Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Владимирский государственный университет
Кафедра автомобильного транспорта

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА

Методические указания к самостоятельной работе

В двух частях

Часть 2

Составители
С.И. КОНОВАЛОВ
В.В. САВИН

Владимир 2005

УДК 629. 113. 004. 58(07)
ББК 39.33-082
М74

Рецензент
Кандидат физико-математических наук
профессор Владимирского государственного университета
С.А. Максимов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

М74 **Моделирование** случайных процессов автомобильного транспорта : метод. указания к самостоятельной работе : в 2 ч. Ч. 2. / сост. : С. И. Коновалов, В. В. Савин ; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2004. 52 с.

Содержат описание теоретических и практических вопросов моделирования случайных процессов автомобильного транспорта методом статистического имитационного моделирования. Приведены контрольные задания к самостоятельной работе, порядок и примеры выполнения, программы решения задач на ЭВМ.

Предназначены для студентов специальностей 150200 - автомобили и автомобильное хозяйство и 230100 – сервис транспортных и технологических машин и оборудования всех форм обучения.

Табл. 9. Ил. 18. Библиогр.: 6 назв.

УДК 692. 113. 004. 58(07)
ББК 39.33-082

Введение

Первая часть предлагаемого издания была посвящена общим теоретическим и практическим вопросам моделирования случайных процессов автомобильного транспорта.

Вторая часть рассматривает моделирование случайных процессов автомобильного транспорта методом статического имитационного моделирования.

При решении многих задач автомобильного транспорта, связанных с обоснованием и выбором рациональной организации перевозок, обслуживания и ремонта приходится сталкиваться с ситуацией, когда исследуемая система оказывается настолько сложна, что аналитическое решение задачи ввиду значительных математических трудностей практически невозможно. Проведение экспериментальных исследований или натурных испытаний требует больших затрат времени и средств или может быть вообще исключено по определённым причинам.

Одной из эффективных мер по преодолению указанных трудностей является применение методов имитационного моделирования. На автомобильном транспорте имитационные модели применяют для исследования:

- организационной производственной структуры автотранспортного предприятия;
- управления производством по ремонту и обслуживанию автомобилей;
- организации работы технической помощи автомобилям на линии;
- управления складскими запасами автомобильных запасных частей и т.д.

1. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основным преимуществом имитационных моделей по сравнению с аналитическими является возможность решать задачи исключительной сложности с учетом случайных факторов.

Метод имитационного моделирования удается успешно реализовать с помощью ЭВМ. Однако использование ЭВМ для целей имитационного моделирования требует умения разработки моделирующего алгоритма, который должен воспроизвести формальный процесс сложной системы. Моделирующий алгоритм позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях производственного процесса в произвольный момент времени.

Разработка моделирующего алгоритма невозможна без глубокого знания моделируемого объекта и его функционирования, причем в процессе разработки происходит углубление и уточнение понимания объекта. Поэтому процесс разработки модели имеет и самостоятельное значение, так как позволяет обнаружить недостатки, вскрыть резервы, открыть новые возможности объекта еще до моделирования и дать важные практические рекомендации по совершенствованию объекта и повышению эффективности его функционирования.

Одним из преимуществ моделирования производственных процессов является возможность рассмотрения переменных факторов во всем диапазоне их значений.

Имитационное моделирование, при котором воспроизводятся случайные явления, называется *статистическим имитационным моделированием*, которое базируется на численном статистическом методе решения математических задач, называемом методом Монте-Карло.

1.1. Основные этапы статистического моделирования

Метод статистического моделирования обычно включает следующие этапы:

1. Вначале дается описание функционирования системы, т.е. описание задач, стоящих перед системой, уточняются исходные (отправные) положения; рассматриваются ограничения; выделяются подпроцессы; намеча-

ются характеристики, которые требуется получить на выходе, и выбираются целевая функция или критерий, с помощью которых будет производиться оценка эффективности функционирования системы.

2. Производится сбор и обработка информации, характеризующей работу подпроцессов системы и всего процесса в целом.

3. Производится формализация работы системы, т.е. выделяются главные факторы и исключаются второстепенные, которыми можно пренебречь. На основе этого составляются отвечающая система и адекватная математическая модель процесса.

4. Составляется алгоритм принятой математической модели в виде операторной блок-схемы.

5. Составляется на алгоритмическом языке программа для многократного воспроизведения на ЭВМ процесса при числе реализаций, обеспечивающих заданную точность.

6. Производится моделирование работы системы на ЭВМ и выдача на печать основных результатов моделирования. Обычно при этом получают:

а) точечные оценки, т.е. математическое ожидание, дисперсию для каждого из подпроцессов и по всему процессу в целом;

б) интервальные оценки, т.е. доверительные интервалы и доверительные полосы разброса среднего результата для каждого из подпроцессов и всего процесса в целом;

в) кривые уравнений регрессии, характеризующие зависимость исследуемых параметров от различных аргументов.

Кроме перечисленного, могут вычисляться специальные характеристики, присущие рассматриваемому явлению. Все это позволяет прогнозировать течение процесса и, следовательно, введением соответствующих поправок оптимизировать его течение.

1.2. Общие положения метода Монте-Карло

Если случайный процесс, протекающий в системе, происходит под действием произвольного потока событий, то его математическую модель построить трудно. В этом случае можно использовать метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), который основан на законе больших чисел.

В общем виде закон больших чисел (теорема Чебышева) записывается так:

$$\lim P\left(\left|\frac{\sum x_i}{N} - M(x)\right| < \varepsilon\right) \to 1,$$

где P – вероятность сложного события;

$M(x) = \bar{X}$ – математическое ожидание случайной величины;

$\frac{\sum x_i}{N}$ – среднее арифметическое наблюдаемых значений;

N – число испытаний (число реализаций);

ε – сколь угодно малое положительное число.

Теорема Чебышева формулируется так: при большом числе испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к её математическому ожиданию.

При переходе к относительным (без размерности) параметрам имеем частный случай закона больших чисел (теорема Бернулли), который аналитически записывается так:

$$\lim P\left(\left|\frac{m_i^*}{N} - P\right| < \varepsilon\right) \to 1,$$

где m_i^* – число появления события (частота);

$P_i^* = \frac{m_i^*}{N}$ – частость события;

P – вероятность события.

Теорема Бернулли формулируется так: при большом числе испытаний частость события сходится по вероятности к вероятности события.

Графически закон больших чисел (и его частный случай) можно представить следующим рисунком (рис. 1).

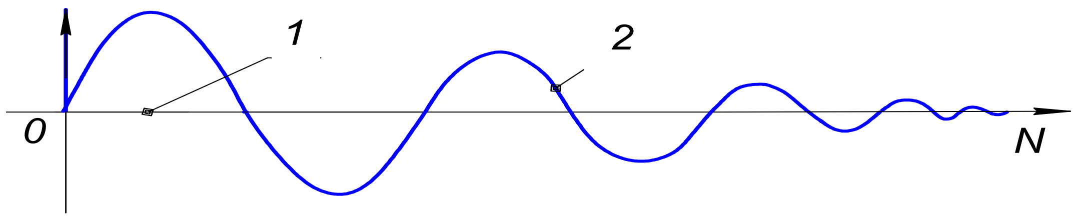


Рис. 1. Графическое изображение закона больших чисел:
1 – математическое ожидание случайной величины *M(x)* (вероятность события *P*);
2 – среднее арифметическое наблюдаемых значений *M*(x)* (частость события P_i^*)

Из рис. 1 следует, что по мере увеличения числа испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины *M*(x)* и частость события P_i^* асимптотически и неограниченно приближается к математическому ожиданию *M(x)* и вероятности события *P*.

Это означает, что если произвести большое число испытаний, то получаемые статистические характеристики (средние значения) могут рассматриваться как истинные. Указанное положение и составляет математическую основу метода статистического моделирования, т.е. метода Монте-Карло.

Итак, идея метода Монте-Карло проста и состоит в следующем: производится «розыгрыш» процесса (явления) с помощью специально организованной процедуры, дающей случайный результат. Каждый «розыгрыш» дает новую, отличную от других, реализацию исследуемого процесса. Если таких реализаций проведено много, то это множество реализаций можно использовать как статистический материал, обработав который методами математической статистики, получаем интересующие характеристики: вероятности состояний, математическое ожидание и т.д.

1.3. Моделирование случайных чисел

Генерирование случайных чисел

При моделировании процессов автомобильного транспорта наиболее простой и распространенной является равномерная случайная последовательность чисел в интервале от 0 до 1.

Для получения (генерирования) равномерно распределенных случайных чисел существует несколько методов:

а) если моделирование осуществляется вручную (без помощи ЭВМ), то для получения случайных чисел от 0 до 1 используют таблицы случайных чисел, составленные с помощью какого-либо генератора случайных чисел, например рулетки, аппарата жеребьевки и т.д.;

б) если расчет ведется с использованием ЭВМ, то она сама выдает случайные числа с помощью генератора случайных чисел.

При генерировании случайных чисел, находящихся в интервале (A, B), на алгоритмическом языке «Бейсик» используется выражение (B - A) RND + A.

<u>*Пример*</u>

FOR I = 1 TO 4: X = (7 - 5) RND + 5: PRINT X: NEXT

Результаты, выведенные на терминал:

5,08146; 6,05659; 5,12876; 5,31561;

в) метод использования специальных программ.

Алгоритм и блок-схема (рис. 2) одной из специальных программ для вычисления случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0, 1), могут иметь следующее содержание.

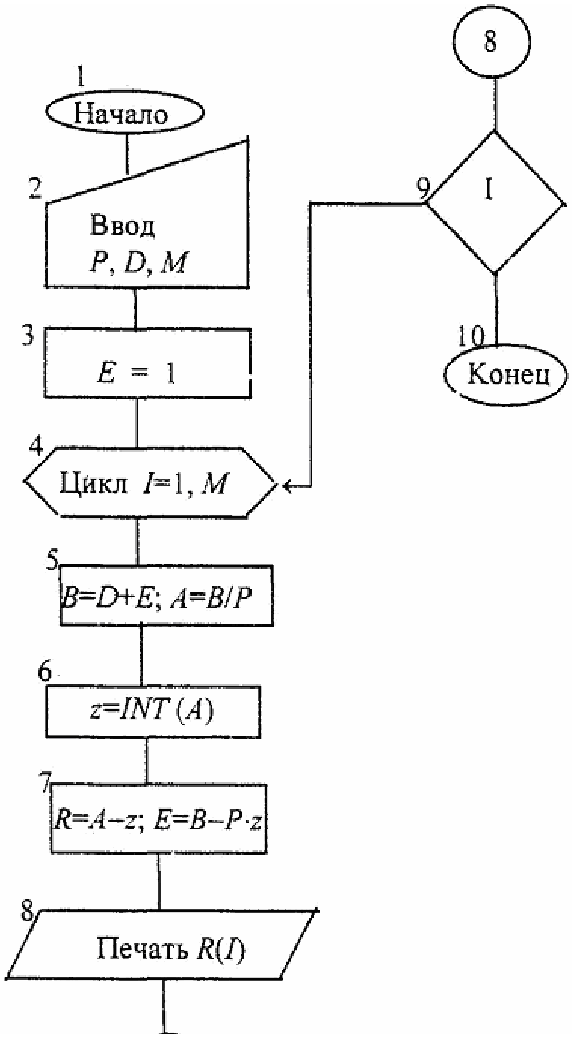


Рис. 2. Блок-схема алгоритма моделирования равномерно распределенных случайных чисел в интервале (0, 1)

1. Выбирается произвольная пара действительных чисел P и D.

2. Задается число $E = I$.

3. Вычисляются вспомогательные числа: $B = D + E$ и $A = B / P$.

4. Принимается за случайное число R дробная часть числа A.

5. Вычисляется случайный множитель $E = B - PZ$, где Z – целая часть числа A.

6. Процесс повторяется, начиная с 2-го пункта.

7. В результате выполнения алгоритма получается бесконечная последовательность чисел, которая рассматривается как случайная, равномерно распределенная в интервале (0, 1).

Программа работы на ЭВМ

Программа вычисления случайных чисел

```
PRINT “ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ”
PRINT “ВВЕДИТЕ ЧИСЛА P, D, M”
PRINT “P, D - ЛЮБАЯ ПАРА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ”
INPUT “M - ТРЕБУЕМОЕ КОЛИЧЕСТВО СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН”; P, D, M
PRINT “P = ”; P; “D = ”; “M = ”; M
E = 1
PRINT “РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЁННЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА”
```

```
FOR I = 1 TO M
B = D * E: A = B / P: Z = INT(A): R( I ) = A - Z: E = B - P * Z
PRINT "R("; I;") ="; R( I )
NEXT
END
```

В процессе работы по программе задаются следующие исходные данные: P и D – пара действительных чисел; M – требуемое количество случайных чисел.

В результате работы по программе получим:

– исходные данные

$P = 5.9$; $B = 4.5$; $M = 8$;

– равномерно распределенные случайные числа

$R(1) = .762712$; $R(2) = 432204$; $R(3) = .944916$; $R(4) = .252123$

$R(5) = .134554$; $R(6) = .605492$; $R(7) = .724714$; $R(8) = .261211$.

Моделирование дискретной случайной величины

Рассмотрим порядок моделирования дискретной случайной величины на примере.

Пример. Задана дискретная случайная величина X своим рядом распределения (табл.1).

Таблица 1

№ п/п	Параметр	Обозначение	Значение		
1	Частные значения случайной величины	X_i	3	5	7
2	Вероятности, отвечающие значениям случайной величины	$P(x)_i$	0,26	0,40	0,34
3	Интегральная функция	$F(x)_i$	0,26	0,66	1,00

Требуется

Промоделировать случайную величину, отвечающую этому закону распределения.

Решение

Строим график интегральной функции дискретной случайной величины. Для этого по оси абсцисс откладываем частные значения случайной величины X_i, а по оси ординат – отвечающие им вероятности $F(x)_i = \sum P(x)_i$ (рис. 3).

При этом мы понимаем, что значениям $P(x)$ соответствуют:

$Y_1 = F(x)_1$ – от 0 до 0,26 включительно соответствует $X_1 = 3$;

$Y_2 = F(x)_2$ – от 0,26 до 0,66, соответствует $X_2 = 5$;

$Y_3 = F(x)_3$ – от 0,66 до 1,00, соответствует $X_3 = 7$.

