

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра сопротивления материалов

Н.А. МАЛОВА
КВОФИЕ Р. ОХЕНЕ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Методические указания

«В печать»:

Автор –

Н.А. Малова, Квофие Р. Охене.

Зав. кафедрой –

Редактор –

Л.В. Пукова

Корректор –

Е.В. Афанасьева

Начальник РИО –

Е.П. Викулова

Директор РИК –

Ю.К. Жулев

Владимир 2005

УДК 519.6
ББК 22.19
Ч67

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
кафедры теплогазоснабжения, вентиляции и гидравлики
Владимирского государственного университета
М.В. Мельников

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Численные методы в строительстве: метод. указания / сост.:
Ч67 Н. А. Малова, Квофие Р. Охене ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-
во ВлГУ, 2005. – 44 с.

Методические указания содержат задания и примеры численного решения задач с применением современного программного обеспечения ЭВМ по дисциплине «Численные методы в строительстве». Способствуют усвоению основных теоретических положений и методике расчета курса «Численных методов» прикладного направления применительно к численному решению строительных задач.

Содержат задания по темам: решение дифференциальных уравнений; метод конечных элементов в расчетах балок при растяжении – сжатии; метод конечных элементов в расчетах плоских ферм.

Предназначены для студентов дневной формы обучения по специальностям, связанным со строительством.

Табл. 3. Ил. 5. Библиогр.: 5 назв.

УДК 519.6
ББК 22.19

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для студентов строительных специальностей, содержит задания к решению задач, предназначенных для ознакомления с началами численных методов, на примере ряда задач сопротивления материалов и строительной механики.

В качестве математического инструмента для практического освоения методов численных вычислений студентам предлагается современный программный комплекс MathCAD-2000, позволяющий приобрести устойчивые навыки в решении прикладных задач.

Методические указания содержат три задания, позволяющие ознакомиться с методом конечных элементов на примере задач, вычисляющих перемещения и усилия в конструкциях, а также с методом численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задания являются индивидуальными и приведены в приложении, где рассматриваются примеры выполнения заданий, иллюстрированные необходимым графическим материалом.

Работы выполняются и представляются студентами в электронном виде.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

К обыкновенным дифференциальным уравнениям относятся уравнения, содержащие одну независимую переменную. В общем виде уравнения могут быть записаны как $F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$, где x – независимая переменная. Наивысший порядок n входящей в уравнение производной называется порядком дифференциального уравнения.

Решением ОДУ называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

Решение в общем виде: $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

Частное решение получается из общего, если произвольным постоянным C_1, C_2, \dots, C_n придать определенные значения. Для выделения частного решения из общего следует задавать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных в общем решении, т.е. каков порядок уравнения. Если эти условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задаче Коши называются начальными условиями, а точка $x = x_0$, в которой они задаются, – начальной точкой.

Одним из наиболее точных методов численного решения ОДУ является метод Рунге – Кутты. Метод является одношаговым, решаемым по схемам различных порядков точности. Порядок определяется порядком точности по шагу h на сетке. Схема Рунге – Кутты четвертого порядка точности

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \cdot (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$

где $i = 0, 1, k$ – коэффициенты, которые определяются:

$$k_0 = f(x_i, y_i) \quad k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \quad k_3 = f(x_i + h, y_i + k_2)$$

Программа решения для нахождения пошаговых значений y , реализованная в MathCAD, для ОДУ первого порядка:

$$\begin{array}{l}
 \text{rk4}(y_0, a, b, n, f) := \left\{ \begin{array}{l}
 y \leftarrow y_0 \\
 x \leftarrow a \\
 h \leftarrow \frac{b - a}{n} \\
 \text{while } x < b \\
 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 k1 \leftarrow f(x, y) \cdot h \\
 k2 \leftarrow f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k1}{2}\right) \cdot h \\
 k3 \leftarrow f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k2}{2}\right) \cdot h \\
 k4 \leftarrow f(x + h, y + k3) \cdot h \\
 y \leftarrow y + \frac{1}{6} \cdot (k1 + 2 \cdot k2 + 2 \cdot k3 + k4) \\
 x \leftarrow x + h
 \end{array} \right. \\
 y
 \end{array} \right. \quad (1)
 \end{array}$$

Здесь y_0 – начальное значение функции при $x_0 = a$; $[a, b]$ – интервал интегрирования; n – заданное количество шагов на интервале; $f(x, y)$ – уравнение первой производной.

ОДУ высших порядков для численного решения функциями MathCAD должны быть представлены задачей Коши в векторной форме. Само решение функциями выдается в табличном и графическом виде.

Рассмотрим решение на примере дифференциального уравнения второго порядка при помощи функции **rkfixed** (решение Рунге – Кутты четвертого порядка точности с фиксированным шагом).

Математическая постановка задачи сводится к представлению вектора начальных условий и вектора системы ОДУ. Предварительно уравнение должно быть преобразовано в систему уравнений первого порядка:

$$\begin{array}{l}
 Y_0 = y(x); \\
 Y_1 = Y_0' = y'; \\
 Y_1' = f(x, Y_0, Y_1) = y'';
 \end{array}$$

вектор начальных условий:

$$y = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{pmatrix} \quad (2)$$

векторная функция правых частей уравнения

$$D(x, Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ y''(x, Y_0, Y_1) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Формат функции **rkfixed**(y, x₀, x_k, Npoints, D) включает определенный выше вектор начальных условий y, начальное x₀ и конечное x_k значения интервала интегрирования, количество расчетных точек Npoints и векторную функцию правых частей D(x, Y). Численное решение уравнения получаем в виде матрицы, которая содержит в первом столбце координаты N узлов равномерной сетки на отрезке [x₀, x_k], во втором – приближенные значения решения в этих узлах функции, в третьем – первой производной.

Функция **rkadapt** решает уравнение методом Рунге – Кутты с автоматическим подбором шага.

Численные методы Булирша-Штера и алгоритма Розенброка для жестких систем представлены рядом функций (**bulstoer**, **stiffr**, **stiffb**), также использующих векторное представление всех параметров.

Исключением векторного представления уравнения в MathCADе является функция **odesolve**, позволяющая запись уравнения в символьном виде. Перед обращением к функции необходимо записать ключевое слово **Given**, затем ввести уравнение и начальные условия.

Формат функции **odesolve**(x, b[step]) требует указать конечное значение интервала интегрирования b. Шаг Step является необязательным, но при его указании функция решает уравнение методом Рунге – Кутты с фиксированным шагом.

Основные положения метода конечных элементов и реализация решения МКЭ в системе MathCAD

Любую непрерывную величину (температуру, давление, перемещение) можно аппроксимировать дискретной моделью в виде кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей, или элементов. Такая модель строится из предположения, что числовые значения искомой функции в каждой внутренней точке элемента известны.

Для стержневых систем такой метод является точным. МКЭ позволяет рассчитывать системы, составленные из тел с различными физическими и геометрическими свойствами, а также имеющие сложные граничные условия.

Настоящий практикум рассматривает расчеты стержневых систем, основанные на методе перемещений, на примере одномерных конечных элементов (отрезков).

Чтобы составить конечно-элементную модель, поступают следующим образом:

- фиксируют конечное число точек (узлов), а систему разбивают на конечное число элементов, имеющих общие узлы;
- искомую функцию аппроксимируют в каждом элементе полиномом, который определяется с помощью узловых значений этой величины;
- значение функции в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена.

Расчет стержня на продольную нагрузку

В качестве неизвестной (искомой) функции принимается перемещение стержня. Стержень разбивается на n конечных элементов (пример для 3 КЭ на рис. 1). Каждый элемент должен иметь постоянные физические и геометрические характеристики, а приложенная нагрузка на элементе должна иметь одну функциональную зависимость (для продольной нагрузки, это означает, что внутри стержня может быть либо распределенная нагрузка одной интенсивности, либо отсутствие всякой нагрузки). Все узлы и КЭ нумеруются слева направо. На рис. 2 показано, как разбита схема (см. рис. 1) на три конечных элемента (при реализации зада-

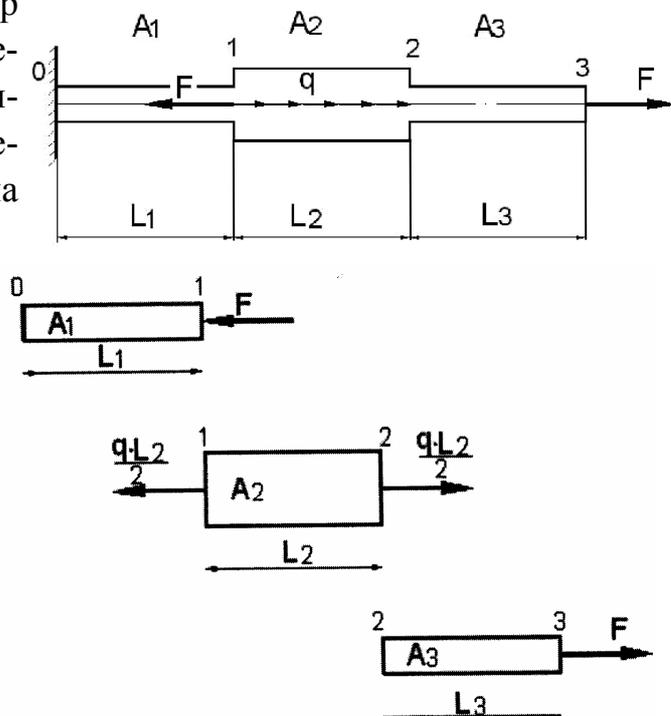


Рис. 2

чи в программе MathCAD первый порядковый номер узла зависит от назначенной системной переменной ORIGIN, управляющей нумерацией ячеек в матрице). Узлы 1 и 2 являются общими для первого и второго КЭ, а, следовательно, приведенные к узлам внешние силы также суммируются.

Матрица жесткости одного элемента

$$\frac{E \cdot A_e}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

где E – модуль упругости элемента; A – площадь поперечного сечения элемента; L – длина элемента.

Условие равновесия всей системы:

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\}, \quad (5)$$

где $\{F\}$ – матрица-вектор узловых внешних сил; $[K]$ – глобальная матрица жесткости; $\{U\}$ – матрица-вектор узловых перемещений.

Задача сводится к тому, чтобы, зная матрицы жесткости каждого элемента, на первом этапе получить матрицу жесткости всей системы (глобальную матрицу жесткости), а затем, задавшись граничными условиями, определить с ее помощью неизвестные перемещения и усилия в узлах заданного стержня.

Глобальная матрица системы, разбитой на три КЭ:

$$\begin{bmatrix} K^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & K^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & K^{(3)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Каждая матрица КЭ (1) по отношению к предыдущей сдвигается на одну ячейку вправо и одну вниз, суммируя тем самым перемещения одного и того же узла.

Граничные условия для глобальной матрицы задаются исходя из условий закрепления стержня. На схеме (см. рис. 1) согласно закреплению 0-го узла его перемещения должны быть равны нулю.

Матрица-вектор внешних нагрузок составляется в соответствии с приложенными внешними силами (опорные реакции в данном случае как величины неизвестные внешними силами не считаются). Распределенная нагрузка на элементе заменяется равнодействующей и прикладывается в узлы КЭ (см. 2-й КЭ на рис. 2).

Вектор перемещений определяется из условия равновесия системы¹ (5):

$$U := \text{Isolve}(K, F) \quad (7)$$

После вычисления перемещений в узлах определяются все остальные неизвестные величины (относительные деформации, напряжения, внутренние продольные усилия).

Расчет балок на поперечную нагрузку

При поперечной нагрузке в каждом сечении стержня возникают два вида перемещений: угловые и линейные. Таким образом, поиск перемещений в узлах усложняет матрицу жесткости КЭ и увеличивает ее размерность до 4×4 :

$$K_e := \frac{E_e \cdot J_e}{L_e^3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 \cdot L_e & -12 & 6 \cdot L_e \\ 6 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 & -6 \cdot L_e & 2 \cdot L_e^2 \\ -12 & -6 \cdot L_e & 12 & -6 \cdot L_e \\ 6 \cdot L_e & 2 \cdot L_e^2 & -6 \cdot L_e & 4 \cdot L_e^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Здесь J – осевой момент инерции поперечного сечения элемента. Принцип построения глобальной матрицы тот же, что и при продольной нагрузке (3), но поскольку в каждом узле системы учитывается по два перемещения, каждая последующая матрица КЭ сдвигается на две ячейки вправо и вниз.

