

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Т. И. КРАВЧЕНКО

В. В. ФИЛАТОВ

К. А. ДУБОВ

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
КРИТИЧЕСКОГО УСИЛИЯ  
НА СЛАБУЮ ГРУНТОВУЮ СРЕДУ

Монография



Владимир 2016

УДК 624.13  
ББК 38.581.1  
К78

Рецензенты:

Кандидат технических наук  
профессор кафедры строительных конструкций  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*Е. А. Смирнов*

Кандидат технических наук  
доцент кафедры строительных конструкций  
Ивановского государственного политехнического университета  
*В. С. Ярыгин*

**Кравченко, Т. И.** Теория и методика определения критического усилия на слабую грунтовую среду : монография / Т. И. Кравченко, В. В. Филатов, К. А. Дубов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2016. – 311 с.

ISBN 978-5-9984-0691-1

Приведены методики расчётов решений плоских задач с использованием аналитических зависимостей критических усилий и максимальных глубин их проявления в слабых водонасыщенных грунтах. Разработанная математическая модель со свойствами слабых водонасыщенных слоистых грунтов позволяет оценить пределы применения аналитических зависимостей и исследовать процесс развития упругопластических деформаций. Методики расчётов предельного состояния водонасыщенных слоистых грунтов были внедрены в проектные разработки научно-исследовательских организаций.

Предназначена для проектных организаций, аспирантов и студентов-магистрантов, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению «Инженерная геология», «Механика слабых грунтов», «Основания и фундаменты инженерных сооружений».

Ил. 133. Табл. 60. Библиография: 90 назв.

УДК 624.13  
ББК 38.581.1

ISBN 978-5-9984-0691-1

© Кравченко Т. И., Филатов В. В.,  
Дубов К.А., 2016

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Монография состоит из 2-х частей, в которых приведены методики исследования несущей способности упругопластических однослойных и многослойных водонасыщенных грунтовых сред, как оснований насыпей и фундаментов нагрузок в рамках постановки плоских задач. Не смотря на успешное строительство и эксплуатацию промышленных и гражданских сооружений на слабых водонасыщенных грунтах, на практике приходится сталкиваться с авариями и деформациями инженерных сооружений. Причина аварий кроется в неправильной информации о характеристиках сжимаемости, прочности, ползучести грунтов, которую дают существующие исследования. Все это требует более обоснованного подхода к учёту особых условий при проектировании и строительстве сооружений на слабых грунтах, определяет необходимость проведения научно-исследовательских и опытно-экспериментальных работ для изучения несущей способности грунтов в городских и сельских регионах.

В результате этого в монографии были учтены насущные проблемы, стоящие при исследовании оснований под фундаменты сооружений для сложных грунтовых условий.

В 1-й главе работы предварительно проведено изучение существующих методов оценки критических усилий от действия внешних нагрузок в слабых грунтах. Выполнено описание процесса упругопластической деформации в слабых грунтах с помощью полученных аналитических выражений путём их проверки на математических моделях для прогнозирования состояния грунта.

Во 2-й главе исследован весь процесс развития упругопластической деформации в слабых грунтовых средах с помощью физических и математических методов исследования напряжённо-деформированного состояния слабых грунтов. Создана физическая модель со свойствами упругопластического грунта из оптически чувствительного материала (желатина и воды).

Построены графические зависимости, позволяющие исследовать напряжённо-деформированное состояние на глубинах в моделях слабых грунтовых сред, в которых происходит начало развития пластических

областей, напряжённое состояние в этих случаях не может нар Разра-  
ботанная методика может быть использована для составления проект-  
ной документации при строительстве гибких фундаментов, насыпей  
автодорог, отвалов торфяного грунта и отвалов сырья предприятий  
химической промышленности на слабых грунтах различного литоло-  
гического состава. Результаты полученных исследований могут быть  
использованы для составления проектной документации при строи-  
тельстве гибких фундаментов, вертикальных стальных резервуаров,  
насыпей взлётно-посадочных полос, приаэродромной территории, от-  
валов сырья предприятий химической промышленности и отвалов  
торфяного грунта на водонасыщенных грунтах различного литологи-  
ческого состава.

**Часть 1**

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБЫХ  
ГРУНТОВЫХ СРЕД ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗЛИЧНЫХ  
ВИДОВ НАГРУЗОК**

## Глава 1

# СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗУЧЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ГРУНТОВОГО МАССИВА В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ

### 1.1. Характеристика слабых водонасыщенных грунтовых оснований сооружений

Анализ причин деформаций сооружений, расположенных на слабых грунтах показал, что их характеризуют основные особенности, специфичные для всей группы слабых грунтов, которые необходимо учитывать при проектировании сооружений. Слабые грунты особенно широко распространены в северо-западных районах РФ, в геологическом прошлом освободившихся от ледникового покрова последнего континентального оледенения, в условиях избыточного увлажнения и затруднённого стока подземных и поверхностных вод. Эти грунты образуют залежи на дне, по берегам морей и озёр, в поймах и дельтах рек, на заболоченных водоразделах. Суммарная мощность толщ слабых грунтов сравнительно невелика, обычно не более 20-30м; в ряде районов она достигает 50 м.

По условиям образования и залегания слабые грунты можно разбить на три группы: морские и озёрные отложения, образующие слоистые толщи (пески, супеси, суглинки, глины, органогенные и минеральные илы); покровные отложения, залегающие на плоских участках, на склонах и под склонами (торфяники, глинистый элювий коренных пород, размоченный лёсс, делювиальные отложения склонов, пролювий конусов выноса); техногенные отложения, залегающие в форме бугров, терриконов или во впадинах рельефа, в оврагах, в карьерах в форме карманов (городская свалка, отвалы промышленных отходов и др.

С позиций механики грунтов слабые грунты характеризуется низкими показателями механических свойств. Им присуща избыточная увлажнённость, малая прочность, высокая сжимаемость и низкая несущая способность, приводящие к большим осадкам оснований, в результате влекущие аварии сооружений.

В соответствии с [1] и [2] к слабым грунтам относят группу водонасыщенных глинистых грунтов значение модуля общей деформации, которых равно или меньше 5,0 МПа, а степень влажности больше 0,8, т.е. более 80% пор которых заполнены водой. Для большинства слабых грунтов значение угла внутреннего трения меняется от 0 до  $14^{\circ}$ , а значения коэффициента сцепления от 0,01 до 0,02 МПа. К водонасыщенным глинистым грунтам относятся грунты различного происхождения (аллювиальные, морские делювиальные и т. д.), которые в результате литогенеза или других, природных факторов стали сильносжимаемыми и водонасыщенными. К этой группе относят илы, ленточные глины, водонасыщенные лессовые макропористые и заторфованные грунты, а также некоторые другие виды глинистых грунтов. Состав, структура, текстура, а, следовательно, и свойства слабых водонасыщенных глинистых грунтов формируются в процессе их генезиса и изменяются под влиянием постгенетических процессов (диагенеза, эпигенеза и гипергенеза). При воздействии вибрации прочность этих грунтов понижается, т. е. появляются тиксотропные свойства. Осадки зданий, возведённых на таких грунтах, развиваются в течение десятков лет и достигают больших величин. При изучении отдельных видов слабых водонасыщенных грунтов глинистых грунтов необходимо применять генетический подход для установления закономерностей, присущих грунтам данного вида. Свойства слабых водонасыщенных глинистых и торфяных грунтов зависят от их минералогического состава. Кроме того на свойства этих грунтов влияют органические вещества, входящие в их состав. Присутствие большого количества органических веществ (более 10 %) в торфяных грунтах создаёт новые своеобразные свойства этих грунтов. Поэтому изучение торфов и заторфованных грунтов следует проводить по специальной методике, которая в некоторых случаях может отличаться от методики исследования слабых грунтов, не содержащих органических веществ. Для определения физических характеристик и свойств слабых грунтов учёными проводились многолетние лабораторные и полевые исследования на различных участках территории РФ. Результаты этих исследований приведены в таблицах 1.1 и 1.2 [1].

Таблица 1.1.

Результаты исследований физических характеристики слабых грунтов [1]

Грунт	Уд. вес, г/см <sup>3</sup>	Влаж- ность, %	Предел пластичности		Коэф. порис- тости $\epsilon_0$	Коэф. сжима- емости, см <sup>2</sup> /кгс	Кол. орган. веществ, %
			W <sub>T</sub>	W <sub>p</sub>			
Ил: речной (Архан- гельск),	2,68	72,5	75,6	39,2	1,98	0,22	5,6
озёрный (Красно- армейск),	2,68	49,2	47,1	25	1,4	0,12	3,7
органо- мине- ральный (Рига)	2,32	158	180,2	81,2	3,83	0,81	12,8
Лёсс (Грозный)	2,7	-	22,3	17,4	1,06	0,09	-
Лёсс (Оби- Кинск)	2,71	-	0,01	18	0,76	0,06	-
Паста: из глины неокома (Саратов),	2,71	77,2	75,8	37	2,09	0,24	-
из хва- лынской глины (Волго- град)	2,69	67,3	61,6	26,4	1,81	0,17	-

Таблица 1.2.

## Физико-механические характеристики слабых грунтов [1]

Грунт	Влажность, %	Уд. вес, г/см <sup>3</sup>	Предел пластичности		Уплотняющее давление, кг/см <sup>2</sup>	Коэф. пористости $\epsilon_0$
			W <sub>T</sub>	W <sub>p</sub>		
Ил речной (Кашира)	52,9-	2,6	49,7	29,7	0,2	1,36 -
	54,95					1,43
Каолинит (паста)	50,1	2,68	56,6	39	0,5	1,26- 1,3
Бентонит (паста)	106	2,68	120,2	40,1	0,5	2,62- 2,68

На основании [5] к слабым грунтам относятся типы слаболи-  
титифицированных био - и минерогенных грунтов, состоящие из тор-  
фов, заторфованных грунтов, сапропелей и морских илов. В генети-  
ческом отношении органические и органно-минеральные типы слабо-  
литифицированных грунтов характеризуются общностью зарождения в  
водной или избыточно увлажнённой среде с протеканием сложных  
микробиологических и биохимических процессов распада органическо-  
го вещества и осадконакопления в анаэробных условиях. Вследствие  
этих генетико – литологических причин таким грунтам присуща - избы-  
точная увлажнённость, низкая плотность, весьма незначительная проч-  
ность и сильная сжимаемость.

В соответствии с [6] категории слабых грунтов представлены в  
таблице 1.3.

Таблица 1.3.

## Номенклатура слабых органо-минеральных грунтов [6]

Подгруппа грунта	Тип грунта	Вид грунта	Сопротивление сдвигу $\tau$ , $10^5$ Па	Естественная влажность (мягкопласт. пород) $w_0$ , %	
Органический	Торф нормально-зольный	Слабо-разложившийся	$> 0,05$	$>1200$	
		Средне-разложившийся	$> 0,05$	800-1200	
		Сильно-разложившийся	$> 0,05$	500-800	
	Торф высокозольный	Слабо-разложившийся	$> 0,07$	500-600	
		Средне-разложившийся	$> 0,07$	400-500	
		Сильно-разложившийся	$> 0,07$	$< 400$	
		Сапропель	Слабо-разложившийся	$< 0,03$	$>500$
	Органо-минеральный	Заторфованные песчаные и глинистые	Средне-минеральный	$< 0,05$	300-500
			Минеральный	$> 0,05$	180-300
		Ил	Сильно-заторфованные	$> 0,08$	300-400
Средне-заторфованные			$> 0,08$	200-300	
Минеральный		Слабо-заторфованный	$> 0,08$	$< 200$	
		Глинистый	$> 0,05$	$> 60$	
		Суглинистый	$> 0,1$	$> 35$	
		Супесчаный	$> 0,1$	$> 30$	

Длительность протекания осадок при нагружении в слабых грунтах объясняется существенным уменьшением объёмов порового пространства, резко снижающим (на несколько порядков) их водонепроницаемость [6]. Эти грунты могут быть использованы в инженерно – строительных целях лишь после проведения специальных мероприятий по их уплотнению или укреплению. Именно по этой причине нормативные документы [63] и [64] не допускает возможность опирания фундаментов на названные типы грунтов слабой степени литификации,

исключая возведения сооружений плавающего типа или в виде песчаных насыпей. В торфяных основаниях дорожных насыпей за десятилетия эксплуатации влажность снижается лишь до 180 - 220 % , а коэффициент пористости до 2,7 - 3,3, при модуле общей деформации порядка 0,3 - 0,7 МПа. Важное место в оценке устойчивости и несущей способности торфяных залежей занимает учёт сапропелевых отложений, залегающих под торфом. Это объясняется тем, что сопротивлению сдвигу или удельное сцепление сапропелей нередко на порядок ниже, чем у торфа и колеблется в слабоминерализованных сапропелях в пределах  $0,003 - 0,03 \cdot 10^5$  Па. Это обстоятельство приводит к тому, что при рытье канав сапропелевое отложение немедленно выдавливается, заполняя осушитель или нарушая устойчивость откосов. На рис. 1.1 [5] хорошо видна изменчивость  $\tau$  в указанных слоях на двух пунктах опробования, особенно при переходе от торфа к сапропелю на глубине около 4 м.

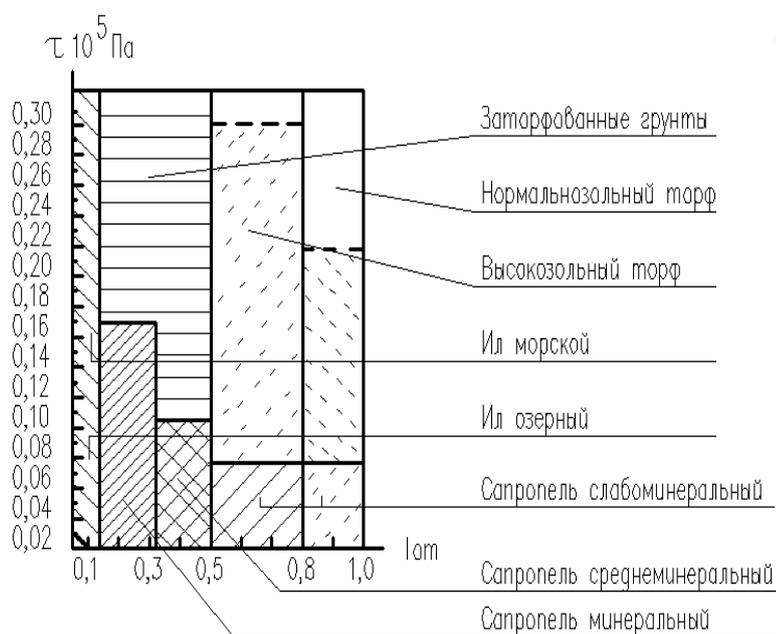


Рис.1.1.Зависимость показателя прочности  $\tau$  слабых грунтов от относительного содержания органических веществ  $I_{от}$

Категорию слабых грунтов на основании [21] также составляют водонасыщенные глинистые грунты, которые при давлении до 0,3 МПа имеют модуль деформации 3-5 МПа и относительную влажность больше 0,8. Угол внутреннего трения весьма мал и может быть принят равным нулю, а сопротивление сдвигу – величине сцепления. Устойчивость соору-

жений, возводимых на слабых водонасыщенных грунтах, обеспечивается при соблюдении условия:

$$\tau_{\max} < C, \quad (1.1)$$

где  $\tau_{\max}$  – максимальное значение главных касательных напряжений, вызываемых нагрузкой от сооружений. При соблюдении этого условия пластические сдвиги не возникают ни в одной точке основания сооружения. На основании [21] слабые грунты сгруппированы в табл.1.4.

Таблица 1.4.

Физико - механические характеристики слабых грунтов [21]

№ п/п	Наименование грунтов	Удельный вес грунта $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °	Удельное сцепление грунта $C$ , кН/м <sup>2</sup>
1	Суглинок ленточный водонасыщенный	10	17	5
2	Торфяной грунт верховой	1,5-1,6	8	0,45
3	Торфяной грунт низинный	1,45-1,55	12	0,6
4	Суглинок мягкотелый	1,9	18	2
5	Глины мягко-пластичных пород	1,88-1,96	8-16	0,015- 0,035
6	Глины текучих пород	1,61-1,88		0,05-0,015 0,015-0,026
7	Суглинки текучих пород	1,8-1,9	14-23	0,05-0,06 0,013-0,035
8	Глины туго-пластичных пород	1,96-2,01	8-16	
9	Песчано – супесчаные породы, увлажнённые водой	1,7-2,1	25-32	

Результаты инженерно-геологических изысканий, выполненных в 2013 г. ООО ГП "Промнефтегазэкология" и ОАО «МАГНИТОГОРСКИЙ ГИПРОМЕЗ» на площадке, расположенной на II надпойменной террасе реки Туры показали, что к слабым грунтам относятся следующие виды грунтов, указанных в табл.1.5. Значения физических показателей свойств грунтов были также определены лабораторными методами. Нормативные

значения прочностных и деформационных характеристик ИГЭ-1 – ИГЭ-5 приняты по результатам лабораторных испытаний грунтов, значения для ИГЭ-6 и ИГЭ-7 приняты в соответствии [64] с учётом данных статического зондирования грунтов. Обработка материалов статического зондирования грунтов позволила просчитать частные значения предельного сопротивления свай и оценить несущую способность свай по результатам полевых исследований. Результаты приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5.

Нормативные значения свойств слабых грунтов

Физико-механические показатели	ИГЭ-1. Суглинок полутвердый	ИГЭ-2. Суглинок тугопластичный	ИГЭ-3. Суглинок мягкопластичный	ИГЭ-4. Суглинок текучепластичный	ИГЭ-5. Супесь пластичная	ИГЭ-6. Песок мелкий, средней плотности, средн. степени водонасыщенный
Природная влажность, $W$ , %	29.2	26.8	30.2	32.7	26.2	13.1
Число пластичности, $I_p$ %	13.3	12.5	10.7	10.1	5.4	-
Показатель текучести, $I_L$ , д.ед.	0.14	0.37	0.61	0.85	0.49	-
Плотность частиц, $\rho_s$ , г/см <sup>3</sup>	2.70	2.69	2.69	2.68	2.67	2.65
Плотность грунта, $\rho$ , г/см <sup>3</sup>	1.86	1.91	1.89	1.84	1.93	1.84
Плотность в сухом состоянии, $\rho_d$ , г/см <sup>3</sup>	1.44	1.50	1.47	1.39	1.55	1.62
Коэффиц. пористости, $e$ , д.ед.	0.88	0.80	0.84	0.93	0.72	0.63

Коэффиц. водонасыщения $S_r$ , д.ед.	0.90	0.93	0.94	0.93	0.91	0.57
Удельное сцепление, $C$ , кПа	21	20	16	14	14	2
Угол внутреннего трения, $\varphi$ , град.	20	21	18	17	23	32
Модуль деформации, $E$ , МПа	11.6	13	9.4	2.8	17.8	28
Удельный вес, $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	18.27	18.76	18.59	18.07	18.97	18.08

Водонасыщенные рыхлые пески (аллювиальные, озёрно-морские и др.) в условиях статического нагружения не получают больших деформаций, поэтому осадки сооружений не имеют опасного развития. Однако выполнение строительных работ в непосредственной близости от других зданий может существенно изменить картину. Сваи, погружаемые в рыхлые водонасыщенные пески вибрированием или забивкой должны располагаться на достаточном удалении от существующих фундаментов. В водонасыщенных рыхлых применение глубинного водоотлива при наличии сооружений возле котлована является нежелательной мерой, т.к. понижение уровня подземных вод на длительный период времени вызывает уплотнение грунта и развитие дополнительной осадки.

Анализ природных свойств слабых грунтов указывает на их различное происхождение, различный химический и минералогический состав, но обладающих одинаковыми характеристиками сжимаемости и прочности. В следующем пункте были рассмотрены существующие методы расчёта несущей способности грунтовых оснований в зависимости от общих характеристик слабых грунтов, которые дают возможность оценить работу оснований и выполнить дальнейшие научные исследования, необходимые для повышения устойчивости и прочности инженерных сооружений.

## 1.2. Влияние подземных вод на физические свойства грунтов

На различной глубине от поверхности земли встречаются грунты, пропитанные водой. Эти воды называются грунтовыми, а верхняя поверхность их – уровнем грунтовых вод. Грунтовые воды оказывают большое влияние на структуру, физическое состояние и податливость грунтов. Различные примеси, растворённые в воде, могут вредно (агрессивно) влиять на материал фундаментов и разрушать его. Все это заставляет строителя при проектировании и возведении фундаментов детально изучать грунтовые воды в районе постройки. Вода в грунте скапливается вследствие конденсации паров, проникающих вместе с воздухом, и просачивания дождевых и талых снеговых вод. Поэтому уровень грунтовых вод непостоянен: наиболее высокое стояние их бывает весной, наиболее низкое – зимой и летом. Вблизи открытых водоёмов (река, канал, озеро и т. д.) колебание уровня грунтовых вод обычно связано с колебанием уровня воды в водоёме. После проведения на большой территории планировочных работ условия стока и просачивания меняются, что может повлечь изменение режима грунтовых вод. Распределение вод в толще грунта во многом зависит от характера напластования. Вода задерживается при просачивании над водоупорными (главным образом – тяжёлыми глинистыми) грунтами и скапливается в водопроницаемых (песчаных) слоях, которые в этом случае называются водоносными. Очевидно, что этот уровень должен выявляться при изысканиях и учитываться при проектировании. В заключение отметим, что при просачивании воды небольшое количество ее всегда задерживается в верхнем почвенном слое (почвенные воды, верховодка). Не оказывая влияния на конструкцию фундаментов, наличие этих вод заставляет всегда принимать меры по изоляции фундаментов и стен от влаги.

Изменение уровня грунтовых вод после возведения сооружения может резко понизить прочность основания и вызвать серьезные деформации сооружения в следующих случаях. При расположении сооружения на мелких и пылеватых рыхлых песках, которые под давлением текут вместе с водой. Такие грунты называются пльвунами. Если грунтовые воды имеют выход на поверхность (например, в месте резкого изменения рельефа, при рытье котлована или шурфа и т. д.), возникает опасность выноса частиц грунта из-под проектируемого сооружения или из-под зданий, распо-

ложенных рядом с котлованом. Поэтому при проектировании сооружения на плывуне необходимо специальными исследованиями установить пределы распространения плывунов, возможность выноса их в местах резких переломов поверхности рельефа, характер и рельеф подстилающих грунтов, направление и скорость движения грунтовых вод.

### **1.3. Фазы деформированного состояния грунтов в зависимости от статики нагружения**

Напряженное состояние определяется с использованием решений теории линейно – деформируемого грунта, если в основании фундамента или полностью отсутствуют зоны, в которых нарушена прочность грунта, и он находится в предельном состоянии или они незначительны по своим размерам. Напряжения, возникающие в грунтовой среде, могут преодолеть силу внутренних связей (предельную прочность). Это приведёт к нарушению существующего равновесия, потере устойчивости грунтовых оснований сооружений. При действии увеличивающихся статических нагрузок на слабые грунты основными прочностными показателями сопротивления грунтового слоя являются показатели сопротивления их сдвигу. Показатели сопротивления грунтов сдвигу являются не постоянными и зависят от многих причин: давления, условий в точках контакта участков грунта, его плотности, сжимаемости, деформативности и других факторов. Вместе с этим при действии возрастающих вертикальных давлений в грунтовой среде возникает фазовое напряженно-деформированное состояние грунта, которое изучается для инженерных расчётов грунтового основания.

Анализ испытания основания штампом [58] позволяет выделить следующие фазы напряженно-деформированного состояния грунта: 0 – фаза упругих деформаций; I – фаза уплотнения; II – фаза сдвигов; III – фаза выпора. Кратко охарактеризуем напряженно-деформированное состояние грунта в каждой из выделенных фаз (рис.1.2).

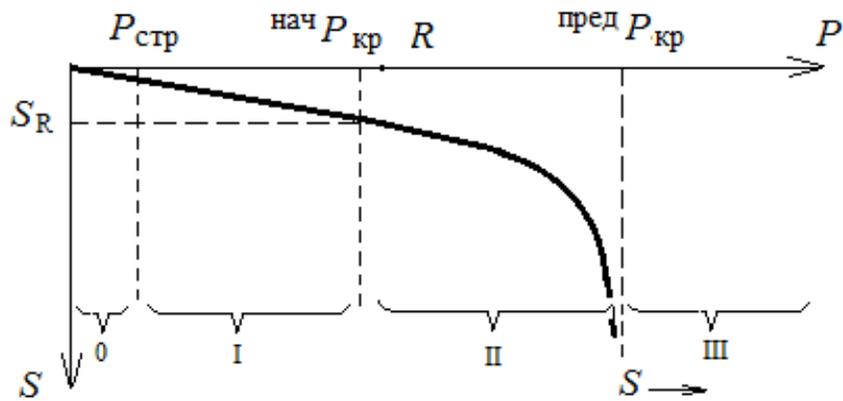


Рис. 1.2. Фазы напряженно-деформированного состояния грунта:  $P_{стр}$  – структурная прочность;  $^{нач} P_{кр}$  – начальное критическое давление;  $^{пред} P_{кр}$  – предельное критическое давление;  $R$  – расчетное сопротивление грунта

**Фаза упругих деформаций** характеризуется уровнем напряжений в скелете грунта, не превышающим прочность структурных связей между минеральными частицами грунта или структурной прочности грунта [58]. Деформации грунта в этой фазе обратимы и пренебрежимо малы, т. к. обусловлены сжимаемостью минеральных частиц. Уровень напряжений, соответствующий концу этой фазы, называется структурной прочностью грунта  $P_{стр}$  и обычно не превышает 5 - 10 % допустимых на грунт давлений. В этом случае в соответствии с диаграммой напряжений Мора соблюдается допредельное устойчивое напряжённое состояние, отвечающее условию [88]:

$$\tau \leq \text{tg } \varphi + C \text{ или } \tau \leq \sigma f + C, \quad (1.2)$$

где постоянные  $f = \text{tg } \varphi$  и  $C$  – коэффициент внутреннего трения и коэффициент сцепления,  $\tau$  – касательное напряжение, действующее в заданных точках грунта,  $\sigma$  – нормальное напряжение в этих точках.

**Фаза уплотнения** соответствует уровням напряжений в грунте, в диапазоне которых процесс его деформирования удовлетворительно подчиняется закону уплотнения Терцаги [75]. Линейная зависимость между деформациями и напряжениями в этой фазе не является обратимой. При разгрузке штампа из диапазона давлений, соответствующего фазе уплотнения, грунт деформируется по линейной зависимости, не совпадающей с ветвью нагрузки. При полной разгрузке штампа имеет место необратимая (пластическая) осадка, соответствующая нулевым напряжениям по подош-

ве. Таким образом, закон уплотнения Терцаги устанавливает линейную зависимость между напряжением и суммой упругой и пластической деформации грунта.

**Фаза сдвигов** характеризует начало образования в грунте зон предельного равновесия [58]. Зоной предельного равновесия в грунте называют геометрическое место точек, в которых не удовлетворяются условия прочности Кулона-Мора. Первоначально эти зоны образуются по краям штампа, где имеет место концентрация напряжений. Уплотнение грунта в этой фазе практически не происходит. Грунт считается несжимаемым, а коэффициент Пуассона в этой фазе близок к 0,5. Давление на грунт, соответствующее началу фазы сдвигов, называют начальным критическим давлением –  $P_{кр}^{нач}$ .

В этом случае соблюдается предельное равновесие, отвечающее условию [87]:

$$\tau = \text{tg } \varphi + C \text{ или } \tau = \sigma f + C . \quad (1.3)$$

**Фаза выпора** является следствием развития фазы сдвигов в области грунтового массива, являющегося основанием штампа, с образованием поверхностей скольжения, отделяющих основание штампа от нижележащего грунтового массива. В результате этого осадки штампа происходят без увеличения нагрузки за счет перемещения грунта основания. Вокруг штампа происходит поднятие (выпор) грунта. Давление, при котором наступает фаза выпора, называется предельным критическим давлением –  $P_{кр}^{пред}$  [58].

В соответствии с охарактеризованными выше фазами напряженно-деформированного состояния грунта применяются следующие расчетные модели, приведённые в таблица 1.6.

Таблица 1.6.

Расчётные модели грунта в соответствии с фазами напряженно-деформированного состояния

Уровень давлений $P$	Расчетная модель грунта	Характеристики модели грунта	Методы анализа
$P \leq P_{стр}$	Упругая среда	Модуль упругости	Теория упругости
$P_{стр} < P < P_{кр}^{нач}$	Линейно-деформируемая неупругая среда	Модуль деформации при нагрузке и модуль упругости при разгрузке	Теория упругости анизотропной среды

$P_{кр}^{нач} \leq P < P_{кр}^{пред}$	Упругопластическая среда	Функциональная зависимость деформаций от напряжений	Теория пластичности
---------------------------------------	--------------------------	---	---------------------

Рассмотрим картину напряжённо-деформированного состояния под действием нагрузок для различных типов глинистых грунтов.

#### **1.4. Развитие деформаций в глинистых грунтах различной консистенции при действии возрастающей нагрузки**

Решение задачи об устойчивости связных оснований под вертикальной нагрузкой имеет большое самостоятельное значение. На важность и необходимость детального изучения поведения связных грунтов при увеличении нагрузки на фундамент приводится в изданиях [5,6,11]. На основе анализа проведённых исследований с грунтами полутвёрдой, туго - и мягкопластичной консистенции установлена последовательность развития деформаций в этих грунтах. Глинистые грунты, как и песчаные, при загрузке их через жёсткий штамп проходят три фазы деформаций, картина развития которых была исследована в зависимости от заглубления штампа. Полная картина напряжённо-деформированного состояния глинистых грунтов рассмотрена в следующем разделе.

##### **1.4.1. Развитие деформаций под заглублёнными штампами**

Для получения более последовательной картины деформирования глинистого основания под нагрузкой в [23] была проведена серия опытов с глинистыми грунтами тугопластичной консистенции с заглублёнными штампами при  $h/v = 0,4$  и  $h/v = 1$ . Исследования показали, что характер развития деформаций аналогичен для того же состояния грунта при незаглублённых штампах. Как показывают проведённые исследования кривые зависимости осадки штампа от среднего давления, возрастания глубины заложения штампа приводит к уменьшению величины осадки на 6-10 %. Поэтому общий характер кривой зависимо-

сти  $S = f(P)$  остался практически одинаковым при различных значениях относительной глубины заложения штампа.

В результате проведённого цикла исследований [23] установлено, что развитие деформаций в глинистых грунтах заглублёнными штампами протекает в такой же последовательности, как и при незаглублённых штампах, согласуясь с тремя фазами по Н. И. Герсеванову [16]: уплотнения, сдвигов и потери несущей способности.

На первых ступенях приложения нагрузки в грунте наблюдается процесс уплотнения, частицы его движутся, в основном, вертикально вниз с очень незначительным отклонением в стороны; уплотнение происходит на глубину (1,4-1,6) *в*. Осадку штампа приближённо можно считать пропорциональной внешней нагрузке.

Во второй стадии траектории перемещения частиц грунта отклоняются от вертикального направления более интенсивно, чем в случае незаглублённых штампов. Эта фаза сдвигов более коротка. График зависимости осадки-нагрузки криволинеен.

Переход от второй фазы деформации к третьей фазе характеризуется тем, что очерчиваются области, где явно выражен поворот частиц в стороны и вверх, но в основном вверх к поверхности основания. В данном случае процесс развития поверхностей скольжения более длителен. Горизонтальные перемещения здесь значительно меньше и составляют 10-12% от полной осадки штампа, а зоны сдвигов («пластические» области) при

предельной нагрузке достигают размеров (2,2-2,4) *в* влево и вправо от боковых граней штампа, а их глубина – (2,5 -2,7) *в*.

#### **1.4.2. Формы и размеры уплотнённого ядра под действием внешних нагрузок**

Образование под жёстким фундаментом при нагрузках, близким к критическим уплотнённого ядра известно уже давно И.Х. Пигулевским (1929 г.) [59]. Наличие ядра значительно изменяет напряжённое состояние грунта, условия его деформации, величину критической нагрузки, передаваемой конструкцией на грунт. Это обуславливает большое значение решения задач об определении формы ядра.

Практическое значение этого вопроса вытекает из того, что существующее ядро приводит к резкому возрастанию размеров сдвиговых областей грунта, а следовательно, и к возрастанию критической нагрузки. Тем самым устраняется разрыв, существующий между результатами расчёта по методам теории предельного напряжённого состояния и экспериментальными данными.

