

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Н. П. БАДАЛЯН

# МЕТОДЫ РАСЧЁТА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ

Учебное пособие



Владимир 2016

УДК 621.31  
ББК 31.26  
Б15

Рецензенты:

Доктор технических наук  
проректор по научной работе и международным связям  
Ковровской государственной технологической академии  
им. В. А. Дегтярева  
*Д. С. Потехин*

Доктор технических наук  
профессор кафедры электротехники и электроэнергетики  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*В. А. Шахнин*

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

**Бадалян, Н. П.**

Б15 Методы расчёта установившегося режима электроэнергетической системы. Специальные вопросы электрических систем : учеб. пособие / Н. П. Бадалян ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2016. – 136 с.  
ISBN 978-5-9984-0681-2

Предлагаются современные методы расчёта установившегося режима электроэнергетической системы при любой форме задания состояния электрической сети, когда при расчёте установившегося режима соответствующие математические модели представляются в виде системы нелинейных алгебраических уравнений. Построенные математические модели реализуются разными методами.

Предназначено для студентов электроэнергетических специальностей вузов по направлениям 13.03.02 и 13.04.02 – Электроэнергетика и электротехника всех форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 4. Табл. 10. Библиогр.: 20 назв.

УДК 621.31  
ББК 31.26

ISBN 978-5-9984-0681-2

© ВлГУ, 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие посвящено современным методам расчета режимов одной из подсистем энергосистемы – электрической системы.

Энергетическая система представляет собой совокупность электростанций, электрических и тепловых сетей, соединенных между собой и связанных общностью режима в непрерывном процессе производства, преобразования и распределения электрической энергии и тепла при общем управлении этим режимом, осуществляемом диспетчерской службой.

Электрическая часть энергетической системы, т. е. совокупность электрических станций, линий электропередач, преобразующих подстанций и потребителей электроэнергии, работающих как единое целое с точки зрения протекающих в ней физических процессов, называется электроэнергетической, или электрической, системой.

Расчет установившихся режимов таких электрических систем связан с большими математическими и вычислительными трудностями. Первоочередной задачей при расчете установившегося режима является построение соответствующей математической модели, которая представляется в виде системы нелинейных алгебраических уравнений. В настоящей работе рассматриваются три вида математических моделей, которые называются  $Y$ -,  $Z$ - и  $(Y-Z)$ -формами моделей. Для решения соответствующих нелинейных алгебраических уравнений применяется метод Ньютона – Рафсона.

Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений в  $Y$ - и  $Z$ -формах применяется также метод Ньютона – Рафсона второго порядка, при котором возникает матрица Гессе второго порядка.

В учебном пособии подробно рассматриваются решения численных примеров, что облегчает освоение теоретического материала.

# **1. УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ**

Одним из важных моментов при исследовании оптимальных режимов электрических систем является вопрос определения их текущих установившихся режимов. Задача оптимизации режимов электрических систем сводится именно к оптимизации их установившихся режимов. Поэтому правильнее говорить об оптимизации установившихся режимов электрических систем, что раскрывает физическую сущность рассматриваемой задачи.

Перед исследованием оптимальных установившихся режимов следует исследовать текущие установившиеся режимы с целью выявления электрического состояния рассматриваемой системы, в первую очередь – уровней напряжения отдельных узлов.

С математической точки зрения задача расчета как текущих установившихся режимов, так и оптимальных установившихся режимов сводится к решению систем нелинейных алгебраических уравнений, что связано с большими затруднениями.

При решении этих уравнений возникают вопросы выбора правильного метода, составления алгоритма и программирования на цифровых вычислительных машинах.

## **1.1. Выбор состава независимых и зависимых переменных при расчете установившихся режимов**

Для решения задачи расчета установившихся режимов электрических систем требуется построение соответствующей математической модели, при этом необходимо заранее установить состояние переменных, т. е. выбрать состав независимых и зависимых переменных.

Режим работы электрических систем характеризуется рядом параметров, которые в процессе ведения режима можно изменять, т. е. регулировать. Каждый узел электрической системы характеризуется четырьмя режимными параметрами: активной и реактивной мощно-

стями, модулем и аргументом комплексного напряжения. В зависимости от характера задания исходных режимных параметров различают следующие типы узлов.

Узел типа  $U-\Psi u$ , для которого считаются заданными модуль и аргумент комплексного напряжения и необходимо определить активную и реактивную мощности. Узел такого типа принимается только один, причем он выбирается одновременно в качестве базисного и балансирующего.

Узел типа  $P-U$ , для которого считаются заданными активная мощность и модуль напряжения и необходимо определить реактивную мощность и аргумент напряжения. Узлом такого типа могут быть только стационарные узлы.

Узел типа  $P-Q$ , для которого считаются заданными активная и реактивная мощности и необходимо определить модуль и аргумент комплексного напряжения. Узлом такого типа могут быть как стационарные, так и нагрузочные узлы.

Следует отметить, что с точки зрения построения вычислительных алгоритмов, исходя из построенной соответствующей математической модели, наиболее неблагоприятным случаем является случай одновременного наличия среди стационарных узлов заданной информации типа  $P-U$  и  $P-Q$ .

Вышеуказанные искомые режимные параметры узлов определяются в результате решения соответствующей поставленной задачи. В зависимости от постановки задачи выбирается соответствующий состав независимых и зависимых переменных. Разумеется, что независимо от данной постановки задачи всегда заданные режимные параметры называются независимыми параметрами, а искомые режимные параметры – зависимыми. Чтобы четко классифицировать состав переменных, можно использовать термины, применяемые в теории автоматического регулирования. Исходя из физической сущности переменных, т. е. режимных параметров, их можно разделить на три типа: зависимые переменные состояния, независимые переменные управления и возмущения.

Эти переменные можно представить в виде соответствующих векторов:  $X$  – векторы переменных состояния,  $U$  – векторы переменных управления,  $D$  – векторы возмущения. Применительно к вышеприведенной системе исходной информации относительно отдель-

ных узлов электрических систем векторы  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{D}$  состоят из следующих режимных параметров:

$$\mathbf{X} = \left[ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} P_B \\ Q_B \end{array} \right\} \text{ для базисного или балансирующего узла,} \\ \left. \begin{array}{l} U \\ \Psi \end{array} \right\} \text{ для узлов типа } P-Q, \text{ т. е. как для} \\ \text{станционных, так и для нагрузочных узлов,} \\ \left. \begin{array}{l} Q \\ \Psi \end{array} \right\} \text{ для узлов типа } P-U, \text{ т. е. только} \\ \text{для станционных узлов.} \end{array} \right], \quad (1.1.1)$$

$$\mathbf{U} = \left[ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} U \\ \Psi \end{array} \right\} \text{ для базисного или балансирующего узла,} \\ \left. \begin{array}{l} P, Q \end{array} \right\} \text{ для станционных узлов типа } P-Q, \\ \left. \begin{array}{l} P, U \end{array} \right\} \text{ для станционных узлов типа } P-U. \end{array} \right], \quad (1.1.2)$$

$$\mathbf{D} = \left[ \begin{array}{l} P \\ Q \end{array} \right] \text{ для нагрузочных узлов } \quad (1.1.3)$$

Нетрудно заметить, что компонентами вектора  $\mathbf{X}$  являются режимные параметры как станционных, так и нагрузочных узлов, компонентами вектора  $\mathbf{U}$  – только режимные параметры станционных узлов, а компонентами вектора  $\mathbf{D}$  – только режимные параметры нагрузочных узлов. Компонентами вектора управляющих переменных в действительности должны быть режимные параметры станционных узлов, поскольку управлять режимами электрических систем можно только путем их изменения.

Методы расчета установившихся режимов электрических систем развиваются в трех основных направлениях: в первом направлении используют  $\mathbf{Y}$ -форму записи уравнений состояний, во втором –  $\mathbf{Z}$ -форму, а в третьем –  $(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})$ -форму.

Для построения уравнения установившихся режимов как при  $\mathbf{Y}$ - и  $\mathbf{Z}$ -, так и при  $(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})$ -формах принимается, что рассматриваемая электрическая система состоит из станционных и нагрузочных  $(M+1)$  узловых точек.

После выбора первого станционного узла в качестве базисного (балансирующего) электрическая система будет состоять из  $M$  независимых узловых точек.

При построении уравнения установившихся режимов предполагается, что задается конфигурация исследуемой электрической системы со всеми пассивными параметрами.

Рассмотрим построение уравнения установившихся режимов сначала для  $\mathbf{Y}$ -формы, затем для  $\mathbf{Z}$ -формы задания состояния сети.

## 1.2. Уравнения установившихся режимов электрических систем при Y-форме задания состояния сети

Уравнения установившихся режимов электрических систем в Y-форме составляются на основании метода узловых напряжений, (известного из курса теоретических основ электротехники – ТОЭ).

Как уже было сказано, предполагаются, что электрическая система состоит из  $(M + 1)$  узловых точек, из которых независимыми являются  $M$ -узлы.

Представим схему электрической системы в следующем виде (рис. 1.1).

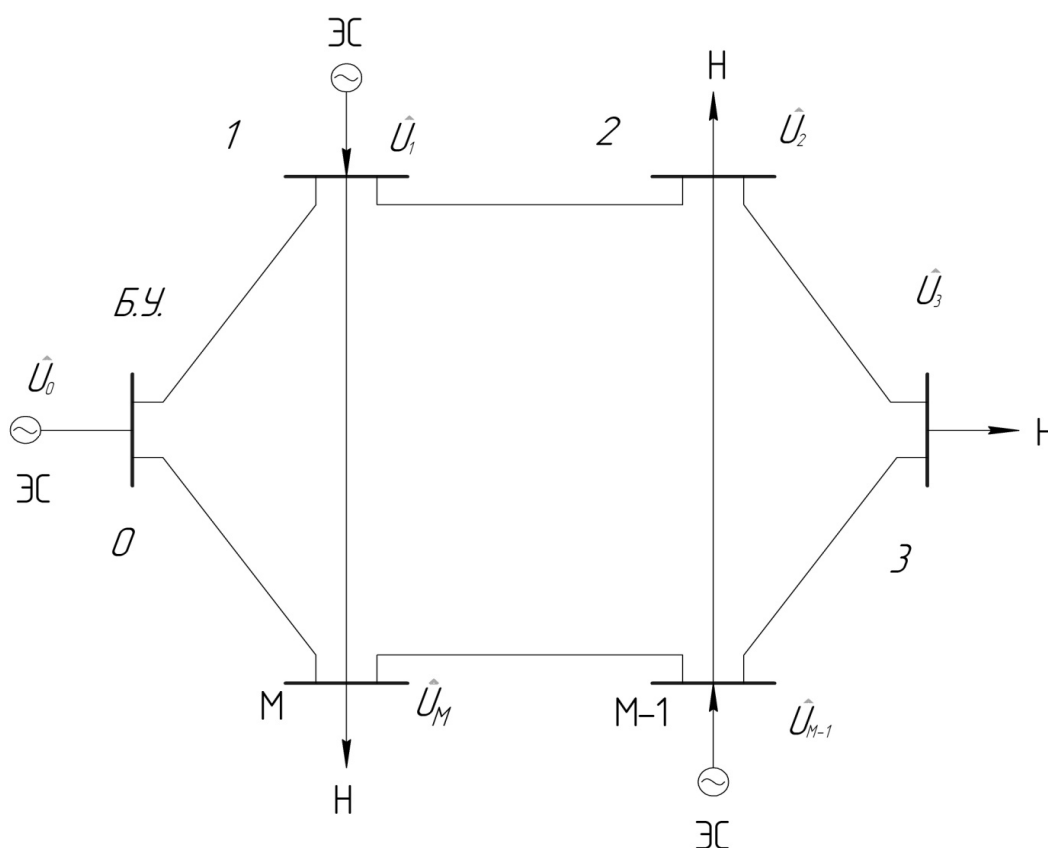


Рис. 1.1. Схематическое представление электрической системы

На рис. 1.1 электрические станции обозначены кружками, нагрузки – стрелками, а линии электропередач – прямыми линиями. Предполагается, что к каждому узлу может быть подключена либо электрическая станция, либо нагрузка. Необходимо отметить, что в случае, когда к данному узлу подключены как станция, так и нагрузка, то всегда можно их объединить и получить случай, когда к узлу подключена





Представим систему уравнений (1.2.1) в виде матричной записи

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +Y_{11} - Y_{12} - Y_{13} - \dots - Y_{1M} \\ -Y_{21} + Y_{22} - Y_{23} - \dots - Y_{2M} \\ \dots\dots\dots \\ -Y_{M1} - Y_{M2} - Y_{M3} - \dots + Y_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \vdots \\ \dot{U}_{M0} \end{bmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Поскольку

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \vdots \\ \dot{U}_{M0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_0 \\ \vdots \\ \dot{U}_M - \dot{U}_0 \end{bmatrix}, \quad (1.2.4)$$

то уравнение (1.2.3) можно представить в следующем развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +Y_{11} - Y_{12} - \dots - Y_{1M} \\ -Y_{21} + Y_{22} - \dots - Y_{2M} \\ \dots \\ -Y_{M1} - Y_{M2} - \dots + Y_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_M \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +Y_{11} - Y_{12} - \dots - Y_{1M} \\ -Y_{21} + Y_{22} - \dots - Y_{2M} \\ \dots \\ -Y_{M1} - Y_{M2} - \dots + Y_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_0 \\ \dot{U}_0 \\ \vdots \\ \dot{U}_0 \end{bmatrix}, \quad (1.2.5)$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +Y_{11} - Y_{12} - \dots - Y_{1M} \\ -Y_{21} + Y_{22} - \dots - Y_{2M} \\ \dots \\ -Y_{M1} - Y_{M2} - \dots + Y_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{10} \\ \dot{U}_{20} \\ \vdots \\ \dot{U}_{M0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (+Y_{11} - Y_{12} - \dots - Y_{1M})\dot{U}_0 \\ (-Y_{21} + Y_{22} - \dots - Y_{2M})\dot{U}_0 \\ \dots \\ (-Y_{M1} - Y_{M2} - \dots + Y_{MM})\dot{U}_0 \end{bmatrix}. \quad (1.2.6)$$

Пользуясь (1.2.2), можно установить, что

$$\left. \begin{aligned} +Y_{11} - Y_{12} - \dots - Y_{1M} &= Y_{10}, \\ -Y_{21} + Y_{22} - \dots - Y_{2M} &= Y_{20}, \\ \dots & \\ -Y_{M1} - Y_{M2} - \dots + Y_{MM} &= Y_{M0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$



Учитывая, что  $P_i = U_i I_i \cos \varphi$ ;  $Q_i = U_i I_i \sin \varphi$ , получим:

$$\dot{I}_i \hat{U}_i = P_i - jQ_i. \quad (1.2.12)$$

При этом система уравнений (1.2.11), выраженная через узловые комплексные мощности, принимает следующий вид:

$$P_i - jQ_i = \hat{U} \sum_{j=0}^M Y_{ij} \dot{U}_j. \quad (1.2.13)$$

Нетрудно заметить, что в данной системе уравнений уже полностью фигурируют узловые режимные параметры, т. е. комплексные мощности и напряжения.

С другой стороны, принимая во внимание в выражении (1.2.13), что

$$\hat{U}_i = U_i e^{-j\psi_{ui}}, \dot{U}_j = U_j e^{j\psi_{uj}}, Y_{ij} = g_{ij} + jb_{ij},$$

получим

$$P_i - jQ_i = U_i \sum_{j=0}^M (g_{ij} + jb_{ij}) U_j e^{-j(\psi_{ui} - \psi_{uj})},$$

или

$$P_i - jQ_i = U_i \sum_{j=0}^M \{ [g_{ij} \cos(\psi_{ui} - \psi_{uj}) + b_{ij} \sin(\psi_{ui} - \psi_{uj})] U_j - j[g_{ij} \sin(\psi_{ui} - \psi_{uj}) - b_{ij} \cos(\psi_{ui} - \psi_{uj})] U_j \}. \quad (1.2.14)$$

Разлагая систему уравнений на действительные и мнимые составляющие, получим следующие выражения для узловых активных и реактивных мощностей:

$$P_i = U_i \sum_{j=0}^M [g_{ij} \cos(\psi_{ui} - \psi_{uj}) + b_{ij} \sin(\psi_{ui} - \psi_{uj})] U_j, \quad (1.2.15)$$

$$Q_i = U_i \sum_{j=0}^M [g_{ij} \sin(\psi_{ui} - \psi_{uj}) - b_{ij} \cos(\psi_{ui} - \psi_{uj})] U_j. \quad (1.2.16)$$

Принимая в (1.2.15) и (1.2.16) индекс  $i = 0$ , получим узловые активную и реактивную мощности для базисного (балансирующего) узла:

$$P_0 = U_0 \sum_{j=0}^M [g_{0j} \cos(\psi_{u0} - \psi_{uj}) + b_{0j} \sin(\psi_{u0} - \psi_{uj})] U_j, \quad (1.2.17)$$

$$Q_0 = U_0 \sum_{j=0}^M [g_{0j} \sin(\psi_{u0} - \psi_{uj}) - b_{0j} \cos(\psi_{u0} - \psi_{uj})] U_j. \quad (1.2.18)$$

Полученная система уравнений (1.2.15) и (1.2.16) является системой нелинейных алгебраических уравнений установившихся режимов электрических систем при Y-форме задания состояния сети.

Данная система уравнений является нелинейной относительно модулей и фазовых сдвигов комплексных напряжений. Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений установившихся режимов (1.2.15), (1.2.16) преимущественно пользуемся методом Ньютона – Рафсона.

Представим систему нелинейных алгебраических уравнений в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \varphi_{p_i}(U_i \Psi_{ui}), \\ Q_i &= \varphi_{q_i}(U_i \Psi_{ui}), \\ P_i - \varphi_{p_i}(U, \Psi) &= 0, \\ Q_i - \varphi_{q_i}(U, \Psi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.19)$$

где

$$\begin{aligned} U &= (U_0, U_1, U_2, \dots, U_M), \\ \Psi &= (\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_M). \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Систему уравнений (1.2.19) представим в следующем виде:

$$\Phi_{P_i}(P, U, \Psi) = P_i - \varphi_{p_i}(U, \Psi) = 0, \quad (1.2.21)$$

$$\Phi_{Q_i}(Q, U, \Psi) = Q_i - \varphi_{q_i}(U, \Psi) = 0. \quad (1.2.22)$$

После объединения (1.2.21) и (1.2.22) в одно уравнение получим

$$\Phi(P, Q, U, \Psi) = 0. \quad (1.2.23)$$

Система уравнений (1.2.23) называется системой нелинейных алгебраических уравнений установившихся режимов, написанной в векторной форме и имеющей порядок  $2M$ .

Если пользоваться вышеприведенными понятиями вектора переменных состояния  $\mathbf{X}$ , вектора управления  $\mathbf{U}$  и вектора возмущения  $\mathbf{D}$ , то уравнение (1.2.23) можно представить в следующем виде:

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{D}) = 0. \quad (1.2.24)$$

При решении задачи расчета установившихся режимов электрических систем векторное уравнение (1.2.24) назовем вектором небалансов мощностей (активных и реактивных). Действительно, из (1.2.19)

можно заметить, что они состоят соответственно из разности активных мощностей и разности реактивных мощностей и функций, которые имеют размерности реактивных мощностей. Если в системе уравнений (1.2.19)  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{U}, \Psi_U$  являются строго параметрами данного режима, то функции (1.2.21) и (1.2.22) будут действительно равняться нулю, в противном случае равенства нулю никогда не будет. Поскольку при решении задачи расчета установившегося режима задаются  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  и необходимо определить  $\mathbf{U}, \Psi_U$ , то, разумеется, что первоначально имеем

$$P_i = \varphi_{p_i}(U, \Psi_U), \quad (1.2.25)$$

$$Q_i = \varphi_{q_i}(U, \Psi_U). \quad (1.2.26)$$

Из (1.2.25) и (1.2.26) следует, что в действительности (1.2.19) характеризует небалансы мощностей.

Поэтому правомерно векторное уравнение (1.2.24) называть уравнением небаланса мощностей.

Необходимо отметить, что на основании (1.2.13) можно установить также другие типы уравнений для активных и реактивных мощностей узлов, если пользоваться следующими обозначениями:

$$\hat{U}_i = U'_i - jU''_i; \quad \hat{U}_j = U'_j + jU''_j; \quad Y_{ij} = g_{ij} + jb_{ij}.$$

При этом

$$P_i = \sum_{j=0}^M \left[ g_{ij}(U'_i U'_j + U''_i U''_j) + b_{ij}(U''_i U'_j - U'_i U''_j) \right], \quad (1.2.27)$$

$$Q_i = \sum_{j=0}^M \left[ g_{ij}(U''_i U'_j - U'_i U''_j) - b_{ij}(U'_i U'_j + U''_i U''_j) \right]. \quad (1.2.28)$$

Принимая  $i = 0$ , получим выражения активной и реактивной мощностей для базисного узла.

Искомыми переменными в системе уравнений (1.2.27) и (1.2.28) являются составляющие комплексных напряжений независимых узлов.

Представим системы уравнений (1.2.27), (1.2.28) в следующем виде:

$$\Phi_{P_i}(P, U', U'') = P_i - \varphi_{p_i}(U', U'') = 0, \quad (1.2.29)$$

$$\Phi_{Q_i}(Q, U', U'') = Q_i - \varphi_{q_i}(U', U'') = 0, \quad (1.2.30)$$

где

$$U' = (U'_1, U'_2, \dots, U'_M); \quad U'' = (U''_1, U''_2, \dots, U''_M), \quad (1.2.31)$$

$$\varphi_{P_i} = \sum_{j=0}^M \left[ g_{ij}(U'_i U'_j + U''_i U''_j) + b_{ij}(U''_i U'_j - U'_i U''_j) \right], \quad (1.2.32)$$

$$\varphi_{Q_i} = \sum_{j=0}^M \left[ g_{ij}(U''_i U'_j - U'_i U''_j) - b_{ij}(U'_i U'_j + U''_i U''_j) \right]. \quad (1.2.33)$$

Объединив уравнения (1.2.29) и (1.2.30), получим

$$\Phi(P, Q, U', U'') = 0. \quad (1.2.34)$$

Выражение (1.2.34) объединяет  $2M$  нелинейных алгебраических уравнения установившегося режима.

При этом, если пользоваться понятиями векторов  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{D}$ , то уравнение (1.2.34) примет вид

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{D}) = 0. \quad (1.2.35)$$

Следует отметить, что в этом случае состав векторов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{U}$  отличается от соответствующих векторов уравнения (1.2.24).

### 1.3. Методы решения уравнений установившихся режимов при Y-форме их представления

Для решения уравнений установившихся режимов электрических систем в Y-форме в настоящее время применяется множество математических методов, таких как методы Гаусса – Зейделя, Ньютона – Рафсона, модифицированный метод Ньютона и др.

Однако остановимся только на методе Ньютона – Рафсона, поскольку он признан лучшим методом для решения нелинейных алгебраических уравнений установившихся режимов электрических систем. Для решения поставленной задачи воспользуемся векторным уравнением (1.2.24):

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{U}^0, \mathbf{D}^0) = 0.$$

Как было показано, сущность метода Ньютона – Рафсона заключается в том, что начальное значение вектора  $\mathbf{X}^0$  путем итераций уточняется до обеспечения следующего условия:

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{U}^0, \mathbf{D}^0) \leq \delta, \quad (1.3.1)$$

где  $\delta$  является заданной малой положительной величиной и характеризует точность решения векторного уравнения (1.2.24), а векторы  $\mathbf{U}^0$  и  $\mathbf{D}^0$  являются заданными. При этом необходимо определить вектор состояния  $\mathbf{X}$ .

Разлагая в ряд Тейлора векторное уравнение (1.2.24), получим:

$$\Phi(X, U^0, D^0) = \Phi(X, U^0, D^0) + \frac{\partial \Phi(X, U^0, D^0)}{\partial x} \Delta x + \Phi_B, \quad (1.3.2)$$

где  $\Phi_B$  – слагаемые ряда Тейлора высших порядков, состоящие из частных производных второго, третьего и более высоких порядков.

Если пренебречь слагаемым  $\Phi_B$ , выражение (1.3.2) принимает следующий вид:

$$\Phi(X, U^0, D^0) = \Phi(X^0, U^0, D^0) + \frac{\partial \Phi(X, U^0, D^0)}{\partial x} \Delta x. \quad (1.3.3)$$

Из полученного выражения (1.3.3) можно определить

$$\Delta x^0 = - \left( \frac{\partial \Phi(X, U^0, D^0)}{\partial x} \Big|_{x^0} \right)^{-1} [\Phi(X^0, U^0, D^0) - \Phi(X, U^0, D^0)]. \quad (1.3.4)$$

Поскольку в точке решения уравнения имеем

$$\Phi(X^p, U^0, D^0) = 0, \quad (1.3.5)$$

то выражение (1.3.4) принимает следующий вид:

$$\Delta x^0 = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x^0} \right)^{-1} \Phi(X^0, U^0, D^0), \quad (1.3.6)$$

при котором новое значение вектора  $X$  определяется с помощью следующего выражения:

$$X^1 = X^0 + \Delta x^0, \quad (1.3.7)$$

где  $X^1$  – значение вектора состояния на первой итерации, а  $X^0$  – его начальное значение, или значение при нулевой итерации. В выражении (1.3.6) численное значение правой части полностью определяется с помощью численного значения вектора  $X$ .

На основании (1.3.7) можно написать рекуррентное выражение для произвольной  $K$ -й итерации

$$X^{K+1} = X^K + \Delta x^K, \quad (1.3.8)$$

где, задавая  $K = 0$ , получим выражение (1.3.7). Величина приращения  $\Delta x$  определяется с помощью следующего выражения:

$$\Delta x^K = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x^K} \right)^{-1} \Phi(x^K, U^0, D^0). \quad (1.3.9)$$

В результате рекуррентное выражение (1.3.8) принимает следующий окончательный вид:

$$X^{k+1} = X^k - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{X^k} \right)^{-1} \Phi(X^k, U^0, D^0). \quad (1.3.10)$$

Необходимо отметить, что частная производная  $\partial \Phi / \partial x$  является квадратной матрицей Якоби, порядок которой характеризуется числом узлов, относительно которых составлена соответствующая система нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима.

Учитывая вышепринятые обозначения, рекуррентное выражение (1.3.10) применительно к режимным параметрам электрической системы в развернутой форме можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \Psi_i \\ U_i \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \Psi_i \\ U_i \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial \Psi_j} \vdots \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U_j} \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial \Psi_j} \vdots \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U_j} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{pi} \\ \Phi_{qi} \end{bmatrix}. \quad (1.3.11)$$

Или

$$\begin{bmatrix} \Psi_i \\ U_i \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \Psi_i \\ U_i \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \Delta \Psi_i \\ \Delta U_i \end{bmatrix}, \quad (1.3.12)$$

где

$$\begin{bmatrix} \Delta \Psi_i \\ \Delta U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial \Psi_j} \vdots \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U_j} \\ -\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial \Psi_j} \vdots -\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U_j} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{pi} \\ \Phi_{qi} \end{bmatrix}. \quad (1.3.13)$$

Установлено, что для обращения матрицы требуется в 3 раза больше времени, чем при решении системы уравнений. Поэтому определение второго члена правой части (1.3.13) приводит к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial \Psi_j} \vdots \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U_j} \\ -\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial \Psi_j} \vdots -\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U_j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \Psi_i \\ \Delta U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{pi} \\ \Phi_{qi} \end{bmatrix}. \quad (1.3.14)$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (1.3.14) применяется метод оптимального исключения Гаусса с приведением матрицы постоянных к треугольной форме, исключая при этом операции с нулевыми элементами.



Частные производные, входящие в матрицу Якоби, определяются с помощью следующих формул:

– при одинаковых индексах:

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial \Psi_{ui}} = -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial \Psi_{ui}} = Q_i + b_{ii}U_i^2, \quad (1.3.15)$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial \Psi_{ui}} = -\frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial \Psi_{ui}} = -P_i + g_{ii}U_i^2, \quad (1.3.16)$$

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U_i} = -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial U_i} = -\frac{P_i}{U_i} - g_{ji}U_i, \quad (1.3.17)$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U_i} = -\frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial U_i} = -\frac{Q_i}{U_i} + b_{ji}U_i; \quad (1.3.18)$$

– при разных индексах:

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial \Psi_{uj}} = -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial \Psi_{uj}} = -[g_{ij} \sin(\Psi_{ui} - \Psi_{uj}) - b_{ij} \cos(\Psi_{ui} - \Psi_{uj})]U_i U_j, \quad (1.3.19)$$

$$\frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial \Psi_{uj}} = -\frac{\partial \varphi_{qk}}{\partial \Psi_{uj}} = -[g_{kj} \cos(\Psi_{ui} - \Psi_{uj}) - b_{kj} \sin(\Psi_{ui} - \Psi_{uj})]U_k U_j, \quad (1.3.20)$$

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U_k} = -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial U_k} = -[g_{ik} \cos(\Psi_{ui} - \Psi_{uk}) - b_{ik} \sin(\Psi_{ui} - \Psi_{uk})]U_k, \quad (1.3.21)$$

$$\frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_l} = -\frac{\partial \varphi_{qk}}{\partial U_l} = -[g_{lk} \sin(\Psi_{uk} - \Psi_{ul}) - b_{kl} \cos(\Psi_{uk} - \Psi_{ul})]U_l. \quad (1.3.22)$$

В начале итерации в качестве нулевого решения принимаются

$$U_1 = U_2 = \dots = U_M = U_{cp}; \Psi_{U_1} = \Psi_{U_2} = \dots = \Psi_{U_M} = 0.$$

Процесс решения, как уже было сказано, считается законченным, если имеет место следующее соотношение:

$$\left| \left( \frac{\Psi}{U} \right)^{k+1} - \left( \frac{\Psi}{U} \right)^k \right| \leq \delta, \quad (1.3.23)$$

где  $\delta$  – заранее принятое маленькое число.

Однако чаще всего решение считается законченным, если устанавливаются следующие условия:

$$\begin{cases} \Phi_{pi}(U, \Psi) = P_i - \varphi_{pi}(U, \Psi) \rightarrow \Delta P_i, \\ \Phi_{qi}(U, \Psi) = Q_i - \varphi_{qi}(U, \Psi) \rightarrow \Delta Q_i, \end{cases} \quad (1.3.24)$$

где  $\Delta P_i, \Delta Q_i$  – допустимые небалансы мощностей по узлам.

На основании описанного метода разработаны соответствующие программы к ЦВМ, которые в настоящее время нашли широкое применение для расчета установившихся режимов различных электрических систем.

Практические расчеты показали, что в зависимости от структуры и числа узлов электрических систем на основе метода Ньютона – Рафсона соответствующие нелинейные алгебраические уравнения установившихся режимов можно решить за 4 – 8 итераций. Это говорит о большой эффективности метода Ньютона – Рафсона при решении уравнения установившегося режима электрической системы в  $Y$ -форме. В результате решения задачи определяются значения неизвестных режимных параметров, т. е. модулей и аргументов комплексных напряжений всех узлов. Затем определяются активная и реактивная мощности балансирующего узла согласно выражениям (1.2.17), (1.2.18).

Для иллюстрации метода рассмотрим схему замещения одной электрической системы, приведенную на рис. 1.2.

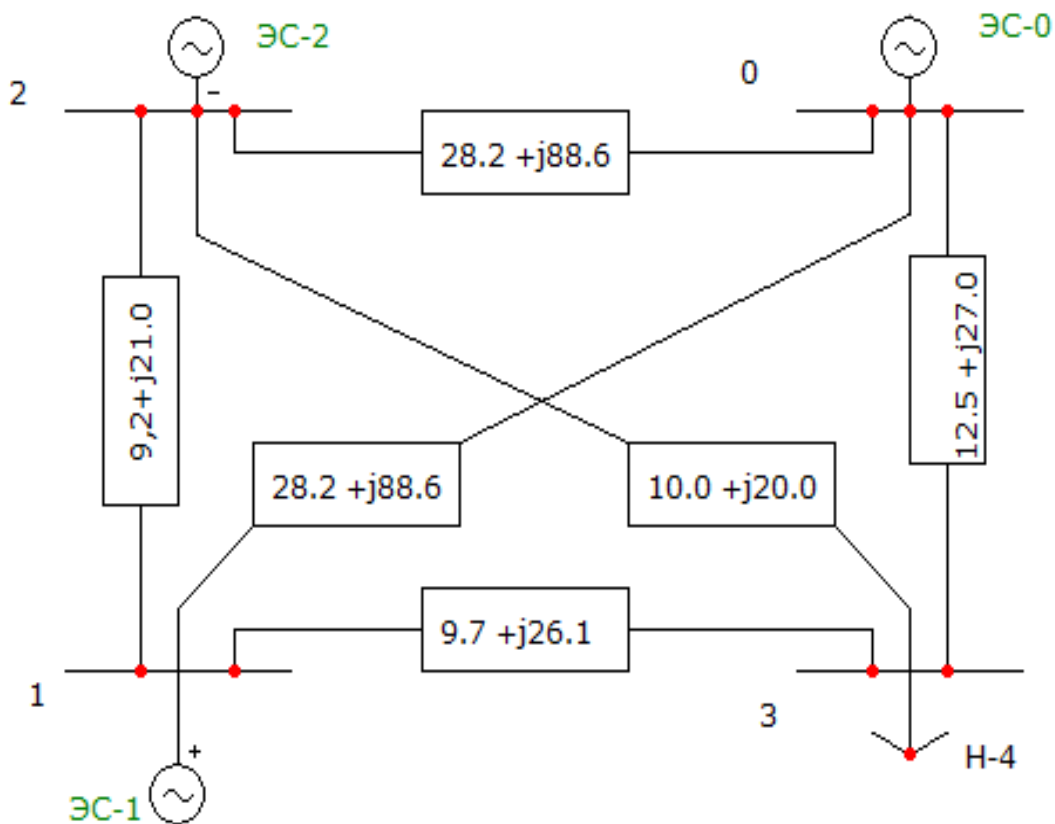


Рис. 1.2. Схема замещения электрической системы

Исследуемая электрическая система состоит из четырех узловых точек, из которых один стационарный узел с нулевым индексом выбран в качестве базисного (балансирующего). В результате система будет состоять из трех независимых узлов. Исходя из заданной структуры электрической системы и комплексных сопротивлений ветвей, можно установить следующую  $Y$ -матрицу узловых комплексных проводимостей:

$0,021615 - j 0,052245$	$- 0,004232 + j 0,011497$	$- 0,003262 + j 0,010248$	$- 0,014120 + j 0,030500$
$- 0,004232 + j 0,011497$	$0,034246 - j 0,085112$	$- 0,017502 + j 0,039951$	$- 0,012511 + j 0,033664$
$- 0,003262 + j 0,010248$	$- 0,017502 + j 0,039951$	$0,040764 - j 0,090200$	$- 0,020000 + j 0,040000$
$- 0,014120 + j 0,030500$	$- 0,012511 + j 0,033664$	$- 0,020000 + j 0,040000$	$0,046632 - j 0,104164$

(1.3.25)

Данная матрица является квадратной особенной матрицей, поскольку ее детерминант равняется нулю. Разумеется, что эту матрицу из-за ее особенностей нельзя обратить. Однако если зачеркнуть строку и столбец, относящиеся к базисному узлу, то в результате получится неособенная матрица третьего порядка, которую можно будет обрабатывать, чем займемся позднее. Для решения задачи, поставленной перед нами, необходимо пользоваться всеми элементами, приведенными в матрице (1.3.25).

Исходная информация относительно режимных параметров узлов исследуемой электрической системы приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

*Режимные параметры узлов*

Узел	$P$ , МВт	$Q$ , МВар	$U$ , кВ	$\Psi$ , град
0	–	–	220,0	0
1	161,46	80,64	–	–
2	202,46	101,23	–	–
3	431,68	215,84	–	–

Для рассматриваемой задачи рекуррентное выражение принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{u1} \\ \Psi_{u2} \\ \Psi_{u3} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \Psi_{u1} \\ \Psi_{u2} \\ \Psi_{u3} \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u2}} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u3}} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_3} \\ d\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u1}} & d\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u2}} & d\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u3}} & d\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_1} & d\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2} & d\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_3} \\ \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial \Psi_{u2}} & \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial \Psi_{u3}} & \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_1} & \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_2} & \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial U_3} \\ \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial \Psi_{u2}} & \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial \Psi_{u3}} & \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial U_1} & \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial U_2} & \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial U_3} \\ \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial \Psi_{u2}} & \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial \Psi_{u3}} & \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_1} & \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_2} & \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U_3} \\ \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial \Psi_{u2}} & \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial \Psi_{u3}} & \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_1} & \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_2} & \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial U_3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p1} \\ \Phi_{p2} \\ \Phi_{p3} \\ \Phi_{q1} \\ \Phi_{q2} \\ \Phi_{q3} \end{bmatrix}. \quad (1.3.26)$$

Пользуясь формулами (1.3.15) – (1.3.18); (1.3.19) – (1.3.22), а также элементами матрицы (1.3.25) и данными табл. 1.1, можно установить численные значения элементов матрицы Якоби, приведенные в рекуррентном выражении (1.3.26). Однако перед началом организации итерационного процесса необходимо принять исходные численные значения искомым переменных  $\Psi_{u1}, \Psi_{u2}, \Psi_{u3}$  и  $U_1, U_2, U_3$ . Как обычно первоначально для них принимаем

$$\begin{cases} \Psi_{u1} = \Psi_{u2} = \Psi_{u3} = \Psi_{u0} = 0, \\ U_1 = U_2 = U_3 = U_0 = 220. \end{cases} \quad (1.3.27)$$

После проведения четырех итераций получим следующие значения искомым режимных параметров, приведенные в табл. 1.2.

