ неравенство $\sin x \ge a$ не имеет решений: $x \in \varnothing$.

При $a \le -1$ решением неравенства $\sin x \ge a$ является любое действительное число: $x \in R$.

Случай $a = 1$: $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in Z$.

При $-1 < a < 1$ решение нестрогого неравенства $\sin x \ge a$ включает граничные углы и имеет вид $\arcsin a + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$ (см. рис. 17).

Неравенство $\sin x < a$

При $a > 1$ решением неравенства $\sin x < a$ является любое действительное число: $x \in R$.

При $a \le -1$ у неравенства $\sin x < a$ решений нет: $x \in \varnothing$.

При $-1 < a \le 1$ решение неравенства $\sin x < a$ лежит в интервале $-\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$ (рис. 18).

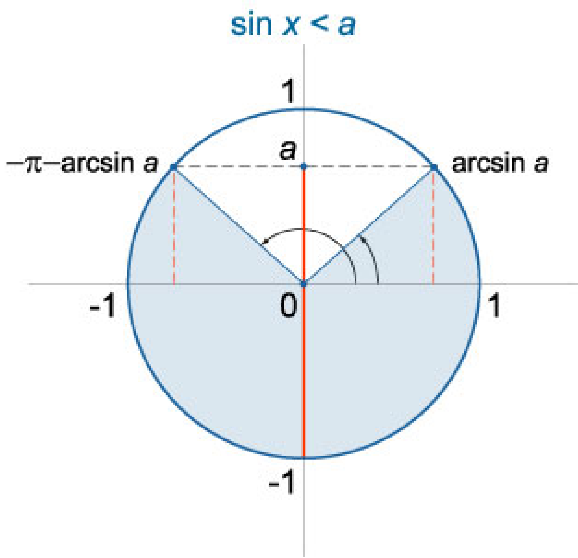


Рис. 18

Неравенство $\sin x \le a$

При $a \ge 1$ решением неравенства $\sin x \le a$ является любое действительное число: $x \in R$.

При $a < -1$ неравенства $\sin x \le a$ решений не имеет: $x \in \varnothing$.

Случай $a = -1$: $x = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z$.

При $-1 < a < 1$ решение нестрогого неравенства $\sin x \le a$ находится в интервале $-\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$ (см. рис. 18).

Неравенства вида $\cos x > a$, $\cos x \ge a$, $\cos x < a$, $\cos x \le a$

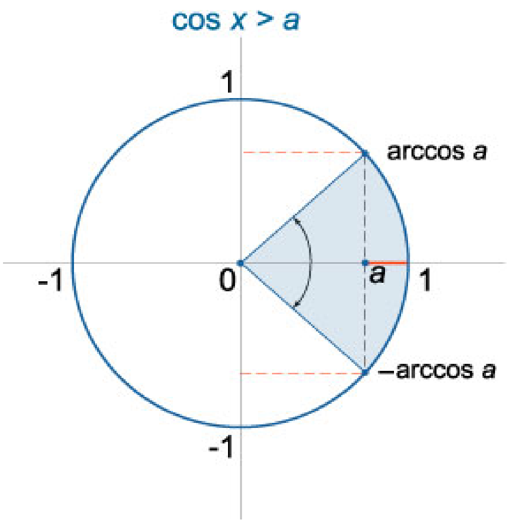


Рис. 19

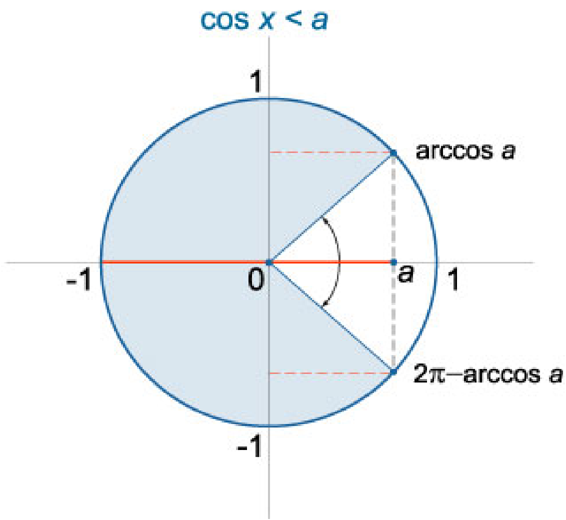


Рис. 20

Неравенство $\cos x > a$

При $a \ge 1$ неравенство $\cos x > a$ не имеет решений: $x \in \varnothing$.

При $a < -1$ решением неравенства $\cos x > a$ является любое действительное число: $x \in R$.

При $-1 \le a < 1$ решение неравенства $\cos x > a$ имеет вид $-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ (см. рис. 19).

Неравенство $\cos x \ge a$

При $a > 1$ неравенство $\cos x \ge a$ не имеет решений: $x \in \varnothing$.

При $a \le -1$ решением неравенства $\cos x \ge a$ является любое действительное число: $x \in R$.

Случай $a = 1$: $x = 2\pi n,\ n \in Z$.

При $-1 < a < 1$ решение нестрогого неравенства $\cos x \ge a$ выражается формулой $-\arccos a + 2\pi n \le x \le \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ (см. рис. 20).

Неравенство $\cos x < a$

При $a > 1$ неравенство $\cos x < a$ справедливо при любом действительном значении x: $x \in R$.

При $a \le -1$ неравенство $\cos x < a$ не имеет решений: $x \in \varnothing$.

При $-1 < a \le 1$ решение неравенства $\cos x < a$ записывается в виде $\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ (см. рис. 20).

Неравенство $\cos x \le a$

При $a \ge 1$ решением неравенства $\cos x \le a$ является любое действительное число: $x \in R$.

При $a < -1$ неравенство $\cos x \le a$ не имеет решений: $x \in \varnothing$.

Случай $a = -1$: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

При $-1 < a < 1$ решение нестрогого неравенства $\cos x \le a$ записывается как $\arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$ (см. рис. 20).

Неравенства вида $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \ge a$, $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \le a$

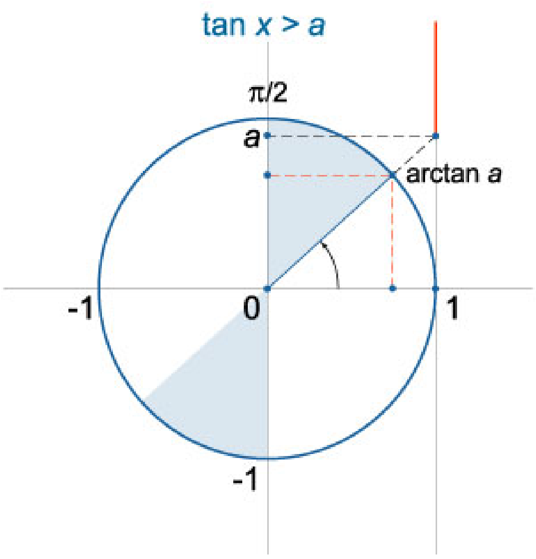


Рис. 21

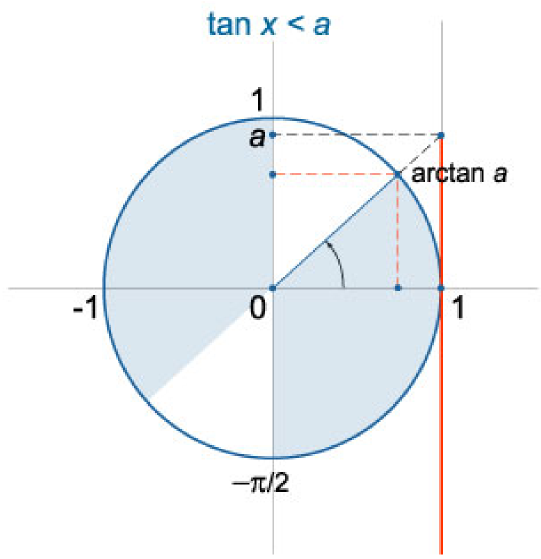


Рис. 22

Неравенство $\operatorname{tg} x > a$

При любом действительном значении a решение строгого неравенства $\operatorname{tg} x > a$ имеет вид $\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$ (рис. 21).

Неравенство $\operatorname{tg} x \ge a$

Для любого значения a решение неравенства $\operatorname{tg} x \ge a$ выражается в виде $\operatorname{arctg} a + \pi n \le x < \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$ (см. рис. 21).

Неравенство $\operatorname{tg} x < a$

Для любого значения a решение неравенства $\operatorname{tg} x < a$ записывается в виде $-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$ (рис. 22).

Неравенство $tg\ x \le a$

При любом a неравенство $\text{tg}\ x \le a$ имеет следующее решение: $-\pi/2 + \pi n < x \le \text{arctg}\ a + \pi n,\ n \in Z$ (см. рис. 22).

Неравенства вида $\text{ctg}\ x > a$, $\text{ctg}\ x \ge a$, $\text{ctg}\ x < a$, $\text{ctg}\ x \le a$

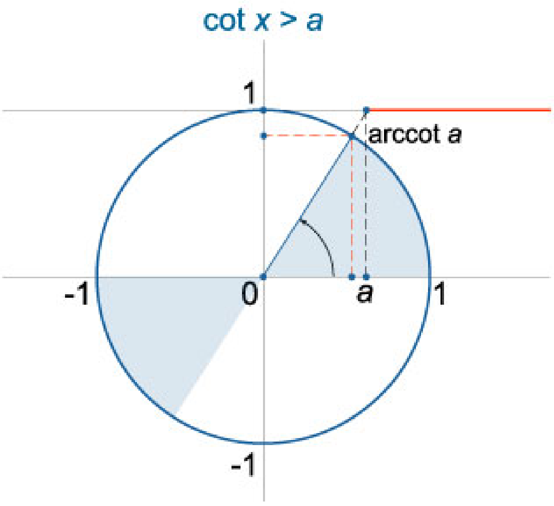


Рис. 23

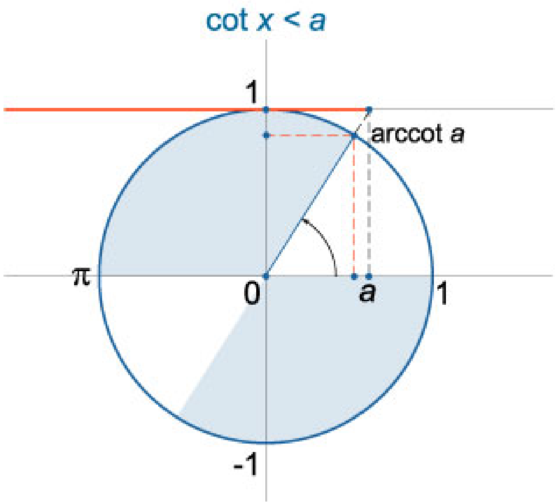


Рис. 24

Неравенство $ctg\ x > a$

При любом a решение неравенства $\text{ctg}\ x > a$ имеет вид $\pi n < x <$ $< \text{arcctg}\ a + \pi n,\ n \in Z$ (рис. 23).

Неравенство $ctg\ x \ge a$

Нестрогое неравенство $\text{ctg}\ x \ge a$ имеет аналогичное решение $\pi n < x \le \text{arcctg}\ a + \pi n,\ n \in Z$ (см. рис. 23).

Неравенство $ctg\ x < a$

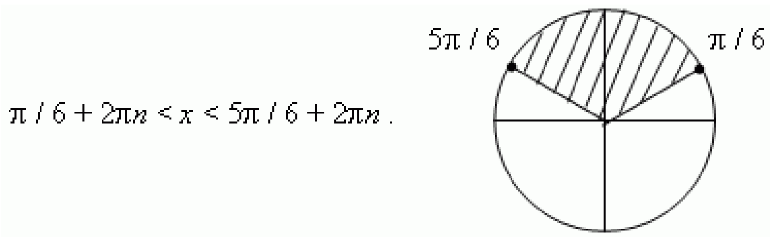
Для любого значения a решение неравенства $\text{ctg}\ x < a$ лежит в открытом интервале $\text{arcctg}\ a + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z$ (рис. 24).

Неравенство $ctg\ x \le a$

При любом a решение нестрогого неравенства $\text{ctg}\ x \le a$ находится в полуоткрытом интервале $\text{arccot}\ a + \pi n \le x < \pi + \pi n,\ n \in Z$ (см. рис. 24).

<u>*Пример.*</u> Решить неравенство: $\sin x > 0{,}5$.

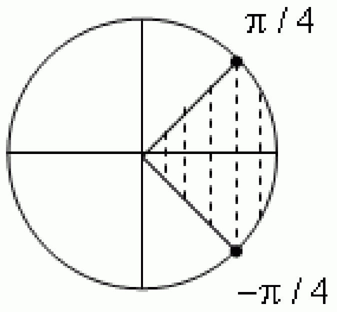
Решение



<u>Пример.</u> Решить неравенство cos x > $\sqrt{2}/2$.

Решение

$$-\pi/4 + 2\pi n < x < \pi/4 + 2\pi n.$$



Задачи для самостоятельного решения

14. Решить неравенство $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

15. Решить неравенство $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Что такое показательная функция?

Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют *показательной функцией*.

Основные свойства показательной функции $y = a^x$ представлены в табл. 6.

Таблица 6

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная

Графиком показательной функции является *экспонента* (рис. 25).

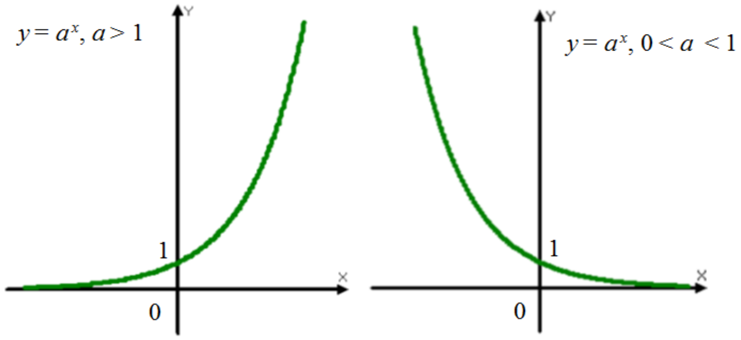
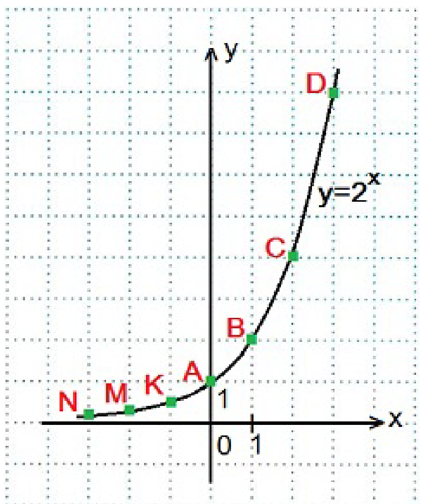


Рис. 25

Справедливы все свойства степенной функции:

- $a^0 = 1$. Любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице.
- $a^1 = a$. Любое число в первой степени равно самому себе.
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели складывают.
- $a^x : a^y = a^{x-y}$. При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.
- $(a^x)^y = a^{xy}$. При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают.
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^y$. При возведении произведения в степень возводят в эту степень каждый множитель.
- $(a/b)^x = a^x/b^y$. При возведении дроби в степень возводят в эту степень и числитель и знаменатель дроби.
- $a^{-x} = 1/a^x$.
- $(a/b)^{-x} = (b/a)^x$.

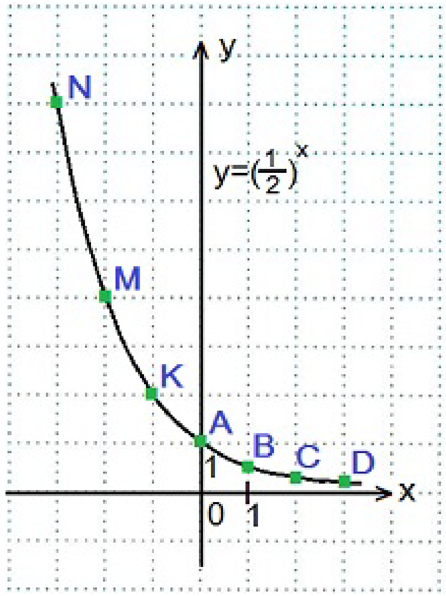


__Пример.__ Построить график функции $y = 2^x$. Найдем значения функции при $x = 0$, $x = \pm1$, $x = \pm2$, $x = \pm3$.

$x = 0$, $y = 2^0 = 1$; Точка A.
$x = 1$, $y = 2^1 = 2$; Точка B.
$x = 2$, $y = 2^2 = 4$; Точка C.
$x = 3$, $y = 2^3 = 8$; Точка D.
$x = -1$, $y = 2^{-1} = 1/2 = 0{,}5$; Точка K.
$x = -2$, $y = 2^{-2} = 1/4 = 0{,}25$; Точка M.
$x = -3$, $y = 2^{-3} = 1/8 = 0{,}125$; Точка N.