Многочисленными исследованиями формы уплотнённого ядра в песчаных грунтах показано, что можно выделить поверхность, отделяющую уплотнённое ядро от окружающего грунта. В исследованиях [23], использующих нелинейные деформационные зависимости, позволили выявить образование областей с пониженной жёсткостью на сдвиге у краёв штампа в песчаных грунтах. Снижение модуля сдвига зафиксировано под краями штампа С.Е. Кагановской (1974г.) [27] в глинистых грунтах. Однако большинством исследователей не изучалась картина изменения плотности в пределах уплотнённого ядра и поверхности, отделяющей его от окружающего грунта.

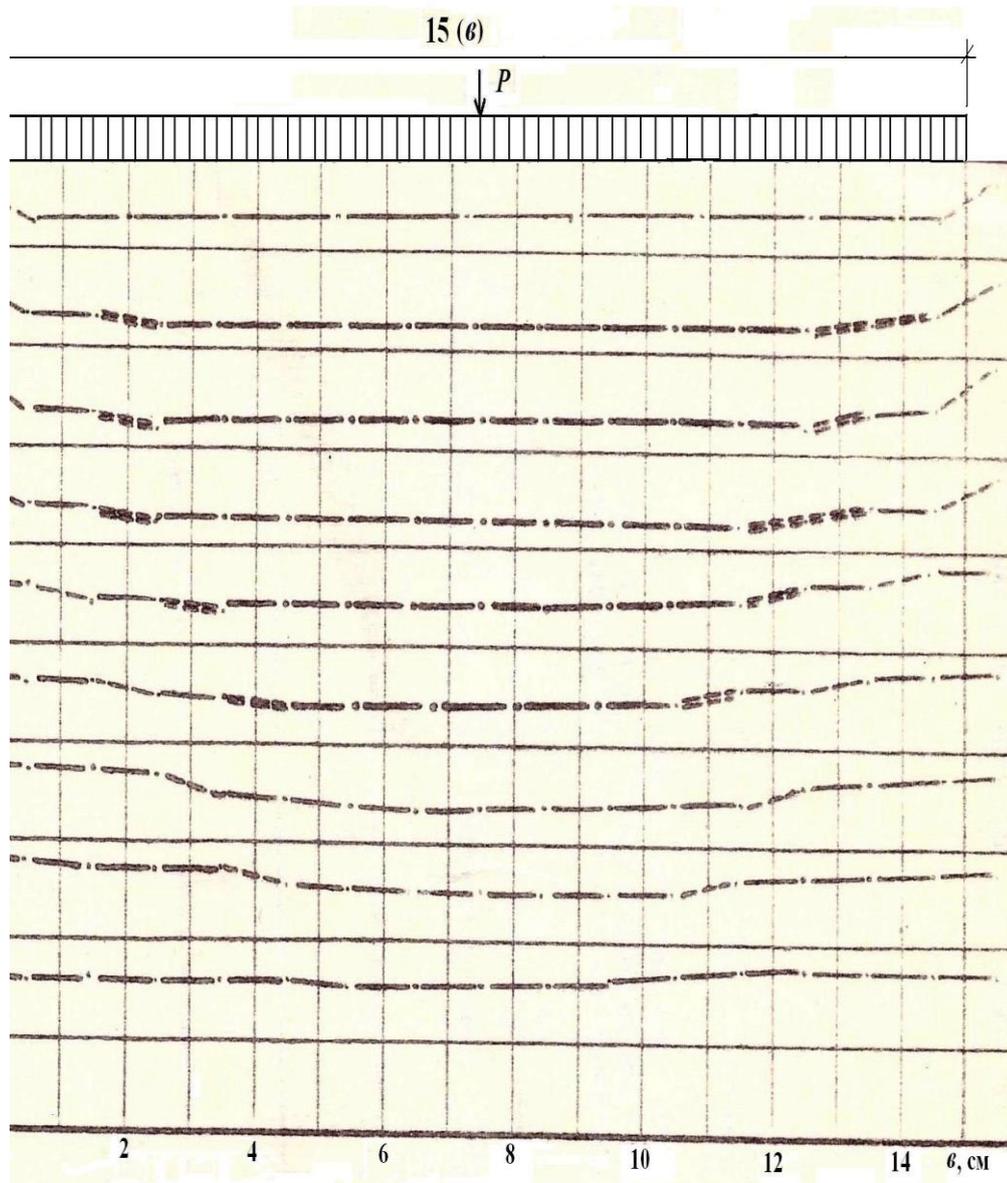
Действительно, уплотнённое ядро играет важную роль в деформации основания, поскольку оно сдвигает прилегающие к штампу объёмы грунта по линиям наименьшего сопротивления, и поэтому плотность грунта в уплотнённом ядре должна значительно больше, чем в переходной зоне и, соответственно, в областях пластических деформаций. Таким образом, на основе информации о плотности, полученной при различных нагрузках на основание вплоть до разрушения, можно выделить эту переходную зону. Знание границ переходной зоны позволит установить размеры и форму уплотнённого ядра. На рис. 1.3 и 1.4 приведены диаграммы изменения плотности в грунтах тугопластичной и мягкопластичной консистенции под штампом при нагрузках вплоть до потери несущей способности основания. Рассмотрение диаграмм изменения плотности показало, что внутри уплотнённого ядра образуется зона, плотность в которой больше, чем плотность самого ядра. Анализ диаграмм изменения плотности грунта по глубине под штампом показывает, что образующее ядро состоит из двух зон уплотнения. Первая зона уплотнения распространяется на глубину (0,65-0,7) *в*. Внутри этой зоны образуется вторая зона уплотнения, ко-

торая начинается от подошвы штампа и распространяется на глубину(0,3-0,35) в.

Наличие двух зон уплотнения можно рассматривать как подтверждение вывода М. И. Горбунова–Посадова (1962 г.) [20] и В.Г. Березанцева (1960 г.) [10] о том, что уплотнённое ядро состоит из двух частей: «упругой» и «пластической». Меньшая его часть, непосредственно примыкающая к штампу, при образовании ядра остаётся в «упругом» состоянии и характеризуется большой плотностью. Другая часть, примыкающая к «упругой» части снизу, находится в «пластическом» состоянии характеризуется меньшей плотностью.

На этой стадии загрузки (первая фаза деформации), когда нагрузки ещё далеки от критической по устойчивости, значительное уплотнение происходит только в пределах ядра, отчего и получается его смещение по отношению к остальному грунту и, естественно появляется граница перепада плотностей, которые и наблюдаются на диаграммах. Увеличение нагрузки до  $0,6 P_{пр}$  приводит к возрастанию размеров уплотнённого ядра до 0,8 в. Высота «упругой» части ядра при данной ступени нагрузки составляет (0,35-0,45) и её вершина находится на оси симметрии. Плотность грунта в пределах «упругой» зоны увеличилась на 5-7% по сравнению с первоначальной плотностью укладки и составляет 1,96-1,97 г/см<sup>3</sup>. В пластической части ядра происходит уплотнение в пределах 2,5-3%. Траектории перемещения частиц в пределах «упругой» части строго вертикальны, а в перемещениях частиц в «пластической» части ядра наблюдается отклонение от вертикального направления. Величина перепада плотности грунта в пределах переходной зоны увеличилась до  $\Delta\gamma_0 = 0,03-0,05$  г/см<sup>3</sup>. Размеры уплотнённого ядра при увеличении нагрузк до  $(0,85-0,95) P_{пр}$  изменились только за счёт незначительного увеличения нижней «пластической» зоны (рис. 1.4).

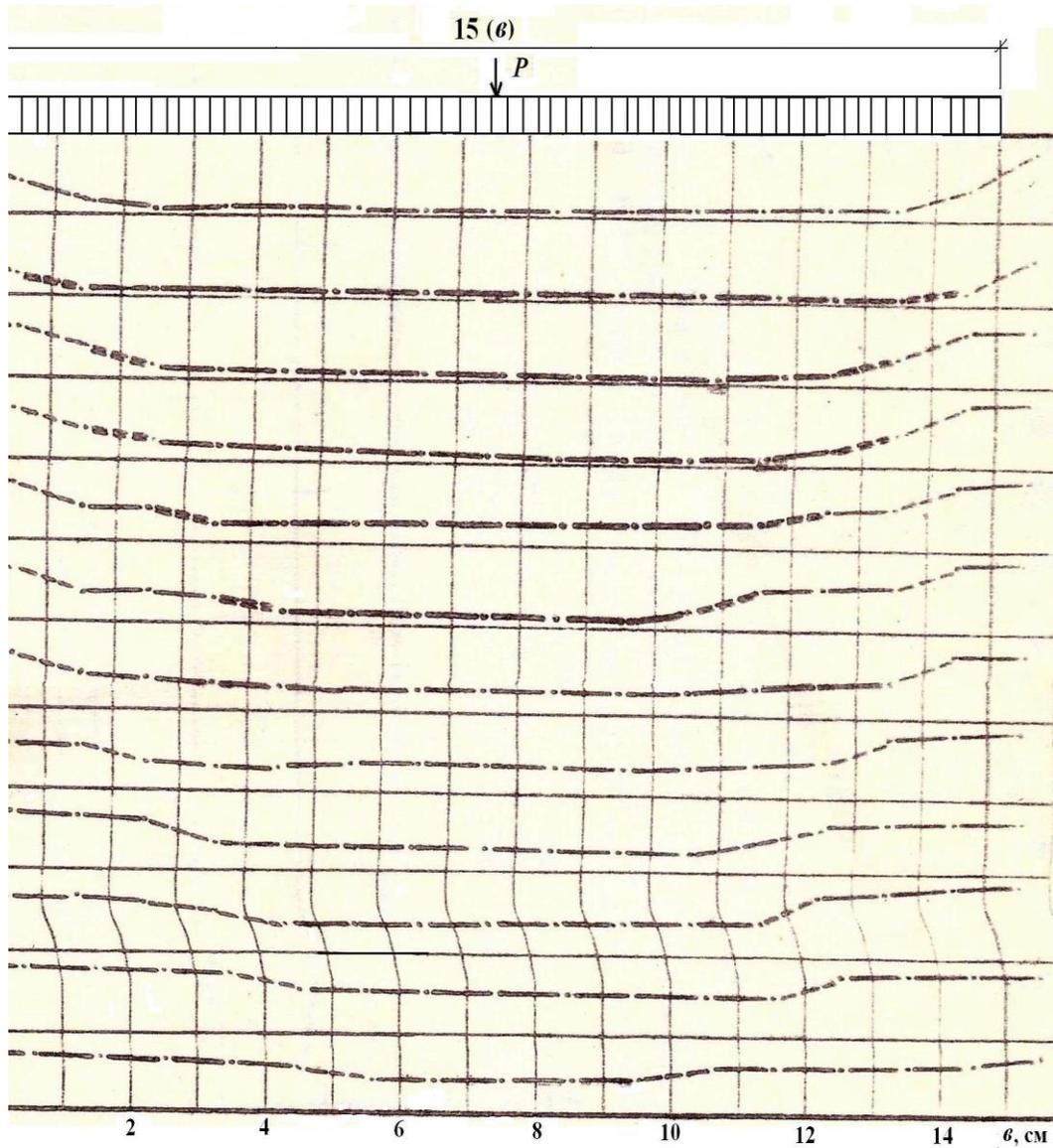
«Упругая» часть ядра хотя и формируется при нагрузках, предшествующих потере основанием устойчивости и не изменяет свою форму вплоть до разрушения, но плотность в пределах её возрастает вплоть до разрушения основания.



а)

Рис.1.3. Очертание «упругой» и «пластической» части уплотнённого ядра в глинистых грунтах тугопластической консистенции под жёстким штампом шириной 15см: а) при  $P=0,4\text{кгс/см}^2$ , при  $P=1,2\text{кгс/см}^2$ ; б) при  $P=1,6\text{кгс/см}^2$ , (глина с  $W_{\text{п}}=17,8$ ;  $B=0,30$ ;  $\gamma=1,89\text{ г/см}^3$ ;  $\varphi=15^0$ ;  $C=0,25\text{ г/см}^2$ ).

--- граница уплотнённого ядра;  
 === граница «упругой» части ядра  
 (начало)



б)

Рис.1.3. Очертание «упругой» и «пластической» части уплотнённого ядра в глинистых грунтах тугопластической консистенции под жёстким штампом шириной 15 см: а) при  $P=0,4 \text{ кгс/см}^2$ , при  $P=1,2 \text{ кгс/см}^2$ ; б) при  $P = 1,6 \text{ кгс/см}^2$ , (глина с  $W_{II}=17,8$ ;  $B = 0,30$ ;  $\gamma = 1,89 \text{ г/см}^3$ ;  $\varphi = 15^0$ ;  $C = 0,25 \text{ г/см}^2$ ).

--- граница уплотнённого ядра;  
 === граница «упругой» части ядра  
 (окончание)

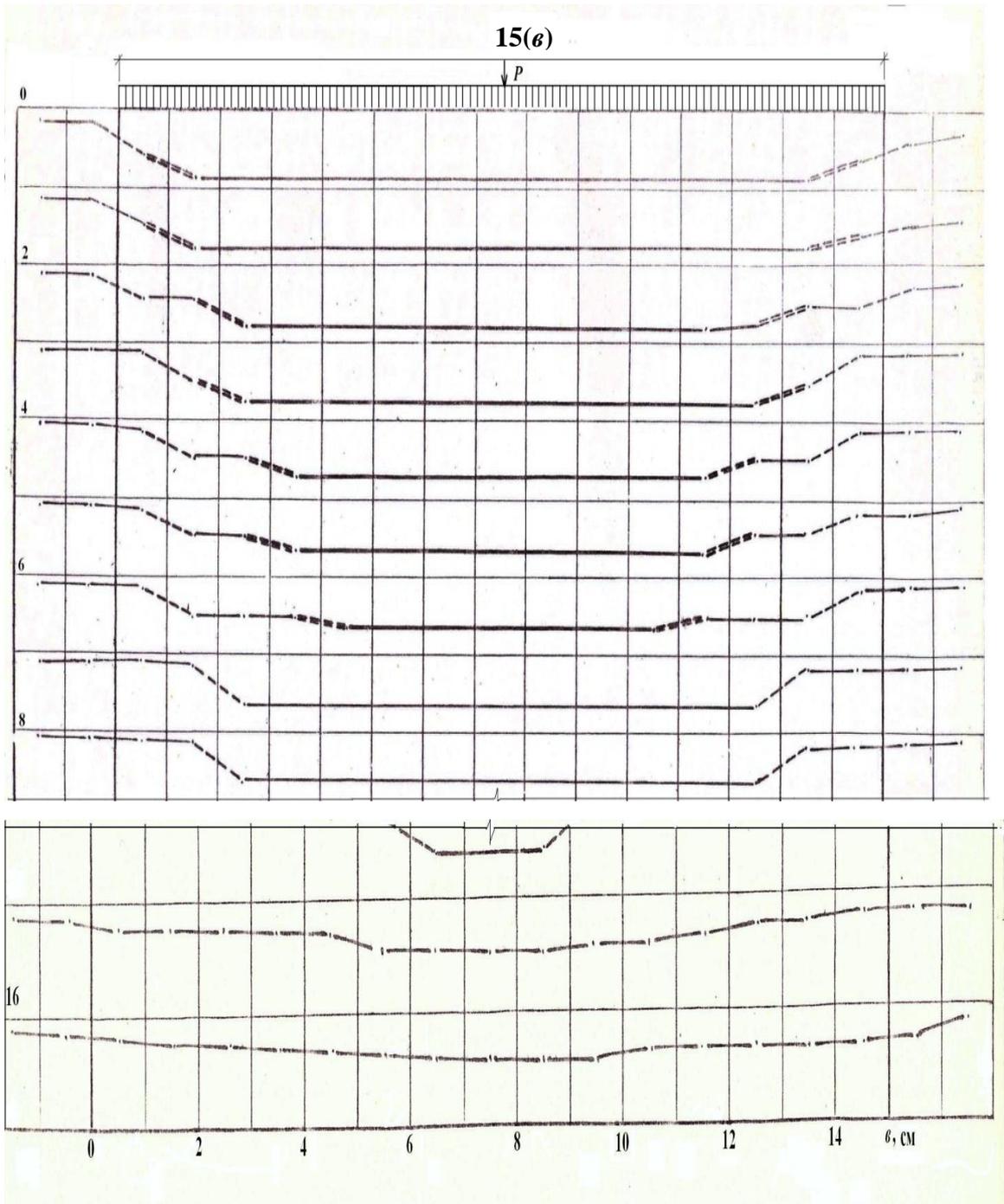


Рис.1.4. Очертание уплотнённого ядра «упругой» и «пластической» части в глинистых грунтах тугопластической консистенции под жёстким штампом к моменту потери основанием устойчивости (при  $P=22$  кгс/см<sup>2</sup>;  $v = 15$  см; грунт-глина с  $W_n=20,5$ ;  $B = 0,30$ ;  $\gamma = 1,80$  г/см<sup>3</sup>;  $\varphi = 12^0$ ;  $C = 0,13$  г/см<sup>2</sup>).

--- граница уплотнённого ядра;  
=== граница «упругой» части ядра

Плотность грунта в пределах «пластической» части ядра также возрастает, но увеличение её происходит медленнее. Повидимому, это связано с тем, что направление и перемещение частиц грунта в этой зоне отличаются от перемещения штампа. Кроме того, в процессе роста уплотнённого ядра развитие «пластической» части происходит постепенно. Исследования показали, что при нагрузке, предшествующей разрушению ( $P = 0,95 P_{пр}$ ), а так же после потери основанием устойчивости, плотность в пределах «пластической» части возрасла более постепенно, чем в «упругой» части уплотнённого ядра (рис.1.5, 1.6).

Поле плотности грунта, представленное на рис. 1.5, 1.6 показывает, что в пределах упругой части плотность характеризуется равномерностью распределения и наибольшим значением по сравнению с «пластической» частью ядра.

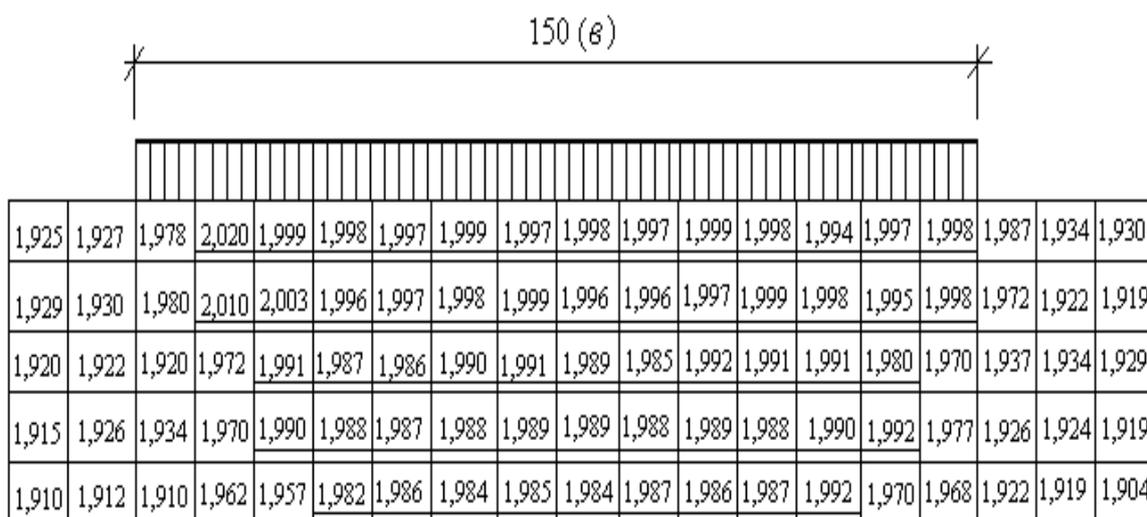


Рис.1.5. Поле плотностей глинистого грунта мягкопластичной консистенции после потери основанием устойчивости ( грунт-глина с  $W_n=20,3$ ;  $B = 0,55$ ;  $\gamma = 1,80$  г/см<sup>3</sup>).

Подчёркнуто - плотность в пределах «упругой» части ядра и нижняя граница уплотнённого ядра.

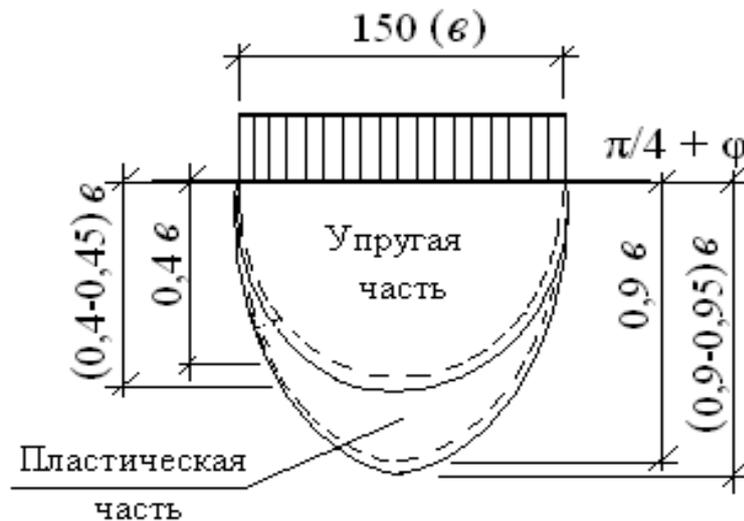


Рис.1.6. Очертание уплотнённого ядра в глинистых грунтах тугопластичной консистенции, полученного с помощью парафинированного экрана (грунт-глина с  $W_n=17,8$ ;  $B=0,30$ ;  $\gamma = 1,89 \text{ г/см}^3$ ).

- очертание «упругой» и «пластической» части уплотнённого ядра при расположении штампа на поверхности;
- очертание «упругой» и «пластической» части при заглублении штампа на  $h = 1,0 e$

Таким образом, рассматривать уплотнённое ядро, с точки зрения плотности его, как жёсткое, при фазах, предшествующих выпиранию, повидимому, нельзя, так как процесс увеличения плотности продолжается вплоть до разрушения и даже после потери устойчивости основания. Если бы ядро было жёстким, то любая точка монтажа между основанием и жёстким штампом находилась бы в совершенно идентичном положении. Следовательно, распределение давлений от штампа на основание при нагрузках, меньших критической, обязательно было бы равномерным. Между тем все экспериментальные исследования в [24, 26, 27] хотя и несколько расходящиеся в отношении формы эпюры давлений, приводят к одному основному выводу: эпюра имеет резко неравномерный характер.

Следовательно, уплотнённое ядро может быть принято за жёсткое

тело только для фазы выпирания, когда вопрос о характере распределения реактивных давлений теряет смысл и когда плотность в пределах его достигает своего максимального значения.

Исследования показали, что окончание формирования уплотнённого ядра практически, в большинстве случаев, совпадает с потерей несущей способности основания в грунтах различных видов по консистенции. Конечная форма уплотнённого ядра, размеры и очертания «упругой» и «пластической» частей его, установленные с помощью диаграмм изменения интенсивности импульсов гамма-квантов в горизонтальных рядах под штампом, а так же с помощью парафинированных экранов (рис.1.7) были близки к их значениям, полученным по диаграммам изменения плотности грунта. Заглубление штампов в глинистых грунтах тугопластичной консистенции не привело к существенным изменениям формы и размеров уплотнённого ядра и его частей. Процесс образования и развития уплотнённого ядра проходил аналогично, как и не для незаглублённых фундаментов, однако высота уплотнённого ядра была несколько меньше.

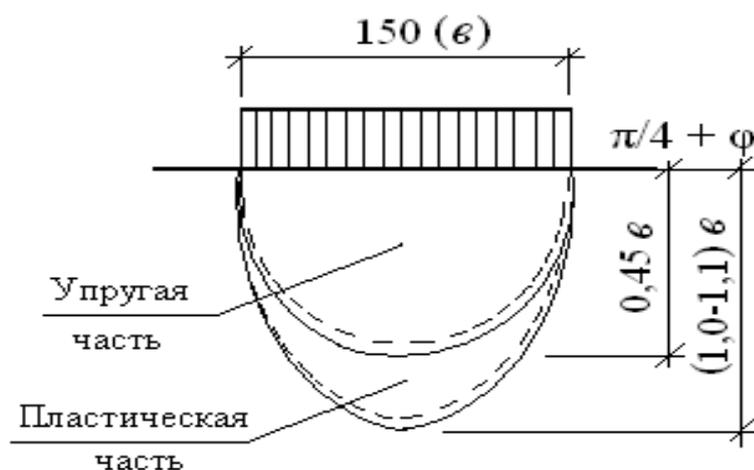


Рис. 1.7. Очертание уплотнённого ядра в глинистых грунтах мягкопластичной консистенции, полученного с помощью парафинированного экрана (грунт-глина с  $W_n=20,3$ ;  $B=0,55$ ;  $\gamma=1,80$  г/см<sup>3</sup>).  
 == очертание «упругой» и «пластической» части при расположении штампа на поверхности в опытах 1 и 3 серии

В результате полученной экспериментальной картины изменения плотности грунта в зависимости от заглубления штампа, наглядно на диаграммах можно определить начало образования пластической зоны уплотнённого ядра, при которой основание сооружений ещё не теряет устойчивость. Поэтому возникает необходимость определения критического давления, при котором небольшое добавочное усилие на основание может нарушить несущую способность грунта. Существующие методы определения критических усилий приведены в следующем разделе.

### 1.5. Методы расчёта критических нагрузок на грунты основания

Для определения размеров подошвы фундамента важно знать давление, при котором под краями фундамента в грунте начинает образовываться предельная зона, и затем как эта зона будет увеличиваться по мере возрастания нагрузки на грунтовое основание вплоть до своего максимального размера, соответствующего потере основанием несущей способности.

Задача о критической нагрузке на грунт была впервые рассмотрена немецким учёным Л. Прандтлем (1921г.). Приняв, что среда обладает только сцеплением, и пренебрегая собственным весом грунта, он выразил критическую нагрузку в условиях плоской задачи следующей формулой [51]:

$$P_{\text{макс. кр}} = (\pi + 2,0) C = 5,14 C, \quad (1.4)$$

где  $C$  — сцепление в среде, отвечающее структурному сцеплению скалистых пород  $C_c$  и связности  $\Sigma_{\text{св}}$  для пластичных глинистых грунтов.

Учитывая шероховатость подошвы фундаментов, Терцаги для условий плоской задачи дал такое выражение [51]:

$$P_{\text{кр}} = 5,7 C. \quad (1.5)$$

Формула Паукера была дана в следующем виде [51]

$$P_{\text{макс. кр}} = \gamma h_{\text{заглуб}} \text{tg}^4(45^\circ + \varphi/2), \quad (1.6)$$

В дореволюционной России формула Паукера применялась с коэффициентом запаса  $k_{\text{зап}} = 1,5-2,0$  и имела следующий вид [51]:

$$P_{\text{зап}} = \frac{1}{k_{\text{зап}}} \gamma (h_{\text{загл}} + h_c) \operatorname{tg}^4 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) . \quad (1.7)$$

Давление, соответствующее началу возникновения области пластической деформации и названное начальной критической нагрузкой [51], было установлено Н.П. Пузыревским (1934 г.) для несвязного грунта, у которого  $C = 0$ , потом Н.М. Герсевановым [16] и О.К. Фрелихом (1938 г.). Ими был рассмотрен случай, когда распределение напряжений от собственного веса в грунте было гидростатическим, т.е. коэффициент бокового давления в условиях естественного залегания  $\xi_0 = 1$ .

Согласно обоснованному утверждению, высказанному В.А. Флориным [83], этот коэффициент может изменяться в широких пределах и быть более или менее единицы. Коэффициент  $\xi_0$  является отношением бокового давления к вертикальному в естественном массиве грунта и зависит от условий формирования грунта, а также изменения напряженного состояния вследствие выемки грунта из котлована, в который устанавливается фундамент. Кроме решения для случая  $\xi_0 = 1$ , Н.М. Герсевановым были получены зависимости для вычисления  $P_{\text{кр}}$  путем подбора для:

$$\xi_0 = v_0 / (1 - v_0) \leq 1 \text{ и } C = 0 , \quad (1.8)$$

где  $v_0$  — коэффициент Пуассона грунта.

В связи с тем, что ограничивать среднее давление под фундаментом таким низким пределом, как  $P_{\text{кр}}$  оказалось нерациональным, в настоящее время вводится устанавливаемое для фундаментов, имеющих одинаковую нагрузку по бокам, ограничение, соответствующее образованию незначительных областей пластической деформации, по глубине не превосходящих одной четверти ширины подошвы фундамента. В связи с этим внутри пластической области оказывается такое напряженное состояние, при котором угол наибольшего отклонения равнодействующей от нормали к площадке в несвязном грунте, превышает угол внутреннего трения грунта.

Построение границ пластических областей конечных размеров на основе теории упругости было обстоятельно рассмотрено в работе

М.И. Горбунова – Посадова (1949 г.), где показано, что такие области возникают либо под краями фундамента, либо при  $\xi_0 < 1$  на оси симметрии, на некоторой глубине и потом расширяются с увеличением нагрузки, занимая все больший объем. Здесь исследуется условие образования пластической области, под краем фундамента в случае, когда  $\xi_0$  может иметь любое значение и быть как менее единиц, так и более нее, а влияние веса вышележащей толщи грунта, как это обычно делается, заменено нагрузкой  $P_0$ .

Расчетная схема этой задачи представлена на рис. 1.8, где рассматривается полубесконечная нагрузка.

До момента, пока  $P$  невелико, в полуплоскости наблюдается чисто упругое состояние, а при  $P = P_{кр}$  зарождение пластической области. Как показал И.В. Фёдоров [ 81 ], зарождение пластической области начинается вдоль луча, имеющего угол наклона к вертикали  $\theta = -\varphi$ .

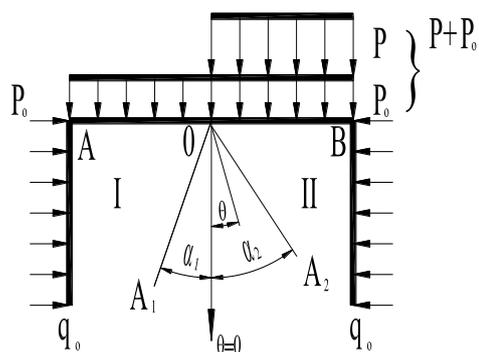


Рис.1.8. Схема действующих нагрузок

Полуплоскость разделена на 3 клина: I – А О А1, II – А О В и III – А1 О А. На их границах заданы следующие условия [ 81 ] :

$$\begin{aligned}
 &\text{вдоль } АО \text{ ( при } \theta = -\pi/2), \sigma_\theta = P_0; \tau_\theta = 0; \\
 &\text{вдоль } ОВ \text{ ( при } \theta = \pi/2), \sigma_\theta = P + P_0; \tau_\theta = 0; \\
 &\text{вдоль } ОА_1 \text{ (при } \theta = \alpha_1) \text{ и } ОА \text{ ( при } \theta = \alpha_2), \\
 &\sigma_r = \sigma_\theta ( 1 + \sin^2 \varphi ) / (\cos^2 \varphi) + 2 c \operatorname{ctg} \varphi; \tau_{r\theta} = - ( \sigma_\theta \operatorname{tg} \varphi + c ). \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Для компонент напряжений в областях I и II использованы выражения, удовлетворяющие основным уравнениям теории упругости [81]:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= C_1 - C_2 2\theta + D_1 \sin 2\theta - D_2 \cos 2\theta; \\
 \sigma_\theta &= C_1 - C_2 2\theta - D_1 \cos 2\theta + D_2 \cos 2\theta;
 \end{aligned} \right\}, \quad (1.10)$$

$$\tau_{r\theta} = C_2 + D_1 \cos 2\theta + D_2 \sin 2\theta$$

где  $C_1, C_2, D_1$  и  $D_2$  – коэффициенты.

Для пластической области III используется решение Прандтля для клина, в котором произведены дальнейшие преобразования ( $\sigma_\theta$  при  $\theta = \alpha_1$  обозначено  $\sigma_\theta^{\alpha_1}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= (\sigma_\theta^{\alpha_1} + C \operatorname{ctg} \varphi) e^{2(\theta - \alpha_1) \operatorname{tg} \varphi} - C \operatorname{ctg} \varphi; \\ \sigma_r &= \sigma_\theta \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + C \operatorname{ctg} \varphi; \\ \tau_{r\theta} &= -(\sigma_\theta \operatorname{tg} \varphi + C) \end{aligned} \right\}. \quad (1.11)$$

В результате теоретических преобразований было получено выражение для критической нагрузки [81]:

$$P_{\text{кр}} = \pi \left[ C - \frac{P_0^2}{4C} (1 - \xi_0)^2 \right], \quad (1.12)$$

где  $P_0$  – начальная внешняя нагрузка;  $\xi_0$  – коэффициент бокового давления в условиях естественного залегания.