Таблица 1.2

*Режимные параметры после итерации*

Узел	$P$ , МВт	$Q$ , МВар	$U$ , кВ	$\Psi$ , град
0	88,16	79,88	220,0	0,0
1	161,29	80,69	220,8	1,13
2	202,46	101,23	221,4	1,0
3	431,68	215,84	204,7	-2,36

#### 1.4. Уравнения установившихся режимов электрических систем при Z-форме задания состояния сети

Уравнения установившихся режимов в Z-форме получаются непосредственно из Y-формы. Во многих случаях Z-форма уравнения установившихся режимов называется обращенной формой Y-формы уравнений установившихся режимов. Это связано с тем, что Z-матрица получается путем обращения Y-матрицы узловых проводимостей.

Представим матричное уравнение (1.2.3) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} - Y_{12} - \dots - Y_{1M} \\ -Y_{21} + Y_{22} - \dots - Y_{2M} \\ \dots \\ -Y_{M1} - Y_{M2} - \dots + Y_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_0 \\ \vdots \\ \dot{U}_M - \dot{U}_0 \end{bmatrix}. \quad (1.4.1)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_M \end{bmatrix} = \dot{I}; \quad \begin{bmatrix} \dot{U}_1 - \dot{U}_0 \\ \dot{U}_2 - \dot{U}_0 \\ \vdots \\ \dot{U}_M - \dot{U}_0 \end{bmatrix} = \dot{U} - \dot{U}_0, \quad (1.4.2)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} - Y_{12} - \dots - Y_{1M} \\ -Y_{21} + Y_{22} - \dots - Y_{2M} \\ \dots \\ -Y_{M1} - Y_{M2} - \dots + Y_{MM} \end{bmatrix} = Y, \quad (1.4.3)$$

то уравнение (1.4.1) можно представить в векторной форме

$$\dot{I} = Y(\dot{U} - \dot{U}_0), \quad (1.4.4)$$

где  $\dot{I}$  – многомерный вектор независимых узловых комплексных токов;  $(\dot{U} - \dot{U}_0)$  – многомерный вектор комплексных напряжений независимых узлов относительно напряжения базисного узла;  $Y$  – неособенная квадратная матрица узловых комплексных проводимостей. Умножив обе части векторного уравнения (1.4.4) на обратную матрицу узловых проводимостей, т.е. на  $Y^{-1}$ , получим:

$$Y^{-1}\dot{I} = Y^{-1}Y(\dot{U} - \dot{U}_0), \quad (1.4.5)$$

поскольку

$$Y^{-1}Y = 1 \quad (1.4.6)$$

и

$$Y^{-1} = Z. \quad (1.4.7)$$

Получим

$$Z \dot{I} = \dot{U} - \dot{U}_0, \quad (1.4.8)$$

или

$$\dot{U} - \dot{U}_0 = Z \dot{I}. \quad (1.4.9)$$

Как обычно матричное уравнение (1.4.9) представляется в следующем виде:

$$\dot{U} = \dot{U}_0 + Z \dot{I}, \quad (1.4.10)$$

где  $Z$  – неособенная квадратная матрица узловых комплексных сопротивлений независимых узлов.

Матричное уравнение (1.4.10) в развернутой форме можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_b + Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + \dots + Z_{1M}\dot{I}_M, \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_b + Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + \dots + Z_{2M}\dot{I}_M, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{U}_M &= \dot{U}_b + Z_{M1}\dot{I}_1 + Z_{M2}\dot{I}_2 + \dots + Z_{MM}\dot{I}_M, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.11)$$

где  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_M, \dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_M$  – комплексные напряжения и токи узлов 1, 2, ..., M;

$\dot{U}_b = \dot{U}_0$  – комплексное напряжение базисного (балансирующего) узла;  $Z_{11}, Z_{22}, \dots, Z_{MM}$  – собственные комплексные сопротивления независимых узлов 1, 2, ..., M;

$Z_{12}, Z_{13}, \dots, Z_{1M}, \dots$  – взаимные комплексные сопротивления независимых узлов.

Представим (1.4.11) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{U}_b \\ \dots \\ \dot{U}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1M} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2M} \\ & & \dots & \\ Z_{M1} & Z_{M2} & \dots & Z_{MM} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_M \end{bmatrix}. \quad (1.4.12)$$

$Z$ -форма уравнения установившихся режимов электрических систем в алгебраической компактной форме имеет вид

$$\dot{U}_i = \dot{U}_b + \sum_{j=1}^M Z_{ij}\dot{I}_j, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (1.4.13)$$

Нетрудно заметить, что задавая индексы  $i, j = 1, 2, \dots, M$ , получим систему уравнений в виде (1.4.11). Поскольку в качестве исходных данных задаются мощности в узлах, то необходимо (1.4.11) или (1.4.13)

представить через узловые мощности. Для получения выражения узловых мощностей необходимо уравнения системы (1.4.11) соответственно умножить на сопряженные значения токов  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_M$  или уравнение (1.4.13) на  $\dot{I}_i$ , в результате получим

$$\dot{U}_i \hat{I}_i = \dot{U}_B \hat{I}_i + \sum_{j=1}^M \hat{I}_i Z_{ij} \dot{I}_j. \quad (1.4.14)$$

Левая часть выражения (1.4.14) представляет собой комплексную мощность  $i$ -го узла

$$\dot{U}_i \hat{I}_i = U_i e^{j\psi_u} \cdot I_i e^{-j\psi_I} = U_i I_i e^{j(\psi_u - \psi_I)} = U_i I_i e^{j\varphi_i},$$

или

$$\dot{U}_i \hat{I}_i = S_i e^{j\varphi_i} = S_i (\cos\varphi_i + j\sin\varphi_i).$$

В результате получим

$$\dot{S}_i = \dot{U}_i \hat{I}_i = P_i + jQ_i. \quad (1.4.15)$$

Следовательно, выражение (1.4.14) принимает вид

$$P_i + jQ_i = \dot{U}_B \hat{I}_i + \sum_{j=1}^M \hat{I}_i Z_{ij} \dot{I}_j. \quad (1.4.16)$$

С другой стороны, знаем, что

$$\dot{U}_B = U_B; \quad \hat{I}_i = I_{ai} - jI_{pi}; \quad \dot{I}_j = I_{aj} + jI_{pj}; \quad Z_{ij} = R_{ij} + ix_{ij}. \quad (1.4.17)$$

При этом (1.4.16) можно представить в виде

$$P_i + jQ_i = U_B (I_{ai} - jI_{pi}) + \sum_{j=1}^M [(I_{ai}I_{aj} + I_{pi}I_{pj})R_{ij} - (I_{ai}I_{pj} - I_{pi}I_{aj})x_{ij}] + j \sum_{j=1}^M [(I_{ai}I_{pj} - I_{pi}I_{aj})R_{ij} + (I_{ai}I_{aj} + I_{pi}I_{pj})x_{ij}]. \quad (1.4.18)$$

Из (1.4.18) получим выражения узловых активных  $P_i$  и реактивных  $Q_i$  мощностей:

$$P_i = U_B I_{ai} + \sum_{j=1}^M [(I_{ai}I_{aj} + I_{pi}I_{pj})R_{ij} - (I_{ai}I_{pj} - I_{pi}I_{aj})x_{ij}], \quad (1.4.19)$$

$$Q_i = -U_B I_{pi} + \sum_{j=1}^M [(I_{ai}I_{aj} + I_{pi}I_{pj})x_{ij} + (I_{ai}I_{pj} - I_{pi}I_{aj})R_{ij}]. \quad (1.4.20)$$

Полученные системы уравнений (1.4.19) и (1.4.20) являются системами нелинейных алгебраических уравнений установившихся режимов электрических систем при Z-форме задания состояния сети. Последняя, в свою очередь, является нелинейной системой уравнений относительно составляющих  $I_\alpha$  и  $I_p$  комплексных узловых токов.

Следует отметить, что системы нелинейных алгебраических уравнений (1.4.19), (1.4.20) используются для решения поставленной

задачи расчета установившихся режимов при условии, если в качестве исходной информации считаются заданными активные и реактивные мощности всех узлов, кроме базисного.

Если в рассматриваемой электроэнергетической системе имеются стационарные узлы типа **P-U**, т. е. считаются заданными активные мощности и модули комплексных напряжений, применение системы уравнений (1.4.19) и (1.4.20) может вызвать серьезные затруднения с точки зрения обеспечения сходимости решения. При этом применяются искусственные приемы, которые обеспечивают решение задачи, но это приводит к усложнению алгоритма и, следовательно, программы решения задачи. Поэтому систему нелинейных алгебраических уравнений установившихся режимов (1.4.19) и (1.4.20) рекомендуется использовать для случая, когда стационарные узлы исследуемой электроэнергетической системы являются узлами типа **P-Q**, т.е. когда задаются активные и реактивные мощности.

Для решения данной системы уравнений успешно пользуются как методом простой итерации, так и методами Гаусса – Зейделя и Ньютона – Рафсона.

Поскольку системы уравнений (1.4.19), (1.4.20) входят в общую математическую модель оптимизации режимов электрических систем и данная модель решается как единая задача, то при этом выбирается соответствующий метод для их решения.

После решения системы нелинейных алгебраических уравнений установившихся режимов можно определить активную и реактивную мощности базисного (балансирующего) узла:

$$P_B + jQ_B = \dot{U}_B \hat{I}_B = U_B (I_{aB} - jI_{pB}) = U_B I_{aB} - jU_B I_{pB}.$$

Выражения активных и реактивных мощностей базисного (балансирующего) узла имеют вид

$$P_B = U_B I_{aB}, \quad (1.4.21)$$

$$Q_B = -U_B I_{pB}. \quad (1.4.22)$$

Представим  $I_{aB}$  и  $I_{pB}$  через токи остальных  $M$  узлов. На основании первого закона Кирхгофа можно написать

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_{M-1} + \dot{I}_M + \dot{I}_B = 0. \quad (1.4.23)$$

Разлагая выражение (1.4.23) на действительные и мнимые составляющие, получим:



$$\begin{cases} I_{a1} + I_{a2} + \dots + I_{a_{m-1}} + I_{a_m} + I_{aB} = 0, \\ I_{p1} + I_{p2} + \dots + I_{p_{m-1}} + I_{p_m} + I_{pB} = 0, \end{cases} \quad (1.4.24)$$

откуда

$$I_{ab} = -\sum_{i=1}^M I_{ai}; \quad I_{pb} = -\sum_{i=1}^M I_{pi}. \quad (1.4.25)$$

Выражения  $P_{aB}$  и  $Q_{pB}$  принимают следующий вид:

$$P_B = -U_B \sum_{i=1}^M I_{ai}, \quad (1.4.26)$$

$$Q_B = +U_B \sum_{i=1}^M I_{pi}. \quad (1.4.27)$$

Действительно, определяя составляющие комплексных узловых токов, в результате решения системы уравнений (1.4.19) и (1.4.20) можно определить с помощью полученных выражений (1.4.26) и (1.4.27) активную и реактивную мощности базисного узла.

### **1.5. Применение метода простой итерации для решения уравнений установившихся режимов при Z-форме их представления**

В настоящее время для решения системы нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима при **Z**-форме их представления применяются различные методы. Однако из всех этих методов необходимо остановиться на двух, которые широко применяются для решения предстоящей задачи. Первый является методом простой итерации, который в основном применяется для решения системы нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима, представленной в виде (1.4.11), (1.4.13). Основная суть данного метода заключается в следующем: принимая комплексные напряжения всех независимых узлов при заданных активных и реактивных мощностях узлов равными напряжению базисного узла

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dots = \dot{U}_m = \dot{U}_B = U_B, \quad (1.5.1)$$

можно определить численные значения комплексных токов независимых узлов:

$$\dot{I}_i = \frac{P_i - jQ_i}{\dot{U}_1}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (1.5.2)$$

Устанавливая численные значения узловых комплексных токов согласно (1.5.2) и подставляя их, например в (1.4.13), можно определить новые значения комплексных напряжений для независимых

узлов. Используя новые значения узловых комплексных напряжений на основе формулы

$$\dot{I}_i = \frac{P_i - jQ_i}{\bar{U}_i}, i=1,2, \dots, M. \quad (1.5.3)$$

определяют численные значения комплексных токов независимых узлов. Пользуясь полученными значениями комплексных токов, с помощью (1.4.18) определяют соответствующие значения узловых комплексных напряжений и т. д.

Итерационный процесс считается завершенным, если обеспечивается условие

$$|\dot{U}_i^{K+1} - \dot{U}_i^K| \leq \Delta U_i, \quad (1.5.4)$$

где  $\Delta U_i$  – заданное действительное число, характеризующее точность решения системы нелинейных алгебраических уравнений (1.4.13).

Для иллюстрации вышеприведенного метода рассмотрим схему электрической системы (см. рис 1.2), относительно узлов которой построена особенная матрица узловых проводимостей (1.3.25). Выделим из этой особенной матрицы следующую матрицу (1.5.5).

1	2	3
$0,034246 - j 0,085112$	$- 0,017502 + j 0,039951$	$- 0,012511 + j 0,033664$
$- 0,017502 + j 0,039951$	$0,040764 - j 0,090200$	$- 0,020000 + j 0,040000$
$- 0,012511 + j 0,033664$	$- 0,020000 + j 0,040000$	$0,046632 - j 0,104164$

(1.5.5)

Нетрудно заметить, что полученная матрица (1.5.5) является квадратной и симметричной. Поскольку эта матрица построена относительно независимых узлов, она является и неособенной.

После обращения данной матрицы получим  $\mathbf{Z}$ -матрицу узловых комплексных сопротивлений (1.5.6).

1	2	3
$9,3089 + j 23,4141$	$6,5448 + j16,5840$	$5,6871 + j13,7642$
$6,5448 + j16,5840$	$9,4551 + j23,0103$	$5,7112 + j14,2406$
$5,6871 + j13,7642$	$5,7112 + j14,2406$	$7,6454 + j17,8742$

(1.5.6)

Полученная  $\mathbf{Z}$ -матрица также является квадратной и симметричной.

Имея численные значения элементов  $\mathbf{Z}$ -матрицы узлов сопротивлений, можно перейти к организации итерационного процесса решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dots \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ \dots \\ 220 \\ \dots \\ 220 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,3089 & 6,5448 & 5,6871 \\ +j23,4141 & +j16,5840 & +j13,7642 \\ 6,5448 & 9,4551 & 5,7112 \\ +j16,5840 & +j23,0103 & +j14,2406 \\ 5,6871 & 5,7112 & 7,6454 \\ +j13,7642 & +j14,2406 & +j17,8742 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dots \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (1.5.7)$$

Однако для этого необходимо иметь исходную информацию относительно режимных параметров исследуемой электрической системы, которая приведена в табл. 1.1.

Пользуясь формулой (1.5.3) и данными табл. 1.1, а также принимая  $\hat{U}_1 = \hat{U}_2 = \hat{U}_3 = \hat{U}_b = 220$ , определяем:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{P_1 - jQ_1}{\hat{U}_1} = \frac{161,29 - j80,69}{220} = 0,7331 - j0,3668, \\ \dot{I}_2 &= \frac{P_2 - jQ_2}{\hat{U}_2} = \frac{202,46 - j101,23}{220} = 0,9203 - j0,4603, \\ \dot{I}_3 &= \frac{P_3 - jQ_3}{\hat{U}_3} = \frac{-431,68 + j215,84}{220} = -1,9688 + j0,9811. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Нетрудно заметить из (1.5.8), что для стационарных узлов в выражениях токов активные и реактивные мощности берутся с положительным знаком, а для нагрузочных узлов – с отрицательным.

Подставляя численные значения токов из (1.5.8) в (1.5.7), можно определить значения узловых напряжений в виде комплексных чисел. При переходе к их сопряженным значениям на основе формулы (1.5.3) определяем новые численные значения узловых комплексных токов, а при подставлении их в (1.5.7) – новые численные значения комплексных напряжений и т. д.

После проведения нескольких итераций поставленная задача решается с точностью

$$|U_i^{k+1} - U_i^k| \leq 10^{-1}. \quad (1.5.9)$$

Затем устанавливаются численные значения искомым узловых комплексных напряжений исследуемой четырехузловой электрической системы.

В табл. 1.3 приведены численные значения режимных параметров после окончательного решения задачи расчета установившегося режима.

Таблица 1.3

*Режимные параметры исследуемой электрической системы*

Узел	$P$ , МВт	$Q$ , МВар	$U$ , кВ	$\Psi_U$ , град
0	88,17	79,89	220,00	0,0
1	161,29	80,64	220,90	1,13
2	202,46	101,23	221,40	1,0
3	431,68	215,84	204,50	-2,36

Отметим, что на основании данного метода разработан вычислительный алгоритм и построена программа к ЦВМ для численной реализации практических задач.

**1.6. Применение метода Ньютона – Рафсона для решения уравнений установившегося режима при Z-форме их представления**

Задача заключается в решении системы нелинейных алгебраических уравнений (1.4.19), (1.4.20) с помощью метода Ньютона – Рафсона. В данном случае нетрудно заметить, что итерационный процесс необходимо организовать относительно составляющих узловых токов  $I_a$  и  $I_p$ .

Для этого представим систему уравнений (1.4.19), (1.4.20) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P_i - \varphi_{pi}(I_a, I_p) &= 0, \\ Q_i - \varphi_{qi}(I_a, I_p) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.6.1)$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{pi}(I_a, I_p) &= U_B I_{ai} + \sum_{j=1}^M [(I_{ai} I_{aj} + I_{pi} I_{pj}) R_{ij} - (I_{ai} I_{pj} - I_{pi} I_{aj}) X_{ij}], \\ \varphi_{qi}(I_a, I_p) &= -U_B I_{pi} + \sum_{j=1}^M [(I_{ai} I_{aj} + I_{pi} I_{pj}) X_{ij} + (I_{ai} I_{pj} - I_{pi} I_{aj}) R_{ij}]. \end{aligned} \right. \quad (1.6.2)$$

С другой стороны,

$$\begin{cases} I_a = (I_{a1}, I_{a2}, \dots, I_{aM}), \\ I_p = (I_{p1}, I_{p2}, \dots, I_{pM}). \end{cases} \quad (1.6.3)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \Phi_{pi}(P, I_a, I_p) = P_i - \varphi_{pi}(I_a, I_p) = 0, \\ \Phi_{qi}(Q, I_a, I_p) = Q_i - \varphi_{qi}(I_a, I_p) = 0, \end{cases} \quad (1.6.4)$$

или

$$\begin{cases} \Phi_{pi}(P, I_a, I_p) = 0, \\ \Phi_{qi}(Q, I_a, I_p) = 0. \end{cases} \quad (1.6.5)$$

Объединяя последнюю систему уравнений в одно векторное уравнение, получим:

$$\Phi(P, Q, I_a, I_p) \triangleq \begin{cases} \Phi_{pi}(P, I_a, I_p), \\ \Phi_{qi}(Q, I_a, I_p). \end{cases} \quad (1.6.6)$$

В данном случае полученное векторное уравнение (1.6.6) также является векторным уравнением небаланса активных и реактивных мощностей. Здесь, как и при  $\mathbf{Y}$ -форме уравнения установившегося режима, перед решением системы нелинейных алгебраических уравнений (1.6.1) имеем

$$\begin{aligned} P_i &\neq \varphi_{pi}(I_a, I_p), \\ Q_i &\neq \varphi_{qi}(I_a, I_p). \end{aligned} \quad (1.6.7)$$

Следовательно, разность (1.6.7) действительно характеризует небалансы мощностей. При решении данной системы уравнений принимаем, что как для стационарных, так и для нагрузочных узлов заданы активные и реактивные мощности и необходимо определить активные и реактивные составляющие комплексных узловых токов. Пользуясь понятием вектора состояния  $\mathbf{X}$ , вектора управления  $\mathbf{U}$  и вектора возмущения  $\mathbf{D}$ , эти составляющие характеризуются следующими режимными параметрами:

$$U = \begin{bmatrix} U \} \text{ для базисного или} \\ \Psi \} \text{ балансирующего узла,} \\ P \} \text{ для стационарных узлов} \\ Q \} \text{ типа } P - Q, \end{bmatrix}; \quad (1.6.8)$$

$$X = \begin{bmatrix} P \} \text{ для базисного или} \\ Q \} \text{ балансирующего узла,} \\ I_a \} \text{ для стационарных} \\ I_p \} \text{ и нагрузочных узлов} \end{bmatrix}; \quad (1.6.9)$$

$$D = \left[ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right] \text{ для нагрузочных узлов}. \quad (1.6.10)$$

При этом векторное уравнение также можно представить в виде

$$F(X, U, D) = 0. \quad (1.6.11)$$

Рекуррентное выражение, вытекающее из алгоритма Ньютона – Рафсона, как мы знаем, для  $K$ -й итерации имеет следующий вид:

$$X^{K+1} = X^K - \left( \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X^K} \right)^{-1} F(X^K, U^0, D^0). \quad (1.6.12)$$

Поскольку активная и реактивная мощности балансирующего узла определяются после решения установившегося режима электрической системы, то вектором состояния  $\mathbf{X}$ , или вектором зависимых переменных, принимаем  $I_a$  и  $I_p$ .

Учитывая, что

$$X \triangleq \{I_a I_p\}, \quad (1.6.13)$$

$$F \triangleq \begin{Bmatrix} \Phi_{Pi} \\ \Phi_{qi} \end{Bmatrix} \quad (1.6.14)$$

Рекуррентное выражение (1.6.12) будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} I_{ai} \\ I_{pi} \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} I_{ai} \\ I_{pi} \end{pmatrix}^k - \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_{Pi}}{\partial I_{ai}} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{Pi}}{\partial I_{pi}} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_{ai}} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_{pi}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{Pi} \\ \Phi_{qi} \end{bmatrix}. \quad (1.6.15)$$

Теперь необходимо определить частные производные, входящие в матрицу Якоби. Для этого нужно воспользоваться системой нелинейных алгебраических уравнений (1.6.4). При этом удобнее сначала определить частные производные для одинаковых индексов, потом – для разных индексов.

В случае когда индексы одинаковые, т. е. когда  $i = j$ , получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{Pi}}{\partial I_{ai}} = \frac{\partial}{\partial I_{ai}} (P_i - \varphi_{pi}) = -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial I_{ai}}, \\ \frac{\partial \Phi_{Pi}}{\partial I_{pi}} = \frac{\partial}{\partial I_{pi}} (P_i - \varphi_{pi}) = -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial I_{pi}}, \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_{ai}} = \frac{\partial}{\partial I_{ai}} (Q_i - \varphi_{qi}) = -\frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial I_{ai}}, \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_{pi}} = \frac{\partial}{\partial I_{pi}} (Q_i - \varphi_{qi}) = -\frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial I_{pi}}. \end{cases} \quad (1.6.16)$$

Частные производные, написанные для правых частей вышеприведенных выражений, определяются на основании системы уравнений (1.6.1) (1.6.2). В результате имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{Pi}}{\partial I_{ai}} = U_B + \sum_{i=1}^M A_{ij} + (R_{ii}I_{ai} + X_{ii}I_{pi}), \\ \frac{\partial \varphi_{Pi}}{\partial I_{pj}} = \sum_{i=1}^M B_{ij} + (R_{ii}I_{pi} - X_{ii}I_{ai}), \\ \frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial I_{ai}} = \sum_{i=1}^M B_{ij} - (R_{ii}I_{pi} - X_{ii}I_{ai}), \\ \frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial I_{pj}} = U_B + \sum_{i=1}^M A_{ij} + (R_{ii}I_{ai} + X_{ii}I_{pi}), \end{cases} \quad (1.6.17)$$

где

$$\begin{cases} A_{ij} = (R_{ij}I_{aj} - X_{ij}I_{pj}), \\ B_{ij} = (R_{ij}I_{pj} - X_{ij}I_{aj}). \end{cases} \quad (1.6.18)$$

При разных индексах, т. е. когда  $i \neq j$ , получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{Pi}}{\partial I_{aj}} = \frac{\partial}{\partial I_{aj}} (P_i - \varphi_{pj}) = -\frac{\partial \varphi_{pj}}{\partial I_{aj}}, \\ \frac{\partial \Phi_{Pi}}{\partial I_{pj}} = \frac{\partial}{\partial I_{pj}} (P_i - \varphi_{pj}) = -\frac{\partial \varphi_{pj}}{\partial I_{pj}}, \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_{aj}} = \frac{\partial}{\partial I_{aj}} (Q_i - \varphi_{qj}) = -\frac{\partial \varphi_{qj}}{\partial I_{aj}}, \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_{pj}} = \frac{\partial}{\partial I_{pj}} (Q_i - \varphi_{qj}) = -\frac{\partial \varphi_{qj}}{\partial I_{pj}}. \end{cases} \quad (1.6.19)$$

Выражения, написанные для правых частей, определяем также на основании системы уравнений (1.6.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{Pi}}{\partial I_{aj}} = R_{ij}I_{ai} + X_{ij}I_{pi}, \\ \frac{\partial \varphi_{Pi}}{\partial I_{pj}} = R_{ij}I_{pi} - X_{ij}I_{ai}, \\ \frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial I_{aj}} = R_{ij}I_{pi} + X_{ij}I_{ai}, \\ \frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial I_{pj}} = R_{ij}I_{ai} + X_{ij}I_{pi}. \end{cases} \quad (1.6.20)$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\partial \varphi_{Pi}}{\partial I_{aj}} = \frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial I_{pj}}, \quad \frac{\partial \varphi_{Pi}}{\partial I_{pj}} = -\frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial I_{aj}}.$$

В результате получим все необходимые частные производные, входящие в матрицу Якоби. После этого можно перейти к построению итерационного процесса решения системы нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима. Итерационный процесс считается завершённым, если обеспечиваются условия:

$$\begin{cases} \Phi_{pi}(I_{ai}, I_{pi}) = P_i - \varphi_{pi}(I_{ai}, I_{pi}) \leq \Delta P, \\ \Phi_{qi}(I_{ai}, I_{pi}) = Q_i - \varphi_{qi}(I_{ai}, I_{pi}) \leq \Delta Q, \end{cases} \quad (1.6.21)$$

где  $\Delta P$  и  $\Delta Q$  – заданные величины, характеризующие точность решения рассмотренной системы нелинейных алгебраических уравнений.

Для иллюстрации данного метода рассмотрим схему замещения одной электрической системы, приведенную на рис. 1.3, и исходную информацию относительно ее узлов, приведенную в табл. 1.4.

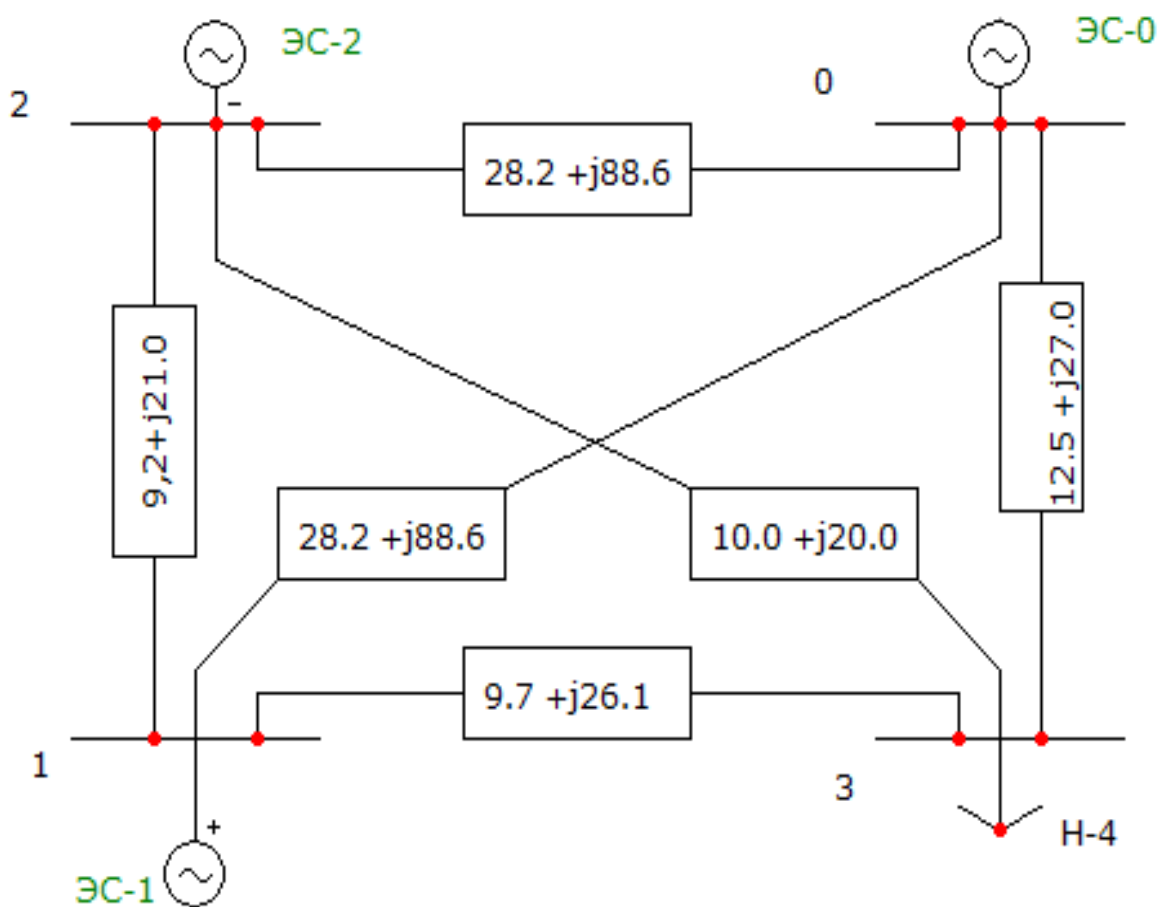


Рис. 1.3. Схема замещения электрической системы



Исследуемая электрическая система (см. рис. 1.3) состоит из четырех узловых точек, из которых один стационарный узел с нулевым индексом выбран в качестве базисного (балансирующего).

Таблица 1.4

Режимные параметры исследуемой электрической системы

Узел	$P$ , МВт	$Q$ , МВар	$U$ , кВ	$\Psi_U$ , град
0	88,17	79,89	220,00	0,0
1	161,29	80,64	220,90	1,13
2	202,46	101,23	221,40	1,0
3	431,68	215,84	204,50	-2,36

Если написать рекуррентное выражение (1.6.15) для данной электрической системы, то получим

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{I_{a1}}{I_{a2}} \\ \frac{I_{a3}}{I_{P1}} \\ \frac{I_{P2}}{I_{P3}} \end{bmatrix}^{K+1} &= \begin{bmatrix} \frac{I_{a1}}{I_{a2}} \\ \frac{I_{a3}}{I_{P1}} \\ \frac{I_{P2}}{I_{P3}} \end{bmatrix}^K - \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{p1}}{\partial I_{a1}} & \frac{\partial \varphi_{p1}}{\partial I_{a2}} & \frac{\partial \varphi_{p1}}{\partial I_{a3}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{p1}}{\partial I_{p1}} & \frac{\partial \varphi_{p1}}{\partial I_{p2}} & \frac{\partial \varphi_{p1}}{\partial I_{p3}} \\ \frac{\partial \varphi_{p2}}{\partial I_{a1}} & \frac{\partial \varphi_{p2}}{\partial I_{a2}} & \frac{\partial \varphi_{p2}}{\partial I_{a3}} & \vdots & \frac{\partial \varphi_{p2}}{\partial I_{p1}} & \frac{\partial \varphi_{p2}}{\partial I_{p2}} & \frac{\partial \varphi_{p2}}{\partial I_{p3}} \\ \frac{\partial \varphi_{p3}}{\partial I_{a1}} & \frac{\partial \varphi_{p3}}{\partial I_{a2}} & \frac{\partial \varphi_{p3}}{\partial I_{a3}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{p3}}{\partial I_{p1}} & \frac{\partial \varphi_{p3}}{\partial I_{p2}} & \frac{\partial \varphi_{p3}}{\partial I_{p3}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_{a1}}{\partial I_{a1}} & \frac{\partial \varphi_{a1}}{\partial I_{a2}} & \frac{\partial \varphi_{a1}}{\partial I_{a3}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{a1}}{\partial I_{p1}} & \frac{\partial \varphi_{a1}}{\partial I_{p2}} & \frac{\partial \varphi_{a1}}{\partial I_{p3}} \\ \frac{\partial \varphi_{a2}}{\partial I_{a1}} & \frac{\partial \varphi_{a2}}{\partial I_{a2}} & \frac{\partial \varphi_{a2}}{\partial I_{a3}} & \vdots & \frac{\partial \varphi_{a2}}{\partial I_{p1}} & \frac{\partial \varphi_{a2}}{\partial I_{p2}} & \frac{\partial \varphi_{a2}}{\partial I_{p3}} \\ \frac{\partial \varphi_{a3}}{\partial I_{a1}} & \frac{\partial \varphi_{a3}}{\partial I_{a2}} & \frac{\partial \varphi_{a3}}{\partial I_{a3}} & \dots & \frac{\partial \varphi_{a3}}{\partial I_{p1}} & \frac{\partial \varphi_{a3}}{\partial I_{p2}} & \frac{\partial \varphi_{a3}}{\partial I_{p3}} \end{bmatrix}^{-1} \times \\
 \times \begin{bmatrix} \frac{P_1 - \varphi_{a1}}{P_2 - \varphi_{a2}} \\ \frac{P_3 - \varphi_{a3}}{Q_1 - \varphi_{P1}} \\ \frac{Q_2 - \varphi_{P2}}{Q_3 - \varphi_{P3}} \end{bmatrix} & \quad (1.6.22)
 \end{aligned}$$

Перед итерационным процессом необходимо определить исходные численные значения составляющих узловых токов. Принимая  $U_1 = U_2 = \dots = U_M = 220$  кВ, а также пользуясь исходной информацией, приведенной в табл. 1.4, на основании формулы

$$I_{ai} + jI_{pi} = \frac{P_i - jQ_i}{\hat{U}_i} \quad (1.6.23)$$

можно определить

$$\begin{cases} I_{a1}^0 = 0,07331, \\ I_{a2}^0 = 0,9203, \\ I_{a3}^0 = -1,9688, \\ I_{p1}^0 = 0,3668, \\ I_{p2}^0 = 0,4603, \\ I_{p3}^0 = 0,9811. \end{cases} \quad (1.6.24)$$

На основании формул (1.6.17), (1.6.18) и (1.6.20) нетрудно определить также численные значения частных производных, входящих в матрицу Якоби (1.6.22).

Проведя две итерации с точностью

$$\Delta P = 0,01; \Delta Q = 0,1, \quad (1.6.25)$$

можно получить соответствующие численные значения для искомым составляющих узловых токов исследуемой электрической системы  $I_{a1}$ ,  $I_{a2}$ ,  $I_{a3}$ ,  $I_{p1}$ ,  $I_{p2}$ ,  $I_{p3}$ .

## 2. ГИБРИДНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

В предыдущем разделе были рассмотрены  $Y$ - и  $Z$ -формы уравнений установившихся режимов электрических систем.

В отличие от этих двух уравнений в последние годы быстрыми темпами разрабатывают гибридные, или смешанные, типы уравнений установившихся режимов.

Фактически гибридные уравнения установившихся режимов электрических систем основываются на сочетаниях  $Y$ - и  $Z$ -форм решений, что имеет определенное преимущество при решении практических задач.

### 2.1. Уравнения установившихся режимов электрических систем при ( $Y - Z$ )-форме задания состояния сети

Представим матричное уравнение (1.2.3) в векторной форме

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}}, \quad (2.1.1)$$

где  $\mathbf{U}$  – столбцевая матрица комплексных узловых напряжений относительно напряжения базисного узла;

$\mathbf{I}$  – столбцевая матрица комплексных токов независимых узлов;

$\mathbf{Y}$  – неособенная квадратная матрица узловых комплексных проводимостей независимых узлов относительно базисного узла.

Для дальнейшего изложения материала примем следующую систему индексов:  $m$  ( $n$ ) для стационарных и  $k$  ( $l$ ) для нагрузочных узлов.

Уравнения (2.1.1) представим в блочно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_m \\ \dots \\ \dot{I}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{mn} & \vdots & Y_{mk} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{ln} & \vdots & Y_{lk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{n0} \\ \dots \\ \dot{U}_{k0} \end{bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

В развернутой форме данное блочно-матричное уравнение можно записать в виде системы двух матричных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{I}_m = Y_{mn}\dot{U}_{no} + Y_{mk}\dot{U}_{ko}, \\ \dot{I}_l = Y_{ln}\dot{U}_{no} + Y_{lk}\dot{U}_{ko}. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Определяя  $\dot{U}_{ko}$  из второго уравнения (2.1.3)

$$\dot{U}_{ko} = Y_{lk}^{-1}\dot{I}_l - Y_{lk}^{-1}Y_{ln}\dot{U}_{no}$$

и подставив его в первое уравнение (2.1.3), получим:

$$\dot{I}_m = (Y_{mn} - Y_{mk}Y_{lk}^{-1}Y_{ln})\dot{U}_{no} + Y_{mk}Y_{lk}^{-1}\dot{I}_l. \quad (2.1.4)$$

Объединяя уравнения  $\dot{U}_{ko}$  и  $\dot{I}_m$  и представляя их в блочно-матричном виде, получим:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_m \\ \dots \\ \dot{U}_{ko} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{mn} - Y_{mk}Y_{lk}^{-1}Y_{ln} & \vdots & Y_{mk}Y_{lk}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ -Y_{lk}^{-1}Y_{ln} & \vdots & Y_{lk}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{no} \\ \dots \\ \dot{I}_l \end{bmatrix}. \quad (2.1.5)$$

Полученное уравнение называется смешанным, или гибридным уравнением состояния электрической системы.