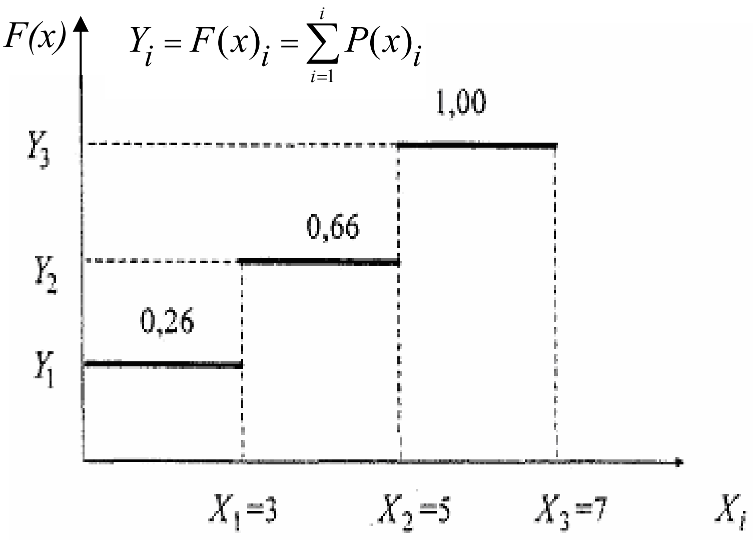


Рис. 3. График функции распределения вероятностей дискретной случайной величины

Воспользуемся случайными равномерно распределенными числами в интервале $(0 \le R_i \le 1)$, запишем их в первую строку табл. 2. Каждому из указанных чисел отвечает вполне определенное значение X_i (вторая строка табл. 2).

Таблица 2

R_i	0,10	0,09	0,73	0,25	0,33	0,76	0,52	0,01
X_i	3,0	3,0	7,0	3,0	5,0	7,0	5,0	3,0

Алгоритм моделирования дискретной случайной величины, заданной своим рядом распределения, содержит следующие действия.

1. Вычисляем значения накопленных вероятностей по формуле

$$F(x)_i = \sum_{i=1}^{i} P(x_i)$$

и строим отвечающий им график.

2. Устанавливаем значения случайных чисел, равномерно распределенных в интервале $(0 \le R_i \le 1)$.

3. Для каждого из чисел по графику $F(x)$ (см. рис. 3) находим отвечающие им значения X_i, представляющие отдельные реализации данной случайной величины X.

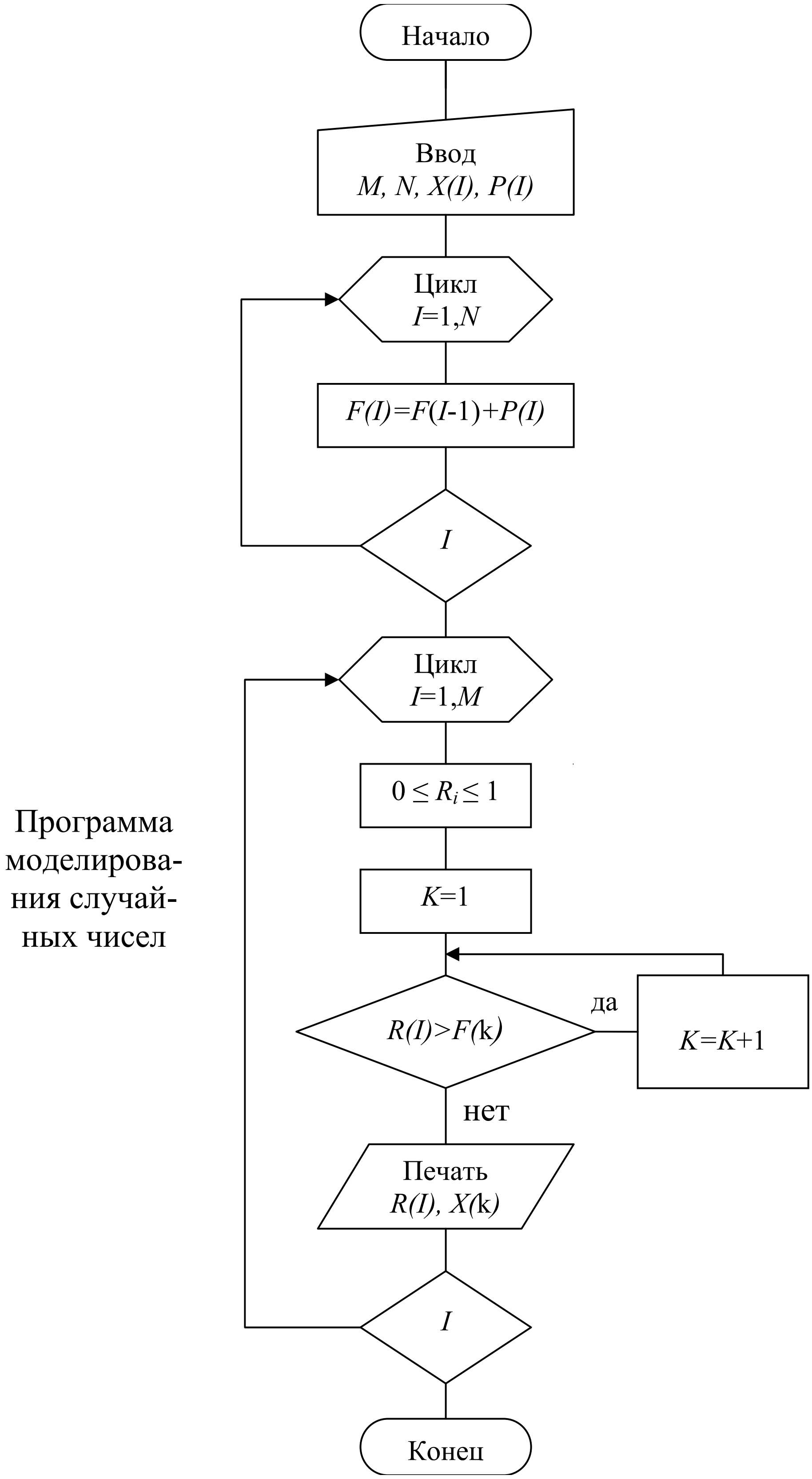


Рис. 4. Блок-схема алгоритма моделирования дискретной случайной величины

Если дискретная величина задана достаточно длинным рядом распределения и если при этом требуется, чтобы результат вычислений мало отличался от истинного значения, то в этом случае от ручного моделирования переходят к машинному, т.е. вычисления ведут с помощью ЭВМ.

Блок-схема алгоритма решения такой задачи приведена на рис. 4: N – число значений дискретного признака; M – число разыгрываемых случайных величин; *X(I)* – значения признака; *P(I)* – вероятность появления признака; *F(I)* – значение интегральной функции; *R(I)* – значение случайной величины.

Программа моделирования дискретной случайной величины, заданной своим законом распределения, на алгоритмическом языке «Бейсик» может иметь вид.

```
OPEN ‘LP: ’ FOR OUTPUT AS FILE 1
 ‘МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ
PRINT “ВВЕДИТЕ N, M”
PRINT ”N - ЧИСЛО ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО ПРИЗНАКА”
INPUT “M - ЧИСЛО РАЗЫГРЫВАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН’; N, M
DIM X(N), P(N), F(N)
PRINT # 1, ‘ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ’
PRINT # 1, ‘M =’, ‘N =’, N
PRINT ‘X(i) - ЗНАЧЕНИЕ ПРИЗНАКА’
PRINT “P( i ) - ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ПРИЗНАКА”
FOR I = 1 TO N
INPUT ‘ВВЕДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ X(’ I ’), P(’ I ’)’; X( I ), P( I )
PRINT # 1, ‘X(’I ’) = ‘X(I), ‘P(’I ’) = ‘P(I)
NEXT
PRINT # 1, ‘РЕЗУЛЬТАТ ВЫЧИСЛЕНИЙ’
F(0) = 0: FOR I = 1 TO N: F( I ) = F(I - 1) + P( I ): NEXT
К = 1: FOR I = 1 TO M: R( I ) = RND:
WHILE R( I ) > F( K ): K = K + 1: WEND
PRINT # 1, “R(“;I; “) = “;R(I); “X(“;I; “) = “;X(K)
NEXT
END
```

Результаты счета по программе при известном законе распределения дискретной случайной величины могут иметь вид:

- исходные данные:

$N = 3$;	$M = 5$
$X(1) = 2$	$P(1) = .3$
$X(2) = 5$	$P(2) = .4$
$X(3) = 8$	$P(3) = .3$

- результаты вычислений

$R(1) = .0407319$ $X(1) = 2$
$R(2) = .528293$ $X(2) = 5$
$R(3) = .803172$ $X(3) = 8$
$R(4) = .0643915$ $X(4) = 2$
$R(5) = .157805$ $X(5) = 2$

Моделирование непрерывных случайных величин

Если случайная величина T непрерывна и известна плотность вероятности распределения ее $f(t)$, то моделирование значений T осуществляется следующей процедурой:

а) перейти от плотности вероятности f(t) к функции распределения F(t) по формуле

$$F(t) = \int_0^t f(t)dt;$$

б) затем найти для функции F обратную ей функцию F^{-1};

в) разыграть случайное число R_i от 0 до 1 и взять от него эту обратную функцию

$T_i = F^{-1}.(R_i)$.

Доказывается, что случайная величина T имеет как раз нужное нам распределение. Графически процедура розыгрыша случайной величины T_i имеет вид, представленный на рис. 5.

Разыгрывается случайное число R_i от 0 до 1 и для него ищется случайная величина T_i при которой $T_i = F^{-1}.(R_i)$ (на рис. 5 показано стрелкой).

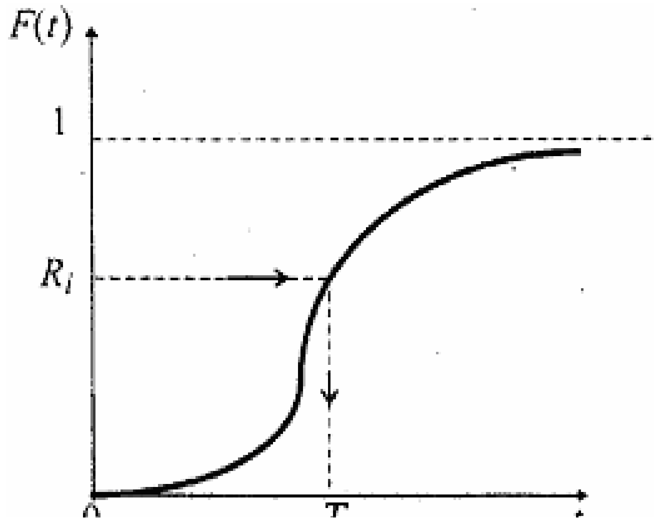


Рис. 5. График функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Пример. Пусть требуется разыграть случайную величину T, которая имеет закон распределения $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ - показательный закон. Здесь T – случайная величина (интервал времени между приходящими заявками на обслуживание, время обслуживания одной заявки и т.д.); $f(t)$ – плотность распределения случайной величины.

1. Найдем функцию распределения *F(t)*

$$F(t)=\int_0^t f(t)dt=\int_0^t \lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^t=1-e^{-\lambda t}.$$

При $t = 0$ $F(t) = 0$;

$t = \infty$ $F(t) = 1$;

$F(t) = 0 \ldots 1 = R_i$.

2. Вычислим обратную функцию F^{-1} и по ней определим случайную величину T_i

Так как $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = y$, то $e^{-\lambda t} = 1 - y$.

Логарифмируя последнее выражение, получим $-\lambda t = \ln(1 - y)$, откуда

$t=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$ или $T_i=-\frac{1}{\lambda}\ln\left(1-y_i\right)$, где $y_i=0...1=R_i$.

Алгоритмы моделирования случайных величин, распределенных по основным вероятностным законам, приведены в табл. 3.

Таблица 3

Вероятностный закон	Плотность вероятности закона	Алгоритм
Показательный закон	$f(t) = \lambda\ e^{-\lambda t}$	$T_i=-\frac{1}{\lambda}\ln y_i$
Закон Релея	$f(t)=2\lambda^2 t e^{-\left(\lambda * t\right)^2}$	$T_i=\frac{1}{\lambda}\sqrt{-\ln y_i}$
Закон Вейбулла	$f(t)=n\lambda^n t^{\left(n-1\right)} e^{-\left(\lambda * t\right)^n}$	$T_i=\frac{1}{\lambda}\sqrt[n]{-\ln y_i}$
Закон равномерной плотности	$F(x) = 1 / (b - a)$	$X_i = (b - a) * y_i + a$
Нормальный закон	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-\left(x-\bar{x}\right)^2}{2\sigma^2}}$	$X_i = \arg Q\ (Y_i)\ \sigma(X) + X_{\text{СР}}$

Программа моделирования непрерывной случайной величины, распределенной по закону Вейбулла, и результаты счета по ней могут иметь следующий вид.

```
PRINT #1, 'ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ"
PRINT #1, 'N – ПАРАМЕТР ЗАКОНА"
```

```
PRINT #1, ‘L – ИНТЕНСИВНОСТЬ”
PRINT #1, ‘M – КОЛИЧЕСТВО РАЗЫГРЫВАЕМЫХ ВЕЛИЧИН”
INPUT “ВВЕДИТЕ N, E, M”; N, L, M
PRINT #1, ‘N =‘; N, ‘L = ‘L; ‘M =‘ ; M
PRINT #1, ‘РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ’
FOR I = 1 TO M: R(I) = RND: T(I) = 1 / L*(-LOG(R(I)) ^ (1 / N)
PRINT #1, ‘R(’I ’) = ‘R(’I ’); ‘T(’I ’) = ‘T(’I ’)
NEXT: END
```

Исходные данные:

N – параметр закона; *L* – интенсивность; *M* – количество разыгрываемых величин

N = 2; *L* =2; *M* = 10.

