

Владимирский государственный университет

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТОМОГРАФИЯ

Методические указания к лабораторным работам

Владимир 2002

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра физики и прикладной математики

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТОМОГРАФИЯ

Методические указания к лабораторным работам

Составитель
А.А. ЗАЯКИН

Владимир 2002

УДК 518

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики
Владимирского государственного университета
М.С. Беспалов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Вычислительная томография: Метод. указания к лабораторным работам /Владим. гос. ун-т; Сост. А.А. Заякин. Владимир, 2002. 24 с.

Рассматриваются методы восстановления локальных характеристик объектов по результатам интегральных измерений. Значительное внимание уделено вопросам практического применения алгоритмов реконструкции изображений в вычислительном эксперименте.

Предназначены для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 010200 – прикладная математика и информатика.

Табл. 2. Ил. 4. Библиогр.: 5 назв.

УДК 518

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ТОМОГРАФИИ

В широком классе задач физики и техники исследователей интересует пространственная структура неоднородных объектов, недоступных для локальных измерений. Это могут быть объекты самой разнообразной природы: биологические в задачах медицинской диагностики; потоки газа, жидкости в гидродинамике; низкотемпературная и высокотемпературная плазма в физике газового разряда и управляемого термоядерного синтеза; промышленные изделия и элементы конструкций в дефектоскопии; залежи полезных ископаемых и состояние атмосферы в геофизике и физике атмосферы. Информацию о локальных характеристиках таких объектов приходится получать по результатам измерений их косвенных проявлений, решая обратную задачу. Исследуемый объект при этом облучается извне или сам является излучателем.

Томография – это метод проведения физического эксперимента и последующей обработки данных, позволяющий перейти от измеряемых интегральных величин к элементам внутренней структуры объекта. Наибольшее признание вычислительная томография завоевала в рентгеновской диагностике: первая достаточно качественная томограмма головного мозга человека была получена в 1972 г., а уже через несколько лет серийно выпускаемые томографические установки работали более чем в 2000 клиниках мира. В настоящее время методы вычислительной томографии благодаря своей универсальности и высокой информативности все глубже проникают в физический эксперимент и различные области техники. Современную томографию можно без преувеличения считать всеволновой. В зависимости от характера конкретной задачи восстановление структуры объекта может основываться на регистрации пучков электронов, ионов, нейтронов, фотонов во всем диапазоне электромагнитного спектра, звуковых волн. Исследуемый объект при этом облучается извне или сам является излучателем, просвечивающие источники могут быть когерентными и некогерентными. Детектироваться могут как широкие, так и узкие участки спектров испускания, поглощения, рассеяния.

Техника сбора экспериментальных данных в различных задачах томографии существенно отличается, однако можно выделить некоторые общие принципы, следование которым позволяет, применяя методы вычислительной томографии, решить обратную задачу восстановления внутренней структуры объекта. Рассмотрим эти принципы на примере, относящемся к рентгеновской диагностике. Схема проведения эксперимента представлена на рис. 1. Излучение рентгеновского источника S , сколлимированного до диаметра порядка одного миллиметра, проходит через исследуемый объект и регистрируется детектором D . Луч, прошедший через объект, имеет интенсивность, меньшую исходной благодаря поглощению части излучения. Детектор, стоящий на выходе, регистрирует некоторую интегральную величину этого поглощения – *луч-сумму*. Далее, перемещая луч по определенному закону в выбранной плоскости (например, парал-

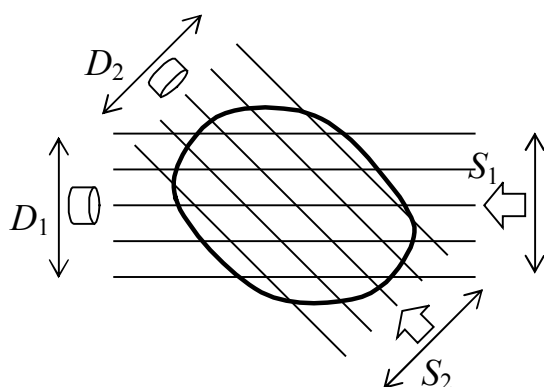


Рис.1. Схема томографического эксперимента. Получение двух проекций

лельно самому себе или веером с некоторым углом раствора), получают набор луч-сумм, определяющий одномерную *проекцию*. На рис. 1 представлено параллельное смещение зондирующих лучей – в этом случае одной проекции соответствует некоторый угол относительно выбранного направления. Поворачивая луч в той же плоскости на малый угол, повторяют процесс регистрации луч-сумм и получают новую проекцию и т.д. Процесс сканирования по углу продолжается до тех пор, пока полный угол поворота не составит 180° . Основные требования к технике сбора данных: лучевое распространение зондирующего излучения, линейность поглощения, по возможности более полный охват углов сканирования.