Для представления данного уравнения в более компактной форме введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Y_{m,n} &= Y_{mn} - Y_{mk}Y_{lk}^{-1}Y_{ln}, \\ \dot{A}_{m,l} &= Y_{mk}Y_{lk}^{-1}, \\ \dot{C}_{k,n} &= Y_{lk}^{-1}Y_{ln}, \\ Z_{k,e} &= Y_{lk}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

В результате получим

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_m \\ \dots \\ \dot{U}_{ko} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{m,n} & \vdots & \dot{A}_{m,l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dot{C}_{k,n} & \vdots & Z_{k,l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_{no} \\ \dots \\ \dot{U}_{ko} \end{bmatrix}. \quad (2.1.7)$$

Нетрудно заметить, что элементы подматрицы  $\dot{A}_{m,e}$  и  $\dot{C}_{k,n}$  являются безразмерными величинами.

Матричное уравнение (2.1.7) в алгебраической форме имеет вид

$$\dot{I}_m = \sum_{n=1}^r Y_{m,n} \dot{U}_{ko} + \sum_{l=r+1}^M \dot{A}_{m,l} \dot{I}_l, \quad (2.1.8)$$

$$\dot{U}_{ko} = \sum_{n=1}^r \dot{C}_{k,n} \dot{U}_{ko} + \sum_{l=r+1}^M Z_{k,e} \dot{I}_l. \quad (2.1.9)$$

Представим эти уравнения в следующем виде:

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{Bm} + \sum_{n=1}^r Y_{m,n} \dot{U}_n + \sum_{l=r+1}^M \dot{A}_{m,l} \dot{I}_l, \quad (2.1.10)$$

$$\dot{U}_k = \dot{U}_{BK} + \sum_{n=1}^r \dot{C}_{k,n} \dot{U}_n + \sum_{l=r+1}^M Z_{k,l} \dot{I}_l, \quad (2.1.11)$$

где

$$\begin{cases} \dot{I}_{Bm} = -\sum_{n=1}^r Y_{m,n} \dot{U}_0, \\ \dot{U}_{BK} = (1 - \sum_{n=1}^r \dot{C}_{k,n}) \dot{U}_0. \end{cases} \quad (2.1.12)$$

При получении уравнений (2.1.10) и (2.1.11) было учтено, что  $\dot{U}_{ko} = \dot{U}_n - U_0$  и  $\dot{U}_{ka} = \dot{U}_k - U_0$ .

Для построения математической модели установившегося режима электрической системы необходимо уравнения (2.1.10) и (2.1.11) представить через узловые комплексные мощности.

Умножая уравнение (2.1.10) на  $\hat{U}_m$ , а уравнение (2.1.11) – на  $\hat{I}_k$ , также учитывая, что

$$\hat{U}_m \dot{I}_m = P_m - jQ_m, \quad \dot{U}_k \hat{I}_k = P_k + jQ_k, \quad \text{получим}$$

$$P_m - jQ_m = \dot{I}_{Bm} \hat{U}_m + \sum_{n=1}^r Y_{m,n} \dot{U}_n \hat{U}_m + \sum_{l=r+1}^M \dot{A}_{m,l} \dot{I}_l \hat{U}_m, \quad (2.1.13)$$

$$P_k + jQ_k = \dot{U}_{BK} \hat{I}_k + \sum_{n=1}^r \dot{C}_{k,n} \dot{U}_n \hat{I}_k + \sum_{l=r+1}^M Z_{k,l} \dot{I}_l \hat{I}_k. \quad (2.1.14)$$

Разлагая уравнения (2.1.13) и (2.1.14) на составляющие, можно установить выражения узловых активных и реактивных мощностей:

$$P_m = P_{Bm} + \sum_{n=1}^r [g_{m,n}(U'_m U'_n + U''_m U''_n) + b_{m,n}(U''_m U'_n - U'_m U''_n)], \quad (2.1.15)$$

$$Q_m = Q_{Bm} + \sum_{n=1}^r [g_{m,n}(U''_m U'_n - U'_m U''_n) - b_{m,n}(U'_m U'_n + U''_m U''_n)]. \quad (2.1.16)$$

$$P_k = P_{Bk} + \sum_{l=r+1}^M [R_{k,l}(I'_k I'_l + I''_k I''_l) + X_{k,l}(I''_k I'_l - I'_k I''_l)], \quad (2.1.17)$$

$$Q_k = Q_{Bk} + \sum_{l=r+1}^M [R_{k,l}(I''_k I'_l - I'_k I''_l) - X_{k,l}(I'_k I'_l + I''_k I''_l)]. \quad (2.1.18)$$

В выражениях (2.1.15) и (2.1.16)  $U'$ ,  $U''$  являются составляющими соответствующих узловых напряжений, а в (2.1.17) и (2.1.18)  $I'$ ,  $I''$  – составляющими соответствующих узловых токов. Величины  $P_{Bm}$ ,  $Q_{Bm}$ ,  $P_{Bk}$ ,  $Q_{Bk}$  определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{Б}m} &= p_{\text{Б}m} + \sum_{l=r+1}^M [a'_{m,l}(U'_m I'_l + U''_m I''_l) + a''_{m,l}(U''_m I'_l - U'_m I''_l)], \\ Q_{\text{Б}m} &= q_{\text{Б}m} + \sum_{l=r+1}^M [a'_{m,l}(U''_m I'_l - U'_m I''_l) - a''_{m,l}(U'_m I'_l + U''_m I''_l)]. \end{aligned} \right\} (2.1.19)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{Б}k} &= p_{\text{Б}k} + \sum_{n=1}^{\Gamma} [c'_{k,n}(I'_k U'_n + I''_k U''_n) + c''_{k,n}(I''_k U'_n - I'_k U''_n)], \\ Q_k &= q_{\text{Б}k} + \sum_{n=1}^{\Gamma} [c'_{k,n}(I''_k U'_n - I'_k U''_n) - c''_{k,n}(I'_k U'_n + I''_k U''_n)]. \end{aligned} \right\} (2.1.20)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{cases} a'_{m,l} = R_e(\dot{A}_{ml}), a''_{m,l} = I_m(\dot{A}_{ml}), \\ c'_{k,n} = R_e(\dot{c}_{kn}), c''_{k,n} = I_m(\dot{c}_{kn}). \end{cases} (2.1.21)$$

С другой стороны, величины  $p_{\text{Б}m}$ ,  $q_{\text{Б}m}$ ,  $p_{\text{Б}k}$ ,  $q_{\text{Б}k}$  определяются в виде

$$\begin{cases} p_{\text{Б}m} = -\sum_{n=1}^r (g_{m,n} U'_m + b_{m,n} U''_m) U_0, \\ q_{\text{Б}m} = -\sum_{n=1}^r (g_{m,n} U''_m - b_{m,n} U'_m) U_0. \end{cases} (2.1.22)$$

$$\begin{cases} p_{\text{Б}k} = I'_k U_0 - \sum_{n=1}^r (c'_{k,n} I'_k + c''_{k,n} I''_k) U_0, \\ q_{\text{Б}k} = -I''_k U_0 + \sum_{n=1}^r (c'_{k,n} I''_k + c''_{k,n} I'_k) U_0. \end{cases} (2.1.23)$$

Представим системы уравнений (2.1.15), (2.1.16) и (2.1.17), (2.1.18) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P_m &= P_{\text{Б}m} + \varphi_{pm}(U'_n, U''_n), \\ Q_m &= Q_{\text{Б}m} + \varphi_{qm}(U'_n, U''_n). \end{aligned} \right\} (2.1.24)$$

$$\left. \begin{aligned} P_k &= P_{\text{Б}k} + \varphi_{pk}(I'_l, I''_l), \\ Q_k &= Q_{\text{Б}k} + \varphi_{qk}(I'_l, I''_l). \end{aligned} \right\} (2.1.25)$$

Нетрудно заметить, что функции  $\varphi_{pm}$ ,  $\varphi_{pk}$  имеют размерности активных мощностей, а  $\varphi_{qm}$ ,  $\varphi_{qk}$  – размерности реактивных мощностей и определяются в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{pm} &= \sum_{n=1}^r [g_{m,n}(U'_m U'_n + U''_m U''_n) + b_{m,n}(U''_m U'_n - U'_m U''_n)], \\ \varphi_{qm} &= \sum_{n=1}^r [g_{m,n}(U''_m U'_n - U'_m U''_n) - b_{m,n}(U'_m U'_n + U''_m U''_n)]. \end{aligned} \right\} (2.1.26)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{pk} &= \sum_{l=r+1}^M [R_{k,e}(I'_k I'_l + I''_k I''_l) + X_{k,e}(I''_k I'_l - I'_k I''_l)], \\ \varphi_{qk} &= -\sum_{l=r+1}^M [R_{k,e}(I''_k I'_l - I'_k I''_l) - X_{k,e}(I'_k I'_l + I''_k I''_l)]. \end{aligned} \right\} (2.1.27)$$

Далее представим (2.1.24) и (2.1.25) в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{pm} &= P_m - [P_{\text{Б}m} + \varphi_{pm}(U'_n, U''_n)], \\ \Phi_{qm} &= Q_m - [Q_{\text{Б}m} + \varphi_{qm}(U'_n, U''_n)]. \end{aligned} \right\} = 0, (2.1.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{pk} &= P_k - [P_{Bk} + \varphi_{pk}(I'_l, I''_l)], \\ \Phi_{qk} &= Q_k - [Q_{Bk} + \varphi_{qk}(I'_l, I''_l)] \end{aligned} \right\} = 0. \quad (2.1.29)$$

Из (2.1.28) можно заметить, что искомыми переменными являются  $U'_n$  и  $U''_n$ , а из (2.1.29) –  $I'_l$  и  $I''_l$ . Выбор состава уравнений из систем (2.1.28), (2.1.29) зависит от характера заданной исходной информации относительно узлов исследуемой электрической системы.

Представим систему уравнений (2.1.28) в виде

$$\Phi(P, Q, U'_n, U''_n) = \begin{cases} \Phi_{pm}(P, U'_n, U''_n), \\ \Phi_{qm}(Q, U'_n, U''_n), \end{cases} \quad (2.1.30)$$

которая изображает  $Y(Z)$ -блочное нелинейное векторное уравнение установившегося режима электрической системы ( $Y-Z$ ) математической модели.

Аналогично представим систему уравнений (2.1.29) в виде

$$\Phi(P, Q, I'_l, I''_l) = \begin{cases} \Phi_{pk}(P, I'_l, I''_l), \\ \Phi_{qk}(Q, I'_l, I''_l), \end{cases} \quad (2.1.31)$$

которая изображает  $Z(Y)$ -блочное нелинейное векторное уравнение установившегося режима электрической системы ( $Y-Z$ ) математической модели.

Воспользовавшись понятиями векторов  $X$ ,  $U$ ,  $D$  относительно (2.1.30) и (2.1.31), можно получить:

$$X = \begin{cases} \left. \begin{aligned} P_0 \\ Q_0 \end{aligned} \right\} & \text{для базисного или балансирующего узла,} \\ \left. \begin{aligned} U' \\ U'' \end{aligned} \right\} & \text{для стационарных узлов типа } P-Q, \\ \left. \begin{aligned} I' \\ I'' \end{aligned} \right\} & \text{для нагрузочных узлов типа } P-Q; \end{cases} \quad (2.1.32)$$

$$U = \begin{cases} \left. \begin{aligned} U_0 \\ \Psi_{u0} \end{aligned} \right\} & \text{для базисного или балансирующего} \\ & \text{узла типа } U-\Psi_u; \\ \left. \begin{aligned} P \\ Q \end{aligned} \right\} & \text{для стационарных узлов типа } P-Q. \end{cases} \quad (2.1.33)$$

Что касается вектора возмущения  $D$ , то он включает в себя заданные активные и реактивные мощности нагрузочных узлов, как и в предыдущих случаях.

Используя эти обозначения, векторные уравнения (2.1.30) (2.1.31) можно соответственно представить в виде

$$\omega(X, U, D) = 0, \quad (2.1.34)$$

$$T(X, U, D) = 0. \quad (2.1.35)$$

Полученные уравнения (2.1.34), (2.1.35) называются нелинейными векторными уравнениями состояния электрической системы в  $(Y-Z)$ -форме.

## 2.2. Решение $(Y-Z)$ -формы уравнений установившегося режима электрической системы

Система векторных уравнений состояний электрической системы в  $(Y-Z)$ -форме была получена в виде (2.1.34) и (2.1.35).

Векторные уравнения (2.1.30) или (2.1.34) состоят из совокупности нелинейных алгебраических уравнений активных и реактивных мощностей стационарных узлов с индексом  $m$  ( $n$ ), а векторное уравнение (2.1.31) или (2.1.35) – из совокупности нелинейных алгебраических уравнений активных и реактивных мощностей нагрузочных узлов с индексом  $k$  ( $l$ ).

В зависимости от задания исходной информации относительно стационарных узлов структура векторного уравнения (2.1.30) соответственно изменяется. Например, если относительно всех независимых стационарных узлов заданы активные и реактивные мощности, т. е. они являются узлами типа **P-Q**, то векторное уравнение (2.1.30) необходимо представить как совокупность нелинейных алгебраических уравнений узловых активных и реактивных мощностей.

В случае если независимые стационарные узлы являются узлами типа **P-U**, то векторное уравнение (2.1.30) можно представить состоящим только из нелинейных алгебраических уравнений активных мощностей или из совокупности нелинейных алгебраических уравнений активных мощностей и напряжений.

Рассмотрим случай, когда независимые стационарные узлы являются узлами типа **P-Q**. Тогда система векторных уравнений (2.1.30) и (2.1.31) будет состоять из совокупности нелинейных алгебраических уравнений активных и реактивных мощностей всех независимых узлов. Из структуры векторных уравнений можно заметить, что они взаимосвязаны, т.е. переменные, которые входят в (2.1.30), входят и в



(2.1.31), и наоборот, тем не менее первоначально они рассматриваются как самостоятельные уравнения, а при организации итерационного процесса учитывается их взаимосвязанность.

Сначала рассмотрим векторное уравнение (2.1.34). Разлагая его в ряд Тейлора, получим

$$\omega(X, U^0 D^0) = \omega(X^0, U^0 D^0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_{x^0} \Delta X + \omega_b, \quad (2.2.1)$$

где  $\omega_b$  – слагаемые ряда Тейлора, состоящие из частных производных второго и высших порядков.

Если пренебречь слагаемым  $\omega_b$ , то ряд Тейлора (2.2.1) примет вид

$$\omega(X, U^0 D^0) = \omega(X^0, U^0 D^0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_{x^0} \Delta X. \quad (2.2.2)$$

Из (2.2.2) можно установить следующее выражение для искомого вектора  $\Delta X$ :

$$\Delta X = - \left( \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_{x^0} \right)^{-1} \omega(X^0, U^0 D^0) - \omega(X, U^0 D^0). \quad (2.2.3)$$

Учитывая, что в точке решения имеем

$$\omega(X^0, U^0 D^0) = 0, \quad (2.2.4)$$

выражение  $\Delta X$  принимает более упрощенный вид

$$\Delta X = - \left( \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_{x^0} \right)^{-1} \omega(X, U^0 D^0). \quad (2.2.5)$$

Новое значение, т. е. значение искомого вектора  $X^1$  на первой итерации можно определить после установления численного значения приращения вектора  $\Delta X^0$ :

$$X^1 = X^0 + \Delta X^0. \quad (2.2.6)$$

Из выражения (2.2.6) нетрудно заметить, что при наличии численного значения  $X^0$  можно определить и численное значение  $\Delta X^0$ .

Разумеется, для определения численного значения вектора  $X$  на  $k$ -й итерации можно написать следующее рекуррентное выражение:

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^k, \quad (2.2.7)$$

которое при  $k = 0$  превращается в (2.2.6).

Величина приращения  $\Delta X^k$  для  $k$ -й итерации определяется в виде

$$\Delta X^k = - \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x^k} \right)^{-1} \omega(X^k, U^0 D^0). \quad (2.2.8)$$

При этом для определения численного значения искомого вектора  $X$  рекуррентного выражение принимает следующий окончательный вид:

$$\Delta X^{k+1} = X^k - \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{x^k} \right)^{-1} \omega(X^k, U^0 D^0). \quad (2.2.9)$$

Здесь также  $\partial \omega / \partial x$  является квадратной матрицей Якоби, порядок которой характеризуется числом независимых стационарных узлов. Если число независимых стационарных узлов равняется  $\Gamma$ , то порядок матрицы будет  $2\Gamma$ . Учитывая обозначения (2.1.32), рекуррентное выражение (2.2.9) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} U'_m \\ \dots \\ U''_m \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} U'_m \\ \dots \\ U''_m \end{bmatrix}^i - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U''_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U''_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{pm} \\ \dots \\ \Phi_{qm} \end{bmatrix}. \quad (2.2.10)$$

Частные производные, входящие в рекуррентное выражение (2.2.10), определяются с помощью нижеприведенных выражений:

– при одинаковых индексах, т. е. когда  $m = n$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_m} = -[I'_{Bk} + \sum_{n=1}^{\Gamma} H_{mn} + (g_{m,m} U'_m + b_{m,m} U''_m)], \\ \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U''_m} = -[I'_{Bk} + \sum_{n=1}^{\Gamma} K_{mn} + (g_{m,m} U''_m - b_{m,m} U'_m)], \\ \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U'_m} = -[-I'_{Bk} + \sum_{n=1}^{\Gamma} K_{mn} + (g_{m,m} U''_m - b_{m,m} U'_m)], \\ \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U''_m} = -[I'_{Bk} + \sum_{n=1}^{\Gamma} H_{mn} - (g_{m,m} U'_m + b_{m,m} U''_m)], \end{cases} \quad (2.2.11)$$

где

$$\begin{cases} H_{mn} = g_{m,n} U'_n - b_{m,n} U''_n, \\ K_{mn} = g_{m,n} U''_n + b_{m,n} U'_n. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

С другой стороны,

$$\begin{cases} I'_{Bk} = -\sum_{n=1}^{\Gamma} g_{mn} U_0 + \sum_{k=r+1}^M (a'_{mk} I'_k - a''_{mk} I''_k), \\ I''_{Bk} = -\sum_{n=1}^{\Gamma} b_{mn} U_0 + \sum_{k=r+1}^M (a'_{mk} I''_k + a''_{mk} I'_k); \end{cases} \quad (2.2.13)$$

– при разных индексах, т. е. когда  $m \neq n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_n} = -(g_{mn}U'_m + b_{mn}U''_m), \\ \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U''_n} = -(g_{mn}U''_m - b_{mn}U'_m), \\ \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U'_n} = -(g_{mn}U'_m - b_{mn}U''_m), \\ \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U''_n} = -(-g_{mn}U'_m - b_{mn}U''_m). \end{array} \right. \quad (2.2.14)$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_n} = -\frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U''_n}; \quad \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U''_n} = \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U'_n}. \quad (2.2.15)$$

Если внести обозначения

$$H'_{mnk} = I'_{Бк} + \sum_{n=1}^r H_{mn}; \quad K'_{mnk} = I''_{Бк} + \sum_{n=1}^r K_{mn}, \quad (2.2.16)$$

то частные производные (2.2.11) принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_m} = -H'_{mnk} - (g_{mm}U'_m + b_{mm}U''_m), \\ \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U''_m} = -K'_{mnk} - (g_{mm}U''_m - b_{mm}U'_m), \\ \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U'_m} = K'_{mnk} - (g_{mm}U''_m - b_{mm}U'_m), \\ \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U''_m} = -H'_{mnk} + (g_{mm}U'_m + b_{mm}U''_m). \end{array} \right. \quad (2.2.17)$$

При этом выражения для определения активных и реактивных мощностей принимают следующий вид:

$$P_m = U'_m H'_{mnk} + U''_m K'_{mnk}; \quad Q_m = U'_m K'_{mnk} - U''_m H'_{mnk}, \quad (2.2.18)$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} P_m = -\left( g_{mm}U_m^2 + \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_m} U'_m + \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U''_m} U''_m \right), \\ Q_m = \left( b_{mm}U_m^2 - \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U'_m} U'_m - \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U''_m} U''_m \right). \end{array} \right. \quad (2.2.19)$$

Функции  $\Phi_{pm}$  и  $\Phi_{qm}$  имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{pm} = P_m - (U'_m H'_{mnk} + U''_m K'_{mnk}), \\ \Phi_{qm} = Q_m - (U'_m K'_{mnk} - U''_m H'_{mnk}), \end{array} \right. \quad (2.2.20)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} \Phi_{pm} = P_m - \left( -g_{mm} U_m^2 - \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_m} U'_m - \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U''_m} U''_m \right), \\ \Phi_{qm} = Q_m - \left( b_{mm} U_m^2 - \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U'_m} U'_m - \frac{\partial \Phi_{qm}}{\partial U''_m} U''_m \right). \end{cases} \quad (2.2.21)$$

Теперь рассмотрим решение нелинейного векторного уравнения (2.1.35). Проводя аналогичные преобразования, можно написать следующее рекуррентное выражение, вытекающее из метода Ньютона – Рафсона:

$$X^{k+1} = X^k - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x^k} \right)^{-1} T(X^k, U^0 D^0), \quad (2.2.22)$$

где  $\frac{\partial T}{\partial x}$  – квадратная матрица Якоби, порядок которой определяется числом нагрузочных узлов.

Если число нагрузочных узлов равняется **Н**, то порядок полученной матрицы Якоби будет **2Н**.

Учитывая вышеприведенное обозначение в (2.1.32), рекуррентное выражение (2.2.22) примет более наглядный вид:

$$\begin{bmatrix} I'_k \\ \dots \\ I''_k \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} I'_k \\ \dots \\ I''_k \end{bmatrix}^i - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_l} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_l} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{pk} \\ \dots \\ \Phi_{qk} \end{bmatrix}. \quad (2.2.23)$$

Можно отметить, что если в рекуррентном выражении (2.2.10) искомыми переменными являются составляющие узловых комплексных напряжений станции, то в рекуррентном выражении (2.2.23) искомыми переменными являются составляющие узловых комплексных токов нагрузок, в чем и заключается особенность предложенного метода. Частные производные, входящие в рекуррентное выражение (2.2.23), определяются по нижеприведенным выражениям:

– при одинаковых индексах, т. е. когда  $l = k$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_k} = -[U'_{Bk} + \sum_{l=\Gamma+1}^M D_{kl} + (R_{kk} I'_k + X_{kk} I''_k)], \\ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_k} = -[U''_{Bk} + \sum_{l=\Gamma+1}^M N_{kl} + (R_{kk} I''_k - X_{kk} I'_k)], \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_k} = -[U''_{Bk} + \sum_{l=\Gamma+1}^M N_{kl} - (R_{kk} I''_k - X_{kk} I'_k)], \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_k} = -[-U'_{Bk} - \sum_{l=\Gamma+1}^M D_{ke} + (R_{kk} I'_k + X_{kk} I''_k)], \end{cases} \quad (2.2.24)$$

где

$$\begin{cases} D_{kl} = (R_{kl}I'_l - X_{kl}I''_l), \\ N_{kl} = (R_{kl}I''_l + X_{kl}I'_l). \end{cases} \quad (2.2.25)$$

С другой стороны,

$$\begin{cases} U'_{Bk} = (1 - \sum_{n=1}^{\Gamma} C'_{kn})U_0 + \sum_{n=1}^{\Gamma}(C'_{kn}U'_n - C''_{kn}U''_n), \\ U''_{Bk} = -\sum_{n=1}^{\Gamma} C''_{kn}U_0 + \sum_{n=1}^{\Gamma}(C'_{kn}U''_n + C'_{kn}U'_n); \end{cases} \quad (2.2.26)$$

– при разных индексах, т. е. когда  $l \neq k$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{kl}}{\partial I'_l} = -(R_{kl}I'_k + X_{kl}I''_k), \\ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_l} = -(R_{kl}I''_k - X_{kl}I'_k), \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_l} = -(-R_{kk}I''_k + X_{kk}I'_k), \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_l} = -(R_{kl}I'_k + X_{kl}I''_k). \end{cases} \quad (2.2.27)$$

Из приведенных выражений нетрудно заметить, что

$$\frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_l} = \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_l}, \quad \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_l} = -\frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_l}. \quad (2.2.28)$$

Введем следующие обозначения:

$$D'_{kln} = U'_{Bk} + \sum_{l=\Gamma+1}^M D_{kl0}; \quad N'_{kln} = U''_{Bk} + \sum_{l=\Gamma+1}^M N_{kl}. \quad (2.2.29)$$

Тогда частные производные (2.2.14) будут иметь вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_k} = -D'_{kln} - (R_{kk}I'_k + X_{kk}I''_k), \\ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_k} = -N'_{kln} - (R_{kk}I''_k - X_{kk}I'_k), \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_k} = -N'_{kln} + (R_{kk}I''_k - X_{kk}I'_k), \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_k} = D'_{ken} - (R_{kk}I'_k + X_{kk}I''_k). \end{cases} \quad (2.2.30)$$

В этих обозначениях узловые активные  $P_k$  и реактивные  $Q_k$  мощности можно представить в виде

$$P_k = I'_k D'_{kln} + I''_k N'_{kln}; \quad Q_k = I'_k N'_{kln} - I''_k D'_{kln}, \quad (2.2.31)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} P_k = \left( -R_{kk}I_k^2 + \frac{\partial\Phi_{pk}}{\partial I'_k} I'_k - \frac{\partial\Phi_{pk}}{\partial I''_k} I''_k \right) \\ Q_k = \left( -X_{kk}I_k^2 - \frac{\partial\Phi_{qk}}{\partial I'_k} I'_k - \frac{\partial\Phi_{qk}}{\partial I''_k} I''_k \right) \end{cases} \quad (2.2.32)$$

Неявные функции  $\Phi_{pk}$ ,  $\Phi_{qk}$  имеют вид

$$\begin{cases} \Phi_{pk} = P_k - (I'_k D'_{kln} + I''_k N'_{kln}), \\ \Phi_{qk} = Q_k - (I'_k N'_{kln} - I''_k D'_{kln}), \end{cases} \quad (2.2.33)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} \Phi_{pk} = P_k - \left( -R_{kk}I_k^2 - \frac{\partial\Phi_{pk}}{\partial I'_k} I'_k - \frac{\partial\Phi_{pk}}{\partial I''_k} I''_k \right), \\ \Phi_{qk} = Q_k - \left( -X_{kk}I_k^2 - \frac{\partial\Phi_{qk}}{\partial I'_k} I'_k - \frac{\partial\Phi_{qk}}{\partial I''_k} I''_k \right). \end{cases} \quad (2.2.34)$$

Рекуррентные выражения (2.2.10), (2.2.23) показывают, что в каждой итерации вместо обращения матрицы порядка  $2\mathbf{M}$  обращаются две матрицы более низших порядков, сумма порядков которых составляет  $2\mathbf{M}$ . Это говорит о высокой эффективности предложенного метода и вычислительного алгоритма расчета установившихся режимов электрических систем.

Необходимо отметить, что можно и дальше улучшать вычислительный алгоритм, если процесс обращения матрицы заменить решением систем линейных алгебраических уравнений.

Представим рекуррентное выражение (2.2.10) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} U'_m \\ \dots \\ U''_m \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} U'_m \\ \dots \\ U''_m \end{bmatrix}^i - \begin{bmatrix} \Delta U'_m \\ \dots \\ \Delta U''_m \end{bmatrix}^i, \quad (2.2.35)$$

где

$$\begin{bmatrix} \Delta U'_m \\ \dots \\ \Delta U''_m \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_{pm}}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial\Phi_{pm}}{\partial U''_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi_{qm}}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial\Phi_{qm}}{\partial U''_n} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{pm} \\ \dots \\ \Phi_{qm} \end{bmatrix}. \quad (2.2.36)$$

Представим матричное уравнение (2.2.36) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_{pm}}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial\Phi_{pm}}{\partial U''_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi_{qm}}{\partial U'_n} & \vdots & \frac{\partial\Phi_{qm}}{\partial U''_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta U'_m \\ \dots \\ \Delta U''_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{pm} \\ \dots \\ \Phi_{qm} \end{bmatrix}. \quad (2.2.37)$$

Нетрудно заметить, что полученное матричное уравнение (2.2.37) является линейным алгебраическим уравнением. Для определения  $\Delta U'_m, \Delta U''_m$  можно (2.2.37) решить, предположим, методом относительного исключения Гаусса.

Аналогичным образом рекуррентное выражение (2.2.23) также можно представить с помощью следующего упрощенного выражения:

$$\begin{bmatrix} I'_k \\ \dots \\ I''_k \end{bmatrix}^{i+1} = \begin{bmatrix} I'_k \\ \dots \\ I''_k \end{bmatrix}^i - \begin{bmatrix} \Delta I'_k \\ \dots \\ \Delta I''_k \end{bmatrix}^i, \quad (2.2.38)$$

где

$$\begin{bmatrix} \Delta I'_k \\ \dots \\ \Delta I''_k \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_l} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_l} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_l} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{pk} \\ \dots \\ \Phi_{qk} \end{bmatrix}. \quad (2.2.39)$$

Представим (2.2.39) в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_l} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_l} & \vdots & \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I'_k \\ \dots \\ \Delta I''_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{pk} \\ \dots \\ \Phi_{qk} \end{bmatrix}. \quad (2.2.40)$$

При этом можно заметить, что полученное матричное уравнение (2.2.40) является линейным алгебраическим уравнением относительно неизвестных  $\Delta I'_k, \Delta I''_k$ . Решив также данное линейное алгебраическое уравнение методом оптимального исключения Гаусса, можно определить  $\Delta I'_k, \Delta I''_k$ .

Таким образом, для проведения одной итерации необходимо решить системы линейных алгебраических уравнений, сумма порядков некоторых, как уже было отмечено, характеризуется удвоенным числом узлов рассматриваемой электрической системы.

Для построения итерационного процесса решения систем уравнений (2.2.28) и (2.1.29) используются рекуррентные выражения (2.2.10) и (2.2.23).

Принимая узловое комплексное напряжение равными напряжению базисного узла ( $\dot{U}_0 = U_0$ ), для узлов типа **P-Q** можно определить численные значения составляющих токов  $I'_{k(l)}, I''_{k(l)}$ :

$$\begin{cases} I'_{k(l)} = \frac{P_{k(l)}}{U_0}, \\ I''_{k(l)} = \frac{Q_{k(l)}}{U_0}. \end{cases} \quad (2.2.41)$$

На основании численных значений составляющих токов, пользуясь системой уравнений (2.2.13), можно установить численные значения  $I'_{\text{БК}}$ ,  $I''_{\text{БК}}$  соответственно, которые входят в частные производные (2.2.11).

Нетрудно заметить, что в результате можно установить численные значения частных производных (2.2.11) и (2.2.14), входящих в матрицу Якоби рекуррентного матричного выражения (2.2.10). Прделав одну итерацию, можно определить численные значения соответствующих напряжений  $U'_{m(n)}$  и  $U''_{m(n)}$ . Используя полученные значения напряжений, из первой итерации рекуррентного выражения (2.2.23) с помощью системы уравнений (2.2.26) можно установить численные значения  $U'_{\text{БК}}$  и  $U''_{\text{БК}}$ , которые входят в частные производные (2.2.24).

Можно заметить, что устанавливая численные значения частных производных (2.2.24), а также (2.2.27), которые входят в матрицу Якоби рекуррентного матричного выражения (2.2.23), и проделав одну итерацию, можно установить новые численные значения соответствующих токов  $I'_{k(l)}$  и  $I''_{k(l)}$ . В результате проведен один полный цикл итерации, при котором установлены численные значения составляющих токов и напряжений узлов электрической системы. Пользуясь новыми численными значениями токов  $I'_{k(l)}$  и  $I''_{k(l)}$ , заново можно определить численные значения  $I'_{\text{БК}}$ ,  $I''_{\text{БК}}$ . Пользуясь соответствующей системой уравнений (2.2.13), на основе также численных значений составляющих напряжений  $U'_{m(n)}$  и  $U''_{m(n)}$  можно вычислить значения частных производных (2.2.11) и (2.2.14), входящих в (2.2.10). Результаты данных итераций используются затем для организации итерационного процесса на основании рекуррентного выражения (2.2.23). Итерационный процесс считается завершенным, если обеспечиваются условия:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{pm} &= P_m - [P_{\text{Бм}} + \varphi_{pm}(U'_n, U''_n)] \leq \Delta P_m, \\ \Phi_{qm} &= Q_m - [Q_{\text{Бм}} + \varphi_{qm}(U'_n, U''_n)] \leq \Delta Q_m. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.42)$$



$$\left. \begin{aligned} \Phi_{pk} &= P_k - [P_{Бк} + \varphi_{pk}(I'_l, I''_l)] \leq \Delta P_k, \\ \Phi_{qk} &= Q_k - [Q_{Бк} + \varphi_{qk}(I'_l, I''_l)] \leq \Delta Q_k, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.43)$$

где  $\Delta P_m, \Delta Q_m, \Delta P_k, \Delta Q_k$  – заданные положительные величины, характеризующие требуемую точность расчетов.

Для иллюстрации данного метода рассмотрим электрическую систему, состоящую из четырех узлов (см. рис. 1.2).

Рекуррентные выражения (2.2.10) и (2.2.23) для исследуемой электрической системы принимают следующий вид:

$$\begin{bmatrix} U'_1 \\ \dots \\ U'_2 \\ \dots \\ U''_1 \\ \dots \\ U''_2 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} U'_1 \\ \dots \\ U'_2 \\ \dots \\ U''_1 \\ \dots \\ U''_2 \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U'_1} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U''_1} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U''_2} \\ \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U'_1} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U''_1} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U''_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial U'_1} & \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial U''_1} & \frac{\partial \Phi_{q1}}{\partial U''_2} \\ \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U'_1} & \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U''_1} & \frac{\partial \Phi_{q2}}{\partial U''_2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p1} \\ \dots \\ \Phi_{p2} \\ \dots \\ \Phi_{q1} \\ \dots \\ \Phi_{q2} \end{bmatrix}. \quad (2.2.44)$$

$$\begin{bmatrix} I'_k \\ \dots \\ I''_k \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} I'_k \\ \dots \\ I''_k \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial I'_3} & \dots & \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial I''_3} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial I'_3} & \dots & \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial I''_3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p3} \\ \dots \\ \Phi_{q3} \end{bmatrix}. \quad (2.2.45)$$

Исходная информация относительно узлов приведена в табл. 1.1.

Как видно из таблицы, для всех независимых узлов заданы активные и реактивные мощности.

Однако перед итерационным процессом необходимо предварительно задать также значения узловых комплексных напряжений:

$$U'_1 = 220 \text{ кВ}; \quad U'_2 = 220 \text{ кВ}; \quad U'_3 = 220 \text{ кВ};$$

$$U''_1 = 0, \quad U''_2 = 0, \quad U''_3 = 0.$$

Ввиду сложности организации итерационного процесса приведем процесс численного решения задачи. При этом (2.2.44) принимает вид

$$\begin{bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ U''_1 \\ U''_2 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -7,4175 & 5,0521 & -15,9945 & 11,6426 \\ 5,0521 & -7,8827 & 11,6426 & -16,1212 \\ -16,6910 & 11,6426 & 6,2252 & -5,0521 \\ 11,6426 & -16,8238 & -5,0521 & 6,3134 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 29,9917 \\ 29,8129 \\ 18,4844 \\ 46,6698 \end{bmatrix}.$$

После обращения матрицы Якоби получим

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -0,0299 & -0,0176 & -0,1015 & -0,0709 \\ -0,0176 & -0,0296 & -0,0708 & -0,0998 \\ -0,1155 & -0,0840 & 0,0564 & 0,0437 \\ -0,0842 & -0,1137 & 0,0435 & 0,0581 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 29,9917 \\ 29,8129 \\ 18,4844 \\ 46,6698 \end{bmatrix}.$$

Откуда находим

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -3,531471 \\ -4,089204 \\ -4,715733 \\ -4,36396 \end{bmatrix}^0 \cdot \begin{bmatrix} 223,531471 \\ 224,089204 \\ 4,715733 \\ 4,363960 \end{bmatrix}^1.$$

Затем переходим к рекуррентному выражению (2.2.45). Определяя первоначальные токи на основании (2.2.41), получим следующие численные значения:  $I_3' = -1,962182$ ,  $I_3'' = 0,981091$ .