Результаты вычислений:

R(1) = .0407319	*T*(1) = .894531
R(2) = .528293	*T*(2) = .399407
R(3) = .803172	*T*(3) = .234087
R(4) = .0643915	*T*(4) = .828066
R(5) = 157805	*T*(5) = .679411
R(6) = .367305	*T*(6) = .500391
R(7) = .783585	*T*(7) = .246919
R(8) = .395769	*T*(8) = .481384
R(9) = .322346	*T*(9) = .532006
R(10) = .372165	*T*(10) = .497096

1.4. Задания к выполнению самостоятельной работы

Записать алгоритм и программу моделирования случайных чисел. Исходные данные к моделированию должны соответствовать варианту заданий. Ввести программу в ЭВМ. Вывести на экран дисплея значения случайных величин, распределенных по соответствующему закону распределения.

Варианты заданий

А. Получить 50 значений дискретной случайной величины, распределенной по закону равномерной плотности (см. табл. 3). Значения *x и P(x)* взять из табл. 4.

Таблица 4

Вариант	Харарактеристика	Значение					
1	X_i	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
	$P(x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
2	X_i	3,0	5,0	7,0	9,0	11,0	13,0
	$P(x_i)$	0,10	0,15	0,25	0,20	0,15	0,15
3	X_i	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	-
	$P(x_i)$	0,15	0,35	0,20	0,20	0,10	-
4	X_i	2,0	3,0	4,0	5,0	-	-
	$P(x_i)$	0,3	0,2	0,1	0,4	-	-
5	X_i	2,0	4,0	6,0	8,0	-	-
	$P(x_i)$	0,25	0,35	0,15	0,25	-	-

Б. Получить 20 значений непрерывной случайной величины, распределенной по закону

$$f(t) = n\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda^n t^n} .$$

Значения n и λ для соответствующего варианта взять из табл. 5

Таблица 5

	Значения по вариантам									
Величина	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	1	1	1	1	2	2	2	2,5	3,0	3,5
λ	0,5	1,5	2,5	3,5	2,0	3,0	4,0	0,5	1,0	1,5

Контрольные вопросы

1. Перечислите преимущества имитационного моделирования.
2. Назовите основные этапы статистического моделирования.
3. Что понимается под точечной и интервальной оценкой случайной величины?
4. В чем сущность метода Монте-Карло?
5. Каковы способы генерирования равномерно распределенной случайной величины?
6. Каковы особенности моделирования дискретной случайной величины?
7. Каковы особенности моделирования непрерывной случайной величины?

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Рассмотренные выше способы моделирования различных случайных величин позволяют применять метод Монте-Карло для решения различных инженерных и экономических задач. Так, например, его можно использовать для определения числовых характеристик функционирования сложных стохастических процессов. Часто метод Монте-Карло применяют для решения задач теории массового обслуживания, не попадающих под марковский случайный процесс.

2.1. Частные вопросы моделирования случайных процессов систем массового обслуживания

При исследовании характеристик функционирования систем массового обслуживания (СМО) методами статистического моделирования часто приходится разыгрывать интервалы времени прибытия заявок на обслуживание и время обслуживания заявки, распределенные по тому или иному вероятностному закону.

Для реализации этих процессов определяют одним из известных методов равномерно распределенные случайные числа $y_i = R_i$ в интервале от 0 до 1.

Далее определяем интервалы времени прибытия заявок на СМО по выражению

$$T_i^* = F^{-1}(R_i^*).$$

и время обслуживания i-й заявки

$$T_i^{**} = F^{-1}(R_i^{**}),$$

Предположим, что СМО имеет два канала обслуживания и два места в очереди. Для данной СМО в зависимости от величин T_i^* и T_i^{**}, можем иметь четыре варианта ее функционирования.

1-й вариант. Предположим, что при моделировании случайных моментов поступления требований на обслуживание и случайного времени обслуживания заявок были получены следующие значения, в минутах:

$T^*_{i\text{заявок}}$ = 0; 25; 30; 40; 50 и т.д.

$T^{**}_{i\text{обсл}}$ = 20; 22; 25; 30 и т.д.

Полученные значения времени отложим на соответствующих осях (рис. 6).

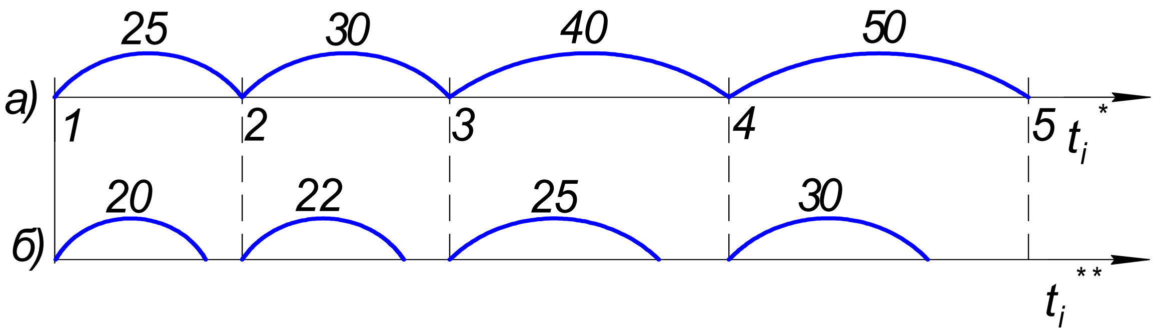


Рис. 6. Схема работы СМО: а – время поступления заявок;
б – время обслуживания заявок

При этих условиях будет работать только первый канал. Второй канал будет простаивать без работы, и заявок, ожидающих в очереди, не будет.

2-й вариант. Предположим, что при моделировании случайных моментов поступления заявок и случайного времени обслуживания были получены следующие значения, в минутах:

$T^{*}_{i\text{заявок}}$ = 0; 20; 18; 15 и т.д.

$T^{**}_{i\text{обс}}$ = 25; 30; 17 и т.д.

Полученные значения времени отложим на соответствующих осях (рис. 7).

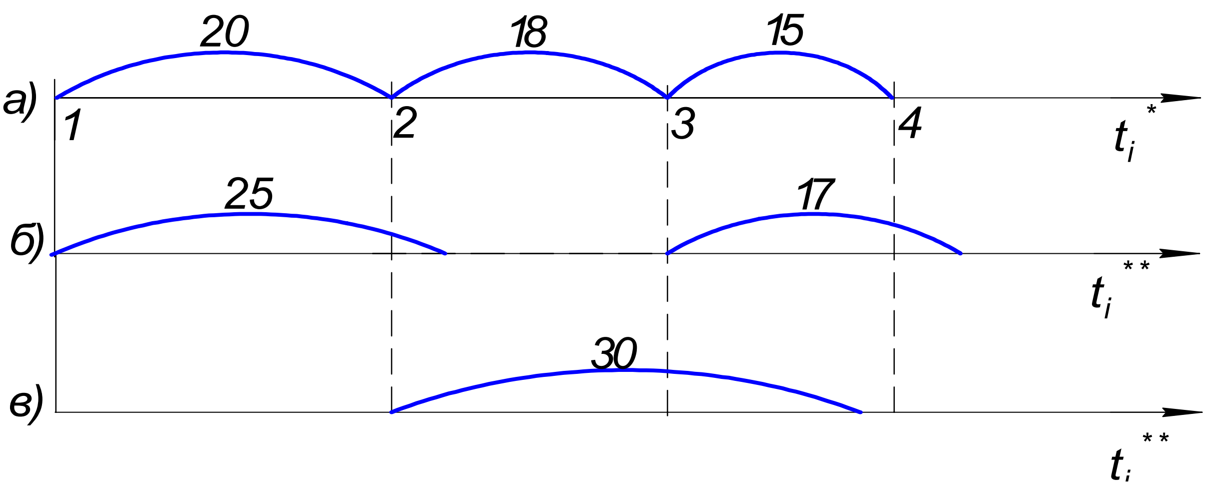


Рис. 7. Схема работы СМО: а – время поступления заявок;
б – время обслуживания заявок первым каналом;
в – время обслуживания заявок вторым каналом

При этих условиях, как видно из рис. 7, будут работать оба канала. Заявок, ожидавших в очереди, не будет.

3-й вариант. Предположим, что при моделировании случайных моментов поступления заявок и времени обслуживания были получены следующие значения:

$T^{*}_{i\text{заявок}}$ = 0; 20; 50; 60 мин и т.д.

$T^{**}_{i\text{обс}}$ = 3 ч; 2 ч.; 1 ч 20 мин; 1 ч 40 мин и т.д.

Полученные числа отложим на соответствующих осях (рис. 8).

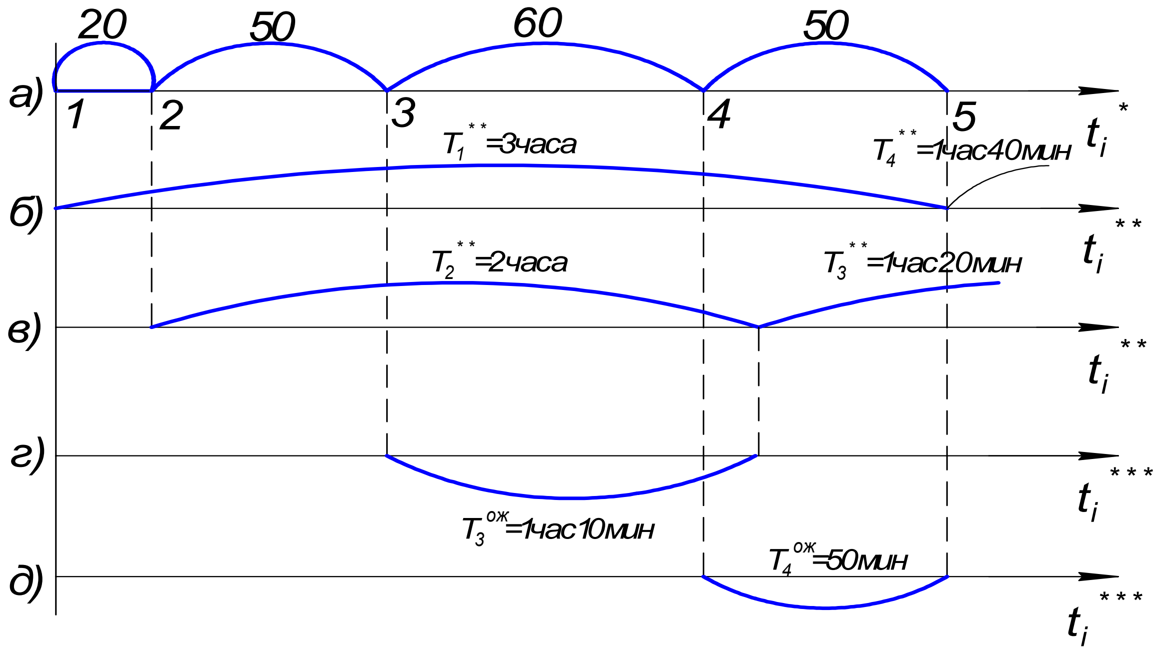


Рис. 8. Схема работы СМО: а – время поступления заявки; б – время обслуживаний первой и четвертой заявок; в – время обслуживания второй и третьей заявок; г – время нахождения в очереди третьей заявки; д – время нахождения в очереди четвертой заявки

Для заданных условий будут работать оба канала. Третья и четвертая заявки будут ожидать в очереди. Поскольку СМО предусмотрено два места в очереди, обе заявки (третья и четвертая) будут обслужены.

4-й вариант. Предположим, что при моделировании случайных моментов поступления заявок и случайного времени обслуживания их были получены следующие значения:

$T^{*}_{i\text{заявок}}$ = 0; 20; 50; 40; 20; 20 мин и т.д.

$T^{**}_{i\text{обс}}$ = 4 ч; 3 ч 40 мин; 4 ч 5 мин; 4 ч 10 мин и т.д.

Полученные числа отложим на соответствующих осях (рис. 9).

Из рис. 9 видно, что для заданных условий будут работать оба канала. Третья и четвертая заявки будут стоять в очереди. Поскольку СМО предусматривает лишь два места в очереди, то пятая и шестая заявки получают отказ в обслуживании и уйдут необслуженными.

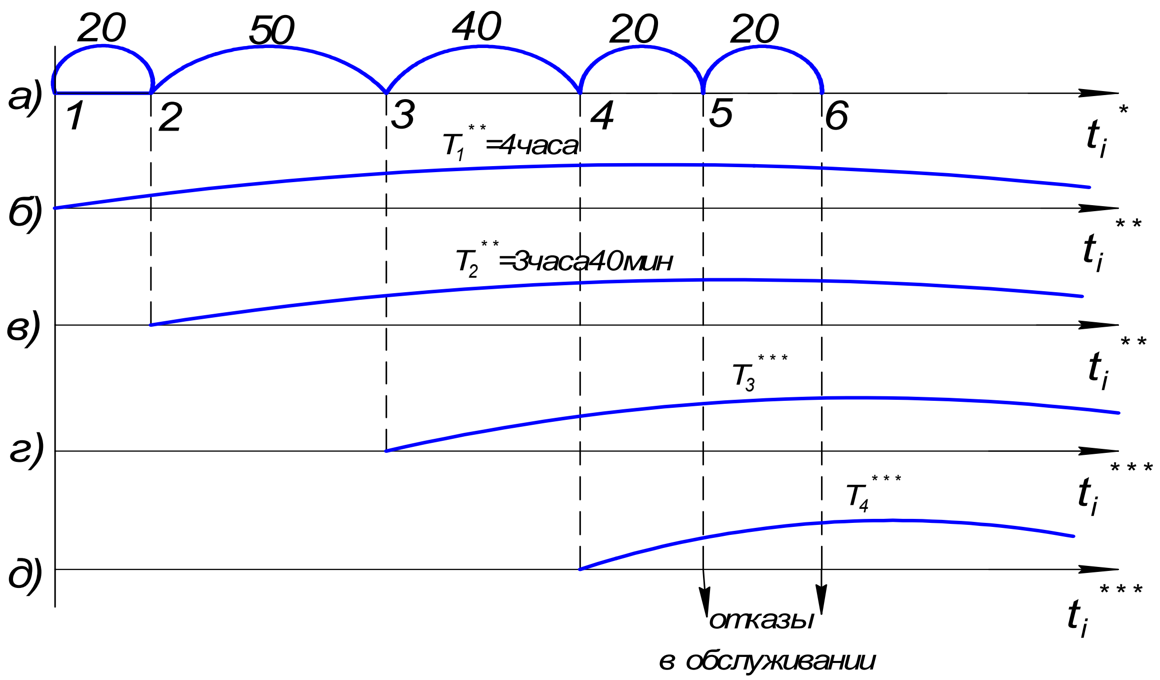


Рис. 9. Схема работы СМО: а – время поступления заявки; б – время обслуживания первой заявки; в – время обслуживания второй заявки; г – время нахождения в очереди третьей заявки; д – время нахождения в очереди четвертой заявки

Следует учесть, что в СМО могут быть наложены и другие условия на образование очереди.