Большему значению аргумента $\boldsymbol{x}$ соответствует и большее значение функции $\boldsymbol{y}$. Функция $y = 2^x$ возрастает на всей области определения $D(\boldsymbol{y}) = R$, так как основание функции $2 > 1$.

<u>*Пример.*</u> Построить график функции $y = (1/2)^x$. Найдем значения функции при $x = 0$, $x = \pm1$, $x = \pm2$, $x = \pm3$.



$x = 0$, $y = (1/2)^0 = 1$; Точка A.
$x = 1$, $y = (1/2)^1 = ½ = 0,5$; Точка B.
$x = 2$, $y = (1/2)^2 = 1/4 = 0,25$; Точка C.
$x = 3$, $y = (1/2)^3 = 1/8 = 0,125$; Точка D.
$x = -1$, $y = (1/2)^{-1} = 2^1 = 2$; Точка K.
$x = -2$, $y = (1/2)^{-2} = 2^2 = 4$; Точка M.
$x = -3$, $y = (1/2)^{-3} = 2^3 = 8$; Точка N.

Большему значению аргумента $\boldsymbol{x}$ соответствует меньшее значение функции $\boldsymbol{y}$. Функция $y = (1/2)^x$ убывает на всей своей области определения: $D(y) = R$, так как основание функции $0 < (1/2) < 1$.

<u>*Пример.*</u> Найти область значений функции $y = (1/3)^x + 1$.

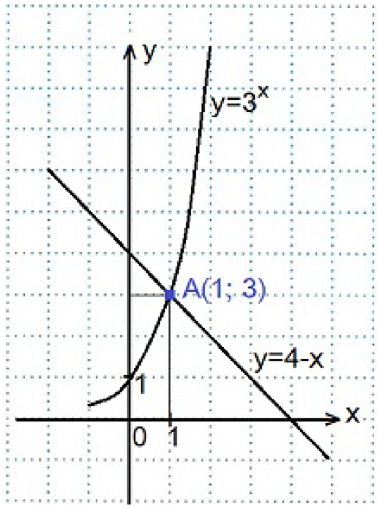
Решение. $0 < (1/3)^x < +\infty$, тогда, прибавляя ко всем частям двойного неравенства число **1**, получаем:

$0 + \mathbf{1} < (1/3)^x + \mathbf{1} < +\infty + \mathbf{1}$;

$1 < (1/3)^x + 1 < +\infty$.

Ответ: $E(y) = (1; +\infty)$.

<u>*Пример.*</u> Решить графически уравнение $3^x = 4 - x$.



В одной координатной плоскости построим графики функций: $y = 3^x$ и $y = 4 - x$.

Графики пересеклись в точке A(1; 3).

Ответ: 1.

Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится <u>только</u> в показателях каких-либо степеней.

Для решения *показательных уравнений* требуется знать и уметь использовать следующую несложную теорему.

Теорема 1. Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$

<u>Пример.</u> Решить простейшее показательное уравнение $3^{2x-1} = 81$.

Решение. Число 81 представим в виде степени числа 3:

$3^{2x-1} = 3^4$; приравняем показатели степеней с одинаковыми основаниями:

$2x - 1 = 4$; решаем простейшее линейное уравнение:

$2x = 4 + 1$;

$2x = 5$ |:2.

Ответ: $x = 2{,}5$.

<u>Пример.</u> Решите уравнение: $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$.

Решение. Используем приведенные выше формулы и подстановку:

$$t = 2^x.$$

Уравнение тогда принимает вид:

$$2t^2 - 5t - 88 = 0.$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения положителен:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-88) = 729 = 27^2 > 0.$$

Это означает, что данное уравнение имеет два корня. Находим их:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2 \cdot 2} = 8. \\ t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2 \cdot 2} = -5.5. \end{array}\right.$$

Переходя к обратной подстановке, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 8. \\ 2^x = -5.5. \end{array}\right.$$

Второе уравнение корней не имеет, поскольку показательная функция строго положительна на всей области определения. Решаем второе:

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3.$$

С учетом сказанного в теореме 1 переходим к эквивалентному уравнению $x = 3$. Это и будет являться ответом к заданию.

Ответ: $x = 3$.

Пример. Решите уравнение:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x .$$

Решение. Обе части исходного уравнения можно поделить на $0{,}2^x$. Данный переход будет являться равносильным, поскольку это выражение больше нуля при любом значении x (показательная функция строго положительна на своей области определения). Тогда уравнение принимает вид

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример. Решите уравнение

$$3^x \cdot 7^{x+2} = 49 \cdot 4^x.$$

Решение. Упрощаем уравнение до элементарного путем равносильных преобразований с использованием правил деления и умножения степеней:

$$49 \cdot 3^x \cdot 7^x = 49 \cdot 4^x \Leftrightarrow,$$

$$21^x = 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{21}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Деление обеих частей уравнения на 4^x, как и в предыдущем примере, является равносильным преобразованием, поскольку данное выражение не равно нулю ни при каких значениях x.

Ответ: $x = 0$.

Пример. Решите уравнение

$$18^x - 8 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^x = 0.$$

Решение. Упрощаем уравнение путем равносильных преобразований, имея в виду везде, что показательная функция строго больше нуля при любом значении x, и используя правила вычисления произведения и частного степеней:

$$2^x \cdot 3^{2x} - 8 \cdot 2^x \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^x(3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 0. \\ 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 9. \\ 3^x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ. $x = 2$.

Показательными называются неравенства, в которых неизвестная переменная содержится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения *показательных неравенств* требуется знание следующей теоремы.

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$. Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$

Пример. Решить простейшее показательное неравенство $4^{5-2x} < 0{,}25$.

Решение. Представим правую часть в виде $0{,}25 = (25/100) = (1/4) =$ $= 4^{-1}$;

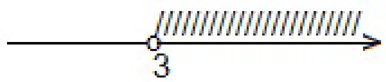
$4^{5-2x}<4^{-1}$; функция $y = 4^x$ с основанием $4 > 1$ возрастает на R, поэтому, опуская основания степеней, знак неравенства сохраним:

$5 - 2x < -1$;

$-2x < -1 - 5$;

$-2x< -6$ |:(–2) при делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняют на противоположный:

$x > 3$.



Ответ: $(3; +\infty)$.

Пример. Решите неравенство

$$2^{2x^2-6x-3} + 6^{x^2-3x-1} - 3^{2x^2-6x-3} \geqslant 0.$$

Решение.

$$2 \cdot 2^{2x^2-6x-2} + 2^{x^2-3x-1} \cdot 3^{x^2-3x-1} - 3 \cdot 3^{2x^2-6x-2} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

Делим обе части неравенства на выражение

$$3^{2x^2-6x-2}.$$

Оно всегда больше нуля (из-за положительности показательной функции), поэтому знак неравенства изменять не нужно. Получаем

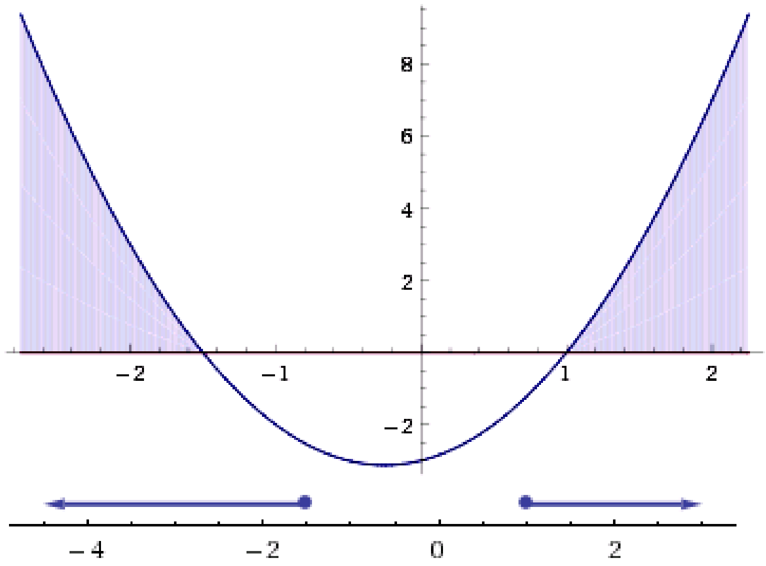
$$2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-6x-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x-1} - 3 \geqslant 0.$$

Воспользуемся заменой переменной:

$$t = \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x-1}.$$

Исходное уравнение тогда принимает вид

$$2t^2 + t - 3 \geqslant 0.$$



Итак, неравенству удовлетворяют значения t, находящиеся в промежутке:

$$t \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [1; +\infty).$$

Переходя к обратной подстановке получаем, что исходное неравенство распадается на два случая:

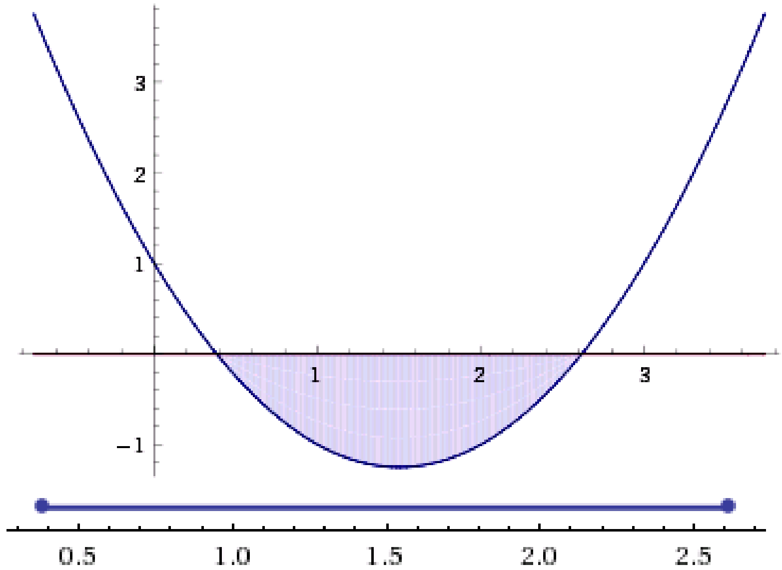
$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x-1} \leqslant -\frac{3}{2}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x-1} \geqslant 1. \end{array}\right.$$

Первое неравенство решений не имеет в силу положительности показательной функции. Решаем второе:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x-1} \geqslant 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3x-1} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{0}.$$

Поскольку основание степени в данном случае оказалось меньше единицы, но больше нуля, равносильным (по теореме 2) будет переход к следующему неравенству:

$$x^2 - 3x + 1 \leqslant 0.$$



Итак, окончательный *ответ:* $x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти область значений функции $y = 3^{x+1} - 5$.
2. Решить графически уравнение $0{,}5^x = x + 3$.
3. Решить уравнение $3^x + 3^{x+1} - 3^{x-1} = 11\sqrt{3}$.
4. Решить уравнение $16^x + 6 \cdot 4^x = 16$.
5. Решить уравнение $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$.
6. Решить уравнение $(5+2\sqrt{6})^x + (5-2\sqrt{6})^x = 10$.
7. Решить неравенство $0{,}4^{2x+1} \geq 0{,}16$.
8. Найти число целых решений неравенства

$$\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x^2-x-6} < \left(tg^2\frac{\pi}{6}\right)^{x^2-x-6}.$$

9. Решить неравенство $\frac{\sqrt{2^{-x}-4}}{x^2+5x} \leq 0$.
10. Решить неравенство $\frac{3^x - 2^x}{x-3} \leq 0$.

11. ЛОГАРИФМЫ

11.1. Свойства логарифмов. Тождественные преобразования логарифмических выражений

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) – это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b. $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \quad \log_a a^x = x.$$

Пример.

$\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$;

$\log_7 49 = 2$, так как $7^2 = 49$;

$\log_5 \frac{1}{5} = -1$, так как $5^{-1} = \frac{1}{5}$;

$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, так как $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Десятичный логарифм – логарифм с основанием 10, который обозначается как lg.

$\lg 100 = 2$, $\log_{10} 100 = 2$, так как $10^2 = 100$.

Натуральный логарифм – логарифм с основанием e, обозначается ln.

Свойства логарифма:

$a^{\log_a b} = b$, $\quad \log_a b^m = m \log_a b$,

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ $\quad \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$, $\quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ $\quad \log_{a^n} b^n = \log_a b$, $\quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9.$$

Логарифм произведения – это сумма логарифмов:

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$,

$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3(8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$.

Логарифм частного – это разность логарифмов:

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,

$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$.

Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа: $\log_a b^m = m \log_a b$.

Показатель степени основания логарифма: $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$.

$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$, в частности, если $m = n$, мы получаем формулу $\log_{a^n} b^n = \log_a b$, например, $\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$.

Переход к новому основанию:

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, в частности, если $c = b$, то $\log_b b = 1$, и тогда:

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{0,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1,25}{\log_{0,8} 3} = \log_{0,8} 1,25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1$.

<u>*Пример.*</u> Найдите значение выражения $\log_{27}81 + \log_{27}9$.

Решение. Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$\log_{27} 81 + \log_{27} 9 = \log_{3^3} 81 + \log_{3^3} 9 = \frac{1}{3}\log_3 81 + \frac{1}{3}\log_3 9 =$$

$$= \frac{1}{3}\log_3 3^4 + \frac{1}{3}\log_3 3^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2.$$

Ответ: 2.

<u>Пример</u>. Вычислить значение выражения $16^{\log_{3_2} 3+\log_2 \sqrt[4]{3}}$.

Решение.

$$16^{\log_{81} 3+\log_2 \sqrt[4]{3}} = 16^{\log_{3^4} 3} \cdot (2^4)^{\frac{1}{4}\log_2 3} = (2^4)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\log_2 3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Ответ: 6.

<u>Пример.</u> Вычислите значение выражения $\dfrac{6\log_2 18}{\log_{32} 2} - \dfrac{5\log_2 9}{\log_{64} 2}$.

Решение. Так как $\log_{32} 2 = \dfrac{1}{5}$, $\log_{64} 2 = \dfrac{1}{6}$, то

$$\frac{6\log_2 18}{\log_{32} 2} - \frac{5\log_2 9}{\log_{64} 2} = 30\log_2 18 - 30\log_2 9 = 30\log_2 \frac{18}{9} = 30\log_2 2 = 30.$$

Ответ: 30.

<u>Пример</u>. Вычислите значение выражения $\log_{a^3b^4} \sqrt[3]{a^2b}$, если $\log_a b = \dfrac{1}{4}$.

Решение. В данном выражении перейдем к основанию a:

$$\log_{a^3b^4} \sqrt[3]{a^2b} = \frac{\log_a \sqrt[3]{a^2b}}{\log_a a^3b^4} = \frac{2/3 + (1/3)\log_a b}{3 + 4\log_a b}.$$

Подставив в полученное выражение $\log_a b = \frac{1}{4}$, получим

$$\log_{a^3b^4} \sqrt[3]{a^2b} = \frac{3}{16} = 0{,}1875.$$

Ответ: 0,1875.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\log_3 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} 243$.
2. Найти значение выражения $(\log_2 16)\,(\log_6 36)$.
3. Найти $\log_a(a^2b^3)$, если $\log_a b = -2$.
4. Вычислить $\log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{10+2\cdot\sqrt{21}}\right)$.
5. Вычислить $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2} + 3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}$.

11.2. Логарифмическая функция

Функцию вида $y = \log_a(x)$, где ***a*** любое положительное число, не равное единице, называют логарифмической функцией с основанием ***a***.

Основные свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел. Для краткости его еще обозначают **R+**. Очевидное свойство, так как каждое положительное число имеет логарифм по основанию a.

2. Областью значения логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел.

3. Если основание логарифмической функции $a > 1$, то на всей области определения функция возрастает. Если для основания логарифмической функции выполняется следующее неравенство $0 < a < 1$, то функция возрастает на области определения.

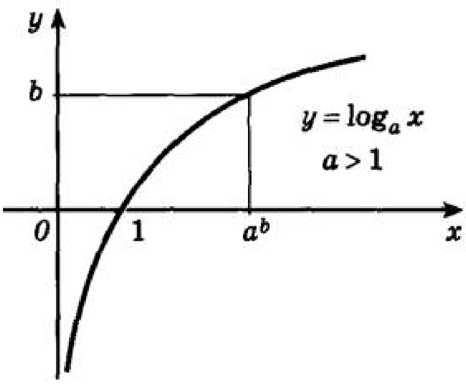


Рис. 26

4. График логарифмической функции всегда проходит через точку (1;0).