Устанавливая численные значения матрицы Якоби (2.2.45), получим:

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -1,962162 \\ 0,981091 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -205,969451 & 28,781940 \\ 12,515823 & 201,750091 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -23,138911 \\ -33,161702 \end{bmatrix}.$$

Обращая матрицу Якоби второго порядка, получим:

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -1,962162 \\ 0,981091 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -0,004897 & 0,000698 \\ -0,000304 & 0,004999 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -23,138911 \\ -33,161702 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -1,962162 \\ 0,981091 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 0,105555 \\ -0,161310 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2,067737 \\ 1,142401 \end{bmatrix}.$$

Завершая полный цикл первой итерации, переходим ко второй итерации:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 223,5315 \\ 224,0892 \\ 4,7157 \\ 4,3640 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} -7,3414 & 4,8836 & -16,3503 & 11,9592 \\ 4,9150 & -7,8599 & 11,9592 & -16,3100 \\ -17,1528 & 11,9378 & 5,8203 & -4,88336 \\ 11,9592 & -17,4189 & -4,9150 & 5,9510 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -6,9015 \\ -9,2602 \\ -12,5814 \\ -14,8437 \end{bmatrix}.$$

После обращения данной матрицы Якоби четвертого порядка получим

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 223,5315 \\ 224,0892 \\ 4,7157 \\ 4,3640 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} -0,0261 & -0,0162 & -0,1004 & -0,0707 \\ -0,0159 & -0,0264 & 0,0683 & -0,0978 \\ -0,1070 & -0,0636 & 0,0548 & 0,0417 \\ -0,0811 & -0,1119 & 0,0419 & 0,0571 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} -6,9015 \\ -9,2602 \\ -12,5814 \\ -14,8437 \end{bmatrix}.$$

Умножая квадратную матрицу четвертого порядка на столбцовую матрицу, получим:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 223,5315 \\ 224,0892 \\ 4,7157 \\ 4,3640 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} 2,643637 \\ 2,666866 \\ 0,016716 \\ 0,220244 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220,887873 \\ 221,422344 \\ 4,698984 \\ 4,143756 \end{bmatrix}.$$

Переходим к рекуррентному выражению (2.2.45):

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -2,067737 \\ 1,142401 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} -205,863880 & 31,614595 \\ -11,283776 & 202,589840 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1,613553 \\ 1,926317 \end{bmatrix}.$$

Получим

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -2,067737 \\ 1,142401 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} -0,004899 & 0,000764 \\ -0,000273 & 0,004978 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,613558 \\ 1,926317 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -2,067737 \\ 1,142401 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} 0,002752 \\ 0,005489 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,065985 \\ 1,147899 \end{bmatrix}.$$

Завершая полный цикл итерации, переходим к третьей:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220,887873 \\ 221,422344 \\ 4,698984 \\ 4,143756 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} -7,1233 & 4,5978 & -16,1498 & 11,7895 \\ 4,7270 & -7,6583 & 11,7853 & -16,1700 \\ -17,0901 & 11,6479 & 5,3503 & -4,7535 \\ 11,6272 & -17,2471 & -4,6380 & 5,1309 \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0,0436 \\ 0,0880 \\ 0,0358 \\ 0,0475 \end{bmatrix}.$$

Обращая матрицу Якоби, получим:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220,887873 \\ 221,422344 \\ 4,698984 \\ 4,143756 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} -0,0158 & -0,0098 & -0,0904 & -0,0506 \\ -0,0108 & -0,0204 & -0,0595 & -0,0862 \\ -0,0984 & -0,0424 & 0,0475 & 0,0287 \\ -0,0781 & -0,0919 & 0,0365 & 0,0482 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0,0436 \\ 0,0880 \\ 0,0358 \\ 0,0475 \end{bmatrix}.$$

Затем

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220,887873 \\ 221,422344 \\ 4,698984 \\ 4,143756 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,007178 \\ -0,004422 \\ -0,006279 \\ -0,007894 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220,895051 \\ 221,426766 \\ 4,705263 \\ 4,151609 \end{bmatrix}.$$

Теперь необходимо перейти к рекуррентному выражению (2.2.45):

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -2,065985 \\ 1,147889 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} -205,933400 & 31,462122 \\ -11,107576 & 202,878600 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,007510 \\ -0,002189 \end{bmatrix}.$$

Затем

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -2,065985 \\ 1,147889 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} -0,004896 & 0,000763 \\ -0,000268 & 0,004979 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,007510 \\ -0,002189 \end{bmatrix}.$$

Производя умножение квадратной матрицы второго порядка на столбец матрицы, получим:

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -2,065985 \\ 1,147889 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} -0,000053 \\ -0,000013 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,065932 \\ 1,147902 \end{bmatrix}.$$

Этим завершается полный цикл третьей итерации. Переходим к четвертой, при которой устанавливаются численные значения элементов матрицы Якоби выражения (2.2.44):

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 220,8951 \\ 221,4268 \\ 4,7053 \\ 4,1516 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -7,0975 & 4,2169 & -16,0779 & 11,4551 \\ 4,4879 & -7,5372 & 11,6954 & -16,0805 \\ -16,9845 & 11,3081 & 5,1901 & -4,5432 \\ 11,4877 & -17,0356 & -4,4805 & 5,5401 \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0,0108 \\ 0,0319 \\ 0,0074 \\ 0,0051 \end{bmatrix}.$$

Обращая матрицу Якоби, получим:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 220,8951 \\ 221,4268 \\ 4,7053 \\ 4,1516 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -7,0975 & 4,2169 & -16,0779 & 11,4551 \\ 4,4879 & -7,5372 & 11,6954 & -16,0805 \\ -16,9845 & 11,3081 & 5,1901 & -4,5432 \\ 11,4877 & -17,0356 & -4,4805 & 5,5401 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0,0108 \\ 0,0319 \\ 0,0074 \\ 0,0051 \end{bmatrix}.$$

Обращая матрицу Якоби, получим:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 220,8951 \\ 221,4268 \\ 4,7053 \\ 4,1516 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -0,0096 & -0,0052 & -0,0418 & -0,0236 \\ -0,0082 & -0,0079 & -0,0197 & -0,0359 \\ -0,0497 & -0,0173 & 0,0115 & 0,0071 \\ -0,0490 & -0,0518 & 0,0174 & 0,0091 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0,0108 \\ 0,0319 \\ 0,0074 \\ 0,0051 \end{bmatrix}.$$

После умножения этих матриц получим

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 220,8951 \\ 221,4268 \\ 4,7053 \\ 4,1516 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -0,000701 \\ -0,000670 \\ -0,000460 \\ -0,002005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220,895801 \\ 221,427470 \\ 4,705760 \\ 4,153605 \end{bmatrix}.$$

Переходим к четвертой итерации рекуррентного выражения (2.2.45).

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} -2,065932 \\ 1,147902 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -205,974610 & 31,671290 \\ -11,175310 & 202,993100 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,005980 \\ -0,001379 \end{bmatrix}.$$

Затем

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} -2,065932 \\ 1,147902 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -0,000030 \\ -0,000008 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,065902 \\ 1,147910 \end{bmatrix}.$$

Таким образом завершается итерационный процесс. Полученные значения искоемых режимных параметров представим в виде табл. 2.1.

Таблица 2.1

*Искомые режимные параметры*

Узел	$\dot{U} = U' + jU''$	$\dot{I} = I' + jI''$
ЭС-1	220,8958 + 4,7058	–
ЭС-2	221,4275 + 4,1536	–
ЭН-3	–	– 2,065902 + 1,147910

Чтобы установить точность решения задачи, необходимо определить численные значения небалансов мощностей узлов  $\Phi_{p1}$ ,  $\Phi_{p2}$ ,  $\Phi_{q1}$ ,  $\Phi_{q2}$ , а также  $\Phi_{p3}$  и  $\Phi_{q3}$  для режимных параметров, полученных на последней четвертой итерации.

Численные значения указанных небалансов приводятся в табл. 2.2 и 2.3.

Таблица 2.2

*Процесс уменьшения небалансов режимных параметров исследуемой электрической системы*

Номер итерации	Для рекуррентного выражения (2.2.44)			
	$\Phi_{p1}$	$\Phi_{p2}$	$\Phi_{q1}$	$\Phi_{q2}$
1	29,9917	29,8129	48,4844	46,6698
2	– 6,9015	– 9,2602	– 12,5814	–14,8437
3	0,0436	0,0880	0,0358	0,0475
4	0,0108	0,0319	0,0074	0,0051
5	0,0025	0,0045	0,0018	0,0013

Таблица 2.3

*Процесс уменьшения небалансов режимных параметров исследуемой электрической системы*

Номер итерации	Для рекуррентного выражения (2.2.45)	
	$\Phi_{p3}$	$\Phi_{q3}$
1	–2,138911	– 33,161702
2	1,613553	1,926317
3	0,007510	– 0,002188
4	0,005980	– 0,001379
5	0,000934	– 0,000854

Как видно из табл. 2.2, 2.3, сходимость по рекуррентному выражению (2.2.45) обеспечивается лучше, чем по выражению (2.2.44). Это объясняется тем, что лучшая сходимость связана с использованием **Z**-матрицы. Отметим, что использование **Z**-матрицы улучшает также сходимость **Y**-подуровня системы (2.1.28).

Другим важным моментом является вопрос изменения численных значений элементов Якоби рекуррентных выражений (2.2.44) и (2.2.45).

Таким же образом, если в рекуррентном выражении (2.2.45) численные значения элементов как исходной, так и обращенной матриц Якоби, начиная со второй итерации, остаются неизменными, то это нельзя сказать относительно элементов матриц Якоби для рекуррентного выражения (2.2.44). Это обстоятельство позволяет в рекуррентном выражении (2.2.45) обращенную матрицу Якоби, начиная со второй итерации, считать неизменной, что приводит к уменьшению объема вычислительных работ.

После проведения четырех итераций по рекуррентному выражению (2.2.44) для системы уравнений типа (2.1.30) обеспечиваются точность в среднем  $\Delta P_m / \Delta Q_m = 0,0022 / 0,0024$  МВт/МВар, а по рекуррентному выражению (2.2.45) для системы уравнений типа (2.1.31)  $\Delta P_k / \Delta Q_k = 0,0009 / 0,0008$  МВт/МВар.

Аналогичное явление имеет место для электрических систем более сложной структуры со многими узловыми точками. Численные значения режимных параметров получаются такими, как в табл. 1.3.

### **2.3. Решение (**Y** – **Z**)-формы уравнений для стационарных узлов типа **P** – **U****

В предыдущем разделе рассматривалось решение (**Y** – **Z**)-формы уравнений установившегося режима электрической системы для случая, когда стационарные узлы являются узлами типа **P** – **Q**, т. е. когда для стационарных узлов заданы активные и реактивные мощности и необходимо определить модуль и аргумент узловых напряжений.

При этом из системы уравнений (2.1.30) можно исключить уравнения реактивных мощностей, а система уравнений (2.1.31) остается без изменений. Для этого необходимо пользоваться соотношением

$$U_m^2 = (U'_m)^2 + (U''_m)^2, \quad (2.3.1)$$

составленным для стационарных узлов.

Таким образом, система уравнений, позволяющая решить поставленную задачу, имеет вид:

$$\Phi_{pm} = P_m - [P_{Бм} + \varphi_{pm}(U'_n, U''_n)], \quad (2.3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{pk} &= P_k - [P_{Бк} + \varphi_{pk}(I'_l, I''_l)], \\ \Phi_{qk} &= Q_k - [Q_{Бк} + \varphi_{qk}(I'_l, I''_l)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.3)$$

разумеется, с учетом (2.3.1).

Рекуррентное выражение (2.2.10) для этого случая упрощается и принимает следующий вид:

$$[U'_m]^{и+1} = [U'_m]^{и} - \left[ \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_n} \right]^{-1} \cdot [\Phi_{pm}]. \quad (2.3.4)$$

При этом необходимо воспользоваться выражением (2.3.1)

Более подробно рекуррентное выражение (2.3.4) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ \vdots \\ U'_r \end{bmatrix}^{и+1} = \begin{bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ \vdots \\ U'_r \end{bmatrix}^{и} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U'_1} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U'_2} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U'_r} \\ \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U'_1} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U'_2} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U'_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{pr}}{\partial U'_1} & \frac{\partial \Phi_{pr}}{\partial U'_2} & \frac{\partial \Phi_{pr}}{\partial U'_r} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p1} \\ \Phi_{p2} \\ \vdots \\ \Phi_{pr} \end{bmatrix}. \quad (2.3.5)$$

Однако можно непосредственно рассмотреть совместное решение следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_{pm} &= P_m - [P_{Бк} + \varphi_{pm}(U'_n, U''_n)] = 0, \\ \Phi_{um} &= U_m^2 - (U'_m)^2 - (U''_m)^2 = 0, \\ \Phi_{pk} &= P_k - [P_{Бк} + \varphi_{pk}(I'_l, I''_l)], \\ \Phi_{qk} &= Q_k - [Q_{Бк} + \varphi_{qk}(I'_l, I''_l)]. \end{aligned} \right. \quad (2.3.6)$$

Рекуррентное выражение, вытекающее из метода Ньютона – Рафсона, относительно системы уравнений (2.3.6) принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} U'_m \\ U''_m \end{bmatrix}^{и+1} = \begin{bmatrix} U'_m \\ U''_m \end{bmatrix}^{и} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U'_n} & \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial U''_n} \\ \frac{\partial \Phi_{um}}{\partial U'_n} & \frac{\partial \Phi_{um}}{\partial U''_n} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{pm} \\ \Phi_{um} \end{bmatrix},$$

что в развернутой форме представлено в виде (2.3.7).



Частные производные  $\partial\Phi_{pm}/\partial U'_n, \partial\Phi_{pm}/\partial U''_n$  определяются теми же выражениями (2.2.11) для одинаковых индексов (т. е. когда  $n = m$ ) и (2.2.14) для различных индексов (т. е. когда  $n \neq m$ ).

Частные производные  $\partial\Phi_{um}/\partial U'_n, \partial\Phi_{um}/\partial U''_n$  определяются непосредственно из второго уравнения системы (2.3.6):

$$\begin{bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ \dots \\ U'_\Gamma \\ U''_1 \\ U''_2 \\ \dots \\ U''_\Gamma \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ \dots \\ U'_\Gamma \\ U''_1 \\ U''_2 \\ \dots \\ U''_\Gamma \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial U'_1} & \frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial U'_\Gamma} & \frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial U''_1} & \frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial U''_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{p1}}{\partial U''_\Gamma} \\ \frac{\partial\Phi_{p2}}{\partial U'_1} & \frac{\partial\Phi_{p2}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{p2}}{\partial U'_\Gamma} & \frac{\partial\Phi_{p2}}{\partial U''_1} & \frac{\partial\Phi_{p2}}{\partial U''_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{p2}}{\partial U''_\Gamma} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_{p\Gamma}}{\partial U'_1} & \frac{\partial\Phi_{p\Gamma}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{p\Gamma}}{\partial U'_\Gamma} & \frac{\partial\Phi_{p\Gamma}}{\partial U''_1} & \frac{\partial\Phi_{p\Gamma}}{\partial U''_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{p\Gamma}}{\partial U''_\Gamma} \\ \frac{\partial\Phi_{u1}}{\partial U'_1} & \frac{\partial\Phi_{u1}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{u1}}{\partial U'_\Gamma} & \frac{\partial\Phi_{u1}}{\partial U''_1} & \frac{\partial\Phi_{u1}}{\partial U''_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{u1}}{\partial U''_\Gamma} \\ \frac{\partial\Phi_{u2}}{\partial U'_1} & \frac{\partial\Phi_{u2}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{u2}}{\partial U'_\Gamma} & \frac{\partial\Phi_{u2}}{\partial U''_1} & \frac{\partial\Phi_{u2}}{\partial U''_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{u2}}{\partial U''_\Gamma} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_{u\Gamma}}{\partial U'_1} & \frac{\partial\Phi_{u\Gamma}}{\partial U'_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{u\Gamma}}{\partial U'_\Gamma} & \frac{\partial\Phi_{u\Gamma}}{\partial U''_1} & \frac{\partial\Phi_{u\Gamma}}{\partial U''_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_{u\Gamma}}{\partial U''_\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p1} \\ \Phi_{p2} \\ \dots \\ \Phi_{p\Gamma} \\ \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \\ \dots \\ \Phi_{u\Gamma} \end{bmatrix}. \quad (2.3.7)$$

$$\frac{\partial\Phi_{um}}{\partial U'_m} = -2U'_m,$$

$$\frac{\partial\Phi_{um}}{\partial U''_m} = -2U''_m,$$

$$\frac{\partial\Phi_{um}}{\partial U'_n} = 0, \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial\Phi_{um}}{\partial U''_n} = 0.$$

Рекуррентное выражение относительно системы уравнений (2.3.3) представляется полученным выше выражением (2.2.10).

Разумеется, частные производные, входящие в матрицу Якоби (2.2.10), определяются теми же выражениями, которые приведены в виде (2.2.24) и (2.2.27).

Имея аналитические выражения частных производных, входящих в состав (2.3.7) и (2.2.10), можно перейти к организации итерационного процесса решения соответствующих систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима электрической системы.

Принимая узловые комплексные напряжения равными напряжению базисного узла ( $U_B = U_0$ ), с помощью следующих выражений можно определить для узлов типа **P – Q** численные значения соответствующих токов  $I'_{k(l)}$ ,  $I''_{k(l)}$ :

$$I'_{k(l)} = \frac{P_{k(l)}}{U_0},$$

$$I''_{k(l)} = \frac{Q_{k(l)}}{U_0}.$$

Имея численные значения соответствующих токов, на основе вышеприведенных выражений (2.2.13) устанавливаются численные значения величин  $I'_{Bk}$  и  $I''_{Bk}$ , входящих в выражения искомым частных производных (2.2.11). Затем устанавливаются численные значения частных производных (2.2.14), (2.3.8). В результате устанавливаются значения всех частных производных, входящих в матрицу Якоби рекуррентного выражения (2.3.7).

Выполняя одну итерацию, можно определить численные значения узловых комплексных напряжений  $U'_{m(n)}$  и  $U''_{m(n)}$  стационарных узлов типа **P – Q**. Используя численные значения соответствующих напряжений, из первой итерации рекуррентного выражения (2.3.7) с помощью выражения (2.2.26) можно установить численные значения  $U'_{Bk}$  и  $U''_{Bk}$ , входящих в выражения искомым частных производных (2.2.24). Устанавливая численные значения частных производных (2.2.24) и (2.2.27), входящих в матрицу Якоби рекуррентного выражения (2.2.23), можно произвести итерацию и определить новые значения соответствующих комплексных напряжений  $I'_{k(l)}$ ,  $I''_{k(l)}$  для узлов типа **P – Q**.

Таким образом, организовывается полный цикл первой итерации и устанавливаются численные значения составляющих комплексных напряжений для узлов типа **P – U** и численные значения составляющих комплексных токов для узлов типа **P – Q**.

Аналогичным образом организуются последующие итерации, которые считаются завершенными, если обеспечиваются условиями:

$$\begin{cases} \Phi_{pm} = P_m - [P_{Bm} + \varphi_{pm}(U'_n, U''_n)] \leq \Delta P_m, \\ \Phi_{um} = U_m^2 - [\varphi_{um}(U'_n, U''_n)] \leq \Delta U_m, \end{cases} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{cases} \Phi_{pk} = P_k - [P_{\text{БК}} + \varphi_{pk}(I'_e, I''_e)] \leq \Delta P_k, \\ \Phi_{qk} = Q_k - [Q_{\text{БК}} + \varphi_{qk}(I'_e, I''_e)] \leq \Delta Q_k, \end{cases} \quad (2.3.10)$$

где  $\Delta P_m, \Delta U_m, \Delta P_k, \Delta Q_k$  – заданные положительные величины, характеризующие требуемую точность расчетов.

Для иллюстрации данного метода рассмотрим электрическую систему, приведенную на следующем рисунке.

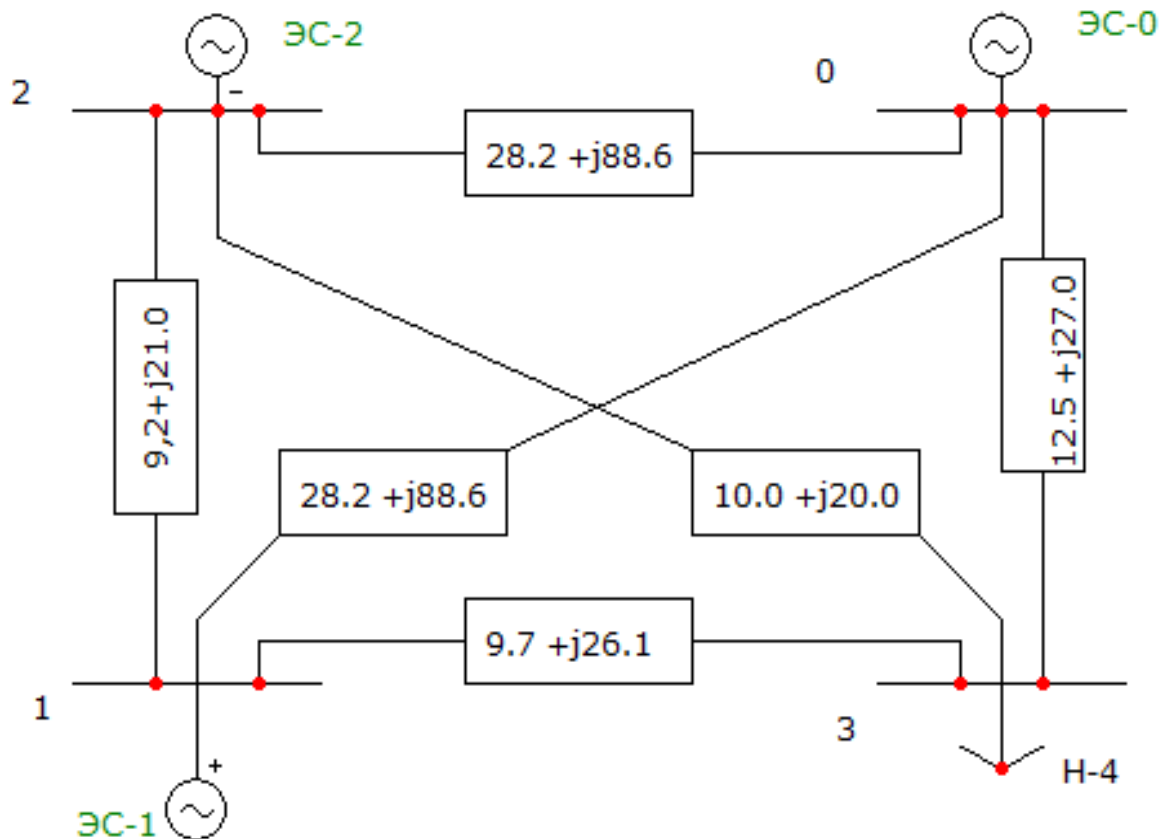


Схема замещения системы

Исследуемая электрическая система состоит из четырех узловых точек, из которых один стационарный узел с нулевым индексом выбран в качестве базисного (балансирующего). В результате система будет состоять из трех независимых узлов.

Рекуррентные выражения (2.3.7) и (2.2.45) применительно к решению систем нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима электрической системы, приведенной на рисунке, принимают вид:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_1'} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_1''} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_2'} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_2''} \\ \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_1'} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_1''} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2'} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2''} \\ \frac{\partial \Phi_{u1}}{\partial U_1'} & \frac{\partial \Phi_{u1}}{\partial U_1''} & \frac{\partial \Phi_{u1}}{\partial U_2'} & \frac{\partial \Phi_{u1}}{\partial U_2''} \\ \frac{\partial \Phi_{u2}}{\partial U_1'} & \frac{\partial \Phi_{u2}}{\partial U_1''} & \frac{\partial \Phi_{u2}}{\partial U_2'} & \frac{\partial \Phi_{u2}}{\partial U_2''} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p1} \\ \Phi_{p2} \\ \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{bmatrix}, \quad (2.3.11)$$

ИЛИ

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_1'} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_1''} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_2'} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial U_2''} \\ \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_1'} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_1''} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2'} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial U_2''} \\ -2U_1' - 2U_1'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2U_2' & -2U_2'' \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p1} \\ \Phi_{p2} \\ \Phi_{u1} \\ \Phi_{u2} \end{bmatrix} \quad (2.3.12)$$

И

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial I_3'} & \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial I_3''} \\ \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial I_3'} & \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial I_3''} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p3} \\ \Phi_{q3} \end{bmatrix}.$$

Имея формы рекуррентных выражений, можно перейти к организации итерационного процесса с целью численного решения поставленной задачи.

Однако перед началом итерационного процесса необходимо задать предварительные значения искомым переменных, которые постепенно уточняются с помощью рекуррентных выражений, с целью исследования вопроса влияния первоначальных значений искомым переменных на сходимость итерационного процесса.

В первом случае предполагаем, что действительные значения составляющих комплексных напряжений станционных узлов равны их заданным значениям модулей, а составляющие при мнимых частях – нулю, т. е.  $U_1' = 220,9$  кВ;  $U_2' = 221,4$  кВ;  $U_1'' = U_2'' = 0$ . Затем действительную составляющую комплексного напряжения нагрузочного узла принимаем равной напряжению базисного узла, т. е.  $U_3' = U_0$ , а составляющую при мнимой части – равной нулю, т. е.  $U_3'' = 0$ .

Имея первоначальные значения искомым режимных параметров, нетрудно с помощью вышеприведенных выражений (2.2.11), (2.2.14) и

(2.3.8) определить численные значения частных производных, входящих в матрицу Якоби рекуррентного выражения (2.3.7). Определяя также численные значения небалансов (2.3.6), получим:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220,9 \\ 0,0 \\ 222,4 \\ 0,0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -7,4410 & -16,0685 & 5,0728 & 11,6902 \\ 5,0842 & 11,7167 & -7,9524 & -16,1687 \\ -441,800 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -442,8000 & 0,0000 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 30,5520 \\ 23,3196 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}.$$

Обращая квадратную матрицу Якоби, получим:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220,9 \\ 0,0 \\ 221,4 \\ 0,0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & -0,0023 & 0,0000 \\ -0,1316 & -0,0952 & 0,0011 & 0,0002 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0023 \\ -0,954 & -0,1308 & 0,0000 & 0,0013 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 30,5520 \\ 23,3196 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}.$$

Так как вместо нулевых элементов получены весьма маленькие числа, то они тоже принимаются за нули.

После умножения квадратной матрицы на столбцевую получим

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 220,9 \\ 0,0 \\ 221,4 \\ 0,0 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 0,000000 \\ -6,240693 \\ 0,000000 \\ -5,964524 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 220,900000 \\ -6,240693 \\ 221,400000 \\ 5,964524 \end{bmatrix}^1.$$

Затем переходим к рекуррентному выражению (2.2.45). Вычисляя первоначальные значения составляющих токов нагрузочного узла, на основании формул (2.2.41) получим:

$$I_3' = -1,962182, \quad I_3'' = 0,981091.$$

Устанавливая численные значения частных производных, входящих в матрицу Якоби рекуррентного выражения (2.2.45), получим:

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -1,962182 \\ 0,981091 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -206,808220 & -11,325056 \\ 29,420319 & 205,166130 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -19,766990 \\ -33,793020 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -1,962182 \\ 0,981091 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -0,004873 & -0,000269 \\ 0,000698 & 0,004972 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -19,766990 \\ -33,793020 \end{bmatrix}.$$

В результате получим следующие численные значения:

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -1,962182 \\ 0,981091 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 0,1054130 \\ -0,179775 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,067595 \\ 1,160866 \end{bmatrix}.$$

После завершения полного цикла первой итерации полученные численные значения искомым режимных параметров используем в последующей второй итерации.

На второй итерации имеем

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 220,9000 \\ 6,2407 \\ 221,4000 \\ 5,9645 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} -7,1549 & -16,2575 & 4,7425 & 11,8336 \\ 4,6969 & 11,8537 & -7,6664 & 16,3418 \\ -441,8000 & -12,4814 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 442,8000 & -11,9291 \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} -6,4857 \\ -9,6871 \\ 0,0032 \\ 0,0036 \end{bmatrix}.$$

Обращая данную квадратную матрицу четвертого порядка, получим:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 220,9000 \\ 6,2407 \\ 221,400 \\ 5,9645 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} 0,0037 & 0,0027 & -0,0023 & 0,0000 \\ 0,1324 & -0,0961 & 0,0011 & 0,0003 \\ 0,0026 & 0,0036 & -0,0000 & -0,0023 \\ -0,0962 & -0,1318 & 0,0002 & 0,0013 \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} -6,4857 \\ -9,6871 \\ -0,0033 \\ -0,0035 \end{bmatrix}.$$

Откуда находим

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 200,9000 \\ 6,2407 \\ 221,400 \\ 5,9645 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} -0,050546 \\ 1,789361 \\ -0,051175 \\ 1,900189 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220,950546 \\ 4,451332 \\ 221,451175 \\ 4,064335 \end{bmatrix}.$$

Затем переходим к рекуррентному выражению (2.2.45)

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -2,067595 \\ 1,160866 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} -206,080550 & -11,306347 \\ 30,077626 & 202,321720 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1,414110 \\ 1,806020 \end{bmatrix}.$$

Обращая данную матрицу, получим:

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -2,067595 \\ 1,160866 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} -0,004899 & 0,0002734 \\ 0,000727 & 0,004988 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,414110 \\ 1,806020 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -2,067595 \\ 1,160866 \end{bmatrix}^1 - \begin{bmatrix} -0,007411 \\ 0,010027 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,060184 \\ 1,150839 \end{bmatrix}.$$

Завершая полный цикл второй итерации, перейдем к третьей итерации:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 220,950546 \\ 4,451332 \\ 221,451175 \\ 4,064335 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} -7,2552 & -16,1986 & 4,8383 & 11,7928 \\ 4,8703 & 11,8128 & -7,7602 & -16,2668 \\ -441,9011 & -8,9027 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -442,9023 & -8,1287 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,4363 \\ 0,6301 \\ -0,0004 \\ -0,0008 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 220,950546 \\ 4,451332 \\ 221,451175 \\ 4,064335 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 0,0027 & 0,0019 & -0,0023 & -0,0000 \\ -0,1325 & -0,0962 & 0,0011 & 0,0002 \\ 0,0018 & 0,0024 & -0,0000 & -0,0023 \\ -0,0962 & -0,1319 & 0,0002 & 0,0013 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0,4363 \\ 0,6301 \\ -0,0004 \\ -0,0008 \end{bmatrix}.$$

Затем

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 220,950546 \\ 4,451332 \\ 221,451175 \\ 4,064335 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 0,023850 \\ -0,118373 \\ 0,002297 \\ -0,125077 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220,948160 \\ 4,569705 \\ 221,448880 \\ 4,189412 \end{bmatrix}.$$

Перейдя к рекуррентному выражению (2.2.45), получим:

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -2,060184 \\ 1,150839 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} -206,13621 & -11,320698 \\ 29,872572 & 202,480780 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -0,094140 \\ 0,174960 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -2,060184 \\ 1,150839 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} -0,004891 & -0,0002734 \\ 0,000722 & 0,004979 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,094140 \\ 0,174960 \end{bmatrix}.$$

Затем

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} -2,060184 \\ 1,150839 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 0,000413 \\ 0,000803 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,060597 \\ 1,150036 \end{bmatrix}.$$

В результате завершаем полный цикл третьей итерации и переходим к четвертой. Устанавливая численные значения элементов матрицы Якоби рекуррентного выражения (2.3.12), получим:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 220,9482 \\ 4,5697 \\ 221,4489 \\ 4,1894 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -7,2487 & -16,2032 & 4,8320 & 11,7977 \\ 4,8636 & 11,8155 & -7,7539 & -16,2723 \\ -441,8963 & -9,1394 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -442,8978 & -8,3788 \end{bmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{bmatrix} -0,0334 \\ -0,0345 \\ -0,0002 \\ -0,0022 \end{bmatrix}.$$

и

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 220,9482 \\ 4,5697 \\ 221,4489 \\ 4,1894 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} 0,0027 & 0,0020 & -0,0023 & 0,0000 \\ -0,1325 & -0,0962 & 0,0011 & 0,0002 \\ 0,0018 & 0,0025 & 0,0000 & 0,0029 \\ 0,0962 & -0,1319 & 0,0001 & 0,0013 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,0334 \\ -0,0345 \\ -0,0002 \\ -0,0022 \end{bmatrix}.$$

Затем устанавливаем окончательные значения составляющих комплексных узловых напряжений:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_1'' \\ U_2' \\ U_2'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 220,9482 \\ 4,5697 \\ 221,4489 \\ 4,1894 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -0,000159 \\ 0,007741 \\ -0,000140 \\ 0,007761 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220,948310 \\ 4,561964 \\ 221,449020 \\ 4,181651 \end{bmatrix}.$$

Переходим к осуществлению четвертой итерации рекуррентного выражения (2.2.45):

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} -2,060597 \\ 1,150036 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -206,133360 & -11,309477 \\ 1,15036 & 202,409650 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,006510 \\ -0,107850 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} -2,060597 \\ 1,150036 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} -0,004890 & -0,0002733 \\ 0,0007221 & 0,004980 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,006510 \\ -0,107850 \end{bmatrix}.$$

Окончательные значения составляющих комплексных токов имеют

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} -2,060597 \\ 1,150036 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,000002 \\ -0,000532 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,060594 \\ 1,150568 \end{bmatrix}.$$



Полученные результаты после проведения четырех итераций приводятся в табл. 2.4.

Таблица 2.4

*Результат расчета*

Узел	$\dot{U} = U' + jU''$	$\dot{I} = I' + jI''$
ЭС-1	220,9483 + 4,5619	–
ЭС-2	221,4490 + 4,1816	–
ЭН-3	–	– 2,060594 + 1,150568

Для того чтобы уточнить точность расчета, необходимо определить численные значения небалансов  $\Phi_{p1}$ ,  $\Phi_{p2}$ ,  $\Phi_{u1}$ ,  $\Phi_{u2}$ , а также  $\Phi_{p3}$  и  $\Phi_{q3}$  при режимных параметрах, полученных на последней четвертой итерации.

Для большей ясности в табл. 2.5 приводятся небалансы активных мощностей и модулей напряжений станционных узлов, а в табл. 2.6 – небалансы активной и реактивной мощностей нагрузочного узла.

Таблица 2.5

*Процесс уменьшения небалансов режимных параметров исследуемой электрической системы*

Номер итерации	Для рекуррентного выражения (2.3.12)			
	$\Phi_{p1}$	$\Phi_{p2}$	$\Phi_{u1}$	$\Phi_{u2}$
1	30,552	23,3196	0,0000	0,0000
2	– 6,4857	– 9,6871	– 0,0033	– 0,0036
3	0,4363	0,6301	– 0,0004	– 0,0008
4	– 0,0033	– 0,0345	– 0,0002	– 0,0002
5	– 0,0008	– 0,0095	– 0,0001	– 0,0001

Таблица 2.6

*Процесс уменьшения небалансов режимных параметров исследуемой электрической системы*

Номер итерации	Для рекуррентного выражения (2.2.45)	
	$\Phi_{p3}$	$\Phi_{q3}$
1	-19,7669	- 33,7930
2	1,4141	1,8060
3	- 0,0941	0,1750
4	0,0065	- 0,1078
5	0,0013	- 0,0101

Анализируя полученные численные значения небалансов узловых активных мощностей и модулей напряжений стационарных узлов (см. табл. 2.5), можно заметить, что средняя точность решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений составляет  $\Delta P/\Delta U = 0,0051/0,0001$  МВт/кВ.

Как видно из табл. 2.6, средняя точность решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений составляет  $\Delta P/\Delta Q = 0,001/0,01$  МВт/МВар.

Если использовать данные из табл. 2.4 и перейти к режимным параметрам решения соответствующей системы, т. е. активным реактивным мощностям, модулям и аргументам комплексного напряжения, то получим значения, приведенные в табл. 1.3.

При организации итерационного процесса первоначально действительные составляющие узловых комплексных напряжений были приняты равными заданным модулям напряжений соответствующих узлов, а составляющие при мнимых частях – равными нулям. Однако первоначальные значения действительных составляющих узловых комплексных напряжений можно принять равными напряжению базисного (балансирующего) узла  $U'_1 = U'_2 = U'_3 = U_0 = 220$  кВ, а значения составляющих при мнимых частях  $U''_1 = U''_2 = U''_3 = 0$ .

Не останавливаясь подробно на этом случае, отметим, что при проведении четырех итераций в предыдущем случае точность решения соответствующих нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима электрической системы изменилась незначительно.

## 2.4. Решение (Y – Z)-формы уравнений при разных формах представлений комплексных переменных

В этом пункте, как и в предыдущем, рассматривается решение задачи расчета установившегося режима, когда в электрической системе имеются стационарные узлы типа **P – U** и **P – Q**.

Стационарные узлы типа **P – Q** вводим в состав нагрузочных узлов, которые всегда являются узлами **P – Q**. Фактически электрическая система состоит из стационарных узлов типа **P – U** и **P – Q** (в состав которых входят как стационарные узлы, так и нагрузочные).

Для узлов с индексами  $m(n)$ , которые приняты стационарными узлами типа **P – U**, выражения узловых комплексных мощностей получены в виде (2.1.13), а для узлов типа  $k(l)$ , в состав которых входят как стационарные узлы, так и нагрузочные и которые приняты узлами типа **P – Q**, выражения комплексных узловых мощностей получены в виде (2.1.14).

Поскольку для узлов типа **P – U** заданы активная мощность и модуль напряжения, необходимо определить реактивную мощность и аргумент комплексного напряжения, удобнее при переходе от комплексных переменных к действительным пользоваться показательными формами комплексных переменных напряжений. В данном случае принимаем

$$\begin{aligned}\hat{U}_m &= U_m \exp(-\Psi_{um}), \\ \hat{U}_n &= U_n \exp(\Psi_{un}),\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

где  $U_m, U_n$  – модули соответствующих комплексных напряжений, а  $\Psi_{um}$  и  $\Psi_{un}$  – их соответствующие аргументы.