2.2. Алгоритм решения задачи по определению числовых характеристик систем массового обслуживания

Рассмотрим на примере порядок применения метода статистического моделирования для определения числовых характеристик функционирования станции технического обслуживания автомобилей (СТОА).

Пример. Исследуется эффективность работы СТОА, имеющей в своем распоряжении N постов. Станция начинает работать в T_0 = 8.00 и заканчивает в $T_{\text{конц}}$ = 20.00, работает по схеме с ожиданием прибывших машин в очереди с ограничением по времени.

Статистическими наблюдениями установлено, что автомобили прибывают на станцию в случайные моменты времени T_i^*, при этом время между прибытиями двух автомобилей распределено по закону Вейбулла с параметрами n, λ, L_0. Время, расходуемое на обслуживание автомобилей T_i^{***}, случайно и распределено по закону Релея с параметром μ. Время пребывания в очереди T_i^{***} случайно и распределено по показательному закону с параметром ν.

Входными данными для решения поставленной задачи служат λ, μ, ν, получаемые на основе статистической обработки экспериментальных данных.

Для указанных условий требуется найти числовые характеристики функционирования системы, а именно число автомобилей:

- обслуживаемых;
- ожидающих в очереди;
- покидающих очередь необслуженными.

Решение

Ввиду того что поток требований на обслуживание не является пуассоновским, а время обслуживания распределено не по показательному закону, задача не может быть решена с помощью основных положений теории массового обслуживания. Примем для её решения метод статистического моделирования.

Целевая функция W в рассматриваемой задаче, представляющая собой производительность работы станции за один рабочий день, есть функция многих случайных аргументов:

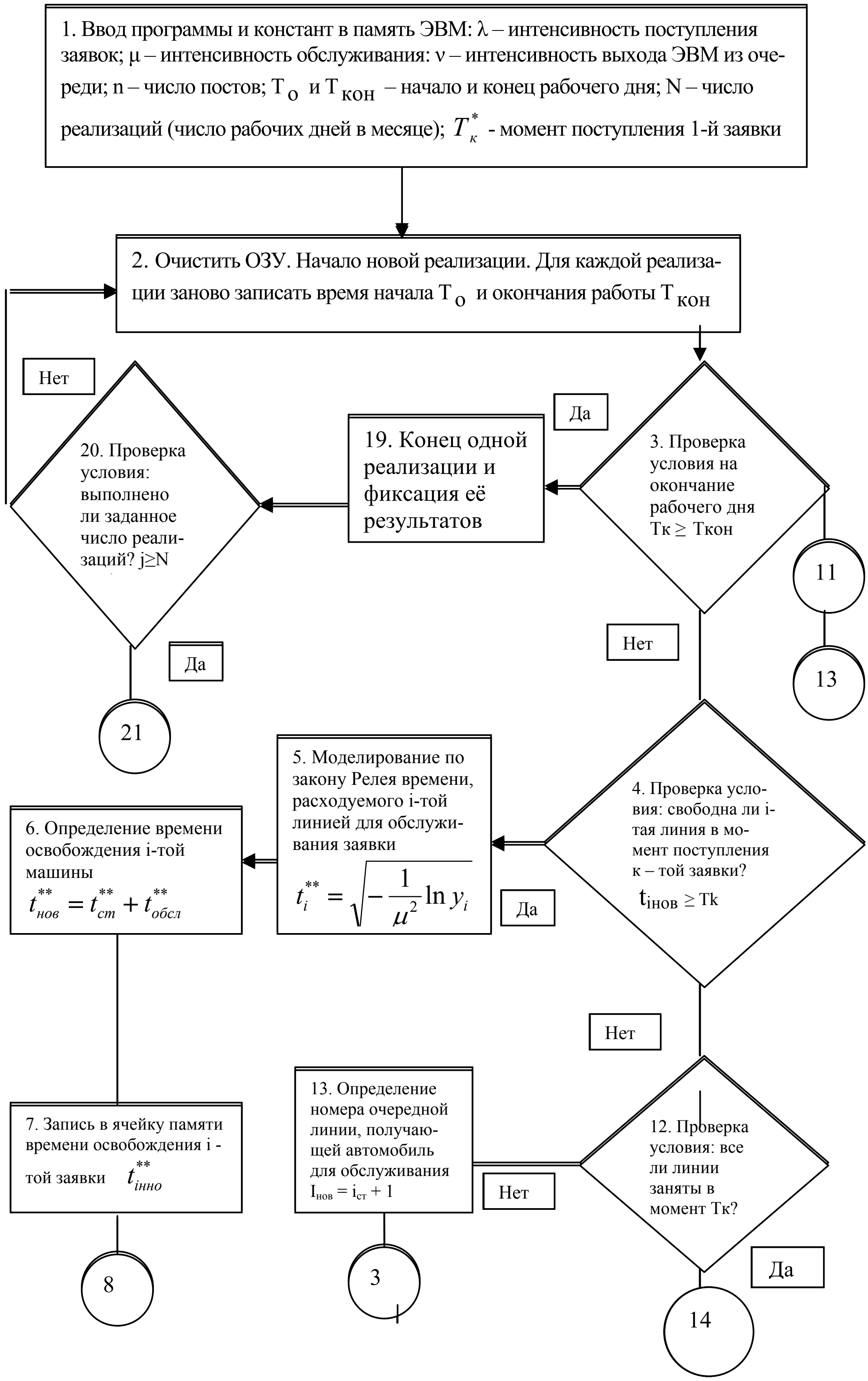
$$W = \varphi\left(T_i^*, T_i^{**}, T_i^{***}, T_0, T_{\text{кон}} \ldots\right),$$

где T_0 – начало работы станции;

$T_{\text{кон}}$ – конец рабочего дня.

Ввиду того что рассматриваемая задача представляет собой некоторый процесс во времени, моделирование работы станции будем осуществлять в дискретной схеме с шагом дискретности, равном одному месяцу. Это означает, что информация о течении процесса будет выдаваться на первое число каждого текущего месяца.

Решение задачи покажем в виде блок – схемы (см. рис. 10).



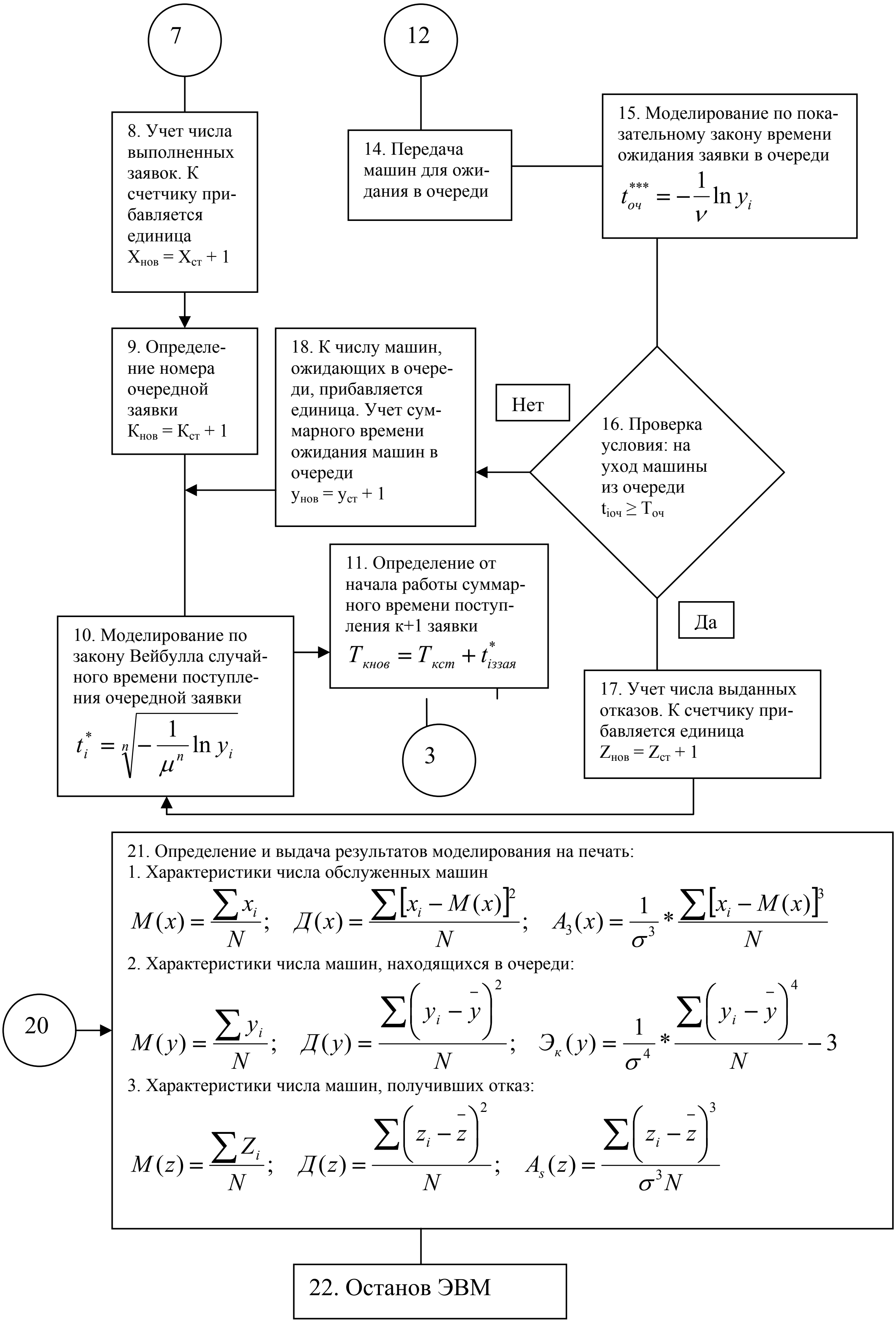


Рис. 10. Блок – схема алгоритма решения задачи по определению числовых характеристик функционирования СТОА.

2.3. Исследование характеристик функционирования станции технического обслуживания автомобилей методом Монте-Карло

Рассмотрим на примере порядок применения метода статистического моделирования для определения числовых характеристик функционирования станции технического обслуживания.

Пример. Исследуется СТОА методом статистического моделирования для одной реализации, которая имеет два канала и два места для ожидания в очереди. Интенсивность поступления заявок λ = 1,5 заявки в час, интенсивность обслуживания одного канала μ = 0,5 заявки в час.

Этапы работы.

1. Составляем размеченный граф состояний, представленный на рис. 11, на котором обозначены:

S_0 – все каналы свободны;

S_1 – занят один канал;

S_2 – заняты оба канала;

S_3 – оба канала заняты и одна заявка в очереди;

S_4 – оба канала заняты и две заявки в очереди.

2. Разыгрываем интервалы времени прибытия и время обслуживания заявок, для чего воспользуемся алгоритмом моделирования случайной величины T, распределенной по показательному закону, т.е.

$$T_i^* = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y_i)\ ;\quad T_i^{**} = -\frac{1}{\mu}\ln(1-y_i),$$

где T_i^* – интервал времени прибытия заявок на СМО;

T_i^{**} – время обслуживания i-й заявки.

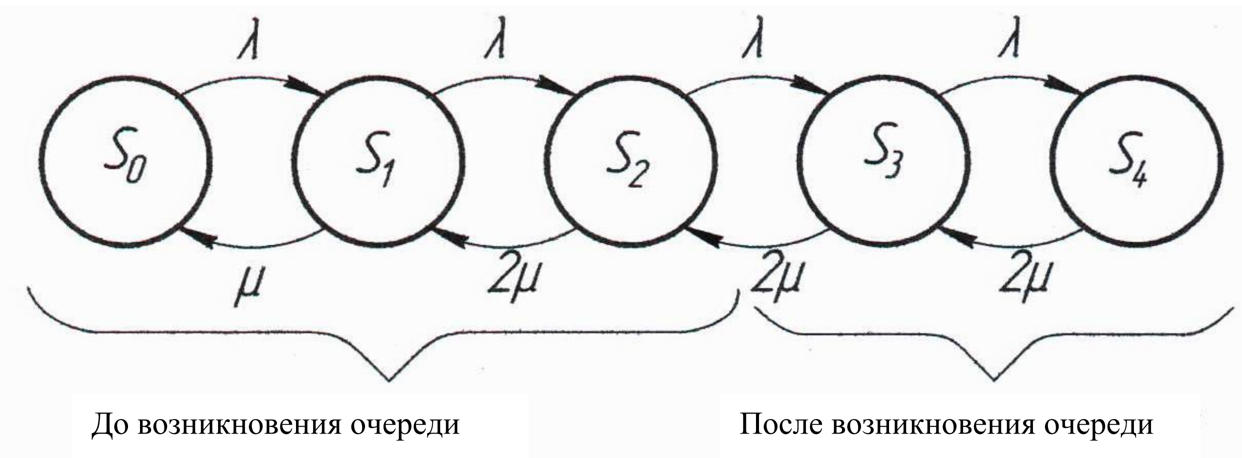


Рис. 11. Размеченный граф состояний

Случайные числа $У_i = R_i$ от 0 до 1 берем из приложения.

3. Составляем таблицу времени прибытия и времени обслуживания заявок (табл. 6, 7) и изображаем процедуру моделирования графически (рис. 12).

Для графического изображения процесса моделирования работы СМО возьмем несколько координатных осей, которые имеют один и тот же масштаб отсчета времени. На первой оси отложим астрономическое время, на второй отметим моменты поступления заявок на обслуживание. На оси S_0 изобразим состояние системы, когда все каналы свободны, на осях S_1 и S_2 - состояние первого и второго каналов, на осях S_3 и S_4 – состояние первого и второго мест в очереди.