Алгоритмы линейной двумерной томографии

С математической точки зрения процедура восстановления внутренней структуры объекта по измеренным проекциям является типичной задачей интегральной геометрии. Пусть $f(x, y)$ - достаточно гладкая функция (бу-

лельно самому себе или веером с некоторым углом раствора), получают набор луч-сумм, определяющий одномерную *проекцию*. На рис. 1 представлено параллельное смещение зондирующих лучей – в этом случае одной проекции соответствует некоторый угол относительно выбранного направления. Поворачивая луч в той же плоскости на малый угол, повторяют процесс регистрации луч-сумм и полу-

дем называть ее – *функция источника*), определенная в области реконструкции на плоскости XOY ; $L(\rho, \theta)$ - некоторое семейство прямых линий, положение которых задается углом θ между лучом и положительным направлением оси OY и прицельным расстоянием ρ луча от начала координат; s – измеряемое вдоль прямой L расстояние. Известны интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - \rho \cos \theta, y - \rho \sin \theta) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - \rho \cos \theta, y - \rho \sin \theta) ds \quad (1)$$

требуется найти функцию источника. В такой постановке задача отыскания $f(x, y)$ решается путем применения обратного преобразования Радона:

$$f(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots ds d\theta \quad (2)$$

Во внутреннем интеграле подразумеваются главные значения в смысле Коши. Рис. 2 поясняет результаты инверсии Радона. На этом рисунке L - луч, пересекающий объект; O - начало декартовой системы координат; A - основание перпендикуляра, опущенного из т. O на луч L ; θ - угол между лучом и направлением оси OY ; OA - прицельное расстояние от точки O до луча L ; r и φ - полярные координаты той точки, в которой отыскивается функция источника $f(x, y)$.

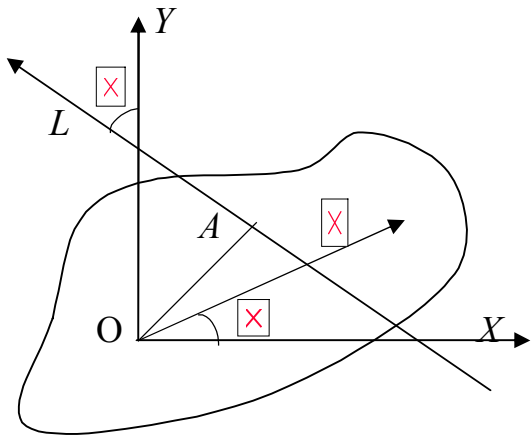


Рис. 2. К определению смысла переменных, используемых в алгоритмах реконструкции изображений

В приведенных выше обозначениях уравнение луча L ρ, θ , просвечивающего изображение, можно записать так:

$$\begin{aligned} r \cos \theta - \varphi &= \rho && \text{в полярных координатах;} \\ x \cos \theta + y \sin \theta &= \rho && \text{в декартовых координатах.} \end{aligned}$$

Параметры ρ и θ не следует путать с полярными координатами. Прицельное расстояние ρ может быть как положительным, так и отрицатель-

ным – знак определяется из уравнения луча. Угол между направлением луча и осью OY изменяется в пределах $0 \leq \theta < \pi$.

Формула инверсии Радона дает точное аналитическое решение задачи реконструкции функции источника по интегральным измерениям. Однако при ее практическом применении возникают проблемы, связанные с ограниченным набором экспериментальных данных. Дискретизация задачи, выполняемая на той или иной стадии решения, а также неизбежные погрешности экспериментальных данных переводят задачу отыскания решения в класс существенно некорректных в классическом понимании задач. Поэтому любой алгоритм численного решения нуждается в регуляризации, то есть в использовании дополнительных ограничений качественного или количественного характера на функцию источника, согласованных со случайной ошибкой проекционных данных и принятой дискретной моделью.

В настоящее время известно большое количество алгоритмов, применяемых при реконструкции изображений. Это связано как с исключительным разнообразием самих постановок томографических задач и способов их экспериментальной реализации, так и с непрекращающимися попытками разработать такой алгоритм, который превосходил бы имеющиеся по одному-двум практически важным параметрам задачи:

- быстродействию;
- требованиям к машинной памяти;
- разрешающей способности;
- контрасту;
- количеству необходимых проекций.

Несколько условно все алгоритмы можно разбить на две категории. К первой относятся те из них, которые непосредственно базируются на общих, широко известных методах вычислительной математики. Это классические способы прямого обращения матриц, итерационные алгоритмы *ART* и *SIRT*, метод максимума энтропии, метод Монте-Карло.

Вторую составляют алгоритмы специального типа, созданные применительно именно к задачам вычислительной томографии. В эту группу входят схемы послонного расщепления, техника полиномиальных разложений, алгоритмы фурье-синтеза, обратного проецирования с фильтрацией, а также непосредственного использования преобразования Радона.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ РЕКОНСТРУКЦИИ

Алгебраические алгоритмы реконструкции образуют большую группу итерационных алгоритмов, в которых задача с самого начала решается в дискретной форме.

Накинем на область реконструкции прямоугольную сетку, содержащую J ячеек (элизов) таким образом, чтобы она покрывала реконструируемое изображение. На рис.3 показана сетка, содержащая $J = 6 \cdot 6 = 36$ элизов.

Пронумеруем элизы слева направо и сверху вниз. Определим вектор изображения X размерностью J , компоненты которого X_j равны среднему значению функции источника в j -м элизе ($j = 1 \dots J$). Пусть в томографическом эксперименте выполнены измерения луч-сумм $\Phi \rho_n, \theta_m$ для фиксированного набора прицельных расстояний $\{\rho_n | n = 1 \dots N\}$ и ракурсов $\{\theta_m | m = 1 \dots M\}$. Пронумеруем луч-суммы

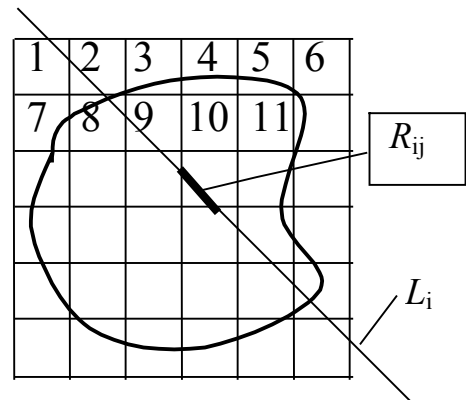


Рис. 3. Элемент проекционной матрицы $R_{i,j}$ равен длине i -го луча внутри j -го элиза.