На основе (2.4.1) в системе уравнений (2.1.13) можно установить следующие выражения для активных и реактивных мощностей узлов с индексом  $m(n)$ :

$$P_m = P_{Bm} + \sum_{n=1}^{\Gamma} U_m [g_{mn} \cos(\Psi_{um} - \Psi_{un}) + b_{mn} \sin(\Psi_{um} - \Psi_{un})] U_n, \tag{2.4.2}$$

$$Q_m = Q_{Bm} + \sum_{n=1}^{\Gamma} U_m [g_{mn} \sin(\Psi_{um} - \Psi_{un}) - b_{mn} \cos(\Psi_{um} - \Psi_{un})] U_n, \tag{2.4.3}$$

Активные и реактивные мощности для узлов с индексом  $K(l)$  определяются теми же выражениями (2.1.17) и (2.1.18).

Величины  $P_{Bm}, Q_{Bm}$ , входящие в выражения (2.4.2) и (2.4.3), соответственно определяются в виде

$$P_{Бm} = p_{Бm} + \sum_{l=\Gamma+1}^M (H_{ml} \cos \Psi_{um} + K_{ml} \sin \Psi_{um}) U_m,$$

$$Q_{Бm} = q_{Бm} + \sum_{l=\Gamma+1}^M (H_{ml} \sin \Psi_{um} - K_{ml} \cos \Psi_{um}) U_m, \quad (2.4.4)$$

где

$$p_{Бm} = - \sum_{n=1}^{\Gamma} (g_{mn} \cos \Psi_{um} + b_{mn} \sin \Psi_{um}) U_0 U_m,$$

$$q_{Бm} = - \sum_{n=1}^{\Gamma} (g_{mn} \sin \Psi_{um} - b_{mn} \cos \Psi_{um}) U_0 U_m. \quad (2.4.5)$$

Величины  $H_{ml}$  и  $K_{ml}$ , входящие в выражение (2.4.4), определяются в виде

$$H_{ml} = a'_{ml} I'_l - a''_{ml} I''_l,$$

$$K_{ml} = a'_{ml} I''_l + a''_{ml} I'_l. \quad (2.4.6)$$

Величины  $P_{Бк}$  и  $Q_{Бк}$ , входящие в состав (2.1.17) и (2.1.18), определяются в виде

$$P_{Бк} = p_{Бк} + \sum_{n=1}^{\Gamma} (N_{kn} \cos \Psi_{un} + L_{kn} \sin \Psi_{un}) U_n,$$

$$Q_{Бк} = q_{Бк} + \sum_{n=1}^{\Gamma} (N_{kn} \sin \Psi_{un} - L_{kn} \cos \Psi_{un}) U_n. \quad (2.4.7)$$

Величины  $p_{Бк}$  и  $q_{Бк}$ , входящие в выражения (2.4.7), определяются соответственно с помощью (2.1.23).

С другой стороны,  $N_{kn}$  и  $L_{kn}$ , входящие в (2.4.7), определяются в виде

$$N_{kn} = C'_{kn} I'_k + C''_{kn} I''_k,$$

$$L_{kn} = C'_{kn} I''_k - C''_{kn} I'_k. \quad (2.4.8)$$

Из систем уравнений (2.4.2), (2.4.3) можно заметить, что если они выражены через  $U_{m(n)}$  и  $\Psi_{um(n)}$ , то системы уравнений (2.1.17) и (2.1.18) выражены через  $I'_{k(l)}$  и  $I''_{k(l)}$ .

Перепишем системы уравнений (2.4.2) и (2.4.3) в следующем виде:

$$P_m = p_{Бm} + \varphi_{pm}(U_n, \Psi_{un}), \quad (2.4.9)$$

$$Q_m = q_{Бm} + \varphi_{qm}(U_n, \Psi_{un}), \quad (2.4.10)$$

в системе уравнений (2.1.17) , (2.1.18) в виде

$$P_k = P_{Bk} + \varphi_{pk}(I'_l, I''_l), \quad (2.4.11)$$

$$Q_k = Q_{Bk} + \varphi_{qk}(I'_l, I''_l), \quad (2.4.12)$$

где  $\varphi_{pm}$ ,  $\varphi_{qm}$  и  $\varphi_{pk}$ ,  $\varphi_{qk}$  определяются в виде

$$\begin{cases} \varphi_{pm} = \sum_{n=1}^{\Gamma} U_m [g_{mn} \cos(\Psi_{um} - \Psi_{un}) + b_{mn} \sin(\Psi_{um} - \Psi_{un})] U_n, \\ \varphi_{qm} = \sum_{n=1}^{\Gamma} U_m [g_{mn} \sin(\Psi_{um} - \Psi_{un}) - b_{mn} \cos(\Psi_{um} - \Psi_{un})] U_n, \end{cases} \quad (2.4.13)$$

$$\begin{cases} \varphi_{pk} = \sum_{l=\Gamma+1}^M [R_{k,l}(I'_k, I'_l + I''_k I''_l) + X_{k,l}(I''_k I'_l - I'_k I''_l)], \\ \varphi_{qk} = \sum_{l=\Gamma+1}^M [R_{k,l}(I''_k, I'_l - I'_k I''_l) - X_{k,l}(I'_k I'_l + I''_k I''_l)], \end{cases} \quad (2.4.14)$$

Системы уравнений (2.4.9), (2.4.10) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \Phi_{pm} = P_m - [P_{Bm} + \varphi_{pm}(U_n, \Psi_{un})] = 0, \\ \Phi_{qm} = Q_m - [Q_{Bm} + \varphi_{qm}(U_n, \Psi_{un})] = 0, \end{cases} \quad (2.4.15)$$

а (2.4.11) и (2.4.12) – в виде

$$\begin{cases} \Phi_{pk} = P_k - [P_{Bk} + \varphi_{pk}(I'_l, I''_l)] = 0, \\ \Phi_{qk} = Q_k - [Q_{Bk} + \varphi_{qk}(I'_l, I''_l)] = 0. \end{cases} \quad (2.4.16)$$

Следует отметить, что в структурном отношении системы уравнений (2.4.16) не полностью идентичны системе уравнений (2.1.29), хотя в них фигурируют одинаковые аргументы типов переменных  $I'_l, I''_l$ .

Системы уравнений (2.4.15) и (2.4.16) связаны между собой с помощью следующих величин:  $P_{Bm}$ ;  $Q_{Bm}$ ;  $P_{Bk}$ ;  $Q_{Bk}$ .

Как уже было сказано, для стационарных узлов типа **P – U** требуется определить реактивную мощность и аргумент комплексного напряжения. При определении численных значений аргументов комплексных напряжений устанавливаются численные значения реактивных мощностей этих же стационарных узлов.

Однако для определения численных значений аргументов комплексных напряжений стационарных узлов достаточно воспользоваться уравнением (2.4.15) для активных мощностей.

Рекуррентное выражение относительно указанной системы уравнений можно представить в следующем виде:

$$[\Psi_m]^{k+1} = [\Psi_m]^k - \left[ \frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial \Psi_n} \right]^{-1} \cdot [\Phi_{pm}]. \quad (2.4.17)$$

Данное рекуррентное выражение можно представить в раскрытом виде

$$\begin{bmatrix} \Psi_{u1} \\ \Psi_{u2} \\ \vdots \\ \Psi_{u\Gamma} \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \Psi_{u1} \\ \Psi_{u2} \\ \vdots \\ \Psi_{u\Gamma} \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u2}} & \dots & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u\Gamma}} \\ \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u2}} & \dots & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u\Gamma}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{p\Gamma}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{p\Gamma}}{\partial \Psi_{u2}} & \dots & \frac{\partial \Phi_{p\Gamma}}{\partial \Psi_{u\Gamma}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p1} \\ \Phi_{p2} \\ \vdots \\ \Phi_{p\Gamma} \end{bmatrix}. \quad (2.4.18)$$

Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (2.4.16) воспользуемся рекуррентным выражением

$$\begin{bmatrix} I'_k \\ I''_k \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} I'_k \\ I''_k \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_1} & \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_1} \\ \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_1} & \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{pk} \\ \Phi_{qk} \end{bmatrix}.$$

Частные производные, входящие в матрицу Якоби рекуррентного выражения (2.4.17), определяются с помощью нижеприведенных выражений:

– при одинаковых индексах, когда  $n = m$ :

$$\frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial \Psi_{um}} = - \left\{ P_{Bm(k)} - U_m \sum_{n=1}^{\Gamma} [g_{mn} \sin(\Psi_{um} - \Psi_{un}) - b_{mn} \cos(\Psi_{um} - \Psi_{un})] U_n \right\}; \quad (2.4.19)$$

– при разных индексах, когда  $n \neq m$ :

$$\frac{\partial \Phi_{pm}}{\partial \Psi_{un}} = - \{ U_m [g_{mn} \sin(\Psi_{um} - \Psi_{un}) - b_{mn} \cos(\Psi_{um} - \Psi_{un})] U_0 \}. \quad (2.4.20)$$

С другой стороны,

$$P_{Bm(k)} = P'_{Bm(k)} + P''_{Bm(k)}, \quad (2.4.21)$$

$$P'_{Bm(k)} = \sum_{n=1}^{\Gamma} (g_{mn} \sin \Psi_{um} - b_{mn} \cos \Psi_{um}) U_0 U_m, \quad (2.4.22)$$

$$P''_{Bm(k)} = - \sum_{n=1}^{\Gamma} (H_{ml} \sin \Psi_{um} - K_{ml} \cos \Psi_{um}) U_m. \quad (2.4.23)$$

Из выражений (2.4.19) и (2.4.20) можно заметить, что для матрицы Якоби рекуррентного выражения (2.4.17) или (2.4.18) требуется определить лишь два типа частных производных, что связано с затруднениями.

Частные производные, входящие в матрицу Якоби рекуррентного выражения (2.2.45), определяются с помощью следующих величин.

При одинаковых индексах, т. е. когда  $l = k$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_k} &= - \left[ U'_{Bk} + \sum_{l=r+1}^M D_{kl} + (R_{kk}I'_k + X_{kk}I''_k) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_k} &= - \left[ U''_{Bk} + \sum_{l=r+1}^M N_{kl} + (R_{kk}I''_k - X_{kk}I'_k) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_k} &= - \left[ U''_{Bk} + \sum_{l=r+1}^M N_{kl} - (R_{kk}I''_k - X_{kk}I'_k) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_k} &= - \left[ -U'_{Bk} - \sum_{l=r+1}^{r+M} D_{kl} + (R_{kk}I'_k + X_{kk}I''_k) \right],
 \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{kl} &= R_{kl}I'_l - X_{kl}l, \\
 N_{kl} &= R_{kl}I''_l - X_{kl}I'_l.
 \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

С другой стороны,

$$U'_{Bk} = (1 - \sum_{n=1}^r C'_{kn})U_0 + \sum_{n=1}^r (C'_{kn} \cos \Psi_{un} - C''_{kn} \sin \Psi_{un}), \tag{2.4.26}$$

$$U''_{Bk} = -\sum_{n=1}^r C''_{n1}U_0 + \sum_{n=1}^r (C'_{kn} \sin \Psi_{un} - C''_{kn} \cos \Psi_{un}). \tag{2.4.27}$$

При разных индексах, т. е. когда  $k \neq l$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_i} &= -(R_{kl}I'_k + X_{kl}I''_k), \\
 \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_i} &= -(R_{kl}I''_k - X_{kl}I'_k), \\
 \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_i} &= -(R_{kl}I''_k + X_{kl}I'_k), \\
 \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_i} &= -(R_{kl}I'_k + X_{kl}I''_k).
 \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

После установления аналитических выражений частных производных, входящих в матрицу Якоби рекуррентных выражений (2.4.17) или (2.4.18) и (2.2.45), можно перейти к организации итерационных процессов.

Перед началом итерационного процесса принимаем аргументы комплексных напряжений стационарных узлов типа **P** – **U** равными нулю, т. е.  $\Psi_{u1} = \Psi_{u2} = \dots = \Psi_{ur}$ , а комплексные напряжения всех независимых узлов типа **P** – **Q** – равными заданному напряжению базисного узла  $U_0 = U$ . Это означает, что  $U'_{r+1} = \Gamma = \dots = U'_m = U_0$ ;  $U''_{r+1} = U''_{r+2} = \dots = U''_m = 0$ .

Используя численные значения мощностей узлов типа **P – Q**, определяем составляющие узловых комплексных токов:

$$I'_{k(l)} = \frac{P_{k(l)}}{U_0}, \quad (2.4.29)$$

$$I''_{k(l)} = \frac{Q_{k(l)}}{U_0}.$$

На основании численных значений аргументов комплексных напряжений узлов типа **P – U**, составляющих комплексных токов узлов типа **P – Q** и численных значений элементов (**Y – Z**) расчетной матрицы можно определить численные значения частных производных (2.4.19) и (2.4.20), входящих в матрицу Якоби рекуррентного выражения (2.4.17) или (2.4.18).

Обращая матрицу Якоби и произведя одну итерацию по рекуррентному выражению (2.4.17) или (2.4.18), можно определить новые значения аргументов комплексных напряжений стационарных узлов  $\Psi_{u1}, \Psi_{u2}, \dots, \Psi_{un}$ . Используя численные значения вновь полученных аргументов  $\Psi_{u1}, \Psi_{u2}, \dots, \Psi_{un}$  стационарных узлов типа **P – U**, по выражениям (2.4.26) и (2.4.27) можно определить численные значения величин  $U'_{BK}$  и  $U''_{BK}$ . Имея численные значения соответствующих комплексных токов узлов типа **P – Q**, согласно (2.2.45) и (2.4.28) определяем численные значения  $D_{kl}$  и  $N_{kl}$ . Затем с помощью формул (2.4.24) и (2.4.28) переходим к определению численных значений элементов матрицы Якоби рекуррентного выражения (2.2.45). Обращая матрицу Якоби, входящую в (2.2.45), устанавливаем новые значения составляющих комплексных напряжений  $I'_{k(l)}$  и  $I''_{k(l)}$  узлов типа **P – Q** как результат осуществления первой итерации.

Произведя первые итерации по рекуррентным выражениям (2.4.17) или (2.4.18) и (2.2.45), осуществляем полный цикл первой итерации для исследуемой электрической системы в целом. Затем переходим к организации второй итерации, используя численные значения вновь полученных составляющих комплексных токов для узлов типа **P – Q** и численные значения аргументов комплексных напряжений для узлов типа **P – U**. Устанавливая численные значения элементов матрицы Якоби рекуррентного выражения (2.4.17) или (2.4.18) и обращая её, осуществляем вторую итерацию по определению аргументов комплексных напряжений узлов типа **P – U** и переходим к осуществлению второй итерации относительно рекуррентного выражения (2.2.45) и т. д.



Итерационный процесс считается завершенным, если для рекуррентного выражения (2.4.17) или (2.4.18) обеспечиваются условия

$$\Phi_{pm} = P_m - [P_{6m} + \varphi_{pm}(U_n, \Psi_{un})] \leq \Delta P_m, \quad (2.4.30)$$

$$\begin{cases} \Phi_{pk} = P_k - [P_{6k} + \varphi_{pk}(I'_e, I''_t)] \leq \Delta P_k, \\ \Phi_{qk} = Q_k - [Q_{6k} + \varphi_{qk}(I'_e, I''_t)] \leq \Delta Q_k \end{cases} \quad (2.4.31)$$

для рекуррентного выражения (2.2.45).

В (2.4.30) и (2.4.31) заданные положительные величины  $\Delta P_m$ ,  $\Delta P_k$ ,  $\Delta Q_k$  характеризуют требуемую точность решения соответствующих систем нелинейных алгебраических уравнений.

Для иллюстрации численного решения задачи рассмотрим схему, приведенную на рис 1.2, исходная информация относительно узлов которой приведена в табл. 2.4. Численные значения элементов расчетной матрицы ( $\mathbf{Y} - \mathbf{Z}$ ) также приведены выше.

Для этой схемы соответствующие рекуррентные выражения имеют вид

$$\begin{bmatrix} \Psi_{u1} \\ \Psi_{u2} \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} \Psi_{u1} \\ \Psi_{u2} \end{bmatrix}^И - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u2}} \\ \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u1}} & \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u2}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p1} \\ \Phi_{p2} \end{bmatrix}, \quad (2.4.32)$$

$$\begin{bmatrix} I'_3 \\ I''_3 \end{bmatrix}^{И+1} = \begin{bmatrix} I'_3 \\ I''_3 \end{bmatrix}^И - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial I'_3} & \frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial I''_3} \\ \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial I'_3} & \frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial I''_3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{p3} \\ \Phi_{q3} \end{bmatrix}. \quad (2.4.33)$$

$$\Phi_{p1} = (P_1 - \{P_{Б1} + U_1[g_{11} \cos(\Psi_{u1} - \Psi_{u2}) + b_{11} \sin(\Psi_{u1} - \Psi_{u2})]U_1 + U_1[g_{12} \cos(\Psi_{u1} - \Psi_{u2}) + b_{12} \sin(\Psi_{u1} - \Psi_{u2})]U_2\}).$$

$$\Phi_{p2} = (P_2 - \{P_{Б2} + U_2[g_{21} \cos(\Psi_{u2} - \Psi_{u1}) + b_{21} \sin(\Psi_{u2} - \Psi_{u1})]U_1 + U_2[g_{22} \cos(\Psi_{u2} - \Psi_{u1}) + b_{22} \sin(\Psi_{u2} - \Psi_{u1})]U_2\}).$$

$$P_{Б1} = p_{Б1} + [(a'_{13}I'_3 - a''_{13}I''_3) \cos \Psi_{u1} + (a'_{13}I''_3 + a''_{13}I'_3) \sin \Psi_{u1}]U_1.$$

$$P_{Б2} = p_{Б2} + [(a'_{23}I'_3 - a''_{23}I''_3) \cos \Psi_{u2} + (a'_{23}I''_3 + a''_{23}I'_3) \sin \Psi_{u2}]U_2.$$

$$P_{Б1} = -[(g_{11} \cos(\Psi_{u1}) + b_{11} \sin(\Psi_{u1}))U_0U_1 + (g_{12} \cos(\Psi_{u1}) + b_{12} \sin(\Psi_{u1}))U_0U_1].$$

$$P_{Б2} = -[(g_{21} \cos(\Psi_{u2}) + b_{21} \sin(\Psi_{u2}))U_0U_2 + (g_{22} \cos(\Psi_{u2}) + b_{22} \sin(\Psi_{u2}))U_0U_2].$$

$$\Phi_{p1} = (161,29 - \{P_{Б1} + 220,9[0,031006 \cos(\Psi_{u1} - \Psi_{u2}) - 0,074285 \sin(\Psi_{u1} - \Psi_{u2})]220,9 + 220,9[-0,022964 \cos(\Psi_{u1} - \Psi_{u2}) + 0,052921 \sin(\Psi_{u1} - \Psi_{u2})]221,4\}).$$

$$\Phi_{p_2} = (202,46 - \{P_{B_2} + 221,4[-0,022964 \cos(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1}) + 0,052921 \sin(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1})]220,9 + 221,4[0,032264 \cos(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1}) - 0,074375 \sin(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1})]221,4\}).$$

$$P_{B_1} = p_{B_1} + [(-0,314020I'_3 - 0,020471I''_3) \cos \Psi_{u_1} + (-0,31402I''_3 + 0,020471I'_3) \sin \Psi_{u_1}]220,9.$$

$$P_{B_2} = p_{B_2} + [(-0,391505I'_3 - 0,016733I''_3) \cos \Psi_{u_2} + (-0,391505I''_3 + 0,016733I'_3) \sin \Psi_{u_2}]221,4.$$

$$p_{B_1} = -(0,031006 \cos \Psi_{u_1} - 0,074285 \sin \Psi_{u_1}) 220,0 \cdot 220,9 + (-0,022964 \cos \Psi_{u_1} + 0,052921 \sin \Psi_{u_1})220,0 \cdot 220,9.$$

$$p_{B_2} = -(-0,022964 \cos \Psi_{u_2} + 0,052921 \sin \Psi_{u_2})220,0 \cdot 221,4 + (0,032264 \cos \Psi_{u_2} - 0,074375 \sin \Psi_{u_2})220,0 \cdot 221,4.$$

$$\frac{\partial \Phi_{p_1}}{\partial \Psi_{u_1}} = -(p_{61(3)} - U_1\{[g_{11} \sin(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2}) + b_{11} \cos(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2})]U_2 + [g_{12} \sin(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2}) - b_{12} \cos(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2})]U_2\}).$$

$$\frac{\partial \Phi_{p_2}}{\partial \Psi_{u_2}} = -(p_{62(3)} - U_2\{[g_{21} \sin(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1}) - b_{21} \cos(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1})]U_1 + [g_{22} \sin(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1}) + b_{12} \cos(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1})]U_2\}).$$

$$p'_{B_1(3)} = [(g_{11} \sin \Psi_{u_1} - b_{11} \cos \Psi_{u_1}) + (g_{12} \sin \Psi_{u_1} - b_{12} \cos \Psi_{u_1})]U_1 U_0.$$

$$p''_{B_1(3)} = -[[(a'_{13}I'_3 - a''_{13}I''_3) \sin \Psi_{u_1} - (a'_{13}I''_3 + a''_{13}I'_3) \cos \Psi_{u_1}]U_1.$$

$$p'_{B_2(3)} = [(g_{21} \sin \Psi_{u_2} - b_{21} \cos \Psi_{u_2}) + (g_{22} \sin \Psi_{u_2} - b_{22} \cos \Psi_{u_2})]U_2 U_0.$$

$$p''_{B_2(3)} = -[[(a'_{23}I'_3 - a''_{23}I''_3) \sin \Psi_{u_2} - (a'_{23}I''_3 + a''_{23}I'_3) \cos \Psi_{u_2}]U_2.$$

$$\frac{\partial \Phi_{p_1}}{\partial \Psi_{u_2}} = -U_1[g_{12} \sin(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2}) - b_{12} \cos(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2})]U_2.$$

$$\frac{\partial \Phi_{p_2}}{\partial \Psi_{u_1}} = -U_2[g_{21} \sin(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1}) - b_{21} \cos(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1})]U_1.$$

$$\frac{\partial \Phi_{p_1}}{\partial \Psi_{u_1}} = (p_{B_1(3)} - 220,9\{[0,031006 \sin(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2}) + 0,074285 \cos(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2})]220,9 + [-0,022964 \sin(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2}) - 0,052921 \cos(\Psi_{u_1} - \Psi_{u_2})]221,4\}).$$

$$\frac{\partial \Phi_{p_2}}{\partial \Psi_{u_2}} = (p_{B_2(3)} - 221,4\{[-0,022964 \sin(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1}) - 0,052921 \cos(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1})]220,9 + [0,032264 \sin(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1}) + 0,074375 \cos(\Psi_{u_2} - \Psi_{u_1})]221,4\}).$$

$$p'_{B_1(3)} = [(0,031006 \sin \Psi_{u_1} + 0,074285 \cos \Psi_{u_1}) + (-0,022964 \sin \Psi_{u_1} - 0,052921 \sin \Psi_{u_1})]220,9 \cdot 220,0.$$

$$p''_{Б1(3)} = -[(-0,31402I'_3 - 0,020471I''_3) \sin \Psi_{u1} - 0,314020I''_3 + 0,020471I'_3] \cos \Psi_{u1} \cdot 220,9.$$

$$p'_{Б2(3)} = [(-0,022964 \sin \Psi_{u2} - 0,052921 \cos \Psi_{u2}) + (0,032264 \sin \Psi_{u2} + 0,074375 \cos \Psi_{u2})] 221,4 \cdot 220,0.$$

$$p''_{Б2(3)} = -[(-0,391505I'_3 + 0,016733I''_3) \sin \Psi_{u2} - (-0,391505I''_3 - 0,016733I'_3) \cos \Psi_{u2}] 221,4.$$

$$\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u2}} = -220,9[-0,022964 \sin(\Psi_{u1} - \Psi_{u2}) - 0,052921 \cos(\Psi_{u1} - \Psi_{u2})] 221,4.$$

$$\frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u1}} = -221,4[-0,022964 \sin(\Psi_{u2} - \Psi_{u1}) - 0,052921 \cos(\Psi_{u2} - \Psi_{u1})] 220,9.$$

Перед итерацией принимаем  $\psi_{u1} = \psi_{u2} = \psi_{u3} = 0$ ;  $U'_3 = 220,0$ ;  $U''_3 = 0$ . Имеем численные значения  $P_3 = -431,68$  и  $Q_3 = -215,84$ , с помощью формул (2.4.29) определяем численные значения  $I'_3$  и  $I''_3$ :

$$I'_3 = \frac{P_3}{U'_3} = \frac{-431,68}{220,0} = -1,962182,$$

$$I''_3 = \frac{Q_3}{U'_3} = \frac{-215,84}{220,0} = -0,981091.$$

На основе  $I'_3 = -1,962182$ ;  $I''_3 = -0,981091$ , имея заданные начальные значения других переменных, можно определить численные значения  $p''_{Б1(3)}$  и  $p''_{Б2(3)}$ . Определяя численные значения  $p'_{Б1(3)}$ ,  $p'_{Б2(3)}$ , можно определить численные значения  $p_{Б1(3)} = p'_{Б1(3)} + p''_{Б1(3)}$  и  $p_{Б2(3)} = p'_{Б2(3)} + p''_{Б2(3)}$ , а также частные производные

$$\frac{\partial \Phi_{p1}}{\partial \Psi_{u1}} \text{ и } \frac{\partial \Phi_{p2}}{\partial \Psi_{u2}}.$$

$$\frac{\partial \phi_{p1}}{\partial \psi_{u1}} = 76,615100,$$

$$\frac{\partial \phi_{p2}}{\partial \psi_{u2}} = 77,279180.$$

При этом нетрудно установить также численные значения частных производных  $\partial \Phi_{p1} / \partial \psi_{u2}$ ,  $\partial \Phi_{p2} / \partial \psi_{u1}$ .

$$\frac{\partial \phi_{p1}}{\partial \psi_{u2}} = (-220,9)(-0,052921)(221,4) = 2588,2211,$$

$$\frac{\partial \phi_{p2}}{\partial \psi_{u1}} = (-221,4)(-0,052921)(220,9) = 2588,2211.$$

Затем определяем численные значения небалансов

$$\phi_{p1} = 30,1421, \phi_{p2} = 29,8451.$$

В результате рекуррентное выражение (2.4.17) или (2.4.18) принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \psi_{u1} \\ \psi_{u2} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 76,6151 & 2588,2211 \\ 2588,2211 & 77,3792 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 30,1421 \\ 29,8451 \end{bmatrix}.$$

Обращая матрицу Якоби, получим:

$$\begin{bmatrix} \psi_{u1} \\ \psi_{u2} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,00001179 & 0,00039077 \\ 0,00039077 & -0,00001169 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30,1421 \\ 29,8451 \end{bmatrix}.$$

Откуда

$$\psi_{u1} = -0,01131100; \psi_{u2} = -0,01143030.$$

Фазовые сдвиги получены в радианах, и их необходимо перевести в градусы, в результате чего получим

$$\psi_{u1} = -0^{\circ}38'; \psi_{u2} = -0^{\circ}39'.$$

После проведения первой итерации по рекуррентному выражению (2.4.17) или (2.4.18) переходим к рекуррентному выражению (2.2.45). При этом используются также численные значения аргументов комплексных напряжений  $\psi_{u1}, \psi_{u2}$ , полученные из первой итерации рекуррентного выражения (2.4.17).

В рекуррентном выражении (2.4.33) имеем

$$\phi_{p3} = \{P_3 - [P_{B3} + R_{33}(I'_3 I'_3 + I''_3 I''_3) + X_{33}(I''_3 I'_3 - I'_3 I''_3)]\},$$

$$\phi_{q3} = \{Q_3 - [Q_{B3} - R_{33}(I''_3 I'_3 - I'_3 I''_3) + X_{33}(I'_3 I'_3 + I''_3 I''_3)]\},$$

$$\text{где } P_{B3} = p_{B3} + [(C'_{31} I'_3 + C''_{31} I''_3) \cos \psi_{u1} + (C'_{31} I''_3 - C''_{31} I'_3) \sin \psi_{u1}] U_1 + [(C'_{32} I'_3 + C''_{32} I''_3) \cos \psi_{u2} + (C'_{32} I''_3 - C''_{32} I'_3) \sin \psi_{u2}] U_2,$$

$$Q_{B3} = q_{B3} + [(C'_{31} I'_3 + C''_{31} I''_3) \sin \psi_{u1} - (C'_{31} I''_3 - C''_{31} I'_3) \cos \psi_{u1}] U_1 + [(C'_{32} I'_3 + C''_{32} I''_3) \sin \psi_{u2} - (C'_{32} I''_3 - C''_{32} I'_3) \cos \psi_{u2}] U_2.$$

С другой стороны,

$$p_{B3} = I'_3 U_0 - [(C'_{31} I'_3 + C''_{31} I''_3) U_0 + (C'_{32} I''_3 + C''_{32} I'_3) U_0],$$

$$q_{B3} = -I''_3 U_0 + [(C'_{31} I''_3 - C''_{31} I'_3) U_0 + (C'_{32} I''_3 - C''_{32} I'_3) U_0].$$

Если вышеприведенные выражения представим в численной форме, то получим:

$$\phi_{p3} = -431,68 - [P_{Б3} + 3,580302(I'_3 I'_3 + I''_3 I''_3) + 7,997482(I''_3 I'_3 - I'_3 I''_3)].$$

$$\phi_{q3} = -215,84 - [Q_{Б3} + 3,580302(I''_3 I'_3 - I'_3 I''_3) + 7,997482(I'_3 I'_3 + I''_3 I''_3)].$$

$$P_{Б3} = p_{Б3} + [(0,314020I'_3 - 0,020471I''_3)\cos 0^{\circ}38' - (0,314020I''_3 + 0,020471I'_3)\sin 0^{\circ}38']220,9 + [(0,391505I'_3 + 0,016733I''_3)\cos 0^{\circ}39' - (0,391505I''_3 - 0,016733I'_3)\sin 0^{\circ}39']221,4.$$

$$Q_{Б3} = q_{Б3} + [-(0,314020I'_3 - 0,020471I''_3)\cos 0^{\circ}38' - (0,314020I''_3 + 0,020471I'_3)\sin 0^{\circ}38']220,9 + [-(0,391505I'_3 + 0,016733I''_3)\cos 0^{\circ}39' - (0,391505I''_3 - 0,016733I'_3)\sin 0^{\circ}39']221,4.$$

Затем

$$p_{Б3} = 220,0I'_3 - [(0,314020I'_3 - 0,020471I''_3)220,0 + (0,391505I'_3 + 0,016733I''_3)220,0].$$

$$q_{Б3} = -220,0I'_3 + [(0,314020I''_3 + 0,020471I'_3)220,0 + (0,391505I''_3 - 0,016733I'_3)220,0].$$

Учитывая численные значения  $I'_3 = -1,96282$  и  $I''_3 = 0,981091$  в выражениях  $p_{Б3}$  и  $q_{Б3}$ , получим  $p_{Б3} = -126,312169$  и  $q_{Б3} = -65,173150$ .

Имея численные значения вышеприведенных величин, можно установить также численные значения небалансов активной и реактивной мощностей нагрузочных узлов  $\phi_{p3}$  и  $\phi_{q3}$ :

$$\phi_{p3} = -13,970100; \phi_{q3} = -27,145060.$$

Затем переходим к установлению выражений частных производных. Частные производные, входящие в матрицу Якоби рекуррентного выражения (2.4.33), имеют вид:

$$\frac{\partial \phi_{p3}}{\partial I'_3} = -[U'_{Б3} + D_{33} + (R_{33}I'_3 + X_{33}I''_3)],$$

$$\frac{\partial \phi_{p3}}{\partial I''_3} = -[U''_{Б3} + N_{33} + (R_{33}I''_3 - X_{33}I'_3)],$$

$$\frac{\partial \phi_{q3}}{\partial I'_3} = -[U''_{Б3} + N_{33} - (R_{33}I''_3 - X_{33}I'_3)],$$

$$\frac{\partial \phi_{q3}}{\partial I''_3} = -[-U'_{Б3} - D_{33} + (R_{33}I'_3 + X_{33}I''_3)],$$

где  $D_{33} = R_{33}I'_3 - X_{33}I''_3$ ;  $N_{33} = R_{33}I''_3 + X_{33}I'_3$ .

Выражения  $U'_{Б3}$  и  $U''_{Б3}$  имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \phi_{p3}}{\partial I'_3} = -[-U'_{Б3} + D_{33} + (3,580302I'_3 + 7,997483I''_3)],$$

$$\frac{\partial \phi_{p3}}{\partial I_3''} = -[U_{B3}'' + N_{33} + (3,580302I_3'' - 7,997483I_3')],$$

$$\frac{\partial \phi_{q3}}{\partial I_3'} = -[U_{B3}'' + N_{33} - (3,580302I_3'' - 7,997483I_3')],$$

$$\frac{\partial \phi_{q3}}{\partial I_3''} = -[-U_{B3}' - D_{33} + (3,580302I_3' + 7,997483I_3'')].$$

$$D_{33} = 3,580302I_3' - 7,997482I_3'',$$

$$N_{33} = 3,580302I_3'' + 7,997482I_3'.$$

$$U_{B3}' = (1 - 0,314020 - 0,391505)220,0 + (0,314020 \cos 0^{\circ}38' + 0,020471 \sin 0^{\circ}38')220,9 + (0,391505 \cos 0^{\circ}39' - 0,016733 \sin 0^{\circ}39')221,4 = 220,674610,$$

$$U_{B3}'' = -(-0,020471 + 0,016733)220,0 + (-0,314020 \sin 0^{\circ}38' - 0,020471 \cos 0^{\circ}38')220,9 + (-0,391505 \sin 0^{\circ}39' + 0,016733 \cos 0^{\circ}39')221,4 = -1,737422.$$

$$I_3' = -1,962182, I_3'' = 0,981091.$$

$$D_{33} = -14,871462, N_{33} = -12,179913.$$

$$\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial I_3'} = -206,6242,$$

$$\frac{\partial \Phi_{p3}}{\partial I_3''} = -5,287784,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial I_3'} = 34,649524,$$

$$\frac{\partial \Phi_{q3}}{\partial I_3''} = 204,98269.$$

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -1,962182 \\ 0,981091 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -206,6242 & -5,287784 \\ 34,6495 & 204,9827 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -13,970100 \\ -34,346470 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -1,962182 \\ 0,981091 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} -0,0048607 & -0,0001254 \\ 0,0008216 & 0,0048997 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -13,970100 \\ -34,346470 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_3' \\ I_3'' \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -1,962182 \\ 0,981091 \end{bmatrix}^0 - \begin{bmatrix} 0,072208 \\ -0,179762 \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} -2,034390 \\ 1,160853 \end{bmatrix}.$$

После проведения четырех итераций численные значения режимных параметров получаются такими же, как в табл. 1.3.

### **3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЦЫ ГЕССЕ**

#### **3.1. Общие положения решения системы нелинейных алгебраических уравнений методом матрицы Гессе второго порядка**

В предыдущих разделах рассматривался вопрос применения метода Ньютона – Рафсона для решения систем нелинейных алгебраических уравнений установившихся режимов электрических систем при их представлении и  $Y$ -,  $Z$ -,  $(Y - Z)$ -формах. В теоретическом плане было доказано, что метод Ньютона – Рафсона обеспечивает квадратичную сходимость.

Было установлено, что по методу Ньютона – Рафсона фактическое решение системы нелинейных алгебраических уравнений можно обеспечить за 4 – 5 итераций, что является весьма хорошим показателем для решения задачи установившегося режима электрической системы.

При этом, конечно, важное значение имеет вопрос выбора начальных значений зависимых режимных параметров. При решении задачи, физика явлений которой хорошо известна инженеру-исследователю, всегда можно гарантировать правильный выбор начальных значений указанных параметров. Успех применения метода Ньютона – Рафсона привел к естественному выводу об использовании слагаемых ряда Тейлора более высокого порядка, в данном случае второго порядка, с целью ускорения решения задачи установившегося режима.

Для решения задачи расчета установившегося режима нами было получено следующее векторное уравнение:

$$\Phi(X, U, D) = 0, \quad (3.1.1)$$

где  $X$  – вектор состояния, или зависимых переменных;  $U$  – вектор управления, или независимых переменных;  $D$  – вектор возмущения, или заданных величин.

В развернутой форме векторное уравнение представляется в виде системы следующих нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{p1}(X, U, D) = 0, \\ \Phi_{p2}(X, U, D) = 0, \\ \text{-----} \\ \Phi_{pm}(X, U, D) = 0, \\ \Phi_{q1}(X, U, D) = 0, \\ \Phi_{q2}(X, U, D) = 0, \\ \text{-----} \\ \Phi_{qm}(X, U, D) = 0, \end{array} \right\} \quad (3.1.2)$$

т. е. получаем систему, состоящую из  $2M$  уравнений с действительными переменными.

Решим следующую вспомогательную функцию, которая строится с помощью системы уравнений (3.1.2):

$$F = \sum_{i=1}^M (\Phi_{pi}^2 + \Phi_{qi}^2). \quad (3.1.3)$$

Если ввести обозначения

$$\Phi_i = (\Phi_{pi}; \Phi_{qi}), \quad (3.1.4)$$

то функцию (3.1.3) можно представить в виде

$$F = \sum_{i=1}^M \Phi_i^2, \quad (3.1.5)$$

или

$$F = [\Phi(X, U, D) \cdot \Phi(X, U, D)]. \quad (3.1.6)$$

Очевидно, каждое решение системы (3.1.1) обращает в нуль  $\mathbf{F}(X, U, D)$  и, наоборот, вектор  $\mathbf{X}$ , для которого функция  $\mathbf{F}(X, U, D)$  равна нулю, является вектором решения системы (3.1.1).