До момента t_1^* – прихода первой заявки – все каналы и все места в очереди свободны. В момент приходит первая заявка и занимает первый канал. Сколько времени он будет занят, решается разыгрыванием.

Первое разыгранное значение времени обслуживания откладываем на оси S_1 от точки с абсциссой t_1^*, отмечаем его жирной линией. В момент t_2^* – приход второй заявки – первый канал занят, заявка занимает второй канал. Разыгрываем еще одно значение T_2^{**} и обозначаем жирной линией на оси S_2 от точки с абсциссой t_2^* и т.д.

Таблица 6

Номер заявки (розыгрыша)	Случайное число Y_i	Промежуток времени между двумя заявками T_i, ч	Момент прибытия i-й заявки t_i^*,ч
1	37	0,23	0,23
2	54	0,39	0,62
3	20	0,11	0,73
4	48	0,33	1,06
5	05	0,02	1,08
6	64	0,51	1,59
7	89	1,11	1,70
8	47	0,32	2,02
9	42	0,27	2,29
10	96	1,62	3,90
11	24	0,14	4,04
12	80	0,81	4,85

Таблица 7

Номер заявки (розыгрыши)	Случайное число Y_i	Промежуток времени между двумя заявками T_i, ч.	Начало обслуживания $t_{iн}^{**}$, ч.	Конец обслуживания $t_{iк}^{**}$, ч.
1	47	1,27	0,23	1,50
2	25	0,32	0,62	0,94
3	44	1,16	0,94	2,10
4	52	1,47	1,50	2,97
5	66	2,16	2,10	4,26
6	95	5,99	2,97	8,96
7	27	0,63	Отказ	Отказ
8	0,7	0,15	Отказ	Отказ
9	99	9,21	4,26	13,57
10	53	1,51	8,96	10,47
11	59	1,78	Отказ	Отказ
12	36	0,89	10,47	11,36

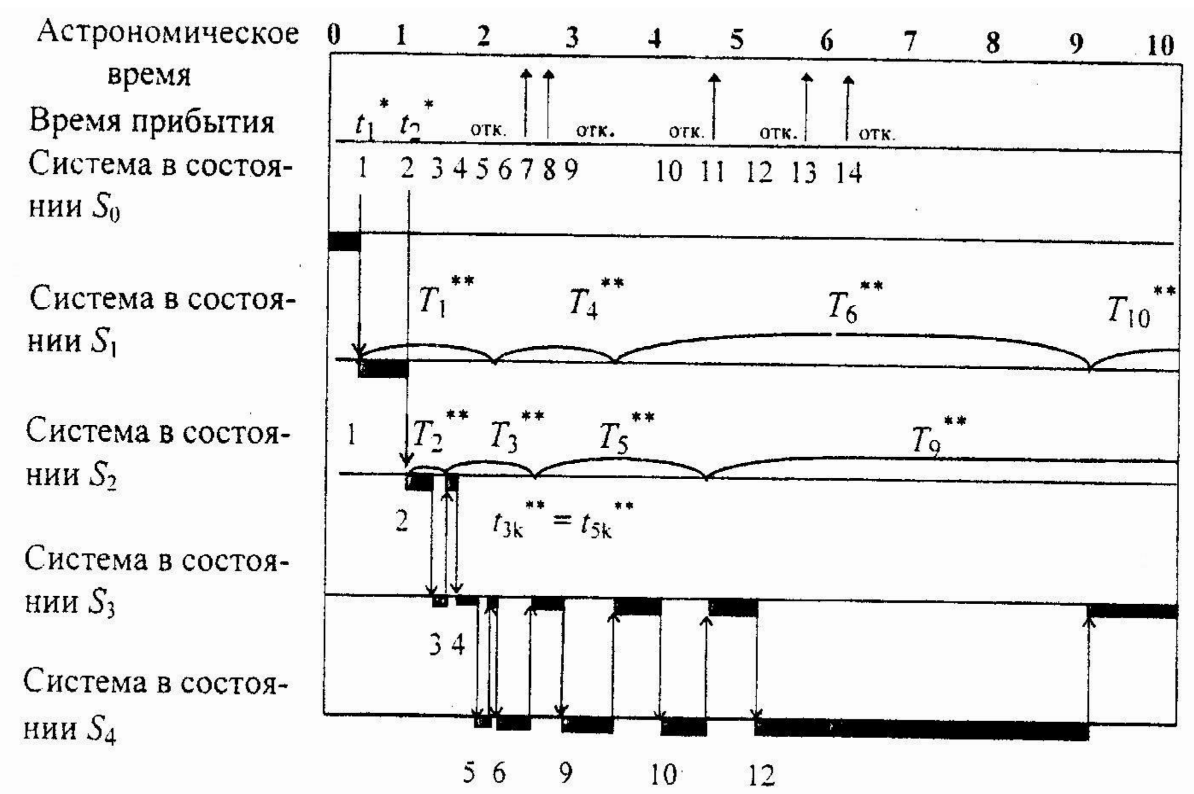


Рис. 12. Графический процесс моделирования

Заявка, пришедшая в момент, когда все каналы и места в очереди заняты, получает отказ (она покидает СМО необслуженной).

Предположим, что моделирование реализации продолжено нами достаточно долго. Определим вероятные характеристики СМО. Вероятности P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 того, что система находится в состоянии S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, найдем по отношениям:

$$P_0 \approx \frac{\Sigma T_0}{T}; \quad P_1 \approx \frac{\Sigma T_1}{T}; \quad P_2 \approx \frac{\Sigma T_2}{T}; \quad P_3 \approx \frac{\Sigma T_3}{T}; \quad P_4 \approx \frac{\Sigma T_4}{T}.$$

где $\sum T_0$, $\sum T_1$, $\sum T_2$, $\sum T_3$, $\sum T_4$ – суммы времени нахождения системы в состояниях S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 (берутся из данных рис. 12);

T – рассматриваемый интервал времени (8 часов).

Очевидно, $\sum T_0 + \sum T_1 + \sum T_2 + \sum T_3 + \sum T_4 = T$.

Вероятность отказа найдется на большом участке времени T как отношение числа N^* заявок, получивших отказ, к общему числу заявок, поступивших за это время:

$$P_{\text{отк}} = \frac{N^*}{N}.$$

Относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_{\text{отк}},$$

абсолютная пропускная способность

$$Q = \lambda \ q.$$

Среднее число занятых каналов

$$\overline{P} = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 2\left(P_3 + P_4\right)$$

Среднее число заявок в очереди

$$\overline{m} = 0\left(P_0 + P_1 + P_2\right) + 1P_3 + 2P_4.$$

2.4. Задания к выполнению самостоятельной работы

Применив метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), вычислить для одной реализации числовые характеристики функционирования станции технического обслуживания автомобилей за восьмичасовой рабочий день, используя данные табл. 8. Интервал времени между приходом очередных автомобилей на обслуживание, а также время обслуживания автомобилей принять распределенным по показательному закону.

При моделировании промежутка времени прихода автомобилей на обслуживание воспользоваться случайными числами. При моделировании времени обслуживания автомобилей использовать случайные числа на с. 49 приложения. Номер строки случайных чисел должен совпадать с номером варианта исходных данных (см. табл. 8).

Таблица 8

Номер варианта	Число каналов, N	Число мест в очереди, M	Интенсивность поступления заявок, λ, авт. /ч.	Среднее время обслуживания $t_{обсл} = 1 / \mu$
1	2	2	1,5	2,0
2	2	2	2,0	2,0
3	2	2	2,5	2,5
4	2	2	3,0	2,5
5	2	3	1,5	2,0
6	2	3	2,0	2,0
7	2	3	2,5	2,5
8	2	3	3,0	2,5
9	2	4	1,5	2,0
10	2	4	2,0	2,0
11	2	4	2,5	2,5
12	2	4	3,0	2,5
13	2	4	3,5	3,0
14	3	2	1,5	2,0
15	3	2	2,0	2,0
16	3	2	2,5	2,5
17	3	2	3,0	2,5
18	3	3	1,5	2,5
19	3	3	2,0	2,5
20	3	3	2,5	3,0
21	3	3	3,0	3,0
22	3	3	3,5	1,5
23	3	4	2,0	1,5
24	3	4	2,5	2,0
25	3	4	3,0	2,5

Контрольные вопросы

1. Какие типы задач автомобильного транспорта целесообразно решать методом статистического моделирования?
2. Какова последовательность розыгрыша интервала времени прибытия заявок на обслуживание и времени обслуживания заявок?
3. Перечислите варианты функционирования СМО и их особенности.
4. Целевая функция работы СТОА и её составляющие.
5. Числовые характеристики функционирования СТОА.
6. Последовательность (алгоритм) решения задачи по определению численных характеристик функционирования СТОА.
7. Особенности моделирования функционирования СТОА методом Монте-Карло.
8. Методика определения вероятностей состояний и других числовых характеристик функционирования СТОА.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТРЕБНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ В ЗАПАСНЫХ ЧАСТЯХ

При планировании и управлении уровней запасных частей (узлов, агрегатов) и управлении ими на складах АТП (центральном, промежуточном, оборотных агрегатов) в ряде случаев необходимо учитывать несколько случайных факторов, которые имеют место в процессе функционирования технической службы и службы снабжения предприятия. К ним относятся: случайное время отказа автомобиля, случайное время пополнения запасов, случайные величины потребности и объемы пополнения запасных частей. Поэтому в практике расчетов потребности в запасных частях широкое распространение нашел метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), позволяющий моделировать любой процесс, на протекание которого влияют случайные факторы.

3.1. Статистическая модель управления запчастями

Расчет потребности в запасных частях (узлах, агрегатах) методом статистического моделирования рассмотрим на примере работы склада, с которого в произвольный момент времени t по требованию выдается случайное количество агрегатов (узлов, запасных частей) одного наименования V_t. Если в данный момент t запас X на складе достаточен, то запрос V_t удовлетворяется полностью. Если запас недостаточен для полного удовлетворения требования, то он удовлетворяется только на величину запаса, имеющегося на складе. В последнем случае предприятие несет потери от дефицита $C_{деф}$, величина которых пропорциональна количеству недоданных технической службе агрегатов, т.е. $C_{деф} = к\ (V_t - X)$, где $к$ - потери предприятия из-за простоя одного автомобиля при дефиците агрегатов на складе.

Поступление агрегатов на склад предприятия от поставщиков происходит также в случайные моменты времени τ и в случайном объеме Y_t. Затраты на содержание и хранение агрегатов на складе $C_{хр} = \lambda \overline{X}$, где λ — стоимость хранения и содержания одного агрегата на складе за период T; $\overline{X}$ – средний запас на складе за период T.

Необходимо найти такой плановый уровень начального запаса агрегатов X_0 на складе, при котором суммарные издержки предприятия будут минимальными (рис. 13) $(C_{деф} + C_{хр}) \rightarrow \min$.

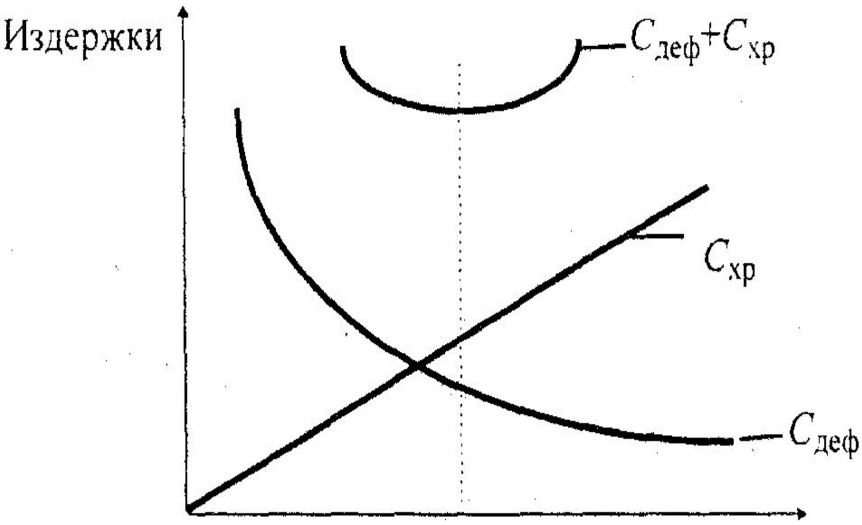


Рис. 13. Зависимость издержек предприятия от величины начального запаса

Таким образом, здесь имеют место четыре случайные величины: момент поступления требования на отпуск агрегатов со склада t; объем этого требования V_t; момент поступления агрегатов на склад от поставщиков τ и объем этой поставки Y_τ.

Законы распределения указанных случайных величин устанавливаются на основе обработки информации, содержащейся в карточках складского учета.

Для дальнейшего решения задачи введем величины:

$v_{i+1} = t_{i+1} - t_i$ – длительность интервала между (i + 1)-й и i-й выдачами агрегатов со склада;

$\mu_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i$ – длительность интервала между (i + 1)-й и i-й поставками агрегатов на склад.

Так как τ_i и t_i – величины случайные, следовательно, величины v_{i+1} и μ_{i+1} будут также случайными.

Для решения данной задачи необходимы исходные данные, в качестве которых могут служить различные значения планового уровня начального запаса агрегатов X_0.

Расчеты на ЭВМ при различных исходных данных по всему плановому периоду T (год) позволяют имитировать реальные процессы, протекающие на предприятии, для чего значения случайных величин устанавливаем с помощью генератора случайных чисел, закон распределения которых должен соответствовать закону распределения случайных величин по данному предприятию.

В результате расчетов по всем выбранным уровням начального запаса X_0 выявляем зависимость суммарных затрат за весь период по хранению запаса агрегатов и из-за дефицита в случае отказа в удовлетворении требований из-за отсутствия агрегатов на складе.

3.2. Алгоритм процесса моделирования

Процесс моделирования потребности предприятия в запасных частях (узлах, агрегатах) представляем блок-схемой на рис. 14. Он предполагает следующие операции.

1. Установить начальные значения запаса $X = X_0$.