Более сложными, чем выражения (1.11 и 1.12), получаются зависимости, если грунт обладает трением и сцеплением, т.е.  $\varphi \neq 0$  и  $C \neq 0$ . В этом случае образование пластической области начнётся вдоль луча, у которого величина:

$$[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2] / (\sigma_r + \sigma_\theta + 2C \operatorname{ctg} \varphi)^2, \quad (1.13)$$

достигает максимального значения и в свою очередь, равно  $\sin^2 \varphi$ . Подставляя в выражение (1.13) зависимости (1.12), соответствующие упругому решению, и путем последующих теоретических преобразований получим известную формулу Герсеванова – Фрелиха [81]

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi(P_0 + C \operatorname{tg} \varphi)}{\operatorname{ctg} \varphi - \pi/2 + \varphi}, \quad (1.14)$$

где  $P_0$  – начальная внешняя нагрузка.

При начальных значениях  $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta_{\text{зар}}$  и конечных для полного раскрытия области III:  $\alpha_1 = -(\pi/4 + \varphi/2)$ ;  $\alpha_2 = (\pi/4 - \varphi/2)$ , в результате расчётов [ 81 ], была получена формула Прандтля

$$\frac{P}{P_0 + C \operatorname{ctg} \varphi} + 1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} \quad (1.15)$$

Таким образом, оказывается, что нагрузка  $P_{\text{кр}}$ , при которой происходит зарождение (начала образования) пластической области, зависит от коэффициента бокового давления  $\xi_0$ , причем  $P_{\text{кр}}$  имеет наибольшее значение при  $\xi_0 = 1$ . Предельное состояние может возникать как вдоль луча, направленного как под фундамент при  $\xi_0 < 1$ , так и в противоположную сторону от него при  $\xi_0 > 1$ .

Предельное напряжённое состояние полуплоскости может быть получено путём решения задачи теории предельного равновесия. Решение дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием предельного равновесия Кулона – Мора позволяет определить напряжения в полуплоскости, построить сетку линий скольжения и найти значение предельного давления на основание. Предельное давление при полосовой нагрузке на невесомую полуплоскость, описывается решением Прандтля [ 51 ] (рис.1.9):

$$P_{\text{кр}}^{\text{пред}} = (q + C \operatorname{ctg} \varphi) \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} - C \operatorname{ctg} \varphi, \quad (1.16)$$

где  $C$  – удельное сцепление грунта;  $\varphi$  – угол внутреннего трения;  $q = \gamma h$  – боковая нагрузка;  $h$  – глубина приложения полосообразной нагрузки;  $\gamma$  – удельный вес грунта.

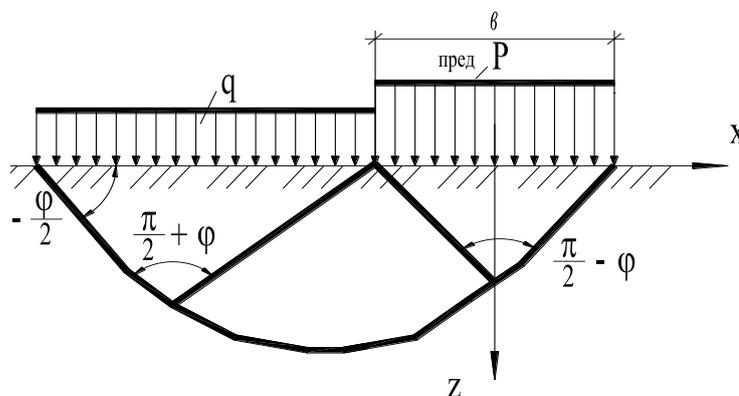


Рис.1.9. Схема действия полосовой нагрузки

При  $P = P_{пр}$  среда во всей полуплоскости, ограниченной сверху поверхностью, снизу линиями скольжения переходит в идеальное пластическое состояние. Деформации среды задача теории предельного равновесия не рассматривает.

Для водонасыщенных глинистых грунтов и их нестабилизированного состояния (когда внутреннее трение не реализуется) была получена предельная нагрузка А.С. Строгановым [72].

$${}^{пред}P_{кр} = 6,025 C + \gamma h, \quad (1.17)$$

где  $C$  – удельное сцепление грунта;  $\gamma h$  – боковая нагрузка от веса грунта;  $h$  – толщина грунтового слоя от уровня поверхности земли до подошвы фундамента.

При оценке несущей способности пластичных глинистых грунтов за рубежом часто используют формулу, предложенную А. Скемптоном [51].

$$P_{кр} = CN_C + \gamma h_{загл}, \quad (1.18)$$

где 
$$N_C = 5 \left( 1 + 0,2 \frac{B}{L} \right) \left( 1 + 0,2 \frac{h_{загл}}{B} \right);$$

$B=2b$  – ширина и  $L$  – длина прямоугольного фундамента

Таким образом, смешанная задача соединяет решение теории упругости для начальной стадии нагружения и решение теории предельного равновесия. Это преимущество важно с точки зрения получения единой теории, описывающей поведение грунтового основания в полном интервале нагрузок. Расчётные методы теории упругости и теории предельного равновесия широко используются в практике проектировании при исследовании слабых и не слабых грунтов.

Анализируя существующие методы расчёта критических усилий, нами было замечено отсутствие отдельных формул для расчёта критических усилий от действия некоторых внешних нагрузок. Используя известные законы теории предельного равновесия и экспериментальные исследования, были найдены аналитические зависимости критических усилий от действия внешних нагрузок.

## Глава 2

### РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКОГО УСИЛИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ И В МНОГОСЛОЙНЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ

#### 2.1. Актуальность задачи и вопросы, возникающие при её решении

Проектировщикам часто приходится сталкиваться со слабыми грунтами, в которых наиболее часто встречаются участки с процессами подтопления, с изменением физико-механических свойств грунтов в сторону ухудшения их несущей способности. Поэтому, в некоторых случаях существующие методы решения задач по определению предельного равновесия не позволяют в полной мере учесть все условия, обеспечивающие наибольшее использование прочностных и деформационных характеристик слабых грунтов для некоторых видов предельных нагрузок [49], [51] и [87].

Обычно применяют формулы, дающие предельную несущую способность, и коэффициенты запаса, рассматривающиеся в строгих решениях, но для приближения их к действительным условиям часто требуются дополнительные расчётные преобразования. Всё это определяет необходимость проведения дополнительных научно – исследовательских работ для изучения несущей способности грунтов.

Благодаря решениям в линейной постановке упругопластических задач о полуплоскости, нагружённых сверху распределённой внешней нагрузкой и имеющих различные начальные вертикальные и горизонтальные напряжения, в которых среда обладает внутренним трением и удельным сцеплением, были найдены критические нагрузки, соответствующие условию зарождения пластической области и глубины развития этих областей.

Это решение позволило выявить влияние на нагрузку, соответствующую началу образования пластических областей, величины бокового давления грунта в условиях его естественного залегания, установить связь между развитием пластических областей и нагрузкой в зависимости от различного начального напряжённого состояния. В соответствии с графическими зависимостями быстро оценить несущую способность грунтового полупространства и запас прочности при различ-

ных физико-механических показателях. Рассмотрим сначала плоскую задачу для однородной грунтовой среды.

## **2.2. Решение плоской задачи от действия внешних треугольных нагрузок в полупространстве**

В этом разделе решены задачи об оценке критического усилия в модели грунтовой среды в виде однородного, тяжёлого, упругого полупространства под действием внешней нагрузки, приложенной к полупространству. Расчёт выполнялся для нескольких случаев действия различных треугольных нагрузок на грунтовое основание.

Расчётная схема представляет собой полупространство с распределённой внешней нагрузкой  $P$ . Полупространство находится в гидростатическом напряжённом состоянии:  $\sigma_x^0 = \sigma_z^0 = \gamma z$ , где  $\sigma_x^0$  и  $\sigma_z^0$  – начальные составляющие напряжения;  $\gamma z$  – нагрузка от веса грунта до уровня  $z$ . Следовательно, напряжённое состояние в полупространстве определяется весом полупространства и влиянием нагрузки. Задача заключается в определении такой величины критического давления  $P_{кр}$ , при котором область предельного равновесия распространяется на глубину  $z_{\max}$ .

### **2.2.1. Метод расчёта критического усилия в полупространстве от действия треугольной нагрузки с помощью рекуррентных формул**

Расчётная схема представляет собой однородное грунтовое полупространство с треугольной нагрузкой  $P$  (рис.2.1) [ 32 ].

Полупространство находится в гидростатическом напряжённом состоянии:  $\sigma_x^0 = \sigma_z^0 = \gamma z$ , где  $\sigma_x^0$  и  $\sigma_z^0$  – начальные составляющие напряжения;  $\gamma z$  – нагрузка от веса грунта до уровня  $z$ . В этом напряжённое состояние в полупространстве определяется весом полупространства и влиянием нагрузки. Задача заключается в определении такой величины критического давления  $P_{кр}$ , при котором область предельного равновесия распространяется на глубину  $z_{\max}$  [ 32 ].

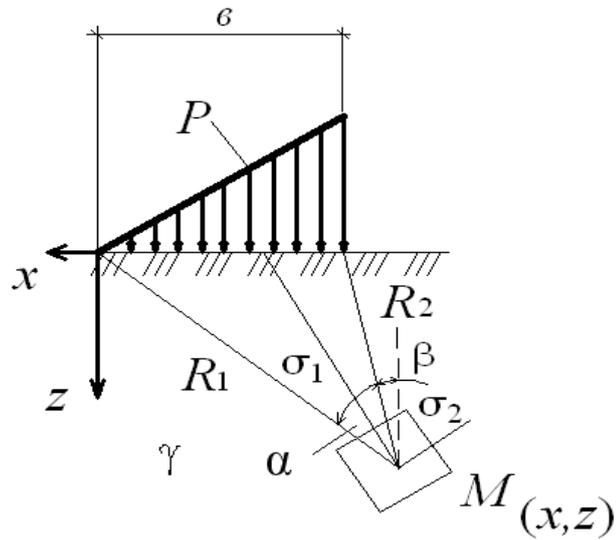


Рис. 2.1. Схема действия треугольной нагрузки в условиях плоской задачи

Формулы для составляющих напряжений, обусловленных действием треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями [52]:

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{b} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{z} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{z} \right) - \frac{z(x-b)}{(x-b)^2 + z^2} \right], \quad (2.1)$$

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{z}{b} \left( \ln \frac{(x-b)^2 + z^2}{x^2 + z^2} \right) + \frac{x}{b} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{z} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{z} \right) + \frac{z(x-b)}{(x-b)^2 + z^2} \right], \quad (2.2)$$

где  $P$  – величина треугольной нагрузки ;  $b$  – база действия нагрузки.

Путём преобразований формулы (2.1) и (2.2) можно привести к следующему виду:

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{2x}{b} \alpha - \sin 2\beta \right], \sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left[ \frac{2z}{b} \left( \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) + \frac{2x}{b} \alpha + \sin 2\beta \right], \quad (2.3)$$

$$\tau_{xz} = \frac{P}{2\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right),$$

где  $\alpha$  – угол видимости базы действия нагрузки;  $\beta$  – угол с вершиной в точке  $M$ , образованный лучом  $R_1$  и осью  $z$ .

Для точки  $M$  (рис.2.1), расположенной на глубине  $z$ , найдем главные напряжения при  $\beta = \alpha/3$ , т.к. наибольшие и наименьшие нормальные напряжения возникают на площадках, расположенных по биссектрисам углов видимости и площадкам им перпендикулярным

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} + \gamma z \quad (2.4)$$

или

$$\sigma_{1,2} = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma z. \quad (2.5)$$

Подставив выражение (2.5) в условие предельного равновесия [87]:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sin \varphi \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + P_e \right), \quad (2.6)$$

где  $P_e = C \operatorname{tg} \varphi$  – давление связности;  $C$  – расчётное значение сцепления связного грунта;  $\varphi$  – угол внутреннего трения грунта, получим следующее уравнение:

$$1,42 \frac{P}{\pi} \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 1,42 \frac{P}{\pi} \sin \frac{2}{3} \alpha = 2 \sin \varphi \left( \frac{P}{\pi} \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{2P}{\pi} \frac{x}{b} \alpha + \gamma \cdot z + C \cdot \operatorname{ctg} \varphi \right) \quad (2.7)$$

Решая уравнение (2.7) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{2 \sin \varphi \frac{Px}{\pi b} \alpha - 0,71 \frac{P}{\pi} \sin \frac{2}{3} \alpha + C \cdot \cos \varphi}{\frac{P}{\pi b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - \gamma \sin \varphi}. \quad (2.8)$$

Найдём угол видимости  $\alpha$ , при котором  $z = z_{\max}$ , продифференцировав для этого уравнение (2.8) по  $\alpha$ :

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{\frac{P}{\pi} \left( 2 \frac{x}{\epsilon} \sin \varphi - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha \right)}{\frac{P}{\pi b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - \gamma \sin \varphi}, \quad (2.9)$$

при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{P}{\pi} \left( 2 \frac{x}{\epsilon} \sin \varphi - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha \right) &= 0; \\ \frac{x}{\epsilon} \sin \varphi - 0,355 \cos \frac{2}{3} \alpha &= 0; \quad \frac{x}{0,355\epsilon} \sin \varphi = \cos \frac{2}{3} \alpha; \\ \alpha &= \frac{3}{2} \arccos \left( \frac{x}{0,355\epsilon} \sin \varphi \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.8) получим формулу для  $z_{\max}$  в виде [ 32 ]

$$z_{\max} = \frac{3 \sin \varphi \frac{Px}{\pi \epsilon} \arccos \left( \frac{x}{0,355\epsilon} \sin \varphi \right) - 0,71 \frac{P}{\pi} \sin \left[ \arccos \left( \frac{x}{0,355\epsilon} \sin \varphi \right) \right] + C \cdot \cos \varphi}{\frac{P}{\pi b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - \gamma \sin \varphi}, \quad (2.11)$$

где  $\epsilon$  – длина базы треугольной нагрузки  $P$ ;  $x$  – ордината центра тяжести эпюры треугольной нагрузки;  $R_1$  и  $R_2$  – направляющие, соединяющие начало и конец полосовой нагрузки с точкой  $M$  на глубине  $z$ .

В уравнении (2.11) содержится два неизвестных  $z_{\max}$  и  $P_{\text{кр}}$ . Для определения  $P_{\text{кр}}$  найдём  $z_{\max}$  по рекуррентным формулам краевой задачи [ 70 ] (рис. 2.2).

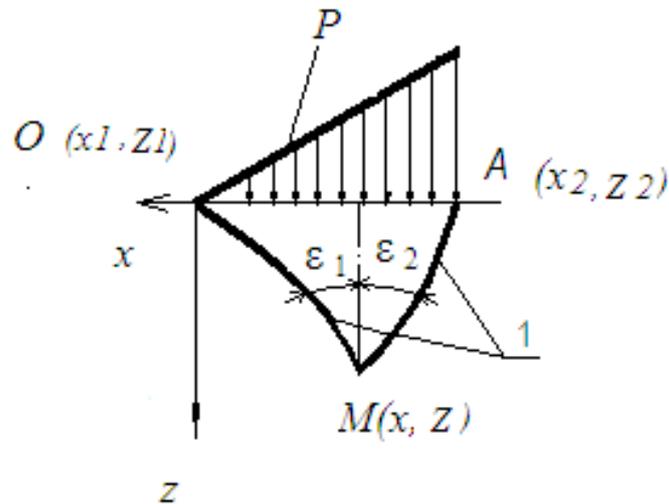


Рис. 2.2. Краевые условия при действии треугольной нагрузки:  
1 - линии влияния от действия нагрузки

$$\begin{cases} z - z_1 = (x - x_1) \operatorname{tg}(90^\circ - \varepsilon_1), \\ z - z_2 = (x - x_2) \operatorname{tg}(90^\circ + \varepsilon_2), \end{cases} \quad (2.12)$$

где  $\varepsilon_1 = 2/3 \alpha$ ;  $\varepsilon_2 = 1/3 \alpha$ ;  $x_1, z_1$  - координаты точки О (начало базы действия нагрузки);  $x_2, z_2$  - координаты точки А (конец базы действия нагрузки).

Решая систему (2.12), получаем значение  $z_{\max}$ . Подставим  $z_{\max}$  в уравнение (2.11), получим формулу для вычисления критического усилия  $P_{\text{кр}}$  [32]:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi(\gamma \cdot z_{\max} \sin \varphi + C \cdot \cos \varphi)}{\frac{z_{\max}}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \varphi + 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha}, \quad (2.13)$$

где  $\gamma$  - удельный вес грунта.

Из формулы (2.13) при  $z_{\max} = 0$ , найдём начальное критическое усилие [32]

$$P_{\text{нач.кр}} = \frac{\pi \cdot C \cdot \cos \varphi}{0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \varphi}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим зависимость  $P_{\text{кр}}$  от физико - механических характеристик:  $C, \varphi, \gamma$  увлажнённых заторфованных грунтов при длине базы нагрузки  $b = 1$  м. Графический вид этих зависимостей представлен на рис. 2.3 и 2.4.

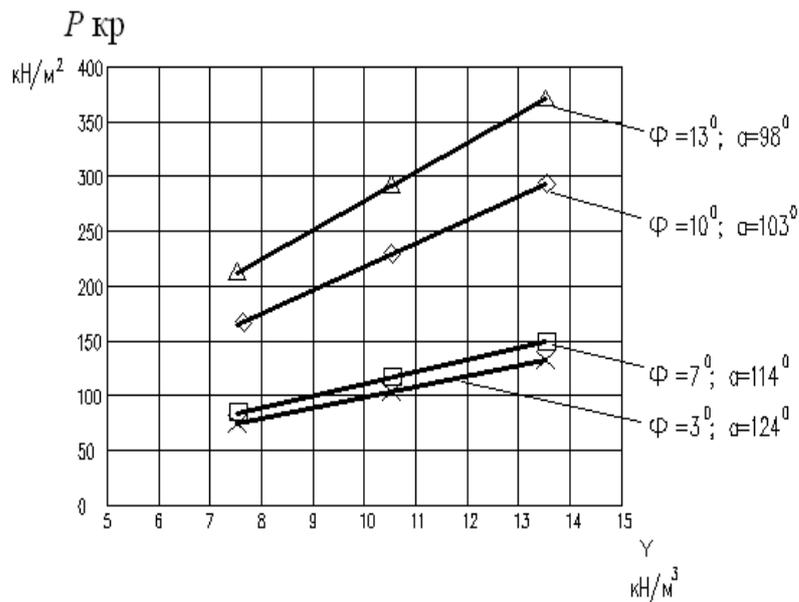


Рис.2.3. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от удельного веса грунта  $\gamma$

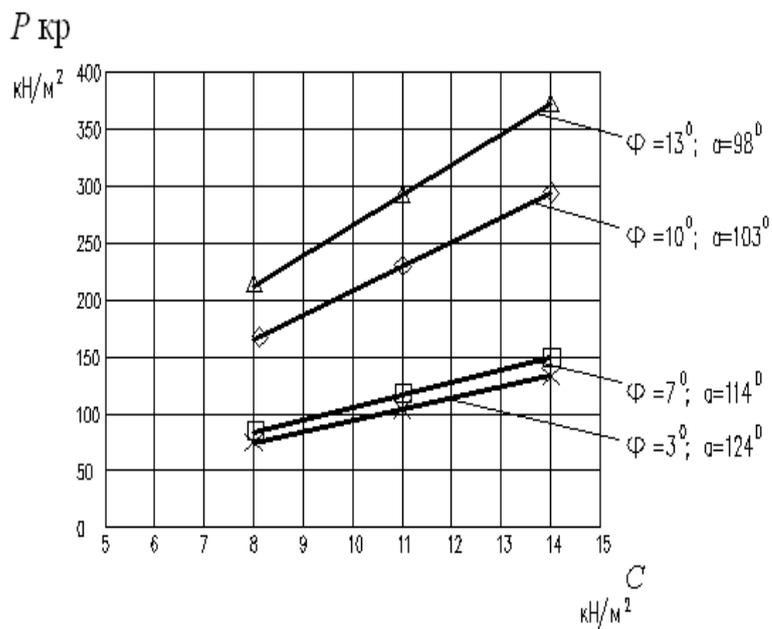


Рис. 2.4. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от удельного сцепления грунта  $C$

Значения критических нагрузок для разных типов грунтов, определённые по графическим зависимостям представлены в табл.2.1.

Таблица.2.1.

## Критические нагрузки для разных типов грунтов

№ п/п	Типы грунтов	$\gamma$ , МПа/м	$\varphi$ , °	$C$ , МПа	$P_{кр}$ , МПа	$z_{\max}$ , м
1	Сапрпель	0,0013	3	0,00025	0,050	0,73
2	Торф низинный	0,0015	7	0,0045	0,063	0,77
3	Глины мягко-пластичной консистенции	0,0019	8	0,0005	0,075	1,0
4	Ил озёрный	0,0014	4	0,0003	0,060	0,74
5	Суглинок водонасыщенный	0,002	13	0,005	0,125	1,2

Из анализа зависимости  $P_{кр}$  от параметров инженерно - геологической среды ( $\varphi, \gamma, C$ ) следует :

- при увеличении угла внутреннего трения  $\varphi$  происходит возрастание критической нагрузки  $P_{кр}$  и максимальной глубины залегания  $z_{\max}$ , но при этом угол видимости  $\alpha$  уменьшается.
- при увеличении удельного веса грунта и удельного сцепления происходит возрастание критической нагрузки  $P_{кр}$  и максимальной глубины залегания  $z_{\max}$ , но с уменьшением угла  $\alpha$ .

Линейные зависимости  $P_{кр}$  от  $\varphi, \gamma, C$ , представленные на рис. 2.3 и 2.4 позволяют упростить расчёты критических усилий при исследовании грунтов. Метод определения критических усилий и максимальных глубин залегания грунтов находящихся в предельном состоянии, позволяет получить достаточно точное решение плоской задачи для оценки устойчивости оснований сооружений.

В следующем пункте плоские задачи выполнены в более усложнённом виде. Расчёт критических усилий выполняется в однослойной и слоистой грунтовой среде.

## 2.2.2. Метод расчёта критического усилия через коэффициент упругого полупространства

Расчётная схема представляет собой полупространство с внешней треугольной нагрузкой  $P$  (рис.2.5) [40].

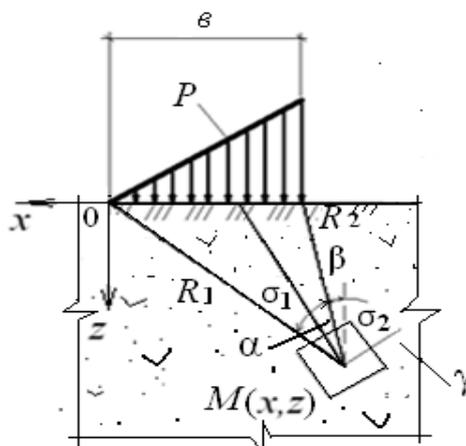


Рис.2.5. Модель однослойной грунтовой среды и эпюра треугольной нагрузки

Формулы для главных напряжений, обусловленных действием треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями [52]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma z ; \quad (2.15)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma z , \quad (2.16)$$

где  $P$  – величина треугольной нагрузки ;  $b$  – база действия нагрузки;  $\alpha$  – угол видимости базы действия нагрузки. Подставив выражения (2.15) и (2.16) в условие предельного равновесия [87]:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sin \varphi \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + P_e \right) , \quad (2.17)$$

получим следующие уравнения:

$$z \left[ \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi}{P} \gamma \sin \varphi \right] = -0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} C \cdot \operatorname{ctg} \varphi . \quad (2.18)$$

Решая уравнение (2.18) относительно  $z$ , получим [40]

$$z = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{\epsilon} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi}{P} C \cdot \cos \varphi}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{\epsilon} \right) - \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{P}}. \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{\epsilon} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{\epsilon} \right) - \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{P}} = 0, \quad (2.20)$$

при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{2x \sin \varphi}{\epsilon} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha &= 0; \\ \alpha &= \frac{3}{2} \arccos \left( \frac{x}{0,36\epsilon} \sin \varphi \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставляя (2.21) в уравнение (2.19) получим формулу для  $z_{\max}$  [40]:

$$z_{\max} = \frac{3 \sin \varphi \frac{x}{\epsilon} \arccos \left( \frac{x}{0,355\epsilon} \sin \varphi \right) - 0,71 \sin \left[ \arccos \left( \frac{x}{0,355\epsilon} \sin \varphi \right) \right] + C \cdot \cos \varphi}{\frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - \frac{\pi}{P} \gamma \sin \varphi}, \quad (2.22)$$

где  $\epsilon$  – длина базы треугольной нагрузки  $P$ ;  $x$  – ордината центра тяжести эпюры треугольной нагрузки;  $R_1$  и  $R_2$  – направляющие, соединяющие начало и конец полосовой нагрузки с точкой  $M$  на глубине  $z$ .

Для определения  $P_{\text{кр}}$  (2.22) подставим в формулу [51]:

$$z_{\max} = \frac{0,88PB}{C_z}, \quad (2.23)$$

где  $C_z = E/(1 - \nu^2)$  – коэффициент упругого полупространства,  $B = \epsilon$  – база действия нагрузки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль деформации, получаются постоянными для полупространства [63].

Получим следующее уравнение:

$$\frac{0,88P\epsilon}{C_z} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{\epsilon} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi}{P} C \cdot \cos \varphi}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{\epsilon} \right) - \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{P}}. \quad (2.24)$$

Выражение (2.24) приведём к квадратному уравнению 2-й степени.

$$0,88P^2 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - P \left( 0,88 \pi \epsilon \gamma \sin \varphi + \frac{2xC_z \sin \varphi}{\epsilon} \alpha - 0,71C_z \sin \frac{2}{3} \alpha \right) - \pi C_z \cdot C \cdot \cos \varphi = 0. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) приведём к следующему виду:

$$P^2 + NP + L = 0. \quad (2.26)$$

Решая уравнение (2.26), получим формулы для вычисления критического усилия  $P_{кр}$  [40]:

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}, \quad (2.27)$$

где

$$M = 0,88 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi);$$

$$N = - \left( 0,88 \pi \epsilon \gamma + \frac{2xC_z \sin \varphi}{\epsilon} \alpha - 0,71C_z \sin \frac{2}{3} \alpha \right); \quad (2.28)$$

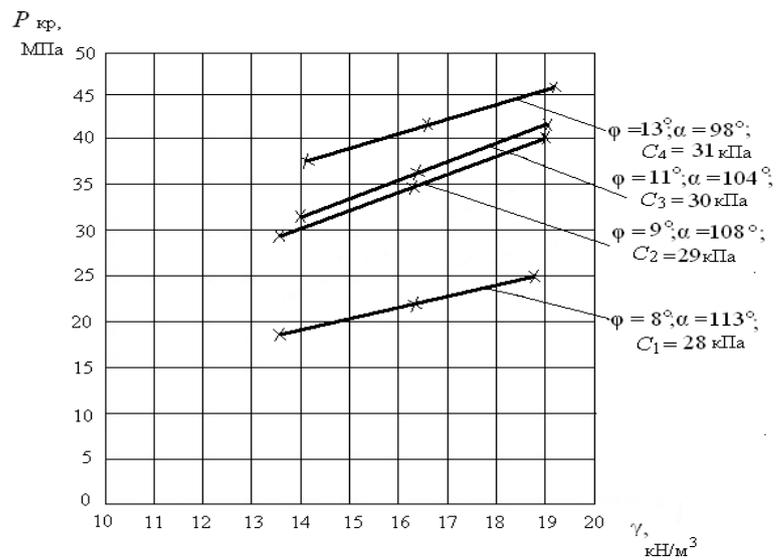
$$L = - \pi C_z \cdot C \cdot \cos \varphi.$$

Рассмотрим зависимость  $P_{кр}$  от физико-механических характеристик:  $C$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $\epsilon = 1$  м. Характеристики грунтов указаны в таблице 2.2. Графический вид этих зависимостей представлен на рис. 2.6-2.7.

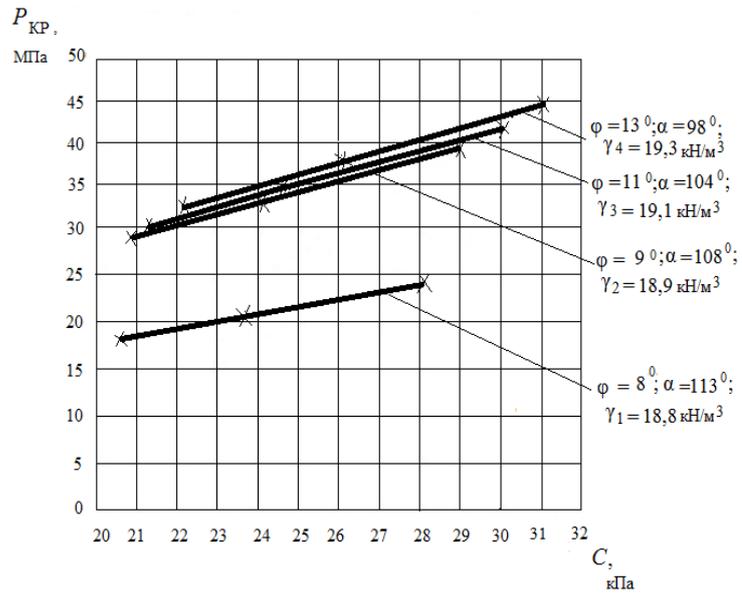
Таблица 2.2.