и представим эти данные также в виде вектора Y с размерностью I , равной общему количеству лучей ($I = N \cdot M$). Тогда интегральные уравнения (1) можно заменить их дискретным аналогом в матричной форме

$$R \cdot X = Y, \quad (3)$$

где R - проекционная матрица, содержащая I строк и J столбцов, каждый элемент которой $R_{i,j}$ равен длине i -го луча внутри j -го элиза, и таким образом учитывает вклад площади каждого элиза в измеряемую луч-сумму.

Размерность вектора Y равна произведению количества лучей в проекции на количество проекций, – в задачах малоракурсной томографии это число имеет порядок 10^3 (100 - 200 лучей в проекции, 5 – 10 ракурсов), а для современных рентгеновских томографов со скромными параметрами достигает 10^5 и более. Примерно такой же порядок величины имеет размерность и вектор X . Если число лучей, проходящих через область реконструкции, равно числу элизов, то в принципе система линейных уравнений (3) может быть решена относительно величин X_j . Однако, с одной сто-

роны, дискретизация функции источника вносит существенные ошибки, а с другой, сами экспериментальные значения Y_i измерены с ограниченной точностью. Кроме того, трудно выбрать направления просвечивающих лучей, которые давали бы независимую систему уравнений. Поэтому на практике число просвечивающих лучей должно быть больше, чем число элизов в области реконструкции.

Задача реконструкции функции источника по проекционным данным сводится, таким образом, к задаче решения системы линейных алгебраических уравнений большой размерности и, как правило, с плохо обусловленной матрицей. Размерность проекционной матрицы огромна – I строк и J столбцов. Решение полученной системы путем прямого обращения матрицы R требует значительных компьютерных ресурсов, а при наличии погрешностей в проекционных данных приводит к необходимости применения регуляризирующих алгоритмов и в настоящее время практически не используется. Разработано большое количество эффективных итерационных алгоритмов, учитывающих специфические особенности техники сбора данных в различных томографических экспериментах, один из которых – простейший по структуре алгоритма – метод *ART* представлен ниже.

Метод ART (algebraic reconstruction technique)

Согласно этому методу нужно:

a) выбрать некоторое начальное приближение вектора дискретной функции источника $X^{(0)}$;

b) на k -й итерации взять одну из луч-сумм из всего набора проекционных данных, рассчитать элементы соответствующей строки проекционной матрицы R и записать их ненулевые значения в вектор $SR^{(k)}$. Компоненты этого вектора – длина рассматриваемого луча в тех элизах, которые пересекает рассматриваемый луч;

c) если рассматриваемый луч пересекает хотя бы один элиз, то на k -й итерации произвести коррекцию дискретной функции источника $X^{(k)}$ по формуле

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \frac{Y_i - (SR^{(k)}, X^{(k)})}{(SR^{(k)}, SR^{(k)})} SR^{(k)}, \quad (4)$$

d) если не достигнута приемлемая точность реконструкции функции источника, перейти к следующей итерации. Рекомендуется перебирать луч-суммы в циклической последовательности: $i = k \bmod(I) + 1$, то есть сначала перебирают каждый из I лучей, затем снова возвращаются к первому и так далее.

Таким образом, в методе *ART* на k -й итерации рассматривается только один луч, а корректируются лишь те компоненты вектора $X^{(k)}$, которым соответствуют элизы, пересекаемые данным лучом, остальная часть изображения остается без изменений. Согласно формуле (4) изменение значений компонент вектора $X^{(k)}$ пропорционально разности $Y_i - (SR^{(k)}, X^{(k)})$, то есть ошибке в одном из линейных уравнений системы (3) перед k -й итерацией, и пропорционально длине рассматриваемого луча в соответствующем элизе. Нетрудно показать, что после выполнения k -й итерации выполняется равенство $Y_i = (SR^{(k)}, X^{(k+1)})$, то есть компоненты вектора $X^{(k+1)}$ удовлетворяют в точности рассматриваемому уравнению.

Отдельные шаги метода *ART* достаточно просты для эффективной реализации на компьютере. Хотя размерность проекционной матрицы R огромна, она содержит большое количество нулевых элементов. Например, для квадратной сетки $k \times k$ в каждой строке R содержится не более чем $2k-1$ ненулевых элементов – это весовые множители тех элизов, которые пересекает соответствующий луч. Положение и величину ненулевых компонент строки проекционной матрицы легко можно определить исходя из геометрического расположения луча относительно сетки. Таким образом, нет необходимости запоминать всю матрицу. На очередном шаге итерационного процесса необходимо иметь лишь одну строку этой матрицы, все компоненты которой легко рассчитать.