2. В соответствии с взятыми на складе данными первичного учета и их распределениями с помощью датчика случайных чисел получить величины длительности интервалов v_i и μ_i и определить момент первого поступления требования на выдачу агрегата со склада или поступления на склад: $t_1 = t_0 + v_1$; $\tau_1 = \tau_0 + \mu_1$.

3. До начала моделирования время равно нулю: $t_0 = 0$; $\tau_0 = 0$.

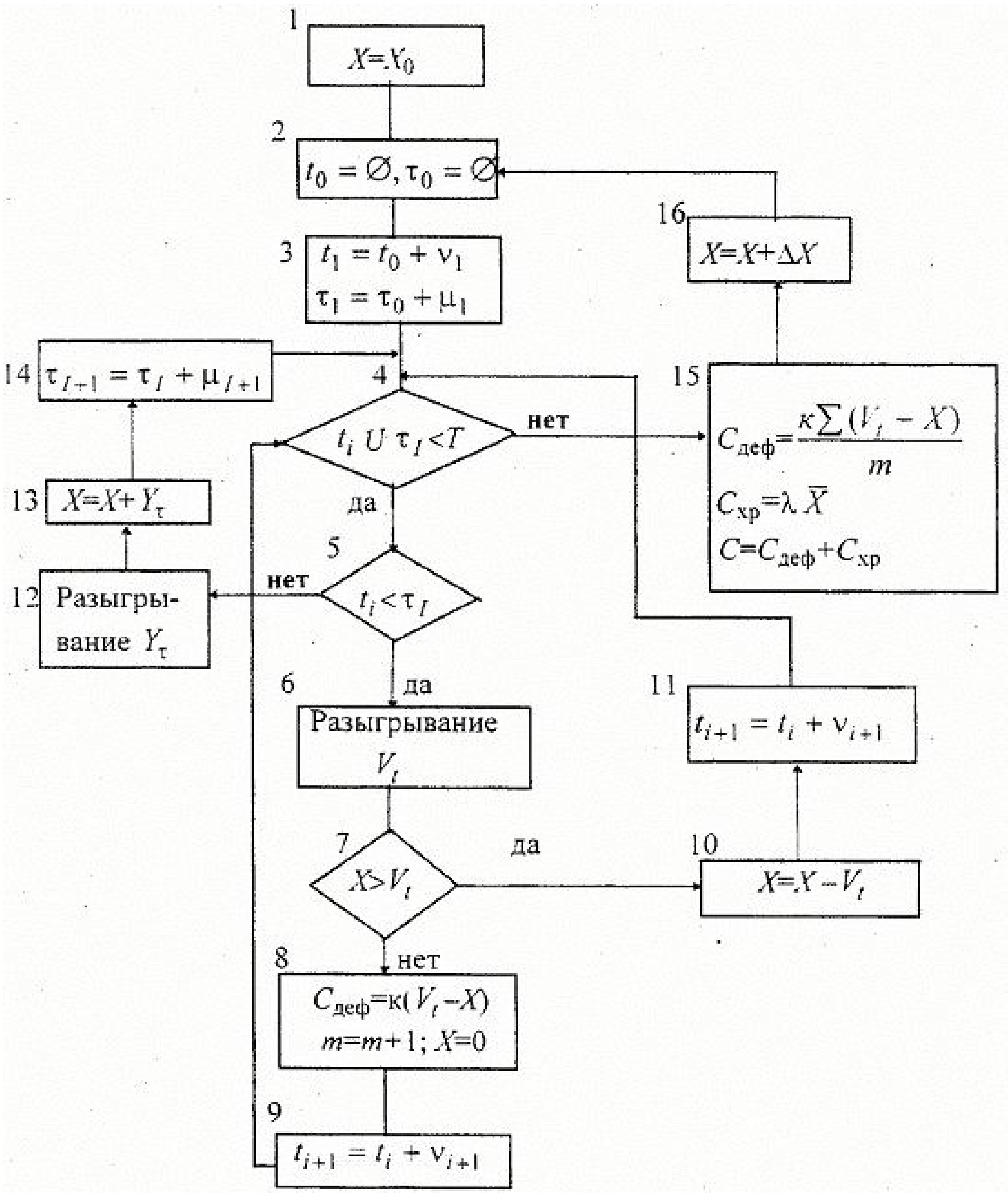


Рис. 14. Блок-схема процесса моделирования потребности предприятия в запасных частях

4. Проверить, истекло ли время моделирования: ($t_i \cup \tau_i < T$)?

Если время не истекло, выполняем действия п. 5, если истекло – действие п. 15.

5. Проверить, что поступило раньше поставка на склад или требование на отпуск? Если требование поступило раньше, выполняем действия, указанные в п. 6, если раньше поступила поставка, – действия по п. 12.

6. Аналогично п. 2 определить случайную величину требования.

7. Проверить, превосходит ли величина требования имеющийся запас. Если превосходит, выполнить действия, указанные в п. 8, если не превосходит, действия п. 10.

8. Определить размер потерь из-за дефицита при неполном удовлетворении требования $C_{деф} = к\ (V_{\tau} — X)$, зафиксировать случай дефицита ($m = m + 1$), запас снижаем до нуля ($X = 0$).

9. Определить момент следующего поступления требования на склад, т.е. случайную величину V_i: $t_{i+1} = t_i + v_{i+1}$. Перейти к п. 4.

10. Требование на выдачу агрегатов полностью удовлетворяется, так как количество требуемых агрегатов меньше имеющегося запаса, и запас уменьшается на величину V_i: $X = X - V_i$

11. Определить момент следующего поступления требования на склад, т.е. случайную величину V_i: $t_{i+1} = t_i + \nu_{i+1}$. Перейти к п. 4.

12. При поступлении поставки от поставщика на склад аналогично п. 3 определить случайную величину объема этой поставки, т.е. величину Y_{τ}.

13. Запас увеличивается на величину поставки $X = X + Y_{\tau}$.

14. Аналогично п. 3 определить случайную величину момента поступления следующей поставки μ_{τ}: $\tau_{i+1} = \tau_i + \mu_{i+1}$. Перейти к п. 4.

15. Время моделирования истекло, т.е; закончился период T. Определяются величина средних потерь из-за дефицита

$$C_{деф} = \frac{к\sum\left(V_t - X\right)}{m}$$

и затраты предприятия на хранение $C_{хр} = \lambda\overline{X}$.

16. Повторить процесс моделирования для нового значения номинального запаса $X = X_0 + \Delta X$. Перейти к п. 2.

Процесс моделирования повторяется для многих значений величины начального запаса, пределы которого изменяются от минимальной до максимальной величины в соответствии с вместимостью склада.

Шаг изменения начального запаса ΔX выбирается таким образом, чтобы было возможно по результатам расчета графически представить зависимость суммарных затрат предприятия от величины начального запаса и найти кривую с точкой, в которой достигается минимум функции суммарных издержек.

Программа моделирования потребности предприятия в запасных частях на ЭВМ может иметь следующий вид.

```
DIM T(150), U(150), G(150), Y(150), C(365), X(365)
INPUT “ПЕРИОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ДНЕЙ –“; P
INPUT “ЗНАЧЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ЗАПАСА ПРИ МОДЕЛИРО-
ВАНИИ – “; X0
INPUT “ШАГ ИЗМЕНЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ЗАПАСА –“; D
INPUT “ЧИСЛО ШАГОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ”; X2
PRINT “ПОТЕРИ ПРЕДПРИЯТИЯ ИЗ-ЗА ПРОСТОЯ ОДНОГО АВ-
ТОМОБИЛЯ”;
INPUT “ПРИ ДЕФИЦИТЕ ЗАПАСА”; К1
PRINT “ЗАТРАТЫ НА ХРАНЕНИЕ И СОДЕРЖАНИЕ ЕДИНИЦЫ
ЗАПАСА НА СКЛАДЕ”;
INPUT “ЗА РАССМАТРИВАЕМЫЙ ПЕРИОД”; L1
F$ = “   ###  : ######/##   : ######/ ## : ######/ ## : ####   “
GOSUB 480: GOSUB 730
140: X1 = X0 + X2 * D: PRINT
PRINT “ВЫВОД РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА (0 – НА ДИСПЛЕЙ”;
INPUT “1 - НА ПЕЧАТЬ, ДР. ЧИСЛО - ВЫХОД)”; Z
IF Z = 1 THEN OPEN “LP: “FOR OUTPUT AS FILE 1: GOTO 210
IF Z = 0 THEN 210
GOTO 1110
210 PRINT #Z, “РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ”: PRINT #Z
PRINT #Z, “НАЧАЛЬНЫЙ: ПОТЕРИ ИЗ-ЗА ЗАТРАТЫ: ОБЩИЕ:’:
PRINT “ЗАПАС НА КОНЕЦ”
PRINT #Z, “ЗАПАС : ДЕФИЦИТА : ХРАНЕНИЯ: ПОТЕРИ :”
PRINT #Z, “ПЕРИОДА”
‘ПОИСК ДНЕЙ ПОПОЛНЕНИЯ И ВЫДАЧИ ЗАПЧАСТЕЙ
FOR W = X0 TO X1 STEP D
X = W: N = 1: L = 1: C2 = 0
FOR I = 1 TO P
IF G(L) > P THEN 1110
IF I = G(L) THEN GOSUB 960
IF T(N)  > P THEN 1110
IF I = T(N) THEN GOSUB 1040
X(I) = X: C(I) = C2:
NEXT
C = 0: A  = 0: FOR I = 1 TO P: C = C + ABS(C(I)):
IF X(I) >= 0 THEN A = A + X(I): NEXT
C1 = C * К1: A1 = A * L1 / P
PRINT #Z< USING F$, W, C1, A1, C1 + A1, X(P)
NEXT W
```

```
        GOTO 140
'МОДЕЛИРОВАНИЕ ДНЕЙ И ОБЪЕМА ВЫДАЧИ ЗАПЧАСТЕЙ
480: PRINT: PRINT TAB(10) "УСЛОВИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСХОДА ЗАПЧАСТЕЙ"
        INPUT "ЧИСЛО ЗАЯВОК НА ЗАПЧАСТИ В ТЕЧЕНИЕ МОДЕЛИРУЕМОГО ПЕРИОДА"; N1
        INPUT "МИНИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ЗАТРЕБОВАННЫХ ЗАПЧАСТЕЙ ПО ЗАЯВКЕ"; N2
        INPUT "МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ЗАТРЕБОВАННЫХ ЗАПЧАСТЕЙ ПО ЗАЯВКЕ"; N3
        FOR I = 1 TO N1: T = (P – 1) * RND + 1: T(I) = INT(T): NEXT
        FOR I = 1 TO N1: U = (N3 – N2) * RND + N2: U(I) = INT(U): NEXT
'РАНЖИРОВАНИЕ ДНЕЙ ВЫДАЧИ ЗАПЧАСТЕЙ
        FOR I = 1 TO N1 – 1: K = 1
660: J = K + 1
        IF T(K) < = T(J) THEN 700
        SWAP T(K), T(J): K = K - 1
        IF K>= 1 THEN 660
700: NEXT: RETURN
'МОДЕЛИРОВАНИЕ ДНЕЙ И ОБЪЕМА ПОПОЛНЕНИЯ ЗАПЧАСТЕЙ
730: PRINT
        PRINT TAB(10) "УСЛОВИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОПОЛНЕНИЯ ЗАПАСА"
        INPUT "СКОЛЬКО РАЗ ПОПОЛНЯЕТСЯ ЗАПАС В ТЕЧЕНИЕ
        МОДЕЛИРУЕМОГО ПЕРИОДА –"; N4
        INPUT "МИНИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ЗАПЧАСТЕЙ В ПАРТИИ ЗАВОЗА –"; N5
        INPUT "МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ЗАПЧАСТЕЙ В ПАРТИИ ЗАВОЗА-"; N6
        FOR I = 1 TO N4: G = (P – 1) * RND + 1: G(I) = INT(G): NEXT
        FOR I = 1 TO N4: Y = (N6 – N5) * RND + N5: Y(I) = INT(Y): NEXT
'РАНЖИРОВАНИЕ ДНЕЙ ПОПОЛНЕНИЯ ЗАПЧАСТЕЙ
        FOR I = 1 TO N4 - 1: K = I
900: J = К + 1
        IF G(K) < = G(J) THEN 940
        SWAP G(K),  G(J): K = K - 1
        IF K > = 1 THEN 900
940: NEXT I: RETURN
960: 'РАСЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ЗАПАСА И ПРОСТОЕВ АВТОМОБИЛЕЙ ПРИ ПОПОЛНЕНИИ ЗАПАСА
```

```
X = X + Y(L)
IF X < 0 THEN C2 = C2 – Y(L) ELSE C2 = 0: L = L + 1
RETURN
1040: 'РАСЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ЗАПАСА И ПРОСТОЕВ АВТОМОБИЛЕЙ ПРИ ВЫДАЧЕ ЗАПЧАСТЕЙ'
IF U(N) <=X THEN  C2 = 0 ELSE C2 = C2 + U(N) – X
X = X – U(N): N = N + 1
RETURN
1110: CLOSE: END
```

Исходные данные к моделированию по приведенной программе готовят в следующей последовательности:

– период моделирования *P*;

– начальный запас агрегатов *X*O;

– шаг увеличения начального запаса *D*;

– число шагов моделирования *X*2;

– потери предприятия из-за простоя одного автомобиля при дефиците запаса K1;

– затраты на хранение и содержание единицы запаса на складе за период моделирования L1.

Условия моделирования расхода запаса:

– закон распределения равномерной плотности;

– число заявок на запасные части в течение моделируемого периода N1

– минимальное число затребованных запасных частей по заявке N2;

– максимальное число затребованных запасных частей по заявке N3.

Условия моделирования пополнения запаса:

– закон распределения равномерной плотности;

– сколько раз пополняется запас в течение моделируемого периода N4;

– минимальное число запасных частей в партии завоза N5;

– максимальное число запасных частей в партии завоза N6.

3.3. Задания к выполнению самостоятельной работы

Провести моделирование потребности предприятия в запасных частях на ЭВМ для одного из вариантов исходных данных, указанных в табл. 9. По результатам моделирования построить график издержек предприятия в зависимости от величины начального запаса.