Вектор внешних нагрузок включает для каждого узла последовательно поперечную силу и изгибающий момент. Таким образом, если система имеет 4 расчетных узла, матрица нагрузок имеет размерность 8×1 . Распределенная нагрузка, приложенная в КЭ, заменяется сосредоточенными силами и моментами в узлах (считаем, что КЭ жестко закреплен с обеих сторон) (рис. 3).

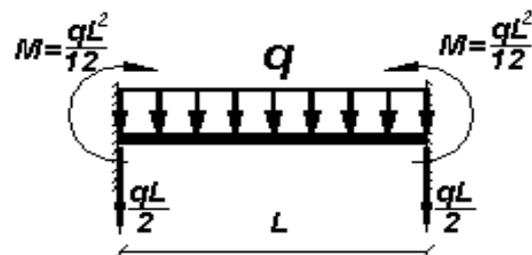


Рис. 3

¹ Предварительно в глобальной матрице задаются граничные условия заданной системы.

Все нагрузки в матрицу-вектор заносятся согласно математическому правилу знаков (сила положительна, если ее вектор совпадает с положительной осью локальной системы координат; момент положителен, если его вращение осуществляется против часовой стрелки).

Граничные условия определяют способы закрепления. В шарнирных опорах отсутствуют линейные перемещения, в жесткой заделке – и те, и другие (и линейные, и угловые).

Расчет перемещений осуществляется по формуле (7).

Результат заносится в матрицу-вектор перемещений в следующей последовательности: линейное, затем угловое перемещение первого (по порядку слева направо) узла, затем линейное, угловое перемещение следующего узла и т. д. Если нумерация ячеек в матрице программой MathCAD осуществляется с 1, линейные перемещения в узлах будут иметь нечетные индексы, угловые – четные.

Далее определяются внутренние усилия в узлах (поперечные силы, изгибающие моменты и внутренние напряжения)².

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Решение ОДУ второго порядка

Цель работы: средствами MathCAD применить численные методы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Пример выполнения задания приведен в прил.

Задание

Найти аналитически решение линейного однородного уравнения второго порядка $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$. Решить численно задачу Коши $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Изобразите график решения и табличный вывод для x , y , y' . Данные взять из табл. 1.

² Подробнее нахождение внутренних усилий рассмотрено в примерах (прил. 2).

Таблица 1

Вариант	a1	a2	y(x ₀)	У9(x ₀)	x ₀
1	2	0	1	1	0
2	-4	4	0	1	0
3	2	1	5	0	$\pi/2$
4	0	1	3	0	$-\pi/2$
5	2	5	8	0	1
6	-3	4	1	1	0.3
7	6	13	-1	1	0.25
8	-8	1	4	1	$\pi/2$
9	-2	5	6	2	$-\pi/2$
10	-4	8	0	2	1
11	2	3	0	2	0
12	-3	4	-1	0.5	2
13	3	1	1	1	$\pi/2$
14	5	5	4	-0.5	$-\pi/2$
15	6	10	5	2	0.8
16	-4	6	0	0.5	0.75
17	2	-3	1	1	-1
18	-4	12	-1	0	$\pi/2$
19	6	9	-2	2	1
20	4	1	8	0.5	0.3
21	0	-1	1	0	0
22	-5	4	1	1	0
23	5	-1	2	0	0
24	-1	1	1	0	$\pi/2$
25	7	2	2	0	3
26	-4	3	6	10	0
27	4	29	0	15	0
28	2	8	1	-2	3
29	4	-3	2	4	1
30	1	0.25	2	0	0
31	9	0.5	6	3	1
32	-9	2	4	5	2
33	10	-3	-1	7	3
34	-10	4	5	5	2

Пример выполнения задания приведен в прил.

Указания к выполнению задания

1. Аналитически получить выражение функции в общем виде и найти неизвестные постоянные интегрирования C_1 и C_2 по начальным условиям. Для этого составить и решить характеристическое уравнение. Решение для функции и аргумента реализовать в графической и табличной форме.

2. Численно получить решение уравнения в графической и табличной форме, используя не менее двух функций. Для функции `gkfixed` составить вектор начальных условий (2) и вектор правых частей (3).

3. Задать одинаковый шаг аргументу и сравнить полученные решения.

Задание 2. Расчет методом конечных элементов перемещений и усилий в стержневой конструкции от действия продольной нагрузки

Цель работы: научиться составлять конечно-элементную модель заданной конструкции, матрицы жесткости системы, задавать граничные условия, вычислять усилия в конструкции, используя МКЭ.

Задание

Используя МКЭ, определить в стальном ступенчатом стержне круглого сечения перемещения, относительные деформации, внутренние усилия и напряжения от действия продольной нагрузки. Построить эпюры перемещений, внутренних усилий и напряжений. Оценить прочность стержня. Принять расчетное сопротивление $R = 200$ МПа; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Схему и данные взять по номеру варианта из рис. 4 и табл. 2. Повторить решение, добавив вторую заделку в сечение D.

Таблица 2

Вариант	F1		F2		q1	q2	q1	A1	A2	A3	L1	L2	L3
	кН	сеч	кН	сеч	$\frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$\frac{\text{кН}}{\text{м}}$	уч-к	$10^{-4}, \text{ м}^2$	$10^{-4}, \text{ м}^2$	$10^{-4}, \text{ м}^2$	м	м	м
1	7	B	10	D	12	0	BC	2,0	4,0	2,0	0,25	0,36	0,95
2	8	C	12	B	10	0	CD	2,5	2,5	5,0	0,75	0,62	0,26
3	9	D	14	C	8	0	AB	2,1	4,2	2,1	0,90	0,32	0,65
4	10	B	16	D	6	0	BC	2,2	4,4	2,2	0,80	0,42	0,95
5	11	C	18	B	0	6	CD	2,3	4,6	2,3	0,60	0,52	1,10
6	12	D	20	C	0	8	AB	2,4	4,8	2,4	0,55	0,75	0,98
7	13	B	8	D	0	10	BC	2,6	5,2	2,6	0,45	0,80	1,04
8	14	C	10	B	0	12	CD	2,7	5,4	2,7	0,35	0,70	1,22
9	15	D	12	C	6	0	AB	2,8	5,6	2,8	0,40	0,92	0,58
10	16	B	14	D	8	0	BC	2,9	5,8	2,9	0,70	0,45	0,85
11	17	C	16	B	10	0	CD	3,0	6,0	3,0	0,26	0,68	0,94
12	18	D	18	C	12	0	CD	2,1	2,1	4,2	0,34	0,85	0,68
13	19	B	20	C	0	6	CB	2,2	2,2	4,4	0,68	0,36	0,90
14	20	C	10	D	0	8	AB	2,3	2,3	4,6	0,72	0,44	0,66
15	7	D	12	B	0	10	BC	2,4	2,4	4,8	0,48	0,85	0,35

Вариант	F1		F2		q1	q2	q1	A1	A2	A3	L1	L2	L3
	кН	сеч	кН	сеч	$\frac{\text{кН}}{\text{м}}$	$\frac{\text{кН}}{\text{м}}$	уч-к	$10^{-4}, \text{ м}^2$	$10^{-4}, \text{ м}^2$	$10^{-4}, \text{ м}^2$	м	м	м
16	8	B	14	C	0	12	CD	2,5	2,5	5,0	0,56	0,74	0,94
17	9	C	16	D	12	0	AB	2,6	2,6	5,2	0,66	0,45	0,82
18	10	D	18	B	10	0	BC	2,7	2,7	5,4	0,70	0,38	0,46
19	11	B	20	D	8	0	CD	2,8	2,8	5,6	0,44	0,76	0,84
20	12	C	10	B	6	0	AB	2,9	2,9	5,8	0,92	0,35	0,55
21	13	D	12	C	0	6	BC	3,0	3,0	6,0	0,75	0,46	0,98
22	14	B	14	D	0	8	CD	6,0	3,0	3,0	0,58	0,70	1,10
23	15	C	16	B	0	10	AB	5,8	2,9	2,9	0,48	0,65	1,00
24	16	D	18	C	0	12	BC	5,6	2,8	2,8	0,60	0,42	1,20
25	17	B	20	C	12	0	CD	5,4	2,7	2,7	0,38	0,85	1,05
26	18	C	10	D	10	0	AB	5,2	2,6	2,6	0,46	0,90	0,82
27	19	D	12	B	8	0	BC	5,0	2,5	2,5	0,64	0,55	1,30
28	20	B	14	C	6	0	CD	4,8	2,4	2,4	0,38	0,88	1,10
29	15	C	16	D	10	0	AB	4,6	2,3	2,3	0,80	0,65	1,20
30	20	D	18	B	8	0	BC	4,4	2,2	2,2	0,55	0,72	1,25
31	5	B	20	D	8	0	BC	3,1	4,5	3,1	0,46	0,38	0,36
32	6	C	10	B	0	12	CD	3,2	4,4	4,4	0,84	0,76	0,62
33	7	D	15	C	0	15	AB	3,3	4,3	3,3	0,55	0,35	0,32
34	8	B	11	D	14	0	BC	3,4	4,2	3,4	0,98	0,46	0,42
35	9	C	13	B	12	0	CD	3,5	4,0	4,0	1,10	0,70	0,52

Пример выполнения задания приведен в прил.

Указания к выполнению задания

1. Разбить заданную конструкцию (см. рис. 4) на конечные элементы, исходя из геометрических характеристик и приложенной нагрузки на участках стержня.

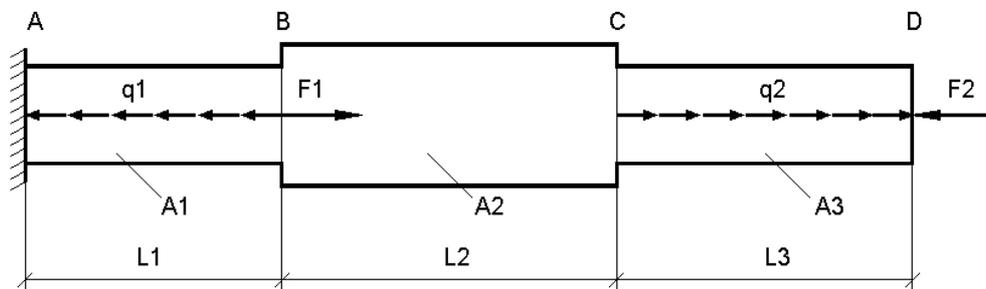


Рис. 4

2. Задать поэлементный счет в матрице с 1 (системная переменная ORIGIN = 1).

3. Пронумеровать узлы КЭ слева направо, начиная с 1.
4. Составить для каждого i -го КЭ матрицу жесткости K_i (4), предварительно задав все геометрические и физические характеристики.
5. Составить глобальную матрицу системы K . Для объединения матриц жесткости КЭ используйте базовую нулевую матрицу K_0 $n \times n$ (n – количество узлов системы) и программу для вставки подматрицы:

$$\text{Rep}(A, B, r, c) := \left| \begin{array}{l} R \leftarrow A \\ \text{for } i \in 1.. \text{rows}(B) \\ \quad \text{for } j \in 1.. \text{cols}(B) \\ \quad \quad R_{i+r-1, j+c-1} \leftarrow B_{i, j} \\ R \end{array} \right.$$

где r, c – номер строки и столбца соответственно, с которых начинается вставка подматрицы B (K_i) в матрицу A (K_0).

6. Задать граничные условия элементам глобальной матрицы жесткости, исходя из условий закрепления. Во избежание получения сингулярной (вырожденной) матрицы, необходимо задать вместо 0 первому обнуляемому элементу значение высокого порядка (например, 10^{20}).

7. Задать вектор узловых внешних нагрузок. Нагрузка в жесткой заделке считается неизвестной. Распределенная нагрузка заменяется двумя сосредоточенными силами, приложенными пропорционально к узлам КЭ. Учитывать знак внешней нагрузки, считая ее положительной, если ее вектор совпадает с положительным направлением оси x КЭ.