Предположим, что система (3.1.1) имеет лишь изолированное решение, которое представляет собой точку строгого минимума функции  $\mathbf{F}(X, U, D)$ .

Таким образом, задача сводится к нахождению минимума функции  $F(X, U, D)$ , который эквивалентен решению системы нелинейных алгебраических уравнений (3.1.1).

Как видно, вместо непосредственного решения системы (3.1.1) минимизируется вспомогательная функция  $F$ . В результате вектор  $\mathbf{X}$ , минимизирующий её, будет изображать и решение задачи расчета установившегося режима.



Для получения основного алгоритма минимизации вспомогательной функции разложим её в ряд Тейлора в окрестности исходной точки  $\mathbf{X}^0, U^0, D^0$ :

$$F(X, U^0, D^0) = F(X^0, U^0, D^0) + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_0} \Delta X + \frac{1}{2} \Delta X^T \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \Big|_{X_0} \cdot \Delta X + F_H, \quad (3.1.7)$$

где  $F_H$  – члены ряда Тейлора выше второго порядка.

Пренебрегая этими членами, получим:

$$F(X, U^0, D^0) = F(X^0, U^0, D^0) + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_0} \Delta X + \frac{1}{2} \Delta X^T \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \Big|_{X_0} \cdot \Delta X. \quad (3.1.8)$$

Условием минимума полученной функции (3.1.8) является

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F^0}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X_0} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \Big|_{X_0} \cdot \Delta X = 0, \quad (3.1.9)$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X^0} + \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} \Big|_{X^0} \cdot \Delta X = 0. \quad (3.1.10)$$

Если ввести обозначение

$$G(X, U^0, D^0) = \frac{\partial F}{\partial X} (X, U^0, D^0) \Big|_{X^0}, \quad (3.1.11)$$

$$H(X, U^0, D^0) = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} (X, U^0, D^0) \Big|_{X^0}, \quad (3.1.12)$$

то уравнение (3.1.10) примет вид

$$G + H\Delta X = 0, \quad (3.1.13)$$

или

$$H\Delta X = -G,$$

откуда

$$\Delta X = -H^{-1} \cdot G. \quad (3.1.14)$$

В данном случае  $\Delta X$  является поправочным вектором к переменным состояниям  $\mathbf{X}$ , а новый вектор определяется следующим образом:

$$X^1 = X^0 + \Delta X^0. \quad (3.1.15)$$

Для произвольной  $k$ -й итерации рекуррентное выражение (3.1.15) можно представить в следующем виде:

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X^k, \quad (3.1.16)$$

или

$$X^{k+1} = X^k - [H|_{X^k}]^{-1} \cdot G|_{X^k}, \quad (3.1.17)$$

где  $\mathbf{H}$  – квадратная неособенная матрица Гессе, элементы которой состоят из частных производных второго порядка от вспомогательной функции (3.1.5) по зависимым переменным;  $\mathbf{G}$  – градиент этой же функции.

Полученное выражение (3.1.17) является общим рекуррентным выражением для построения итерационного процесса решения любой системы нелинейных алгебраических уравнений о применении матрицы Гессе.

При организации итерационного процесса решения любой системы нелинейных алгебраических уравнений необходимо установить аналитические выражения частных производных второго порядка, входящих в матрицу Гессе.

Для этого необходимо иметь аналитическое выражение исходной вспомогательной функции (3.1.5), которая формируется на основании уравнений установившегося режима при заданном состоянии сети в  $\mathbf{Y}$ - и  $\mathbf{Z}$ - или  $(\mathbf{Y} - \mathbf{Z})$ -формах. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

### 3.2. Решение $\mathbf{Y}$ -формы уравнений установившегося режима электрической системы методом матрицы Гессе

Рассматривается решение системы нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима (1.2.27) и (1.2.28):

$$\Phi_{pi}(P, U', U'') = P_i - \varphi_{pi}(U', U'') = 0,$$

$$\Phi_{qi}(Q, U', U'') = Q_i - \varphi_{qi}(U', U'') = 0,$$

где

$$\varphi_{pi}(U', U'') = \sum_{j=0}^M [g_{ij}(U'_i U'_j + U''_i U''_j) + b_{ij}(U''_i U'_j - U'_i U''_j)],$$

$$\varphi_{qi}(U', U'') = \sum_{j=0}^M [g_{ij}(U''_i U'_j - U'_i U''_j) - b_{ij}(U'_i U'_j + U''_i U''_j)].$$

Из вышеприведенных выражений можно заметить, что для всех независимых (станционных и нагрузочных) узлов заданы активные и реактивные мощности и необходимо определить составляющие комплексные напряжения этих же узлов.

Для данного случая векторы  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{D}$  уравнения (3.1.1) определяются в виде

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} U' \\ U'' \end{Bmatrix} \text{ для независимых станционных и нагрузочных узлов, } (3.2.1)$$

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \text{ для независимых станционных узлов, } (3.2.2)$$

$$D = \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \text{ для нагрузочных узлов.} \quad (3.2.3)$$

При этом матрица Гессе  $H$  имеет следующий вид:

$$H = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial U' \partial U''} & \frac{\partial^2 F}{\partial U' \partial U''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U'' \partial U'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U'' \partial U''} \end{bmatrix}, \quad (3.2.4)$$

или с учетом индексов

$$H = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial U'_i \partial U'_j} & \frac{\partial^2 F}{\partial U'_i \partial U''_j} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U''_i \partial U'_j} & \frac{\partial^2 F}{\partial U''_i \partial U''_j} \end{bmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Градиент  $G$  той же функции определяется в виде

$$G = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial U'} \\ \frac{\partial F}{\partial U''} \end{bmatrix}, \quad (3.2.6)$$

или с учетом системы индексов

$$G = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial U'_j} \\ \frac{\partial F}{\partial U''_j} \end{bmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Рекуррентное выражение (3.1.17) на основании (3.2.5) и (3.2.7) принимает вид

$$\begin{bmatrix} U'_i \\ U''_i \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} U'_i \\ U''_i \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial U'_i \partial U'_j} & \frac{\partial^2 F}{\partial U'_i \partial U''_j} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U''_i \partial U'_j} & \frac{\partial^2 F}{\partial U''_i \partial U''_j} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial U'_j} \\ \frac{\partial F}{\partial U''_j} \end{bmatrix}. \quad (3.2.8)$$

Полученное выражение (3.2.8) является основным рекуррентным выражением решения системы нелинейных алгебраических уравнений (1.2.27), (1.2.28).

Каждый блок матрицы Гессе представляется квадратной подматрицей порядка  $M$ . В результате получается квадратная матрица порядка  $2M$ .

Поскольку

$$U' = (U'_1, U'_2, \dots, U'_M),$$

$$U'' = (U''_1, U''_2, \dots, U''_M),$$

то матрицу Гессе в развернутой форме можно представить в виде (3.2.9).

Как видно из матрицы Гессе (3.2.9), в ней фигурируют нижеприведенные типы частных производных:

– при одинаковых индексах, т. е. когда  $j = i$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i'^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_i''^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_i''}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_i'' \partial U_i'};$$

– при разных индексах, т. е. когда  $i \neq j$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j'}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_j' \partial U_i'}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j''}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_j'' \partial U_i'},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i'' \partial U_j'}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_i'' \partial U_j''}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_j'' \partial U_i''}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_j' \partial U_i''}.$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial U_1'^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1' \partial U_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1' \partial U_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1' \partial U_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1' \partial U_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1' \partial U_M''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U_2' \partial U_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2' \partial U_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2' \partial U_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2' \partial U_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2' \partial U_M''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U_M' \partial U_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M' \partial U_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M'^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M' \partial U_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M' \partial U_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M' \partial U_M''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U_1'' \partial U_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1'' \partial U_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1'' \partial U_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1''^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1'' \partial U_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_1'' \partial U_M''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'' \partial U_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'' \partial U_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'' \partial U_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'' \partial U_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2''^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_2'' \partial U_M''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial U_M'' \partial U_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M'' \partial U_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M'' \partial U_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M'' \partial U_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M'' \partial U_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial U_M''^2} \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

Учитывая, что для вторых частных производных сочетание индексов не имеет значения, т. е.  $i - j = j - i$ , то в результате остается всего шесть типов частных производных:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F}{\partial U_i'^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_i''^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_i''}, \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j'}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_i'' \partial U_j''}, \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j''}. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Однако два типа частных производных первого порядка необходимо определить также для градиента функции

$$\frac{\partial F}{\partial U_i'} = 2 \sum_{j=1}^M \Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i'} + 2 \sum_{j=1}^M \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i'}, \quad (3.2.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial U_i''} = 2 \sum_{j=1}^M \Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i''} + 2 \sum_{j=1}^M \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i''}.$$

Полученную систему уравнений (3.2.11) удобнее представить в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial U_i'} = 2 \left( \Phi_{pi} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U_i'} + \Phi_{qi} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U_i''} \right) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left( \Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i'} + \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i'} \right). \quad (3.2.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial U_i''} = 2 \left( \Phi_{pi} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U_i''} + \Phi_{qi} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U_i''} \right) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left( \Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i''} + \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i''} \right).$$

Из системы уравнений (3.2.12) можно заметить, что в первых слагаемых фигурируют функции с одинаковыми индексами, а во вторых – функции разных индексов.

Функции типа  $\Phi_p$  и  $\Phi_q$ , входящие в (3.2.12), выражения которых получены в (1.2.31), (1.2.32) и (1.2.34), (1.2.35), удобнее представить в виде:

$$\Phi_{pi} = P_i - \varphi_{pi} = P_i - \left[ g_{ii}(U_i'^2 + U_i''^2) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^M (g_{ij}A_{ij} + b_{ij}B_{ij}) \right], \quad (3.2.13)$$

$$\Phi_{qi} = Q_i - \varphi_{qi} = Q_i - \left[ -b_{ii}(U_i'^2 + U_i''^2) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^M (g_{ij}B_{ij} - b_{ij}A_{ij}) \right],$$

или

$$\Phi_{pj} = P_j - \varphi_{pj} = P_j - \left[ g_{jj}(U_j'^2 + U_j''^2) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M (g_{ji}A_{ji} + b_{ji}B_{ji}) \right], \quad (3.2.14)$$

$$\Phi_{qj} = Q_j - \varphi_{qj} = Q_j - \left[ -b_{jj}(U_j'^2 + U_j''^2) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^M (g_{ji}B_{ji} - b_{ji}A_{ji}) \right],$$

где  $A_{ij} = U_i'U_j' + U_i''U_j''$ ,  $B_{ij} = U_i''U_j' - U_i'U_j''$ ,

или  $A_{ji} = U_j'U_i' + U_j''U_i''$ ,  $B_{ji} = U_j''U_i' - U_j'U_i''$ .

Приведенные выражения функций  $\Phi_{pi}$ ,  $\Phi_{pj}$ ,  $\Phi_{qi}$ ,  $\Phi_{qj}$  согласно (3.2.13) и (3.2.14) в такой же форме необходимо подставить и (3.2.12).

Частные производные первых порядков, входящие в (3.2.12), определяются из аналитических выражений (3.3.13) и (3.2.14):

– при одинаковых индексах, т. е. когда  $j = i$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U'_i} &= -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial U'_i} = -[2g_{ii}U'_i + \sum_{j=0}^M (g_{ij}U'_j - b_{ij}U''_j)], \\ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U''_i} &= -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial U''_i} = -[2g_{ii}U''_i + \sum_{j=0}^M (g_{ij}U''_j + b_{ij}U'_j)], \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U'_i} &= -\frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial U'_i} = -[-2b_{ii}U'_i - \sum_{j=0}^M (g_{ij}U''_j + b_{ij}U'_j)], \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U''_i} &= -\frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial U''_i} = -[-2b_{ii}U''_i + \sum_{j=0}^M (g_{ij}U'_j - b_{ij}U''_j)].\end{aligned}\quad (3.2.15)$$

Учитывая инвариантность индексов  $i$  и  $j$ , на основании (3.2.15) можно непосредственно получить частные производные этих функций по составляющим узловых напряжений, но с индексом  $j$ :

– при разных индексах, т. е. когда  $j \neq i$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U'_j} &= -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial U'_j} = -(g_{ij}U'_i + b_{ij}U''_i), \\ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial U''_j} &= -\frac{\partial \varphi_{pi}}{\partial U''_j} = -(g_{ij}U''_i - b_{ij}U'_i), \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U'_j} &= -\frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial U'_j} = -(g_{ij}U''_i - b_{ij}U'_i), \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial U''_j} &= -\frac{\partial \varphi_{qi}}{\partial U''_j} = -(-g_{ij}U'_i - b_{ij}U''_i).\end{aligned}\quad (3.2.16)$$

После установления частных производных первого порядка можно перейти к определению частных производных второго порядка, т. е. к элементам матрицы Гессе.

Как уже было сказано, необходимо установить шесть типов частных производных:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i'^2} = \frac{\partial}{\partial U_i'} (2 \sum_{j=1}^M \Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i'} + 2 \sum_{j=1}^M \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i'}),$$

или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i'^2} = 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i'} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial U_i'^2} + 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i'} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial U_i'^2} \right) \right).\quad (3.2.17)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i''^2} = \frac{\partial}{\partial U_i''} \left( 2 \sum_{j=1}^M \Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i''} + 2 \sum_{j=1}^M \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i''} \right),$$

ИЛИ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i''^2} = 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i''} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial U_i''^2} \right) + 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i''} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial U_i''^2} \right). \quad (3.2.18)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_i''} = \frac{\partial}{\partial U_i'} \left( 2 \sum_{j=1}^M \Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i''} + 2 \sum_{j=1}^M \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i''} \right),$$

ИЛИ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_i''} = 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial U_i''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial U_i' \partial U_i''} \right) + 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial U_i''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial U_i' \partial U_i''} \right). \quad (3.2.19)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j'} = \frac{\partial}{\partial U_i'} \left( 2 \sum_{k=1}^M \Phi_{pk} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_j'} + 2 \sum_{k=1}^M \Phi_{qk} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_j'} \right),$$

ИЛИ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j'} = 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_j'} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial U_i' \partial U_j'} \right) + 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_j'} + \Phi_{qk} \frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial U_i' \partial U_j'} \right). \quad (3.2.20)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i'' \partial U_j''} = \frac{\partial}{\partial U_i''} \left( 2 \sum_{k=1}^M \Phi_{pk} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_j''} + 2 \sum_{k=1}^M \Phi_{qk} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_j''} \right),$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i'' \partial U_j''} = & 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_i''} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_j''} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial U_j'' \partial U_i''} \right) + 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_i''} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_j''} + \right. \\ & \left. + \Phi_{qk} \frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial U_j'' \partial U_i''} \right). \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j''} = \frac{\partial}{\partial U_i'} \left( 2 \sum_{k=1}^M \Phi_{pk} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_j''} + 2 \sum_{k=1}^M \Phi_{qk} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_j''} \right),$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j''} = & 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_i'} \cdot \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial U_j''} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial U_j'' \partial U_i'} \right) + 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_i'} \cdot \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial U_j''} + \right. \\ & \left. + \Phi_{qk} \frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial U_j'' \partial U_i'} \right). \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Окончательно вышеприведённые шесть типов частных производных можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i'^2} = & 2 \left[ \left( \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i'} \right)^2 + \phi_{pi} \frac{\partial^2 \phi_{pi}}{\partial U_i'^2} + \phi_{qi} \frac{\partial^2 \phi_{qi}}{\partial U_i'^2} \right] + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i'} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i'} \right)^2 + \phi_{pj} \frac{\partial^2 \phi_{pj}}{\partial U_i'^2} + \phi_{qj} \frac{\partial^2 \phi_{qj}}{\partial U_i'^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i''^2} = & 2 \left[ \left( \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i''} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i''} \right)^2 + \phi_{pi} \frac{\partial^2 \phi_{pi}}{\partial U_i''^2} + \phi_{qi} \frac{\partial^2 \phi_{qi}}{\partial U_i''^2} \right] + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i''} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i''} \right)^2 + \phi_{pj} \frac{\partial^2 \phi_{pj}}{\partial U_i''^2} + \phi_{qj} \frac{\partial^2 \phi_{qj}}{\partial U_i''^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_i''} = & 2 \left( \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i''} + \phi_{pi} \frac{\partial^2 \phi_{pi}}{\partial U_i' \partial U_i''} + \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i''} + \phi_{qi} \frac{\partial^2 \phi_{qi}}{\partial U_i' \partial U_i''} \right) + \\ & + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left( \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i''} + \phi_{pj} \frac{\partial^2 \phi_{pj}}{\partial U_i' \partial U_i''} + \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i''} + \phi_{qj} \frac{\partial^2 \phi_{qj}}{\partial U_i' \partial U_i''} \right). \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j'} = & 2 \left( \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_j'} + \phi_{pi} \frac{\partial^2 \phi_{pi}}{\partial U_j' \partial U_i'} + \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_j'} + \phi_{qi} \frac{\partial^2 \phi_{qi}}{\partial U_j' \partial U_i'} \right) + \\ & + 2 \left( \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_j'} + \phi_{pj} \frac{\partial^2 \phi_{pj}}{\partial U_j' \partial U_i'} + \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_j'} + \phi_{qj} \frac{\partial^2 \phi_{qj}}{\partial U_j' \partial U_i'} \right) + \\ & + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left( \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_j'} + \phi_{pk} \frac{\partial^2 \phi_{pk}}{\partial U_j' \partial U_i'} + \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_j'} + \phi_{qk} \frac{\partial^2 \phi_{qk}}{\partial U_j' \partial U_i'} \right). \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i'' \partial U_j''} = & 2 \left( \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_j''} + \phi_{pi} \frac{\partial^2 \phi_{pi}}{\partial U_j'' \partial U_i''} + \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_j''} + \phi_{qi} \frac{\partial^2 \phi_{qi}}{\partial U_j'' \partial U_i''} \right) + \\ & + 2 \left( \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_j''} + \phi_{pj} \frac{\partial^2 \phi_{pj}}{\partial U_j'' \partial U_i''} + \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_j''} + \phi_{qj} \frac{\partial^2 \phi_{qj}}{\partial U_j'' \partial U_i''} \right) + \\ & + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left( \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_j''} + \phi_{pk} \frac{\partial^2 \phi_{pk}}{\partial U_j'' \partial U_i''} + \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_j''} + \phi_{qk} \frac{\partial^2 \phi_{qk}}{\partial U_j'' \partial U_i''} \right). \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j''} = & 2 \left( \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_j''} + \phi_{pi} \frac{\partial^2 \phi_{pi}}{\partial U_j'' \partial U_i'} + \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_j''} + \phi_{qi} \frac{\partial^2 \phi_{qi}}{\partial U_j'' \partial U_i'} \right) + \\ & + 2 \left( \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_j''} + \phi_{pj} \frac{\partial^2 \phi_{pj}}{\partial U_j'' \partial U_i'} + \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_j''} + \phi_{qj} \frac{\partial^2 \phi_{qj}}{\partial U_j'' \partial U_i'} \right) + \\ & + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left( \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_j''} + \phi_{pk} \frac{\partial^2 \phi_{pk}}{\partial U_j'' \partial U_i'} + \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_j''} + \phi_{qk} \frac{\partial^2 \phi_{qk}}{\partial U_j'' \partial U_i'} \right). \end{aligned} \quad (3.2.28)$$



Аналитические выражения частных производных первого порядка, входящих в (3.2.11), приведены в виде (3.2.15) и (3.2.16).

Однако из выражений (3.2.23 – 3.2.28) можно заметить, что необходимо определить множество частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial U_i'^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pi}}{\partial U_i'^2} = -2g_{ii}; \\ \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial U_i'^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qi}}{\partial U_i'^2} = 2b_{ii};\end{aligned}\tag{3.2.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial U_i''^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pi}}{\partial U_i''^2} = -2g_{ii}; \\ \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial U_i''^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qi}}{\partial U_i''^2} = 2b_{ii};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial U_i'^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pj}}{\partial U_i'^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial U_i'^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qj}}{\partial U_i'^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial U_i''^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pj}}{\partial U_i''^2} = 0;\end{aligned}\tag{3.2.30}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial U_i''^2} = -\frac{\partial^2 \varphi_{qj}}{\partial U_i''^2} = 0.$$

Смешанные частные производные второго порядка определяются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial U_i'' \partial U_i'} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pi}}{\partial U_i'' \partial U_i'} = 0; \\ \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial U_i'' \partial U_i'} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qi}}{\partial U_i'' \partial U_i'} = 0; \\ \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial U_i'' \partial U_i'} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pj}}{\partial U_i'' \partial U_i'} = 0; \\ \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial U_i'' \partial U_i'} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qj}}{\partial U_i'' \partial U_i'} = 0;\end{aligned}\tag{3.2.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi_{pi}}{\partial U'_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pi}}{\partial U'_j \partial U'_i} = -g_{ij}; \\
\frac{\partial^2 \phi_{qi}}{\partial U'_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qi}}{\partial U'_j \partial U'_i} = b_{ij}; \\
\frac{\partial^2 \phi_{pj}}{\partial U'_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pj}}{\partial U'_j \partial U'_i} = -g_{ji}; \\
\frac{\partial^2 \phi_{qj}}{\partial U'_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qj}}{\partial U'_j \partial U'_i} = b_{ji};
\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi_{pk}}{\partial U'_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pk}}{\partial U'_j \partial U'_i} = 0; (i \neq k; j \neq k); \\
\frac{\partial^2 \phi_{qk}}{\partial U'_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qk}}{\partial U'_j \partial U'_i} = 0; (i \neq k; j \neq k);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi_{pi}}{\partial U''_j \partial U''_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pi}}{\partial U''_j \partial U''_i} = -g_{ij}; \\
\frac{\partial^2 \phi_{qi}}{\partial U''_j \partial U''_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qi}}{\partial U''_j \partial U''_i} = b_{ij}; \\
\frac{\partial^2 \phi_{pj}}{\partial U''_j \partial U''_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pj}}{\partial U''_j \partial U''_i} = -g_{ji}; \\
\frac{\partial^2 \phi_{qj}}{\partial U''_j \partial U''_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qj}}{\partial U''_j \partial U''_i} = b_{ji};
\end{aligned} \tag{3.2.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi_{pk}}{\partial U''_j \partial U''_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pk}}{\partial U''_j \partial U''_i} = 0; (i \neq k; j \neq k); \\
\frac{\partial^2 \phi_{qk}}{\partial U''_j \partial U''_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qk}}{\partial U''_j \partial U''_i} = 0; (i \neq k; j \neq k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi_{pi}}{\partial U''_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pi}}{\partial U''_j \partial U'_i} = b_{ij}; \\
\frac{\partial^2 \phi_{qi}}{\partial U''_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pi}}{\partial U''_j \partial U'_i} = g_{ij}; \\
\frac{\partial^2 \phi_{pj}}{\partial U''_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pj}}{\partial U''_j \partial U'_i} = -b_{ji}; \\
\frac{\partial^2 \phi_{qj}}{\partial U''_j \partial U'_i} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qj}}{\partial U''_j \partial U'_i} = -g_{ji};
\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{pk}}{\partial U_j'' \partial U_i'} = - \frac{\partial^2 \phi_{pk}}{\partial U_j'' \partial U_i'} = 0; (i \neq k; j \neq k);$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{qk}}{\partial U_j'' \partial U_i'} = - \frac{\partial^2 \phi_{qk}}{\partial U_j'' \partial U_i'} = 0; (i \neq k; j \neq k).$$

Учитывая полученные выражения (3.2.29 – 3.2.34) в (3.2.23 – 3.2.28), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i'^2} = & 2 \left[ \left( \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i'} \right)^2 - 2(g_{ii} \phi_{pi} - b_{ii} \phi_{qi}) \right] + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i'} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i'} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i''^2} = & 2 \left[ \left( \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i''} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i''} \right)^2 - 2(g_{ii} \phi_{pi} - b_{ii} \phi_{qi}) \right] + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \left( \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i''} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i''} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_i''} = 2 \left( \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i''} + \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i''} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left( \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i''} + \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i''} \right). \quad (3.2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j'} = & 2 \left[ \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_j'} + \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_j'} - (g_{ij} \phi_{pj} - b_{ij} \phi_{qi}) \right] + 2 \left[ \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_j'} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_j'} - (g_{ji} \phi_{pj} - b_{ji} \phi_{qj}) \right] + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left( \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_j'} + \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_j'} \right). \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i'' \partial U_j''} = & 2 \left[ \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_j''} + \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_j''} - (g_{ij} \phi_{pi} - b_{ij} \phi_{qi}) \right] + 2 \left[ \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_j''} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_j''} - (g_{ji} \phi_{pj} - b_{ji} \phi_{qj}) \right] + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left( \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_j''} + \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_i''} \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_j''} \right). \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial U_i' \partial U_j''} = & 2 \left[ \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pi}}{\partial U_j''} + \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qi}}{\partial U_j''} + (b_{ij} \phi_{pi} - g_{ij} \phi_{qi}) \right] + 2 \left[ \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pj}}{\partial U_j''} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qj}}{\partial U_j''} + (b_{ji} \phi_{pj} - g_{ji} \phi_{qj}) \right] + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left( \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{pk}}{\partial U_j''} + \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_i'} \frac{\partial \phi_{qk}}{\partial U_j''} \right). \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

### 3.3. Решение Z-формы уравнений установившегося режима электрической системы методом матрицы Гессе

Соответствующая система нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi_{pi}(P, I', I'') &= P_i - f_{pi}(I', I'') = 0, \\ \Phi_{qi}(Q, I', I'') &= Q_i - f_{qi}(I', I'') = 0,\end{aligned}\quad (3.3.1)$$

где

$$\begin{aligned}f_{pi}(I_a, I_p) &= U_B I'_i + \sum_{j=1}^M [(I'_i I'_j + I''_i I''_j) R_{ij} - (I'_i I''_j - I''_i I'_j) X_{ij}], \\ f_{qi}(I_a, I_p) &= -U_B I''_i + \sum_{j=1}^M [(I'_i I'_j + I''_i I''_j) X_{ij} + (I'_i I''_j - I''_i I'_j) R_{ij}].\end{aligned}\quad (3.3.2)$$

Для всех независимых стационарных и нагрузочных узлов считаются заданными активные и реактивные мощности и требуется определить составляющие комплексных токов этих же узлов.

Векторы  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{D}$  применительно к системе уравнений (3.3.1) характеризуются следующими режимными параметрами:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \begin{Bmatrix} I' \\ I'' \end{Bmatrix} \text{ для независимых стационарных и нагрузочных узлов;} \\ \mathbf{U} &= \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \text{ для независимых стационарных узлов;} \\ \mathbf{D} &= \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} \text{ только для нагрузочных узлов.}\end{aligned}\quad (3.3.3)$$

Для этого случая квадратная матрица Гессе  $H$ , состоящая из частных производных второго порядка, представляется в виде

$$H = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial I' \partial I'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I' \partial I''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I'' \partial I'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I'' \partial I''} \end{bmatrix}.\quad (3.3.4)$$

Если учесть принятую систему индексов, то матрицу Гессе можно представить в более ясной форме:

$$H = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial I'_i \partial I'_j} & \frac{\partial^2 F}{\partial I'_i \partial I''_j} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I''_i \partial I'_j} & \frac{\partial^2 F}{\partial I''_i \partial I''_j} \end{bmatrix}.$$

Градиент функции определяется в виде

$$G = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial I'} \\ \frac{\partial F}{\partial I''} \end{bmatrix},$$

а с учетом системы индексов

$$G = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial I'_j} \\ \frac{\partial F}{\partial I''_j} \end{bmatrix}. \quad (3.3.5)$$

При этом рекуррентное выражение принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} I'_i \\ I''_i \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} I'_i \\ I''_i \end{bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial I'_i \partial I'_j} & \frac{\partial^2 F}{\partial I'_i \partial I''_j} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I''_i \partial I'_j} & \frac{\partial^2 F}{\partial I''_i \partial I''_j} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial I'_j} \\ \frac{\partial F}{\partial I''_j} \end{bmatrix}. \quad (3.3.6)$$

Приведенное выражение (3.3.6) является основным рекуррентным выражением для решения системы нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима электрической системы при **Z**-форме задания состояния пассивной части.

Необходимо отметить, что каждый блок матрицы Гессе представляет собой квадратную подматрицу порядка  $M$ , которая в результате является квадратной матрицей порядка  $2M$ . Если учесть, что

$$\left. \begin{aligned} I' &= (I'_1, I'_2, \dots, I'_M), \\ I'' &= (I''_1, I''_2, \dots, I''_M), \end{aligned} \right\} \quad (3.3.7)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial I_1'^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1' \partial I_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1' \partial I_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1' \partial I_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1' \partial I_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1' \partial I_M''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I_2' \partial I_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2'^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2' \partial I_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2' \partial I_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2' \partial I_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2' \partial I_M''} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I_M' \partial I_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M' \partial I_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M'^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M' \partial I_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M' \partial I_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M' \partial I_M''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I_1'' \partial I_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1'' \partial I_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1'' \partial I_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1''^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1'' \partial I_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_1'' \partial I_M''} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I_2'' \partial I_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2'' \partial I_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2'' \partial I_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2'' \partial I_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2''^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_2'' \partial I_M''} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial I_M'' \partial I_1'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M'' \partial I_2'} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M'' \partial I_M'} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M'' \partial I_1''} & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M'' \partial I_2''} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial I_M''^2} \end{bmatrix}, \quad (3.3.8)$$

то матрицу Гессе в развернутой форме можно представить в виде (3.3.8).

Анализ структуры развернутой матрицы Гассе (3.3.8) показывает, что в ней фигурируют следующие типы частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_1'^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial I_i''^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_i''}, \frac{\partial^2 F}{\partial I_i'' \partial I_i'}$$

При разных индексах

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j'} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_j' \partial I_i'} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j''} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_j'' \partial I_i'} ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i'' \partial I_j''} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_i'' \partial I_j''} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_j'' \partial I_i''} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_j'' \partial I_i''}$$

Исходя из свойств частных производных второго порядка, можно написать:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j''} = \frac{\partial^2 F}{\partial I_j' \partial I_i''} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_i'' \partial I_j''} = \frac{\partial^2 F}{\partial I_j'' \partial I_i''} ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_j' \partial I_i''} = \frac{\partial^2 F}{\partial I_i'' \partial I_j'} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j''} = \frac{\partial^2 F}{\partial I_j'' \partial I_i'} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_i'' \partial I_j''} = \frac{\partial^2 F}{\partial I_j'' \partial I_i''}$$

В результате устанавливаются аналитические выражения следующих частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i'^2} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_i''^2} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_i''} . \quad (3.3.9)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j'} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_i'' \partial I_j''} , \frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j''} , \quad (3.3.10)$$

т. е. шесть типов производных. Для определения указательных частных производных целесообразно сначала установить аналитические выражения частных производных первого порядка, которые входят в градиент исследуемой функции:

$$\frac{\partial F}{\partial I_i'} = 2 \sum_{j=1}^M (\Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} + \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'}), \quad (3.3.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial I_i''} = 2 \sum_{j=1}^M (\Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} + \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''}). \quad (3.3.12)$$

Представим полученные частные производные в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial I'_i} = 2 \left( \Phi_{pi} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I'_i} + \Phi_{qi} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I'_i} \right) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (\Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_i} + \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I'_i}), \quad (3.3.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial I''_i} = 2 \left( \Phi_{pi} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I''_i} + \Phi_{qi} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I''_i} \right) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (\Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I''_i} + \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_i}). \quad (3.3.14)$$

Частные производные первого порядка, входящие в последние два выражения (3.3.13) и (3.3.14), необходимо определить из аналитических выражений (3.3.2).

При этом для определения аналитических выражений соответствующих частных производных целесообразно уравнения установившегося режима (3.3.2) представить в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{pi} = P_i - f_{pi} = P_i - [U_B I'_i + (I_i'^2 + I_i''^2) R_{ii} + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (A_{ij} R_{ij} - B_{ij} X_{ij})], \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{qi} = Q_i - f_{qi} = Q_i - [-U_B I''_i + (I_i'^2 + I_i''^2) X_{ii} + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r (A_{ij} X_{ij} - B_{ij} R_{ij})], \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

где

$$A_{ij} = I'_{ai} I'_{aj} + I''_{pi} I''_{pj}; \quad B_{ij} = I'_{ai} I''_{pj} - I''_{pi} I'_{aj}. \quad (3.3.17)$$

Частные производные, входящие в (3.3.13) и (3.3.14), определяются следующим образом:

– при одинаковых индексах, т. е. когда  $j = i$ ;

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I'_i} = -\frac{\partial f_{pi}}{\partial I'_i} = - \left[ U_\sigma + 2R_{ii} I'_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (R_{ij} I'_j - X_{ij} I''_j) \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} = -\frac{\partial f_{pi}}{\partial I_i''} = -\left[ 2R_{ii}I_i'' + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (R_{ij}I_j'' - X_{ij}I_j') \right], \quad (3.3.18)$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} = -\frac{\partial f_{qi}}{\partial I_i'} = -\left[ 2X_{ii}I_i' + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (R_{ij}I_j'' + X_{ij}I_j') \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i''} = -\frac{\partial f_{qi}}{\partial I_i''} = -\left[ -U_\sigma + 2X_{ii}I_i'' - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M (R_{ij}I_j' - X_{ij}I_j'') \right];$$

– при разных индексах, т. е. когда  $j \neq i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j'} &= -\frac{\partial f_{pi}}{\partial I_j'} = -(I_i' R_{ij} + I_i'' X_{ij}), \\ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j''} &= -\frac{\partial f_{pi}}{\partial I_j''} = -(I_i'' R_{ij} - I_i' X_{ij}), \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j'} &= -\frac{\partial f_{qi}}{\partial I_j'} = -(I_i' X_{ij} - I_i'' R_{ij}), \\ \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j''} &= -\frac{\partial f_{qi}}{\partial I_j''} = -(I_i'' X_{ij} + I_i' R_{ij}). \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

При этом необходимо иметь в виду

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j'} = \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j''}; \quad \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j''} = -\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j'}. \quad (3.3.20)$$

Вышеприведенные выражения частных производных (3.3.18) можно представить также в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} = -\frac{\partial f_{pi}}{\partial I_i'} = -\left[ \dot{U}_B + \sum_{i=1}^M (R_{ij}I_j' - X_{ij}I_j'') + (R_{ii}I_i' + X_{ii}I_i'') \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} = -\frac{\partial f_{pi}}{\partial I_i''} = -\left[ \sum_{i=1}^M (R_{ij}I_j'' - X_{ij}I_j') + (R_{ii}I_i'' - X_{ii}I_i') \right], \quad (3.3.21)$$



$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I'_i} = -\frac{\partial f_{qi}}{\partial I'_i} = -\left[ \sum_{i=1}^M (R_{ij}I''_j - X_{ij}I'_j) - (R_{ii}I''_i - X_{ii}I'_i) \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I''_i} = -\frac{\partial f_{qi}}{\partial I''_i} = -\left[ \dot{U}_B - \sum_{i=1}^M (R_{ij}I'_j - X_{ij}I''_j) + (R_{ii}I'_i + X_{ii}I''_i) \right].$$

После установления аналитических выражений частных производных первого порядка на основе выражений (3.3.13), (3.3.14) можно перейти к построению частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I'^2_i} = 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_i} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_i} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I'^2_i} \right) + 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I'_i} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I'_i} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I'^2_i} \right);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I''^2_i} = 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I''_i} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I''_i} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I''^2_i} \right) + 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_i} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_i} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I''^2_i} \right);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I'_i \partial I''_i} = 2 \sum_{j=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_i} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I''_i} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I'_i \partial I''_i} \right) + 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I'_i} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_i} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I'_i \partial I''_i} \right);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I'_i \partial I'_j} = 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_i} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_j} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial I'_i \partial I'_j} \right) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_i} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_j} + \Phi_{qk} \frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial I'_i \partial I'_j} \right); \quad (3.3.22)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I''_i \partial I''_j} = 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_i} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_j} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial I''_i \partial I''_j} \right) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_i} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_j} + \Phi_{qk} \frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial I''_i \partial I''_j} \right);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I'_i \partial I''_j} = 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I'_i} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I''_j} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial I'_i \partial I''_j} \right) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I'_i} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I''_j} + \Phi_{qk} \frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial I'_i \partial I''_j} \right).$$

Вышеприведенные частные производные в более подробной и ясной форме можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i'^2} = 2 \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} \right)^2 + \Phi_{pi} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'^2} + \left( \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} \right)^2 + \Phi_{qi} \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_i'^2} \right] +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \right)^2 + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'^2} + \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \right)^2 + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i'^2} \right].$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i''^2} = 2 \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i''} \right)^2 + \Phi_{pi} \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_i''^2} + \Phi_{qi} \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_i''^2} \right] +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} \right)^2 + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i''^2} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i''^2} \right].$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_i''} = 2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} + \Phi_{pi} \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_i' \partial I_i''} + \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i''} + \Phi_{qi} \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_i' \partial I_i''} \right] +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_i''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i' \partial I_i''} \right].$$

когда  $i \neq j$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j'} = 2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j'} + \Phi_{pi} \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j' \partial I_i'} + \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j'} + \Phi_{qi} \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j' \partial I_i'} \right] +$$

$$+ 2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j'} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j' \partial I_i'} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j'} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j' \partial I_i'} \right] +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_j'} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial I_j' \partial I_i'} + \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_j'} + \Phi_{qk} \frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial I_j' \partial I_i'} \right]. \quad (3.3.23)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i'' \partial I_j''} = 2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j''} + \Phi_{pi} \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j'' \partial I_i''} + \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j''} + \Phi_{qi} \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j'' \partial I_i''} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& +2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j'' \partial I_i''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j'' \partial I_i''} \right] + \\
& +2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_j''} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial I_j'' \partial I_i''} + \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_j''} + \Phi_{qk} \frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial I_j'' \partial I_i''} \right]. \\
\frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j''} &= 2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j''} + \Phi_{pi} \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j'' \partial I_i'} + \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j''} + \Phi_{qi} \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j'' \partial I_i'} \right] + \\
& +2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j'' \partial I_i'} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j'' \partial I_i'} \right] + \\
& +2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_j''} + \Phi_{pk} \frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial I_j'' \partial I_i'} + \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_j''} + \Phi_{qk} \frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial I_j'' \partial I_i'} \right].
\end{aligned}$$

Аналитические выражения частных производных первого порядка, входящих в (3.3.23), приведены выше в (3.3.18), (3.3.19).