5. Возрастающая логарифмическая функция будет положительной при $x > 1$ и отрицательной при $0 < x < 1$ (рис. 26).

6. Убывающая логарифмическая функция будет отрицательной при $x > 1$ и положительной при $0 < x < 1$.

На рис. 27 представлен график убывающей логарифмической функции – $(0 < a < 1)$:

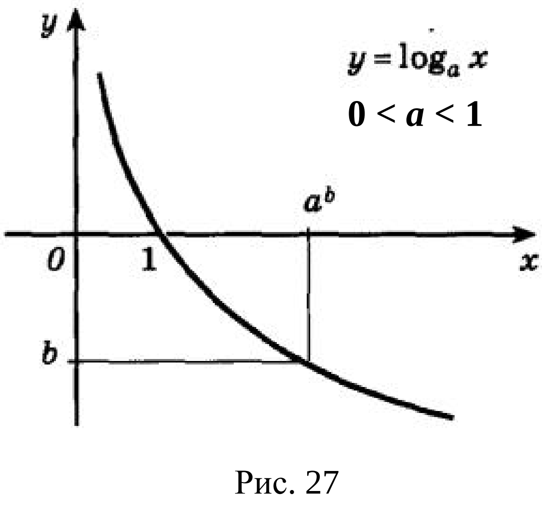


Рис. 27

7. Функция не является четной или нечетной. Логарифмическая функция – функция общего вида.

8. Функция не имеет точек максимума и минимума.

Если построить в одной оси координат показательную (рис. 28, *а*) и логарифмическую (рис. 28, *б*) функции с одинаковыми основаниями, то графики этих функций будут симметричны относительно прямой $y = x$. Данное утверждение показано на рис. 28.

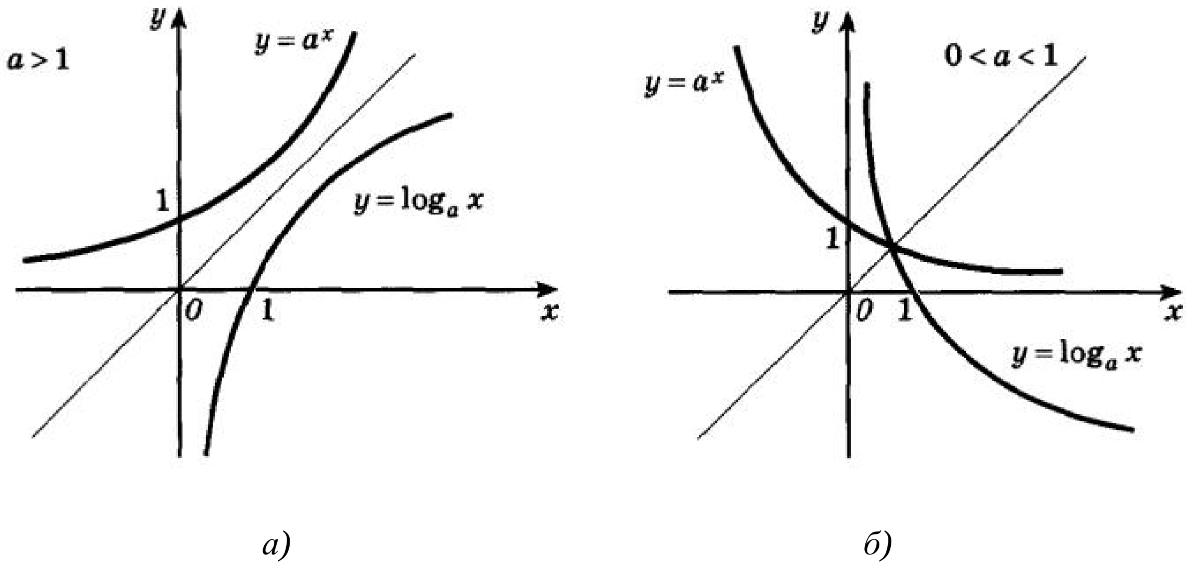


Рис. 28

Изложенное выше утверждение будет справедливо как для возрастающих, так и для убывающих логарифмических и показательных функций.

<u>Пример.</u> Найти область определения логарифмической функции $f(x) = \log_8(4 - 5x)$.

Решение. Исходя из свойств логарифмической функции, областью определения является все множество положительных вещественных чисел $R+$. Тогда заданная функция будет определена для таких x, при которых $4 - 5x > 0$. Решаем это неравенство и получаем $x < 0{,}8$.

Таким образом, получается, что областью определения функции $f(x) = \log_8(4 - 5x)$ будет являться промежуток $(-\infty; 0{,}8)$

Ответ: $(-\infty; 0{,}8)$.

Пример. Найти функцию, обратную функции $y = 3^{x-2} - 2$.
Построить графики обеих функций в одной системе координат.
Решение. Найдем функцию, обратную данной:

$$x = 3^{y-2} - 2,$$

$$3^{y-2} = x + 2,$$

$$\log_3 3^{y-2} = \log_3(x+2),$$

$$(y-2)\log_3 3 = \log_3(x+2),$$

$$y - 2 = \log_3(x+2),$$

$$y = \log_3(x+2) + 2.$$

Построим графики функций (рис. 29):

а) строим график функции $y = 3^{x-2} - 2$; график функции $y = 3^x$ переносим параллельно на две единицы вправо по оси *Ox* и на две единицы вниз по оси *Oy*;

б) график обратной функции $y = \log_3(x+2) + 2$ симметричен графику данной функции относительно прямой *y* = *x*.

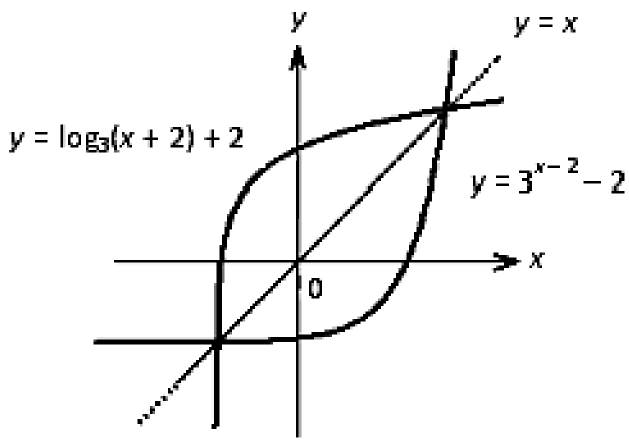


Рис. 29

Задачи для самостоятельного решения

6. Найти сумму целых значений функции $y = \log_2(3 + \sin 4x)$.

7. Найти сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \ln\left(\lg\left(\dfrac{6}{|x-1|}\right)\right)$.

8. Укажите уравнение окружности с центром пересечения графиков функций $y = \log_2 x$ и $y = 6 - x$ и радиусом $r = 2$. Сделайте чертёж.

11.3. Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется *логарифмическим уравнением*.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$.

Утверждение 1. Если $a > 0$, $a \neq 1$, уравнение $\log_a x = b$ при любом действительном b имеет единственное решение $x = a^b$.

Пример. Решить уравнение $\log_2 x = 3$.

Решение. Используя утверждение 1, получим $x = 2^3$ или $x = 8$.

Ответ: $x = 8$.

Следующие утверждения используются при решении логарифмических уравнений.

Утверждение 2. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$, $a \neq 1$) равносильно одной из систем (очевидно, выбирается та система, неравенство которой решается проще): $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Утверждение 3. Уравнение $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно одной из систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Нужно подчеркнуть, что в процессе решения логарифмических уравнений часто используются преобразования, которые изменяют область допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения. Следовательно, могут появиться "чужие" решения или могут быть потеряны решения. Например, уравнения

$$f(x) = g(x) \quad \text{и} \quad \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

или

$$\log_a [f(x)g(x)] = b \quad \text{и} \quad \log_a f(x) + \log_a g(x) = b$$

вообще говоря, неравносильны (ОДЗ уравнений справа у́же).

Следовательно, при решении логарифмических уравнений полезно использовать равносильные преобразования. В противном случае проверка полученных решений является составной частью решения. Более того, необходимо учитывать и преобразования, которые могут привести к потере корней.

Приведем основные способы решения логарифмических уравнений.

Использование определения логарифма

Пример. Решить уравнения:

а) $\log_2(5 + 3\log_2(x - 3)) = 3$;   в) $\log_{(x-2)}9 = 2$;

б) $\log_3 \dfrac{x-3}{x+3} = 1$;   г) $\log_{2x+1}(2x^2 - 8x + 15) = 2$.

Решения

а) Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется степень, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b. Таким образом, $\log_a b = c \leftrightarrow b = a^c$ и, следовательно,

$$5 + 3\log_2(x - 3) = 2^3$$

или

$$3\log_2(x - 3) = 8 - 5, \qquad \log_2(x - 3) = 1.$$

Опять используя определение, получим:

$$x - 3 = 2^1, \quad x = 5.$$

Проверка полученного корня является неотъемлемой частью решения этого уравнения:

$$\log_2(5 + 3\log_2(5 - 3)) = \log_2(5 + 3\log_2 2) = \log_2(5 + 3) = \log_2 8 = 3.$$

Получим истинное равенство 3 = 3 и, следовательно, $x = 5$ есть решение исходного уравнения.

б) Аналогично примеру ,,а” получим уравнение

$$\frac{x-3}{x+3} = 3,$$

откуда следует линейное уравнение $x - 3 = 3(x + 3)$ с решением $x = -6$. Сделаем проверку и убедимся, что $x = -6$ является корнем исходного уравнения.

в) Аналогично примеру ,,а” получим уравнение

$$(x - 2)^2 = 9.$$

Возведя в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$ с решениями $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$. После проверки остается лишь $x = 5$.

г) Используя определение логарифма, получим уравнение

$$(2x^2 - 8x + 15) = (2x + 1)^2,$$

или после элементарных преобразований

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

откуда $x_1 = -7$ и $x_2 = 1$. После проверки остается $x = 1$.

Использование свойств логарифма

Пример. Решить уравнения:

а) $\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24)$;

б) $\log_4(x^2 - 4x + 1) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -1/2$;

в) $\log_2 x + \log_3 x = 1$;

г) $2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$;

д) $16^{\log_4(1-2x)} = 5x^2 - 5$.

Решения

а) ОДЗ уравнения есть множество $x \in (0;+\infty)$, которое определяется из системы неравенств (условия существования логарифмов уравнения)

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + 3 > 0, \\ x + 24 > 0. \end{cases}$$

Используя свойства логарифмов, получим:

$$\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24) \leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x \cdot (x+3) = \log_3(x+24) \\ x > 0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(x+3) = x + 24, \\ x > 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 24 = 0, \\ x > 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -6, \\ x_2 = 4 \end{array}\right. \\ x > 0. \end{cases} \leftrightarrow x = 4,$$

б) Используя свойства, получим следствие исходного уравнения

$$\log_4 \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 6x + 5} = -\frac{1}{2},$$

откуда, используя определение логарифма, получим:

$$\frac{x^2-4x+1}{x^2-6x+5}=4^{-\frac{1}{2}},$$

или

$$x^2-4x+1=1/2(x^2-6x+5),$$

откуда получаем уравнение

$$x^2-2x-3=0$$

с решениями $x_1=-1$ и $x=3$. После проверки остается лишь $x=-1$.

в) ОДЗ уравнения $x\in(0;+\infty)$. Используя свойства, получим уравнение

$$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 3}=1,$$

$$\log_2 x\left(1+\frac{1}{\log_2 3}\right)=1,$$

$$\log_2 x(1+\log_3 2)=1,$$

откуда $\log_2 x=\frac{1}{1+\log_3 2}$, или $\log_2 x=\frac{1}{\log_3 6}$, или $\log_2 x=\log_6 3$.

Следовательно, $x=2^{\log_6 3}$.

г) ОДЗ уравнения – множество $(2;4)\cup(4;+\infty)$ определяется из системы неравенств

$$\begin{cases} x-2>0,\\ (x-4)^2\neq 0.\end{cases}$$

Используя свойства (учитывая замечание), получим равносильное уравнение

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0,$$

$$\text{или}\quad \log_3(x-2)+\log_3|x-4|=0.$$

Получим равносильное уравнение

$$\log_3(x-2)|x-4|=0\quad\Rightarrow\quad (x-2)|x-4|=1.$$

Поскольку в ОДЗ $x-2=|x-2|$, уравнение можно записать следующим образом:

$$|x-2||x-4|=1,\quad \text{или}\quad |x^2-6x+8|=1.$$

Последнее уравнение (см. свойства модуля) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2-6x+8=1,\\ x^2-6x+8=-1,\end{array}\right.$$

откуда получим $x_1=3, x_2=3+\sqrt{2}, x_3=3-\sqrt{2}$, где $x_3\notin$ ОДЗ. Таким образом, корнями исходного уравнения являются $x_1=3$ и $x_2=3+\sqrt{2}$.

д) Поскольку $16^{\log_4(1-2x)} = 4^{2\log_4(1-2x)} = (4^{\log_4(1-2x)})^2$, используя свойства, получим, что в ОДЗ ($x \in (-\infty; -1)$) уравнение равносильно уравнению

$$(1 - 2x)^2 = 5x^2 - 5 .$$

или

$$x^2 + 4x - 6 = 0,$$

откуда следует: $x_1 = -2 - \sqrt{10}$ и $x_2 = -2 + \sqrt{10}$. Последнее значение x не входит в ОДЗ, остается единственное решение: $x = -2 - \sqrt{10}$.

Метод подстановки

В некоторых случаях логарифмическое уравнение можно свести к алгебрическому уравнению относительно новой переменной. Например, уравнение $F(\log_a x) = 0$, где $F(x)$ – алгебраическая рациональная функция, посредством подстановки $\log_a x = t$ сводится к алгебраическому уравнению относительно t, $R(t) = 0$.

Пример. Решить уравнения:

а) $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$;

б) $\log_2^2(x-1)^2 - 3\log_2(x-1) - 1 = 0$;

в) $\lg^2 100x + \lg^2 10x + \lg x = 14$;

г) $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

Решения

а) ОДЗ уравнения есть множество $x \in (0;+\infty)$. Обозначив $\lg x = t$ (тогда $\lg^2 x = (\lg x)^2 = t^2$), получим квадратное уравнение

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

решения которого $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 1, \\ \lg x = 2, \end{array}\right.$$

откуда $x_1 = 10$ и $x_2 = 100$. Оба корня входят в ОДЗ.

б) ОДЗ уравнения – множество $(1;\ +\infty)$. Поскольку

$$\log_2^2(x-1)^2 = \left[\log_2(x-1)^2\right]^2 = (2\log_2|x-1|)^2 = (2\log_2(x-1))^2 = 4[\log_2(x-1)]^2,$$

подстановкой $t = \log_2(x - 1)$ получим квадратное уравнение

$$4t^2 - 3t - 1 = 0,$$

решениями которого являются $t_1 = -1/4$ и $t_2 = 1$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) = -\dfrac{1}{4} \\ \log_2(x-1) = 1 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 = 2^{-1/4} \\ x-1 = 2^1 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x = 3 \end{array}\right. .$$

в) ОДЗ уравнения – множество (0; +∞). Так как

$$\lg^2 100x = (\lg 100x)^2 = (\lg 100 + \lg x)^2 = (2 + \lg x)^2,$$

$$\lg^2 10x = (\lg 10x)^2 = (\lg 10 + \lg x)^2 = (1 + \lg x)^2,$$

подстановкой $t = \lg x$ сведем исходное уравнение к квадратному уравнению

$$(2 + t)^2 + (1 + t)^2 + t = 14,$$

или

$$2t^2 + 7t - 9 = 0.$$

откуда $t_1 = -9/2$ и $t_2 = 1$. Возвращаясь к исходной переменной, получим $x_1 = 10^{-9/2}$ и $x_2 = 10$.