8. Вычислить узловые перемещения по (7). Найти относительную деформацию, напряжения и усилия в узлах КЭ.

9. Построить эпюры абсолютных и относительных деформаций, напряжений и продольных усилий по полученным узловым значениям.

10. Оценить прочность конструкции по максимальному напряжению.

11. Сравнить полученные результаты с аналитическим расчетом. Используя созданный алгоритм, решить статически неопределимую задачу (добавить заделку в сечение D – рис. 4) в той же последовательности.

Задание 3. Расчет методом конечных элементов перемещений и усилий в балке от действия поперечной нагрузки

Цель работы: научиться в плоской балке, используя метод конечных элементов, составлять глобальную матрицу жесткости системы и за-

давать граничные условия; численно определять перемещения, внутренние усилия и представлять их графически.

Задание

Для балки (см. рис. 5, а; табл. 3) определить методом конечных элементов прогибы и углы поворотов, внутренние усилия (поперечные силы и изгибающие моменты); построить эпюры усилий и перемещений. Найти аналитически изгибающие моменты в характерных сечениях балки и перемещение в заданном расчетном сечении (методом начальных параметров); сравнить с численным результатом. Принять сечение балки постоянным. Форма сечения – квадрат $0,15 \times 0,15$ м; модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^9$ МПа. Проверить прочность балки по максимальному моменту. Использовать алгоритм для решения дважды статически неопределимой системы (см. рис. 5, б).

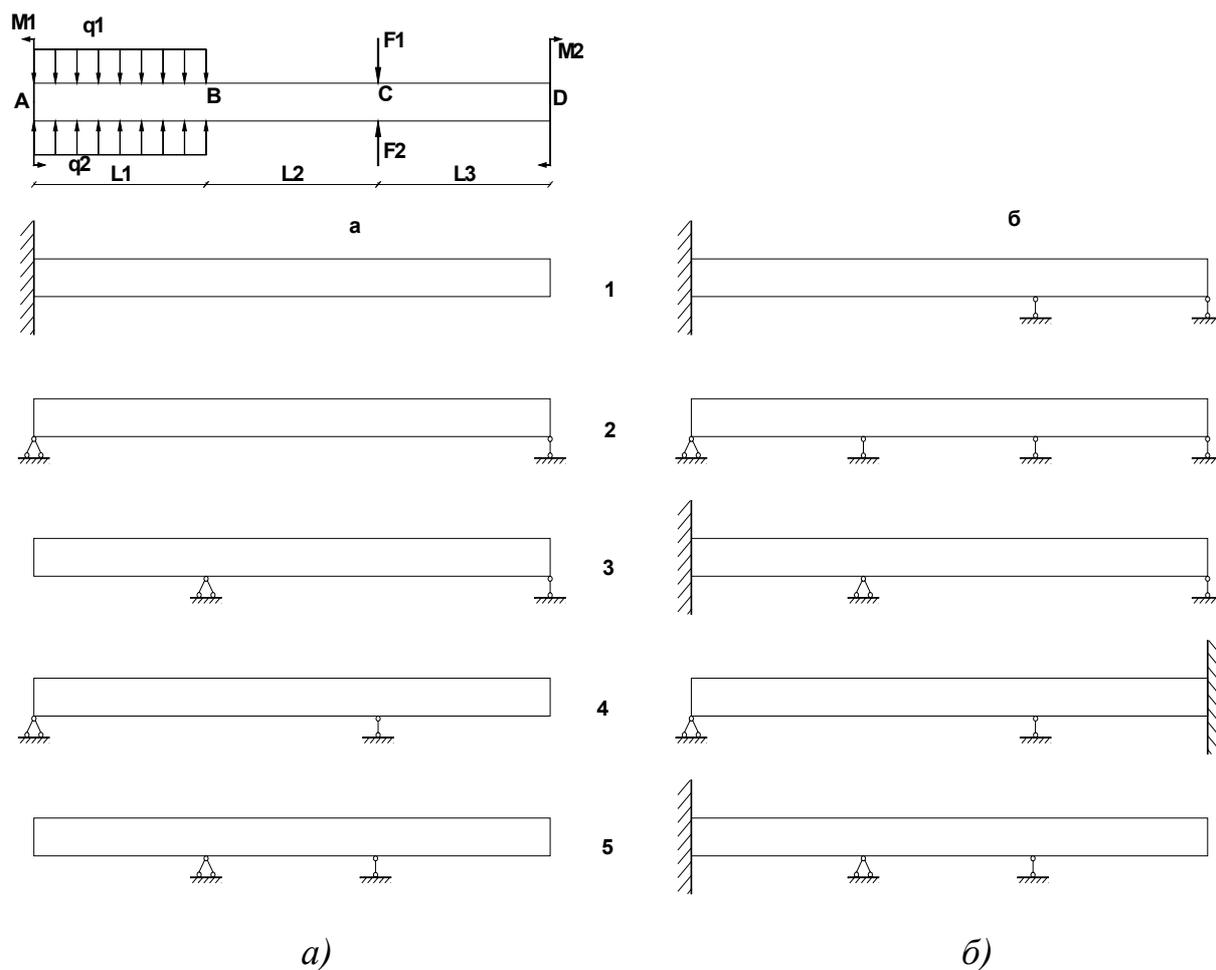


Рис. 5

Таблица 3

Ва- ри- ант	Схе- ма	F			q			M			L1	L2	L3
		F1/F2	сеч	кН	q1/q2	уч- к	кН	M1/M2	сеч	кН·м	м	м	м
1	1/С	F1	В	5	q1	АВ	10	M1	D	2	1,2	0,9	1,0
2	2/В	F2	В	6	q1	BC	9	M1	A	5	1,7	0,6	1,2
3	3/А	F1	А	7	q2	CD	10	M1	B	2	0,9	1,3	0,6
4	4/В	F2	В	8	q2	AB	9	M2	D	2	0,8	1,4	0,9
5	5/А	F1	А	9	q1	BC	8	M2	D	3	0,6	1,5	1,10
6	1/С	F2	С	10	q1	CD	7	M2	B	4	0,9	1,7	0,6
7	2/В	F1	С	11	q2	AB	8	M1	D	6	1,4	0,80	1,0
8	3/А	F2	С	12	q2	BC	7	M1	A	7	1,3	0,70	1,2
9	4/В	F1	D	13	q1	CD	6	M1	B	8	1,2	0,8	0,9
10	5/А	F2	D	14	q1	AB	5	M2	C	9	1,3	0,6	1,0
11	1/D	F1	D	15	q2	BC	6	M2	D	3	1,2	0,6	0,9
12	2/С	F2	В	16	q2	CD	5	M2	B	4	1,3	0,8	0,8
13	3/С	F1	А	15	q1	AB	4	M1	D	4	0,6	1,3	0,90
14	4/D	F2	В	14	q1	BC	3	M1	A	6	0,7	1,4	0,6
15	5/D	F1	D	13	q2	CD	4	M1	A	8	1,4	0,8	1,1
16	1/D	F2	В	12	q2	AB	3	M2	C	5	1,5	0,7	0,9
17	2/С	F1	С	11	q1	BC	2	M2	D	5	0,9	0,5	1,2
18	3/С	F2	С	10	q1	CD	2	M2	A	4	1,1	0,8	0,6
19	4/D	F1	D	9	q2	AB	5	M1	C	6	1,2	0,7	0,8
20	5/D	F2	А	8	q2	BC	5	M1	C	8	0,9	0,35	0,55
21	1/С	F1	С	7	q1	CD	6	M1	D	6	0,7	1,4	0,9
22	2/В	F2	В	6	q1	AB	8	M2	C	3	1,3	0,70	1,10
23	3/А	F1	С	5	q2	BC	10	M2	B	9	1,1	0,6	1,00
24	4/В	F2	D	15	q2	CD	8	M2	A	8	1,4	0,7	1,20
25	5/А	F1	D	14	q1	AB	7	M1	B	7	1,3	0,8	1,0
26	1/D	F2	D	13	q1	BC	6	M1	B	6	1,4	0,9	0,8
27	2/С	F1	В	12	q2	CD	7	M1	C	5	1,6	0,5	1,30
28	3/С	F2	А	11	q2	AB	6	M2	C	4	1,3	0,8	1,10
29	4/D	F1	В	10	q1	BC	5	M2	D	3	0,8	0,6	1,20
30	5/D	F2	А	9	q2	CD	5	M2	B	2	1,5	0,7	1,2
31	1/D	F1	D	14	q2	AB	10	M1	D	2	1,35	1,1	0,9
32	2/С	F2	С	12	q1	BC	9	M1	A	5	1,45	0,6	1,2
33	3/А	F1	А	9	q2	CD	10	M1	B	2	1,25	0,85	0,6
34	4/В	F2	В	8	q1	AB	9	M2	D	2	1,35	0,75	0,9
35	5/А	F1	А	11	q2	BC	8	M2	D	3	1,15	0,5	1,00

Пример выполнения задания приведен в прил.

Указания к выполнению задания

1. Задать системную переменную ORIGIN = 1.

2. Разбить заданную конструкцию (рис. 5, а) на конечные элементы, исходя из геометрических характеристик и приложенной нагрузки на участках стержня.

3. Пронумеровать узлы КЭ слева направо, начиная с 1.

4. Составить для каждого i -го КЭ матрицу жесткости K_i (8), предварительно задав все геометрические и физические характеристики.

5. Составить глобальную матрицу системы K . Для объединения матриц жесткости КЭ используйте базовую нулевую матрицу K_0 $n \times n$ (n – количество узлов системы) и программу для вставки подматрицы (см. указания к заданию 2).

6. Задать граничные условия элементам глобальной матрицы жесткости, исходя из условий закрепления. Во избежание получения сингулярной (вырожденной) матрицы, необходимо задать вместо 0 обнуляемым элементам значение высокого порядка (10^{20}).

7. Задать вектор узловых внешних нагрузок. Каждому узлу задается две нагрузки: сила и момент соответственно. Нагрузка в жесткой заделке считается неизвестной. Распределенная нагрузка заменяется сосредоточенными силами и моментами, приложенными к узлам элемента (см. рис. 3). Вектор поперечной силы считать положительным, если его направление совпадает с положительной осью локальной системы координат КЭ; вектор момента положителен, если его вращение против часовой стрелки.

8. Вычислить линейные и угловые перемещения U , используя функцию **lsolve** (7).

9. Вычислить узловые внутренние усилия, в зависимости от наличия или отсутствия распределенной нагрузки на КЭ.

10. Составить для каждого конечного элемента функциональные зависимости поперечных сил, изгибающих моментов, угловых и линейных перемещений и построить эпюры Q , M , v , θ для всей системы.

11. Сравнить полученные численно значения перемещений в заданном расчетном сечении с аналитическим расчетом перемещений, используя метод начальных параметров.

12. Построить эпюры внутренних усилий, угловых и линейных перемещений.

13. Выполнить решение для дважды статически неопределимой системы согласно заданной схеме по рис. 5, б.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящие методические указания включают задания, позволяющие освоить современные численные методы, широко применяемые в инженерных задачах. Первое задание, предназначенное для численного решения дифференциальных уравнений, дает возможность освоить численные методы решения ОДУ, используя различные методики решения; наглядное графическое представление решения и выбор интервалов интегрирования дают возможность студенту самостоятельно прийти к правильному решению. Второе и третье задания позволяют освоить принцип метода конечных элементов на примере стержневых конструкций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Примеры решений

Пример 1. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Аналитическое решение первоначально предполагает составление и решение характеристического уравнения.

Уравнение в общем виде

$y''(x) + a_1 \cdot y'(x) + a_2 \cdot y(x) = 0$ имеет характеристическое уравнение $r^2 + a_1 \cdot r + a_2 = 0$.

В зависимости от полученных корней уравнения функция $y(x)$ имеет три вида решения в общем виде:

1) два действительных корня r_1 и r_2 :

$$y(x) = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot x};$$

2) один действительный корень r :

$$y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{r \cdot x};$$

3) два комплексных корня $r_1 = \alpha + \beta i$; $r_2 = \alpha - \beta i$:

$$y(x) = e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x)).$$

Постоянные C_1 и C_2 находятся из заданных начальных условий.