Выбор начального приближения $X^{(0)}$ оказывает большое влияние на конечный результат итерационной процедуры, особенно в случаях, когда вследствие ограниченности по быстродействию и стоимости средств число итераций не может быть слишком большим. К хорошим результатам приводит учет в начальном приближении различного рода априорной информации о функции источника. Если таких данных нет, то можно рассчитать среднее значение функции источника по всем проекционным данным и

взять его в качестве начального приближения. Изменение порядка следования равенств в системе (3) может также существенно влиять на реальные характеристики алгоритма. Оказывается целесообразным последовательно брать уравнения, описывающие лучи одного ракурса, а уже затем переходить к лучам ракурса, при котором направление на источник образует большой угол по сравнению с предыдущим.

Учет априорной информации

Эффективность итерационных процедур при реконструкции изображений часто можно повысить посредством введения некоторых операций обработки векторов изображений между различными итерациями. Указанные операции в литературе получили название искусственных приемов, а если в них учитывается априорная информация о структуре функции источника, – *дескриптивной регуляризации*. В целом эти приемы повышают устойчивость решения к случайным изменениям проекционных данных.

В алгоритм могут быть введены параметры релаксации λ_k ($\varepsilon_1 \leq \lambda_k \leq 2 - \varepsilon_2 | \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$). В этом случае формула (4) принимает вид:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k \frac{Y_j - (SR^{(k)}, X^{(k)})}{(SR^{(k)}, SR^{(k)})} SR^{(k)}. \quad (5)$$

Выбор небольшого значения релаксационного параметра оказывает положительное влияние на качество реконструкции, уменьшает влияние погрешностей в уравнениях и предупреждает появление ложных фрагментов в изображении.

Если известно, что функция источника ограничена во всей области реконструкции или в какой-то ее части $\mu_1 \leq f(x, y) \leq \mu_2$, то можно внести поправки в вектор изображения:

$$X_j^{(k)} = \begin{cases} \mu_1 & \text{при } X_j^{(k)} < \mu_1 \\ X_j^{(k)} & \text{при } \mu_1 \leq X_j^{(k)} \leq \mu_2 \\ \mu_2 & \text{при } X_j^{(k)} > \mu_2 \end{cases}. \quad (6)$$

Таким же способом можно учесть неотрицательность функции источника. В некоторых задачах неразрушающего контроля заранее известно о наличии в изображении лишь двух различных уровней плотности, что мо-

жет быть учтено в итерационных алгоритмах по формулам, аналогичным (6). Подобного рода корректировка очередного приближенного значения вектора изображения обычно производится после каждой итерации.

Во многих случаях изображения содержат области, в пределах которых значения функции источника с большой точностью можно считать постоянными, а также области со значительными вариациями этих же величин. Селективное сглаживание позволяет получать изображения такого типа следующим образом. Пусть v_1 обозначает значение функции источника в j -м элизе, а v_2, v_3, \dots, v_9 – значения функции источника в его окрестности, как это показано с помощью матрицы.

Пусть t - пороговое значение, w_1, w_2 и w_3 - сглаживающие весовые коэффициенты. После селективного сглаживания значение функции источника в j -м элизе будет равно:

| | | |
|-------|-------|-------|
| v_6 | v_2 | v_7 |
| v_3 | v_1 | v_4 |
| v_8 | v_5 | v_9 |

$$v_1^* = \frac{w_1 v_1 + w_2 \sum_{i=2}^5 f_i v_i + w_3 \sum_{i=6}^9 f_i v_i}{w_1 + w_2 \sum_{i=2}^5 f_i + w_3 \sum_{i=6}^9 f_i}, \text{ где } f_i = \begin{cases} 1, & \text{если } |v_i - v_1| < t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (7)$$

Величину порогового коэффициента t подбирают при тестировании алгоритма исходя из имеющихся данных о структуре восстанавливаемого изображения, весовые коэффициенты можно взять равными: $w_1=9, w_2=3, w_3=1$. Если j -й элиз находится на краю изображения и поэтому некоторые из значений v_i не определены, то соответствующие им коэффициенты f_i полагаются равными нулю. Селективное сглаживание применяют не на каждой итерации, а лишь тогда, когда номер итерации становится кратным числу лучей L .

3. СВЕРТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕКОНСТРУКЦИИ

Сверточный алгоритм реконструкции является типичным представителем большой группы алгоритмов линейной двумерной томографии, основанных на так называемых методах интегральных преобразований. В этих методах решение записывают в аналитическом виде, и лишь на конечном этапе производится адаптация формул обращения к дискретизованным проекционным данным.

Благодаря простоте своей реализации и высокой точности вычислений сверточный алгоритм реконструкции нашел наибольшее применение в реконструктивной томографии для параллельного пучка. Обратимся к обратному преобразованию Радона (2), которое дает точное аналитическое решение задачи реконструкции для неограниченного набора данных.

Обратим внимание на особенности во внутреннем интеграле по переменной ρ :

- бесконечные пределы интегрирования;
- дифференцирование дискретных проекционных данных;
- при $\rho = \rho^* = r \cos(\theta - \varphi)$ подынтегральное выражение расходится.