г) ОДЗ уравнения – множество $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$x^{\lg 5} = x^{\frac{\log_5 5}{\log_x 10}} = \left(x^{\log_x 5}\right)^{\frac{1}{\log_x 10}} = 5^{\frac{1}{\log_x 10}} = 5^{\lg x}.$$

Поскольку уравнение примет вид $5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x}$, или $2 \cdot 5^{\lg x} = 50$, откуда $5^{\lg x} = 25$, или $5^{\lg x} = 5^2 \Leftrightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

Уравнения, содержащие выражения вида $f(x)^{\log_a g(x)}$

Пример. Решить уравнения:

$$\text{а) } (x+2)^{\log_2(x+2)} = 4(x+2), \quad \text{б) } 5^{\log_2 x} + x^{\log_2 5} = 10.$$

Решения. а) ОДЗ уравнения определяется из системы $\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\neq 1. \end{cases}$

Получим множество $x \in (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$. В ОДЗ обе части уравнения положительны, поэтому, логарифмируя обе части уравнения (например, по основанию 2), получим равносильное уравнение:

$$\log_2(x + 2)\log_2(x + 2) = \log_2(4(x + 2)),$$

или, используя свойства логарифма:

$$\log_2(x + 2)\log_2(x + 2) = \log_2 4 + \log_2(x + 2).$$

Обозначив $\log_2(x + 2) = t$, получим квадратное уравнение

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

решениями которого являются $t_1 = -1$ и $t_2 = 2$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(x+2) = -1 \\ \log_2(x+2) = 2, \end{array}\right. \text{ откуда } \left[\begin{array}{l} x+2 = \frac{1}{2}, \\ x+2 = 4, \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{3}{2}, \\ x_2 = 2. \end{array}\right.$$

Оба корня входят в ОДЗ.

б) ОДЗ уравнения – множество (0; 1) $\cup$ (1; +∞).

$$5^{\log_2 x} = 5^{\frac{\log_5 x}{\log_5 2}} = (5^{\log_5 x})^{\frac{1}{\log_5 2}} = x^{\log_2 5},$$

уравнение примет вид $x^{\log_2 5} + x^{\log_2 5} = 10$, или $x^{\log_2 5} = 5$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 2, получим

$$\log_2 x^{\log_2 5} = \log_2 5,$$

или $\log_2 x = 1$, откуда $x = 2$.

Некоторые специальные методы

Пример. Решить уравнения:

а) $2^x = 9 - \log_3 x$;

б) $x\log_3^2(x-1) + 4(x-1)\log_3(x-1) - 16 = 0$;

в) $\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 2x - x^2$;

г) $\sqrt{\log_2(2x^2)\log_4(16x)} = \log_4 x^3$;

д) $|\log_2(3x - 1) - \log_2 3| = |\log_2(5 - 2x) - 1|$;

е) $\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11$.

Решения. а) Заметим, что $x = 3$ есть корень данного уравнения: $2^3 = 9 - \log_3 3$, $8 = 9 - 1$, $8 = 8$. Других решений уравнение не имеет, так как левая часть уравнения представляет строго возрастающую функцию, а правая – строго убывающую функцию. Графики таких функций имеют не более одной точки пересечения и, следовательно, поскольку $x = 3$ является решением, следует, что других решений нет.

б) ОДЗ уравнения есть множество $x \in (1;+\infty)$. Обозначив $\log_3(x - 1) = t$, получим квадратное уравнение относительно t:

$$xt^2 + 4(x - 1)t - 16 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $\Delta = [4(x - 1)]^2 + 4x16 = 16x^2 + 32x + 16 = 16(x + 1)^2$, а корни

$$t_1 = \frac{-4(x-1) - 4(x+1)}{2x} = -4 \text{ и } t_2 = \frac{-4(x-1) + 4(x+1)}{2x} = \frac{4}{x}.$$

Таким образом, получена совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(x-1) = -4, \\ \log_3(x-1) = \dfrac{4}{x}. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения получим $x = 1\frac{1}{81}$, а второе уравнение решается аналогично предыдущему примеру: заметив, что $x = 4$ есть корень уравнения, доказывается, что других корней нет. Следовательно, корнями исходного уравнения являются $x = 1\frac{1}{81}$ и $x = 4$.

в) ОДЗ уравнения определяется из системы $\begin{cases} x^2 + 1 > 0, \\ x > 0, \end{cases}$ откуда следует $x \in (0; +\infty)$. Используя свойство логарифма, получим равносильное уравнение

$$\log_2 \frac{x^2+1}{x} = 2x - x^2.$$

Поскольку $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$, а знак равенства достигается лишь при $x = 1$, левая часть уравнения $\log_2 \frac{x^2+1}{x} \geq 1.$ В то же время правая часть уравнения принимает максимальное значение 1 при $x = 1$ (вершина параболы $y = 2x - x^2$ находится в точке (1; 1)). Следовательно, уравнение имеет решения, только если $\begin{cases} \log_2 \frac{x^2+1}{x} = 2, \\ 2x - x^2 = 2, \end{cases}$ откуда $x = 1$.

г) Получим

$$\sqrt{\log_2(2x^2)\log_4(16x)} = \log_4 x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x^2)\log_4(16x) = \left(\log_4 x^3\right)^2, \\ \log_4 x^3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 2 + \log_2 x^2)(\log_4 16 + \log_4 x) = \left(\frac{3}{2}\log_2 x\right)^2, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + 2\log_2 x)(2 + \frac{1}{2}\log_2 x) = \frac{9}{4}\log_2^2 x, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}\log_2^2 x - \frac{9}{2}\log_2 x - 2 = 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ 5t^2 - 18t - 8 = 0, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_2 x, \\ \left[\begin{array}{l} t_1 = -\frac{2}{5}, \\ t_2 = 4, \end{array} \right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -\frac{2}{5}, \\ \log_2 x = 4, \end{array} \right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}, \\ x = 16, \end{array} \right. \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = 16.$$

д) Используя свойства логарифмов и свойства модуля, получим:

$$|\log_2(3x-1)-\log_2 3| = |\log_2(5-2x)-1| \Leftrightarrow |\log_2\frac{3x-1}{3}| = |\log_2\frac{5-2x}{2}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2\frac{3x-1}{3}-\log_2\frac{5-2x}{x}\right)\cdot\left(\log_2\frac{3x-1}{3}+\log_2\frac{5-2x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2\left(\dfrac{3x-1}{3}\cdot\dfrac{2}{5-2x}\right)=0, \\ \log_2\left(\dfrac{3x-1}{3}\cdot\dfrac{5-2x}{2}\right)=0, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2(3x-1)=3(5-2x), \\ (3x-1)(5-2x)=6, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{17}{12}, \\ x=1,\ x=\dfrac{11}{6}, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3}<x<\dfrac{5}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left\{1; \frac{17}{12}; \frac{11}{6}\right\}.$$

е) Поскольку функция $f(x) = 6x - x^2 - 5$ достигает своего максимума 4 при $x = 3$, следует, что

$$\log_2(6x - x^2 - 5) \leq 2.$$

Правая часть уравнения $x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x - 3)^2 + 2$ и, следовательно, 2 – это наименьшее ее значение (достигается при $x = 3$). Таким образом, уравнение имеет решение лишь в случае, если одновременно $\log_2(6x - x^2 - 5) = 2$ и $x^2 - 6x + 11 = 2$, т. е. если $x = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

9. Решить уравнение $\log_3(2x-1)=2$.
10. Решить уравнение $\log_3(x^2-4x-5)=\log_3(7-3x)$.
11. Решить уравнение $\log_2\log_3\log_4(x-1)=0$.
12. Решить уравнение $\log_2^2(x^2)=2\log_2 x$.
13. Решить уравнение $\lg^2(x^2)-\lg(x^4)=0$.
14. Решить уравнение $\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0$.
15. Решить уравнение $25^{\log_2 x}-6\cdot 5^{\log_2 x}+5=0$.
16. Решить уравнение $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$.
17. Решить уравнение $(4x)^{\log_4(2x)}=2x^2$.
18. Решить уравнение $\log_5(x+2)=4-x$.
19. Найти целый корень уравнения $\log_2(3-|x|)=\sqrt{2x+3}$.

11.4. Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется *логарифмическим неравенством*.

В процессе решения логарифмических неравенств часто используются следующие утверждения относительно равносильности неравенств и учитываются свойства монотонности логарифмической функции.

Утверждение 1. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Подчеркнём, что в неравенстве $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ вместо знака „>” может фигурировать любой из знаков: $\geq$, $<$, $\leq$. В этом случае утверждения 1 – 3 соответственно преобразуются.

<u>*Пример.*</u> Решить неравенства

а) $\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x + 8)$;

б) $\log_{0,2}(5-x) > \log_{0,2}\dfrac{2}{x-2}$;

в) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)\right) > 0$;

г) $\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x)$;

д) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1$.

Решение. а) используя утверждение 1, получим:

$$\log_3(x^2-x)\ge\log_3(x+8)\leftrightarrow\begin{cases}x^2-x\ge x+8\\ x+8>0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-8\ge 0\\ x>-8\end{cases}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -2\\ x\ge 4\end{array}\right.\\ x>-8\end{cases}\leftrightarrow x\in(-8;-2]\cup[4;+\infty).$$

Ответ: $x\in(-8;-2]\cup[4;+\infty)$.

б) Основание логарифма – число между нулем и единицей, поэтому, используя утверждение 2, получим:

$$\log_{0,2}(5-x)>\log_{0,2}\frac{2}{x-2}\ \Leftrightarrow\begin{cases}5-x<\dfrac{2}{x-2},\\ 5-x>0,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(5-x)(x-2)-2}{x-2}<0,\\ x<5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{7x-x^2-12}{x-2}<0,\\ x<5,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-(x-3)(x-4)}{x-2}<0,\\ x<5,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}2<x<3,\\ x>4,\end{array}\right.\\ x<5,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<3,\\ 4<x<5,\end{array}\right.\Leftrightarrow\ x\in(2;3)\cup(4;5).$$

Ответ: $x\in(2;3)\cup(4;5)$

в) Запишем $0=\log_2 1$ и, используя утверждение 1, получим:

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)\right)>\log_2 1\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)>1.$$

Запишем $1=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3}$ и, используя утверждение 2, получим:

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_8 x<\dfrac{1}{3},\\ \log_8 x>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<8^{\frac{1}{3}},\\ x>1,\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<2.$$

Ответ: $x\in(1;2)$.

г) Используя утверждение 3, получим:

$$\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x)>\log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-3}>1,\\5-x>4-x>0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<\dfrac{x+2}{x-3}<1,\\0<5-x<4-x,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(3;\ 4),\\x\in\varnothing,\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(3;\ 4).$$

Решение первой системы совокупности:

$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-3}>1,\\5-x>4-x,\\4-x>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-3}-1>0,\\5>4,\\x<4,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x-3}>0,\\x\in\mathbb{R},\\x<4,\end{cases}\Leftrightarrow 3<x<4.$$

Решение второй системы совокупности:

$$\begin{cases}0<\dfrac{x+2}{x-3},\\\dfrac{x+2}{x-3}<1,\\0<5-x,\\5-x<4-x,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-2,\\x>3,\end{array}\right.\\\dfrac{5}{x-3}<0,\\x<5,\\5<4,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-2,\\x>3,\end{array}\right.\\x<3,\\x<5,\\x\in\emptyset,\end{cases}\Leftrightarrow x\in\emptyset.$$

Ответ: $x\in(3;\ 4)$.

д) Запишем $1=\log_{2x}2x$ и используем утверждение 3 (учитывая, что знак „>” заменен на знак „<”).

$$\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)<\log_{2x}2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x>1,\\x^2-5x+6<2x,\\x^2-5x+6>0,\end{cases}\\\begin{cases}0<2x<1,\\x^2-5x+6>2x,\\2x>0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(1;\ 2)\cup(3;\ 6),\\x\in\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right),\end{array}\right.\ x\in\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup(1;\ 2)\cup(3;\ 6).$$

Решение первой системы совокупности:

$$\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\x^2-7x+6<0,\\\left[\begin{array}{l}x<2,\\x>3,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\1<x<6,\\\left[\begin{array}{l}x<2,\\x>3,\end{array}\right.\end{cases}x\in(1;\ 2)\cup(3;\ 6).$$

Решение второй системы совокупности:

$$\begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 6, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right).$$

Ответ: $x \in (0;{}^1/_2) \cup (1;2) \cup (3;6)$.

<u>*Пример.*</u> Решить неравенство $\log^2_{1/2} x + \log_{1/2} x - 2 \geq 0$.

Решение. Обозначив $t = \log_{\frac{1}{2}} x$, получим квадратное неравенство $t^2 + t - 2 \geq 0$, откуда $t \leq -2$, или $t \geq 1$. Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}} x \leq -2, \\ \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}, \\ 0 < x \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4, \\ 0 < x \leq \dfrac{1}{2}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \ x \in \left(0;\ \frac{1}{2}\right] \cup \left[4;\ +\infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup [4;+\infty)$.

В случае логарифмических неравенств, которые не имеют вид неравенств, входящих в утверждения 1 – 3, определяется ОДЗ, и с помощью равносильных преобразований исходные неравенства сводятся к неравенствам, которые решаются с помощью утверждений 1 – 3.

<u>*Пример.*</u> Решить неравенства:

а) $\lg(x-2) + \lg(x-5) < \lg 4$; в) $\dfrac{\log_2\left(\sqrt{4x+5}-1\right)}{\log_2\left(\sqrt{4x+5}+11\right)} > \dfrac{1}{2}$;

б) $\log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 \leq \dfrac{5}{2}$; г) $\dfrac{1}{\log_2(x-1)} < \dfrac{1}{\log_2}\sqrt{x+1}$.

Решение. а) ОДЗ неравенства – множество $(5;\ +\infty)$. Используя свойство логарифма, получим неравенство

$$\lg(x-2)(x-5) < \lg 4.$$

Используя утверждение 1, получим

$$\begin{cases} (x-2)(x-5) < 4, \\ (x-2)(x-5) > 0. \end{cases}$$

Решаем систему

$$\begin{cases} x^2-7x+6<0, \\ \left[\begin{array}{l} x<2, \\ x>5, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<6, \\ \left[\begin{array}{l} x<2, \\ x>5, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \ x\in(1;\ 2)\cup(5;\ 6)$$

и, учитывая ОДЗ, получим $x\in$ (5; 6).

Ответ: $x\in$ (5;6).

б) Определим ОДЗ неравенства

$$\begin{cases} 3x>0, \\ 9x>0, \\ 9x\neq 1, \\ 3x^2>0, \\ 3x^2\neq 1, \\ 9x^2>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq \frac{1}{9}, \\ x\neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \Leftrightarrow \ x\in(0;\frac{1}{9})\cup(\frac{1}{9};\frac{1}{\sqrt{3}})\cup(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty).$$

Приведя все логарифмы к основанию 3, получим:

$$\frac{\log_3 3x}{\log_3 9x}+\frac{\log_3 9x^2}{\log_3 3x^2}\leq\frac{5}{2}.$$

Используя свойство логарифма, получим:

$$\frac{1+\log_3 x}{2+\log_3 x}+\frac{2+2\log_3 x}{1+2\log_3 x}\leq\frac{5}{2}.$$

Обозначив $\log_3 x = t$, решим полученное неравенство методом интервалов

$$\frac{1+t}{2+t}+\frac{2+2t}{1+2t}-\frac{5}{2}\leq 0\Leftrightarrow \frac{2(1+t)(1+2t)+2(2+2t)(2+t)-5(2+t)(1+2t)}{2(2+t)(1+2t)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2t^2-7t}{(2+t)(1+2t)}\leq 0\Leftrightarrow \frac{-t(2t+7)}{(2+t)(1+2t)}\leq 0\Leftrightarrow t\in(-\infty;-\frac{7}{2}]\cup(-2;-\frac{1}{2})\cup[0;+\infty).$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x\leq-\frac{7}{2}, \\ -2<\log_3 x<-\frac{1}{2}, \\ \log_3 x\geq 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{1}{\sqrt{3^7}}, \\ \frac{1}{9}<x<\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x\geq 1. \end{array}\right.$$

откуда, учитывая ОДЗ, получим множество решений исходного неравенства:

$$x\in(0;\frac{1}{27\sqrt{3}}]\cup(\frac{1}{9};\frac{1}{\sqrt{3}})\cup[1;+\infty).$$

Это и есть *ответ*.

в) Определим ОДЗ неравенства

$$\begin{cases} \sqrt{4x+5}-1>0, \\ \sqrt{4x+5}+11>0, \\ \sqrt{4x+5}+11\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\geq-\frac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \ x>-1.$$

Поскольку $\log_2(\sqrt{4x+5}+11) = \log_2(1+(\sqrt{4x+5}+10)) > \log_2 1 = 0$, неравенство равносильно следующему:

$$2\log_2(\sqrt{4x+5}-1) > \log_2(\sqrt{4x+5}+11),$$

откуда следует

$$(\sqrt{4x+5}-1)^2 > \sqrt{4x+5}+11.$$

Обозначив $t = \sqrt{4x+5}$, $t \geq 0$, получим квадратное неравенство

$$(t-1)^2 > t+11,$$

или

$$t^2 - 3t - 10 > 0,$$

откуда $t < -2$ или $t > 5$. Поскольку $t \geq 0$, остается $t > 5$ или $\sqrt{4x+5} > 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > 5$.