Таблица 9

Исходные данные	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Период моделирования	150	100	200	300	250	75	130	180	145	230	275	305	253	90	160
Начальный запас агрегатов	20	0	10	2	30	5	15	6	7	25	4	1	3	18	9
Шаг увеличения начального запаса	2	4	4	3	3	2	5	1	7	6	8	3	2	4	1
Число шагов моделирования	20	15	15	16	25	30	6	12	10	8	15	13	9	17	9
Потери предприятия из-за простоя автомобиля при дефиците запаса	45	55	25	30	36	60	35	40	51	49	28	36	44	64	27
Затраты на хранение и содержание единицы запаса на складе за период моделирования	3	2	5	1.5	8	1	10	3.5	2.5	3	4	1.5	6	3.2	2.8
Число заявок на запчасти в течение моделируемого периода	60	30	70	40	85	24	70	99	74	98	128	150	112	36	69

Окончание табл. 9

Исходные данные	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Минимальное число затребованных запчастей по заявке	10	8	4	10	5	5	2	4	1	3	8	20	6	8	4
Максимальное число затребованных запчастей по заявке	30	40	40	37	35	40	26	46	26	16	36	48	18	47	62
Сколько раз пополняется запас в течение моделируемого периода	20	10	30	23	28	5	30	55	18	43	77	64	40	19	33
Минимальное число запчастей в партии завоза	40	75	50	30	65	50	20	35	55	10	28	85	18	23	31
Максимальное число запчастей в партии завоза	80	100	100	80	110	110	55	86	78	22	53	112	37	76	61

Контрольные вопросы

1. Перечислите случайные факторы, которые имеют место при планировании и управлении уровней запасных частей на складах АТП.
2. Запишите целевую функцию издержек предприятия от величины начального запаса и назовите её составляющие.
3. Как установить закон распределения случайных величин, используемых при моделировании потребности предприятия в запасных частях.
4. Последовательность (алгоритм) моделирования потребности предприятия в запасных частях.
5. Укажите операторы программы, которые предназначены для:
   а) для ввода исходных данных;
   б) вывода результатов моделирования;
   в) моделирования случайных величин.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Периодичность технических воздействий (ТВ) – это нормативная наработка (в километрах пробега или часах работы) между двумя последовательно проводимыми однородными работами: ТО или ТР.

Различают следующие методы определения (корректирования) периодичности ТВ: простейшие (методы аналогии по прототипу); аналитические, основанные на результатах наблюдений и основных закономерностях ТЭА; имитационные, основанные на моделировании случайных процессов.

Наиболее разработанными и предпочтительными являются аналитические методы определения периодичности ТВ, к которым относят:

а) метод определения периодичности ТВ по допустимому уровню безотказности, основаный на выборе такой рациональной периодичности ТО, при которой вероятность отказа F элемента не превышает заранее заданной величины, называемой риском (рис. 15).

Вероятность безотказной работы $P_Д$, при которой наработка на отказ больше назначенной периодичности обслуживания $l_о$ определяет безотказность элемента автомобиля,

$$P_Д\left\{x_i \geq l_o\right\} = R_Д = \gamma, \qquad \text{т.е. } l_o = x_\gamma,$$

где x_i – наработка на отказ; $R_Д$ – допустимая вероятность безотказной работы; $\gamma = 1 - F$; x_γ – γ - процентный ресурс; F – вероятность отказа.

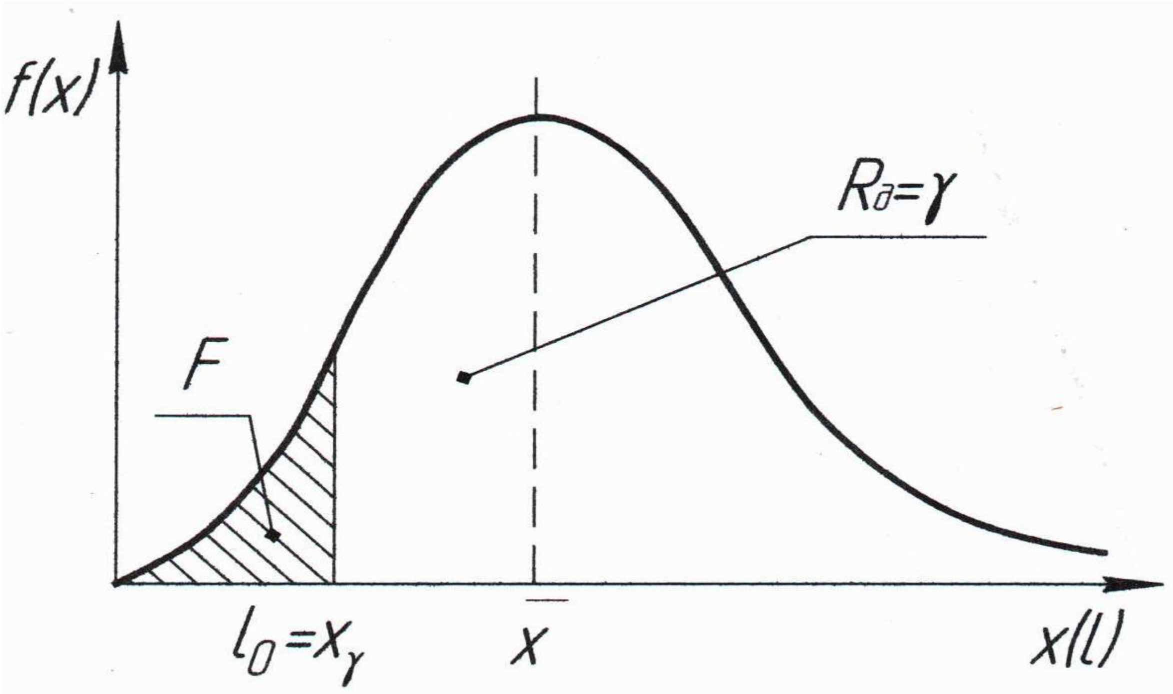


Рис. 15. Определение периодичности ТВ по допустимому уровню безотказности

Для агрегатов и механизмов, обеспечивающих безопасность движения, $R_Д$ = 0,90 - 0,98. Для прочих узлов и агрегатов, $R_Д$ = 0,65 - 0,90.

б) технико-экономический метод сводится к определению суммарных удельных затрат на ТО и ремонт автомобилей и их минимизации. Минимальным суммарным затратам соответствует оптимальная периодичность технического обслуживания $l_о$. При этом удельные затраты $C_{ТО}$ составят на ТО:

$$C_{то} = d / l,$$

где d – стоимость выполнения операций ТО; l – периодичность ТО.

Увеличение периодичности ТО, как правило, приводит к сокращению ресурса элемента и росту удельных затрат на ремонт $C_р$:

$$C_р = C / l,$$

где C – разовые затраты на ремонт; $L = l$ – периодичность.

Выражение $u = C_{то} + C_l \to \min$ является целевой функцией, экстремальное значение которой соответствует оптимальному решению. Определение минимума целевой функции и оптимальности $l_о = l_{опт}$ значения периодичности ТО проводится с помощью графика (рис. 16).

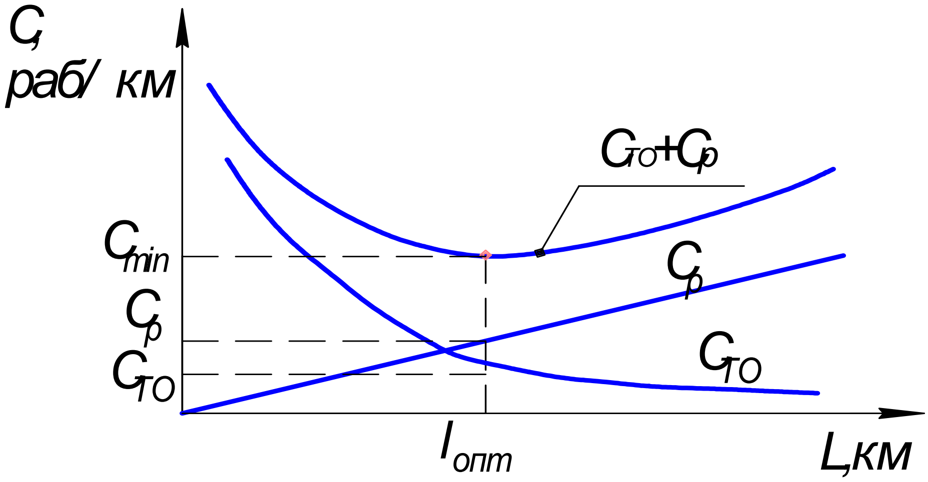


Рис. 16. График определения оптимизации периодичности ТВ технико-экономическим методом

4.1. Имитационное моделирование оптимальной периодичности технических воздействий по допустимому уровню безотказности

В процессе работы группы автомобилей возникают отказы конкретного узла, механизма автомобиля, наработка которых X_i случайна и подчиняется одному из известных законов распределения: $f(x); \bar{x}; V_x$; σ_x. По данному узлу, механизму может выполняться предупредительное техническое обслуживание с установленной периодичностью l. В реальных условиях фактическая периодичность ТО l_i главным образом из-за изменений среднесуточного пробега автомобилей также имеет некоторую вариацию и характеризуется законом распределения $\varphi(l), \bar{l}; \sigma_l$ и V_l.

Если периодичность определяется по допустимому уровню безотказности, то задача формулируется следующим образом.

Необходимо определить оптимальную периодичность ТО l_0, при которой вероятность безотказной работы будет не ниже заданной, т.е. $R \geq R_д$.

Если рассматриваемый процесс происходит под действием произвольного потока события, то его математическую модель построить трудно. В этом случае можно использовать метод статистического моделирования (метод Монте-Карло).

Рассмотренная выше методика позволяет получить случайные величины X_i и l_i, распределенные соответственно по законам $f(x)$ и $\varphi(l)$.

Итак, очевидный смысл имитационного моделирования оптимизации периодичности в рассматриваемом примере состоит:

а) в воспроизводстве и фиксации двух возможных событий: А - отказа автомобиля, если $X_i < l_i$; Б - выполнения ТО, т.е. предупреждение отказа, если $X_i \geq l_i$;

б) определении вероятностей этих событий, соответственно P(А) = F (отказ) и P(Б) = R (профилактика);

в) сравнении фактического R и заданного значения вероятности безотказной работы $R_{\text{Д}}$.

Последовательность имитационного моделирования оптимизации периодичности технических воздействий по допустимому уровню безотказности элементов автомобилей представление алгоритмом на рис. 17.

В блоке 1 предусмотрена подготовка исходных данных для моделирования значений массивов [x] и [l]: наработка на отказ и периодичность технических воздействий соответственно; назначение допустимого уровня безотказности – $R_{\text{д}}$ и объема реализаций M.

Банки исходных данных формируются или из фактических значений X_i и 1_i, полученных за определенный период времени на предприятии по отчетным данным, или расчетом на основе характеристик законов распределения $f(\text{x})$ и $\psi(\text{l})$, если они известны. Для этого используются генераторы случайных чисел (блоки 2 и 3). Получаем массив случайных величии X_i и l_i, называемый реализации (блок 4).

В блоке 6 производится сравнение X_i и l_i и фиксация событий А или Б.

Если наработка до отказа меньше периодичности ТО: $X_i < l_i$, то происходит событие А - отказ (блок 5), или если наработка больше или равна периодичности ТО: $X_i \geq \text{l}_\text{i}$, то происходит событие Б - выполнение ТО, т.е. безотказная работа узла при данной реализации (блок 7).

При многократном повторении реализаций в блоках 5 и 7 определяется количество событий А и Б:

$n_{\text{о}}$ – число зафиксированных при моделировании ТО событий Б;

$n = n_{\text{о}} + n_n$ – общее число реализаций.

Необходимое число реализаций определяется исходя из требуемой точности оценки вероятности наступления событий А и Б.

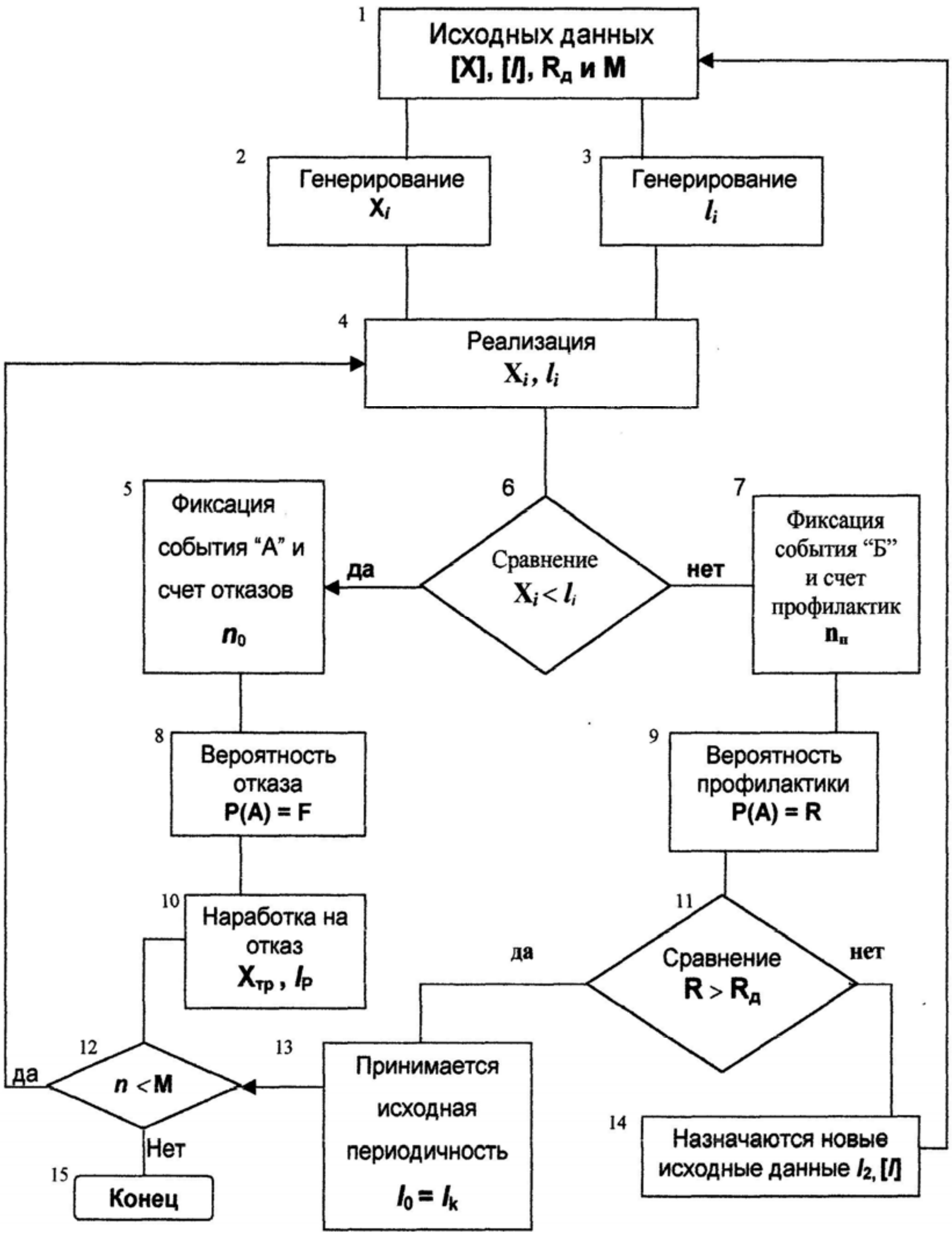


Рис. 17. Блок–схема алгоритма моделирования оптимальной периодичности ТО по безотказности

Блоки 8 и 9 предусматривают определение вероятностей событий А и Б.