Первое обстоятельство не должно смущать нас, поскольку область реконструкции всегда ограничена в пространстве и значения функции $\Phi(\rho, \theta)$ обращаются в нуль вне конечной области. Второе и третье обстоятельства доставляют существенные проблемы при численной реализации алгоритмов реконструкции. Здесь будем понимать внутренний интеграл в смысле его главного значения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\rho)}{\rho - \rho^*} d\rho = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\rho^* - \epsilon} f(\rho) d\rho + \int_{\rho^* + \epsilon}^{\infty} f(\rho) d\rho \right]$$

Даже если указанный интеграл существует, вычислить его не просто. Один из методов вычисления - *метод регуляризации* - предполагает определение множества $\{\psi_A \mid A > 0\}$ функций вещественного переменного, зависящих от параметра A , таких, чтобы выполнялось равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_A(\rho)}{\rho - \rho^*} d\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\rho)}{\rho - \rho^*} d\rho$$

(8)

Численную оценку теперь можно произвести путем вычисления свертки при значении параметра A , выбранном достаточно большим, с тем чтобы левая и правая части указанного выше соотношения были бы равны с приемлемой для рассматриваемой задачи точностью. Если функция ψ_A обладает некоторыми дополнительными свойствами, например, ограничена по величине, дифференцируема и т.д., то значение свертки можно найти достаточно просто – применяя интегрирование по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\rho, \theta) \psi_A(u) du = \dots$$

В этом соотношении первое слагаемое равно нулю, поскольку значения функции $\Phi(\rho, \theta)$, представляющей набор экспериментальных данных, обращаются в нуль вне конечной области.

Существует большое разнообразие семейств *регуляризующих* функций ψ_A , общий способ построения которых выражает теорема регуляризации.

Теорема регуляризации.

Пусть для каждого вещественного значения A существует вещественная интегрируемая функция F_A , удовлетворяющая при $u \geq 0$ условиям:

- а) $0 \leq F_A(u) \leq 1$, $F_A(u) = 0$, если $u \geq 0$;
- б) $F_A(u)$ – монотонно невозрастающая функция;
- в) $\lim_{A \rightarrow \infty} F_A(u) = 1$.

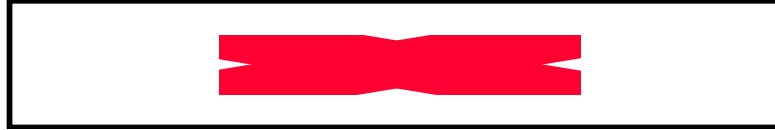
Пусть

$$\psi_A(u) = \dots$$

Тогда множество $\{\psi_A | A > 0\}$ является семейством регуляризующих функций.

Функцию F_A обычно называют *функцией «окна»*, она играет роль фильтра с шириной полосы пропускания A в спектре частот проекционных данных. Некоторые из наиболее часто используемых функций приведены в табл. 1. Во всех случаях согласно условиям теоремы определения справедливы лишь при $0 \leq u < A/2$. Заметим, что прямоугольная и косинусная функции представляют собой частные случаи обобщенной функции Хэмминга соответственно при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$.

Производная регуляризующей функции ψ_A может быть легко вычислена:



где $q_A(u)$ – сворачивающая функция. Задача реконструкции свелась к задаче численного вычисления интеграла:

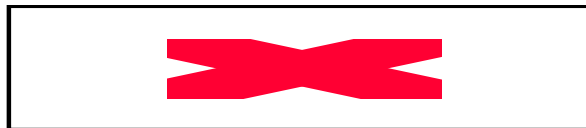


Таблица 1

Определение часто используемых функций «окна»

| Название функции "окна" | $F(v)$ |
|--|---------------------------------------|
| Прямоугольный импульс, ограниченный по полосе частот | 1 |
| Косинусная | $\cos(\pi v/A)$ |
| Синусная | $\sin(\pi v/A)/(\pi v/A)$ |
| Обобщенная функция Хэмминга | $\alpha + (1 - \alpha)\cos(2\pi v/A)$ |

Применение сверточного алгоритма

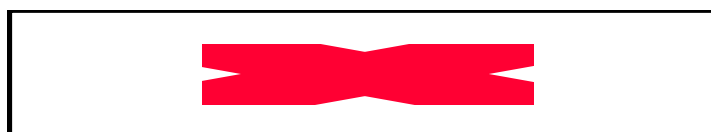
Пусть проекционные данные получены в эксперименте с параллельными эквидистантными лучами и представлены набором луч-сумм $\Phi(\rho, \theta)$:

$$\{ \Phi(nd, m\Delta) \mid n = -N, \dots, 0, \dots, N; m = 0, \dots, M-1 \},$$

где d – расстояние между ближайшими лучами в проекции, а $M\Delta = \pi$. Таким образом, общее количество лучей, равное произведению количества ракурсов на число лучей в одной проекции, составляет $M(2N+1)$.

С целью сокращения объема вычислений:

1) вычисляют значения сворачивающей функции $q_A(\rho^* - \rho)$ для конечно-го набора значений $\rho^* - \rho = n'd - nd$, где $n', n = -N, \dots, N$:



2) вычисляют свертку $[\Phi * q_A]$, аппроксимируя интеграл интегральной суммой Римана:

$$\boxed{\text{[Redacted]}} \quad (10)$$

3) вычисляют функцию источника в точке с координатами (r, φ) :

$$\boxed{\text{[Redacted]}}$$

где величины [Redacted] находят путем линейной интерполяции дискретной свертки $p(n'd, m\Delta)$ по ближайшим значениям $n'd \leq r \cos(m\Delta - \varphi) < (n' + 1)d$.

Приведенный способ вычислений более эффективен, чем применение напрямую формул свертки, поскольку нет необходимости вычислять свертку для каждого элиза и для каждого ракурса, а достаточно повторить эту процедуру всего лишь по одному разу для каждого луча и для каждого ракурса. Привлекательность сверточного алгоритма для параллельного пучка обусловлена также тем, что вычисления под отдельным ракурсом могут начинаться, как только зарегистрированы все данные под этим ракурсом, т.е. до полного завершения процесса сканирования. Заметим также, что этот алгоритм позволяет восстанавливать функцию источника отдельно в какой-либо выделенной области или группе точек, не затрачивая времени на реконструкцию других областей изображения.