Физико - механические характеристики грунтового слоя

Наименование грунтов	Удельный вес грунта $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °	Макс. глубина пред. напряжённого состояния $z_{\text{макс}}$ , м	Удельное сцепление грунта $C$ , кПа	Модуль деформации грунта $E$ , МПа	Коэф. упруго-го полупространства $C_z$ , МПа
Глины	18,8	8	0,20	28	10	11,24
мягко-пластич-	18,9	9	0,22	29	13	14,61
ных пород	19,1	11	0,24	30	14	15,73
	19,3	13	0,30	31	16	17,98

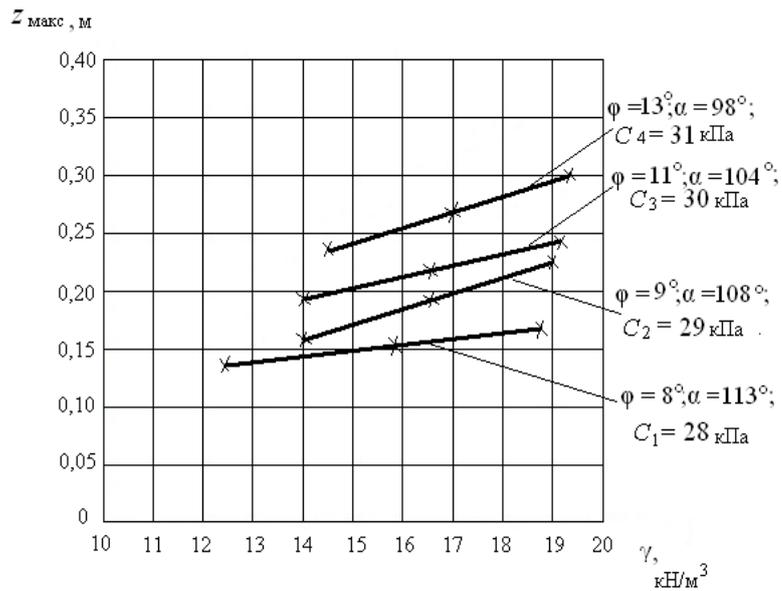


a)

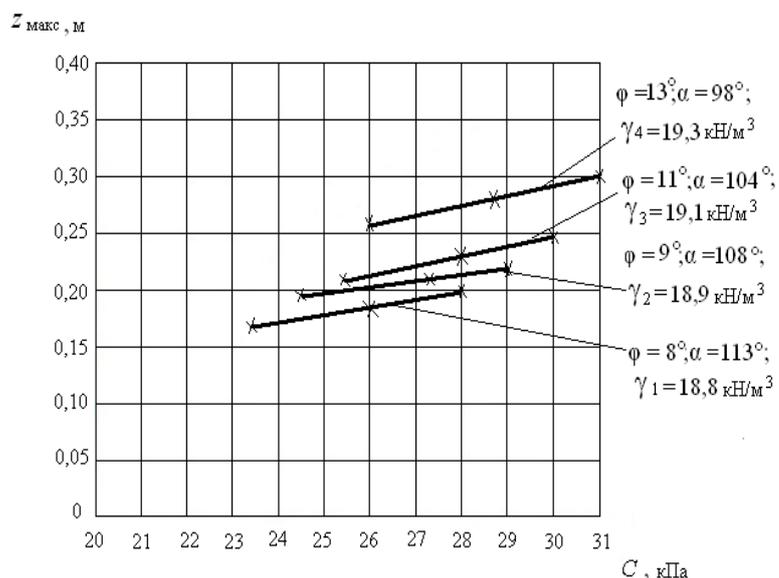


б)

Рис.2.6. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ;  
 б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис.2.7. Зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от: а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$

### 2.2.3. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону равнобедренного треугольника

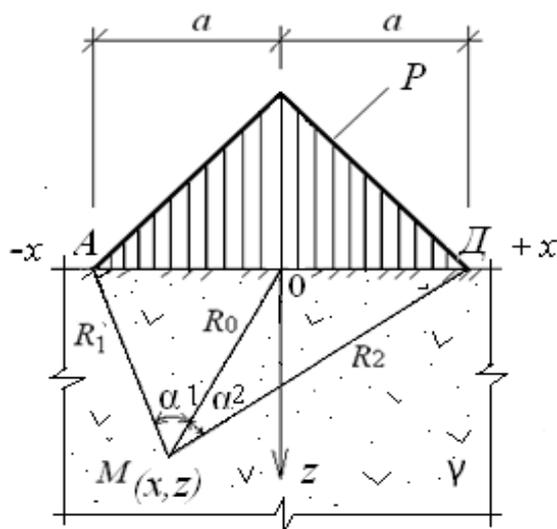


Рис. 2.8. Модель однородной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Модель грунтовой среды от равнобедренной нагрузки указана на рис. 2.8. Главные напряжения от действия треугольной равнобедренной нагрузки найдены из выражений [ 52 ]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \gamma z; \quad (2.29)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \gamma z, \quad (2.30)$$

где  $P$  – величина треугольной равнобедренной нагрузки ;  $a$  – база действия нагрузки;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы видимости базы действия нагрузки.

Подставив выражения (2.29) и (2.30) в условие предельного равновесия (2.17) , получим следующие уравнения:

$$\frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \frac{P \sin \varphi}{\pi a} z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - \sin \varphi \gamma z = \frac{P \sin \varphi}{\pi a} [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \sin \varphi C c \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.31)$$

Решая уравнение (2.31) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P}}. \quad (2.32)$$

Из уравнения (2.32) найдём углы видимости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , при которых  $z = z_{\max}$ , про дифференцировав это уравнение отдельно по  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Уравнение (2.32) про дифференцируем по  $\alpha_1$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_1} = \frac{(a+x) \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} - \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} = 0; \quad (2.33)$$

$$(a+x)(\alpha_1 - \alpha_2) - [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] = -(a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,4} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P} + \frac{\pi a \gamma (a+x) \sin \varphi}{0,4 P};$$

$$\alpha_2 = -(a+x) \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,8 P} - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{2 P} + (a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8 a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} = (a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8 a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - (a+x) \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,8 P} - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{2 P}.$$

(2.34)

Продифференцируем уравнение (2.32) по  $\alpha_2$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_2} = \frac{(a-x) \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} - \frac{-\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}^2} = 0, \quad (2.35)$$

тоже при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ ,

$$(a-x) \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\} + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& (a-x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4(a-x)}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma (a-x)}{P} + \\
& + \frac{0,4}{\sin \varphi} [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{0,4}{\sin \varphi} \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P} = 0; \\
& (a-x)(\alpha_1 - \alpha_2) + [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] = -(a-x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,4} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \\
& + (a-x) \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4P} - \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P}; \\
& \alpha_1 = -(a-x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (a-x) \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{2P}. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

При найденных значениях углов глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , следовательно, формула (2.32) примет вид [40]:

$$z_{\max} = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma}{P}}. \quad (2.37)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (2.37) в формулу (2.33), при условии, что  $B = 2a$ .

$$\begin{aligned}
& 1,76P^2 \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,704P^2}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - 1,76P \pi a \gamma = \\
& = PC_z \left[ (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2) \right] + \pi C_z C \operatorname{ctg} \varphi. \quad (2.38)
\end{aligned}$$

В результате путём преобразований получим следующее выражение

$$\begin{aligned}
& \frac{1,76P^2}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)] - P \{ C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76\pi a \gamma \} - \\
& - \pi C_z C \operatorname{ctg} \varphi = 0. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Квадратное уравнение (2.39) запишем в виде следующего выражения [40]:

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (2.40)$$

где

$$M = \frac{1,76}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)];$$

$$N = -\{C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a}(\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76\pi a \gamma\};$$

$$L = -\pi C_z C \operatorname{ctg} \varphi. \quad (2.41)$$

Решая уравнение (2.40), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  [40]:

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (2.42)$$

Формулы (2.37) и (2.42) позволяют вычислять  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  в полупространстве. В этих формулах  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения можно получить формулы для  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. При  $a = 0$  (с правой или с левой стороны эпюры), эпюра внешней нагрузки будет иметь вид прямоугольного треугольника; при  $a \rightarrow \infty$  — будет иметь вид полубесконечной полосы.

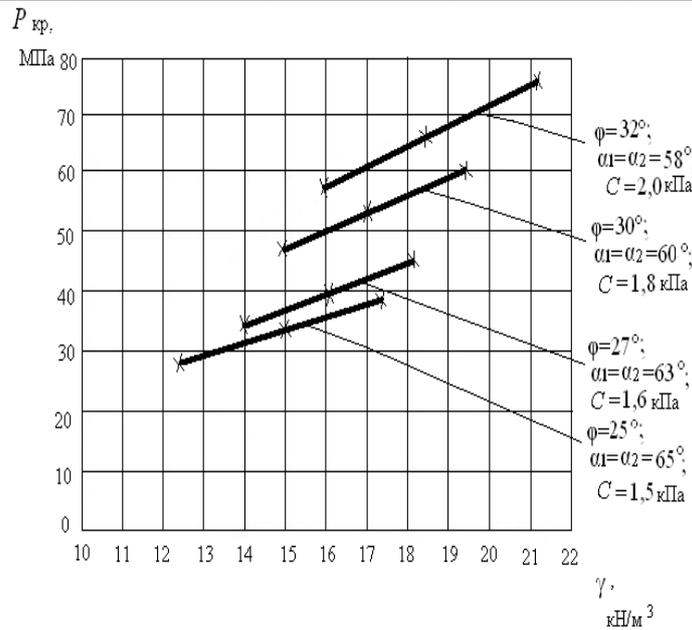
Графический вид зависимостей  $P_{кр}$  и  $z_{\max}$  от физико-механических характеристик:  $C$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $B=2a=2\text{м}$  представлен на рис. 2.9 и 2.10. Расчёт  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства (табл.2.3), соответствующим супесчаным водонасыщенным грунтам.

Таблица 2.3.

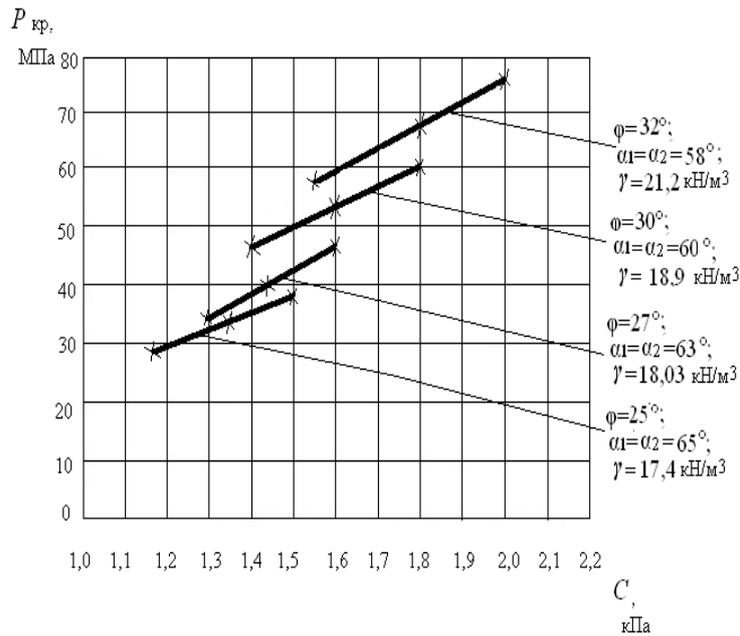
Физико-механические характеристики модели полупространства

Наименование грунтов	Удельный вес грунта $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения грунта $\varphi$ , °	Макс. глубина пред. напряжённого состояния $z_{\max}$ , м	Удельное сцепление грунта $C$ , кПа	Модуль деформации грунта $E$ , МПа	Коэф. упругого полупространства $C_z$ , МПа
----------------------	--	--	---	-------------------------------------	------------------------------------	---

Супесча- ные водо- насыщен. грунты	17,4 18,03 19,4 21,2	25 27 30 32	0,47 0,51 0,58 0,62	1,5 1,6 1,8 2,0	24 26 27 28	27,6 29,9 31,03 32,18
---	-------------------------------	----------------------	------------------------------	--------------------------	----------------------	--------------------------------



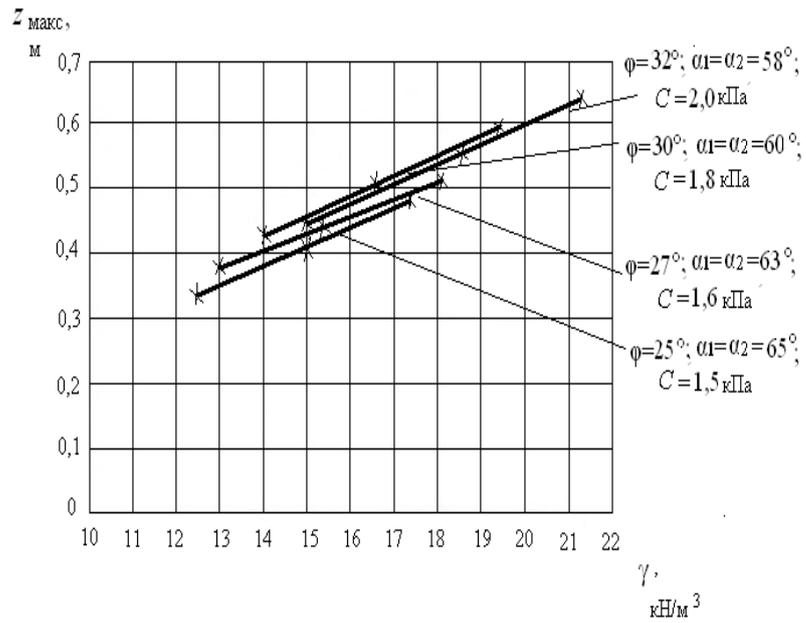
а)



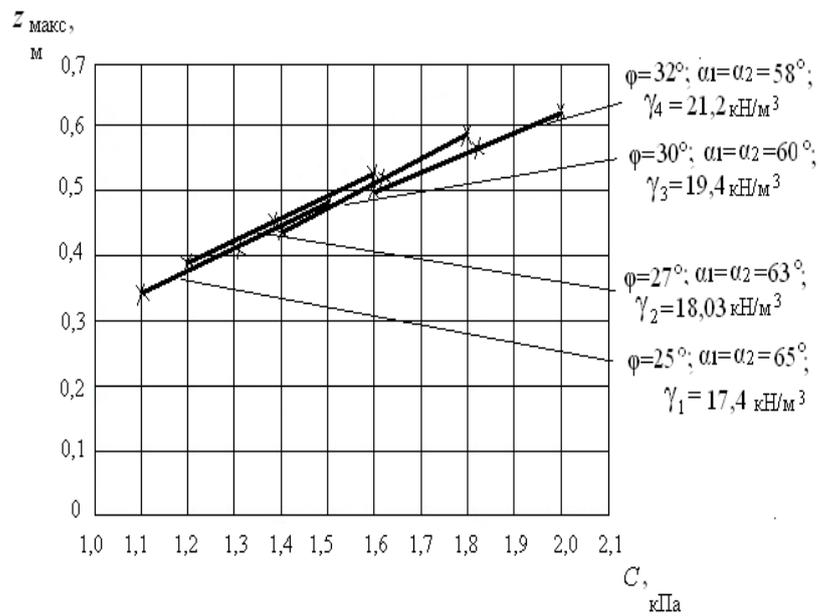
б)

Рис.2.9. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных

значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис.2.10. зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от: а) удельного веса грунта  $\gamma$  при

постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б)  
 удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных  
 значениях удельного веса  $\gamma$

### 2.2.4. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону неравностороннего треугольника

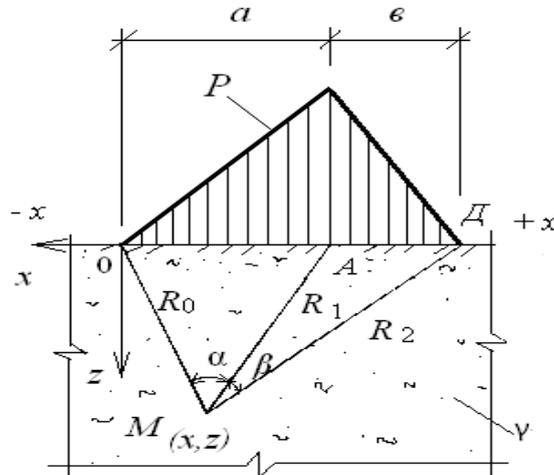


Рис. 2.11. Модель однородной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

На рис. 2.11. изображена модель грунтовой среды от неравносторонней треугольной нагрузки. Формулы главных напряжений от неравносторонней треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями [52]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+b-x}{b} \beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{z}{b} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{b} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b} \right)^2} + \gamma z; \quad (2.43)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+b-x}{b} \beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{z}{b} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{b} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b} \right)^2} + \gamma z, \quad (2.44)$$

где  $P$  – внешняя нагрузка ;  $x, z$  – координаты точки  $M$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  – углы видимости базы действия внешней нагрузки;  $R_0, R_1$  и  $R_2$  – расстояния от точки  $M(x,z)$  до точек  $A, O, D$  базы внешней нагрузки ;  $\gamma$  – объёмный вес однородного слоя полупространства ;  $a = AO, b = OD$ .

Подставим выражения (2.43) и (2.44) в условие предельного равновесия (2.17) , получим следующее уравнение:

$$\frac{Pz}{\pi} \left[ \sqrt{\left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha - \beta}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right)^2} - \frac{\sin \varphi}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1 \sin \varphi}{R_0} \right] - \gamma z \sin \varphi = \sin \varphi \left[ \frac{P}{\pi} \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \epsilon - x}{\epsilon} \beta \right) + C \operatorname{ctg} \varphi \right]. \quad (2.45)$$

Решая уравнение (2.45) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\left(\frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \epsilon - x}{\epsilon} \beta\right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha - \beta}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (2.46)$$

Из уравнения (2.46) найдём углы видимости  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых  $z = z_{\max}$ , продифференцировав его отдельно по  $\alpha$  и  $\beta$ . Продифференцируем уравнение (2.46) по  $\alpha$ :

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{\frac{x}{a} \left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha - \beta}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha - \beta}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}^2} - \frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ \left(\frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \epsilon - x}{\epsilon} \beta\right) + \frac{\pi}{P} C \operatorname{ctg} \varphi \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha - \beta}{a} - \frac{\beta}{\epsilon}\right) \right] - \frac{\pi \gamma}{P} \right\}^2} = 0;$$

В результате будем иметь:

$$\beta = \frac{x\epsilon(0,96 - \sin \varphi)}{0,4(a + \epsilon)} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{\pi \gamma x \epsilon \sin \varphi}{0,4P(a + \epsilon)} - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P(a + \epsilon)}. \quad (2.47)$$

Продифференцируем уравнение (2.46) по  $\beta$ :

$$\frac{dz}{d\beta} = \frac{\frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} \left\{ \frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right\} - \frac{\pi\gamma}{P}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi\gamma}{P} \right\}^2 - \frac{\left( -\frac{0,4}{\varepsilon \sin\varphi} \right) \left\{ \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi\gamma}{P} \right\}^2}} = 0.$$

В результате получим:

$$\alpha = \frac{\pi\gamma a(a+\varepsilon-x)\sin\varphi}{0,4P(a+\varepsilon)} - \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P(a+\varepsilon)} - \frac{a(a+\varepsilon-x)}{0,4(a+\varepsilon)} (0,96-\sin\varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right). \quad (2.48)$$

При найденных значениях углов глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , следовательно, формула (2.46) примет вид [40] :

$$z_{\max} = \frac{\left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) - \frac{\pi\gamma}{P}}. \quad (2.49)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (2.49) в формулу (2.33), в этом случае  $B = a + \varepsilon$ .

$$\frac{0,88P(a+\varepsilon)}{C_z} = \frac{\left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{(0,96-\sin\varphi)}{\sin\varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin\varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) - \frac{\pi\gamma}{P}};$$

$$\frac{0,88P^2}{\sin\varphi} \left[ (0,96-\sin\varphi) \left( \varepsilon \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + 0,4(\varepsilon\alpha - a\beta) \right] - P \left\{ 0,88\pi a \varepsilon \gamma + \frac{C_z a \varepsilon}{(a+\varepsilon)} (\varepsilon x \alpha + a(a+\varepsilon-x)\beta) - \frac{\pi a \varepsilon C_z C \operatorname{ctg} \varphi}{(a+\varepsilon)} \right\} = 0. \quad (2.50)$$

Квадратное уравнение (2.50) приведём к следующему выражению [40] :

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (2.51)$$

где

$$M = \frac{0,88P^2}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi)(\nu \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2}) + 0,4(\nu\alpha - a\beta)];$$

$$N = -\{0,88\pi a \nu \gamma + \frac{C_z a \nu}{(a + \nu)} (\nu x \alpha + a(a + \nu - x)\beta)\}; \quad (2.52)$$

$$L = -\frac{\pi a \nu C_z C \operatorname{ctg} \varphi}{(a + \nu)}.$$

Решая уравнение (2.51), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  [40]:

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (2.53)$$

Придавая различные значения  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$ , можно получить формулы для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. При  $\nu = 0$ , эпюра внешней нагрузки будет иметь вид прямоугольного треугольника; при  $a = \nu$  – равнобедренного треугольника; при  $\nu \rightarrow \infty$  – полубесконечной полосы. На рис.2.12 и 2.13 приведены зависимости  $P_{кр}$  от удельного веса однослойного полупространства, удельного сцепления  $C$  и угла полного внутреннего трения  $\varphi$ .

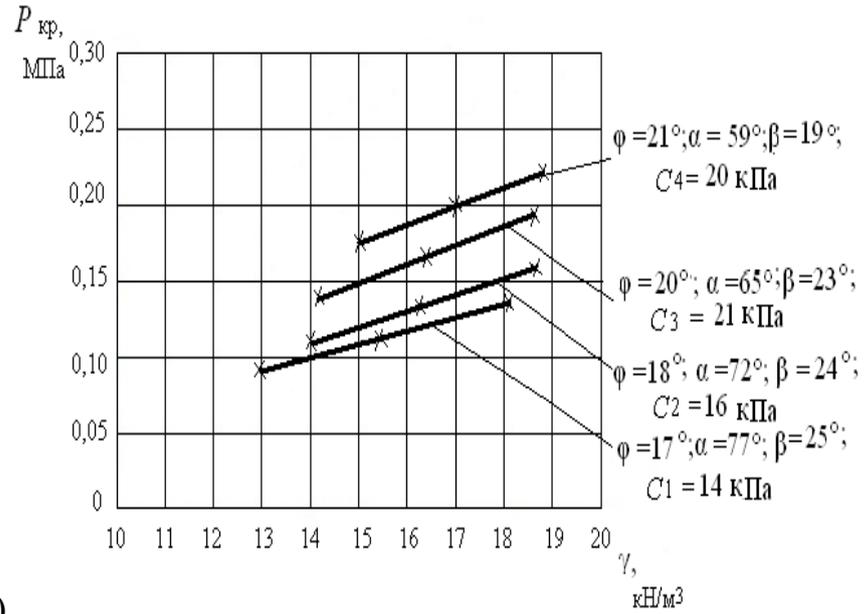
Графический вид зависимостей  $P_{кр}$  и  $z_{\max}$  от физико - механических характеристик:  $C$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $B = a + \nu = 2 + 1 = 3\text{м}$  представлен на рис. 2.12-2.13. Характеристики слабых грунтов приведены в таблице 2.4.

Таблица 2.4.

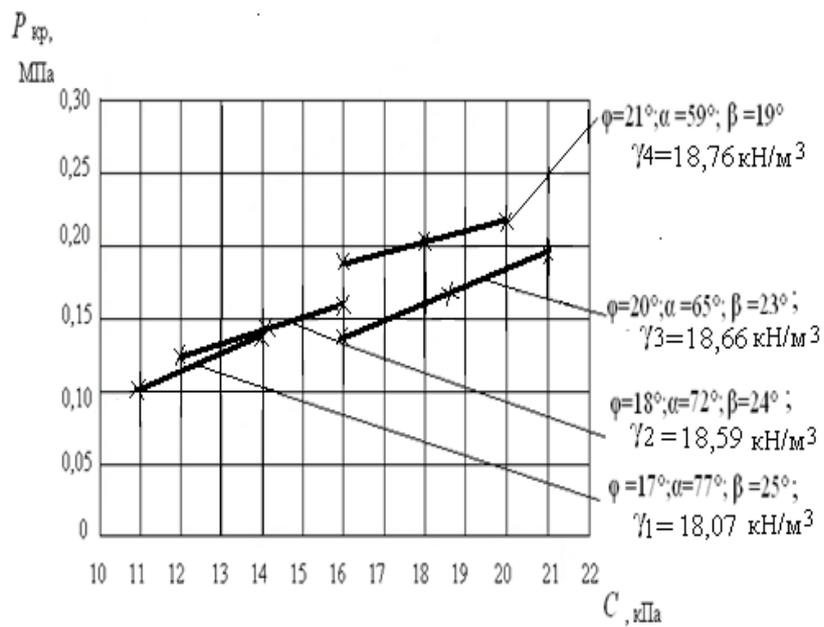
Физико - механические свойства модели полупространства

Порода	Удельный вес $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , <sup>0</sup>	Удельное сцепление $C$ , кПа	Модуль деформации $E$ , МПа	Макс. глубина крит. усилия $z_{\max}$ , м	Коэф.упругого полупространства $C_z$ , МПа
--------	--	--	---------------------------------	--------------------------------	--	---

Суглинки мягко- пластич- ных пород	18,07	17	14	2,8	1,57	2,84
	18,59	18	16	9,4	1,76	9,54
	18,66	20	21	11,6	2,03	12,80
	18,76	21	20	13	2,41	13,19



а)

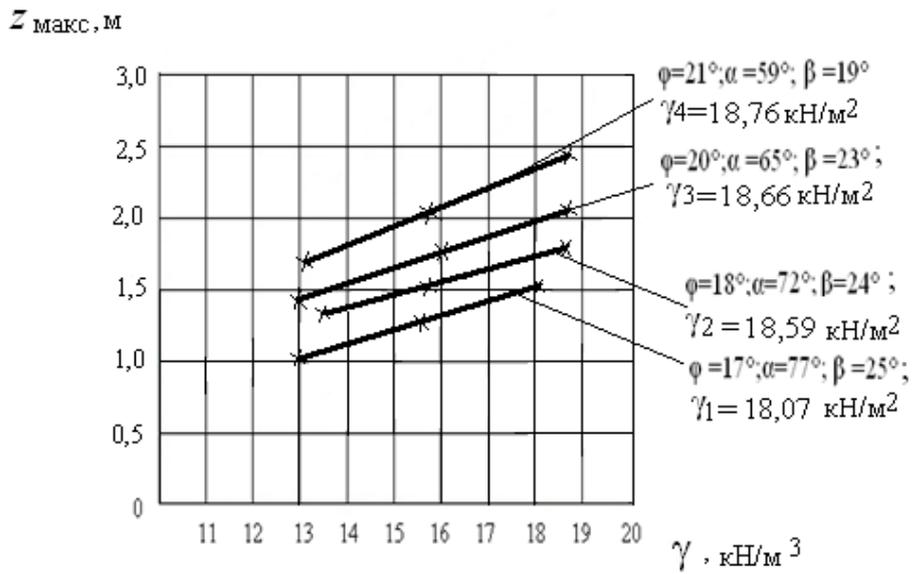


б)

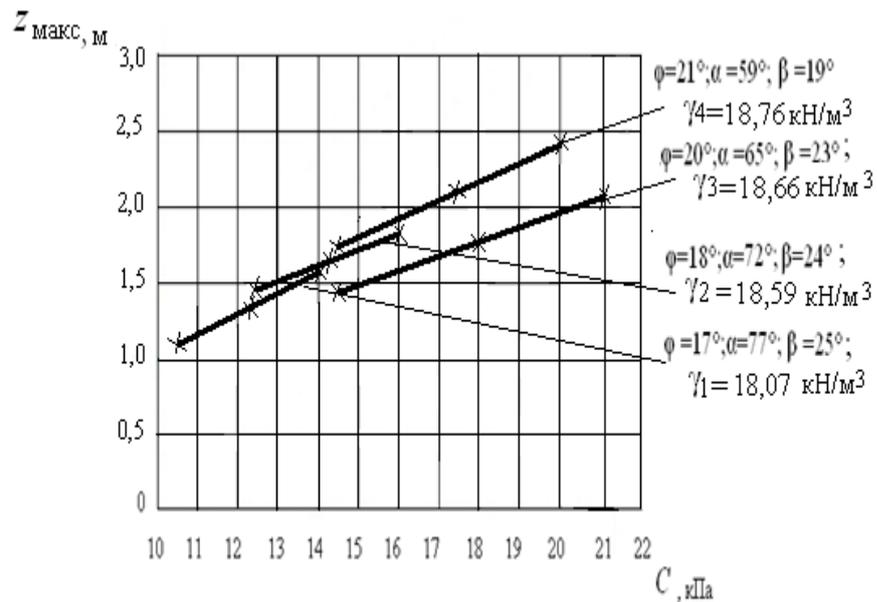
Рис.2.12. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:

а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ;

б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис. 2.13. Зависимость глубины развития критического усилия

$z_{\text{макс}}$  от: а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$

### 2.2.5. Расчёт критического усилия от действия отрицательной трапециевидной нагрузки

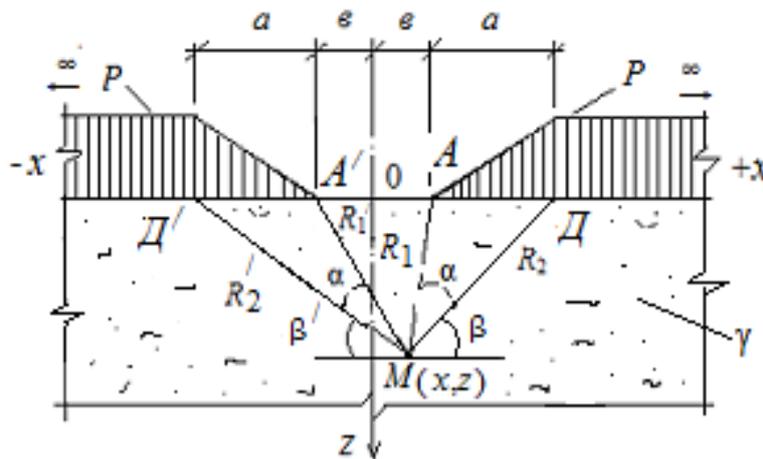


Рис. 2.14. Модель однослойной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Формулы главных напряжений, обусловленных действием симметричной комбинированной треугольной и полубесконечной нагрузки, имеют следующий вид [52]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2 + \gamma z}; \quad (2.54)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2 + \gamma z}, \quad (2.55)$$

где  $P$  – внешняя нагрузки;  $x, z$  – координаты точки  $M$ ;  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  – углы видимости баз действия нагрузки;  $R_1, R_1'$  и  $R_2, R_2'$  – расстояния от точки  $M(x, z)$  до точек  $A, D, A', D'$  баз внешней нагрузки;  $\gamma$  – объёмный вес однородного слоя полупространства;  $a = AD, a = A'D', \epsilon = OA$  и  $\epsilon = OA'$ .