Рассмотрим аналитическое и численное решения уравнения на примере случая с комплексными корнями.

Дано:

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(-\pi/2) = 6, \quad y'(-\pi/2) = 2.$$

Характеристическое уравнение и его решение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \text{ solve, } \lambda \rightarrow \begin{pmatrix} -1 + 1i \\ -1 - 1i \end{pmatrix}$$

отсюда $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

Общий вид решения:

$$y(x, C_1, C_2) := e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x))$$

Найдем первую и вторую производные:

$$\frac{d}{dx}y(x, C1, C2) \rightarrow -\exp(-x) \cdot (C1 \cdot \cos(x) + C2 \cdot \sin(x)) + \exp(-x) \cdot (-C1 \cdot \sin(x) + C2 \cdot \cos(x))$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x, C1, C2) \text{ simplify} \rightarrow 2 \cdot \exp(-x) \cdot C1 \cdot \sin(x) - 2 \cdot \exp(-x) \cdot C2 \cdot \cos(x)$$

Зададим начальные условия и найдем постоянные C1 и C2:

Присвоим найденные значения:

$$C1 := \frac{8}{e^{\frac{\pi}{2}}} \quad C2 := \frac{-6}{e^{\frac{\pi}{2}}}$$

$$x := \frac{-\pi}{2}$$

Given

$$y(x, C1, C2) = 6$$

$$\frac{d}{dx}y(x, C1, C2) = 2$$

$$\text{Find}(C1, C2) \rightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{8}{\exp\left(\frac{1}{2} \cdot \pi\right)} \\ -6 \\ \frac{-6}{\exp\left(\frac{1}{2} \cdot \pi\right)} \end{array} \right)$$

Выполним проверку (символ производной Ctrl-F7). Предварительно выражение первой производной упростим при помощи команды Factor:

$$Y(x) := e^{-x} \cdot (C1 \cdot \cos(x) + C2 \cdot \sin(x))$$

$$Y'(x) := \exp(-x) \cdot (-C1 \cdot \cos(x) - C2 \cdot \sin(x) - C1 \cdot \sin(x) + C2 \cdot \cos(x))$$

$$Y''(x) := 2 \cdot \exp(-x) \cdot C1 \cdot \sin(x) - 2 \cdot \exp(-x) \cdot C2 \cdot \cos(x)$$

$$Y''(x) + 2 \cdot Y'(x) + 2 \cdot Y(x) = 0$$

Построение графика:

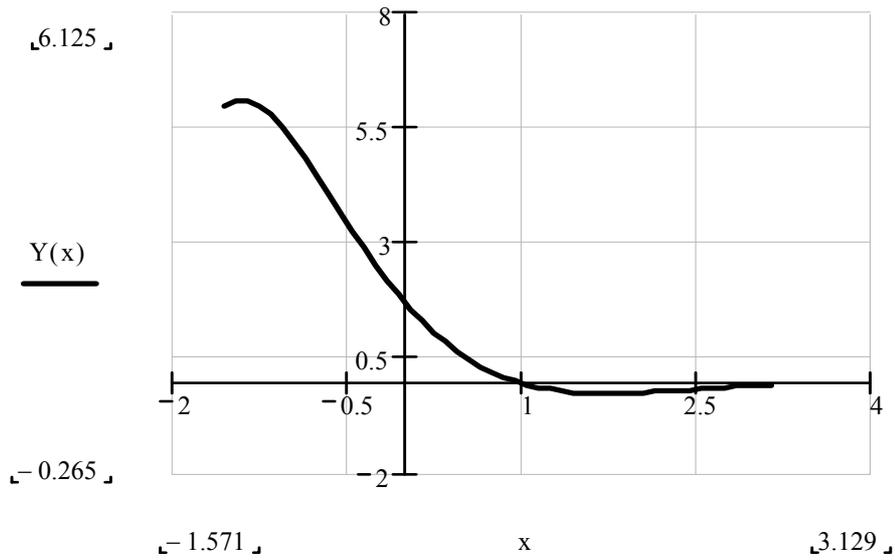


Рис. III

Для численного решения используем две функции: **odesolve** и **rkfixed**.
 Функцию **odesolve** предварим ключевым словом **Given**:

Given

$$z''(x) + 2 \cdot z'(x) + 2 \cdot z(x) = 0$$

$$z\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 6$$

$$z'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 2$$

od := odesolve (x, π)

Построим график функции:

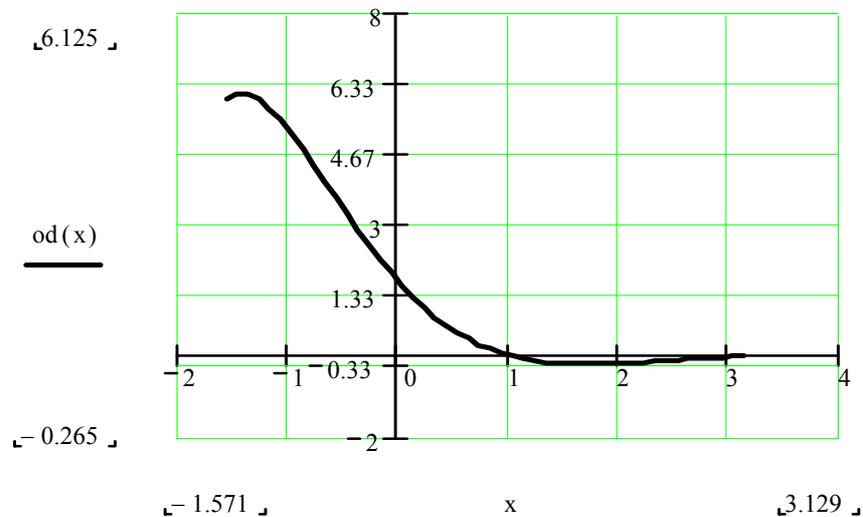


Рис. II2

Для использования функции `rkfixed` необходимо составить вектор начальных условий y и вектор правых частей $F(x,y)$:

$$y := \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad F(x,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -2 \cdot y_1 - 2 \cdot y_0 \end{pmatrix}$$

$$rk := rkfixed\left(y, \frac{-\pi}{2}, \pi, 100, F\right)$$

Количество шагов интегрирования зададим равное 100. Решение функция выдает в матричной форме, первый столбец которой является аргументом, второй – функцией, третий – первой производной. Для представления функции в графической форме следует задать в качестве аргумента $rk^{<0>}$, в качестве функции $rk^{<1>}$:

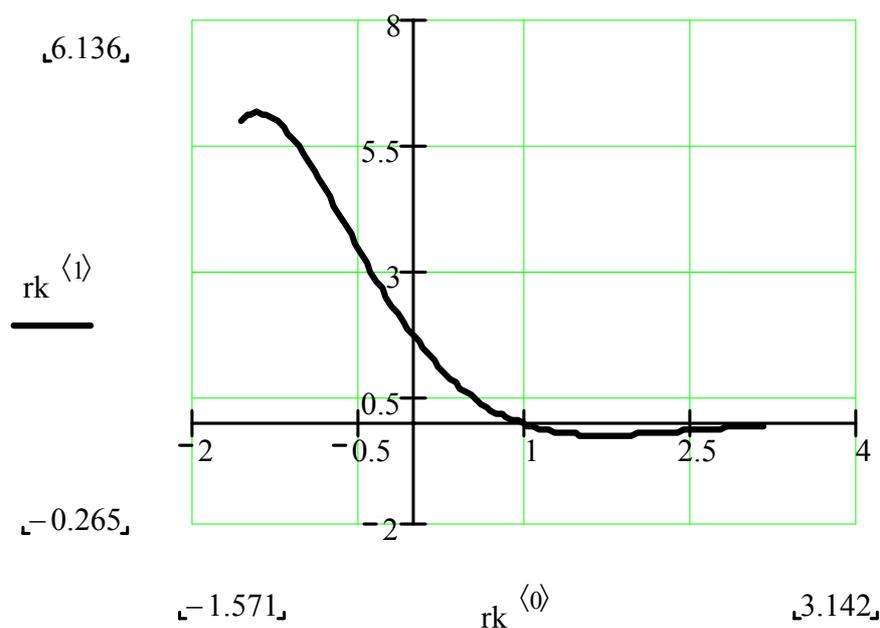


Рис. П3

Очевидно, что все три полученных графика (рис. П1, П2, П3) идентичны. Для сравнительного анализа всех трех методов решения в табличной форме зададим равный шаг аргументу, исходя из заданных 100 точек функции `rkfixed`. Интервал интегрирования от $\pi/2$ до π . Задаем ранжированную переменную x с шагом для 100 точек:

$$x := \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{100} .. \pi$$

Табличный вывод (первые 15 значений) показывает, что все три способа имеют практически сходные результаты. Функция `rkfixed`, использующая метод Рунге – Кутты, не отличается от точного (аналитического) решения:

x =	Y(x) =	Y(x) =	od(x) =		0	1	2	
-1.571	6	2	6		0	-1.571	6	2
-1.524	6.077	1.277	6.069		1	-1.524	6.077	1.277
-1.477	6.121	0.613	6.12		2	-1.477	6.121	0.613
-1.429	6.136	6.451·10 ⁻³	6.138		3	-1.429	6.136	6.45·10 ⁻³
-1.382	6.123	-0.546	6.123		4	-1.382	6.123	-0.546
-1.335	6.085	-1.046	6.084		5	-1.335	6.085	-1.046
-1.288	6.025	-1.496	6.025		6	-1.288	6.025	-1.496
-1.241	5.945	-1.9	5.945	rk =	7	-1.241	5.945	-1.9
-1.194	5.847	-2.26	5.847		8	-1.194	5.847	-2.26
-1.147	5.732	-2.577	5.732		9	-1.147	5.732	-2.577
-1.1	5.604	-2.855	5.604		10	-1.1	5.604	-2.855
-1.052	5.464	-3.096	5.464		11	-1.052	5.464	-3.096
-1.005	5.313	-3.302	5.313		12	-1.005	5.313	-3.302
-0.958	5.153	-3.476	5.153		13	-0.958	5.153	-3.476
-0.911	4.986	-3.619	4.986		14	-0.911	4.986	-3.619
-0.864	4.813	-3.734	4.813		15	-0.864	4.813	-3.734

Пример 2. Расчет методом конечных элементов перемещений и усилий в стержне от действия продольной нагрузки

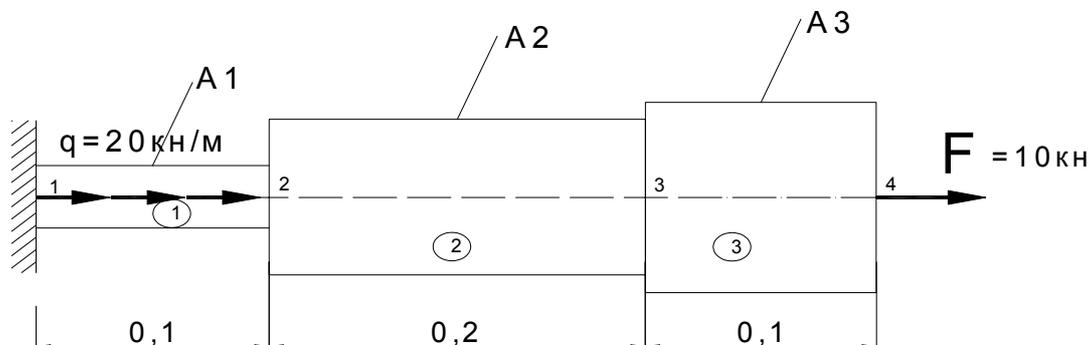


Рис. П4

1. Анализ системы.

Стержень разбивается на 3 КЭ в соответствии с переменной площадью поперечных сечений и приложенной нагрузкой (рис. П4). Задаем системную переменную, управляющую нумерацией начальной элемента матрицы: $ORIGIN := 1$.

Нумерация КЭ слева направо: 1, 2, 3; нумерация узлов слева направо: 1, 2, 3, 4.

Задаем количество КЭ переменной $ne := 3$; количество узлов переменной $nu := 4$.