Выбор функции «окна» $F_A(u)$

Легко заметить, что в свернутой проекции (10) используется обратное преобразование Фурье, в котором проекционные данные $\Phi(r, \theta)$ выступают как спектр частот. Использование функции окна F_A является фильтром в этом спектре:

$$-\frac{A}{2} \leq F_A \leq \frac{A}{2}.$$

Ширина полосы пропускания функции окна равна A . Отсюда понятно, что увеличение параметра A , как того требует теорема о регуляризации, неизбежно приведет к появлению в спектре фурье восстановленного изо-

бражения высоких частот, на которые мы не вправе рассчитывать, поскольку в нашем распоряжении имеется лишь дискретный набор проекционных данных. Исходя из этого, величину параметра A следует ограничить. Исследование вопроса об оптимальном выборе вида функции окна и ширины полосы пропускания неразрывно связано не только со способом получения проекций (количество лучей, количество ракурсов), но также зависит от погрешности измерений луч-сумм и предполагаемой структуры восстанавливаемого изображения. Рекомендуется выбирать параметр A в соответствии с критерием Найнквиста: $A = 1/d$, где d - расстояние между соседними лучами в одном ракурсе.

Из функций окна рекомендуется использовать обобщенную функцию Хемминга. Варьируя параметр α , можно также управлять спектром частот: прямоугольная функция окна при $\alpha = 1$ используется, если ошибки измерения очень маленькие, а функция изображения достаточно гладкая, в ее спектре нет высоких частот. Чем меньше параметр α , тем больше сказывается шум, но появляется высокочастотный спектр, что позволяет восстановить для незашумленных данных детали изображения небольшого размера.

Основное преимущество сверточного алгоритма для параллельного пучка – это простота вычислений, небольшой объем памяти, требуемой для решения задачи. В том случае, когда имеется большое количество достаточно точных данных и измерения выполнены с полным охватом углов от 0 до 180° , сверточный алгоритм является, по-видимому, наиболее эффективным по сравнению с другими алгоритмами.

В ряде томографических задач, например, при диагностике газовых потоков и плазмы, проекционные данные оказываются неполными из-за наличия внутри области реконструкции непрозрачных зон, препятствующих прохождению излучения. В других случаях из-за сложности экспериментальных установок приходится ограничиваться небольшим числом ракурсов – не более 10. При этом возникает задача с недоопределенными данными, для решения которой лучше приспособлены алгебраические итерационные алгоритмы, не требующие полного охвата углов сканирования и позволяющие достаточно просто ввести в алгоритм разнообразную априорную информацию.

4. ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ

Важной стороной деятельности специалистов, разрабатывающих и совершенствующих алгоритмы вычислительной томографии, является тщательная проверка предлагаемых новых вариантов на стандартных, унифицированных тест-объектах (фантомах). Фантом может быть как чисто аналитическим, так и выполненным в виде физического объекта, с которым ставится не только вычислительный, но и реальный томографический эксперимент. Необходимость тестирования алгоритмов на фантомах обусловлена тем, что, как правило, эти алгоритмы содержат параметры, правильный выбор которых позволяет подчеркивать те или иные детали функции источника. В алгебраических методах реконструкции такими параметрами являются:

- количество итераций;
- начальное приближение вектора дискретной функции источника;
- последовательность перебора лучей в итерационном процессе;
- различные приемы дескриптивной регуляризации.

В сверточном алгоритме для параллельного пучка важное значение имеет выбор сворачивающей функции и ее параметров.

Реальный томографический эксперимент является достаточно сложным, а соответствующие установки дорогостоящими, поэтому на стадии разработки проекта осуществляется выбор алгоритма, который обеспечивал бы реконструкцию изображения с приемлемым качеством. Фантом, на котором тестируется алгоритм, должен отражать основные детали в реконструируемом изображении. В этом случае удастся не только подобрать параметры алгоритма реконструкции, но и сформулировать наиболее оптимальные требования к технике сбора экспериментальных данных – количеству лучей в проекциях, количеству ракурсов.

В рентгеновской и γ -томографии получили известность фантомы Кормака, простейший из которых изображен на рис. 4,а. В данном случае компоненты фантома изготавливаются из алюминия (заполненные области) и люсита (незаполненная внутренняя часть круга). Отношение коэффициентов поглощения алюминия и люсита равно примерно 3, что имитирует ситуацию, имеющую место при рентгенодиагностике опухоли головного

мозга: алюминию ставятся в соответствие кости черепа и пораженные участки, люситу – здоровый мозг. Некоторые другие варианты фантомов для тестирования алгоритмов показаны на рис. 4 б, в, г.