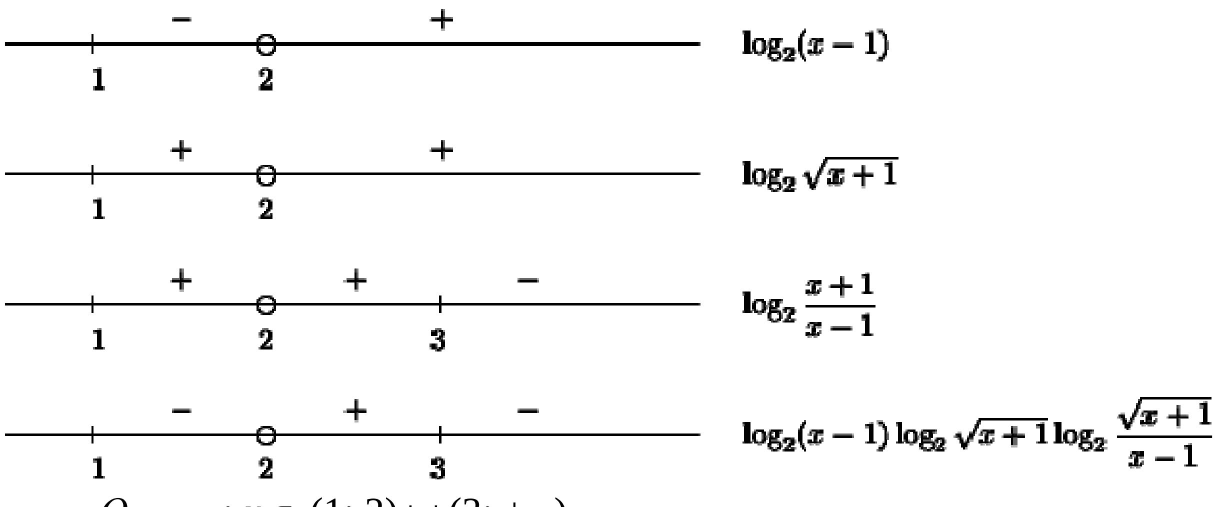
Учитывая ОДЗ, получим *ответ:* $x \in (5; +\infty)$.

г) ОДЗ неравенства есть множество $(1; 2) \cup (2; +\infty)$. Используя обобщенный метод интервалов, получим:

$$\frac{1}{\log_2(x-1)} < \frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{\log_2\sqrt{x+1} - \log_2(x-1)}{\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}}{\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1}} < 0 \Leftrightarrow \log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}\cdot\log_2(x-1)\log_2\sqrt{x+1} < 0.$$

Так как в ОДЗ $\log_2(x-1) > 0$ при $x > 2$ и $\log_2(x-1) < 0$ при $1 < x < 2$, следует, что $\log_2\sqrt{x+1} > 0$ для любого x из ОДЗ, при $x \in (1;2)\cup(2;3)$ и $\log_2\frac{\sqrt{x+1}}{x-1} < 0$ при $x > 3$, значит,



Ответ: $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

20. Решить неравенство $\log_{0,5}\dfrac{5x-3}{x+2}>1$.

21. Решить неравенство $\log_{20}\sqrt{x}+\log_{20}\sqrt{x+1}\le\log_{20}\sqrt{2x+6}$.

22. Решить неравенство $\log_{0,3}\log_{6}\dfrac{x^2+x}{x+4}<0$.

23. Решить неравенство $\dfrac{\log_4(x-5)}{\sqrt{9x-x^2}}\ge 0$.

24. Решить неравенство $\dfrac{x-4}{\log_2(x-2)}\le 0$.

25. Решить неравенство $\dfrac{|x|-4}{1+\log_3 x}\le 0$.

26. Решить неравенство $\sqrt{\log_3\dfrac{5x-3}{x+4}}<1$.

27. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{\log_2(4-x)}}{\log_2(2x-1)}\ge 0$.

28. Найти сумму всех целых решений неравенства
$\sqrt[4]{8-x}\cdot\log_{1/2}\left(2-\dfrac{x}{6}\right)\ge 0$.

29. Найти число целых решений неравенства $\log_{0,5}|x-3|>-2$.

30. Решить неравенство $\log_{x^2}(3-2x)>1$.

12. ПРОИЗВОДНЫЕ

12.1. Нахождение производных

Производная функции − одно из основных понятий математики, а в математическом анализе производная наряду с интегралом занимает центральное место. Процесс нахождения производной называется *дифференцированием*.

Рассмотрим функцию $f(x)$, область определения которой содержит некоторый открытый интервал вокруг точки x_0. Тогда функция $f(x)$ является *дифференцируемой* в точке x_0, и ее *производная* определяется формулой

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для производной используются обозначения:

$$f'(x)=y'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{dy}{dx}.$$

Таблица производных

1. $c'=0,\ c=\text{const}$.
2. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$.
3. $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$.
4. $\left(e^x\right)'=e^x$.
5. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.
6. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.
7. $(\sin x)'=\cos x$.
8. $(\cos x)'=-\sin x$.
9. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
10. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.
11. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
12. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
15. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.
16. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$.
17. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.
18. $(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
19. $(\operatorname{th} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Формулы дифференцирования, производные основных элементарных функций

$$\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'.$$

$$\left(\sqrt[\alpha]{u}\right)'=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[\alpha]{u^{\alpha-1}}}\cdot u'.$$

$$\left(a^u\right)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'.$$

$$\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'.$$

$$\left(\log_a|u|\right)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'.$$

$$(\arcsin(u))'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.$$

$$(\arccos(u))'=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.$$

$$(\operatorname{arctg}(u))'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'.$$

$$(\operatorname{arcctg}(u))'=\frac{-1}{1+u^2}\cdot u'.$$

$$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}.$$

$$(\lg |u|)' = \frac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u'.$$

$$(\mathrm{Sin}(u))' = \mathrm{Cos}(u) \cdot u'.$$

$$(\mathrm{Cos}(u))' = -\mathrm{Sin}(u) \cdot u'.$$

$$(\mathrm{tg}(u))' = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2(u)} \cdot u'.$$

$$(\mathrm{ctg}(u))' = \frac{-1}{\mathrm{Sin}^2(u)} \cdot u'.$$

$$(\mathrm{sh}(u))' = \mathrm{ch}(u) \cdot u'.$$

$$(\mathrm{ch}(u))' = \mathrm{sh}(u) \cdot u'.$$

$$(\mathrm{th}(u))' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(u)} \cdot u'.$$

$$(\mathrm{cth}(u))' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2(u)} \cdot u'.$$

$$\left(\mathrm{th}\alpha = \frac{\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha},\ \mathrm{cth}\alpha = \frac{\mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{sh}\alpha}\right).$$

Общие формулы дифференцирования

$$C' = 0.$$

$$(Cu)' = Cu'.$$

$$(u + v)' = u' + v'.$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = x(t),\ y = y(t). \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = y(u),\ u = u(x). \\ y'_x = y'_u \cdot u'_x. \end{array}\right.$$

$$y' = y \cdot (\ln |y|)'.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = y(x),\ x = x(y). \\ y'_x = \dfrac{1}{x'_y}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = u^x. \\ y' = u' \cdot v \cdot u^{v-1} + v' \cdot u^v \ln u. \end{array}\right.$$

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y + \sqrt[3]{x} + \mathrm{tg}4x - e^{7x}$.

Решение

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (tg\,4x)' - \left(e^{7x}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} + \frac{1}{\cos^2 4x} \cdot (4x)' - e^{7x} \cdot (7x)' =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{\cos^2 4x} - 7e^{7x}.$$

Пример. Найти производную функции $y = 4^x \arcsin x$.

Решение

$$y' = (4^x \cdot \arcsin x)' = (4x)' \cdot \arcsin x + 4^x \cdot (\arcsin x)' =$$

$$= 4^x \cdot \ln 4 \cdot \arcsin x + 4^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 4^x \left(\ln 4 \cdot \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{\ln x}{x^5}$.

Решение

$$y' = \frac{(\ln x)' \cdot x^5 - \ln x \cdot (x^5)'}{(x^5)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^5 - \ln x \cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{x^4 \cdot (1 - 5\ln x)}{x^4 \cdot x^6} = \frac{1 - 5\ln x}{x^6}.$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln \sqrt{\cos x^5}$.

Решение

$$y' = (\ln \sqrt{\cos x^5})' = \frac{1}{\sqrt{\cos x^5}} \cdot \left(\sqrt{\cos x^5}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\cos x^5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^5}} \cdot \left(\cos x^5\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos x^5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^5}} \cdot (-\sin x^5) \cdot \left(x^5\right)' = -\frac{1}{\sqrt{\cos x^5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos x^5}} \cdot \sin x^5 \cdot 5x^4 =$$

$$= \frac{-5x^4 \cdot \sin x^5}{2 \cdot \cos x^5} = -\frac{5}{2} \cdot x^4 \cdot tgx^5.$$

Пример. Найти производную функции $y = x^{\cos x}$.

Решение. Прологарифмируем заданную функцию $\ln y = \ln x^{\cos x}$.

По свойству логарифма степени имеем: $\ln y = \cos x \cdot \ln x$. Согласно формуле сложного дифференцирования и производной произведения можно записать

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}.$$

После домножения обеих частей последнего равенства на y окончательно получим $y' = \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x \right) \cdot x^{\cos x}$. Заметим, что без предварительного логарифмирования производную заданной функции найти невозможно.

<u>*Пример.*</u> Вычислить производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ в точке $x = 5$.

Сначала находим производную:

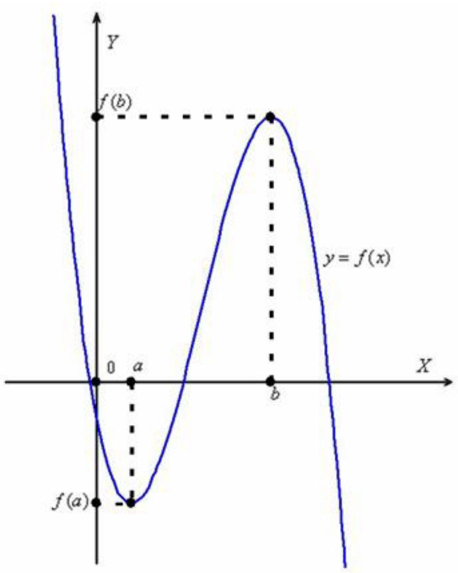
$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 72x + 90)' = 3x^2 + 6x - 72$.

На втором шаге вычислим значение производной в точке $x = 5$: $f'(5) = 3 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 - 72 = 75 + 30 - 72 = 33$.

Ответ: 33.

12.2. Нахождение критических точек и промежутков монотонности функции

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$. Упрощённо полагаем, что она *непрерывна* на всей числовой прямой.



Функция *возрастает* на интервале, если для любых двух точек этого интервала, связанных отношением $x_2 > x_1$, справедливо неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. То есть большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и её график идёт «снизу вверх». Демонстрационная функция $y = f(x)$ растёт на интервале $(a; b)$.

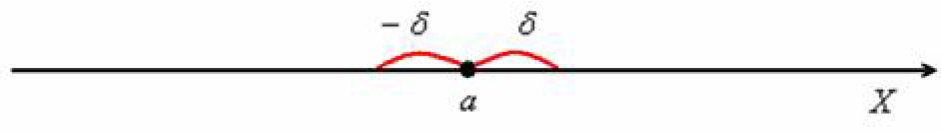
Аналогично функция *убывает* на интервале, если для любых двух точек данного интервала, таких что $x_2 > x_1$, справедливо неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. То есть большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, и её график идёт «сверху вниз». Наша функция $y = f(x)$ убывает на интервалах $(-\infty; a)$, $(b; +\infty)$.

Если функция возрастает или убывает на интервале, то её называют *строго монотонной* на данном интервале. Что такое монотонность? Понимайте в буквальном смысле – однообразие.

Также можно определить *неубывающую* функцию (смягчённое условие $f(x_2) \geq f(x_1)$ в первом определении) и *невозрастающую* функцию (смягчённое условие $f(x_2) \leq f(x_1)$ во втором определении). Или неубывающую, или невозрастающую функцию на интервале называют монотонной функцией на данном интервале.

Окрестностью точки называют интервал, который содержит данную точку, при этом для удобства интервал часто полагают симметричным.

Пример. точка оси абсцисс $x = a$ и её симметричная δ – окрестность.



Точка x_0 называется *точкой максимума*, если *существует* её окрестность, такая, что *для всех* значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. В нашем конкретном примере это точка b. Точка x_0 называется *точкой минимума*, если *существует* её окрестность, такая, что *для всех* значений x данной окрестности выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. На чертеже – точка a.

Точки a, b называют *точками экстремума* функции.

Значение $f(b)$ называют *максимумом* функции.

Значение $f(a)$ называют *минимумом* функции.

Общее название – *экстремумы* функции.

Пожалуйста, будьте аккуратны в словах!

Точки экстремума – это «иксовые» значения. *Экстремумы* – «игрековые» значения.

Сколько может быть экстремумов у функции?

Ни одного, 1, 2, 3, … и так далее до бесконечности. Например, у синуса бесконечно много минимумов и максимумов.

ВАЖНО! Термин «максимум функции» не тождественен термину «максимальное значение функции». Аналогично «минимум функции» – не то же самое, что «минимальное значение функции».

Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $y = f(x)$. Данная точка называется *критической*, если в ней производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$, либо значение $f'(x_0)$ не существует. Критическая точка может быть точкой экстремума, а может и не быть.

Первое достаточное условие экстремума:

– если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «плюса» на «минус», то в данной точке функция достигает максимума;

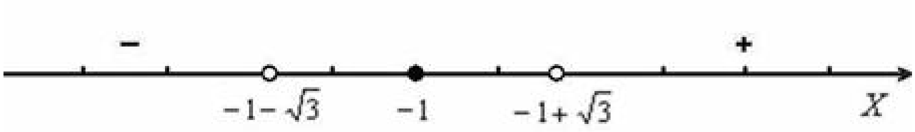
– если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то в данной точке функция достигает минимума.

Пример. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x - 2\right)$.

Решение. Найдём область определения данной функции: $D(f) = \left(-\infty;\ -1-\sqrt{3}\right) \cup \left(-1+\sqrt{3};\ +\infty\right)$, знание которой очень важно учитывать в нашей задаче: $f'(x) = \left(\ln(x^2+2x-2)\right)' = \dfrac{1}{x^2+2x-2}\left(x^2+2x-2\right)' = \dfrac{2x+2}{x^2+2x-2} = 0$.

У нас есть корень $x = -1$ и крайние точки области определения: $x = -1-\sqrt{3},\ x = -1+\sqrt{3}$.

Определяем знаки производной *только на интервалах области определения функции*



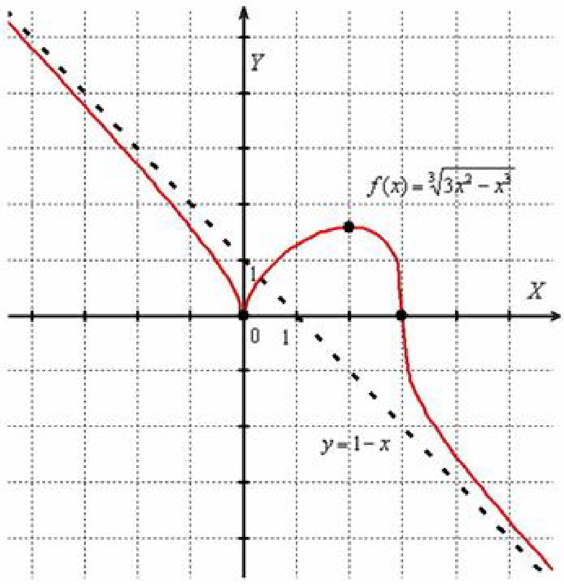
Функция убывает на интервале $\left(-\infty;\ -1-\sqrt{3}\right)$ и возрастает на интервале $\left(-1+\sqrt{3};\ +\infty\right)$. Точки экстремума (и, понятно, экстремумы) отсутствуют. Значение $x = -1$ осталось не при делах, так как на интервале $\left(-1-\sqrt{3};\ -1+\sqrt{3}\right)$ попросту нет графика функции $f(x) = \ln(x^2+2x-2)$.

Ответ: функция убывает на интервале $\left(-\infty;\ -1-\sqrt{3}\right)$ и возрастает на $\left(-1+\sqrt{3};\ +\infty\right)$, экстремумы отсутствуют.

Пример. Найти точки экстремума функции $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.