Счетчик КЭ $el := 1..ne$.

2. Ввод данных.

Начальные данные КЭ задаем как элементы матриц:

Площади $A_1 := 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $A_2 := 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $A_3 := 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Длина КЭ $L_1 := 0,1 \text{ м}$; $L_2 := 0,2 \text{ м}$; $L_3 := 0,1 \text{ м}$.

Внешние нагрузки задаем в соответствии с направлением по оси X и нумеруем согласно узлу приложения (сосредоточенные силы, приложенные в узле) или КЭ (распределенные нагрузки). Поскольку реакция заделки заведомо неизвестна, считаем ее равной нулю. Если соответствующей нагрузки нет, ее также задаем равной нулю.

$q_1 := 20000 \text{ Н/м}$, $q_2 := 0$, $q_3 := 0$;

$f_1 := 0$, $f_2 := 0$, $f_3 := 0$, $f_4 := 10000 \text{ Н}$.

Модуль упругости $E := 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$.

3. Формируем глобальную матрицу жесткости системы.

Матрица жесткости КЭ:

$$kk := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad K_{el} := kk \cdot \frac{E \cdot A_{el}}{L_{el}}$$

Глобальная матрица жесткости системы формируется из суммы матриц жесткости КЭ со сдвигом на одну ячейку вправо и вниз. Предварительно создадим базовую нулевую матрицу 4×4 :

$i := 1..nu$ $j := 1..nu$ $K0_{i,j} := 0$, $K0$ – базовая нулевая матрица.

Программа-функция герласе создается для вставки подматриц КЭ в матрицу $K0$ со сдвигом на 1 ячейку вправо и вниз; r , s – номер строки и столбца соответственно, с которых начинается вставка подматрицы в матрицу, A – базовая матрица, B – подматрица:

$$\text{Rep}(A, B, r, c) := \left\{ \begin{array}{l} R \leftarrow A \\ \text{for } i \in 1.. \text{rows}(B) \\ \quad \text{for } j \in 1.. \text{cols}(B) \\ \quad \quad R_{i+r-1, j+c-1} \leftarrow B_{i, j} \\ R \end{array} \right.$$

Глобальная матрица системы

$$KT := \sum_{n=1}^{ne} \text{Rep}(K_0, K_n, n, n)$$

Теперь глобальная матрица КТ имеет вид:

$$KT = \begin{pmatrix} 4 \times 10^8 & -4 \times 10^8 & 0 & 0 \\ -4 \times 10^8 & 8 \times 10^8 & -4 \times 10^8 & 0 \\ 0 & -4 \times 10^8 & 1.4 \times 10^9 & -1 \times 10^9 \\ 0 & 0 & -1 \times 10^9 & 1 \times 10^9 \end{pmatrix}$$

Необходимо задать граничные условия системы. Первые две ячейки первой строки относятся к первому узлу (т.е. заделке), в котором перемещения отсутствуют по условию закрепления. Чтобы матрица не стала вырожденной, первой ячейке вместо 0 зададим очень большое число:

$$KT_{1,1} = 10^{20}, \quad KT_{1,2} = 0.$$

4. Задаем вектор узловых внешних нагрузок.

Для этого распределенную нагрузку заменяем ее равнодействующей, приложенной по половине в узлах соответствующего КЭ и складываем с узловой нагрузкой:

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 + \frac{q_1 \cdot L_1}{2} \\ F_2 &= f_2 + \frac{q_1 \cdot L_1}{2} + \frac{q_2 \cdot L_2}{2} \\ F_3 &= f_3 + \frac{q_2 \cdot L_2}{2} + \frac{q_3 \cdot L_3}{2} \\ F_4 &= f_4 + \frac{q_3 \cdot L_3}{2} \end{aligned} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \times 10^3 \\ 1 \times 10^3 \\ 0 \\ 1 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

Иначе вектор узловых нагрузок можно задать функцией:

$$F := \begin{cases} \text{for } i \in 2..nu - 1 \\ F_i \leftarrow f_i + \frac{q_{i-1} \cdot L_{i-1}}{2} + \frac{q_i \cdot L_i}{2} \\ \\ F_1 \leftarrow f_1 + \frac{q_1 \cdot L_1}{2} \\ \\ F_4 \leftarrow f_4 + \frac{q_3 \cdot L_3}{2} \\ \\ F \end{cases}$$

5. Находим перемещения в узлах

$$U := KT^{-1} \cdot F$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.75 \times 10^{-5} \\ 5.25 \times 10^{-5} \\ 6.25 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

6. Относительные деформации

$$\varepsilon(\text{el}) := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ L_{\text{el}} & L_{\text{el}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{\text{el}} \\ U_{\text{el}+1} \end{pmatrix}$$

Полученные значения соответствуют среднему значению на КЭ, поэтому справедливы только для элементов с постоянной нагрузкой. Введем вектор, учитывающий распределенную нагрузку и пересчитаем матрицы относительных деформаций на КЭ:

$$\varepsilon q(\text{el}) := \begin{pmatrix} \frac{q_{\text{el}} \cdot L_{\text{el}}}{2 \cdot E \cdot A_{\text{el}}} \\ \frac{q_{\text{el}} \cdot L_{\text{el}}}{2 \cdot E \cdot A_{\text{el}}} \end{pmatrix} \quad \varepsilon(\text{el}) := \varepsilon(\text{el})_1 + \varepsilon q(\text{el})$$

7. Определяем напряжения из закона Гука и продольные усилия

$$\sigma(\text{el}) := \varepsilon(\text{el}) \cdot E \quad N(\text{el}) := \sigma(\text{el}) \cdot A_{\text{el}}$$

Полученные результаты:

$$\varepsilon(1) = \begin{pmatrix} 3 \times 10^{-4} \\ 2.5 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad \varepsilon(2) = \begin{pmatrix} 1.25 \times 10^{-4} \\ 1.25 \times 10^{-4} \end{pmatrix} \quad \varepsilon(3) = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{-4} \\ 1 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\sigma(1) = \begin{pmatrix} 6 \times 10^7 \\ 5 \times 10^7 \end{pmatrix} \quad \sigma(2) = \begin{pmatrix} 2.5 \times 10^7 \\ 2.5 \times 10^7 \end{pmatrix} \quad \sigma(3) = \begin{pmatrix} 2 \times 10^7 \\ 2 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$N(1) = \begin{pmatrix} 1.2 \times 10^4 \\ 1 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad N(2) = \begin{pmatrix} 1 \times 10^4 \\ 1 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad N(3) = \begin{pmatrix} 1 \times 10^4 \\ 1 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

8. Определим максимальное по модулю напряжение.

Максимальное напряжение в первом элементе (первом узле)

$$\sigma(1) = 60 \text{ МПа.}$$

Условие прочности соблюдается, т.к. $\sigma_{\max} < R$.

9. Построение эпюр.

Задаем в виде ранжированной переменной длину каждого КЭ (шаг 0,01 позволит построить заштрихованную эпюру):

$$x1 := 0, 0.001.. L_1 \quad x2 := 0, 0.001.. L_2 \quad x3 := 0, 0.001.. L_3$$

Для правого предела аргумента графиков зададим параметр:

$$L_T := \sum_{\text{el} = 1} L_{\text{el}}$$

Запишем функции в общем виде. Учитывая то, что все величины определялись как матричные, введем нижний индекс 1:

– продольные усилия и напряжения

$$FN(\text{el}, x) := N(\text{el})_1 - q_{\text{el}} \cdot x \quad F\sigma(\text{el}, x) := \sigma(\text{el})_1 - \frac{q_{\text{el}} \cdot x}{A_{\text{el}}}$$

– относительные продольные деформации и абсолютные перемещения:

$$F\varepsilon(\text{el}, x) := \varepsilon(\text{el})_1 - \frac{q_{\text{el}} \cdot x}{E \cdot A_{\text{el}}} \quad FU(\text{el}, x) := \varepsilon(\text{el})_1 \cdot x - \frac{q_{\text{el}} \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot A_{\text{el}}} + U_{\text{el}}$$

Для того чтобы получилась заштрихованная область на графике, в диалоговом окне Format (закладка Trace – графики) следует заменить тип графика с линейного (lines) на bar.

Продольные силы, Н (рис. П5):

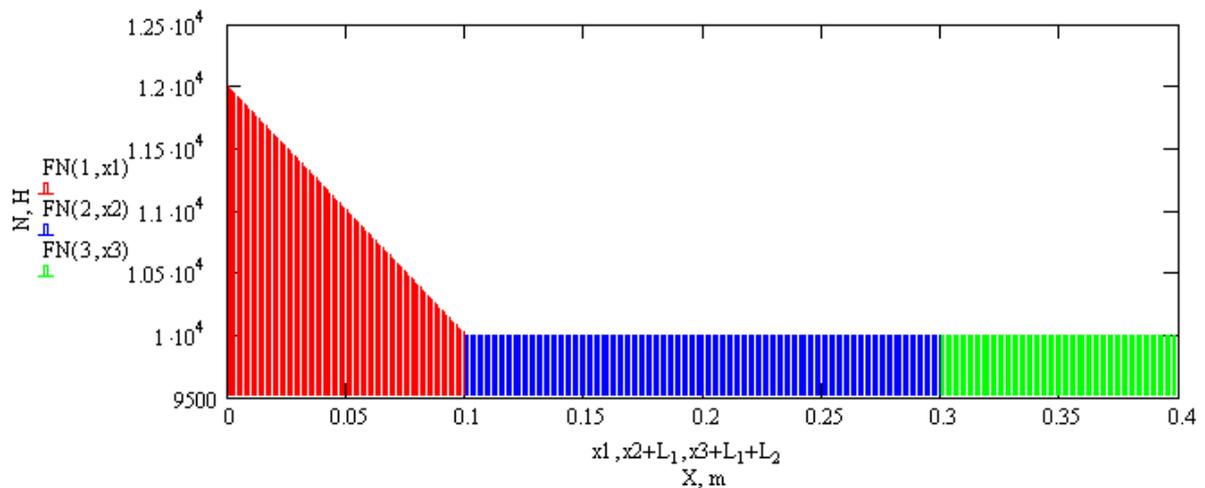


Рис. П5

Напряжения, Па (рис. П6):

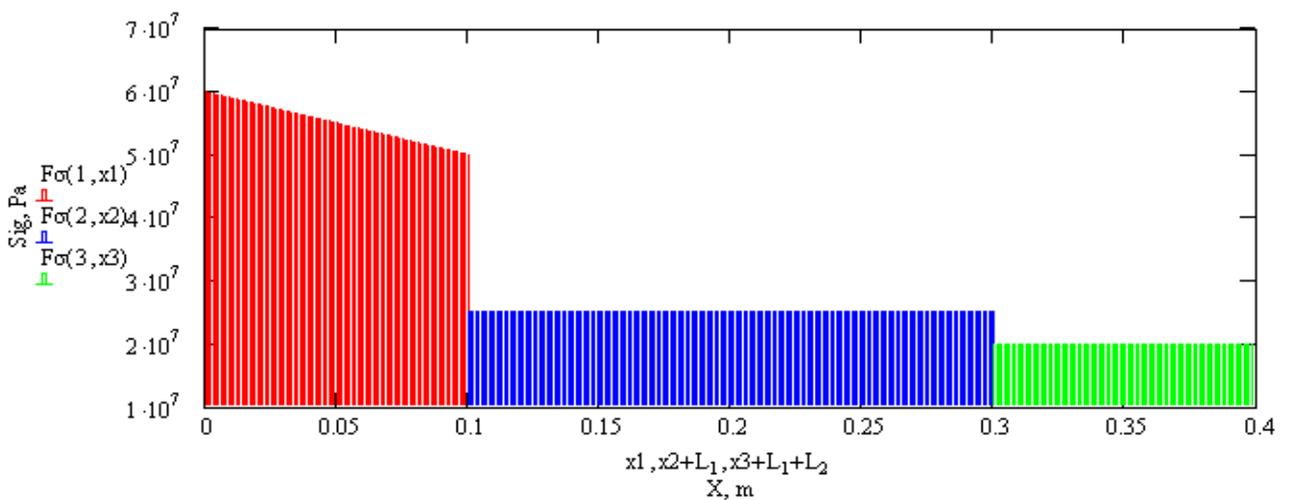


Рис. П6

Относительные деформации (рис. П7):