Теперь необходимо установить аналитические выражения вторых частных производных, входящих в выражения (3.3.23):

$$\begin{aligned}
-2R_{ii} &= \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_i'^2} = -\frac{\partial^2 f_{pi}}{\partial I_i'^2}; \quad \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_i'^2} = -\frac{\partial^2 f_{qi}}{\partial I_i'^2} = -2X_{ii}; \\
-2R_{ii} &= \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_i''^2} = -\frac{\partial^2 f_{pi}}{\partial I_i''^2}; \quad \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_i''^2} = -\frac{\partial^2 f_{qi}}{\partial I_i''^2} = -2X_{ii}; \\
0 &= \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'^2} = -\frac{\partial^2 f_{pj}}{\partial I_i'^2}; \quad \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i'^2} = -\frac{\partial^2 f_{qj}}{\partial I_i'^2} = 0; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i''^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{pj}}{\partial I_i''^2} = 0; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i''^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi_{qj}}{\partial I_i''^2} = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Смешанные частные производные второго порядка определяются по выражениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_i'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{pi}}{\partial I_i'' \partial I_i'} = 0; \\ \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_i'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{qi}}{\partial I_i'' \partial I_i'} = 0;\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{pj}}{\partial I_i'' \partial I_i'} = 0; \\ \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{qj}}{\partial I_i'' \partial I_i'} = 0;\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -\frac{\partial^2 f_{pi}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -R_{ij}.$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -\frac{\partial^2 f_{qi}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -X_{ij};\tag{3.3.26}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -\frac{\partial^2 f_{pj}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -R_{ji};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -\frac{\partial^2 f_{qi}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -X_{ji};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -\frac{\partial^2 f_{pk}}{\partial I_j' \partial I_i'} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial I_j' \partial I_i'} = -\frac{\partial^2 f_{qk}}{\partial I_j' \partial I_i'} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -\frac{\partial^2 f_{pi}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -R_{ij};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -\frac{\partial^2 f_{qi}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -X_{ij};\tag{3.3.27}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -\frac{\partial^2 f_{pj}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -R_{ji};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j'' \partial I_i''} &= -\frac{\partial^2 f_{qj}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = -X_{ji}; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial I_j'' \partial I_i''} &= -\frac{\partial^2 f_{pk}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = 0; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial I_j'' \partial I_i''} &= -\frac{\partial^2 f_{qk}}{\partial I_j'' \partial I_i''} = 0; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_j'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{pi}}{\partial I_j'' \partial I_i'} = X_{ij}; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_j'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{qi}}{\partial I_j'' \partial I_i'} = -R_{ij}; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{pj}}{\partial I_j'' \partial I_i'} = -X_{ji}; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{qj}}{\partial I_j'' \partial I_i'} = R_{ji}; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{pk}}{\partial I_j'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{pk}}{\partial I_j'' \partial I_i'} = 0; \\
\frac{\partial^2 \Phi_{qk}}{\partial I_j'' \partial I_i'} &= -\frac{\partial^2 f_{qk}}{\partial I_j'' \partial I_i'} = 0;
\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Учитывая полученные выражения частных производных (3.3.25), (3.3.28) в общих выражениях частных производных второго порядка (3.3.25), получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial I_i'^2} &= 2 \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} \right)^2 - 2(R_{ii} \Phi_{pi} + X_{ii} \Phi_{qi}) \right] + \\
&+ 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i''^2} = 2 \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i''} \right)^2 - 2(R_{ii} \Phi_{pi} + X_{ii} \Phi_{qi}) \right] +$$

$$+2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} \right)^2 \right]. \quad (3.3.29)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_i''} = 2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} + \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i''} \right] + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} \right].$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j'} = 2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j'} + \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j'} + (R_{ij} \Phi_{pi} + X_{ij} \Phi_{qi}) \right] +$$

$$+2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j'} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j'} - (R_{ji} \Phi_{pj} + X_{ji} \Phi_{qj}) \right] +$$

$$+2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_j'} + \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_j'} \right].$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i'' \partial I_j''} = 2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j''} - (R_{ij} \Phi_{pi} + X_{ij} \Phi_{qi}) \right] +$$

$$+2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j''} - (R_{ij} \Phi_{pj} + X_{ij} \Phi_{qj}) \right] +$$

$$+2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_j''} \right]. \quad (3.3.30)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial I_i' \partial I_j''} = 2 \left[ \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I_j''} + (X_{ij} \Phi_{pi} - R_{ij} \Phi_{qi}) \right] +$$

$$+ \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j''} - (X_{ji} \Phi_{pj} - R_{ji} \Phi_{qj}) \right] +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pk}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qk}}{\partial I_j''} \right].$$

## 4. ПОСТРОЕНИЕ «Z, P-Q» МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

### 4.1. Построение диакоптической математической модели разделенной электроэнергетической системы

В основе построения диакоптической математической модели лежит матричное уравнение типа  $\mathbf{Y}$  электроэнергетической системы

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}}, \quad (4.1.1)$$

где  $\dot{\mathbf{I}}$  – многомерный вектор, или столбовая матрица независимых узлов комплексных токов;  $\dot{\mathbf{U}}$  – многомерный вектор, или столбовая матрица независимых узлов комплексных напряжений, приведенный при напряжении базисного узла;  $\mathbf{Y}$  – обычная квадратная матрица собственных и взаимно комплексных проводимостей независимых узлов.

Если (4.1.1) представить в виде матричного уравнения типа  $\mathbf{Z}$ , получим:

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{U}_B + \mathbf{Z}\dot{\mathbf{I}}, \quad (4.1.2)$$

где  $\dot{U}_B$  – комплексное напряжение базисного узла, аргумент которого принимаем равным нулю, так что можно писать как  $\dot{U}_B = U_B$ ;  $\mathbf{Z}$  – обращенная форма  $\mathbf{Y}$ , является неособенным матричным уравнением независимых стационарных узлов, составленных из собственных и взаимно комплексных сопротивлений.

Полученное матричное уравнение (4.1.2) можно представить в следующем алгебраическом виде:

$$\dot{U}_i = \dot{U}_B + \sum_{j=1}^M Z_{ij} \dot{I}_j, \quad (4.1.3)$$

где  $i, j$  – равные индексы, а  $M$  – количество независимых узлов.

Предположим, исследуемая ЭЭС состоит из  $(M+1)$  узлов и необходимо их представить как совокупность радиально связанных подсистем.

Отрезав ветви необходимого количества, заданную ЭЭС можно представить как совокупность радиально связанных  $N$  подсистем.

Если выберем какой-либо стационарный узел первой подсистемы базисным, то данная ЭЭС будет составлена из независимых узлов  $M$ . Допустим, что каждая подсистема соответственно состоит из  $M_1, M_2, \dots, M_N$  узлов, так что  $M = M_1 + M_2 + \dots + M_N$ .

Выберем следующую систему индексов для основных индексов:

$$i, j = (i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_N, j_N),$$

где  $i_1, j_1 = 0, 1, 2, \dots, I_1$  и являются индексами первой подсистемы;

$i_2, j_2 = M_1 + 1, M_1 + 2, \dots, M_1 + M_2 = M_{12}$  и являются индексами второй подсистемы,

$i_N, j_N = M_{N-1} + 1, M_{N-1} + 2, \dots, M_{N-1} + M_N = M_{N-1,N}$  – индексы  $N$  подсистемы.

Для противоположных узлов, возникших вследствие разрезания дополнительных ветвей,

$$\begin{aligned} \delta, \gamma &= (\delta_1, \gamma_1; \delta_2, \gamma_2; \dots; \delta_N, \gamma_N), \\ \ell, S &= (\ell_1, S_1; \ell_2, S_2; \dots; \ell_N, S_N). \end{aligned}$$

Например, чтобы представить ЭЭС как совокупность  $N$  подсистем, необходимо отрезать  $L$  ветви.

Согласно выбранным индексам при разрезывании и отстранении ветви БЭЭС можем писать следующее матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{U}_\delta \\ \dot{U}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_B \\ \dot{U}_B \\ \dot{U}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z'_{ij} & Z'_{i\gamma} & Z'_{iS} \\ Z'_{\delta j} & Z'_{\delta\gamma} & Z'_{\delta S} \\ Z'_{\ell j} & Z'_{\ell\gamma} & Z'_{\ell S} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_j \\ \dot{I}_\gamma \\ \dot{I}_S \end{bmatrix}, \quad (4.1.4)$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_i - \dot{U}_B \\ \dot{U}_\delta - \dot{U}_B \\ \dot{U}_\ell - \dot{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{ij} & Z'_{i\gamma} & Z'_{iS} \\ Z'_{\delta j} & Z'_{\delta\gamma} & Z'_{\delta S} \\ Z'_{\ell j} & Z'_{\ell\gamma} & Z'_{\ell S} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_j \\ \dot{I}_\gamma \\ \dot{I}_S \end{bmatrix}, \quad (4.1.5)$$

где  $\dot{U}_1 - \dot{U}_B$  – комплексные напряжения основных узлов ЭЭС, выявленные по отношению напряжениям базисных узлов;



$(\dot{U}_\delta - \dot{U}_B)$ ,  $(\dot{U}_\ell - \dot{U}_B)$  – встречные напряжения узлов по отношению к напряжениям базисных узлов, выявленные при разрезывании ветвей ЭЭС;

$\dot{I}_j$  – комплексные токи основных узлов;

$\dot{I}_\gamma, \dot{I}_S$  – комплексные токи, имеющие противоположные направления встречных узлов;

$Z'_{ij}$  – собственные и взаимные комплексные сопротивления основных узлов;

$Z'_{i\gamma}, Z'_{iS}, Z'_{\delta j}, Z'_{\ell j}$  – напряжения основных и вновьявленных и взаимно-комплексных сопротивлений;

$Z'_{\delta\gamma}, Z'_{\delta S}, Z'_{\ell\gamma}, Z'_{\ell S}$  – собственные и взаимно-комплексные сопротивления вновьявленных узлов.

Представим (4.1.5) матрицу в открытом виде

$$\begin{aligned}\dot{U}_i - \dot{U}_B &= Z'_{ij} \dot{I}_j + Z'_{i\gamma} \dot{I}_\gamma + Z'_{iS} \dot{I}_S, \\ \dot{U}_\delta - \dot{U}_B &= Z'_{\delta j} \dot{I}_j + Z'_{\delta\gamma} \dot{I}_\gamma + Z'_{\delta S} \dot{I}_S, \\ \dot{U}_\ell - \dot{U}_B &= Z'_{\ell j} \dot{I}_j + Z'_{\ell\gamma} \dot{I}_\gamma + Z'_{\ell S} \dot{I}_S.\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

Поскольку  $\dot{I}_S = -\dot{I}_\gamma$ , (4.1.6) матричное выражение примет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{U}_i - \dot{U}_B &= Z'_{ij} \dot{I}_j + (Z'_{i\gamma} - Z'_{iS}) \dot{I}_\gamma, \\ \dot{U}_\delta - \dot{U}_B &= Z'_{\delta j} \dot{I}_j + (Z'_{\delta\gamma} - Z'_{\delta S}) \dot{I}_\gamma, \\ \dot{U}_\ell - \dot{U}_B &= Z'_{\ell j} \dot{I}_j + (Z'_{\ell\gamma} - Z'_{\ell S}) \dot{I}_\gamma.\end{aligned}\tag{4.1.7}$$

Полученное (4.1.7) дает возможность представить уравнение отдельных подсистем в следующем виде:

$$\dot{U}_{i_1} - \dot{U}_B = Z'_{i_1, j_1} \dot{I}_{j_1} + Z_{i_1, M_1} \dot{I}_{1(2N)} + (Z'_{i_1, \gamma_1} - Z'_{i_1, S_1}) \dot{I}_\gamma,\tag{4.1.8}$$

$$\dot{U}_{i_2} - \dot{U}_{M_1-1} = Z'_{i_2, j_2} \dot{I}_{j_2} + Z_{i_2, M_2} \dot{I}_{2(3N)} + (Z'_{i_2, \gamma_2} - Z'_{i_2, S_2}) \dot{I}_\gamma,\tag{4.1.9}$$

.....

$$\dot{U}_{i_N} - \dot{U}_{M_1, N-1} = Z'_{i_N, j_N} \dot{I}_{j_N} + Z_{i_N, M_N} \dot{I}_{N(NN)} + (Z'_{i_N, \gamma_N} - Z'_{i_N, S_N}) \dot{I}_\gamma.\tag{4.1.10}$$

Здесь  $\dot{I}_{j_1}, \dot{I}_{j_2}, \dots, \dot{I}_{j_n}$  являются 1-м, 2-м, ..., N-м, векторами комплексных напряжений радиально связанных подсистемы.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{I}_{2,N} &= \sum_{M_2} \dot{I}_{i_2} + \sum_{M_3} \dot{I}_{i_3} + \dots + \sum_{M_N} \dot{I}_{i_N}, \\
 \Delta \dot{I}_{3,N} &= \sum_{M_3} \dot{I}_{i_3} + \sum_{M_4} \dot{I}_{i_4} + \dots + \sum_{M_N} \dot{I}_{i_{N3}}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \Delta \dot{I}_{N-1,N} &= \sum_{M_N} \dot{I}_{i_N}, \\
 \Delta \dot{I}_{N,N} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 Z'_{i_1 \ell_1} &= Z'_{\ell_1 \gamma_1} - Z'_{\ell_1 S_1}; \\
 Z'_{i_2 \ell_2} &= Z'_{\ell_2 \gamma_2} - Z'_{\ell_2 S_2}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 Z'_{i_N \ell_N} &= Z'_{\ell_N \gamma_N} - Z'_{\ell_N S_N};
 \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

тогда (4.1.8) – (4.1.10) матричные уравнения можно представить в следующем виде:

$$\dot{U}_{i_1} = \dot{U}_B + Z'_{i_1, j_1} \dot{I}_{j_1} + Z_{i_1, M_1} \dot{I}_{1(2N)} + Z'_{i_1, S_1} \dot{I}_\gamma, \tag{4.1.13}$$

$$\dot{U}_{i_2} = \dot{U}_{M-1} + Z'_{i_2, j_2} \dot{I}_{j_2} + Z_{i_2, M_2} \dot{I}_{2(3N)} + Z'_{i_2, S_2} \dot{I}_\gamma, \tag{4.1.14}$$

$$\dots\dots\dots \\
 \dot{U}_{i_N} = \dot{U}_{M_1, N-1} + Z'_{i_N, j_N} \dot{I}_{j_N} + Z_{i_N, M} \dot{I}_{N(NN)} + Z'_{i_N, S_N} \dot{I}_\gamma. \tag{4.1.15}$$

Введем также следующие обозначения:

$$\dot{U}_{Bi_1} = \dot{U}_A + Z_{i_1 M_1} \dot{I}_{1(2N)} + Z_{i_1 \ell_1} \dot{I}_\gamma, \tag{4.1.16}$$

$$\dot{U}_{Bi_2} = \dot{U}_{M-1} + Z_{i_2 M_2} \dot{I}_{2(3N)} + Z_{i_2 \ell_2} \dot{I}_\gamma, \tag{4.1.17}$$

$$\dots\dots\dots \\
 \dot{U}_{Bi_N} = \dot{U}_{M_1, N-1} + Z_{i_N M_1 N} \dot{I}_{N(NN)} + Z_{i_N \ell_N} \dot{I}_\gamma. \tag{4.1.18}$$

Можно отметить, что  $Z_{i_1 M_1}, Z_{i_2 M_2}, \dots, Z_{i_N M_N}$  являются элементами последних столбов I, II и N клеток матрицы (4.1.7).



$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{i_1} \\ \dot{U}_{i_2} \\ \dots \\ \dot{U}_{i_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_{Bi_1} \\ \dot{U}_{Bi_2} \\ \dots \\ \dot{U}_{Bi_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{i_1j_1} & & & \\ & Z_{i_2j_2} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & Z_{i_Nj_N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_{j_1} \\ \dot{I}_{j_2} \\ \dots \\ \dot{I}_{j_N} \end{bmatrix}. \quad (4.1.25)$$

На основе полученного матричного выражения (4.1.25) можно построить диакоптическую математическую модель установившегося режима ЭЭС, для которого прежде всего нужно построить квадратные неособенные подматрицы комплексных сопротивлений узлов  $Z_{i_1j_1}$ ,  $Z_{i_2j_2}$ , ...,  $Z_{i_Nj_N}$ .

Построение данной подматрицы обусловлено обращением квадратных неособенных матриц соответствующих  $Y_{i_1j_1}$ ,  $Y_{i_2j_2}$ , ...,  $Y_{i_Nj_N}$  комплексных проводимостей узлов.

Предлагается новый метод, который, обойдя обращения квадратной неособенной матрицы, обеспечивает построение нужной подматрицы.

## 4.2. Расчет подматриц диакоптических видов

Представим, что требуется построить первую подматрицу  $Z_{i_1j_1}$  (4.1.25). Для этого необходима соответствующая неособенная квадратная матрица порядка  $M_1$ .

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & \vdots & Y_{1,M_1-1} & Y_{1,M_1} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & \vdots & Y_{2,M_1-1} & Y_{2,M_1} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & \vdots & Y_{3,M_1-1} & Y_{3,M_1} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & \vdots & Y_{4,M_1-1} & Y_{4,M_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ Y_{M_1-1,1} & Y_{M_1-1,2} & Y_{M_1-1,3} & Y_{M_1-1,4} & \vdots & Y_{M_1-1,M_1-1} & Y_{M_1-1,M_1} \\ Y_{M_1,1} & Y_{M_1,2} & Y_{M_1,3} & Y_{M_1,4} & \vdots & Y_{M_1-1,M_1} & Y_{M_1,M_1} \end{bmatrix}. \quad (4.2.1)$$

Для построения соответствующей подматрицы  $Z_{i_1j_1}$  по классическому методу нужно просто обращать неособенную квадратную матрицу (4.2.1).

По новому методу обходим данный процесс и действия (4.2.1) представим

$$Z_{11} = [Y_{11}]^{-1}, \quad (4.2.2)$$

$$Z_{22} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4.2.3)$$

$$Z_{33} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4.2.4)$$

$$Z_{44} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4.2.5)$$

.....

$$Z_{M_1 M_1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & \vdots & Y_{1M_1} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & \vdots & Y_{2M_1} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & \vdots & Y_{3M_1} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & \vdots & Y_{4M_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ Y_{M_1 1} & Y_{M_1 2} & Y_{M_1 3} & Y_{M_1 4} & \vdots & Y_{M_1 M_1} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.2.6)$$

Подматрица (4.2.2) составлена из одной комплексной величины, и ее обращение не представляет никакой сложности. Затем нужно обрацать матрицу (4.2.3)

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.2.7)$$

Представим искомую обращенную матрицу в таком виде, в каком представлена первоначальная матрица (4.2.7)

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.2.8)$$

В отношении подматриц (4.2.7) и (4.2.8) можно записать

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.2.9)$$

По (4.2.9) можно составлять следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Y_{11}T_{11} + Y_{12}T_{21} &= 1, \\ Y_{11}T_{12} + Y_{12}T_{22} &= 0, \\ Y_{21}T_{11} + Y_{22}T_{21} &= 0, \\ Y_{21}T_{12} + Y_{22}T_{22} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.10)$$

В результате получим 4 уравнения по отношению к 4 неизвестным  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{21}$ ,  $T_{22}$ . Согласно результату получим

$$\begin{aligned} T_{11} &= Y_{11}^{-1} + Y_{11}^{-1}Y_{12}Y_{21}Y_{11}^{-1}T_{22}, \\ T_{12} &= -Y_{11}^{-1}Y_{12}T_{22}, \\ T_{21} &= -Y_{21}Y_{11}^{-1}T_{22}, \\ T_{22} &= (Y_{22} - Y_{21}Y_{11}^{-1}Y_{12})^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Если имеем в виду (4.2.2), тогда (4.2.11) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_{11} &= Z_{11} + Z_{11}Y_{12}Y_{21}Z_{11}T_{22}, \\ T_{12} &= -Z_{11}Y_{12}T_{22}, \\ T_{21} &= -Y_{21}Z_{11}T_{22}, \\ T_{22} &= (Y_{22} - Y_{21}Z_{11}Y_{12})^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Можно отметить, что для получения вида обращенной подматрицы (4.2.3) не требовалось обращение какой-либо матрицы. Для правой части записано только одно число, обращение которого не представляет никакой сложности.

Таким образом, в (4.2.12) мы воспользовались результатом (4.2.2) первого шага. Сейчас рассмотрим обращение подматрицы (4.2.4), представляя ее в следующем виде:

$$\left[ \begin{array}{c|c} Y'_{22} & Y'_{23} \\ \hline Y'_{32} & Y'_{33} \end{array} \right], \quad (4.2.13)$$

где 
$$Y'_{22} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.2.14)$$

$$Y'_{23} = [Y_{13} \quad Y_{23}]^T, \quad Y'_{32} = [Y_{31} \quad Y_{32}], \quad Y'_{33} = [Y_{33}]. \quad (4.2.15)$$

где T – знак транспонирования.

Здесь искомую матрицу также представим в первоначальном виде

$$\left[ \begin{array}{c|c} T'_{22} & T'_{23} \\ \hline T'_{32} & T'_{33} \end{array} \right]. \quad (4.2.16)$$

В результате можем написать

$$\left[ \begin{array}{c|c} Y'_{22} & Y'_{23} \\ \hline Y'_{32} & Y'_{33} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} T'_{22} & T'_{23} \\ \hline T'_{32} & T'_{33} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right], \quad (4.2.17)$$

где E – единичная матрица.

Составим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Y'_{22}T'_{22} + Y'_{23}T'_{32} &= E, \\ Y'_{22}T'_{23} + Y'_{23}T'_{33} &= 0, \\ Y'_{32}T'_{22} + Y'_{33}T'_{32} &= 0, \\ Y'_{32}T'_{23} + Y'_{33}T'_{33} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.18)$$

Решим данную клеточную матричную систему по отношению к искомым величинам  $T'_{22}, T'_{23}, T'_{32}, T'_{33}$ :

$$\begin{aligned} T'_{22} &= (Y'_{22})^{-1} + (Y'_{22})^{-1}Y'_{23}Y'_{32}(Y'_{22})^{-1}T'_{33}, \\ T'_{23} &= -(Y'_{22})^{-1}Y'_{23}T'_{33}, \\ T'_{32} &= -Y'_{32}(Y'_{22})^{-1}T'_{33}, \\ T'_{33} &= [Y'_{33} - Y'_{32}(Y'_{22})^{-1}Y'_{23}]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Имея в виду (4.2.3), (4.2.19), получим:

$$\begin{aligned}
 T'_{22} &= Z'_{22} + Z'_{22} Y'_{23} Y'_{32} Z'_{22} T'_{33}, \\
 T'_{23} &= -Z'_{22} Y'_{23} T'_{33}, \\
 T'_{32} &= -Y'_{32} Z'_{22} T'_{33}, \\
 T'_{33} &= [Y'_{33} - Y'_{32} Z'_{22} Y'_{23}]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

Здесь можно отметить, что для обращения матрицы (4.2.13) также не возникло проблем. В этом случае достаточно только воспользоваться полученной матрицей предыдущего шага.

Необходимо отметить, что выражение, записанное в скобках последней формулы (4.2.20), представляет собой одно число, обращение которого несложно.

Тем же образом можно обращаться (4.2.5) и другие матрицы.

Сейчас посмотрим обращение матрицы (4.2.6) порядка  $M_1$ .

Представляем матрицу (4.2.6) в следующем виде:

$$\left[ \begin{array}{c|c} Y'_{M_1-1, M_1-1} & Y'_{M_1-1, M_1} \\ \hline Y'_{M_1, M_1-1} & Y'_{M_1, M_1} \end{array} \right], \tag{4.2.21}$$

где

$$Y'_{M_1-1, M_1-1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \vdots & Y_{1, M_1-1} \\ Y_{21} & Y_{22} & \vdots & Y_{2, M_1-1} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ Y_{M_1-1, 1} & Y_{M_1-1, 2} & \vdots & Y_{M_1-1, M_1-1} \end{bmatrix}, \tag{4.2.22}$$

$$\begin{aligned}
 Y'_{M_1-1, M_1} &= [Y_{1M_1} \quad Y_{2M_1} \quad Y_{3M_1} \quad \dots \quad Y_{M_1-1, M_1}]^T, \\
 Y'_{M_1, M_1-1} &= [Y_{1M_1} \quad Y_{2M_1} \quad Y_{3M_1} \quad \dots \quad Y_{M_1, M_1-1}], \\
 Y'_{M_1, M_1} &= Y_{M_1, M_1}.
 \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Представим искомую противоположную матрицу по отношению к (4.2.21) в следующем виде:

$$\left[ \begin{array}{c|c} T'_{M_1-1, M_1-1} & T'_{M_1-1, M_1} \\ \hline T'_{M_1, M_1-1} & T'_{M_1, M_1} \end{array} \right]. \tag{4.2.24}$$



Согласно данному условию

$$\left[ \begin{array}{c|c} Y'_{M_1-1, M_1-1} & Y'_{M_1-1, M_1} \\ \hline Y'_{M_1, M_1-1} & Y'_{M_1, M_1} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} T'_{M_1-1, M_1-1} & T'_{M_1-1, M_1} \\ \hline T'_{M_1, M_1-1} & T'_{M_1, M_1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (4.2.25)$$

При построении системы четыре клеточных матричных уравнений с помощью четырех неизвестных клеток и, решая их совместным образом, получим следующие выражения искомых противоположных матриц отдельных клеток:

$$\begin{aligned} T'_{M_1-1, M_1-1} &= (Y'_{M_1-1, M_1-1})^{-1} + (Y'_{M_1-1, M_1-1})^{-1} Y'_{M_1-1, M_1} Y'_{M_1, M_1-1} (Y'_{M_1-1, M_1-1})^{-1} T'_{M_1, M_1}, \\ T'_{M_1-1, M_1} &= -(Y'_{M_1-1, M_1-1})^{-1} Y'_{M_1-1, M_1} T'_{M_1, M_1}, \\ T'_{M_1, M_1-1} &= -Y'_{M_1, M_1-1} (Y'_{M_1-1, M_1-1})^{-1} T'_{M_1, M_1}, \\ T'_{M_1, M_1} &= [Y'_{M_1, M_1} - Y'_{M_1, M_1-1} (Y'_{M_1-1, M_1-1})^{-1} Y'_{M_1-1, M_1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Согласно предыдущей постановке задачи очевидно, что

$$Z_{M_1-1, M_1-1} = (Y'_{M_1-1, M_1-1})^{-1} \quad (4.2.27)$$

и если иметь в виду (4.2.26), то последняя примет следующий вид:

$$\begin{aligned} T'_{M_1-1, M_1-1} &= Z'_{M_1-1, M_1-1} + Z'_{M_1-1, M_1-1} Y'_{M_1-1, M_1} Y'_{M_1, M_1-1} Z'_{M_1-1, M_1-1} T'_{M_1, M_1}, \\ T'_{M_1-1, M_1} &= -Z'_{M_1-1, M_1-1} Y'_{M_1-1, M_1} T'_{M_1, M_1}, \\ T'_{M_1, M_1-1} &= -Y'_{M_1, M_1-1} Z'_{M_1-1, M_1-1} T'_{M_1, M_1}, \\ T'_{M_1, M_1} &= [Y'_{M_1, M_1} - Y'_{M_1, M_1-1} Z'_{M_1-1, M_1-1} Y'_{M_1-1, M_1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Отметим, что даже в этом случае не возникает проблема обращения какой-либо матрицы, кроме этого, как видим из (4.2.28) первой части  $T'_{i_1, i_2}$ , можно представить себе одну комплексную величину, число, обращение которого не требует сложности.

Представим выражение (4.2.28) в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_{M_1-1, M_1-1} &= Z_{M_1-1, M_1-1} + Z_{M_1-1, M_1-1} Y_{M_1-1, M_1} Y_{M_1, M_1-1} Z_{M_1-1, M_1-1} T_{M_1, M_1}, \\ T_{M_1-1, M_1} &= -Z_{M_1-1, M_1-1} Y_{M_1-1, M_1} T_{M_1, M_1}, \\ T_{M_1, M_1-1} &= -Y_{M_1, M_1-1} Z_{M_1-1, M_1-1} T_{M_1, M_1}, \\ T_{M_1, M_1} &= [Y_{M_1, M_1} - Y_{M_1, M_1-1} Z_{M_1-1, M_1-1} Y_{M_1-1, M_1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Если введем следующие обозначения

$$\alpha_{M_1-1, M_1} = Z_{M_1-1, M_1-1} Y_{M_1-1, M_1}, \quad (4.2.30)$$

$$\beta_{M_1, M_1-1} = Y_{M_1, M_1-1} Z_{M_1-1, M_1-1}, \quad (4.2.31)$$

тогда выражение (4.2.29) примет следующий вид:

$$T_{M_1-1, M_1-1} = Z_{M_1-1, M_1-1} + \alpha_{M_1-1, M_1} \beta_{M_1, M_1-1} T_{M_1, M_1}, \quad (4.2.32)$$

$$T_{M_1-1, M_1} = -\alpha_{M_1-1, M_1} T_{M_1, M_1}, \quad (4.2.33)$$

$$T_{M_1, M_1-1} = -\beta_{M_1, M_1-1} T_{M_1, M_1}, \quad (4.2.34)$$

$$T_{M_1, M_1} = [Y_{M_1, M_1} - \beta_{M_1-1, M_1-1} Y_{M_1-1, M_1}]^{-1}. \quad (4.2.35)$$

Необходимо отметить, что выражение (4.2.35) можно представить в следующем виде:

$$T_{M_1, M_1} = [Y_{M_1, M_1} - Y_{M_1, M_1-1} \alpha_{M_1-1, M_1}]^{-1}. \quad (4.2.36)$$

Структура приведенных выражений (4.2.32) и (4.2.35) показывает, что для определения численных значений искомым матриц необходимо только умножить несколько матриц. Этот вычислительный процесс несложен.

Фактически мы описывали метод получения подматрицы  $Z_{i_1 j_1}$ , и таким же образом можно построить подматрицы  $Z_{i_2 j_2}, \dots, Z_{i_N j_N}$ .

### 4.3. Построение расчетной диакоптической матрицы $Z$ и ее коррекция

В основе построения диакоптической математической модели лежит расчетная матрица  $Z$ , которая имеет следующий вид:

$Z_1$		$\Delta Z_1$	(4.3.1)
	$Z_2$	$\Delta Z_2$	
	...	...	
	$Z_N$	$\Delta Z_N$	
		$\Delta Z_{\mathcal{L}} + Z_{\mathcal{L}}$	

Если матрица  $Z_1$  составлена по отношению к единственному базисному узлу, то  $Z_2$  – по отношению к пограничному узлу первой подсистемы. Матрица  $Z_N$  последней N-й подсистемы составляется по отношению к пограничному узлу предпоследней подсистемы. Затем строятся подсистемы  $\Delta Z_1, \Delta Z_2, \dots, \Delta Z_N$ , число строк которых характеризуется числом узлов подматриц, а число столбцов – числом обрубленных ветвей.

Каждый столбец подматрицы определяется различием двух столбцов, номера которых совпадают с номерами тех узлов, между которыми находились удаленные ветви.

Целесообразно каждый столбец прямоугольной подматрицы  $\Delta Z(\Delta Z_1, \Delta Z_2, \dots, \Delta Z_N)$  пронумеровать, они являются начальными и конечными номерами удаленной линии.  $\Delta Z_{\mathcal{L}} + Z_{\mathcal{L}}$  – квадратная матрица, порядок которой определяется по числу удаленных линий, притом  $\Delta Z_{\mathcal{L}}$  является полным прямоугольником, а  $Z_{\mathcal{L}}$  – диагональным прямоугольником.

Каждая строка матрицы  $\Delta Z_{\mathcal{L}}$  определяется различием двух строк прямоугольной матрицы  $\Delta Z$ , номера которых совпадают с номерами тех чисел, между которыми находятся удаленные ветви.

Во время построения матрицы  $\Delta Z_{\mathcal{L}}$  при выборе соответствующих строк подматрицы  $\Delta Z$  необходимо иметь в виду то, что к элементам каждой последующей подматрицы по столбцам нужно прибавить элементы последних строк предыдущей подматрицы. Этим и завершается построение расчетной матрицы  $Z$ .

Предположим, что делаются структурные изменения в первоначальной ЭЭС в соответствующих узлах по причине подключения отдельных ветвей. В этом случае возникает проблема коррекции расчетной матрицы  $Z$ .

Проблема коррекции может быть как в первой подсистеме, где находятся базисные узлы, так и в других радиально связанных подсистемах.

Рассмотрим те случаи, когда изменения имеют место в первой подсистеме.

В первой подсистеме структурные изменения наблюдаются между ветвями из-за подключения или отключения отдельных ветвей, в результате чего меняется матрица узловых сопротивлений  $Z_{i_1 j_1}$ .

В случае если одновременно подключаются две ветви между узлами А – В и С – D, то новая матрица  $Z_{i_1 j_1}^H$  определяется следующим выражением:

$$Z_{i_1 j_1}^H = Z_{i_1 j_1}^H + \Delta Z_{i_1 j_1}^D, \quad (4.3.2)$$

где  $Z_{i_1 j_1}^H$  представляет собой первоначальную матрицу, то есть до подключения новых ветвей, а  $\Delta Z_{i_1 j_1}^D$  – дополнительную матрицу, которая выявляется вследствие подключения новых отмеченных ветвей.

Элементы предварительной матрицы определяются согласно следующему выражению:

$$Z_{ij}^L = \frac{1}{\Delta} \left\{ (Z_{iA} - Z_{iB}) [\Delta_{CD} (-Z_{Aj} + Z_{Bj}) + \Delta_{ABCD} (-Z_{Cj} + Z_{Dj})] + (Z_{iC} - Z_{iD}) [\Delta_{ABCD} (-Z_{Aj} + Z_{Bj}) + \Delta_{AB} (-Z_{Cj} + Z_{Dj})] \right\}, \quad (4.3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} &= Z^{AB} + Z_{AA} + Z_{BB} - 2Z_{AB}, \\ \Delta_{CD} &= Z^{CD} + Z_{CC} + Z_{DD} - 2Z_{CD}, \\ \Delta_{ABCD} &= Z_{BC} + Z_{AD} - Z_{BD} - Z_{AC}, \\ \Delta &= \Delta_{AB} \cdot \Delta_{CD} - \Delta_{ABCD}^2, \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

где  $Z^{AB}$ ,  $Z^{CD}$  – комплексные сопротивления ветвей, которые подключаются между узлами А – В и С – D;

$Z_{iA}$ ,  $Z_{iC}$ ,  $Z_{Aj}$ ,  $Z_{Cj}$  – комплексные сопротивления между теми же основными узлами, к которым подключается начало каждой ветви;

$Z^{AB}$ ,  $Z^{CD}$ ;  $Z_{iB}$ ,  $Z_{iD}$ ,  $Z_{Bj}$ ,  $Z_{Dj}$  – комплексные сопротивления между теми же основными узлами, к которым подключаются концы ветвей  $Z^{AB}$ ,  $Z^{CD}$ ;

$Z_{AA}$ ,  $Z_{CC}$ ,  $Z_{AC}$ ,  $Z_{CA}$  – комплексные сопротивления, которые подключаются между узлами и к которым подключается начало каждой ветви;

$Z_{BB}$ ,  $Z_{DD}$ ,  $Z_{BD}$ ,  $Z_{DB}$  – комплексные сопротивления между узлами, к которым подключаются концы этих ветвей;

$Z_{AB}$ ,  $Z_{CD}$  – комплексные сопротивления, происходящие между узлами, к которым подключаются начало и конец этих ветвей.

Предположим, что одновременно подключаются не две ветви, а одна между узлами, тогда выражение (4.3.3) примет следующий вид:

$$Z_{ij}^L = \frac{(Z_{iA} - Z_{iB})(-Z_{Aj} + Z_{Bj})}{Z^{AB} + Z_{AA} + Z_{BB} - 2Z_{AB}}, \quad (4.3.5)$$

где  $Z_{iA}$ ,  $Z_{iB}$ ,  $Z_{Aj}$ ,  $Z_{Bj}$  представляют собой комплексные сопротивления между узлами А и В;

$Z_{AA}$ ,  $Z_{BB}$  – частные комплексные сопротивления между узлами А и В;

$Z_{AB}$  – продольные комплексные сопротивления между теми же самыми узлами.