Найдём критические точки:

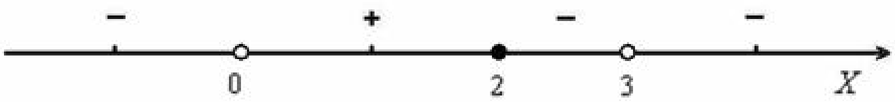


$$f'(x)=\left(\left(3x^2-x^3\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(3x^2-x^3\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot$$

$$\cdot\left(3x^2-x^3\right)'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{\left(3x^2-x^3\right)^2}}\cdot\left(6x-3x^2\right)=$$

$$=\frac{3x(2-x)}{3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(3-x)^2}}=\frac{2-x}{\sqrt[3]{x\cdot(3-x)^3}}=0.$$

Таким образом, $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ – критические точки. Почему значения $x = 0$, $x = 3$, обращающие знаменатель производной в нуль, следует отнести к критическим точкам? А дело в том, что сама функция в них определена! Определим знаки производной на полученных интервалах:



Функция возрастает на интервале (0; 2) и убывает на $(-\infty; 0)\cup(2; 3)\cup(3; +\infty)$.

В точке $x = 0$ функция достигает минимума: $f(0)=\sqrt[3]{3\cdot 0^2-0^3}=0$.

В точке $x = 2$ функция достигает максимума: $f(2)=\sqrt[3]{3\cdot 2^2-2^3}=\sqrt[3]{12-8}=$ $=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}6$.

В точке $x = 3$ нет экстремума.

Ответ: $x = 0$ – точка минимума, $x = 2$ – точка максимума.

Давайте посмотрим на график данной функции:

В точке $x = 0$ – классическое *остриё*, направленное вниз, при $x = 2$ – «нормальный» максимум. В точках $x = 0$, $x = 3$ функция недифференцируема, однако в них существуют бесконечные производные и вертикальные касательные.

Пример. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x) = x \ln x$.

Решение. Область определения: $(0; +\infty)$.

Найдём критические точки: $f'(x) = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' =$

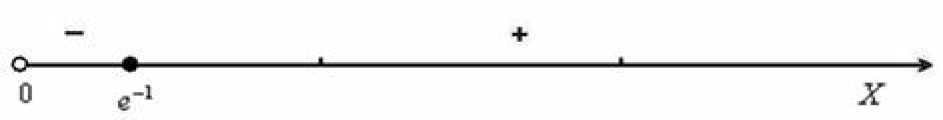
$= 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$,

$\ln x + 1 = 0$,

$\ln x = -1$.

$x = e^{-1} \approx 0,37$ – критическая точка.

Определим знаки производной:



Ответ: функция убывает на интервале $(0;\ e^{-1})$ и возрастает на интервале $(e^{+1}; +\infty)$. В точке $x = e^{-1}$ функция достигает минимума:

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) = -e^{-1}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить производную функции $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ в точке $x = -4$.

2. Найти интервал убывания функции $y = 5x^2 + 20x - 11 - 20\ln(x+1)$.

3. Найти значение функции $y = x^3 - 11x - 5 + \frac{4}{x}$ в точке максимума.

4. Найти количество точек экстремума функции $y = 0,6x^5 - 1,5x^4 + x^3 + 4$.

5. Найти точку минимума функции $y = 3x^5 - 125x^3 + 7$.

6. Найти сумму значений функции $y = 0,25x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 10$ во всех точках экстремумов.

12.3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

Важно! Как уже заострялось внимание в предыдущем пункте на экстремумах функции, *наибольшее значение функции* и *наименьшее значение функции* – НЕ ТО ЖЕ САМОЕ, что *максимум функции* и *минимум функции*.

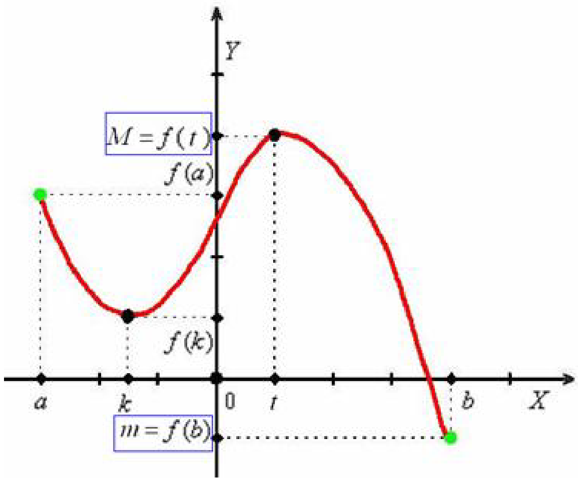


Рис. 30

Согласно теореме Вейерштрасса, непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция достигает своей *точной верхней грани M* и своей *точной нижней грани* $\boldsymbol{m}$.

Число M также называют *максимальным значением функции на отрезке* и обозначают через $\max\limits_{[a;b]} f(x)$, а число m – *минимальным значением функции на отрезке* с пометкой $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ (рис. 30).

В нашем случае $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(t) = M$, $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b) = m$.

Приведём алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке:

1. Находим значения функции в *критических точках*, которые принадлежат данному отрезку.

2. Вычисляем значения функции на концах отрезка.

3. Среди найденных в 1-м и 2-м пунктах значений функции выбираем самое маленькое и самое большое число, записываем ответ.

<u>*Пример.*</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ на отрезке [–1; 2].

Решение

1. Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:

$$f'(x) = (2x^3 - 12x^2 + 18x + 3)' = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3) = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два действительных корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ – критические точки.

Нас не интересует, есть в них максимумы/минимумы или нет.

Первая критическая точка принадлежит данному отрезку: $x_1 = 1 \in$ $\in [-1; 2]$, а вот вторая – нет: $x_2 = 3 \in [-1; 2]$, поэтому про неё сразу забываем.

Вычислим значение функции в нужной точке: $f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^3 - {}$ $-12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 3 = 2 - 12 + 18 + 3 = 11$.

Итоговый результат выделили жирным шрифтом, при оформлении задания в тетради его удобно обвести в кружок простым карандашом или пометить как-то по-другому.

2. Вычислим значения функции на концах отрезка: $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - {}$ $-12 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) + 3 = -2 - 12 - 18 + 3 = -29$, $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 3 = {}$ $= 16 - 48 + 36 + 3 = 7$.

Результаты опять каким-либо образом выделяем.

3. Дело сделано, среди «жирных» чисел выбираем наибольшее и наименьшее.

Ответ: $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(1) = 11,\ \min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(-1) = -29.$

Критическое значение $x_1 = 1$ на поверку оказалось точкой максимума, но об этом нас никто не спрашивал. Впрочем, для саморазвития можете устно подмечать такие факты.

__Пример__. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке $f(x) = 3x^4 - 12x^2 + 5$, $[-2; 1]$.

Решение.

1. Вычислим значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку:

$$f'(x) = (3x^4 - 12x^2 + 5)' = 3 \cdot 4x^3 - 12 \cdot 2x + 0 = 12x(x^2 - 2) = 0.$$

Критические точки тут три: $x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{2}$.

Первые две точки принадлежат нашему отрезку: $x_1 = -\sqrt{2} \in [-2;\ 1]$, $x_2 = 0 \in [-2;\ 1]$.

Но третья оказывается «вне игры»: $x_3 = \sqrt{2} \notin [-2;\ 1]$.

(Надеюсь, все сумели сосчитать $-\sqrt{2} \approx -1{,}41$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$).

Вычислим значения функции в подходящих точках: $f(-\sqrt{2}) = {}$ $= 3\left(-\sqrt{2}\right)^4 - 12(-\sqrt{2})^2 + 5 = 12 - 24 + 5 = -7$, $f(0) = 3 \cdot 0^4 - 12 \cdot 0^2 + 5 = 5.$

Не забываем выделять результаты.

2. Вычислим значения функции на концах отрезка: $f(-2)=3\cdot 2^4-$ $-12\cdot 2^2+5=48-48+5=5,\ f(1)=3\cdot 1^4-12\cdot 1^2+5=3-12+5=-4.$

Среди «жирных» чисел выбираем наибольшее и наименьшее значения. Максимальное значение («пятёрка») достигается сразу в двух точках, и это необходимо указать в завершающей записи:

Ответ: $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-2)=f(0)=5,\ \min\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-\sqrt{2})=-7.$

Задачи для самостоятельного решения

7. Найти наибольшее значение функции $y=7+12x-3x^2-2x^3$ на отрезке [–2; 4].

8. Для функции $y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$ найти сумму наибольшего и наименьшего значений на отрезке [1; 6].

9. Найти величину $M+15m$, где M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $y=5+24x+9x^2-2x^3$ на отрезке [–2; 4].

12.4. Полное исследование функции

Исследование функции можно разбить на 5 – 7 пунктов:

1. Область определения.
2. Чётность/нечётность, периодичность функции.
3. Точки пересечения графика функции с координатными осями. Интервалы знакопостоянства.
4. Возрастание, убывание и экстремумы функции.
5. Выпуклость, вогнутость и перегибы графика.
6. Асимптоты графика функции.
7. Дополнительные точки и график по результатам исследования.

Естественно, если ваш преподаватель подробно разобрал другой алгоритм и требует строго придерживаться его лекций, то придётся внести некоторые коррективы в решение.

<u>*Пример*</u>. Исследовать функцию $f(x)=x^3-\dfrac{x^4}{4}$ и построить график.

Решение

1. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, $D(f)=R$.

2. Чётность/нечётность, периодичность функции.

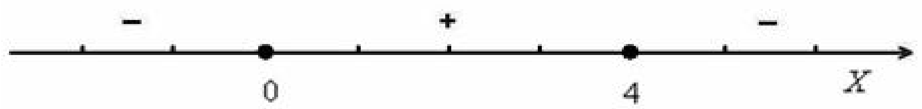
$$f(-x)=(-x)^3-\frac{(-x)^4}{4}=-x^3-\frac{x^4}{4},\ f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x),$$

значит, данная функция не является чётной или нечётной. Функция непериодическая.

3. Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции. График $f\ (x)$ проходит через начало координат.

С осью OX : $f(x)=x^3-\dfrac{x^4}{4}=x^3\left(1-\dfrac{x}{4}\right)=0,\quad x=0,\ \ x=4.$

Определим знаки $f(x)$:



$f(x)>0,$ если $x\in(0;\ 4),$

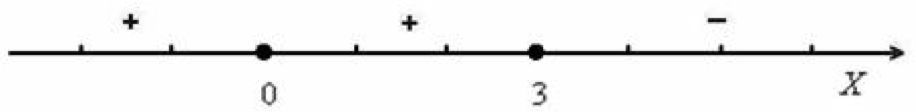
$f(x)<0,$ если $x\in(-\infty;\ 0)\cup(4;\ +\infty).$

4. Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x)=\left(x^3-\frac{x^4}{4}\right)'=3x^2-x^3=x^2(3-x)=0.$$

$x=0,\ \ x=3$ – критические точки.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 3)$ и убывает на $(3;\ +\infty)$.

В точке $x=3$ функция достигает максимума: $f(3)=27-\dfrac{81}{4}=6\dfrac{3}{4}$.

5. Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=\left(3x^2-x^3\right)'=6x-3x^2=3x(2-x)=0.$$

$x=0$, $x=2$ – критические точки.

Определим знаки $f''(x)$:

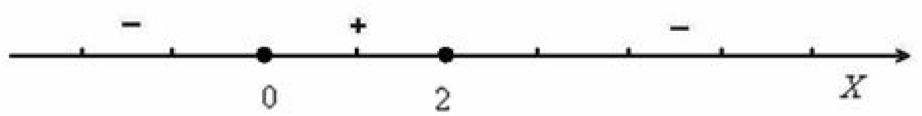


График функции является выпуклым на (–∞; 0) ∪ (2; +∞) и вогнутым на (0; 2).

В обеих критических точках существуют перегибы графика.

$f(0) = 0$, $f(2) = 8 - 4 = 4$.

6. Асимптоты графика, поведение функции на бесконечности. Так как функция непрерывна на R, то вертикальные асимптоты отсутствуют.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^3 - \dfrac{x^4}{4}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2 - \dfrac{x^3}{4}\right) = \mp\infty$, значит, наклонные асимптоты также отсутствуют.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3 - \dfrac{x^4}{4}\right) = -\infty$, функция не ограничена снизу.

7. Найдем дополнительные точки

x	–1,5	–1	1	3,5	4,5
$f(x)$	–4,6	–1,3	0,7	5,4	–11,4

Выполним чертёж (рис. 31).

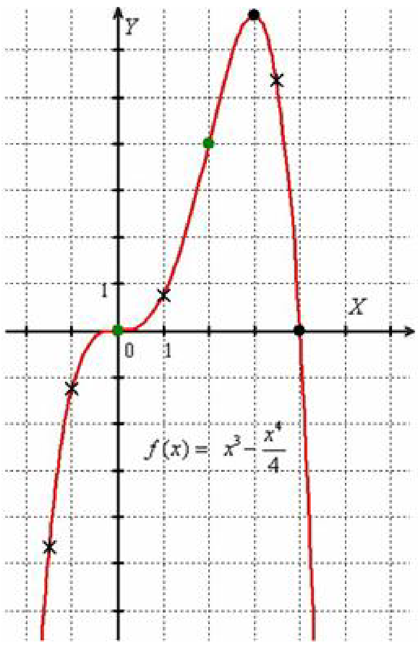


Рис. 31

Пример. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию и на основании результатов исследования построить её график.

$y = f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой кроме точки $x = 0$, область определения: $D(f) = R\backslash\{0\}$.

2. Чётность/нечётность, периодичность функции.

$f(-x) = \dfrac{(-x^3) + 4}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3 + 4}{x^2}$, $f(-x) \neq f(x)$,

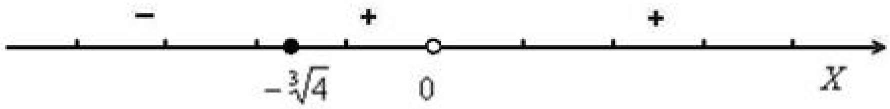
$f(-x) \neq -f(x)$, значит данная функция не является четной или нечетной. Очевидно, что функция непериодическая.

3. Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График функции не пересекает ось OY ($x \neq 0$).

С осью $OX: f(x) = \dfrac{x^3+4}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{4} \approx -1{,}6.$

Методом интервалов определим знаки $f(x)$:



$f(x)$, если $x \in (-\sqrt[3]{4};\ 0) \cup (0;\ +\infty)$,
$f(x)$, если $x \in (-\infty;\ -\sqrt[3]{4})$.

4. Возрастание, убывание, экстремумы функции.

В рассматриваемом примере числитель почленно делится на знаменатель, что очень выгодно для дифференцирования:

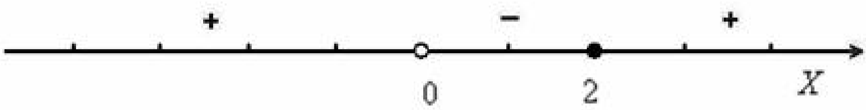
$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2},$$

$$f'(x) = \left(x + \frac{4}{x^2}\right)' = (x)' + 4(x^{-2})' = 1 + 4(-2)\cdot x^{-3} = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3-8}{x^3} = 0,$$

$$x^3 - 8 = 0$$

$x = 2$ – критическая точка.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ и убывает на $(0; 2)$.

В точке $x = 2$ функция достигает минимума: $f(2) = \dfrac{8+4}{4} = \dfrac{12}{4} = 3.$

5. Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$f''(x) = \left(1 - \dfrac{8}{x^3}\right)' = (1)' - 8(x^{-3})' = 0 - 8(-3)\cdot x^{-4} = \dfrac{24}{x^4} > 0$, значит, график функции является вогнутым на всей области определения.

Точки перегиба отсутствуют.

6. Асимптоты, поведение функции на бесконечности.

а. С помощью односторонних пределов исследуем поведение функции вблизи подозрительной точки, где явно должна быть вертикальная асимптота:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(\frac{x^3+4}{x^2}\right)=\frac{4}{(-0)^2}=\frac{4}{+0}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{x^3+4}{x^2}\right)=\frac{4}{(+0)^2}=\frac{4}{+0}=+\infty.$$

Действительно, функция терпит бесконечный разрыв в точке $x = 0$, а прямая $x = 0$ (ось OY) является вертикальной асимптотой графика $f(x)$.

б. Проверим, существуют ли наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x\cdot x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\overset{\to 0}{\frac{4}{x^3}}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Да, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика $f(x)$, если $x\to\pm\infty$.

7. Добросовестно посчитаем несколько дополнительных точек, поскольку из исследования нам известны только две точки.

x	–5	–4	–3	–2	–1	–0,5	0,5	3	4	5
$f(x)$	–4,8	–3,8	–2,6	–1,0	3,0	15,5	16,5	3,4	4,3	5,2

Выполним чертёж (рис. 32).