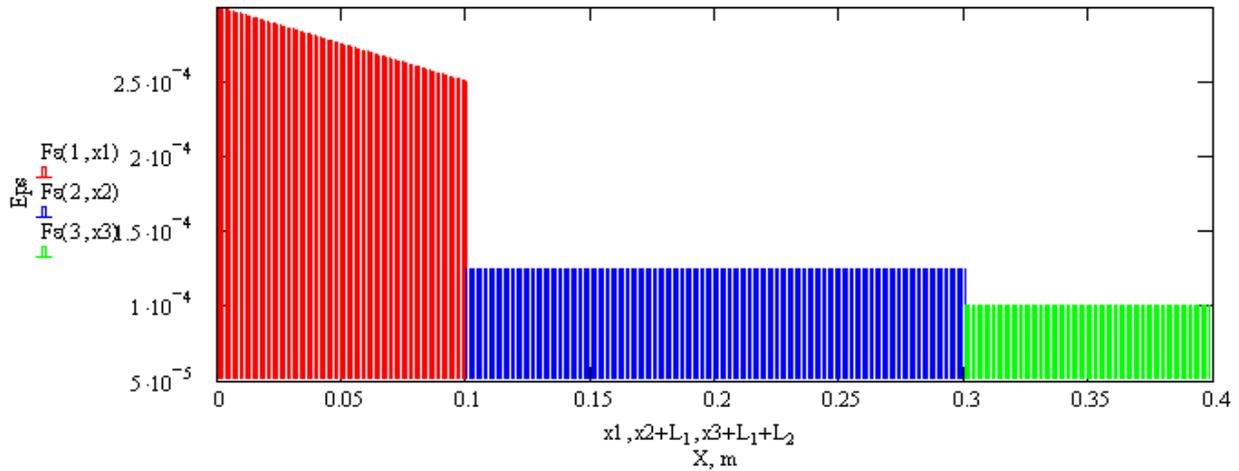


Рис. П7

Абсолютные перемещения, м (рис. П8):

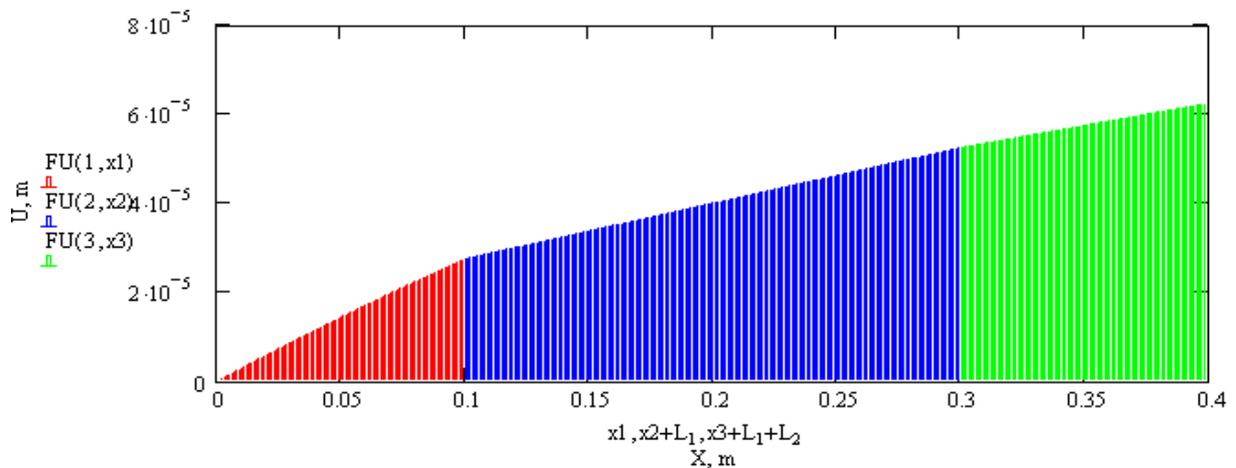


Рис. П8

10. Проверка вычислений.

Чтобы убедиться в правильности расчетов, выполним аналитическую проверку. Достаточно вычислить опорную реакцию и найти в любом сечении линейное перемещение.

Given

$$-R_1 + q_1 \cdot L_1 + f_4 = 0$$

$$\text{Find}(R_1) \rightarrow 12000. R_1 := 12000 \text{ N} \quad N_1 = 1.2 \cdot 10^4$$

Опорная реакция. Перемещение торца стержня (с учетом найденной реакции):

$$\frac{R_1 \cdot L_1}{E A_1} - \frac{q_1 \cdot (L_1)^2}{2 \cdot E A_1} + \frac{(R_1 - q_1 \cdot L_1) \cdot L_2}{E A_2} + \frac{(R_1 - q_1 \cdot L_1) \cdot L_3}{E A_3} = 6.25 \times 10^{-5} \quad U_4 = 6.25 \times 10^{-5}$$

Таким образом, численное решение совпадает с аналитическим.

11. Решение статически неопределимой системы.

Закрепляем с правой стороны стержень дополнительной жесткой заделкой. Ход решения должен быть таким же, но граничные условия системы изменятся. Поскольку стержень теперь жестко закреплен в узлах 1 и 4, необходимо добавить дополнительные граничные условия: $KT_{4,3} = 0$, $KT_{4,4} = 10^{20}$.

Вектор U должен содержать нулевые значения в узлах 1 и 4 (на рис. П9 эпюра перемещений статически неопределимой системы).

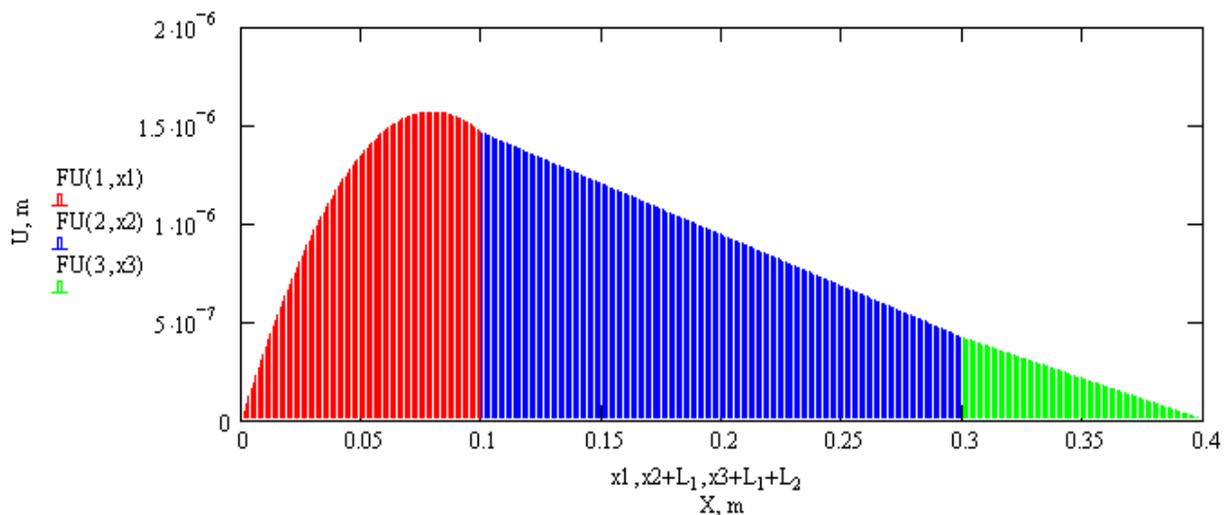


Рис. П9

Пункты 6 и 7 могут быть выполнены по другой методике расчета. Первоначально находим внутренние усилия, основываясь на матричной записи перемещений МКЭ (см. формулу 5), используя ее для одного конечного элемента.

Задаем вектор перемещений КЭ:

$$UE (el) := \begin{pmatrix} U_{el} \\ U_{el+1} \end{pmatrix}$$

Вектор внутренних усилий КЭ (вычитаем наличие распределенной нагрузки на элементе):

$$N(\text{el}) := K_{\text{el}} \cdot UE(\text{el}) - \begin{pmatrix} \frac{q_{\text{el}} \cdot L_{\text{el}}}{2} \\ \frac{q_{\text{el}} \cdot L_{\text{el}}}{2} \end{pmatrix} \quad N(\text{el}) := \overrightarrow{\left[N(\text{el}) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]}$$

Векторное переопределение необходимо, поскольку метод конечных элементов строго использует математическое правило знаков направления векторов, а в сопротивлении материалов правило знаков подчиняется вызванной усилием деформации.

Далее вычисляются напряжения и относительные деформации:

$$\text{sig}(\text{el}) := \frac{N(\text{el})}{A_{\text{el}}} \quad \text{eps}(\text{el}) := \frac{\text{sig}(\text{el})}{E}$$



Во избежание возможных ошибок необходимо пункты 6 и 7 выполнять только одним методом (для случаев статически определимой и статически неопределимой систем).

Пример 3. Расчет методом конечных элементов перемещений и усилий в балке от действия поперечной нагрузки

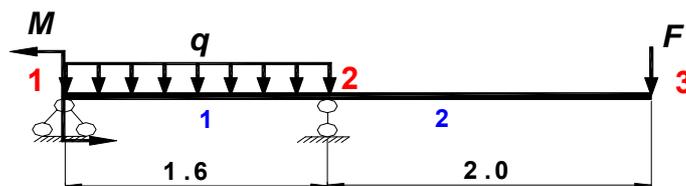


Рис. П10

Система разбивается на 2 конечных элемента (на рис. П10 нумерация показана ниже линии балки). Соответственно узлы нумеруются слева направо от 1 до 3 (на рис. 16 показано выше линии балки). Поперечное сечение – квадрат 0,15 × 0,15 м. Распределенная нагрузка q = 10 кН/м, сила F = 5 кН, момент = 12 кН·м. Модуль упругости E = 2·10⁵ МПа. Расчетное сопротивление R = 200 МПа.

1. Зададим начальные данные.

Формируем все характеристики как элементы матрицы. Следует задать системную переменную отчета начального элемента матрицы с единицы:

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$\text{Количество элементов } ne := 2; \text{ узлов } nu := 3$$

$$\text{Счетчик элементов } el := 1..2$$

Характеристики системы (модуль упругости, Па и момент инерции сечений, м⁴):

$$E := 2 \cdot 10^{11} \quad J := \frac{0.15^4}{12}$$

$$L_1 := 1.6 \quad L_2 := 2 \quad q_1 := -10000 \quad q_2 := 0$$

Характеристики КЭ (знак для распределенной нагрузки задаем в соответствии с направлением положительной оси Y, размерность Н):

Внешняя узловая нагрузка (сосредоточенные силы Н, сосредоточенные моменты, Н/м):

$$f_1 := 0 \quad f_2 := 0 \quad f_3 := -5000 \quad m_1 := 12000 \quad m_2 := 0 \quad m_3 := 0$$

2. Формируем матрицы жесткости КЭ:

$$k(L_e) := \frac{E \cdot J}{L_e^3} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 6 \cdot L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{pmatrix}$$

$$k_{el} := k(L_{el})$$

$$k_1 = \begin{pmatrix} 2.472 \times 10^7 & 1.978 \times 10^7 & -2.472 \times 10^7 & 1.978 \times 10^7 \\ 1.978 \times 10^7 & 2.109 \times 10^7 & -1.978 \times 10^7 & 1.055 \times 10^7 \\ -2.472 \times 10^7 & -1.978 \times 10^7 & 2.472 \times 10^7 & -1.978 \times 10^7 \\ 1.978 \times 10^7 & 1.055 \times 10^7 & -1.978 \times 10^7 & 2.109 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} 1.266 \times 10^7 & 1.266 \times 10^7 & -1.266 \times 10^7 & 1.266 \times 10^7 \\ 1.266 \times 10^7 & 1.688 \times 10^7 & -1.266 \times 10^7 & 8.438 \times 10^6 \\ -1.266 \times 10^7 & -1.266 \times 10^7 & 1.266 \times 10^7 & -1.266 \times 10^7 \\ 1.266 \times 10^7 & 8.438 \times 10^6 & -1.266 \times 10^7 & 1.688 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

3. Формируем глобальную матрицу жесткости системы.