$P(\text{А}) = F \approx \frac{n_0}{n}$ – вероятность отказа (блок 8);

$P(\text{Б}) = R \approx \frac{n_n}{n}$ – вероятность профилактики (блок 9).

В блоке 11 предусматривается сравнение полученного значения вероятности безотказной работы R с заданной $R_д$.

Если $R \geq R_д$, то поставленная цель достигнута, а выбранная периодичность является рациональной: $l_k = l_0$ (блок 13). При этом оценка наработки на случай текущего ремонта в межосмотровые периоды составит (блок 10):

$$X_{ТР} \approx \frac{\sum_{Z=1}^{Z} X_z}{n_0},$$

где Z – количество событий, соответствующих отказу.

Если $R < R_д$, то всю процедуру имитационного моделирования необходимо повторить, но при новом значении исходной периодичности $\bar{l}_2 < \bar{l}_1$ (блок 14).

4.2. Имитационное моделирование оптимальной периодичности технических воздействий по экономическим показателям

Целевая функция экономико-вероятностного метода оптимизации периодичности технического обслуживания элементов автомобиля в общем виде описывается выражением

$$C_{общ}\left(l_{об}\right) = \frac{C_{отк}}{l_{н}} + \frac{C_{об}}{l_{об}} \Rightarrow \min,$$

где $C_{общ}$ ($l_{об}$) – удельная стоимость ремонта и технического обслуживания;

$C_{отк}$ – средняя стоимость устранения отказа;

$l_н = \bar{x}$ – средняя наработка на отказ;

$C_{об} = \bar{d}$ – средняя стоимость операции технического обслуживания;

$l_{об}$ – наработка на выполнение операций технического обслуживания.

При моделировании оптимальной периодичности ТО необходимо иметь массивы данных:

$[x]$ – массив наработки на отказ;

$[l]$ – массив наработки на выполнение операций ТО;

$[C]$ – массив разовых затрат на устранение отказа;

$[d]$ – массив разовых затрат на выполнение операций ТО.

Последовательность имитационного моделирования оптимальной периодичности ТО рассматриваемым методом изображена на рис. 18 и включает следующие элементы:

1. Задание исходных данных: $[x]$, $[l]$, $[c]$, $[d]$, М (блок 1).

2. Генерирование и реализация X_i, l_i, C_i, d_i (блоки 2 - 8).

3. Идентификация событий: $X_i < l_i$ - отказ (блок 9), $X_i \geq 1_i$ - профилактика (блок 11).

4. Определение вероятностей событий F и R (блоки 14, 15).

5. В блоках 8, 9 и 13 определяется суммарная удельная стоимость ТО и ремонта одной реализации:

$$C_{\sum}(l_к) = C_{то} + C_{тр}.$$

При многократном повторении процедуры моделирования в блоке 16 вычисляется среднее значения суммарной удельной стоимости ТО и ремонта для исходной периодичности $1_к$ по формуле:

$$\overline{C}_{\Sigma}(l_к) = \frac{\sum C_{\Sigma}}{n},$$

где n – число реализации при исходной периодичности l_k.

6. Блок 18 предусматривает повторение всей процедуры моделирования для следующих значений периодичности ТО: $(\bar{l}_2;\bar{l}_3;\bar{l}_к...\bar{l}_г)$.

7. В блоках 19, 20 производится сравнение полученных значений $\overline{C}_{\Sigma}\left(l_к\right)$ и выбор оптимальной периодичности, соответствующей минимальному значению целевой функции, т.е. $1_0 = 1_г$ при $C_{\sum}(1_г) = U_{min}$.

8. Уровень безотказности при оптимальном решении оценивается соотношением $R \cong \frac{n_п}{n}$, полученным в цикле моделирования для $l_г = l_0$ (блок 15).

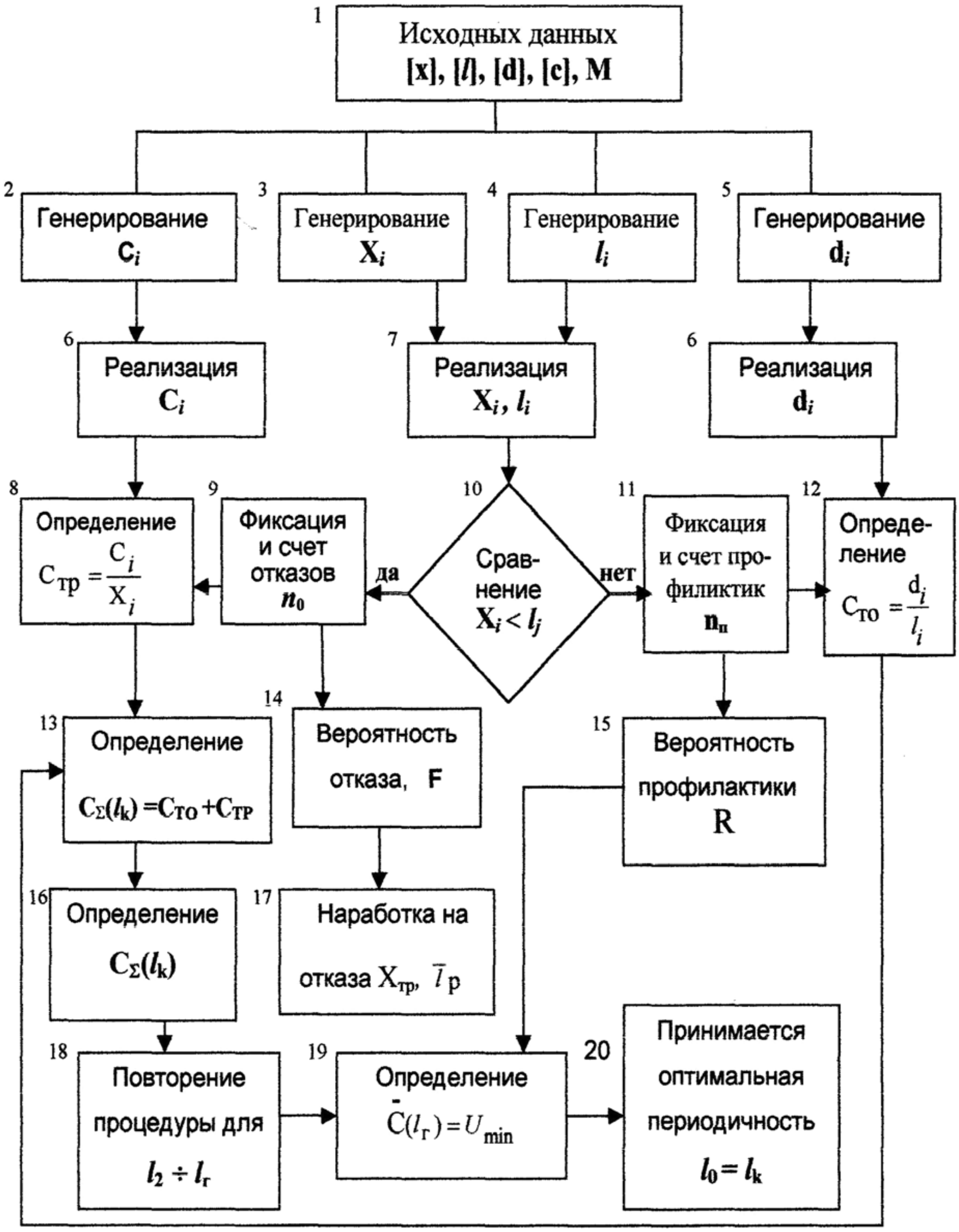


Рис. 18. Блок-схема алгоритма моделирования оптимальной периодичности ТО технико-экономическим методом

9. Замыкающая проверка полученных результатов осуществляется по формуле

$$C_{\Sigma} = \frac{cF + dR}{l_0 R + \bar{l}_p F},$$

где c и d – средние исходные значения стоимости устранения отказа и операций технического обслуживания;

l_0 – оптимальное значение периодичности ТО;

$\bar{l}_p$ - средняя наработка на отказ:

$$\bar{l}_p \cong \overline{X}_{\text{ТР}} = \frac{\sum_{Z=1}^{Z} X_Z}{n_0},$$

где Z – количество событий оптимального цикла, соответствующих отказу.

4.3. Задания к выполнению самостоятельной работы

По алгоритмам (см. рис. 17 и 18) составить на одном из алгоритмических языков программу моделирования оптимальной периодичности ТВ.

Контрольные вопросы

1. Перечислите методы определения и корректирования периодичности технических воздействий.
2. Особенности метода определения периодичности ТВ по допустимому уровню безотказности элементов автомобиля.
3. Особенности технико-экономического метода определения оптимальной периодичности ТВ.
4. Укажите по алгоритму последовательность действий при имитационном моделировании оптимальной периодичности ТВ по допустимому уровню безотказности.
5. Особенности и содержание блоков генерирования случайных величин.
6. Целевая функция технико-экономического метода оптимизации периодичности ТВ и её содержание.
7. Расскажите по алгоритму последовательность имитационного моделирования оптимальной периодичности ТВ технико-экономическим методом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Равномерно распределенные случайные числа

1. 04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 9627 93 36
2. 08 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 6928 23 91
3. 35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 9745 02 24
4. 59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 03	13 0212 48 92
5. 46 05 88 52 36	01 39 09 22 26	77 28 14 40 77	93 9108 36 47
6. 32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
7. 69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 08 30	18 7439 24 23
8. 19 56 54 14 30	01 75 8753 79	40 41 92 15 85	66 6743 68 06
9. 45 15 51 49 38	19 47 6072 46	43 66 79 45 43	59 0479 09 33
10. 94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 38 88 15 53	01 5403 54 56
11. 98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
12. 33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
13. 80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
14. 79 75 24 91 40	71 96 1282 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
15. 18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 .01 02 46 74	05 45 56 14 27
16. 74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
17. 54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
18. 11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
19. 43 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
20. 69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15
21. 09 18 82 05 97	32 82 53 95 27	04 22 08 63 04	83 38 98 73 74
22. 90 04 58 54 97	51 98 15 06 54	94 93 88 19 97	91 87 07 61 50
23. 73 18 95 02 07	47 67 72 62 69	62 29 06 44 64	27 12 46 70 18
24. 75 76 87 64 90	20 97 18 17 49	90 42 91 22 72	95 37 50 58 71
25. 54 01 64 40 56	66 28 13 10 03	20 68 22 73 98	20 71 45 32 95

Равномерно распределенные случайные числа

1.	10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
2.	37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
3.	08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
4.	99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
5.	12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
6.	66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
7.	31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 06	86 79 90 74 39
8.	85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
9.	63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 83 87 09
10.	73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
11.	98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
12.	11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
13.	83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 06 78	18 47 54 06 10
14.	88 68 54 02 08	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
15.	99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
16.	65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
17.	80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
18.	74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	43 52 16 42 37
19.	69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
20.	09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
21.	91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
22.	80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
23.	44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 72 65 75	57 60 04 08 81
24.	12 55 07 37 42	11 10 03 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
25.	63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82

Рекомендательный библиографический список

1. *Вентцель, Е. С.* Теория случайных процессов и её инженерные приложения / Е. С. Вентцель и др. – М.: Наука, 1991. - 384 с.

2. *Максимов, С. А.* Математическое моделирование. Прикладные задачи: учеб. пособие. / С. А. Максимов; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1997. – 192 с.

3. Моделирование производственных процессов автомобильного транспорта : метод. указания к лаб. работам / сост.: С. И. Коновалов, Д. Б. Алёхин; Владим. гос. ун-т; – Владимир, 2002. - 56 с.

4. Моделирование случайных процессов автомобильного транспорта: метод. указания к самостоятельной работе: в 2 ч. Ч 1. – / сост.: С. И. Коновалов, В. В. Савин; Владим. гос. ун-т; – Владимир, 2004. – 63 с.

5. *Новиков, О. А.* Прикладные вопросы теории массового обслуживания / О. А. Новиков и др. – М. : Совет. радио, 1969. – 400 с.

6. *Федоренко, Ю.* Алгоритмы и программы на Qbasic. Учебный курс / Ю. Федоренко. – СПб.: Питер, 2002. – 228 с.

Оглавление

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА

Методические указания к самостоятельной работе
Часть 2

Составители
КОНОВАЛОВ Станислав Иванович
САВИН Вячеслав Викторович

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой доцент А.Г. Кириллов

Редактор Р.С. Кузина
Корректор Л.В. Пукова
Компьютерная верстка С.В. Павлухина
ЛР № 020275. Подписано в печать 26.01.05
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать на ризографе. Усл.-печ. л. 3,02. Уч. - изд. л.3,07. Тираж 200 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.