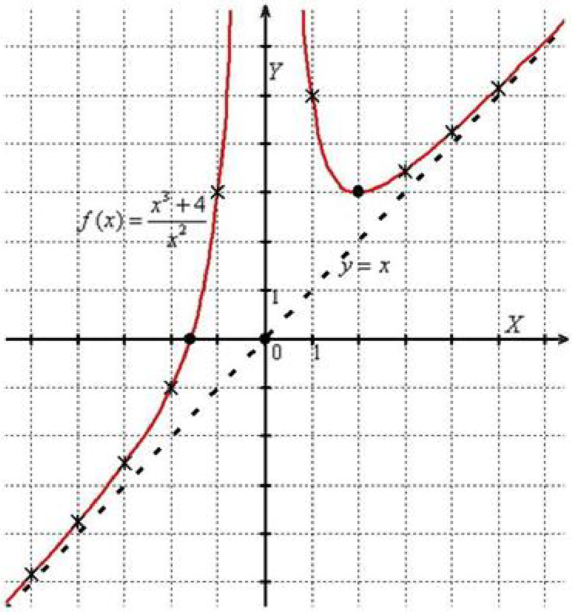


Рис. 32

<u>Пример</u>. Методами дифференциального исчисления исследовать функцию и построить её график.

$$y=f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}.$$

Решение. 1. Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, $D(f) = R$.

2. Чётность/нечётность, периодичность функции.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+3}=\frac{x^2}{x^2+3}=f(x).$$

$f(-x)=f(x)$ значит, данная функция является четной, ее график симметричен относительно оси ординат.

Очевидно, что функция непериодическая.

3. Точки пересечения графика с координатными осями, интервалы знакопостоянства функции.

График функции проходит через начало координат.

$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}>0$ на всей области определения.

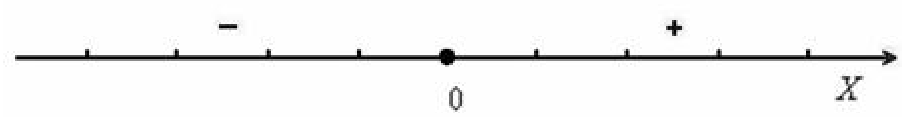
4. Возрастание, убывание, экстремумы функции.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+3}\right)'=\frac{(x^2)'(x^2+3)-x^2(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\frac{2x(x^2+3)-x^2\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{2x(x^2+3-x^2)}{(x^2+3)^2}=\frac{6x}{(x^2+3)^2}=0.$$

$x=0$ – критическая точка.

Определим знаки $f'(x)$:



$f(x)$ возрастает на $(0; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; 0)$.

В точке $x=0$ функция достигает минимума: $f(0)=0$.

5. Выпуклость, вогнутость, перегибы графика.

$$f''(x)=6\left(\frac{x}{(x^2+3)^2}\right)'=6\frac{(x)'(x^2+3)-x((x^2+3)^2)'}{(x^2+3)^4}=6\frac{(x^2+3)^2-x\cdot 2(x^2+3)2x}{(x^2+3)^4}=$$

$$=6\frac{x^2+3-4x^2}{(x^2+3)^3}=\frac{6(3-3x^2)}{(x^2+3)^3}=\frac{18(1-x^2)}{(x^2+3)^3}=0.$$

$x=\pm 1$ – критические точки.

Определим знаки $f'(x)$:

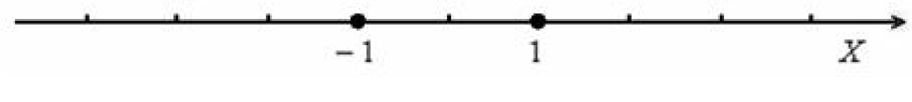


График $f(x)$ является выпуклым на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ и вогнутым на $(-1; 1)$.

В обеих критических точках существуют перегибы графика:

$f(\pm 1)=\dfrac{1}{1+3}=\dfrac{1}{4}$.

6. Асимптоты, поведение функции на бесконечности.

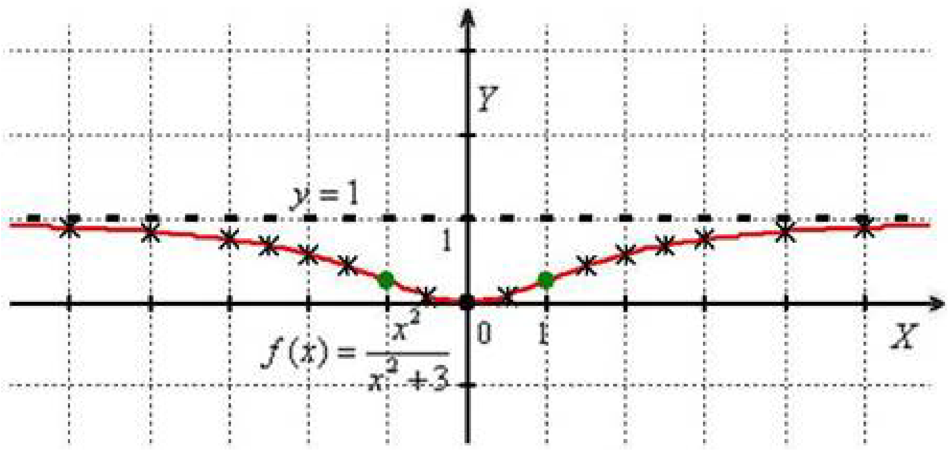
Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то вертикальные асимптоты отсутствуют.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2+3}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{3^{\to 0}}{x^2}} = 1.$$

Прямая $y = 1$ является горизонтальной асимптотой для графика $f(x)$ при $x \to \pm\infty$.

7. Найдем дополнительные точки и выполним чертёж:

x	0,5	1,5	2	2,5	3	4	5	6
$f(x)$	0,08	0,43	0,57	0,68	0,75	0,84	0,89	0,92



Задачи для самостоятельного решения

Методами дифференциального исчисления исследовать и построить графики следующих функций:

а) $y = \dfrac{3x^2 - 6x}{x-1}$; е) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}$;

б) $y = x \cdot \ln x$; ж) $y = \sqrt{4x^2 + 7}$;

в) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$; з) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

г) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; и) $y = x^2 \cdot e^x$;

д) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$; к) $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$.

12.5. Касательные

Геометрический смысл производной

Тангенс угла наклона касательной (угловой коэффициент наклона касательной), проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, равен производной функции $y = f(x)$ в этой точке: $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Заметим, что угол α – это угол между прямой и положительным направлением оси *OX*:

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид:

$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, где

x_0 – абсцисса точки касания;

$f(x_0)$ – значение функции $y = f(x)$ в точке касания;

$f'(x_0)$ – значение производной функции $y = f(x)$ в точке касания (рис. 33).

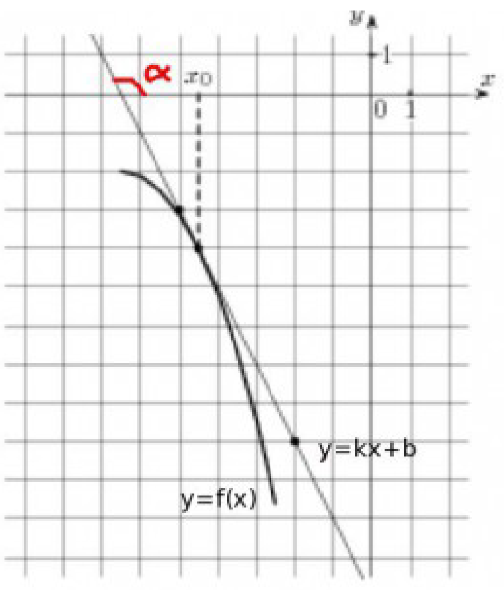


Рис. 33

Существуют задачи, связанные с определением того, является ли прямая $y = kx + b$ касательной к графику функции $y = f(x)$. Можно указать два способа решения таких задач.

1. Находим общие точки графиков, т. е. решаем уравнение $f(x) = kx + b$, а затем для каждого решения вычисляем $f'(x_0)$. В тех случаях, когда $f'(x_0) = k$, имеет место касание, в других – пересечение.

2. Находим корни уравнения $f'(x_0) = k$ и для каждого из них проверяем, выполняется ли равенство $f(x) = kx + b$. При его выполнении получаем абсциссы точек касания.

Обобщая оба способа, заметим, что для того чтобы прямая $y = kx + b$ была касательной к графику функции $y = f(x)$, необходимо и достаточно существование хотя бы одного числа x_0, для которого выполняется система

$$\begin{cases} f'(x_0) = k, \\ kx_0 + b = f(x_0). \end{cases}$$

<u>Пример.</u> При каких значениях b прямая $y = 3x + b$ является касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$?

Решение. Записав условие касания $\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 3, \\ 3x_0 + b = \sqrt{x_0}, \end{cases}$ получим $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{36}, \\ b = \frac{1}{12}. \end{cases}$

Ответ: $b = \dfrac{1}{12}$.

<u>Пример.</u> Составить уравнение касательной к графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + \dfrac{4}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Находим

$y' = 6x^2 - 6x + 4 - \dfrac{8}{x^3}$, $\quad y(2) = 8,\ y'(2) = 15.$

Следовательно, уравнение касательной можно записать в виде $y = 8 + 15(x - 2)$, или после упрощения $y = 15x - 22$.

Ответ: $y = 15x - 22$.

<u>Пример.</u> Написать уравнение всех касательных к графику функции $y = x^3 - 2x + 7$, параллельных прямой $y = x$.

Решение. Так как касательная должна быть параллельна прямой $y = x$, то ее угловой коэффициент, равный $y'(x_0)$, где x_0, – абсцисса точки касания, совпадает с угловым коэффициентом данной прямой, т. е. $y'(x_0) = 1$. Отсюда $x_0 = 1$ или $x_0 = -1$. Далее составляем уравнение касательной для каждой точки.

Ответ: $y = x + 5$, $y = x + 9$.

<u>Пример.</u> Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке M(3; – 2).

Решение. Точка M(3; – 2) является точкой касания, так как $f(3) = \dfrac{1}{3}3^3 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$ (рис. 34).

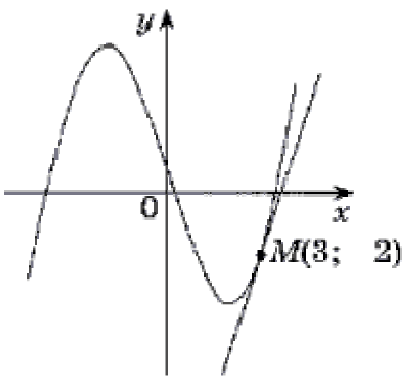


Рис. 34

$x_0 = 3$ – абсцисса точки касания.
$f(3) = -2$.
$f'(x) = x^2 - 4$, $\quad f'(3) = 5$.
$y = -2 + 5(x - 3)$, $y = 5x - 17$ – уравнение касательной.

Ответ. $y = 5x - 17$.

Пример. Напишите уравнения всех касательных к графику функции $y = -x^2 - 4x + 2$, проходящих через точку М(– 3; 6).

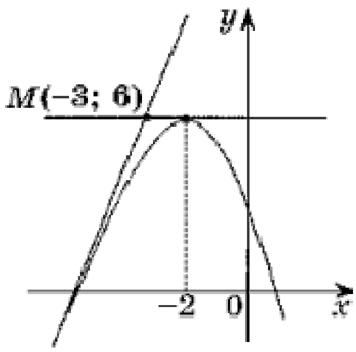


Рис. 35

Решение. Точка М(– 3; 6) не является точкой касания, так как $f(-3) \neq 6$ (рис. 35).

x_0 – абсцисса точки касания.

$f(x_0) = -(x_0)^2 - 4x_0 + 2.$

$f'(x) = -2x - 4,$

$f'(x_0) = -2x_0 - 4.$

$y = -(x_0)^2 - 4x_0 + 2 - 2(x_0 + 2)(x - x_0)$ – уравнение касательной.

Касательная проходит через точку М (–3; 6), следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению касательной.

$6 = -(x_0)^2 - 4x_0 + 2 - 2(x_0 + 2)(-3 - x_0),$

$(x_0)^2 + 6x_0 + 8 = 0 \ \rightarrow\ (x_0)_1 = -4,\ (x_0)_2 = -2.$

Если $x_0 = -4$, то уравнение касательной имеет вид $y = 4x + 18$.

Если $x_0 = -2$, то уравнение касательной имеет вид $y = 6$.

Ответ: $y = 4x + 18$ и $y = 6$.

Пример. Напишите уравнения всех общих касательных к графикам функций $f_1(x) = x^2 + x + 1$ и $f_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 3)$.

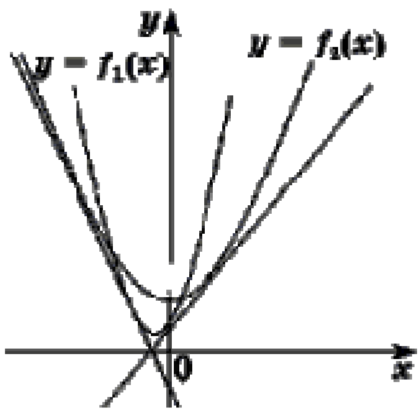


Рис. 36

Решение. Задача сводится к отысканию абсцисс точек касания общих касательных, т. е. к решению ключевой задачи 1 в общем виде, составлению системы уравнений и последующему ее решению (рис. 36).

1. Пусть а – абсцисса точки касания, лежащей на графике функции $y = x^2 + x + 1$.

2. $f(a) = a^2 + a + 1.$

3. $f'(a) = 2a + 1.$

4. $y = a^2 + a + 1 + (2a + 1)(x - a) = (2a + 1)x + 1 - a^2.$

2. Пусть c – абсцисса точки касания, лежащей на графике функции $y = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3\right)$.

2. $f(c) = \frac{1}{2}\left(c^2 + 3\right).$

3. $f'(c) = c$.

4. $y = \frac{1}{2}(c^2 + 3) + c(x - c) = cx + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c^2.$

Так как касательные общие, то

$$\begin{cases} 2a + 1 = c, \\ 1 - a^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a + 1, \\ 1 - a^2 = \frac{3}{2} - 2a^2 - 2a - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = 0,\ c_1 = 1 \\ a_2 = -2,\ c_2 = -3. \end{array} \right.$$

Итак, $y = x + 1$ и $y = -3x - 3$ – общие касательные.

Ответ: $y = x + 1$ и $y = -3x - 3$.

Задачи для самостоятельного решения

10. При каких значениях a прямая $y = ax+2$ является касательной к графику функции $y = \ln x$?

11. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 3x^3 - 12x - 15$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

12. Найдите все общие точки графика функции $y = 3x - x^3$ и касательной, проведенной к этому графику через точку P(0; 16).

13. Напишите уравнение всех общих касательных к графикам функций $y = x^2 - x + 1$ и $y = 2x^2 - x + 0{,}5$.

14. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = -\frac{7}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

15. Прямая $y = 15 - 7x$ является касательной к графику функции $y = \frac{5}{x^2} - 17x$. Найти сумму координат точки касания.

16. К графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - \frac{4}{x-1}$ в точке $x_0 = 2$ проведена касательная. Найти абсциссу точки касательной, у которой ордината равна 8.

12.6. Физический смысл производной функции

Пусть материальная точка движется неравномерно и прямолинейно согласно закону $s = s(t)$ (или $x = x(t)$), где t – время; s (или x) – путь.

Имеем физический смысл производной: $v(t) = s'(t)$ (или $v(t) = x'(t)$), т. е. скорость прямолинейного неравномерного движения соответствует производной от пути по времени.

Мгновенная скорость может принимать как положительные, так и отрицательные значения и, конечно, значение нуль. Если скорость на каком-либо промежутке времени $(t_1; t_2)$ положительна, то точка движется в положительном направлении, т. е. координата растет с течением времени, а если $v(t)$ отрицательна, то координата $x(t)$ убывает.

Аналогичное положение и с ускорением движения. Скорость движения точки есть функция от времени t. Производная этой функции называется ускорением движения $a = v'(t)$.

Коротко говорят: производная от скорости по времени есть ускорение.

Пример. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x – расстояние от точки отсчета, в метрах, t – время, в секундах, измеренное с начала движения). Найдите её скорость в момент времени $t = 9$ с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости $v(t) = x'(t) = 12t - 48$.

При $t = 9$ с имеем $v(9) = 12 \cdot 9 - 48 = 60$ м/с.

Ответ: 60 м/с.

Пример. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$ (где x – расстояние от точки отсчёта, в метрах, t – время, в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 3 м/с?

Решение.

Найдем закон изменения скорости: $v(t) = x'(t) = 2t - 13$ м/с.

Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 3 м/с, решим уравнение

$$2t - 13 = 3 \Leftrightarrow 2t = 16 \Leftrightarrow t = 8 \text{ с}.$$

Ответ: 8 с.