Создаем нулевую базовую матрицу (для двух КЭ она имеет размер 6×6) K_0 :

$$i := 1..2 \cdot nu \quad j := 1..2 \cdot nu \quad K_{0,i,i} := 0$$

На базе нулевой матрицы создаем глобальную матрицу системы. Для этого используем программу вставки подматрицы в матрицу. Каждый КЭ в глобальной матрице смещается относительно предыдущего на две ячейки вправо и две вниз (т.е. матрица 1-го КЭ вставляется в ячейку (1,1), матрица второго КЭ – в ячейку (3,3), при этом ячейки, принадлежащие смежным узлам конечных элементов, складываются):

$$\text{Rep}(A, B, r, c) := \begin{cases} R \leftarrow A \\ \text{for } i \in 1.. \text{rows}(B) \\ \quad \text{for } j \in 1.. \text{cols}(B) \\ \quad \quad R_{i+r-1, j+c-1} \leftarrow B_{i,j} \\ R \end{cases} \quad KT := \sum_{n=1}^{ne} \text{Rep}(K_0, k_n, 2n-1, 2n-1)$$

Окончательно получим:

$$KT = \begin{pmatrix} 2.472 \times 10^7 & 1.978 \times 10^7 & -2.472 \times 10^7 & 1.978 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 1.978 \times 10^7 & 2.109 \times 10^7 & -1.978 \times 10^7 & 1.055 \times 10^7 & 0 & 0 \\ -2.472 \times 10^7 & -1.978 \times 10^7 & 3.738 \times 10^7 & -7.119 \times 10^6 & -1.266 \times 10^7 & 1.266 \times 10^7 \\ 1.978 \times 10^7 & 1.055 \times 10^7 & -7.119 \times 10^6 & 3.797 \times 10^7 & -1.266 \times 10^7 & 8.438 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -1.266 \times 10^7 & -1.266 \times 10^7 & 1.266 \times 10^7 & -1.266 \times 10^7 \\ 0 & 0 & 1.266 \times 10^7 & 8.438 \times 10^6 & -1.266 \times 10^7 & 1.688 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

4. Формируем вектор внешних узловых нагрузок.

Он имеет размерность, равную $2n_u \times 1$, где n_u – количество узлов системы. Каждому узлу задается два вида нагрузки: первая – поперечная сила, вторая – изгибающий момент. Реакции в опорах являются неизвестными. Правило знаков математическое. Векторы сосредоточенных сил и моментов заданы в пункте 1. Следует добавить распределенную нагрузку на элемент, которая должна быть приложена в узлы. Вектор нагрузок от действия поперечной распределенной силы формируется подобно глобальной матрице жесткости с той лишь разницей, что теперь мы имеем дело с матрицей-вектором. Первоначально зададим узловые силу и момент:

$$qf_{el} := \frac{q_{el} \cdot L_{el}}{2} \quad qm_{el} := \frac{q_{el} \cdot (L_{el})^2}{12}$$

Вектор узловых нагрузок Dq (от распределенной поперечной силы) на КЭ (принимается положительно направленная распределенная нагрузка, т.е. направленная вверх, поэтому необходимо в первом пункте учесть действительное направление нагрузки, что и сделано в нашем примере – задан знак «минус»)

$$Dq(el) := \begin{pmatrix} qf_{el} \\ qm_{el} \\ qf_{el} \\ -qm_{el} \end{pmatrix}$$

Чтобы сформировать вектор системы DLq , используем функцию Rep :

$$Q0_i := 0 \quad DLq := \sum_{n=1}^{ne} Repq(Q0, Dq(n), 2n - 1)$$

где $Q0$ – базовый нулевой вектор (счетчик i задан выше и равен 6). Вектор DLq , вектор узловых сосредоточенных сил f и моментов m :

$$DLq = \begin{pmatrix} -8 \times 10^3 \\ -2.133 \times 10^3 \\ -8 \times 10^3 \\ 2.133 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad m = \begin{pmatrix} 1.2 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Создаем матрицу-вектор всех узловых нагрузок:

$$FM := \begin{cases} \text{for } i \in 1..nu \\ \quad \begin{cases} FM_{2 \cdot i - 1} \leftarrow DLq_{2 \cdot i - 1} + f_i \\ FM_{2 \cdot i} \leftarrow DLq_{2 \cdot i} + m_i \end{cases} \\ FM \end{cases} \quad FM = \begin{pmatrix} -8 \times 10^3 \\ 9.867 \times 10^3 \\ -8 \times 10^3 \\ 2.133 \times 10^3 \\ -5 \times 10^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Граничные условия системы.

Необходимо задать граничные условия, которые обнуляют ячейки матрицы жесткости системы, соответствующие узлам с нулевыми угловыми и (или) линейными перемещениями. В нашем примере отсутствуют линейные перемещения в узлах 1 и 2 (за счет шарнирных опор, позволяющих системе угловые перемещения, но запрещающих линейные). Ячейки, которым соответствуют линейные перемещения в узлах 1 и 2: 1-я и 3-я. Тогда (чтобы избежать сингулярной, или вырожденной, матрицы, вместо 0 задаем очень большое число) $KT_{1,1} = 10^{20}$; $KT_{3,3} = 10^{20}$.

6. Вычисление перемещений.

$$U := \text{lsolve}(KT, FM)$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 8.723 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -8.091 \times 10^{-4} \\ -3.198 \times 10^{-3} \\ -1.994 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

7. Вычисление внутренних усилий (поперечных сил и изгибающих моментов).

Расчет внутренних усилий будет основан на условии равновесия (5), однако рассматривается равновесие отдельного КЭ, поэтому вектор {F} представим как вектор внутренних усилий. Введем обозначения:

Du – вектор перемещений КЭ;

RF – вектор узловых нагрузок (в данном случае внутренних, но с математическим правилом знаков направления векторов сил и моментов).

Чтобы сформировать данные векторные матрицы, создадим функцию преобразования вектора перемещений системы U (цифра 4 означает количество перемещений в узлах КЭ):

$$Du(A, r) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..4 \\ Du_i \leftarrow A_{2 \cdot r - 2 + i} \\ Du \end{cases}$$

$$Du(U, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8.723 \times 10^{-4} \\ 0 \\ -8.091 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$Du(U, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -8.091 \times 10^{-4} \\ -3.198 \times 10^{-3} \\ -1.994 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$RF(n) := k_n \cdot Du(U, n) - Dq(n) \quad RF(1) = \begin{pmatrix} 9.25 \times 10^3 \\ 1.2 \times 10^4 \\ 6.75 \times 10^3 \\ -1 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad RF(2) = \begin{pmatrix} 5 \times 10^3 \\ 1 \times 10^4 \\ -5 \times 10^3 \\ 9.805 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

Используя полученные данные, учтем правило знаков в сопротивлении материалов:

$$Q_{el} := \begin{pmatrix} RF(el)_1 \\ -RF(el)_3 \end{pmatrix} \quad M_{el} := \begin{pmatrix} -RF(el)_2 \\ RF(el)_4 \end{pmatrix}$$

Для каждого КЭ получим значения поперечных сил Q и изгибающих моментов M:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 9.25 \times 10^3 \\ -6.75 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} -1.2 \times 10^4 \\ -1 \times 10^4 \end{pmatrix} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 5 \times 10^3 \\ 5 \times 10^3 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 \times 10^4 \\ 9.805 \times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

Значение момента во втором КЭ порядка 10^{-13} означает 0.

8. Аналитическая проверка численных результатов.

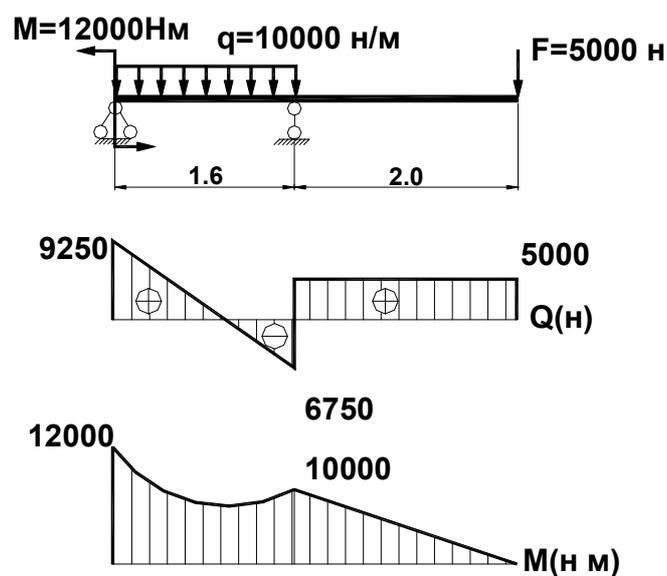


Рис. III

Given

$$-R_1 \cdot 1.6 + 10000 \cdot 1.6 \cdot 0.8 - 5000 \cdot 2 + 12000 = 0$$

$$-5000 \cdot 3.6 - 10000 \cdot 1.6 \cdot 0.8 + R_2 \cdot 1.6 + 12000 = 0$$

Найдем реакции в опорах:

$$\text{Find}(R_1, R_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 9250 \\ 11750 \end{pmatrix} \quad R_1 := 9250 \quad R_2 := 11750$$

Найденные реакции позволяют построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. П11), ординаты которых соответствуют значениям усилий, найденных численно.

Вычислим в узле 3 угловое и линейное перемещения, используя метод начальных параметров, и сравним с численными результатами. Сначала из условия закрепления найдем угловое перемещение первого узла:

Given

$$f_{i0} L_1 + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[\frac{R_1 \cdot (L_1)^3}{6} + \frac{q_1 \cdot (L_1)^4}{24} - \frac{m_1 \cdot (L_1)^2}{2} \right] = 0$$

$$\text{Find}(f_{i0}) \rightarrow 8.77229629629629631 \cdot 10^{-4} \quad U_2 = 8,723 \cdot 10^{-4}$$

Угловое перемещение третьего узла:

$$f_{i0} + \frac{1}{EJ} \cdot \left[\frac{R_1 (L_1 + L_2)^2}{2} - \frac{m_1 (L_1 + L_2)}{1} + \frac{q_1 (L_1 + L_2)^3}{6} - \frac{q_1 (L_2)^3}{6} + \frac{R_2 (L_2)^2}{2} \right] = -1.994 \cdot 10^{-3}$$

$$U_6 = -1.994 \cdot 10^{-3}$$

Линейное перемещение третьего узла:

$$f_{i0}(L_1+L_2) + \frac{1}{EJ} \left[\frac{R1(L_1+L_2)^3}{6} - \frac{m_1(L_1+L_2)^2}{2} + \frac{q_1(L_1+L_2)^4}{24} - \frac{q_1(L_2)^4}{24} + \frac{R2(L_2)^3}{6} \right] = -3.198 \cdot 10^{-3}$$

$$U_5 = -3.198 \cdot 10^{-3}$$

Таким образом, аналитическая проверка показала, что численные результаты полностью верны.

9. Построение эпюр внутренних усилий и перемещений по результатам численного расчета МКЭ.

Создадим два вектора перемещений: вектор линейных перемещений v и вектор угловых перемещений θ :

$$v := \begin{cases} \text{for } i \in 1..nu \\ v_i \leftarrow U_{2:i-1} \\ v \end{cases} \quad \theta := \begin{cases} \text{for } i \in 1..nu \\ \theta_i \leftarrow U_{2:i} \\ \theta \end{cases}$$

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.198 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} 8.723 \times 10^{-4} \\ -8.091 \times 10^{-4} \\ -1.994 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Задаем ранжированные переменные координат КЭ:

$$x1 := 0, 0.02 \cdot L_1 \quad x2 := 0, 0.02 \cdot L_2 \quad LT := \sum_{el=1}^{ne} L_e$$

Составим универсальные формулы-функции для построения эпюр:

– поперечных сил:

$$QF (el, x) := (Q_{el})_1 + q_{el} \cdot x$$

– изгибающих моментов:

$$MF(el, x) := (M_{el})_1 + (Q_{el})_1 \cdot x + \frac{q_{el} \cdot x^2}{2}$$

– угловых перемещений:

$$\theta F(el, x) := \theta_{el} + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[(M_{el})_1 \cdot x + \frac{(Q_{el})_1 \cdot x^2}{2} + \frac{q_{el} \cdot x^3}{6} \right]$$

– линейных перемещений:

$$YF(el, x) := v_{el} + \theta_{el} \cdot x + \frac{1}{E \cdot J} \cdot \left[\frac{(M_{el})_1 \cdot x^2}{2} + \frac{(Q_{el})_1 \cdot x^3}{6} + \frac{q_{el} \cdot x^4}{24} \right]$$

Эпюры внутренних усилий (поперечных сил и изгибающих моментов, рис. П2 и П13). Поперечные силы QF (Н). Изгибающие моменты MF , Нм. Для правильного построения эпюры моментов пределы оси Y меняем: "-" вверху, "+" внизу.