Подставив выражения (2.54) и (2.55) в формулу условия предельного равновесия (2.17), получим следующее выражение:

$$\frac{z}{\sin \varphi} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} - z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a}{P} \gamma = [a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P}. \quad (2.56)$$

Решая уравнение (2.56) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{[a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (2.57)$$

Найдём угол видимости, при котором  $z = z_{\max}$ , продифференцировав для этого уравнение (2.57) по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{(x - \epsilon) \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \{ [a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} C \operatorname{ctg} \varphi \}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0; \quad (2.58)$$

$$-(\beta + \beta') = \frac{-(x - \epsilon)}{0,4a} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi \gamma \sin \varphi}{P} \right] + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} - \frac{2\alpha' \epsilon}{a}.$$

В результате получим угол видимости  $\beta$ :

$$\beta = \frac{(x - \epsilon)}{0,4a} \left[ 0,96 - \sin \varphi \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} + \frac{2\alpha' \epsilon}{a} - \beta. \quad (2.59)$$

Найдём угол видимости, продифференцировав для этого уравнение (2.57) по  $\alpha'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \alpha'} = & \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right] (-x - \epsilon)}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} + \\ & + \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0; \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\beta + \beta' = \frac{(x + \epsilon)}{0,4a} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] + \frac{2\epsilon \alpha}{a} - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P}. \quad (2.61)$$

Из выражения (2.61) получим угол видимости  $\beta'$ :

$$\beta' = \frac{(x + \epsilon)}{0,4a} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] + \frac{2\epsilon \alpha}{a} - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} - \beta. \quad (2.62)$$

Найдём угол видимости, продифференцировав для этого уравнение (2.57) по  $\beta$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right] a - 0 \cdot \left[ a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a}{P} C \operatorname{ctg} \varphi}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0; \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' = & -\frac{1}{0,4} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P} \right] = \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4P} - \\ & - \frac{1}{0,4} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right]; \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\alpha = -\frac{1}{0,4}[(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{P}] + \alpha'. \quad (2.65)$$

Найдём угол видимости, продифференцировав уравнение (2.57) по  $\beta'$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \beta'} = & \frac{a \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} - \\ & \frac{0 \left\{ [a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P} \right]^2} = 0; \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$-\frac{0,4\alpha'}{\sin \varphi} = -\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{\pi a \gamma}{P} - \frac{0,4\alpha}{\sin \varphi} \left( \frac{\sin \varphi}{0,4} \right);$$

$$\alpha' = \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4P} + \alpha. \quad (2.67)$$

При найденных значениях углов видимости глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , следовательно, формула (2.57) примет вид [41]:

$$z_{\max} = \frac{\left[ a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P}}. \quad (2.68)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (2.68) в формулу (2.33), в этом случае  $B = 2a + 2\varepsilon$ .

$$\frac{1,76Pa}{C_z} = \frac{\left[ a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma}{P}};$$

(2.69)

$$\frac{1,76P^2}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha')] - P\{1,76\pi a \gamma + \frac{C}{a} [a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')]\} - \pi C_z C \operatorname{ctg} \varphi = 0. \quad (2.70)$$

Приведём уравнение (2.70) к следующему виду:

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (2.71)$$

где

$$M = \frac{1,76}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha')];$$

$$N = -\{1,76\pi a \gamma + \frac{C}{a} [a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')]\}; \quad (2.72)$$

$$L = -\pi C_z C \operatorname{ctg} \varphi.$$

Решая уравнение (2.71), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  [40]:

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]. \quad (2.73)$$

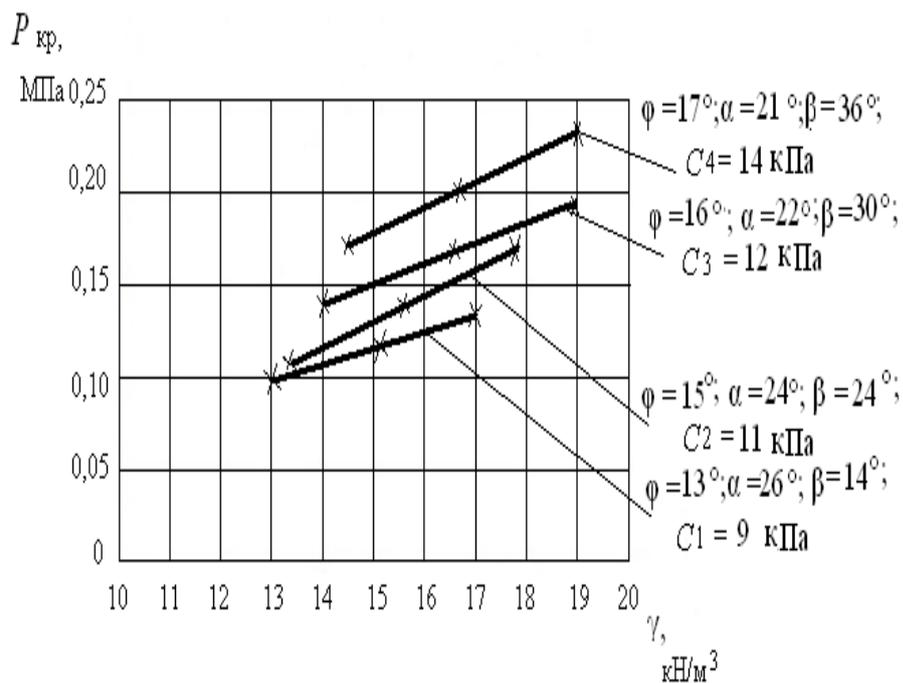
Формулы (2.68) и (2.73) позволяют вычислять  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  в полупространстве грунтовой среды. В этих формулах  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения, можно получить формулы для  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. Например при  $\varepsilon = 0$ , т. е. когда точки А, и А' совпадут с 0, эпюра будет иметь другой вид симметричной нагрузки; придавая ширине базы полубесконечной нагрузки определённое конечное значение, можно получить эпюру для симметричной треугольной и ленточной нагрузки. На рис.2.15 а,б приведены зависимости  $P_{кр}$  от удельного веса полупространства, удельного сцепления  $C$  и угла полного внутреннего трения  $\varphi$ , на рис. 2.16 а,б приведены зависимости глубин развития критического усилия  $z_{\max}$  от тех же характеристик. Расчёт  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  вы-

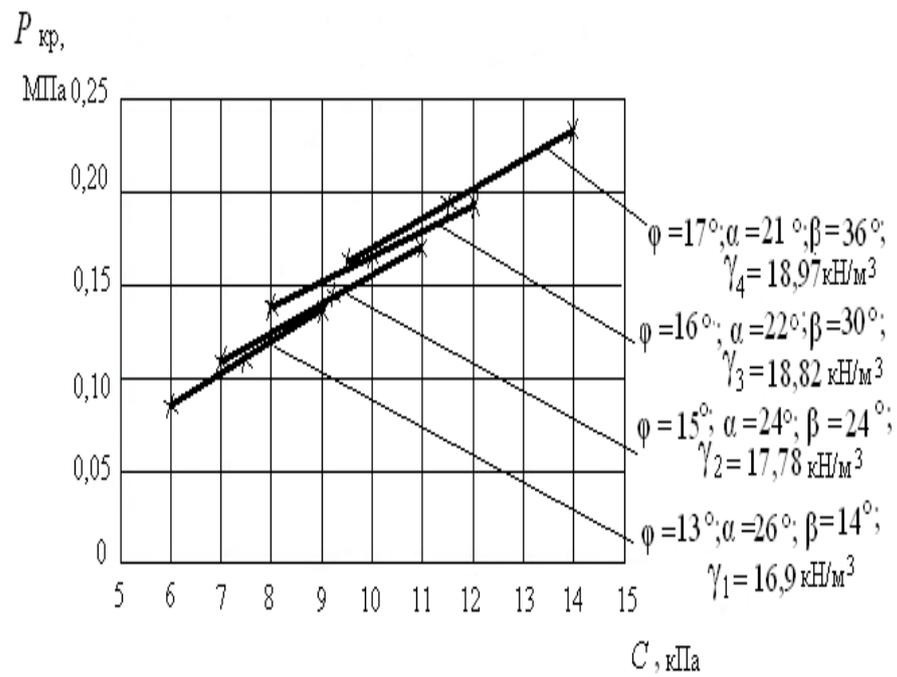
полнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства (табл.2.5), соответствующим пластичным супесям

Таблица 2.5.

Физико-механические характеристики модели полупространства

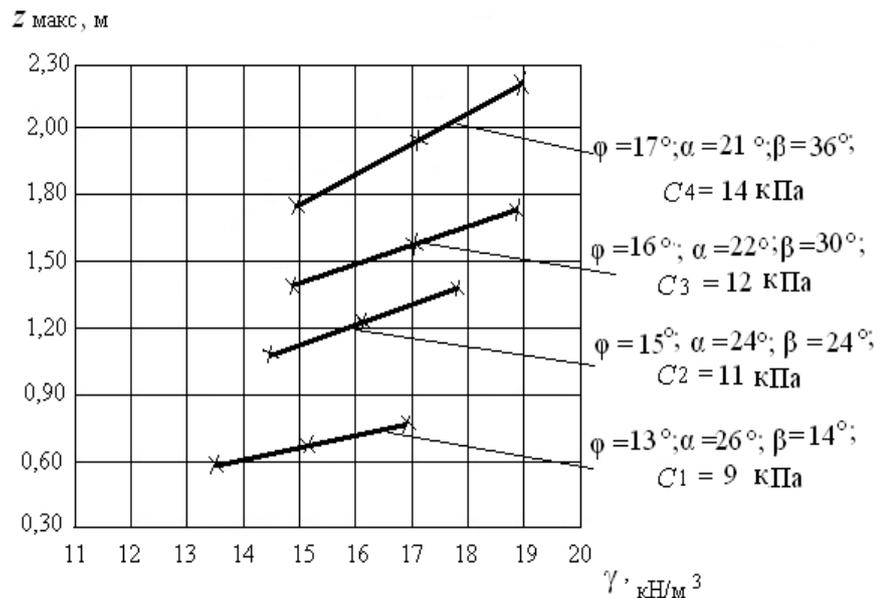
Порода	Удельный вес $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °	Удельное сцепление $C$ , кПа	Модуль деформации $E$ , МПа	Макс. глубина крит. усилия $z_{\text{макс}}$ , м	Коэф. упругого полупространства $C_z$ , МПа
Супесь пластичная	16,90	13	9	15,8	0,75	16,07
	17,78	15	11	16,2	1,34	16,48
	18,82	16	12	16,6	1,73	17,0
	18,97	17	14	17,8	2,18	18,1



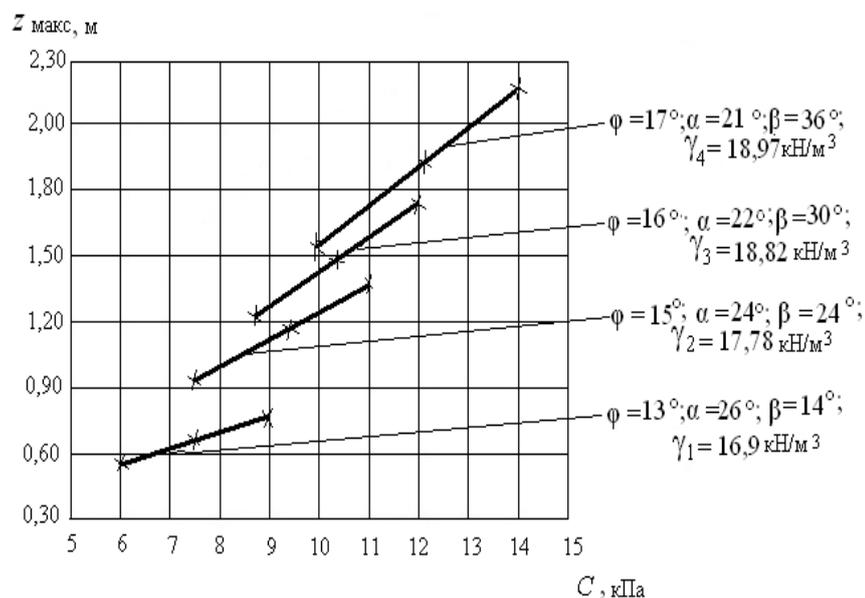


б)

Рис.2.15. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис.2.16. Зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от: а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$

### 2.2.6. Расчёт критического усилия от действия отрицательной треугольной нагрузки

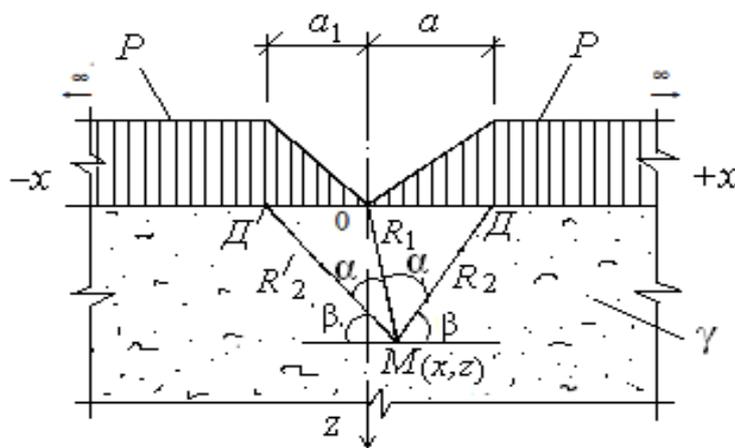


Рис.2.17. Модель однородной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Формулы главных напряжений, обусловленных действием комбинированной нагрузки, представлены следующими выражениями [52]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left[ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \left( \frac{z}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right) \right] + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right)^2} + \gamma z; \quad (2.74)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left[ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \left( \frac{z}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right) \right] - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right)^2} + \gamma z, \quad (2.75)$$

где  $P$  – внешняя нагрузки;  $x, z$  – координаты точки М;  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  – углы видимости баз действия нагрузки;  $R_1, R_2, R_2'$  – расстояния от точки М ( $x, z$ ) до точек О, Д, О, Д' баз внешней нагрузки;  $\gamma$  – объёмный вес основания подстилающего слоя;  $a = ОД, a_1 = ОД'$ .

Подставим выражения (2.74) и (2.75) в условие предельного равновесия (2.17), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{Pz}{\pi \sin \varphi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right)^2} - \frac{Pz}{\pi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right) - \gamma z = \\ & = \frac{P}{\pi} \left[ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) \right] + C \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Решая уравнение (2.76) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{(\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (2.77)$$

Найдём угол видимости, при котором  $z = z_{\max}$ , продифференцировав для этого уравнение (2.77) по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{x}{a} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{\frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0; \quad (2.78)$$

$$\beta + \beta' = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right] - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P};$$

$$\beta = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right] - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} - \beta'. \quad (2.79)$$

Найдём угол видимости, продифференцировав для этого уравнение (2.77) по  $\alpha'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'} = \frac{-\frac{x}{a_1} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{\frac{0,4}{a_1 \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0; \quad (2.80)$$

$$\beta + \beta' = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right] - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P};$$

$$\beta' = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right] - \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} - \beta.$$

(2.81)

Найдём угол видимости, продифференцировав для этого уравнение (2.77) по  $\beta$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0;$$

(2.82)

$$\alpha = - \frac{a(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{\pi a \gamma \sin \varphi}{0,4 P} + \frac{a \alpha'}{a_1}. \quad (2.83)$$

Найдём угол видимости, продифференцировав уравнение (2.77) по  $\beta'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} - \frac{0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P} \right]^2} = 0;$$

(2.84)

$$\alpha' = \frac{a_1(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln^2 \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi a_1 \gamma \sin \varphi}{0,4P} + \frac{a_1 \alpha}{a}. \quad (2.85)$$

При найденных значениях углов глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\text{макс}}$ , следовательно, уравнение (2.77) примет вид [40]:

$$z_{\text{макс}} = \frac{(\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi C \operatorname{ctg} \varphi}{P}}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma}{P}}. \quad (2.86)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (2.86) в формулу (2.33), в этом случае  $B = a + a'$  – база действия нагрузки.

В результате получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{0,88P^2(a + a_1)}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - \\ & - P \left[ \frac{0,88(a + a_1)}{C_z} \pi \gamma + (\beta + \beta') + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - \pi C \operatorname{ctg} \varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Приведём квадратное уравнение (2.87) к следующему виду [41]:

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (2.88)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \frac{0,88(a + a_1)}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \\ N &= - \left[ \frac{0,88(a + a_1)}{C_z} \pi \gamma + (\beta + \beta') + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$L = -\pi C \operatorname{ctg} \varphi.$$

Решая уравнение (2.88), получим формулу для вычисления  $P_{\text{кр}}$  [40]:

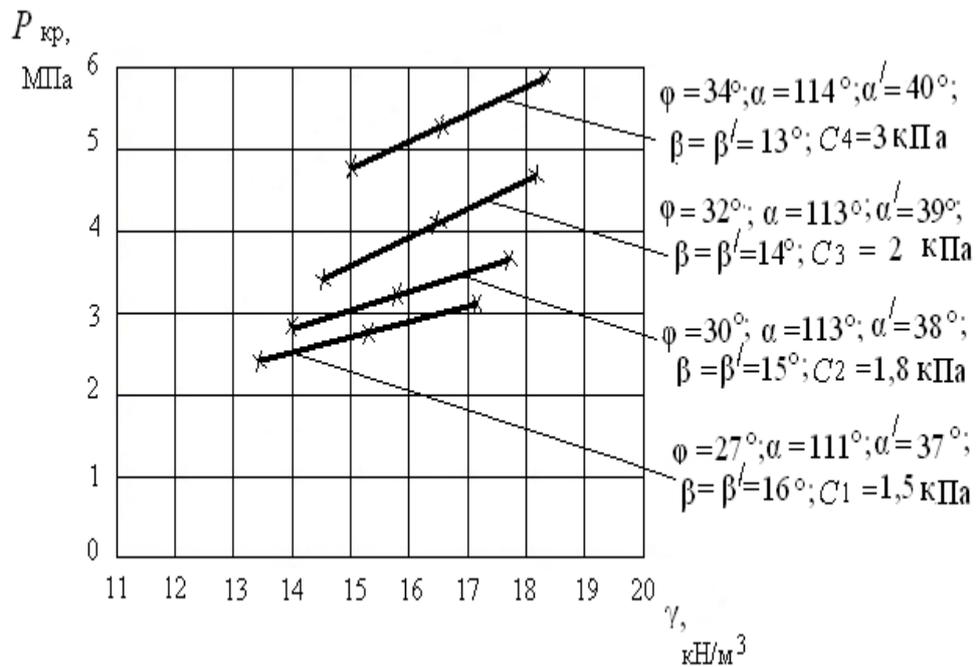
$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (2.90)$$

Формулы (2.86) и (2.90) зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения, можно получить формулы для  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для различных вариантов эпюр внешней нагрузки. Например, при  $a = a_1$ , эпюра будет иметь вид симметричной нагрузки; придавая ширине базы полубесконечной нагрузки определённое конечное значение, можно получить эпюру для комбинированной треугольной и ленточной нагрузки. На рис. 2.18 а,б приведены зависимости  $P_{кр}$  от удельного веса полупространства, удельного сцепления  $C$  и угла полного внутреннего трения  $\varphi$ , на рис. 2.19 а,б приведены зависимости глубин развития критического усилия  $h$  от тех же характеристик. Расчёт  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства (табл. 2.6.), соответствующим мелким водонасыщенным пескам.

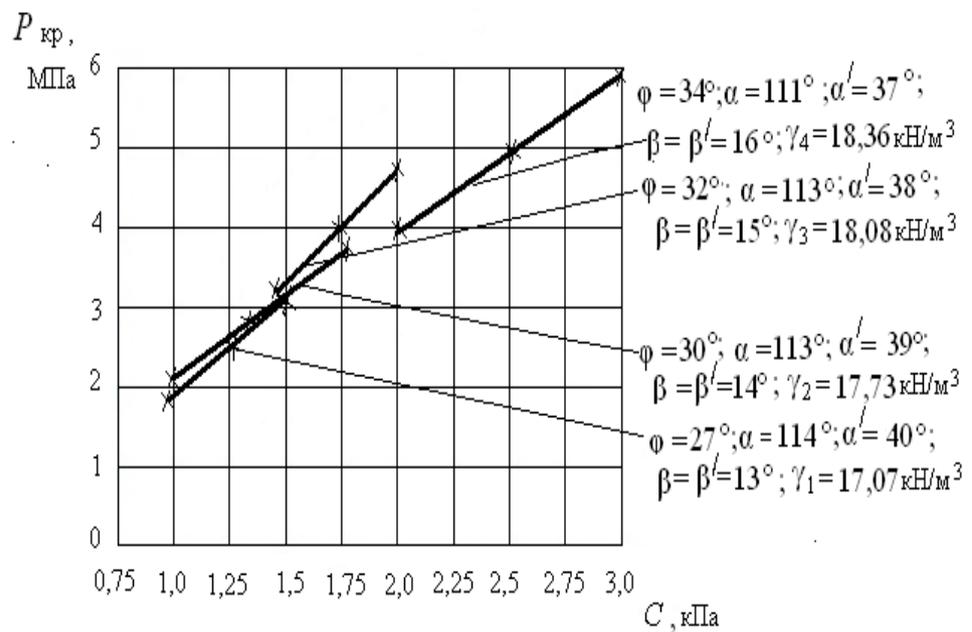
Таблица 2.6.

Физико - механические свойства модели полупространства

Порода	Удельный вес $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , <sup>0</sup>	Удельное сцепление $C$ , кПа	Модуль деформации $E$ , МПа	Макс. глубина крит. усилия $z_{\max}$ , М	Коэф. упругого полупространства $C_z$ , МПа
Песок мелкий, средн. степени водонасыщенный	17,07	27	1,5	25,8	0,58	26,25
	17,73	30	1,8	26,2	0,59	26,65
	18,08	32	2	28	0,60	28,48
	18,36	34	3	29	0,61	29,30



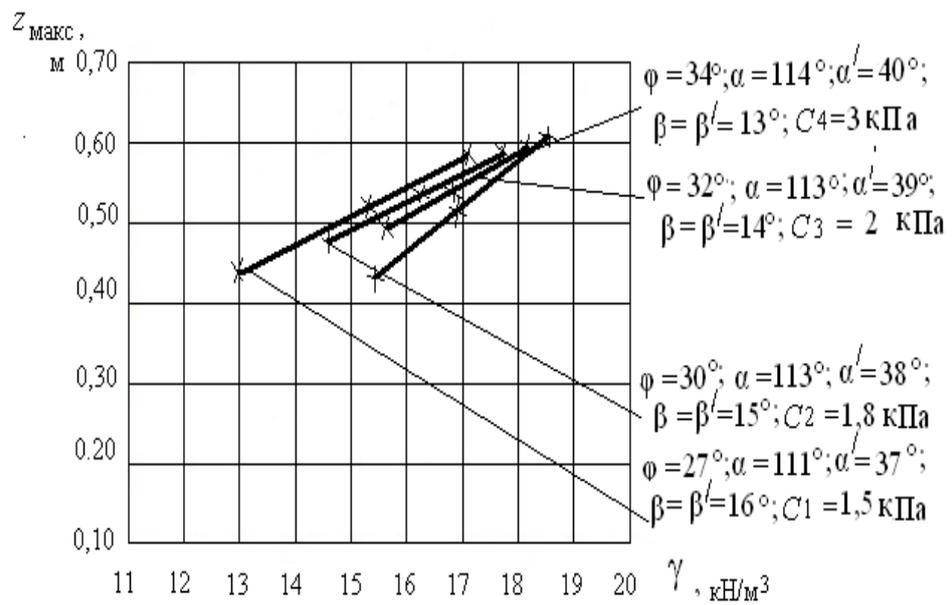
а)



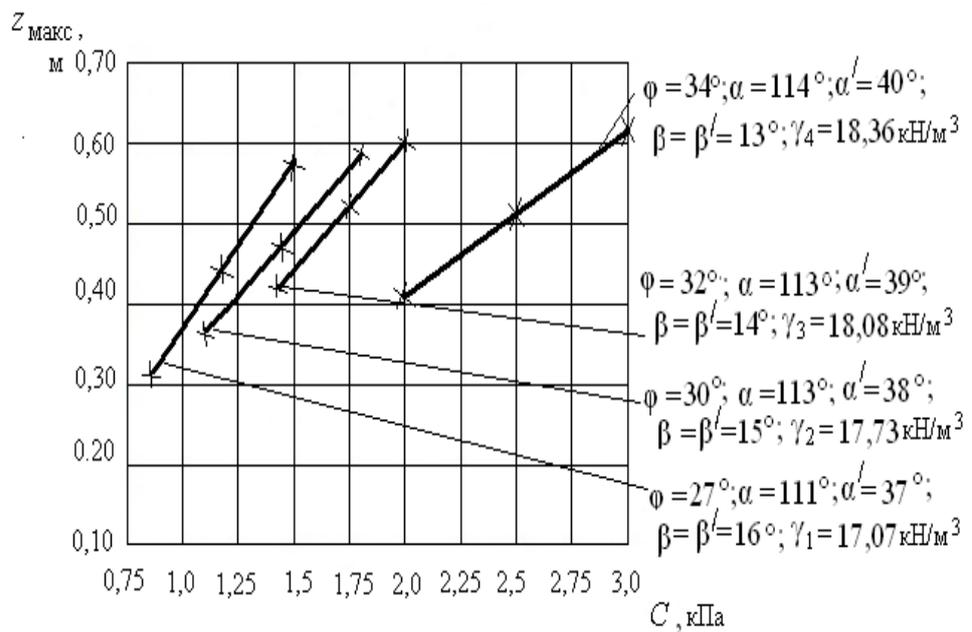
б)

Рис.2.18. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:

- а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ;
- б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис.2.19. Зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от: а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$

Из результатов расчётов следует:

- с увеличением значений физико-механических характеристик происходит увеличение  $P_{кр}$  и  $z_{макс}$  для всех исследуемых случаев;
- для зависимости  $P_{кр}(\gamma)$  увеличения критического усилия происходит не только с ростом  $\gamma$ , но также с увеличением  $\varphi$  и  $C$ ; при этом угловой коэффициент (угол наклона графиков  $P_{кр}(\gamma)$  к оси абсцисс) увеличивается с ростом  $\varphi$  и  $C$ ;
- для зависимости  $P_{кр}(C)$  увеличение критического усилия происходит в основном только с ростом  $C$ ; за счёт увеличения  $\gamma$  и  $\varphi$  критическое усилие изменяется не более чем на 8%; поэтому для всех рассмотренных значений  $\gamma$  и  $\varphi$  можно предложить единую (усреднённую) зависимость  $P_{кр}(C)$ .
- для зависимости  $z_{макс}(\gamma)$  увеличение максимальной глубины развития критического усилия происходит так же с ростом  $\gamma$  и с увеличением  $\varphi$  и  $C$ ; за счёт увеличения  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $C$  изменение максимальной глубины происходит в пределах 7%, следовательно, для всех рассмотренных значений характеристик можно предложить единую (усреднённую) зависимость  $z_{макс}(\gamma)$ .

В следующем пункте рассмотрены плоские задачи от действия треугольных нагрузок на грунт в более усложнённом виде. Расчёт несущей способности основания производится для многослойных грунтовых сред.

### Глава 3

#### РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКОГО УСИЛИЯ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕД

Вертикальные напряжения от собственного веса грунта представляют собой вес грунта под рассматриваемой точкой с площадью поперечного сечения, равной единице. Таким образом, если в точке  $M$  на глубине  $z$  грунт однородный, то  $\sigma_z = \gamma z$ ; если имеются различные слои (рис.3.1.), то

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i h_i + \gamma_k \left( z - \sum_{i=1}^k h_i \right). \quad (3.1)$$

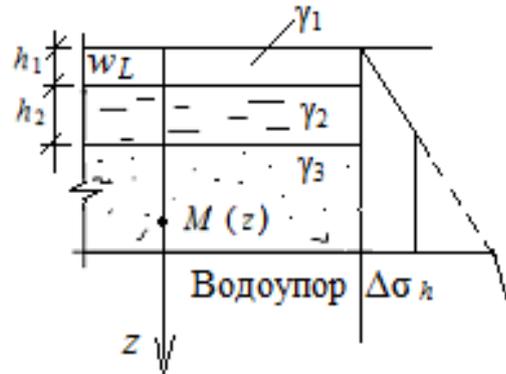


Рис.3.1. Схема неоднородного водонасыщенного грунтового массива

Удельный вес грунта ниже горизонта воды принимается с учётом действия выталкивающей силы за счёт взвешивания в воде, поэтому получаем:

$$\sigma_z = \gamma_1 h_1 + \gamma_{sb} (z - h_1) = (\gamma - \gamma_w)z + \gamma_w h_1. \quad (3.2)$$

Давление в водоупорном слое принимается с учётом полного веса водонасыщенного грунта (то есть выталкивающая сила не учитывается), который расположен выше данного слоя:

$$\sigma_z = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]. \quad (3.3)$$

На границе водоупора в эпюре имеет место скачок на величину  $\Delta\sigma_{h2} = \gamma_w h_2$ , причём в данном случае  $\gamma_2 = \gamma_1 - \gamma_w$ .

### 3.1. Расчёт критического усилия для некоторых видов внешних нагрузок в слоистой грунтовой среде

В данном разделе рассмотрены некоторые случаи исследования критических усилий в слоистой грунтовой среде от действия различных треугольных нагрузок. Формулы для вычисления критической нагрузки  $P_{кр}$  и максимальной глубины её проявления  $z_{\max}$  были получены на основании известных аналитических решений [49], [52] и [87].

Рассмотрим некоторые случаи действия треугольных нагрузок на неоднородный грунт. Расчётная схема для каждого вида нагрузок представляет собой полупространство с полосообразной треугольной

нагрузкой  $P$ . Полупространство находится в гидростатическом напряженном состоянии:  $\sigma_x^0 = \sigma_z^0 = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$ , где  $\sigma_x^0$  и  $\sigma_z^0$  - начальные составляющие напряжений,  $\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$  - давление от собственного веса слоёв грунта с учётом водонасыщенного слоя до уровня  $z$ . Следовательно, напряжённое состояние в полупространстве будет определяться весом полупространства и влиянием нагрузки. Задача заключается в определении такой величины критического давления  $P_{кр}$ , при котором область предельного равновесия распространяется на глубину  $z_{макс}$ .

### 3.1.1. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону прямоугольного треугольника

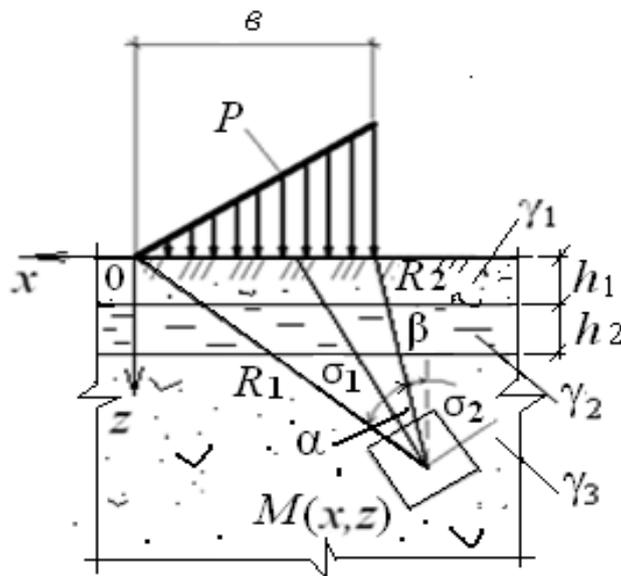


Рис.3.2. Модель многослойной грунтовой среды и эпюра треугольной нагрузки

В этом разделе решена задача об оценке критического усилия в модели грунтовой среды в виде однородного, тяжёлого, упругого полупространства под действием внешней нагрузки, приложенной к полупространству, эпюра которой представляет прямоугольный треугольник (рис. 3.2). Формулы для главных напряжений, обусловленных действием треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями [52]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (3.4)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + 2 \frac{x}{b} \alpha \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\pi} \left( \frac{z}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} + \sin \frac{2}{3} \alpha \right) + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)], \quad (3.5)$$

где  $P$  – величина треугольной нагрузки;  $b$  – база действия нагрузки;  $\alpha$  – угол видимости базы действия нагрузки. Подставив выражения (3.4) и (3.5) в условие предельного равновесия [87]:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sin \varphi \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + P_e \right), \quad (3.6)$$

получим следующее уравнение:

$$z \left[ \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi}{P} \gamma_3 \right] = -0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \cdot \operatorname{ctg} \varphi]. \quad (3.7)$$

Решая уравнение (3.7) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \cdot \operatorname{ctg} \varphi]}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.8) найдём угол видимости  $\alpha$ , при котором  $z = z_{\max}$ , для этого продифференцируем уравнение (3.8) по  $\alpha$  [33]:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left( \frac{0,71 - \sin \varphi}{b} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}} = 0, \quad (3.9)$$

при условии, что  $\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \neq 0$ , т. е.  $R_1 \neq R_2$ ,

$$\frac{2x \sin \varphi}{b} - 0,71 \cos \frac{2}{3} \alpha = 0;$$

$$\alpha = \frac{3}{2} \arccos\left(\frac{x}{0,36b} \sin \varphi\right).$$

(3.10)

Подставляя (3.10) в (3.8) получим формулу для  $z_{\max}$  [33]:

$$z_{\max} = \frac{\frac{2x \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha + \frac{\pi \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \cdot \operatorname{ctg} \varphi]}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \left(\frac{0,71 - \sin \varphi}{b}\right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}},$$

(3.11)

где  $b$  – длина базы треугольной нагрузки  $P$ ;  $x$  – ордината центра тяжести эпюры треугольной нагрузки;  $R_1$  и  $R_2$  – направляющие, соединяющие начало и конец полосовой нагрузки с точкой  $M$  на глубине  $z$ .

Для определения  $P_{\text{кр}}$  (3.11) подставим в формулу [51]:

$$z_{\max} = \frac{0,88PB}{C_z},$$

(3.12)

где  $C_z = E/(1 - \nu^2)$  – коэффициент упругого полупространства,  $B=2a$  база действия нагрузки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль деформации. Получим следующие уравнения:

$$0,88P \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - 0,88\pi b \gamma_3 = \frac{2xC_z \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71C_z \sin \frac{2}{3} \alpha +$$

$$+ \frac{\pi C_z \sin \varphi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \cdot \operatorname{ctg} \varphi];$$

(3.13)

$$0,88P^2 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - P(0,88\pi b \gamma_3 + \frac{2xC_z \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71C_z \sin \frac{2}{3} \alpha) -$$

$$- \pi C_z \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \cdot \operatorname{ctg} \varphi] = 0.$$

(3.14)

Уравнение (3.14) приведём к следующему виду [34]:

$$MP^2 + NP + L = 0.$$

(3.15)

Решая уравнение (3.15), получим формулы для вычисления критического усилия  $P_{кр}$  [33]:

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}, \quad (3.16)$$

где

$$M = 0,88 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi);$$

$$N = - \left( 0,88 \pi b \gamma_3 + \frac{2x C_z \sin \varphi}{b} \alpha - 0,71 C_z \sin \frac{2}{3} \alpha \right); \quad (3.17)$$

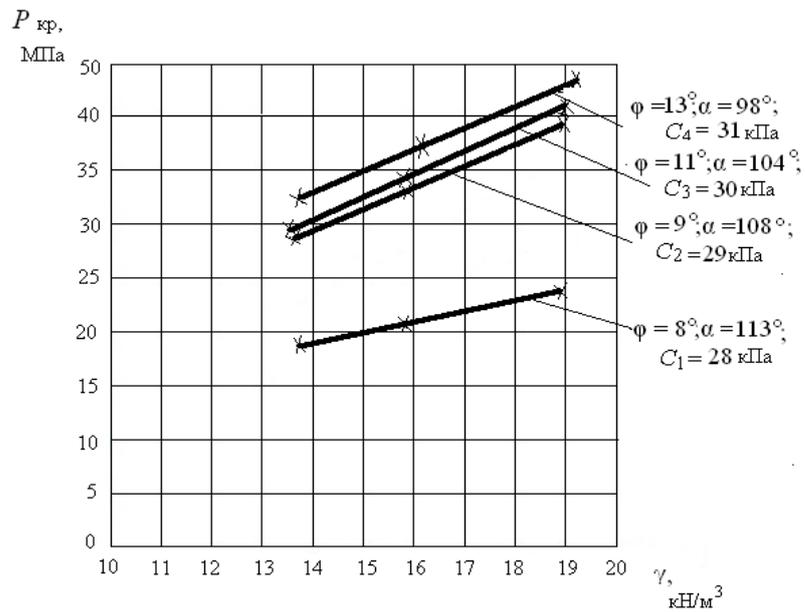
$$L = - \pi C_z \sin \varphi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \cdot \operatorname{ctg} \varphi].$$

Рассмотрим зависимость  $P_{кр}$  от физико-механических характеристик:  $C$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $\epsilon = 1\text{м}$ . Характеристики грунтов указаны в таблице 3.1. Графический вид этих зависимостей представлен на рис. 3.3-3.4.