В результате меняется квадратная матрица узловых сопротивлений первой подсистемы, которая составляется из единственного базисного узла и которую обозначим  $Z'_{i_1 j_1}$ . Квадратные матрицы узловых сопротивлений отдельных подсистем, т. е.  $Z_{i_2 j_2}$ ,  $Z_{i_3 j_3}$ , ...,  $Z_{i_N j_N}$ , остаются неизменными, и искомая расчетная уточняющая матрица принимает следующий вид:

$Z'_{i_1 j_1}$				$\Delta Z'_{i_1 \ell}$
	$Z_{i_2 j_2}$			$\Delta Z_{i_2 \ell}$
		.....		.....
			$Z_{i_N j_N}$	$\Delta Z_{i_N \ell}$
				$\Delta Z'_{\ell} + Z_{\ell}$

(4.3.6)

Как можно заметить,  $\Delta Z'_{i_1 \ell}$  – прямоугольная подматрица (4.3.6), тоже меняется по причине изменения матрицы  $Z_{i_1 j_1}$ . Для других  $\Delta Z_{i_2 \ell}$ ,  $\Delta Z_{i_3 \ell}$ , ..., прямоугольных подматриц необходимо сказать следующее: если  $i_2 \ell$ ,  $i_3 \ell$  больше чем номера удаленных ветвей, тогда они остаются устойчивыми, в противном случае они тоже меняются.

Прямоугольная подматрица  $\Delta Z_{i_N \ell}$  остается неизменной, и квадратная подматрица  $\Delta Z'_{\ell}$  строится по вышеприведенному методу.

Рассмотрим тот случай, когда изменения происходят в любой подсистеме типа  $k$ .

Если квадратная матрица  $Z_{i_1 j_1}$  первой подсистемы узловых сопротивлений построена относительно единственного и базисного узла, то то же самое не можем сказать относительно других матриц узловых сопротивлений подсистемы.

Каждый  $Z_{i_k j_k}$  ( $k \neq 1$ ) следующей матрицы узловых сопротивлений подсистемы типа  $k$  строится по отношению к пограничным узлам предыдущей подсистемы ( $k - 1$ ).

Для реализации структурных изменений матрицы узловых сопротивлений подсистемы типа  $k$  необходимо ее привести в форму пограничного узла, которая принадлежит данной подсистеме.

Для этого достаточно из элементов первоначальной расчетной матрицы (4.3.1) удалить величину взаимно комплексных сопротивлений, которая связывает подсистему типа  $k$  с подсистемой  $[k - 1]$ , т. е.

$$Z_{k(k-1)} = Z_{(k-1)k}.$$

После этого можно реализовать структурные изменения рассматриваемой подсистемы типа  $k$ .

Структурное изменение, рассматриваемое в подсистеме  $k$ , может возникнуть даже из-за подключения или отключения отдельных ветвей.

В случае если одновременно подключаются 2 ветви, можно воспользоваться следующим выражением:

$$Z_{i_k j_k}^H = Z_{i_k j_k}^П + \Delta Z_{i_k j_k}^Д. \quad (4.3.7)$$

Элементы дополнительной матрицы  $\Delta Z_{i_k j_k}^Д$  определяются выражениями (4.3.3) и (4.3.4), а в том случае, когда подключается одна ветвь, нужно воспользоваться выражением (4.3.5).

После завершения построения матрицы  $Z_{i_k j_k}$  узловых сопротивлений типа  $k$  необходимо ее привести в первоначальный вид, т. е. нужно ее построить по отношению к граничной точке подсистемы ( $k - 1$ ). Для этого нужно прибавить элементы полученной новой подматрицы  $Z_{i_k j_k}$  комплексному сопротивлению продольной ветви, которые связывают подсистему ( $k - 1$ ) с подсистемой типа  $k$ .

Если ее обозначим  $Z'_{i_k j_k}$ , то искомая уточненная расчетная матрица будет иметь следующий вид:

$Z_{i_1 j_1}$			$\Delta Z_{i_1 \ell}$
	.....		.....
		$Z'_{i_k j_k}$	$\Delta Z'_{i_k \ell}$
		.....	.....
		$Z_{i_N j_N}$	$\Delta Z_{i_N \ell}$
			$\Delta Z'_{\ell} + Z_{\ell}$

(4.3.8)

Из (4.3.8) видно, что соответственно меняется  $\Delta Z'_{i_k \ell}$ .

Нужно заметить и то, что если такие высокие подматрицы  $\Delta Z_{i_1 \ell}$  не меняются выше  $\Delta Z'_{i_k \ell}$ , то ниже данной подматрицы – меняются, и как всегда не меняется подматрица последней подматрицы.

$\Delta Z'_{\ell}$  – подматрица, которая тоже изменяется, её нужно построить по вышеприведенному методу.

Предложенный метод, обеспечивая во время коррекции расчетной диакоптической матрицы  $Z$  высокую маневренность, также обуславливает высокую маневренность при ее использовании, т. е. во время расчета установившегося режима оптимальной ЭЭС.

Численные исследования показывают, что для коррекции расчетной диакоптической матрицы  $Z$  нужен небольшой вычислительный объем.

#### 4.4. Построение диакоптической модели «Z, P-Q»

Строя диакоптическую матрицу  $Z$  и решая вопрос ее коррекции, мы можем перейти к построению диакоптической математической модели «Z, P-Q», когда для независимых стационарных узлов в качестве исходной информации задаются активные и реактивные мощности.

Для этого необходимо построить системы нелинейных алгебраических уравнений, совокупность которых представляет собой диакоптическую математическую модель установившегося режима ЭЭС.

Если умножим первую систему (4.1.24) системы на комплексно сопряженный ток  $i_{i_1}$ , тогда получим:

$$\begin{aligned}\Phi_{p_{i_1}}(I'_{i_1}, I''_{i_1}) &= P_{i_1} - [P_{B_{i_1}} + \varphi_{p_{i_1}}(I'_{i_1}, I''_{i_1})] = 0, \\ \Phi_{q_{i_1}}(I'_{i_1}, I''_{i_1}) &= Q_{i_1} - [Q_{B_{i_1}} + \varphi_{q_{i_1}}(I'_{i_1}, I''_{i_1})] = 0,\end{aligned}\quad (4.4.1)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_{p_{i_1}}(I'_{i_1}, I''_{i_1}) &= \sum_{i_1}^{M_1} [R_{i_1 j_1} (I'_{i_1} I'_{j_1} + I''_{i_1} I''_{j_1}) + X_{i_1 j_1} (I''_{i_1} I'_{j_1} - I'_{i_1} I''_{j_1})], \\ \varphi_{q_{i_1}}(I'_{i_1}, I''_{i_1}) &= \sum_{i_1}^{M_1} [X_{i_1 j_1} (I'_{i_1} I'_{j_1} + I''_{i_1} I''_{j_1}) - R_{i_1 j_1} (I''_{i_1} I'_{j_1} - I'_{i_1} I''_{j_1})],\end{aligned}\quad (4.4.2)$$

$$\begin{aligned}P_{B_{i_1}} &= U'_{B_{i_1}} I'_{i_1} + U''_{B_{i_1}} I''_{i_1}, \\ Q_{B_{i_1}} &= -(U'_{B_{i_1}} I'_{i_1} - U''_{B_{i_1}} I''_{i_1}).\end{aligned}\quad (4.4.3)$$

Подмодель (4.4.1), полученную для первой подсистемы, нужно реализовать по методу второго порядка или Ньютона – Рафсона, для этого строим следующую квадратную функцию:

$$F_{i_1}(I) = \sum_{i_1} (\Phi_{p_{i_1}}^2 + \Phi_{q_{i_1}}^2), \quad (4.4.4)$$

где

$$I = (I', I''). \quad (4.4.5)$$

Квадратная функция (4.2.4) разлагается в ряд Тейлора

$$F(I) = F(I^0) + \frac{\partial F(I)}{\partial I} \Big|_{I^0} \Delta I + \frac{1}{2} \Delta I^T \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2} \Big|_{I^0} \Delta I + F(I)_B, \quad (4.4.6)$$

где  $F(I)_B$  – сумма слагаемых производных выше второго порядка ряда Тейлора; T – знак транспонирования.

Если пренебречь слагаемой  $F(I)_B$ , тогда ряд (4.4.6) примет следующий вид:

$$F(I) = F(I^0) + \frac{\partial F(I)}{\partial I} \Big|_{I^0} \Delta I + \frac{1}{2} \Delta I^T \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2} \Big|_{I^0} \Delta I. \quad (4.4.7)$$

Необходимо найти такой прирост  $\Delta I$ , который будет минимизировать функцию (4.4.7), и соответственно нужное условие запишется в следующем виде:



$$\frac{\partial}{\partial \Delta I} \left[ F(I^0) + \frac{\partial F(I)}{\partial I} \Big|_{I^0} \Delta I + \frac{1}{2} \Delta I^T \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2} \Big|_{I^0} \Delta I \right] = 0. \quad (4.4.8)$$

Учитывая то, что производное первой функции выражения (4.4.8) равняется 0, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta I} \left[ \frac{\partial F(I)}{\partial I} \Big|_{I^0} \Delta I + \frac{1}{2} \Delta I^T \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2} \Big|_{I^0} \Delta I \right] = 0. \quad (4.4.9)$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial F(I)}{\partial I} \Big|_{I^0} \Delta I + \frac{1}{2} \Delta I^T \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2} \Big|_{I^0} \Delta I = 0. \quad (4.4.10)$$

Можно заметить, что в результате получим выражения

$$\left[ \frac{\partial F(I)}{\partial I} \right] = G(I), \quad (4.4.11)$$

которое называется столбовой матрицей градиента от заданной функции  $F(I)$ , и

$$\left[ \frac{\partial^2 F(I)}{\partial I^2} \right] = H(I), \quad (4.4.12)$$

которое называется матрицей Гессе и представляет собой неособенную квадратную матрицу, имеющую элементы частных производных второго порядка. Тогда выражение (4.4.10) примет следующий вид:

$$G(I) + H(I) \Delta I = 0. \quad (4.4.13)$$

Из полученного выражения (4.4.13) определим  $\Delta I$ :

$$\Delta I = -[H(I)]_{I^0}^{-1} [G(I)]_{I^0}. \quad (4.4.14)$$

Фактически (4.4.14) представляет собой приращение коррекции вектора.

Если обозначим новый вектор  $I^1$ , т. е. ее значения для первого шага, тогда можем написать

$$[I]^1 = [I]^0 + [\Delta I], \quad (4.4.15)$$

или

$$[I]^1 = [I]^0 - [H(I)]_{I^0}^{-1} \cdot G(I). \quad (4.4.16)$$

Для первой подсистемы (4.4.16) в развернутой форме принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} I'_{i_1, k_1} \\ \vdots \\ I''_{i_1, k_1} \end{bmatrix}^{I+1} = \begin{bmatrix} I'_{i_1, k_1} \\ \vdots \\ I''_{i_1, k_1} \end{bmatrix}^I - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(I_{i_1})}{\partial I'_{i_1, k_1} \partial I'_{i_1, \ell_1}} & \frac{\partial^2 F(I_{i_1})}{\partial I'_{i_1, k_1} \partial I''_{i_1, \ell_1}} \\ \frac{\partial^2 F(I_{i_1})}{\partial I''_{i_1, k_1} \partial I'_{i_1, \ell_1}} & \frac{\partial^2 F(I_{i_1})}{\partial I''_{i_1, k_1} \partial I''_{i_1, \ell_1}} \end{bmatrix}_I^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F(I_{i_1})}{\partial I'_{i_1, \ell_1}} \\ \frac{\partial F(I_{i_1})}{\partial I''_{i_1, \ell_1}} \end{bmatrix}. \quad (4.4.17)$$

Реализуя первый шаг, или итерацию I подсистемы, определяем компоненты комплексных токов, соответственно определяем и комплексные токи.

В результате у нас будет комплексный ток узла  $M_1$  второй подсистемы и можем определить комплексное напряжение  $\dot{U}_1$ . Имея  $\dot{U}_{M_1}$ , определяем  $\dot{U}_{Bi_2}$  и строим математическую подмодель второй подсистемы

$$\begin{cases} \Phi_{pi_2}(I'_{i_2}, I''_{i_2}) = P_{i_2} - [P_{Bi_2} + \varphi_{pi_2}(I'_{i_2}, I''_{i_2})] = 0, \\ \Phi_{qi_2}(I'_{i_2}, I''_{i_2}) = Q_{i_2} - [Q_{Bi_2} + \varphi_{qi_2}(I'_{i_2}, I''_{i_2})] = 0, \end{cases} \quad (4.4.18)$$

$$\text{где } \begin{cases} \varphi_{pi_2}(I'_{i_2}, I''_{i_2}) = \sum_{i_2}^{M_2} [R_{i_2 j_2} (I'_{i_2} I'_{j_2} + I''_{i_2} I''_{j_2}) + X_{i_2 j_2} (I''_{i_2} I'_{j_2} - I'_{i_2} I''_{j_2})], \\ \varphi_{qi_2}(I'_{i_2}, I''_{i_2}) = \sum_{i_2}^{M_2} [X_{i_2 j_2} (I'_{i_2} I'_{j_2} + I''_{i_2} I''_{j_2}) - R_{i_2 j_2} (I''_{i_2} I'_{j_2} - I'_{i_2} I''_{j_2})]. \end{cases} \quad (4.4.19)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P_{Bi_2} &= U'_{Bi_2} I'_{i_2} + U''_{Bi_2} I''_{i_2}, \\ Q_{Bi_2} &= -(U'_{Bi_2} I'_{i_2} - U''_{Bi_2} I''_{i_2}). \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Полученную математическую подмодель (4.4.18) также нужно реализовать по методу второго порядка или по методу Ньютона – Рафсона, для неё строим следующую квадратичную функцию:

$$F_{i_2}(I) = \sum_{i_2} (\Phi_{pi_2}^2 + \Phi_{qi_2}^2). \quad (4.4.21)$$

Поступая так же с (4.4.21), как и в предыдущем случае для математической подмодели второй подсистемы, получим следующее рекуррентное выражение:

$$\begin{bmatrix} I'_{i_2, k_2} \\ \vdots \\ I''_{i_2, k_2} \end{bmatrix}^{I+1} = \begin{bmatrix} I'_{i_2, k_2} \\ \vdots \\ I''_{i_2, k_2} \end{bmatrix}^I - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(I_{i_2})}{\partial I'_{i_2, k_2} \partial I'_{i_2, \ell_2}} & \frac{\partial^2 F(I_{i_2})}{\partial I'_{i_2, k_2} \partial I''_{i_2, \ell_2}} \\ \frac{\partial^2 F(I_{i_2})}{\partial I''_{i_2, k_2} \partial I'_{i_2, \ell_2}} & \frac{\partial^2 F(I_{i_2})}{\partial I''_{i_2, k_2} \partial I''_{i_2, \ell_2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F(I_{i_2})}{\partial I'_{i_2, \ell_2}} \\ \frac{\partial F(I_{i_2})}{\partial I''_{i_2, \ell_2}} \end{bmatrix}. \quad (4.4.22)$$

Реализуя первый шаг, или итерацию, получим комплексные токи узлов второй подсистемы, а также комплексные токи  $M_2$  для узлов третьей подсистемы.

Определяя комплексное напряжение  $M_2$  узла, можем построить математическую подмодель третьей подсистемы и т. д.

Реализуя математическую подмодель предпоследней подсистемы, можем определить  $U_{Bi_N}$  и построить математическую подмодель последней подсистемы.

$$\begin{cases} \Phi_{pi_N}(I'_{i_N}, I''_{i_N}) = P_{i_N} - [P_{Bi_N} + \Phi_{pi_N}(I'_{i_N}, I''_{i_N})] = 0, \\ \Phi_{qi_N}(I'_{i_N}, I''_{i_N}) = Q_{i_N} - [Q_{Bi_N} + \Phi_{qi_N}(I'_{i_N}, I''_{i_N})] = 0, \end{cases} \quad (4.4.23)$$

где

$$\begin{cases} \Phi_{pi_N}(I'_{i_N}, I''_{i_N}) = \sum_{i_N}^{M_N} [R_{i_N j_N} (I'_{i_N} I'_{j_N} + I''_{i_N} I''_{j_N}) + X_{i_N j_N} (I''_{i_N} I'_{j_N} - I'_{i_N} I''_{j_N})], \\ \Phi_{qi_N}(I'_{i_N}, I''_{i_N}) = \sum_{i_N}^{M_N} [X_{i_N j_N} (I'_{i_N} I'_{j_N} + I''_{i_N} I''_{j_N}) - R_{i_N j_N} (I''_{i_N} I'_{j_N} - I'_{i_N} I''_{j_N})]. \end{cases} \quad (4.4.24)$$

С другой стороны,

$$\begin{cases} P_{Bi_N} = U'_{Bi_N} I'_{i_N} + U''_{Bi_N} I''_{i_N}, \\ Q_{Bi_N} = -(U'_{Bi_N} I'_{i_N} - U''_{Bi_N} I''_{i_N}). \end{cases} \quad (4.4.25)$$

Полученную математическую подмодель (4.4.23) реализуем снова по методу второго порядка или Ньютона – Рафсона, и соответствующая квадратичная функция представляется в следующем виде:

$$F_{i_N}(I) = \sum_{i_N} (\Phi_{pi_N}^2 + \Phi_{qi_N}^2). \quad (4.4.26)$$

Разлагая (4.4.26) в ряд Тейлора и делая соответствующие модификации, для реализации математической подмодели (4.4.23) получим следующее рекуррентное выражение:

$$\begin{bmatrix} I'_{i_N, k_N} \\ \dots \\ I''_{i_N, k_N} \end{bmatrix}^{I+1} = \begin{bmatrix} I'_{i_N, k_N} \\ \dots \\ I''_{i_N, k_N} \end{bmatrix}^I - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(I_{i_N})}{\partial I'_{i_N, k_N} \partial I'_{i_N, \ell_N}} & \frac{\partial^2 F(I_{i_2})}{\partial I'_{i_N, k_N} \partial I''_{i_N, \ell_N}} \\ \frac{\partial^2 F(I_{i_2})}{\partial I''_{i_N, k_N} \partial I'_{i_N, \ell_N}} & \frac{\partial^2 F(I_{i_2})}{\partial I''_{i_N, k_N} \partial I''_{i_N, \ell_N}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F(I_{i_2})}{\partial I'_{i_N, \ell_N}} \\ \frac{\partial F(I_{i_2})}{\partial I''_{i_N, \ell_N}} \end{bmatrix}. \quad (4.4.27)$$

Сейчас необходимо получить аналитические выражения частных производных, входящих в состав рекуррентных выражений.

#### 4.5. Получение аналитических выражений с составляющими частных производных рекуррентных выражений

Полученные аналитические выражения составляющих частных производных, входящих в рекуррентное выражение (4.4.17), определяются согласно квадратичной функции (4.4.4). Частные производные, входящие в состав рекуррентных выражений (4.4.22) и (4.4.27), определяются соответственно аналитическим видам (4.4.18) и (4.4.23).

Поскольку частные производные, входящие в состав рекуррентных выражений (4.4.17), (4.4.22) и (4.4.27), имеют тот же вид, то мы представим их в обобщенном виде, предполагая, что

$$i, j = (i_1, j_1; i_2, j_2; \dots; i_N, j_N). \quad (4.5.1)$$

Частные производные первого порядка, т. е. элементы столбовой матрицы градиентов, определяются

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial I'_i} &= 2 \sum_j^M \left( \Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_i} + \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I'_i} \right), \\ \frac{\partial F_i}{\partial I''_i} &= 2 \sum_j^M \left( \Phi_{pj} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I''_i} + \Phi_{qj} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_i} \right). \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Частные производные второго порядка, в данном случае элементы матрицы Гессе, определяются

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i'^2} &= 2 \sum_j^M \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \right)^2 + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'^2} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'^2} \right], \\ \frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i''^2} &= 2 \sum_j^M \left[ \left( \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} \right)^2 + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i''^2} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i''^2} \right], \\ \frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i' \partial I_i''} &= 2 \sum_j^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_i''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_i''} \right], \\ i \neq j \\ \frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i' \partial I_j'} &= 2 \sum_j^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j'} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j'} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j'} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j'} \right], \quad (4.5.3) \\ i \neq j \\ \frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i'' \partial I_j''} &= 2 \sum_j^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i''} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'' \partial I_j''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'' \partial I_j''} \right], \\ i \neq j \\ \frac{\partial^2 F_i}{\partial I_i' \partial I_j''} &= 2 \sum_j^M \left[ \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I_j''} + \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_i'} \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I_j''} + \Phi_{pj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j''} + \Phi_{qj} \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i' \partial I_j''} \right]. \end{aligned}$$

Как можно заметить из (4.5.2) и (4.5.3), кроме выражений частных производных первого и второго порядка в них также входят соответствующие производные функции  $\Phi_{pi}$  и  $\Phi_{qi}$ .

Для получения выражений частных производных указанных функций целесообразно представить их в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{pi}(I_i', I_i'') &= P_i - \left\{ (U'_{Bi} I_i' + U''_{Bi} I_i'') + R_{i,i} (I_i'^2 + I_i''^2) + \right. \\ &\left. + \sum_i [R_{i,j} (I_i' I_j' + I_i'' I_j'') + X_{i,j} (I_i'' I_j' - I_i' I_j'')] \right\} = 0, \quad (4.5.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{qi}(I_i', I_i'') &= Q_i - \left\{ (U''_{Bi} I_i'' - U'_{Bi} I_i') + R_{i,i} (I_i'^2 + I_i''^2) + \right. \\ &\left. + \sum_i [X_{i,j} (I_i' I_j' + I_i'' I_j'') - R_{i,j} (I_i'' I_j' - I_i' I_j'')] \right\} = 0. \quad (4.5.5) \end{aligned}$$

Согласно выражениям (4.5.4) и (4.5.5) можем получить частные производные первого и второго порядка, которые соответственно входят в состав рекуррентных выражений.

Частные производные первого порядка определяются:

– при равных индексах

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I'_i} &= - \left[ U'_{Bi} + 2R_{i,i}I'_i + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} (R_{i,j}I'_j - X_{i,j}I''_j) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I''_i} &= - \left[ U''_{Bi} + 2R_{i,i}I''_i + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} (R_{i,j}I''_j + X_{i,j}I'_j) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I'_i} &= - \left[ -U'_{Bi} + 2X_{i,i}I'_i + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} (X_{i,j}I'_j + R_{i,j}I''_j) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I''_i} &= - \left[ U''_{Bi} + 2X_{i,i}I''_i + \sum_{\substack{j \\ j \neq i}} (X_{i,j}I''_j - R_{i,j}I'_j) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_j} &= - \left[ U'_{Bj} + 2R_{j,j}I'_j + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} (R_{j,i}I'_i - X_{j,i}I''_i) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I''_j} &= - \left[ U''_{Bj} + 2R_{j,j}I''_j + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} (R_{j,i}I''_i + X_{j,i}I'_i) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I'_j} &= - \left[ -U'_{Bj} + 2X_{j,j}I'_j + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} (X_{j,i}I'_i + R_{j,i}I''_i) \right], \\
 \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_j} &= - \left[ U''_{Bj} + 2X_{j,j}I''_j + \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} (X_{j,i}I''_i - R_{j,i}I'_i) \right].
 \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

– при разных индексах:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I'_j} &= -(R_{i,j}I'_i + X_{i,j}I''_i), & \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I'_i} &= -(R_{j,i}I'_j + X_{j,i}I''_j), \\
\frac{\partial \Phi_{pi}}{\partial I''_j} &= -(R_{i,j}I''_i - X_{i,j}I'_i), & \frac{\partial \Phi_{pj}}{\partial I''_i} &= -(R_{j,i}I''_j - X_{j,i}I'_j), \\
\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I'_j} &= -(X_{i,j}I'_i - R_{i,j}I''_i), & \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I''_i} &= -(-X_{j,i}I'_j - R_{j,i}I''_j), \\
\frac{\partial \Phi_{qi}}{\partial I''_j} &= -(X_{i,j}I''_i + R_{i,j}I'_i), & \frac{\partial \Phi_{qj}}{\partial I'_i} &= -(X_{j,i}I''_j + R_{j,i}I'_j).
\end{aligned} \tag{4.5.7}$$

Частные производные второго порядка определяются

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_i'^2} &= \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I_i''^2} = -2R_{i,i}, & \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j'^2} &= \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_j''^2} = -2R_{j,j}, \\
\frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_i'^2} &= \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I_i''^2} = -2X_{i,i}, & \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j'^2} &= \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_j''^2} = -2X_{j,j}, \\
\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i'^2} &= \frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I_i''^2} = 0, & \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i'^2} &= \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I_i''^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I'_i \partial I''_i} &= \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I'_j \partial I''_j} = 0, & \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I'_i \partial I''_i} &= \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I'_j \partial I''_j} = 0, \\
\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I'_i \partial I'_j} &= \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I''_j \partial I''_i} = -R_{j,i}, & \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I'_i \partial I'_j} &= \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I''_j \partial I''_i} = X_{j,i}, \\
\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I''_i \partial I''_j} &= \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I''_j \partial I''_i} = -R_{j,i}, & \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I''_i \partial I''_j} &= \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I''_j \partial I''_i} = -X_{j,i}, \\
\frac{\partial^2 \Phi_{pj}}{\partial I'_i \partial I''_j} &= \frac{\partial^2 \Phi_{pi}}{\partial I'_j \partial I''_i} = -X_{j,i}, & \frac{\partial^2 \Phi_{qj}}{\partial I'_i \partial I''_j} &= \frac{\partial^2 \Phi_{qi}}{\partial I'_j \partial I''_i} = R_{j,i}.
\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Энергетическая система представляет собой ...
2. Электрическая часть энергосистемы – это ...
3. Электроэнергетическая система представляет собой ...
4. Система электроснабжения – это ...
5. Узел нагрузки – это ...
6. Чем характеризуется установившийся режим?
7. Возмущение режима – это ...
8. Переходный процесс – это ...
9. Нормальный режим электроэнергетической системы.
10. Аварийный режим работы ЭЭС.
11. Послеаварийный режим работы ЭЭС.
12. Что понимают под нарушением устойчивости электроэнергетической системы?
13. Каковы причины и последствия системных аварий?
14. При расчёте установившихся режимов первоочередной задачей является...
15. Какие математические модели надо построить для решения систем нелинейных алгебраических уравнений?
16. Y-математические модели.
17. Z-математические модели.
18. Y-Z гибридные математические модели.
19. Какие методы применяют при решении систем нелинейных алгебраических уравнений в Y-форме?
20. Какие методы применяют при решении систем нелинейных алгебраических уравнений в Z-форме?
21. Какие методы применяют при решении систем нелинейных алгебраических уравнений в (Y-Z)-форме?
22. Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений в Y- и Z-формах возникает матрица ...
23. Как выбирают независимые и зависимые режимные параметры ЭЭС?



24. Какими режимными параметрами характеризуется узел электрической системы?
25. Узел типа U- $\Psi_u$ . Какие параметры заданы и какие необходимо определить?
26. Узел типа P-U. Какие параметры заданы и какие необходимо определить?
27. Узел типа P-Q. Какие параметры заданы и какие необходимо определить?
28. Почему метод Ньютона – Рафсона признан лучшим методом для решения систем нелинейных алгебраических уравнений установившихся режимов электрических систем?
29. Чем характеризуется порядок квадратной матрицы Якоби?
30. За сколько итераций можно решить соответствующие нелинейные алгебраические уравнения установившихся режимов электрических систем методом Ньютона – Рафсона при Y-форме?
31. Можно ли обращать матрицу, если матрица является квадратной особенной, и чему равняется детерминант матрицы?
32. Уравнения установившихся режимов в Z-форме получаются непосредственно из ...
33. Метод простой итерации для решения уравнений установившегося режима при Z-форме.
34. Метод Ньютона – Рафсона для решения уравнений установившегося режима при Z-форме.
35. Какие режимные параметры необходимо определить при (Y-Z)-форме уравнений для стационарных узлов типа P-U?
36. Какие режимные параметры необходимо определить при (Y-Z)-форме уравнений для стационарных узлов типа P-Q?
37. Какие численные значения устанавливаются после итерации для узлов типа P-U?
38. Какие численные значения устанавливаются после итерации для узлов типа P-Q?
39. Итерационный процесс считается завершённым, если обеспечиваются условия ...
40. За сколько итераций можно обеспечить решение системы нелинейных алгебраических уравнений по методу Ньютона – Рафсона?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современная электроэнергетическая система рассматривается как непрерывно развивающаяся большая и сложная система, состоящая из взаимосвязанных и взаимоуправляемых подсистем и занимающая огромное пространство. Поэтому в современной прикладной науке проблема расчёта установившегося режима ЭЭС была и остаётся актуальной. Одним из решающих моментов при рассмотрении проблемы определения установившегося режима ЭЭС является обеспечение инженерной наглядности для восприятия физических процессов, происходящих как в данном объединении, так и в отдельных его звеньях.

Проблема установившегося режима большой и сложной ЭЭС с математической точки зрения сводится к решению систем нелинейных алгебраических уравнений высокого порядка и представляет серьезный интерес также в современной прикладной математике. Для составления нелинейных алгебраических уравнений высокого порядка электроэнергетическая система представляется в виде радиально связанных подсистем (диакоптической системы) и соответствующие системы нелинейных алгебраических уравнений установившегося режима реализуются методом минимизации.

Построенные диакоптические математические модели позволяют организовать итерационный процесс. Осуществляя один шаг или одну итерацию для каждой подсистемы, которая радиально связана с другими подсистемами, получаем один шаг, или одну итерацию, для полной электроэнергетической системы.

Построена  $Z$ -обобщённая диакоптическая математическая модель, которая представляется в виде совокупности соответствующих

подматриц отдельных подсистем и позволяет построить диакоптические  $Y-Z$  математические модели. На основании  $Y-Z$  диакоптических математических моделей можно построить также обобщённую математическую модель сложной и большой электроэнергетической системы, когда стационарные узлы могут быть типа  $P-Q$ . Построенные диакоптические математические модели обеспечивают высокую наглядность для восприятия физических процессов, происходящих в сложной и большой электроэнергетической системе. Становится возможным осуществлять количественное и качественное исследование любого характера.

В настоящее время исследование различных режимных вопросов большой и сложной электроэнергетической системы должно основываться на рациональном сочетании диакоптики и современной вычислительной техники.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хачатрян, В. С.* Определение собственных и взаимных сопротивлений энергосистемы относительно базисного узла / В. С. Хачатрян // Электричество. – 1963. – № 12. – С. 36 – 98.
2. *Он же.* К вопросу об определении собственных и взаимных сопротивлений энергосистемы относительно базисного узла при изменении конфигурации сети / В. С. Хачатрян // Электричество. – 1964. – № 4. – С. 27 – 30.
3. *Он же.* К методам расчета собственных и взаимных сопротивлений сложных энергосистем / В. С. Хачатрян // Электричество. – 1964. – № 10. – С. 47 – 51.
4. *Он же.* К методам расчета рабочих режимов электрических сетей / В. С. Хачатрян // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1967. – № 2. – С. 37 – 41.
5. *Он же.* Об одном методе обращения матриц, встречающихся в электротехнике / В. С. Хачатрян // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1969. – № 5. – С. 105 – 108.
6. *Мельников, Н. А.* Матричный метод анализа электрических цепей / Н. А. Мельников. – М. : Энергия, 1972. – 215 с.
7. *Хачатрян, В. С.* Диакоптика и задача определения обобщенных параметров больших энергосистем / В. С. Хачатрян, О. А. Суханов // Электричество. – 1973. – № 4. – С. 1 – 10.
8. *Хачатрян, В. С.* Метод и алгоритм расчета установившихся режимов больших электроэнергетических систем / В. С. Хачатрян // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1973. – № 4. – С. 45 – 57.
9. *Он же.* Определение установившихся режимов больших электроэнергетических систем с применением метода Ньютона – Рафсона / В. С. Хачатрян // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1974. – № 4. – С. 36 – 43.
10. *Хачатрян, В. С.* Метод декомпозиции и коррекции Z-матрицы обобщенных параметров электрических систем / В. С. Хачатрян, В. С. Сафарян // Электричество. – 1980. – № 12. – С. 18 – 22.
11. *Хачатрян, В. С.* Метод расчёта установившегося режима электрической системы / В. С. Хачатрян, Э. А. Этмекчян // Известия вузов. Энергетика. – 1989. – № 5. – С. 12 – 18.

12. *Хачатрян, В. С.* Расчет установившихся режимов электрических систем с применением матрицы Гессе при Z-форме задания состояния сети / В. С. Хачатрян, С. Ц. Хачатрян, В. С. Сафарян // Известия вузов. Энергетика. – 1990. – № 1. – С. 20 – 23.

13. *Хачатрян, В. С.* Об одном методе расчета установившегося режима электрической системы / В. С. Хачатрян, Э. А. Этмекчян // Электричество. – 1990. – № 12. – С. 7 – 15.

14. *Гераскин, О. Т.* Основные матричные уравнения установившихся режимов больших электроэнергетических систем / О. Т. Гераскин, Т. Г. Селенков // Известия вузов СССР. Энергетика. – 1995. – № 5, 6. – С. 7 – 13.

15. Расчет установившегося режима электроэнергетической системы методом декомпозиции с применением матрицы Гессе / В. С. Хачатрян [и др.] // Известия НАН РА и ГИУА. Серия ТН. – 2000. – № 3. – С. 334 – 339.

16. *Бадалян, Н. П.* Новый метод определения обобщенных параметров установившегося режима электротехнической системы / Н. П. Бадалян, К. В. Хачатрян // Сборник докл. Второй междунар. энергет. конф. – М. : Интехэко, 2001. – С. 400 – 408.

17. *Хачатрян, В. С.* Расчет установившегося режима большой электроэнергетической системы методом диакоптики / В. С. Хачатрян, Н. П. Бадалян // Электричество. – 2003. – № 6. – С. 13 – 17.

18. *Хачатрян, В. С.* Решение гибридных уравнений установившегося режима электроэнергетической системы / В. С. Хачатрян, Н. П. Бадалян // Электричество. – 2003. – № 11. – С. 11 – 16.

19. *Бадалян, Н. П.* Решение гибридных уравнений установившегося режима электроэнергетической системы методом второго порядка при P-Q-типе станционных узлов / Н. П. Бадалян // Вестник МАНЭБ. – 2003. – № 4. – С. 80 – 84.

20. *Бадалян, Н. П.* Новый метод обращения Y-матрицы узловых комплексных проводимостей электроэнергетической системы / Н. П. Бадалян // Вестник МАНЭБ. – 2003. – № 7. – С. 70 – 72.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
<b>1. Уравнения установившихся режимов электрических систем и методы их решения .....</b>	<b>4</b>
1.1. Выбор состава независимых и зависимых переменных при расчете установившихся режимов .....	4
1.2. Уравнения установившихся режимов электрических систем при <b>Y</b> -форме задания состояния сети .....	7
1.3. Методы решения уравнений установившихся режимов при <b>Y</b> -форме их представления .....	14
1.4. Уравнения установившихся режимов электрических систем при <b>Z</b> -форме задания состояния сети .....	21
1.5. Применение метода простой итерации для решения уравнений установившихся режимов при <b>Z</b> -форме их представления .....	25
1.6. Применение метода Ньютона – Рафсона для решения уравнений установившегося режима при <b>Z</b> -форме их представления .....	28
<b>2. Гибридные уравнения установившихся режимов электрических систем и методы их решения .....</b>	<b>35</b>
2.1. Уравнения установившихся режимов электрических систем при ( <b>Y-Z</b> )-форме задания состояния сети .....	35
2.2. Решение ( <b>Y-Z</b> )-формы уравнений установившегося режима электрической системы .....	40
2.3. Решение ( <b>Y-Z</b> )-формы уравнения для стационарных узлов типа <b>P – U</b> .....	55
2.4. Решение ( <b>Y – Z</b> )-формы уравнений при разных формах представлений комплексных переменных .....	67
<b>3. Решение уравнений установившихся режимов электрических систем с использованием матрицы Гессе .....</b>	<b>79</b>
3.1. Общие положения решения системы нелинейных алгебраических уравнений методом матрицы Гессе второго порядка .....	79

3.2. Решение $Y$ -формы уравнений установившегося режима электрической системы методом матрицы Гессе .....	82
3.3. Решение $Z$ -формы уравнений установившегося режима электрической системы методом матрицы Гессе .....	92
<b>4. Построение «<math>Z, P-Q</math>» математической модели установившегося режима электроэнергетической системы .....</b>	<b>103</b>
4.1. Построение диакоптической математической модели разделенной электроэнергетической системы .....	103
4.2. Расчет подматриц диакоптических видов .....	108
4.3. Построение расчетной диакоптической матрицы $Z$ и ее коррекция .....	114
4.4. Построение диакоптической модели « $Z, P-Q$ » .....	119
4.5. Получение аналитических выражений с составляющими частных производных рекуррентных выражений .....	124
<b>Контрольные вопросы .....</b>	<b>128</b>
<b>Заключение .....</b>	<b>130</b>
<b>Библиографический список .....</b>	<b>132</b>

*Учебное издание*

БАДАЛЯН Нораир Петикович

МЕТОДЫ РАСЧЁТА УСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА  
ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Специальные вопросы электрических систем

Учебное пособие

Редактор Р. С. Кузина  
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева  
Корректор Е. П. Викулова  
Компьютерная верстка Е. А. Балясовой

Подписано в печать 15.06.16.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 7,91. Тираж 80 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.