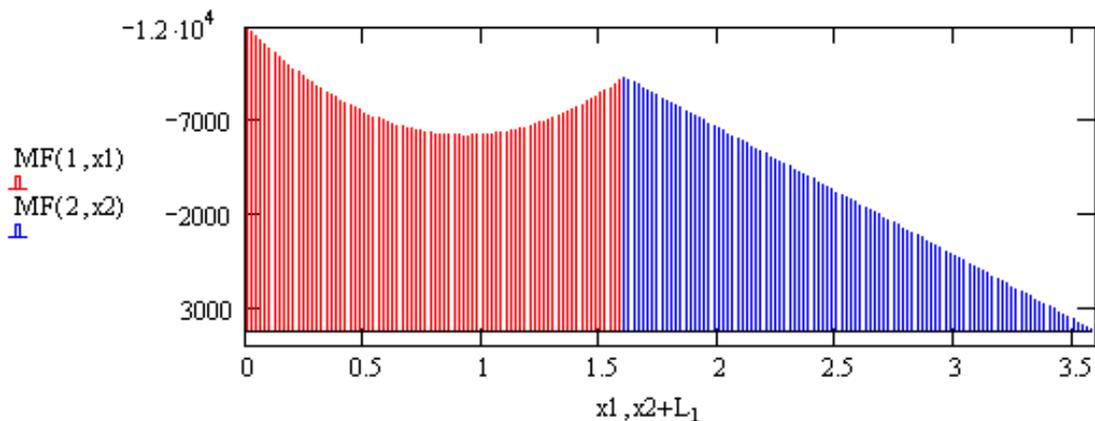


Рис. П12

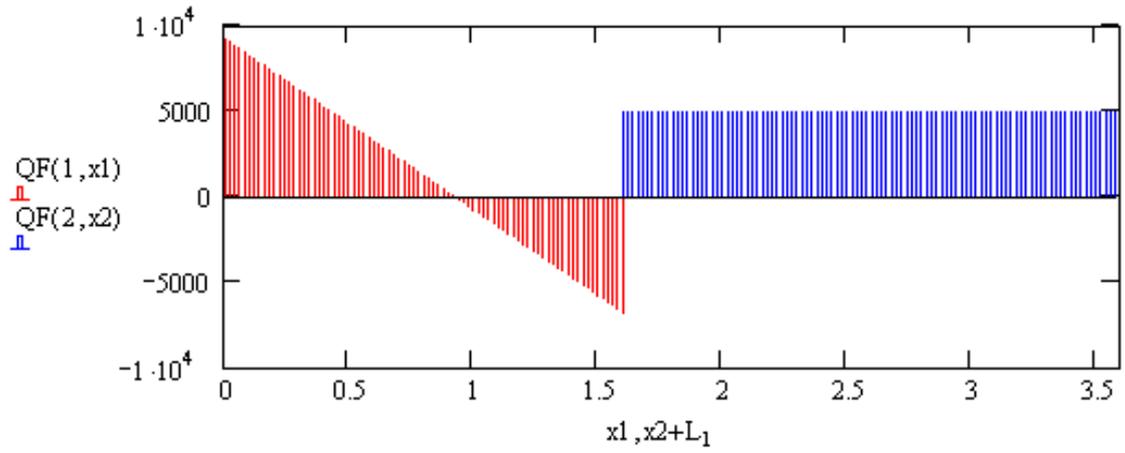


Рис. П13

Эпюры перемещений (рис. П14, П15) – угловые θF (рад) и линейные YF (м).

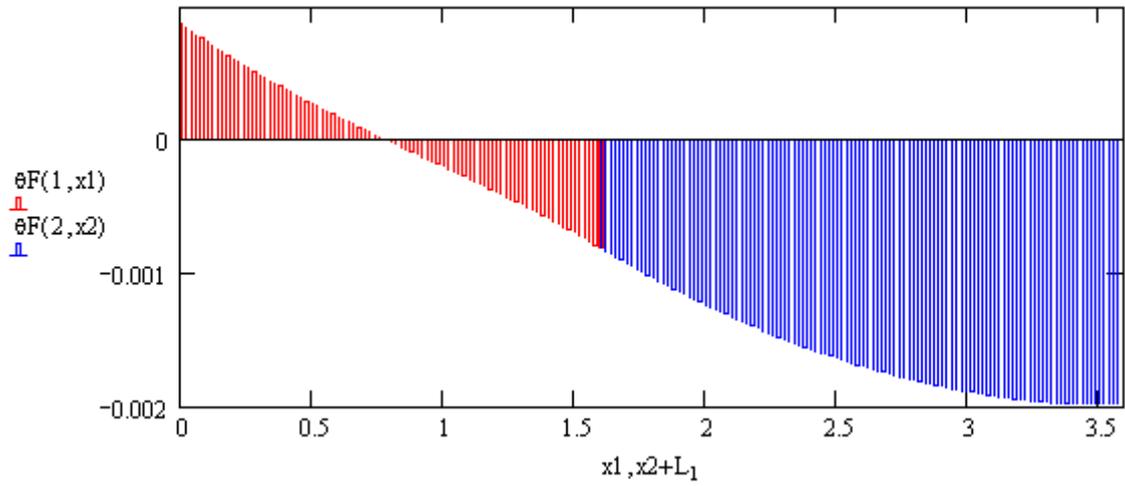


Рис. П14

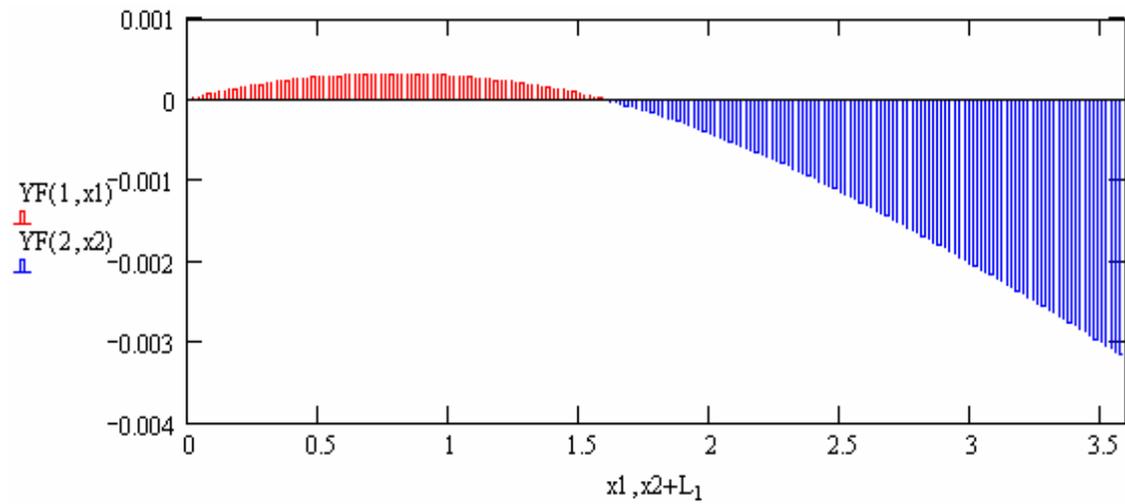


Рис. П15

10. Проверка прочности по максимальному изгибающему моменту.

$$\text{Mom}(el) := \begin{cases} \text{for } i \in 0.. \frac{L_{el}}{0.0001} \\ \text{Mom}_{i+1} \leftarrow |\text{MF}(el, i \cdot 0.0001)| \\ \text{Mom} \end{cases} \quad \begin{aligned} \max(\text{Mom}(1)) &= 1.2 \times 10^4 \\ \max(\text{Mom}(2)) &= 1 \times 10^4 \end{aligned}$$

$$W := \frac{0.15^3}{6} \quad \sigma_{\max} := \frac{\max(\text{Mom}(1))}{W} \quad \sigma_{\max} = 21.33 \text{ МПа}$$

Условие прочности удовлетворяется, поскольку максимальное напряжение не превышает расчетного сопротивления ($R = 200$ МПа).

11. Расчет статически неопределимой системы.

Поскольку аналитическая проверка показала, что методика численного расчета МКЭ верна, приступим к расчету системы статически неопределимой. Для этого добавим дополнительное закрепление (в третий узел жесткую заделку). Вся разница в расчетах состоит в том, что в случае дополнительной опоры добавляются и дополнительные граничные условия: в третьем узле запрещены как угловые, так и линейные перемещения (узел закреплен жестко). Ячейки (5,5) и (6,6) в глобальной матрице жесткости КТ соответственно линейное и угловое перемещения третьего узла.

Покажем эпюру линейных перемещений для дважды статически неопределимой системы (рис. П16):

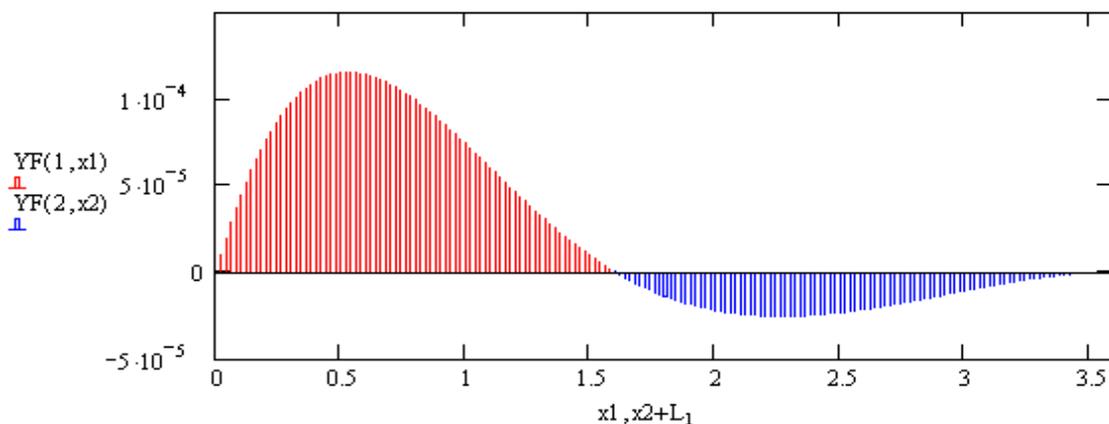


Рис. П16

Граничные условия системы:

$$KT_{1,1} = 10^{20}, \quad KT_{3,3} = 10^{20}, \quad KT_{5,5} = 10^{20}, \quad KT_{6,6} = 10^{20}.$$

Далее ход решения проводится в том же порядке (см. выше пункты 6 – 10, за исключением пункта 8).

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1982. – 272 с.

2. Бахвалов, Н. С. Численные методы: учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 600 с.

3. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

4. Дьяконов, В. MatchCAD 2000: учеб. курс / В. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2001. – 592 с.

5. Херхагер, М. MatchCAD 2000: полное руководство / М. Херхагер, Х. Партолль. – Киев: ВНУ, 2000. – 416 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	4
ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ	10
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	18
ПРИЛОЖЕНИЕ	19
РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	43

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Методические указания

Составители

МАЛОВА Наталья Анатольевна

КВОФИЕ Р. Охене

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой доцент А.Ф. Ковалев

Редактор Л.В. Пукова

Корректор Е.В. Афанасьева

Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 4.10.05.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.

Печать на ризографе. Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,71. Тираж 200 экз.

Заказ №

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.