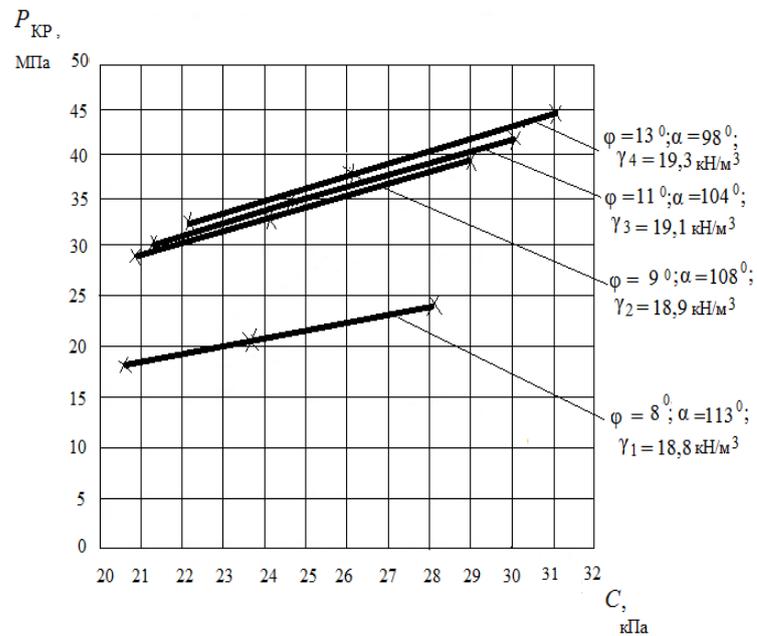
Таблица 3.1.

Физико-механические характеристики грунтового полупространства

Наименование грунтов	Удельный вес грунта $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °	Макс. глубина предельного напряжённого состояния $z_{\text{макс}}$ , М	Удельное сцепление грунта $C$ , кПа	Модуль деформации грунта $E$ , МПа	Коэф.упругого полупространства $C_z$ , МПа
Глины	18,8	8	0,20	28	10	11,24
мягко-	18,9	9	0,22	29	13	14,61
пластич-	19,1	11	0,24	30	14	15,73
ных пород	19,3	13	0,30	31	16	17,98

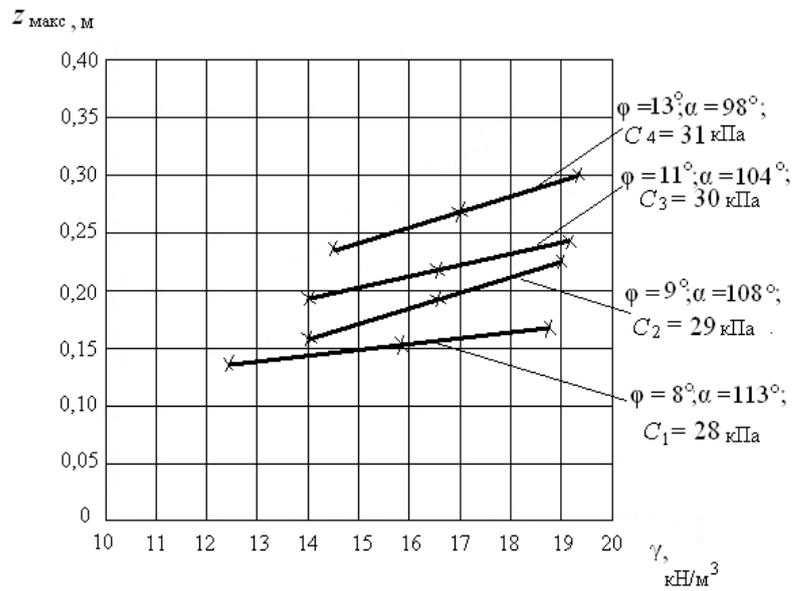


а)

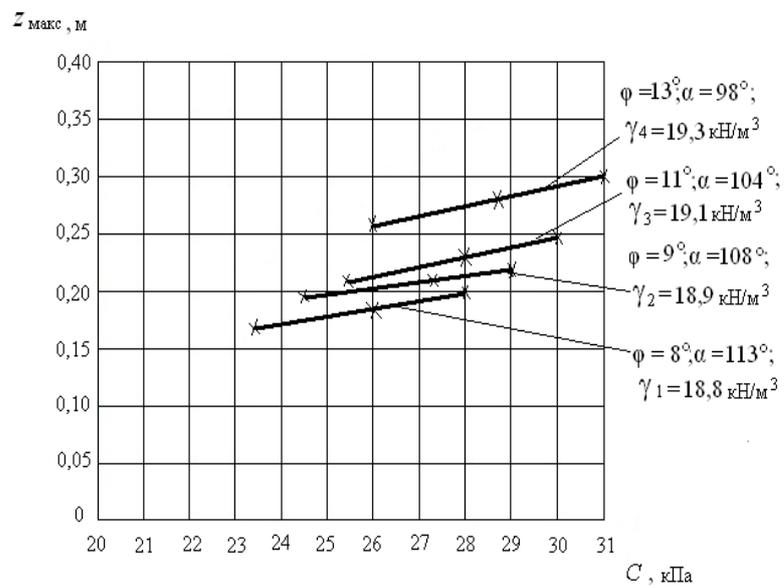


б)

Рис.3.3. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис.3.4. Зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от: а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса

### 3.1.2. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону равнобедренного треугольника

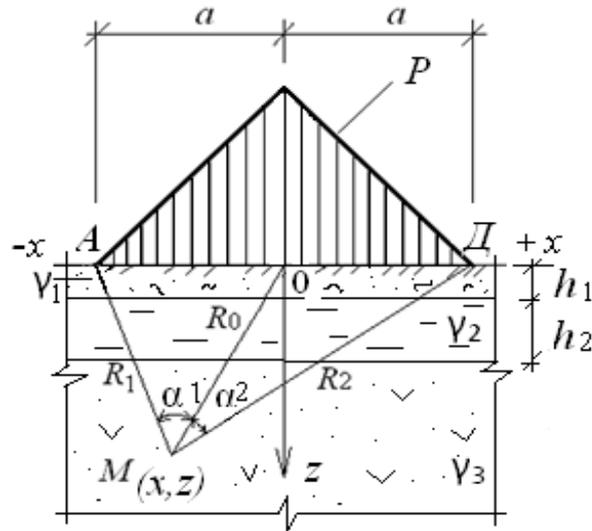


Рис.3.5. Модель грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Модель грунтовой среды от равнобедренной нагрузки указана на рис. 3.5. Главные напряжения от действия равнобедренной нагрузки найдены из выражений [ 52 ]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (3.18)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2) - z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)], \quad (3.19)$$

где  $P$  – величина треугольной равнобедренной нагрузки;  $a$  – база действия нагрузки;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы видимости базы действия нагрузки.

Подставив выражения (3.18) и (3.19) в условие предельного равновесия (3.6), получим следующее уравнение:

$$\frac{pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} + \frac{p \sin \varphi}{\pi a} z \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - \sin \varphi \gamma_3 z = \frac{p \sin \varphi}{\pi a} [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \sin \varphi \gamma_1 h_1 + \sin \varphi \gamma_2 h_2 - \sin \varphi \gamma_3 (h_1 + h_2) + \sin \varphi C \operatorname{ctg} \varphi. \quad (3.20)$$

Решая уравнение (3.20) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}. \quad (3.21)$$

Из уравнения (3.21) найдём углы видимости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , при которых  $z = z_{\max}$ , про дифференцировав это уравнение отдельно по  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Уравнение (3.21) про дифференцируем по  $\alpha_1$  [42]:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_1} = \frac{(a+x) \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right\}^2} - \frac{\frac{0,4}{\sin \varphi} \{ [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right\}^2} = 0. \quad (3.22)$$

В результате получим угол видимости  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = -(a+x) \frac{\pi \gamma_3 \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi}{2P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] + (a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} = (a+x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} - (a+x) \frac{\pi \gamma_3 \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi}{2P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]. \quad (3.23)$$

Продифференцируем уравнение (3.21) по  $\alpha_2$  [42]:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_2} = \frac{(a-x) \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right\}^2} - \frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right\}^2} = 0.$$

В результате получим угол видимости  $\alpha_1$ :

$$\alpha_1 = -(a-x) \frac{0,96 - \sin \varphi}{0,8a} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + (a-x) \frac{\pi \gamma_3 \sin \varphi}{0,8P} - \frac{\pi}{2P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]. \quad (3.24)$$

При найденных значениях углов глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , следовательно формула (3.21) примет вид [42]:

$$z_{\max} = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}. \quad (3.25)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (3.25) в формулу (3.12), при условии, что  $B = 2a$ . Получим следующие выражения:

$$\frac{1,76Pa}{C_z} = \frac{[a(\alpha_1 + \alpha_2) + x(\alpha_1 - \alpha_2)] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}; \quad (3.26)$$

$$\frac{1,76P^2}{\sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2) \right] - P \left\{ C_z \left[ (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2) \right] + 1,76\pi a \gamma_3 \right\} - \pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] = 0. \quad (3.27)$$

Квадратное уравнение (3.27) запишем в виде следующего выражения [42]:

$$M P^2 + N P + L = 0, \quad (3.28)$$

где

$$M = \frac{1,76}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)];$$

$$N = -\{C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a}(\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76\pi a \gamma_3\};$$

$$L = -\pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi].$$
(3.29)

Решая уравнение (3.28), получим формулу для вычисления  $P_{кр}$  [42]:

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.30)$$

Формулы (3.25) и (3.30) позволяют вычислять  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  в полупространстве. В этих формулах  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения можно получить формулы для  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. При  $a = 0$  (с правой или с левой стороны эпюры), эпюра внешней нагрузки будет иметь вид прямоугольного треугольника; при  $B \rightarrow \infty$  – полубесконечной полосы; при  $h_1 = h_2 = 0$  получим формулу  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  для полупространства с различными видами эпюр внешней нагрузки, например: для нагрузки в форме прямоугольного треугольника и т.д.

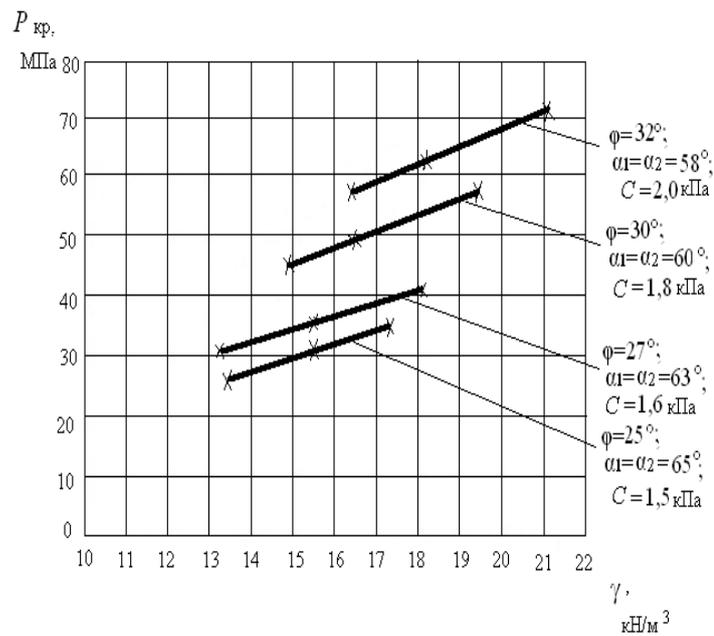
Графический вид зависимости  $P_{кр}$  и  $z_{\max}$  от физико-механических характеристик:  $C$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $B=2a=2\text{м}$  представлен на рис. 3.6 и 3.7.

При расчёте принято  $h_1 = h_2 = 0,3 \text{ м}$ ,  $\gamma_1=15,05 \text{ кН/м}^3$ ,  $\gamma_2=10,3 \text{ кН/м}^3$ ,  $a = 1\text{м}$ , коэффициент Пуассона для всех вариантов грунтовой среды  $\nu = 0,12$ . Расчёт  $z_{\max}$  и  $P_{кр}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства (табл.3.2), соответствующим супесчаным водонасыщенным грунтам.

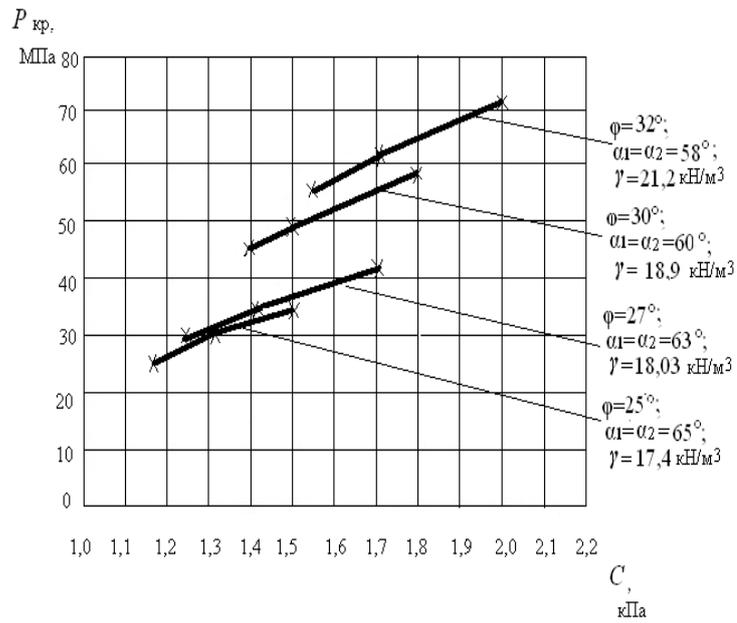
Таблица 3.2.

Физико-механические характеристики модели полупространства

Наименование грунтов	Удельный вес грунта $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения грунта $\varphi$ , °	Макс. глубина пред. напряжённого состояния $z_{\text{макс}}$ , м	Удельное сцепление грунта $C$ , кПа	Модуль деформации грунта $E$ , МПа	Коэф. упругого полупространства $C_z$ , МПа
Супесчаные водонасыщенные грунты	17,4	25	0,47	1,5	24	27,6
	18,03	27	0,51	1,6	26	29,9
	19,4	30	0,58	1,8	27	31,03
	21,2	32	0,62	2,0	28	32,18

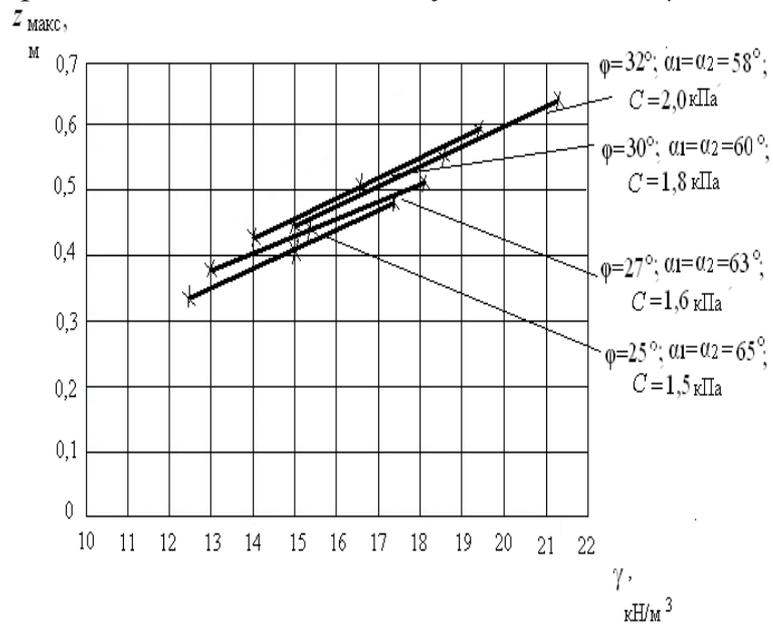


а)

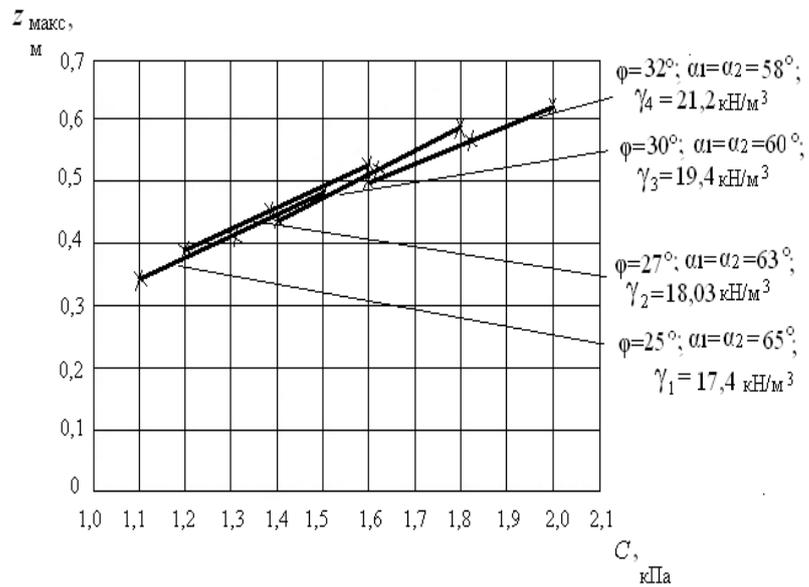


б)

Рис.3.6. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис.3.7. Зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$

### 3.1.3. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону неравностороннего треугольника

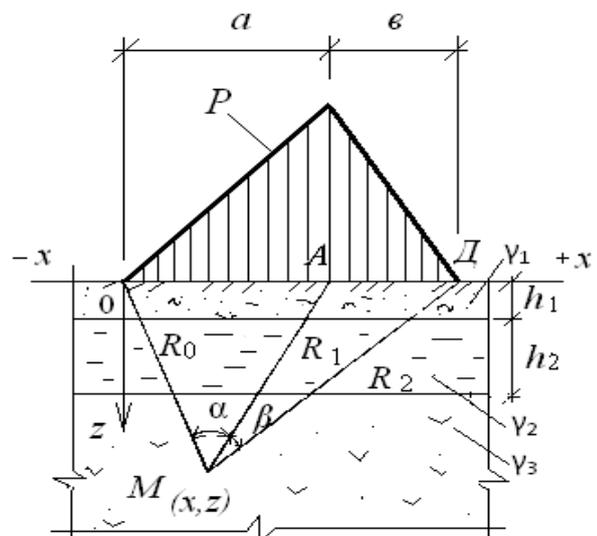


Рис.3.8. Модель грунтовой среды и эюра внешней нагрузки

На рис. 3.8. изображена модель грунтовой среды от действия неравносторонней нагрузки. Формулы для главных напряжений от неравносторонней треугольной нагрузки, представлены следующими выражениями [51]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{z}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (3.31)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta + \frac{z}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{z}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right] - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)], \quad (3.32)$$

где  $P$  – внешняя нагрузка;  $x, z$  – координаты точки  $M$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  – углы видимости базы действия внешней нагрузки;  $R_0, R_1$  и  $R_2$  – расстояния от точки  $M(x, z)$  до точек  $A, O, D$  базы внешней нагрузки;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – объёмный вес плоско-параллельных слоёв и полупространства;  $h_1, h_2$  – мощности плоско-параллельных слоёв;  $a = AO, \epsilon = OD$ .

Подставим выражения (3.31) и (3.32) в условие предельного равновесия (3.6), получим следующее уравнение:

$$\frac{Pz}{\pi} \left[ \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right)^2} - \frac{\sin \varphi}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1 \sin \varphi}{R_0} \right] - \gamma_3 z \sin \varphi = \sin \varphi \left[ \frac{P}{\pi} \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta \right) + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi \right]. \quad (3.33)$$

Решая уравнение (3.33) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{\left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a+\epsilon-x}{\epsilon} \beta \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\epsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (3.34)$$

Из уравнения (3.34) найдём углы видимости  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых  $z = z_{\max}$ , продифференцировав его по  $\alpha$  и  $\beta$ . Продифференцируем уравнение (3.34) по  $\alpha$ :

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{\frac{x}{a} \left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right\}^2} - \frac{\frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right\}^2} = 0.$$

В результате будем иметь [41]:

$$\beta = \frac{x\varepsilon(0,96 - \sin \varphi)}{0,4(a + \varepsilon)} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{\pi \gamma_3 x \varepsilon \sin \varphi}{0,4P(a + \varepsilon)} - \frac{\pi \varepsilon}{P(a + \varepsilon)} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]. \quad (3.35)$$

Продифференцируем уравнение (3.34) по  $\beta$  [41]:

$$\frac{dz}{d\beta} = \frac{\frac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} \left\{ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right\} - \frac{\pi \gamma_3}{P}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right\}^2} - \frac{\left( -\frac{0,4}{\varepsilon \sin \varphi} \right) \left\{ \left( \frac{x}{a} \alpha + \frac{a + \varepsilon - x}{\varepsilon} \beta \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left\{ \left[ \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon} \right) \right] - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right\}^2} = 0;$$

$$\frac{0,4(a + \varepsilon)}{a} \alpha = \frac{\pi \gamma_3 (a + \varepsilon - x) \sin \varphi}{P} - \frac{0,4\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] - (a + \varepsilon - x)(0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right).$$

В результате получим:

$$\alpha = \frac{\pi \gamma_3 a (a + \varepsilon - x) \sin \varphi}{0,4P(a + \varepsilon)} - \frac{\pi a}{P(a + \varepsilon)} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] - \frac{a(a + \varepsilon - x)}{0,4(a + \varepsilon)} (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2} \right).$$

(3.36)

При найденных значениях углов глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\text{макс}}$ , следовательно формула (3.34) примет вид [41]:

$$z_{\text{макс}} = \frac{\left(\frac{x}{a}\alpha + \frac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon}\beta\right) + \frac{\pi}{P}[\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{(0,96 - \sin \varphi)}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{\varepsilon}\right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (3.37)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  подставим (3.37) в формулу (3.12) при  $B = a + \varepsilon$ , получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{0,88P^2}{\sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \varepsilon \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + 0,4(\varepsilon\alpha - a\beta) \right] - P \{ 0,88\pi a \varepsilon \gamma_3 + \\ & + \frac{C_z a \varepsilon}{(a + \varepsilon)} (\varepsilon x \alpha + a(a + \varepsilon - x)\beta) \} - \frac{\pi a \varepsilon C_z}{(a + \varepsilon)} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Квадратное уравнение (3.38) представим в виде следующего выражения [41]:

$$M P^2 + N P + L = 0, \quad (3.39)$$

где  $M = \frac{0,88P^2}{\sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \varepsilon \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + 0,4(\varepsilon\alpha - a\beta) \right];$

$$N = - \left\{ 0,88\pi a \varepsilon \gamma_3 + \frac{C_z a \varepsilon}{(a + \varepsilon)} (\varepsilon x \alpha + a(a + \varepsilon - x)\beta) \right\}; \quad (3.40)$$

$$L = - \frac{\pi a \varepsilon C_z}{(a + \varepsilon)} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi].$$

Решая уравнение (3.39), получим формулу для вычисления  $P_{\text{кр}}$  [41]:

$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.41)$$

Придавая различные значения  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$ , можно так же получить формулы для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. При  $\varepsilon = 0$ , эпюра внешней нагрузки будет иметь вид пря-

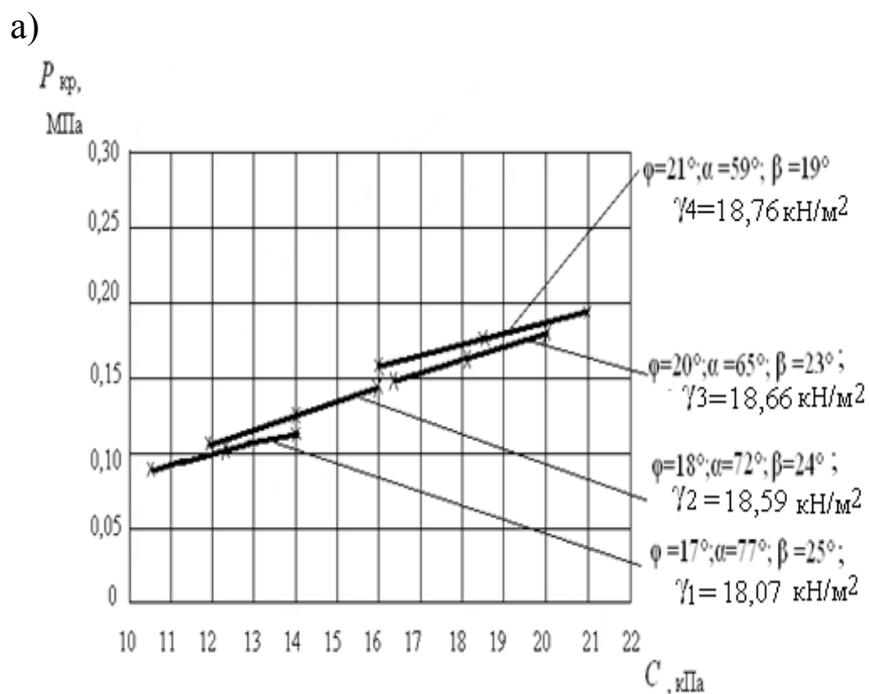
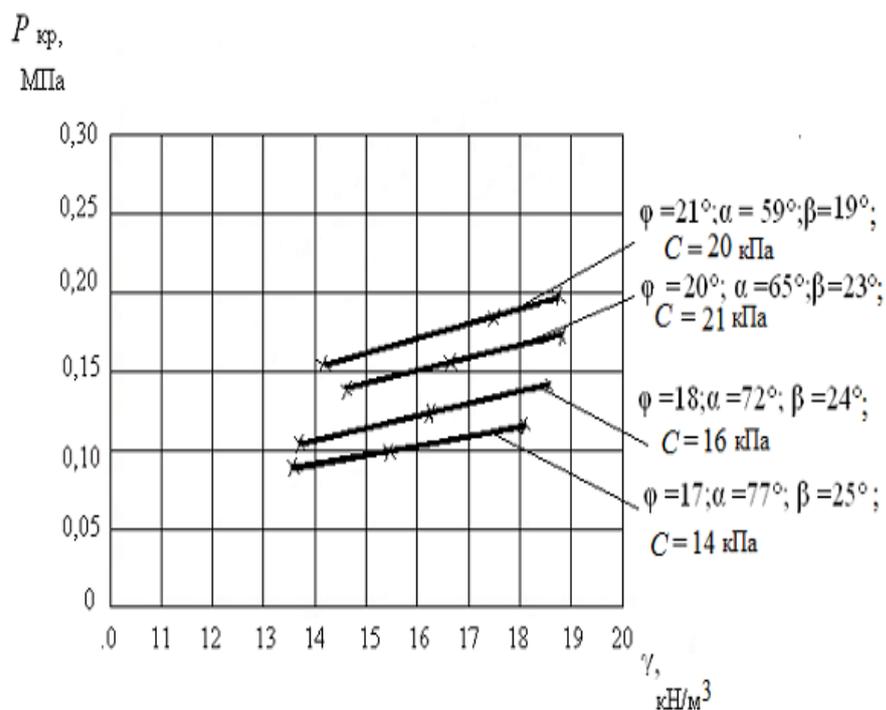
моугольного треугольника; при  $a = b$  – равностороннего треугольника; при  $b \rightarrow \infty$  – полубесконечной полосы; при  $h_1 = h = 0$  получим формулу  $z_{\max}$  и  $P_{\text{кр}}$  для полупространства с различными видами эпюр внешней нагрузки. На рис.3.9,а,б и 3.10,а, б приведены зависимости  $P_{\text{кр}}$  от удельного веса полупространства, удельного сцепления  $C$  и угла полного внутреннего трения  $\varphi$ . При расчёте принято, что  $h_1 = h_2 = 0,3$  м,  $\gamma_1 = 15,05$  кН/м<sup>3</sup>,  $\gamma_2 = 10,3$  кН/м<sup>3</sup>,  $a = 2$  м,  $b = 1$  м, коэффициент Пуассона для всех вариантов грунтовой среды  $\nu = 0,12$ .

Графический вид зависимостей  $P_{\text{кр}}$  и  $z_{\max}$  от физико - механических характеристик:  $C$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  увлажнённых грунтов при длине базы нагрузки  $B = a + b = 2 + 1 = 3$  м представлен на рис. 3.9-3.10. Характеристики слабых грунтов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3.

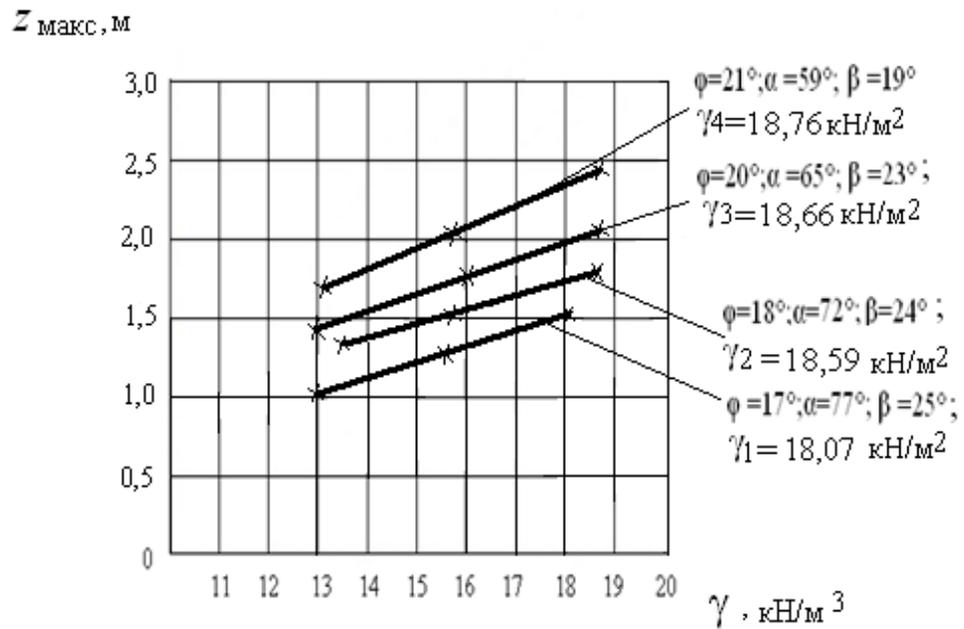
Физико - механические свойства модели полупространства

Порода	Удельный вес $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , <sup>0</sup>	Удельное сцепление $C$ , кПа	Модуль деформации $E$ , МПа	Макс. глубина крит. усиления $z_{\max}$ , М	Коэф. упругого полупространства $C_z$ , МПа
Суглинки мягкопластичные	18,07	17	14	2,8	1,57	2,84
	18,59	18	16	9,4	1,76	9,54
	18,66	20	21	11,6	2,03	12,80
	18,76	21	20	13	2,41	13,19

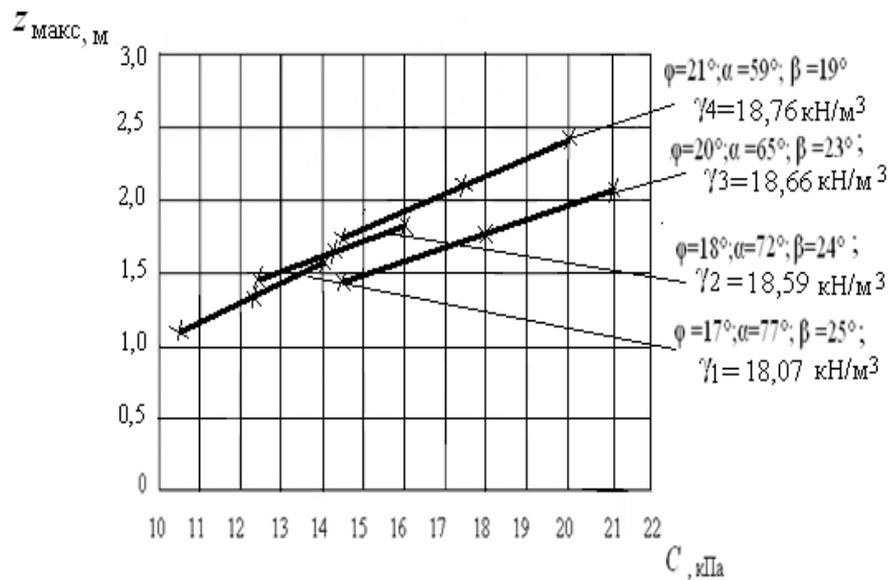


б)

Рис.3.9. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
 а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ;  
 б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис.3.10. Зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от: а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса

### 3.1.4. Расчёт критического усилия от действия отрицательной трапециевидной нагрузки

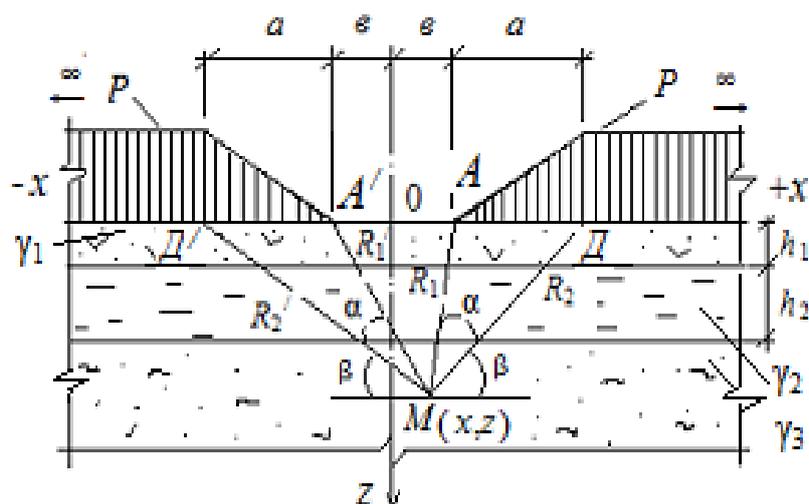


Рис. 3.11. Модель грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

При строительстве различных сооружений перемещаются значительные массы грунта, из которого формируется техногенный рельеф. Под действием веса грунта происходит изменение естественного напряжённого состояния ниже лежащей грунтовой среды. Поэтому возникает необходимость в оценке критического давления, которое может выдержать эта среда.