Задачи для самостоятельного решения

17. Материальная точка движется по оси OX по закону $x(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 5t$ (x – координата, в метрах; t – время, в секундах). Через сколько секунд после начала движения точка остановится?

18. Две точки движутся по оси OX по законам движения $x_1(t) = \frac{t^3}{3} + 8$ и $x_2(t) = t^2 + 3t - 7$ (x – координата; t – время). Определите промежуток времени, в течение которого скорость первой точки меньше скорости второй.

19. Материальная точка движется по оси OX по закону $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 2t^2 - 5$ (x – координата, в метрах, t – время, в секундах). Найти момент времени, когда ускорение равно нулю.

20. Ускорение движения точки вдоль оси OX имеет вид $x = at^2 + bt + c$. В момент времени $t = 1$ с скорость точки равна 7 см/с. При $t = 4$ с абсцисса точки $x = 49$ см, а скорость точки равна 25 см/с. Найти значение $a - b + c$.

13. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Определение. *Параметром* называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Что означает «решить задачу с параметром»?

Естественно, это зависит от вопроса в задаче. Если, например, требуется решить уравнение, неравенство, их систему или совокупность, то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговоренному множеству.

Если же требуется найти значения параметра, при которых множество решений уравнения, неравенства и так далее удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи и состоит в поиске указанных значений параметра.

Каковы основные типы задач с параметрами?

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Этот тип задач является базовым при овладении темой «Задачи с параметрами», поскольку вложенный труд предопределяет успех и при решении задач всех других основных типов.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Обращаем внимание на то, что при решении задач данного типа нет необходимости ни решать заданные уравнения, неравенства, их системы и совокупности и так далее, ни приводить эти решения; такая лишняя в большинстве случаев работа является тактической ошибкой, приводящей к неоправданным затратам времени. Однако не стоит абсолютизировать сказанное, так как иногда прямое решение в соответствии с типом 1 является единственным разумным путем получения ответа при решении задачи типа 2.

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Легко увидеть, что задачи типа 3 в каком-то смысле обратны задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;

2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.

Наиболее массовый класс задач с параметром – задачи с одной неизвестной и одним параметром.

Каковы основные способы (методы) решения задач с параметром?

Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости $(x; y)$, или в координатной плоскости $(x; a)$.

Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром», что они начинают игнорировать другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом и с колоссальными трудностями остальными способами. Поэтому на начальной стадии изучения опасно начинать с графических приемов решения задач с параметром.

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные *x* и *a* принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных *x* и *a* и заканчиваем решение.

<u>Пример</u>. При каких значениях параметра *a* уравнение $|x+2|=ax$ не имеет решений?

Решение. 1. Для каждого значения параметра *a* решим данное уравнение, после чего отберем те значения параметра, при которых уравнение решений не имеет.

На основании определения модуля заключаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+2=ax, \\ x+2\ge 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -(x+2)=ax, \\ x+2<0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} (a-1)x=2, \\ x\ge -2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a+1)x=-2, \\ x<-2. \end{cases}$$

Первая система имеет одно решение $x=\dfrac{2}{a-1}$ при $\dfrac{2}{a-1}\geqslant -2$, т. е. при $\boldsymbol{a\le 0}$ или $\boldsymbol{a>1}$ и не имеет решений при остальных значениях параметра. Вторая система имеет одно решение

$x = -\dfrac{2}{a+1}$, если $-\dfrac{2}{a+1} < -2$, т. е. при $\mathbf{-1 < \boldsymbol{a} < 0}$ и не имеет решений при остальных значениях параметра.

Объединяя решения систем, имеем: данное уравнение имеет одно решение $x = \dfrac{2}{a-1}$ при $a \le -1$, $\boldsymbol{a} \le \mathbf{-1}$, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$; два решения $x = \dfrac{2}{a-1}$ и $x = -\dfrac{2}{a+1}$ при $-1 < a < 0$. Анализируя полученный результат, определяем значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых уравнение не имеет решений.

Ответ: $\mathbf{0 < \boldsymbol{a} \le 1}$.

Решение 2. Приведем еще один вариант использования графических представлений для решения задач с параметрами.

Как известно, число решений уравнения $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ совпадает с количеством точек пересечения графиков функций $\boldsymbol{y = f(x)}$ и $\boldsymbol{y = g(x)}$, построенных в одной системе координат. Рассмотрим графики функций $\boldsymbol{y = |x + 2|}$ и $\boldsymbol{y = ax}$ (рис. 37). График первой функции не зависит от параметра $\boldsymbol{a}$; график второй функции (правой части уравнения) принадлежит семейству прямых, проходящих через начало координат, – «подвижный» график. Поэтому искомые значения параметра $\boldsymbol{a}$ соответствуют тем прямым из указанного семейства, которые не пересекают график функции $\boldsymbol{y = |x + 2|}$.

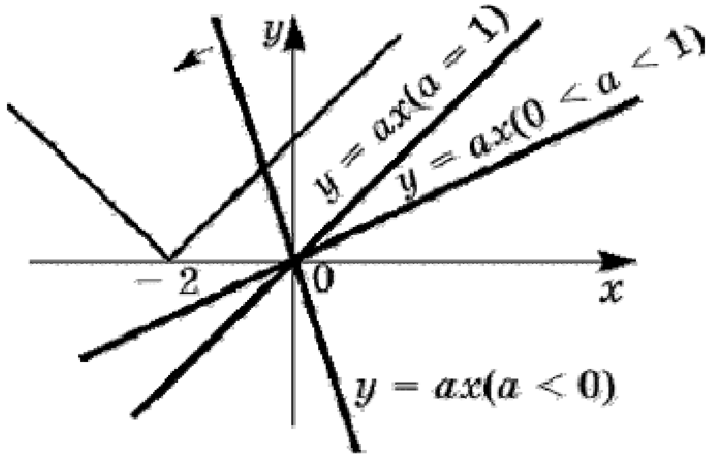


Рис. 37

При изменении параметра $\boldsymbol{a}$ от $-\infty$ до $+\infty$ прямая $y = ax$ поворачивается, начиная от «вертикального» положения «слева» от оси координат, против часовой стрелки вокруг начала координат. Очевидно, что при $\boldsymbol{a \le 0}$ прямая $\boldsymbol{y = ax}$ пересекает, по крайней мере, один раз «неподвижный» график $\boldsymbol{y = |x + 2|}$; при дальнейшем возрастании параметра $\boldsymbol{a}$ до момента $\boldsymbol{a = 1}$ (включительно) прямая не имеет общих точек с «неподвижным» графиком; при $\boldsymbol{a > 1}$ у графиков снова появляется общая точка. Поэтому исходное уравнение не имеет решений при $\boldsymbol{0 < a \le 1}$.

<u>Пример</u>. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)x^2 + 2x + a - 1 = 0$ имеет ровно один корень?

Решение. При $a = 1$ уравнение имеет вид $2x = 0$ и, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$. Если $a \neq 1$, то данное уравнение является квадратным и имеет единственный корень при тех значениях параметра, при которых дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Приравнивая дискриминант к нулю, получаем уравнение относительно параметра a:

$$4a^2 - 8a = 0,$$

откуда $a = 0$ или $a = 2$.

Ответ: Уравнение имеет единственный корень при $a \in \{0; 1; 2\}$.

<u>Пример</u>. При каком значении параметра a корни уравнения $x^2 - 3x + a = 0$ удовлетворяют условию $5x_1 + 3x_2 = 23$?

Решение. Запишем теорему Виета для данного уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \cdot x_2 = a. \end{cases}$$

К первому уравнению добавим условие из задачи и получим систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 = 23. \end{cases}$ Решением данной системы $x_1 = 7, x_2 = -4$ являются корни искомого уравнения. По второму условию теоремы Виета находим параметр: $a = x_1 \cdot x_2 = 7(-4) = -28$.

Ответ: $a = -28$.

<u>*Пример*</u>. При каких значениях параметра a неравенство $(5-a)x^2+(3a-15)x-6a<0$ выполняется на всей числовой оси?

Решение. Рассмотрим два случая:

1. Если $5 - a \neq 0$, то левая часть неравенства является квадратным трёхчленом. Рассмотрим квадратичную функцию $y=(5-a)x^2+(3a-15)x-6a$, которая будет всюду отрицательной, если $\begin{cases} D<0, \\ 5-a<0. \end{cases}$

Вычислим дискриминант $D=(3(a-5))^2-4(5-a)(-6a)=-15(a-5)(a+3)$ и запишем данную систему $\begin{cases} -15(a-5)(a+3)<0, \\ a-5>0. \end{cases}$

Она равносильна системе $\begin{cases} a+3>0 \\ a-5>0 \end{cases}$, решение которой $a \in (5; +\infty)$.

2. Если $5 - a = 0$, то при $a = 5$ неравенство примет вид $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 30 < 0$, которое справедливо всегда. Итак, $a = 5$ тоже является решением задачи.

Ответ: $a \in [5; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каком значении параметра a корни уравнения $3x^2+7x+a=0$ связаны соотношением $10x_1+3x_2=0$?

2. При каких значениях параметра a неравенство ax^2+ax+ $+a+3>0$ выполняется для любых x?

3. При каких значениях параметра a уравнение $(2a+1)x^2+$ $+2(a-1)x+(a+1)=0$ имеет различные отрицательные корни?

4. При каких значениях параметра a уравнение $(2-a)x^2+$ $+2(a+1)x+a+3=0$ имеет два различных положительных корня, сумма которых меньше, чем 3/4?

5. Укажите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|2|x|-4\right|=a-4$ имеет 1, 2 или 3 корня.

6. Найти все значения параметра a, при которых функция $y=-\frac{x^3}{3}+(a+2)x^2-4x+3$ имеет две точки экстремума.

7. Указать целое значение параметра a (если оно единственное) или сумму целых значений из промежутка (0;9), при которых уравнение $(\sqrt{x-3}-2)\cdot(x-a)=0$ имеет единственное решение.

8. Найти наименьшее целое неотрицательное значение параметра a, при котором система неравенств $\begin{cases} |x+1|<3, \\ x^2-a^2\geq 0 \end{cases}$ не имеет решений.

9. Найти наибольшее целое значение параметра a, при котором абсцисса всех общих точек графиков функций $f(x)=\frac{6a}{x}$ и $g(x)=\frac{51}{x^2+x}$ положительна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие содержит теоретический и практический материал по арифметике, алгебре, анализу, который может быть использован при подготовке абитуриентов к школьным экзаменам, ЕГЭ, централизованному тестированию по математике или поступлении в институты, университеты. Автор стремился изложить материал по возможности полно, строго и доступно. Школьникам и абитуриентам предлагается самостоятельно изучить такой раздел математики, как геометрия.

Процесс матемизации затронул почти все науки в современном мире. Немецкий философ 18-го века Иммануил Кант считал, что наука тем более заслуживает название науки, чем больше в ней математики.

В наше время в связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике будущие экономисты, инженеры, программисты, архитекторы, строители и другие нуждаются в серьёзной математической подготовке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дымков, М. П.* Математика : пособие для подготовки к вступительным испытаниям иностранных абитуриентов / М. П. Дымков. – Минск : БГЭУ, 2011. – 62 с.

2. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В. К. Егерев [и др.] ; под ред. М. И. Сканави. – 6-е изд. – М. : Мир и Образование ; ОНИКС-ЛИТ, 2013. – 608 с. – ISBN 978-5-94666-573-5 (Мир и Образование). – ISBN 978-5-4451-0047-8 (ОНИКС-ЛИТ).

3. *Калебин, А. В.* Математика : пособие для поступающих в ВлГУ / А. В. Калебин, Р. С. Ксенофонтов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Ред. издат. комплекс, 2003. – 144 с. – ISBN 5-89368-386-2.

4. *Сорокина, А. Г.* Пособие по математике для поступающих в ВлГУ / А. Г. Сорокина, В. А. Скляренко ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – 100 с. – ISBN 5-89368-275-0.

5. *Беспалов, М. С.* Математика : активный курс подготовки к тестированию : учеб. пособие / М. С. Беспалов, А. Г. Беспалова, Т. А. Еропкина ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – 122 с. – ISBN 5-89368-285-8.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Тема	Ответы
1	1) 2780; 2) 2464; 3) 6; 4) произведение уменьшилось на 12 %; 5) дробь увеличилась на 12,5 %
2	1) $x + 2$; 2) 1; 3) $-\dfrac{5(x+1)}{x^2-4}$; 4) 15; 5) 16
3	1) –3; 2) –960; 3) 45; 4)30; 5) ½; 6) –6
4	1) $(-5;-4)\cup(-4;5)$; 2) $[0;2)$; 3) –1; ±2; 4) $[-1;0)\cup(0;\infty)$; 5) $(-\infty;-3)$
5	1) 40; 2) $1{,}5\sqrt{3}$; 3) 7; 4) 6; 5) 2; –4; 6) 6; 7) 1; –4/5; 8) –1; 9) 7; 10) –1; 2; 11) –2; 0; 12) –3; 13) 0; 3; 14) –3; 15) –8; 16) –8; 17) 4; 18) $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right]$
6	1) 0; 2) 4; 3) 16; 4) $(-6;-5)\cup[-2;3]$; 5) $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$; 6) [1; 2]; 7) (–1; 1]; 8) (–2; +∞); 9) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$; 10) 3; 11) 8; 12) 5; 13) $\sqrt{2}-1$; 14) $\left[-\dfrac{13}{2};-\dfrac{11}{10}\right]$; 15) $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{3}\right)$
7	1) 1; 2) (–∞; 5]; 3) 2; 4) 3; 5) 16; 6) 4; 7) $3\sqrt{10}$; 8) –1; 9) –2; 10) –16; 11) (8; 6); 12) $\sqrt{5}$; 13) 11
8	1) $2\sqrt{5}$; 2) (0; 7); 3) (9; 0); 4) (–4; –4); 5) $(x-1)^2+(y-5)^2=25$; 6) $(x-6)^2+(y+2)^2=25$; 7) $x-y=0$
9	1) 2; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\sin 2\beta$; 4) $-\frac{3}{4}$; 5) $\dfrac{3-\sqrt{13}}{8}$; 7) 18º; 8) $\dfrac{17\pi}{6}$; 9) –180º; 10) 4; 11) $\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2}{5}\pi n;\ -\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{2}{5}\pi n, n\in Z$, или $-\dfrac{\pi}{15}+(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{\pi n}{5}, n\in Z$; 12) 135º; 13) 70º; 110º; 150º; 14) $\left[\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right], n\in Z$; 15) $[-\pi+4\pi n;\ 4\pi n],\ n\in Z$
10	1) $E(y)=(-5;+\infty)$; 2) $x = -1$; 3) 3/2; 4) 1/2; 5) 1; –1; 0; 6) –1; 1; 7) $(-\infty;0{,}5]$; 8) 4; 9) (–5; –2]; 10) [0; 3)

Окончание

Тема	Ответы
11	1) 30; 2) 8; 3) –4; 4) 4; 5) 4; 6) 3; 7) 10; 8) $(x-4)^2+(y-2)^2=4$; 9) 5; 10) –3; 11) 65; 12) 1; $\sqrt{2}$; 13) ±1; ±10; 14) 3; 9; 15) 1; 2; 16) 25; 1/5; 17) 1;2; 18) 3; 19) –1; 20) $\left(\frac{3}{5};\frac{8}{9}\right)$; 21) (0; 3]; 22) $(-4;-3)\cup(8;\infty)$; 23) (6; 9]; 24) (3; 4]; 25) $\left(\frac{1}{3};4\right]$; 26) $\left[\frac{7}{4};\frac{15}{2}\right)$; 27) (1; 3]; 28) 21; 29) 6; 30) (–3; –1)
12	1) 0; 2) (–1; 0); 3) 7; 4) 0; 5) 5; 6) 10; 7) 14; 8) $\frac{25}{8}$; 9) –3; 10) e^{-3}; 11) $y=24x+33$; 12) (2; –2) и (–4; 52); 13) $y=-3x, y=x$; 14) 14; 15) 21; 16) 2; 17) 5; 18) [0; 3); 19) 4; 20) –1
13	1) –10; 2) (0; ∞]; 3) (–5; –1); 4) $\left(-\frac{14}{5};-\frac{5}{2}\right)$; 5) $\{4\}\cup[8;\infty)$; 6) $(-\infty;-4)\cup(0;\infty)$; 7) 10; 8) 4; 9) 8

Учебное издание

КОКУРИНА Юлия Камильевна

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, АНАЛИЗ

Учебно-практическое пособие

Редактор Р. С. Кузина
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева
Корректор Е. П. Викулова
Компьютерная верстка Е. А. Герасиной

Подписано в печать 02.09.16.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 8,37. Тираж 60 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.