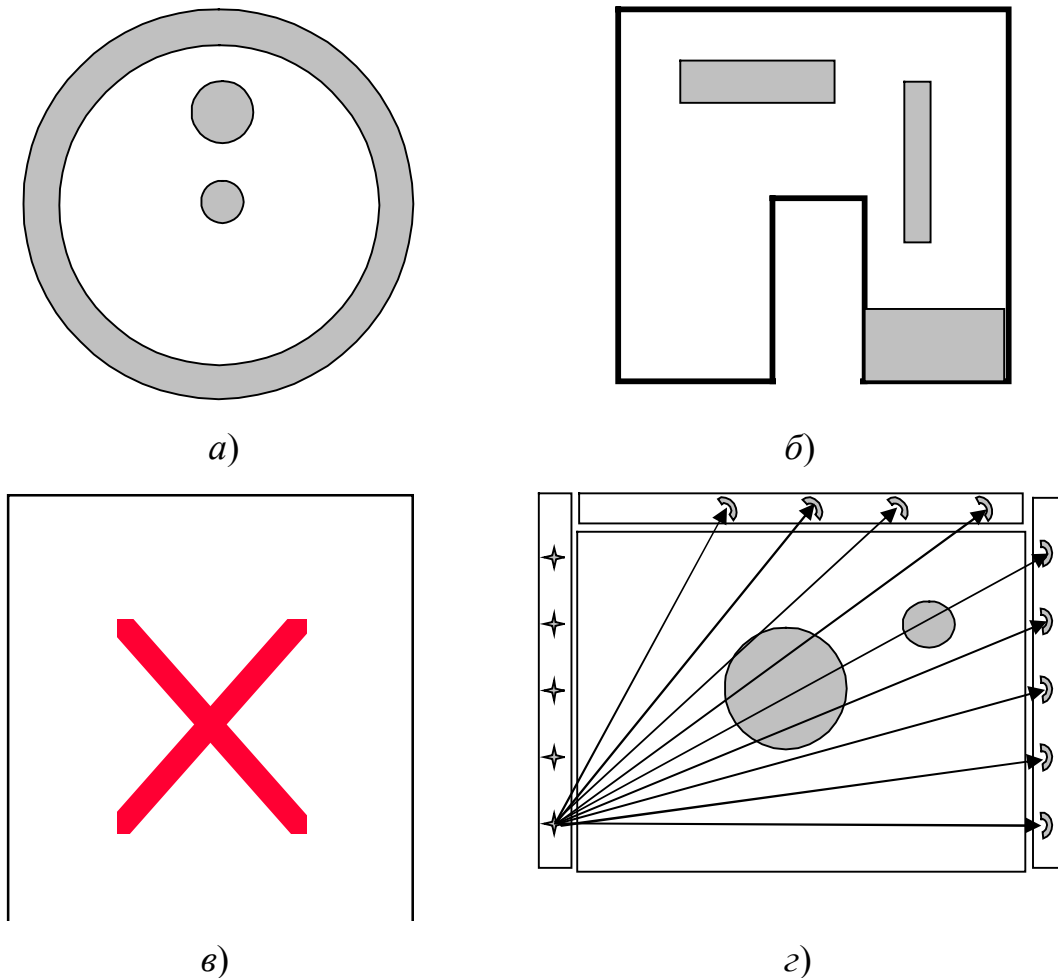


Рис.4. Варианты фантомов для тестирования алгоритмов в вычислительном эксперименте: а - фантом Кормака; б - прямоугольный; в - два «гаусса»; г - фантом для геотомографии

Прямоугольный фантом использовался в томографическом эксперименте по измерению пространственного распределения плотности энергии несфокусированного лазерного пучка на выходной апертуре мощного лазера. Измерения луч-сумм выполнялись с помощью болометрического томографа, представляющего собой несколько (4 - 6) решеток с эквидистантно расположенными металлическими проволочками малого диаметра. При взаимодействии лазерного излучения с проволочками они нагреваются, увеличивается их сопротивление, изменение которого регистрируется с

помощью мостовой схемы для каждой проволочки отдельно. При соотношении между диаметром проволочек и расстоянием между ними в одной решетке порядка 1 : 100 томограф вносит небольшие искажения в проходящий через него лазерный пучок. Общее количество проволочек – «просвечивающих лучей» – в таком эксперименте составляет 400 – 500. В реконструируемом изображении присутствуют значительные градиенты и участки с незначительными вариациями функции источника.

Фантом в виде «гаусса» задается аналитически простой формулой

$$f(x, y) = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (11)$$

На рис.4,в показаны изолинии фантома, состоящего из двух «гауссов», имеющих различные амплитуду f_0 , ширину σ , положение x_0, y_0 . Такие фантомы часто используются в газодинамике и при диагностике плазмы. Как правило, здесь также общее количество лучей невелико - порядка 1000. Возможно наличие непрозрачных зон и неполный охват углов сканирования.

На рис. 4,г представлен «геофантом», а также показано расположение источников и приемников в скважинах и на поверхности, характерное для исследования участков земной коры в геотомографии. Геотомография имеет ряд своих специфических черт. Это, прежде всего, большие размеры исследуемых участков, использование для просвечивания радиоволн с длиной волны порядка нескольких метров и соответствующее таким длинам волн пространственное разрешение. Возможно применение и сейсмического просвечивания. Сканирование по углу в таких экспериментах сильно ограничено, используется веерная схема просвечивания – одна проекция объединяет все лучи, испущенные одним источником, количество проекций равно количеству источников. Предпочтение при обработке данных отдается алгебраическим алгоритмам реконструкции, в данном случае хорошо зарекомендовал себя метод *ART*.

Методы оценки погрешности в алгоритмах

Оценка качества реконструкции фантома может быть произведена путем визуального сопоставления *2D* и *3D* графиков функции источника и восстановленного изображения. Более детальную картину восстановления

отдельных фрагментов фантома может дать сопоставление распределения функции источника фантома и восстановленного изображения в сечении вдоль линии, проходящей через эти фрагменты.