В настоящей работе рассмотрено решение аналогичной задачи. Но модель грунтовой среды представлена двумя плоско-параллельными слоями, лежащими на поверхности полупространства (рис.3.11). Внешняя нагрузка имитирует отрицательную форму техногенного рельефа в виде равнобокой трапеции. В этом случае напряжение в любой точке  $M(x,z)$  в полупространстве будет определяться внешней техногенной нагрузкой  $P$  и напряжением, создаваемым моделью модели и  $\sigma_x^0 = \sigma_z^0 = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]$ .

Формулы главных напряжений, обусловленных действием симметричной нагрузки, имеют следующий вид [52]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] + \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (3.42)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi a} \left[ a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') + z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right] - \frac{Pz}{\pi a} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)], \quad (3.43)$$

где  $P$  – внешняя нагрузки ;  $x, z$  – координаты точки  $M$ ;  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  – углы видимости баз действия нагрузки ;  $R_1, R_1'$  и  $R_2, R_2'$  – расстояния от точки  $M(x, z)$  до точек  $A, D, A', D'$  баз внешней нагрузки ;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – объёмный вес плоско-параллельных слоёв и полупространства;  $h_1, h_2$  – мощности плоско-параллельных слоёв;  $a = AD, a = A'D', v = OA$  и  $v = OA'$ .

Подставив выражения (3.42) и (3.43) в формулу условия предельного равновесия (3.6), получим следующее уравнение:

$$\frac{z}{\sin \varphi} \sqrt{\ln^2 \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + (\alpha - \alpha')^2} - z \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a}{P} \gamma_3 = [a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]. \quad (3.44)$$

Решая уравнение (3.44) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{[a(\beta + \beta') - v(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}. \quad (3.45)$$

Найдём угол видимости, при котором  $z = z_{\max}$ , продифференцировав для этого уравнение (3.45) по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{(x - \epsilon) \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} - \frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\} \frac{1}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} = 0; \quad (3.46)$$

$$\beta = \frac{(x - \epsilon)}{0,4a} \left[ 0,96 - \sin \varphi \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{P} \right] - \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] + \frac{2\alpha' \epsilon}{a} - \beta. \quad (3.47)$$

Найдём угол видимости, продифференцировав для этого уравнение (3.45) по  $\alpha'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha'} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right] (-x - \epsilon)}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left\{ [a(\beta + \beta') - \epsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\} \frac{1}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} = 0; \quad (3.48)$$

$$\beta + \beta' = \frac{(x + \epsilon)}{0,4a} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{P} \right] + \frac{2\epsilon \alpha}{a} + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]; \quad (3.49)$$

$$\beta' = \frac{(x + \epsilon)}{0,4a} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{P} \right] + \frac{2\epsilon \alpha}{a} + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] - \beta. \quad (3.50)$$

Найдём угол видимости, продифференцировав для этого уравнение (3.45) по  $\beta$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right] a}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} -$$

$$\frac{0 \cdot \left[ a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a}{P} \{ \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 [(h_1 + h_2)] + C \operatorname{ctg} \varphi \}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} = 0;$$
(3.51)

$$\alpha - \alpha' = -\frac{1}{0,4} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{P} \right] = \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{0,4 P} -$$

$$-\frac{1}{0,4} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} \right];$$
(3.52)

$$\alpha = -\frac{1}{0,4} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{P} \right] + \alpha'.$$
(3.53)

Найдём угол видимости, продифференцировав уравнение (3.45) по  $\beta'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{a \left\{ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} -$$

$$\frac{0 \left\{ \left[ a(\beta + \beta') - \varepsilon(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha') \right] + \frac{\pi a}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P} \right]^2} = 0;$$
(3.54)

$$-\frac{0,4\alpha'}{\sin \varphi} = -\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{\pi a \gamma_3}{P} - \frac{0,4\alpha}{\sin \varphi} \left( \frac{\sin \varphi}{0,4} \right);$$

$$\alpha' = \frac{(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} - \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{0,4 P} + \alpha.$$
(3.55)

При найденных значениях углов видимости глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\text{макс}}$ , следовательно формула (3.45) будет примет вид [34] :

$$z_{\text{макс}} = \frac{[a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P}[\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}. \quad (3.56)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (3.56) в формулу (3.12), в этом случае  $B = 2a + 2e$ .

$$\frac{1,76Pa}{C_z} = \frac{[a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] + \frac{\pi a}{P}[\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + \frac{0,4(\alpha - \alpha')}{\sin \varphi} - \frac{\pi a \gamma_3}{P}}; \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1,76P^2}{\sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha') \right] - P \{ 1,76\pi a \gamma_3 + \\ & + \frac{C}{a} [a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] \} - \pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2)] + C \operatorname{ctg} \varphi = 0. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Приведём уравнение (3.58) к следующему виду [34] :

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.59)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \frac{1,76}{\sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_2 R_2'}{R_1 R_1'} + 0,4(\alpha - \alpha') \right]; \\ N &= - \left\{ 1,76\pi a \gamma_3 + \frac{C}{a} [a(\beta + \beta') - e(\alpha + \alpha') + x(\alpha - \alpha')] \right\}; \\ L &= -\pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3(h_1 + h_2)] + C \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Решая уравнение (3.60), получим формулу для вычисления  $P_{\text{кр}}$  [34] :

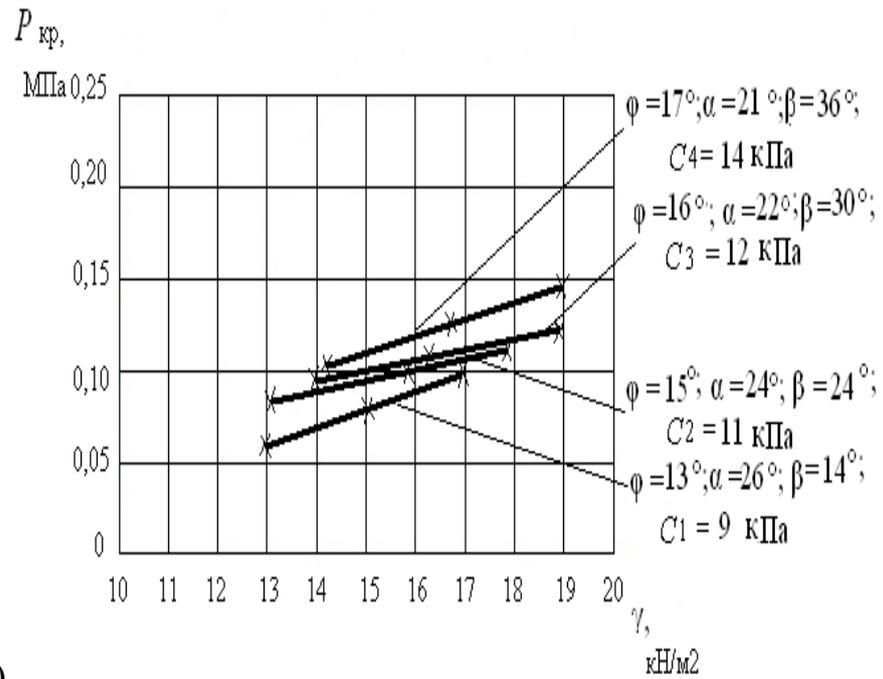
$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]. \quad (3.61)$$

Формулы (3.56) и (3.61) позволяют вычислять  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  в полупространстве. В этих формулах  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения, можно получить зависимости для  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  для различных вариантов моделей среды и эпюр внешней нагрузки. Например при  $\nu = 0$ , т. е. когда точки А, и А' совпадут с 0, эпюра будет иметь другой вид симметричной нагрузки; придавая ширине базы полубесконечной нагрузки определённое конечное значение, можно получить эпюру для конечной симметричной нагрузки. На рис. 3.12 а,б приведены зависимости  $P_{\text{кр}}$  от удельного веса полупространства, удельного сцепления  $C$  и угла полного внутреннего трения  $\varphi$ , на рис. 3.13 а,б приведены зависимости глубин развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от тех же характеристик. В задаче принято  $a = 2\text{м}$ ,  $\nu = 0,13$ , коэффициент Пуассона для всех вариантов грунтовой среды  $\nu = 0,13$ . Расчёт  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства, (табл.3.4) соответствующих пластичным супесям.

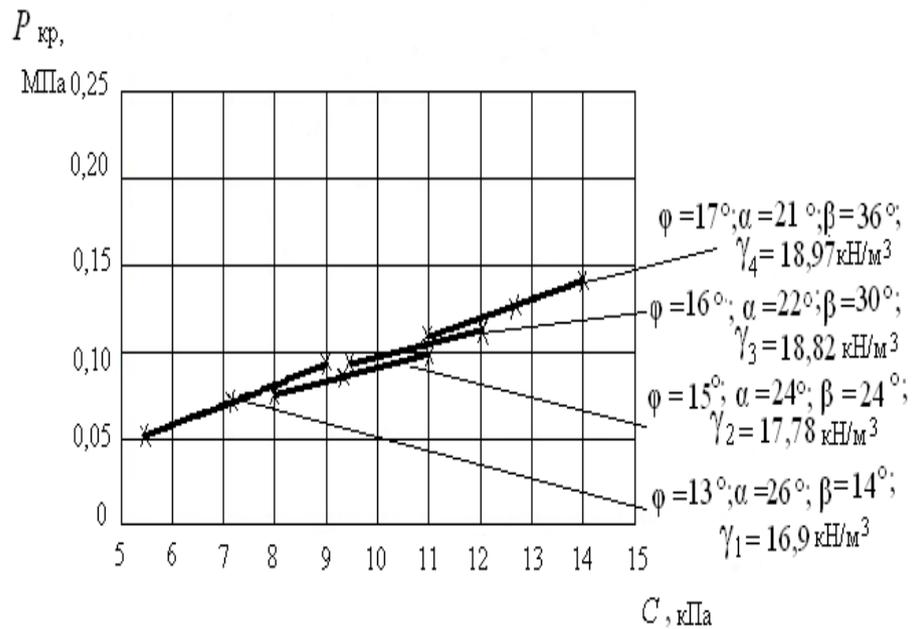
Таблица 3.4.

Физико-механические характеристики модели полупространства

Порода	Удельный вес $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , <sup>0</sup>	Удельное сцепление $C$ , кПа	Модуль деформации $E$ , МПа	Макс. глубина крит. усилия $z_{\text{макс}}$ , М	Коэф. упругости полупространства $C_z$ , МПа
Супесь пластичная	16,90	13	9	15,8	0,75	16,07
	17,78	15	11	16,2	1,34	16,48
	18,82	16	12	16,6	1,73	17,0
	18,97	17	14	17,8	2,18	18,1

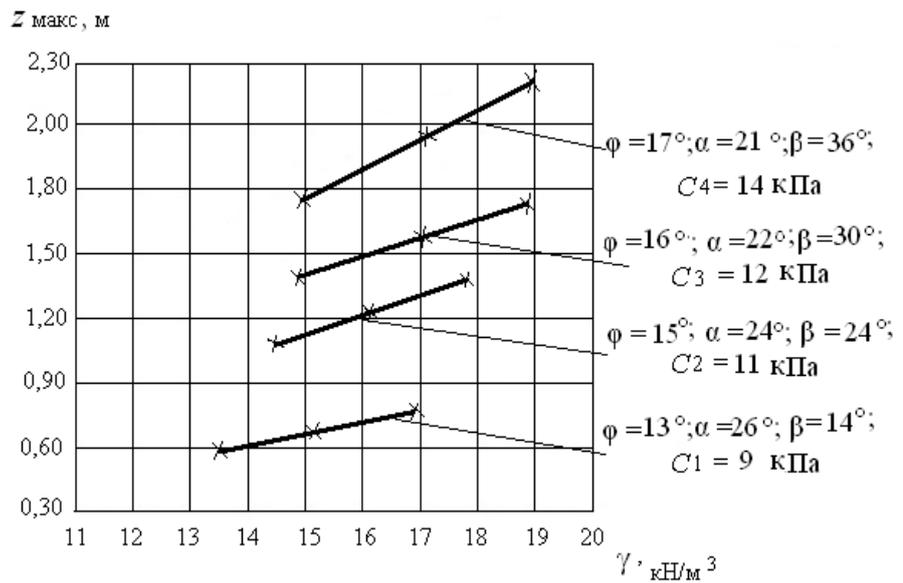


а)

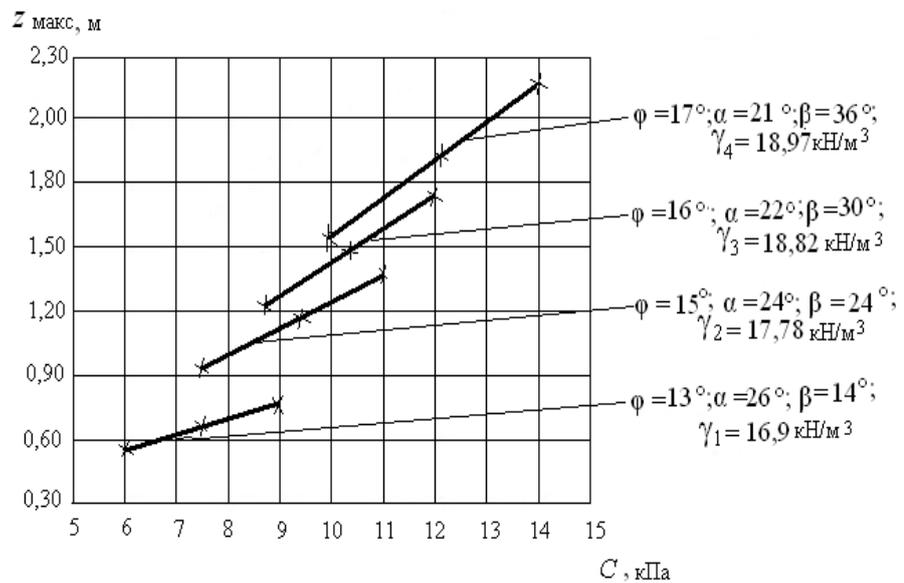


б)

Рис.3.12. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:  
а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис.3.13. Зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от:  
а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$

### 3.1.5. Расчёт критического усилия от действия отрицательной треугольной нагрузки

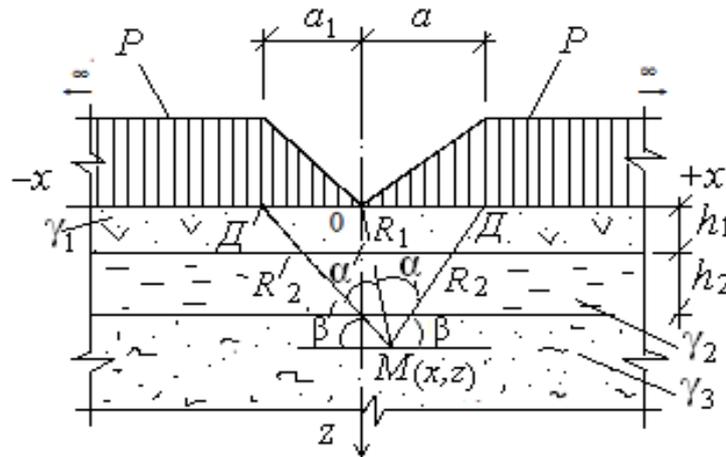


Рис.3.14. Модель многослойной грунтовой среды и эпюра внешней нагрузки

Формулы главных напряжений, обусловленных действием комбинированной нагрузки, представлены следующими выражениями [52]:

$$\sigma_1 = \frac{P}{\pi} \left[ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \left( \frac{z}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) \right] + \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)]; \quad (3.62)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\pi} \left[ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x'}{a_1} \alpha' \right) + \left( \frac{z}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{z}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) \right] - \frac{Pz}{\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right)^2} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 [z - (h_1 + h_2)], \quad (3.63)$$

где  $P$  – внешняя нагрузки ;  $x, z$  – координаты точки  $M$ ;  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  – углы видимости баз действия нагрузки ;  $R_1, R_2, R_2'$  – расстояния от точки  $M(x, z)$  до точек  $O, D, O', D'$  баз внешней нагрузки ;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – объёмный вес плоско-параллельных слоёв и полупространства;  $h_1, h_2$  – мощности плоско - параллельных слоёв;  $a = OD, a_1 = OD'$ .

Подставим выражения (3.62) и (3.63) в условие предельного равновесия (3.6) , получим следующее уравнение:

$$\frac{Pz}{\pi \sin \varphi} \sqrt{\left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right)^2} - \frac{Pz}{\pi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) - \gamma_3 z = \frac{P}{\pi} [(\beta + \beta') + \left(\frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha'\right)] + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi. \quad (3.64)$$

Решая уравнение (3.64) относительно  $z$ , получим

$$z = \frac{(\beta + \beta') + \left(\frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha'\right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (3.65)$$

Найдём угол видимости, при котором  $z = z_{\max}$ , продифференцировав для этого уравнение (3.65) по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\frac{x}{a} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} - \frac{0,4}{a \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left(\frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha'\right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\} \frac{1}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1}\right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} = 0; \quad (3.66)$$

$$\beta = \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left(\frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1'}\right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right] - \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] - \beta'. \quad (3.67)$$

Найдём угол видимости, продифференцировав для этого уравнение (3.65) по  $\alpha'$ :

$$\begin{aligned}
& -\frac{x}{a_1} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right] \\
\frac{\partial z}{\partial \alpha'} = & \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2 +}{\frac{0,4}{a_1 \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\}} = 0; \\
& \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2}{\phantom{\frac{0,4}{a_1 \sin \varphi} \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}} = 0;
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{0,4}{a_1 \sin \varphi} [(\beta + \beta') - \frac{x}{a_1} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right] - \\
& - \frac{0,4\pi}{P a_1 \sin \varphi} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \cdot \frac{a_1 \sin \varphi}{0,4}; \\
\beta' = & \frac{x \sin \varphi}{0,4} \left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right] - \\
& - \left[ \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] - \beta \right].
\end{aligned} \tag{3.69}$$

(3.69)

Найдём угол видимости, продифференцировав для этого уравнение (3.65) по  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \beta} = & \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} - \\
& \frac{0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} = 0;
\end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) = - \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{\pi \gamma_3}{P} \left( \frac{\sin \varphi}{0,4} \right);$$

$$\alpha = - \frac{a(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{\pi a \gamma_3 \sin \varphi}{0,4 P} + \frac{a \alpha'}{a_1}. \quad (3.71)$$

Найдём угол видимости, продифференцировав уравнение (3.65) по  $\beta'$ :

$$\frac{\partial z}{\partial \beta'} = \frac{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} -$$

$$\frac{0 \cdot \left\{ (\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] \right\}}{\left[ \frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} \right]^2} = 0;$$

$$(3.72)$$

$$\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P} = 0;$$

$$\alpha' = \frac{a_1(0,96 - \sin \varphi)}{0,4} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) - \frac{\pi a_1 \gamma_3 \sin \varphi}{0,4 P} + \frac{a_1 \alpha}{a}. \quad (3.73)$$

При найденных значениях углов глубина развития критического усилия  $z$  будет равна  $z_{\max}$ , следовательно уравнение (3.65) будет примет вид [41]:

$$z_{\max} = \frac{(\beta + \beta') + \left( \frac{x}{a} \alpha - \frac{x}{a_1} \alpha' \right) + \frac{\pi}{P} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]}{\frac{0,96 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + \frac{0,4}{\sin \varphi} \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) - \frac{\pi \gamma_3}{P}}. \quad (3.74)$$

Для определения  $P_{\text{кр}}$  поставим (3.74) в формулу (3.12), в этом случае  $B = a + a'$  – база действия нагрузки.

В результате получим следующее выражение:

$$\frac{0,88P^2B}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - P \left[ \frac{0,88B}{C_z} \pi \gamma_3 + (\beta + \beta') + \right. \\ \left. + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right] - \pi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] = 0. \quad (3.75)$$

Приведём квадратное уравнение (3.75) к следующему виду [41]:

$$MP^2 + NP + L = 0, \quad (3.76)$$

где

$$M = \frac{0,88B}{C_z \sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \frac{1}{a} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{a_1} \ln \frac{R_2'}{R_1} \right) + 0,4 \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \\ N = - \left[ \frac{0,88B}{C_z} \pi \gamma_3 + (\beta + \beta') + x \left( \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha'}{a_1} \right) \right]; \\ L = - \pi [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi]. \quad (3.77)$$

Решая уравнение (3.76), получим формулу для вычисления  $P_{\text{кр}}$  [41]:

$$P_{\text{кр}} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}. \quad (3.78)$$

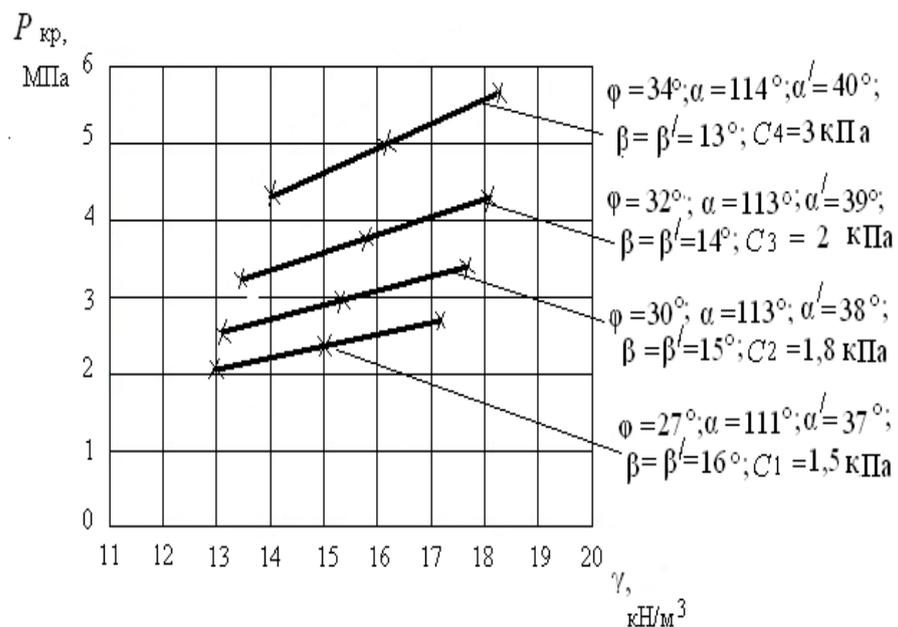
Формулы (3.74) и (3.78) зависят от большого количества физико-механических и геометрических характеристик модели. Придавая им различные значения можно получить формулы для  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  для различных вариантов эпюр внешней нагрузки. Например, при  $a = a_1$ , эпюра будет иметь вид симметричной нагрузки; придавая ширине базы полубесконечной нагрузки определённое конечное значение, можно получить эпюру для комбинированной треугольной и ленточной нагрузки; при  $h_1 = h_2 = 0$  и ширине базы полубесконечной нагрузки равной нулю получим формулу  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  для полупространства с различными видами эпюр внешней нагрузки, например, как для нагрузки в форме прямоугольного треугольника и т.д. На рис. 3.16 а,б приведены зависимости  $P_{\text{кр}}$  от удельного веса полупространства, удельного сцепления  $C$  и угла полного внутреннего трения  $\varphi$ , на рис. 3.17 а,б приведены зависи-

мости глубин развития критического усилия  $h$  от тех же характеристик. При расчёте принято  $h_1 = h_2 = 0,3$  м,  $\gamma_1 = 15,05$  кН/м<sup>3</sup>,  $\gamma_2 = 10,3$  кН/м<sup>3</sup>,  $a = 3$  м,  $a_1 = 2$  м, коэффициент Пуассона для всех вариантов грунтовой среды  $\nu = 0,13$ . Расчёт  $z_{\text{макс}}$  и  $P_{\text{кр}}$  выполнялся при различных физико-механических характеристиках полупространства (табл. 3.5.), соответствующим мелким водонасыщенным пескам.

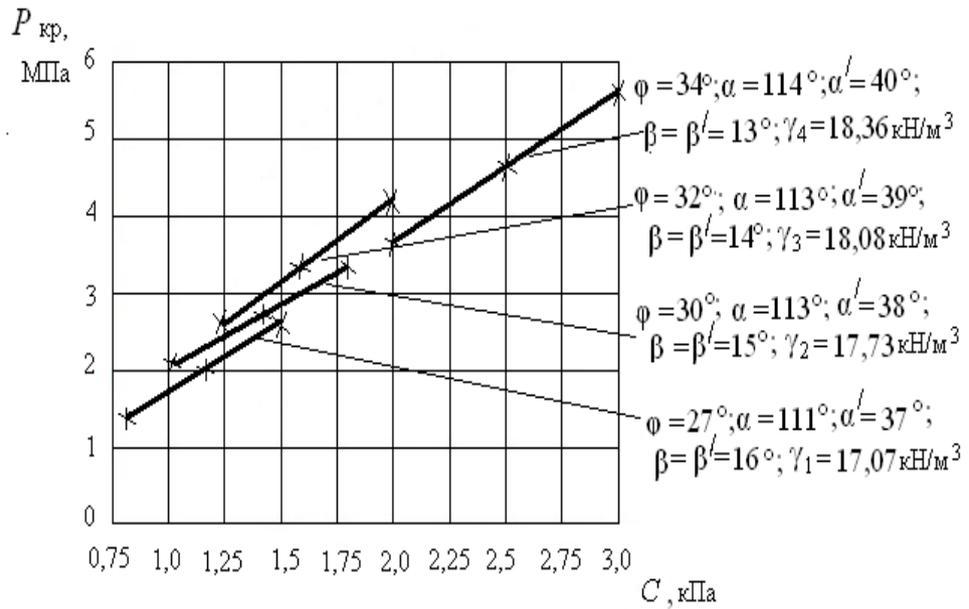
Таблица 3.5.

Физико - механические свойства модели полупространства

Порода	Удельный вес $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °	Удельное сцепление $C$ , кПа	Модуль деформации $E$ , МПа	Макс. глубина крит. усилия $z_{\text{макс}}$ , М	Коеф. упругого полупространства $C_z$ , МПа
Песок мелкий, средней степени водонасыщенный	17,07	27	1,5	25,8	0,58	26,25
	17,73	30	1,8	26,2	0,59	26,65
	18,08	32	2	28	0,60	28,48
	18,36	34	3	29	0,61	29,30



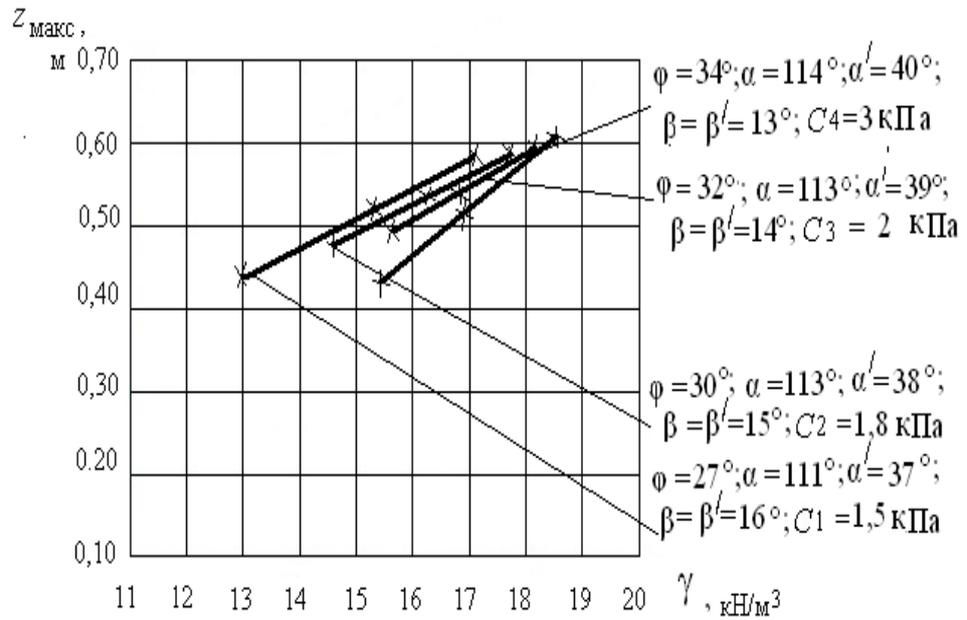
а)



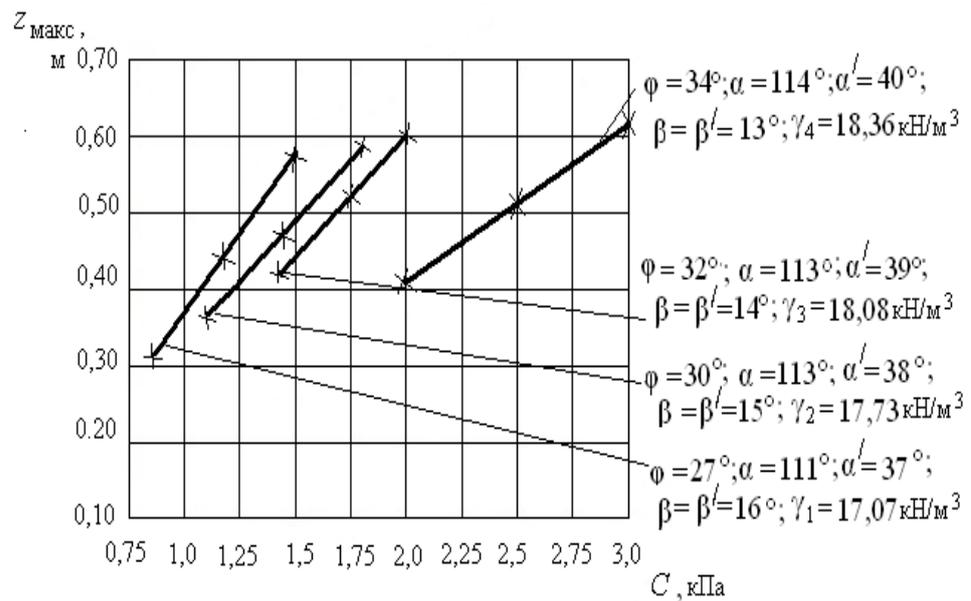
б)

Рис.3.16. Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от:

- а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ;
- б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$



а)



б)

Рис.3.17.Зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от: а) удельного веса грунта  $\gamma$  при постоянных значениях удельного сцепления  $C$ ; б) удельного сцепления грунта  $C$  при постоянных значениях удельного веса  $\gamma$

После выполненных расчётов несущей способности многослойных и однослойных грунтовых сред следует отметить общие закономерности в решениях плоских задач, рассмотренных в этой главе:

- для однородных и неоднородных грунтовых сред при нагружении их внешней нагрузкой с увеличением физико-механических показателей:  $\phi$ ,  $\gamma$  и  $C$  происходит изменение критического усилия  $P_{\text{кр}}$  и  $z_{\text{макс}}$  в большую сторону, но углы видимости уменьшаются с глубиной; при этом угловой коэффициент (угол наклона графиков  $P_{\text{кр}}(\gamma)$  и  $P_{\text{кр}}(C)$  к оси абсцисс) увеличивается с ростом  $\phi$  и  $C$ . Для однослойных грунтовых сред угловые коэффициенты выше, чем для многослойных сред, где-то на 6 - 8%;
- для всех однослойных и многослойных грунтовых сред с одинаковыми физико-механическими характеристиками полупространства изменение численного значения  $z_{\text{макс}}$  в зависимости от приложенной нагрузки происходит одинаково.