Оценка погрешности реконструкции в вычислительной томографии производится по следующим нормам:

$$D = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (F_j - X_j)^2}{\sum_{j=1}^J (F_j - \bar{F})^2}}, \quad R = \frac{\sum_{j=1}^J |F_j - X_j|}{\sum_{j=1}^J |F_j|}, \quad E = \max_j |F_j - X_j|, \quad (12)$$

где F_j - фантом, X_j - результат реконструкции, \bar{F} - среднее значение функции источника в фантоме.

Эти нормы служат мерой расстояния между фантомом и реконструированным изображением. Они обладают разной чувствительностью к различного рода ошибкам при реконструкции: D -норма чувствительна к малому числу больших отклонений, R -норма чувствительна к большому числу малых отклонений, E -норма характеризует максимальное отклонение.

5. ЗАДАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Целью выполнения лабораторных работ является практическое освоение методов реконструктивной томографии на основе проведения вычислительного эксперимента. При этом необходимо выполнить все этапы работ по созданию алгоритма и его тестированию на фантоме, провести анализ эффективности применения алгоритма в конкретной постановке задачи и сформулировать требования к оптимальной технике сбора данных в томографическом эксперименте.

Выбор конкретной постановки задачи – типа и характеристик фантома, схемы получения проекционных данных, а также задания исследовательского характера - остается за преподавателем. Выполнение всей работы рекомендуется разбить на этапы, каждый из которых контролируется преподавателем. Сдача завершенной работы осуществляется только при наличии отчета и отлаженных программ, по которым выполнялись расчеты.

Этапы выполнения работы и варианты заданий

1. Разработать алгоритм и программу вычисления элементов строки проекционной матрицы R на прямоугольной сетке.
2. Разработать алгоритм и программу вычисления сворачивающей функции $q_A(u)$ для различных функций окна.
3. Создать фантом, рассчитать луч-суммы, сформировать проекции.
4. Восстановить изображение фантома по проекционным данным, оценить погрешность реконструкции.
5. Анализ эффективности алгоритма. По выбору преподавателя выполнить одно из следующих заданий:
 - исследование зависимости погрешности реконструкции от количества лучей, количества ракурсов;
 - исследование влияния величины погрешности экспериментальных данных на качество реконструкции;
 - ввести в алгоритм реконструкции параметр релаксации, путем численного эксперимента найти его оптимальное значение (для метода ART);
 - исследовать значимость выбора начального приближения на эффективность алгоритма (для метода ART);
 - ввести в алгоритм возможность учета априорной информации о реконструируемом изображении, восстановить изображение (для метода ART), проанализировать результаты;
 - исследовать влияние ширины полосы пропускания функции окна на качество реконструкции (для сверточного алгоритма);
 - исследовать влияние параметра α функции Хемминга на качество реконструкции (для сверточного алгоритма);
 - оценить разрешающую способность алгоритма, влияние величины погрешности экспериментальных данных на разрешающую способность.
6. Сформулировать рекомендации к технике сбора экспериментальных данных рассмотренного томографического эксперимента.

Варианты заданий для выполнения лабораторных работ представлены в таблице 2.

Варианты заданий даны в табл. 2.

Варианты заданий

| Вариант | Фантом | Алгоритм | Кол-во про- екций | Кол-во лучей в проекции |
|---------|---------------|------------|----------------------|----------------------------|
| 1 | Кормак | <i>ART</i> | 25, 50, 100 | 50, 100 |
| 2 | Кормак | Сверточный | 25, 50 | 20, 50 |
| 3 | Прямоугольный | <i>ART</i> | 4, 6 | 100 |
| 4 | Прямоугольный | Сверточный | 6, 10 | 100 |
| 5 | «Гаусс» | <i>ART</i> | 4, 6 | 500 |
| 6 | «Гаусс» | Сверточный | 6, 10 | 500 |
| 7 | «Геофантом» | <i>ART</i> | 10 | 20 |

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям: основы реконструктивной томографии. – М., 1983. – 455 с.
2. Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. – Новосибирск: Наука, 1982. – 278 с.
3. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Вычислительная томография и физический эксперимент /УФН. – 1983. – Т.141. – Вып.3. – С.469 – 498.
4. Левин Г.Г., Вишняков В.Н. Вопросы реконструктивной томографии. – Новосибирск, 1985. – 196 с.
5. Зайдель А.Н., Островская Г.В. Лазерные методы исследования плазмы. – Л.: Наука, 1977. – 221 с.

Оглавление

| | |
|---|----|
| 1. Общие принципы томографии. | 3 |
| 2. Алгебраические алгоритмы реконструкции. | 7 |
| 3. Сверточный алгоритм реконструкции. | 12 |
| 4. Тестирование алгоритмов. | 17 |
| 5. Задания к лабораторным работам. | 20 |

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТОМОГРАФИЯ
Методические указания к лабораторным работам

Составитель

ЗАЯКИН Андрей Анатольевич

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор С.М. Аракелян

Редактор Е.А. Амирсейидова

Корректор В.В. Гурова

ЛР № 020275. Подписано в печать 05.02.02.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,45. Тираж 50 экз.

Заказ

Владимирский государственный университет.

Подразделение оперативной полиграфии

Владимирского государственного университета.

Адрес университета и подразделения оперативной полиграфии:

600000, Владимир, ул. Горького, 87.

E-mail: rio-m2@vpti.vladimir.su