## Глава 4

### АППРОКСИМАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ВНЕШНИХ НАГРУЗОК

В результате анализа графических зависимостей  $P_{кр}$  и  $z_{макс}$  было установлено, что в ряде случаев может быть аппроксимирование линейных функций вида  $y = ax + b$ , коэффициенты которой определяются методом наименьших квадратов [45]. Расчётом были получены линейные зависимости  $P_{кр}$  и  $z_{макс}$  в зависимости от физико-механических характеристик грунтов и от действия вышеуказанных нагрузок.

#### 4.1. Нагрузка по закону равнобедренного треугольника

а) В результате расчёта получены двенадцать значений искомой функции  $y(z_{макс})$  при двенадцати значений аргумента  $x(C)$ . Заданные характеристики глубины развития критического усилия  $z_{макс}$  и  $C$  занесены в таблицу 4.1.

Таблица 4.1.

$x$ ( $C$ )	1,1	1,2	1,31	1,39	1,4	1,5	1,6	1,6	1,62	1,8	1,82	2,0
$y$ ( $z_{макс}$ )	$0,34 \cdot 10^3$	$0,39 \cdot 10^3$	$0,41 \cdot 10^3$	$0,45 \cdot 10^3$	$0,42 \cdot 10^3$	$0,48 \cdot 10^3$	$0,52 \cdot 10^3$	$0,50 \cdot 10^3$	$0,51 \cdot 10^3$	$0,59 \cdot 10^3$	$0,58 \cdot 10^3$	$0,61 \cdot 10^3$

В этом случае необходимо найти функциональную зависимость между  $x(C)$  и  $y(z_{макс})$  в виде линейной функции [45].

$$y = ax + b. \quad (4.1)$$

При составлении линейной системы [45] для определения  $a$  и  $b$  предварительно вычисли:

$$\begin{aligned} \Sigma x_i &= 18,34; \quad \Sigma y_i = 5,8 \cdot 10^3; \quad \Sigma x_i^2 = 336,36; \\ \Sigma y_i x_i &= 0,374 \cdot 10^3 + 0,468 \cdot 10^3 + 0,5371 \cdot 10^3 + 0,6255 \cdot 10^3 + 0,588 \cdot 10^3 + 0,72 \cdot 10^3 + \\ &+ 0,832 \cdot 10^3 + 0,8 + 0,8256 \cdot 10^3 + 1,062 \cdot 10^3 + 1,0556 \cdot 10^3 + 1,22 \cdot 10^3 = 9,1078 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} 336,36a + 18,34 b = 9,11 \cdot 10^3; \\ 18,34a + 12 b = 5,8 \cdot 10^3. \end{cases} \quad (4.2)$$

Решая эту систему, найдём [45]:

$$a = (5,8 \cdot 10^3 - 12 b) / 18,34; \quad 336,36(5,8 \cdot 10^3 - 12 b) / 18,34 + 18,34 b = 9,11 \cdot 10^3;$$

$$b = 482,12; \quad a = 0,794.$$

Следовательно,

$$y = 0,794x + 482,12 \quad \text{или} \\ z_{\text{макс}} = 0,794 C + 482,12 \quad (\text{м}). \quad (4.3)$$

Приближённая зависимость (4.3) указана на графике рис.4.1.

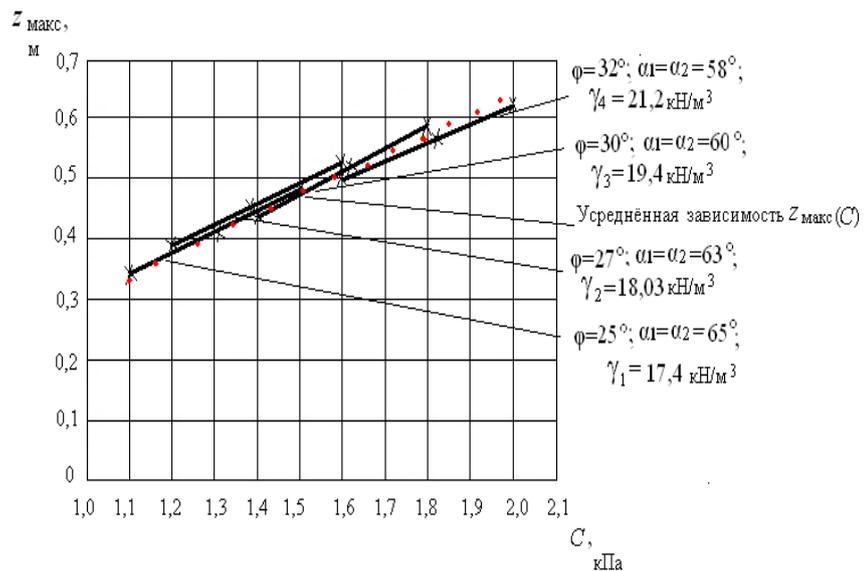


Рис.4. 1. Приближённая зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от удельного сцепления грунта  $C$

б) Заданные характеристики глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  и удельного веса грунта  $\gamma$  занесены в таблицу 4.2.

Таблица 4.2.

$x$ ( $\gamma$ )	12,5	13	14	15	15	15,3	16,5	17,4	18,03	18,5	19,4	21,2
$y$ ( $z_{\text{макс}}$ )	$0,34 \cdot 10^3$	$0,39 \cdot 10^3$	$0,42 \cdot 10^3$	$0,41 \cdot 10^3$	$0,45 \cdot 10^3$	$0,43 \cdot 10^3$	$0,5 \cdot 10^3$	$0,48 \cdot 10^3$	$0,51 \cdot 10^3$	$0,55 \cdot 10^3$	$0,6 \cdot 10^3$	$0,63 \cdot 10^3$

Найдём функциональную зависимость между  $x$  ( $C$ ) и  $y$  ( $z_{\text{макс}}$ ) в виде линейной функции [45]. При составлении линейной системы для определения  $a$  и  $b$  предварительно вычислим:

$$\begin{aligned} \Sigma x_i &= 195,83; \quad \Sigma y_i = 5,71 \cdot 10^3; \quad \Sigma x_i^2 = 38349,39; \\ \Sigma y_i x_i &= 4,25 \cdot 10^3 + 5,07 \cdot 10^3 + 5,88 \cdot 10^3 + 6,15 \cdot 10^3 + 6,75 \cdot 10^3 + 6,579 \cdot 10^3 + 8,25 \cdot 10^3 + \\ &+ 8,352 \cdot 10^3 + 10,175 \cdot 10^3 + 11,64 \cdot 10^3 + 13,356 \cdot 10^3 = 95,65 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} 38349,39a + 195,83 b = 95,65 \cdot 10^3; \\ 195,83 a + 12 b = 5,71 \cdot 10^3. \end{cases} \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} a &= (95,65 \cdot 10^3 - 195,83 b) / 38349,39; \quad 195,83(95,65 \cdot 10^3 - 195,83 b) / \\ &/ 38349,39 + 12 b = 5,71 \cdot 10^3; \quad b = 474,69; \quad a = 0,07. \end{aligned}$$

Следовательно,  $y = 0,07x + 474,69$  или  $z_{\text{макс}} = 0,07 \gamma + 474,69$  (м). (4.5)

Приближённая зависимость (4.5) указана на графике рис.4.2.

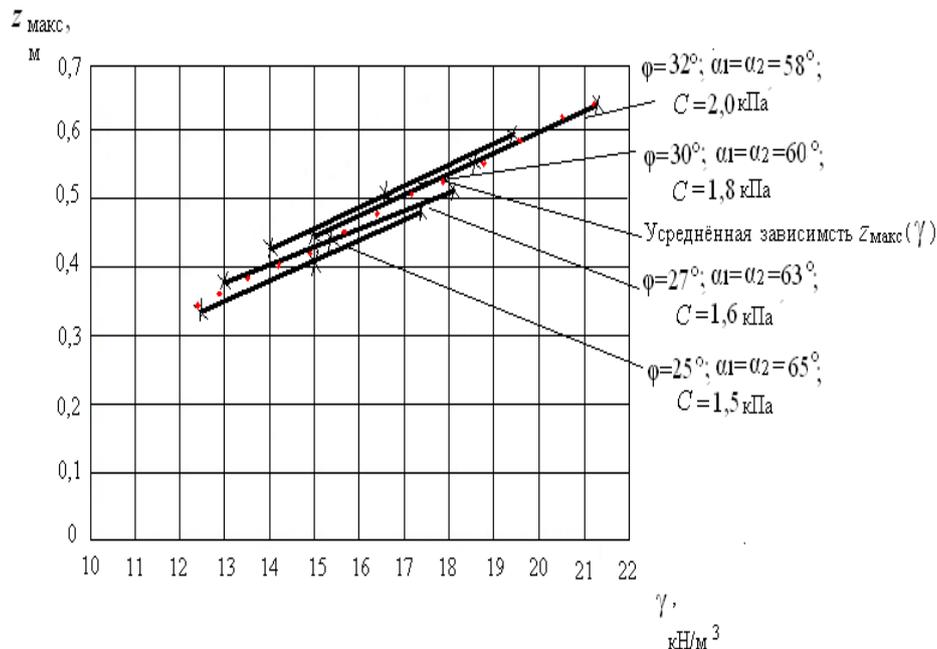


Рис. 4. 2. Приближённая зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от удельного веса грунта  $\gamma$

## 4.2. Нагрузка по закону неравностороннего треугольника

В результате расчёта получены также двенадцать значений искомой функции  $y(P_{кр})$  при двенадцати значениях аргумента  $x(C)$ . Характеристики критического усилия  $P_{кр}$  и  $C$  занесены в таблицу 4.3.

Таблица 4.3.

$x$ ( $C$ )	10,5	12	12,3	14,0	14,0	16,0	16,0	16,3	18,2	18,5	20,0	21,0
$y$ ( $P_{кр}$ )	$0,08 \cdot 10^3$	$0,11 \cdot 10^3$	$0,1 \cdot 10^3$	$0,112 \cdot 10^3$	$0,13 \cdot 10^3$	$0,141 \cdot 10^3$	$0,16 \cdot 10^3$	$0,15 \cdot 10^3$	$0,16 \cdot 10^3$	$0,18 \cdot 10^3$	$0,18 \cdot 10^3$	$0,20 \cdot 10^3$

При составлении линейной системы для определения  $a$  и  $b$  предварительно вычислим:

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 188,8; \quad \sum y_i = 1,703 \cdot 10^3; \quad \sum x_i^2 = 35645,44; \\ \sum y_i x_i &= 0,84 \cdot 10^3 + 1,32 \cdot 10^3 + 1,23 \cdot 10^3 + 1,568 \cdot 10^3 + 1,82 \cdot 10^3 + 2,256 \cdot 10^3 + 2,56 \cdot 10^3 + \\ &+ 2,445 \cdot 10^3 + 2,912 \cdot 10^3 + 3,33 \cdot 10^3 + 3,6 \cdot 10^3 + 4,2 \cdot 10^3 = 28,081 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Система примет вид :

$$\begin{cases} 35645,44 a + 188,8 b = 28,081 \cdot 10^3; \\ 188,8 a + 12 b = 1,703 \cdot 10^3. \end{cases} \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} a &= (28,081 \cdot 10^3 - 188,8 b) / 35645,44; \quad 188,8 (28,081 \cdot 10^3 - 188,8 b) / 35645,44 + \\ &+ 12 b = 1,703 \cdot 10^3; \quad b = 141,3; \quad a = (28,081 \cdot 10^3 - 188,8 \cdot 141,3) / 35645,44 = 0,04; \\ &a = 0,04. \end{aligned}$$

Следовательно,  $y = 0,04x + 141,3$  или

$$P_{кр} = 0,04 C + 141,3 \text{ (кН/м}^2\text{)}. \quad (4.7)$$

Приближённая зависимость (4.7) указана на графике рис.4.3.

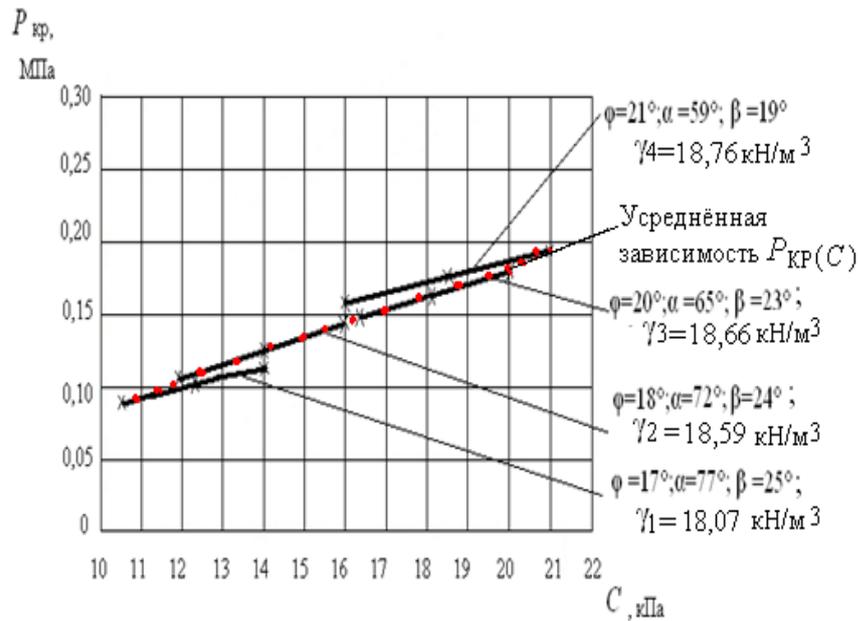


Рис.4. 3. Приближённая зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от удельного сцепления грунта  $C$

#### 4.3. Отрицательная нагрузка по закону трапеции

Заданные характеристики критической нагрузки  $P_{кр}$  и  $C$  занесены в таблицу 4.4.

Таблица 4.4.

$x$ ( $C$ )	5,5	7,2	8,0	9,0	9,3	9,5	10,9	11	11,0	12,0	12,6	14,0
$y$ ( $P_{кр}$ )	$5 \cdot 10^3$	$7,5 \cdot 10^3$	$7,5 \cdot 10^3$	$8,76 \cdot 10^3$	$8 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^3$	$10 \cdot 10^3$	$10,7 \cdot 10^3$	$11 \cdot 10^3$	$11,5 \cdot 10^3$	$12,5 \cdot 10^3$	$14,2 \cdot 10^3$

Найдём функциональную зависимость между  $x$  ( $C$ ) и  $y$  ( $P_{кр}$ ) в виде линейной функции [45]. Составим линейную систему на основании данных табл.4.4, предварительно определив коэффициенты

$a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} \sum x_i &= 120; \quad \sum y_i = 115,66 \cdot 10^3; \quad \sum x_i^2 = 14400; \quad \sum y_i x_i = 27,5 \cdot 10^3 + 54 \cdot 10^3 + \\ &+ 60 \cdot 10^3 + 78,84 \cdot 10^3 + 74,4 \cdot 10^3 + 85,5 \cdot 10^3 + 109 \cdot 10^3 + 117,7 \cdot 10^3 + 121 \cdot 10^3 + \\ &+ 138 \cdot 10^3 + 157,5 \cdot 10^3 + 198,8 \cdot 10^3 = 1222,24 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Система будет иметь вид:

$$\begin{cases} 14400a + 120 \epsilon = 1222,24 \cdot 10^3; \\ 120 a + 12 \epsilon = 115,66 \cdot 10^3. \end{cases} \quad (4.8)$$

Решая эту систему, найдём значения коэффициентов  $a$  и  $\epsilon$  [45]:  
 $a = (1222,24 \cdot 10^3 - 120 \epsilon) / 14400$ ;  $120 (1222,24 \cdot 10^3 - 120 \epsilon) / 14400 + 12 \epsilon = 115,66 \cdot 10^3$ ;  
 $\epsilon = 9588,61$ ;  $a = (1222,24 \cdot 10^3 - 120 \cdot 9546,43) / 14400 = -0,00004$ ;  $a = 5,324$ .

Следовательно,  $y = 5,324 x + 9546,43$  или

$$P_{кр} = 5,324 C + 9588,61 \text{ (кН/м}^2\text{)}. \quad (4.9)$$

Приближённая зависимость (4.9) указана на графике рис.4.4.

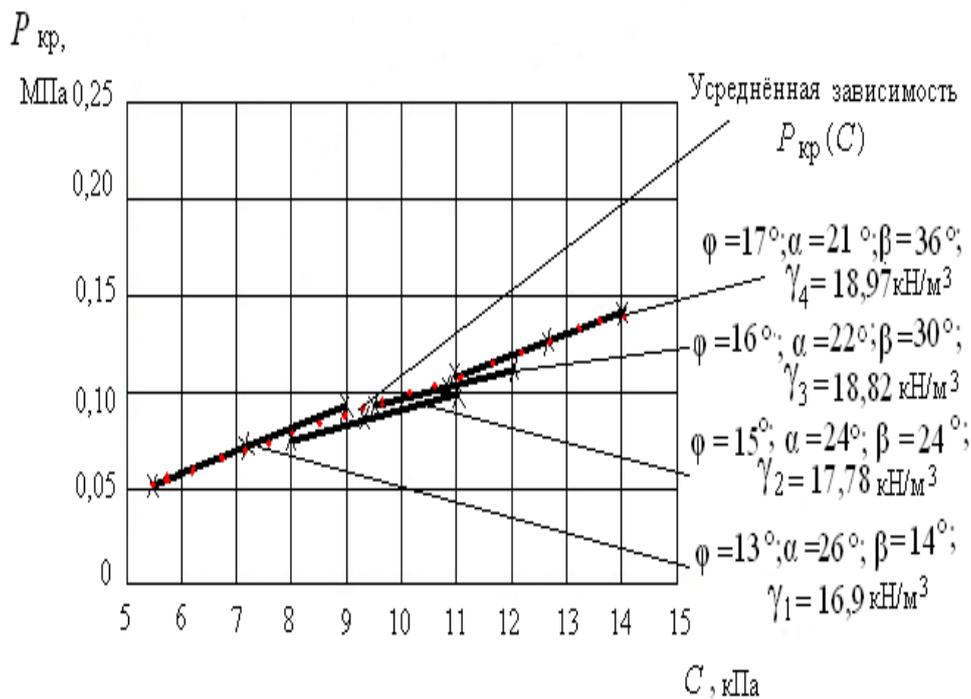


Рис.4. 4. Приближённая зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от удельного сцепления грунта  $C$

#### 4.4. Отрицательная нагрузка по закону треугольника

а) Характеристики критической нагрузки  $P_{кр}$  и  $C$  занесены в таблицу 4.5.

Таблица 4.5.

$x$ ( $C$ )	0,85	1,1	1,14	1,25	1,31	1,5	1,57	1,8	2,0	2,0	2,5	3,0
$y$ ( $P_{кр}$ )	$1,53 \cdot 10^3$	$2,08 \cdot 10^3$	$2,02 \cdot 10^3$	$2,68 \cdot 10^3$	$2,47 \cdot 10^3$	$2,7 \cdot 10^3$	$3,36 \cdot 10^3$	$3,39 \cdot 10^3$	$3,77 \cdot 10^3$	$4,28 \cdot 10^3$	$4,72 \cdot 10^3$	$5,66 \cdot 10^3$

Для составления линейной системы, определим коэффициенты  $a$  и  $b$ :

$$\sum x_i = 20,02; \quad \sum y_i = 38,66 \cdot 10^3; \quad \sum x_i^2 = 400,8;$$

$$\sum y_i x_i = 1,301 \cdot 10^3 + 2,29 \cdot 10^3 + 2,303 \cdot 10^3 + 3,35 \cdot 10^3 + 3,24 \cdot 10^3 + 4,05 \cdot 10^3 + 5,28 \cdot 10^3 + 6,102 \cdot 10^3 + 7,54 \cdot 10^3 + 8,56 \cdot 10^3 + 11,8 \cdot 10^3 + 16,98 \cdot 10^3 = 72,796 \cdot 10^3.$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} 400,8 a + 20,02 b = 72,796 \cdot 10^3; \\ 20,02 a + 12 b = 38,66 \cdot 10^3. \end{cases} \quad (4.10)$$

Решая систему, найдём [45]:

$$a = (72,796 \cdot 10^3 - 20,02 b) / 400,8; \quad 20,02 (72,796 \cdot 10^3 - 20,02 b) / 400,8 + 12b = 38,66 \cdot 10^3;$$

$$b = 3,184 \cdot 10^3; \quad a = (72,796 \cdot 10^3 - 20,02 \cdot 3,184 \cdot 10^3) / 400,8 = 0,023; \quad a = 0,023.$$

Следовательно,  $y = 0,023 x + 3,184 \cdot 10^3$  или

$$P_{кр} = 0,039 C + 3,184 \cdot 10^3 \text{ (кН/м}^2\text{)}. \quad (4.11)$$

Приближённая зависимость (4.11) указана на графике рис.4.5.

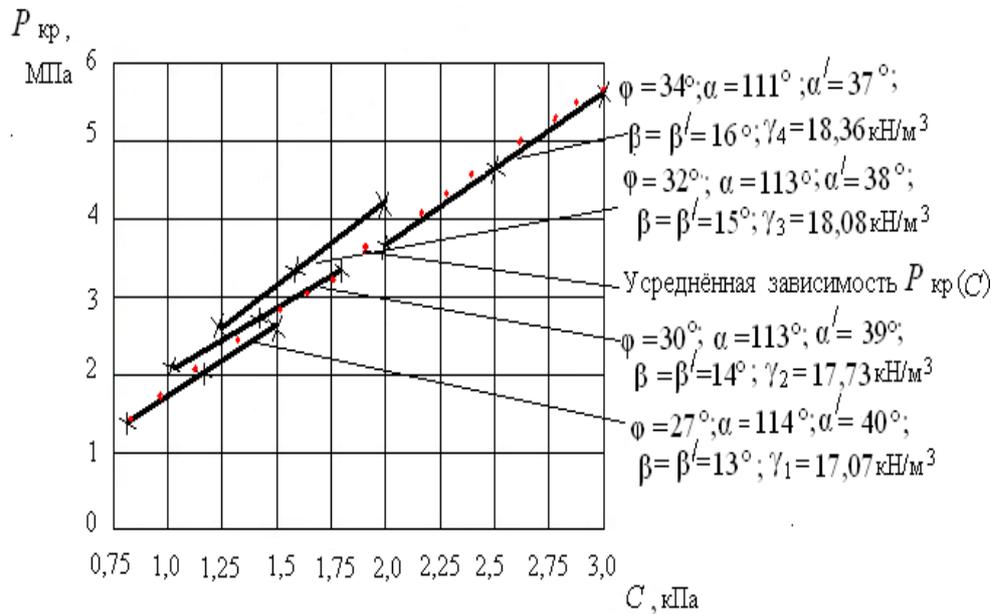


Рис.4. 5. Приближённая зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от удельного сцепления грунта  $C$

б) Характеристики максимальной глубины проявления критического усилия  $z_{\max}$  и удельного веса грунта  $\gamma$  занесены в таблицу 4.6.

Таблица 4.6.

$x$	13,0	15,2	17,07	14,6	16,2	17,73	15,6	16,9	8,08	15,2	16,8	18,36
( $\gamma$ )												
$y$	0,44	0,52	0,58	0,49	0,54	0,59	0,52	0,56	0,6	0,51	0,56	0,61
( $z_{\max}$ )												

Найдём между  $x$  ( $\gamma$ ) и  $y$  ( $z_{\max}$ ) функциональную зависимость в виде линейной функции. Составим линейную систему на основании данных табл. 3.6, предварительно вычислив коэффициенты  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} \Sigma x_i &= 194,74; \quad \Sigma y_i = 6,52; \quad \Sigma x_i^2 = 37923,67; \\ \Sigma y_i x_i &= 5,72 + 7,904 + 9,9 + 7,154 + 8,748 + 10,461 + 8,112 + 9,464 + 10,848 + 7,752 + \\ &+ 9,408 + 11,996 = 107,47. \end{aligned}$$

Линейная система примет вид

$$\begin{cases} 37923,67a + 194,74 v = 107,47; \\ 194,74 a + 12 v = 6,52. \end{cases} \quad (4.12)$$

Из (4.12) следует, что

$$a = (6,52 - 12 v) / 194,74; \quad 37923,67(6,52 - 12 v) / 194,74 + 194,74 v = 107,47;$$

$$v = 0,497;$$

$$a = (6,52 - 12 \cdot 0,497) / 194,74 = 0,003; \quad a = 0,003.$$

Следовательно,  $y = 0,003 x + 0,497$  или

$$z_{\text{макс}} = 0,003 \gamma + 0,497 \text{ (м)}. \quad (4.13)$$

Приближённая зависимость (4.13) указана на графике рис.4.6.

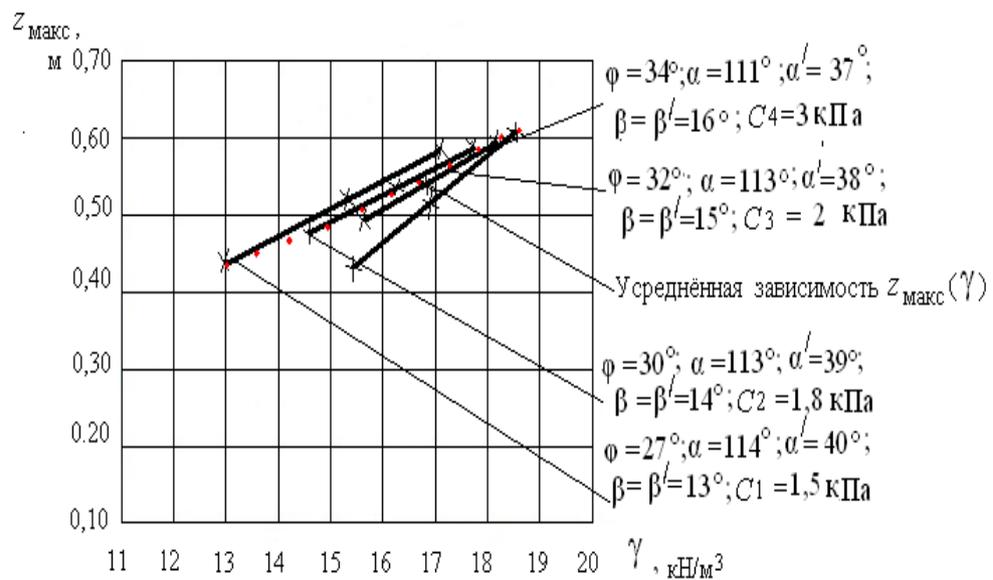


Рис. 4. 6. Приближённая зависимость глубины развития критического усилия  $z_{\text{макс}}$  от удельного веса грунта  $\gamma$

## ВЫВОДЫ К 1-й ЧАСТИ

1. Графические зависимости  $P_{кр}(C)$  для неравносторонней нагрузки на рис. 4.3, для нагрузки по закону трапеции на рис. 4.4 и зависимости  $z_{макс}(C)$  для равнобедренной нагрузки на рис. 4.1 наиболее приближены к усреднённым линейным зависимостям. Численное расхождение координат точек функциональных зависимостей от приближенных составляет в пределах 7 - 10%.
2. Для зависимостей  $P_{кр}(C)$  для на рис. 4.5 увеличение критического усилия происходит в основном только с ростом  $C$ ; за счёт увеличения  $\gamma$  и  $\varphi$  критическое усилие изменяется не более чем на 10 - 12%; поэтому для всех рассмотренных значений  $\gamma$  и  $\varphi$  можно предложить единую (усреднённую) зависимость  $P_{кр}(C)$  (4.13).
3. Для зависимостей  $z_{макс}(C)$  увеличение максимальной глубины развития критического усилия происходит с уменьшением угла внутреннего трения  $\varphi$ , см. графики рис. 4.2 и рис. 4.6. С увеличением угла внутреннего трения  $\varphi$  для всех зависимостей происходит увеличение угла наклона графиков к горизонтальной оси.
4. Графические приближённые зависимости  $P_{кр}(C)$ ,  $P_{кр}(\gamma)$ ,  $z_{макс}(C)$  и  $z_{макс}(\gamma)$ , представленные на рис. 4.1 - 4.6 позволяют упростить расчёты критических усилий и максимальной глубины проявления этого усилия при исследовании грунтов, получить общую характеристику грунтового полупространства на основании экспериментальных данных.

Полученные аналитические зависимости были применены при расчётах оснований сооружений для конкретных объектов в строительстве.

**Часть 2**

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ  
МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД ФИЗИЧЕСКИМИ  
И ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ**

## Глава 1

# ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

### 1.1. Аналитическая иллюстрация оптического метода исследования напряжений (ОМИН)

В настоящее время нет такой области техники и механики, в которой не приходилось, бы иметь дело с напряжениями и деформациями как упругими, так и пластическими. Для изучения напряжений оптический метод является самым эффективным, т. к. позволяет получать не только количественные данные для выбранных точек, но и выдать картину распределения напряжений [79], [84].

Некоторые прозрачные тела, подвергнутые действию внешних сил, изменяют свои оптические свойства. Изменения оптических свойств состоит в том, что тела первоначально оптически изотропные становятся под действием нагрузки анизотропными, т.е. возникает двойное лучепреломление, исчезающие при снятии нагрузки. Это явление, называемое так же эффектом фотоупругости, или пьзооптическим эффектом, было открыто в 1816 г. Д. Брюстером. Законы этого явления были детально исследованы учеными Френелем, Максвеллом, Вертчеймом, Леви и др., что привело к широкому применению оптического метода.

Поляризованный луч, проходя через нагруженную прозрачную модель, раскладывается на составляющие, распространяющиеся в плоскостях главных напряжений с различной скоростью и имеющие на выходе определенную разность хода  $\delta$ . На пути этих лучей ставится поляризатор и анализатор, поляризующие их во взаимно перпендикулярных плоскостях, что дает возможность измерения возникшей разности хода, которая связана с главными напряжениями зависимостью [84]:

$$\delta = cd(\sigma_1 - \sigma_2), \quad (1.1)$$

где  $c$  – коэффициент оптической активности, характеризующий оптические свойства материала модели;  $d$  – толщина модели;  $\sigma_1 - \sigma_2$  – разность главных напряжений.

Разность главных напряжений (или максимальное касательное напряжение  $\tau_{\text{макс}}$ ) определяется двумя способами. При использовании метода полос напряженное состояние характеризуется определенной окраской в исследуемой точке. При испытании призматического стержня с площадью поперечного сечения  $A$  посредством приложения известной силы  $F$  оказывается, что некоторым заданным приращениям нагрузки соответствует определенные цвета. При простом растяжении или сжатии напряжения в стержне известны, поэтому по окраске образца можно судить о величине возникающих в них напряжениях.

Метод полос предполагает наличие поляризационно-проекционной установки (ППУ), схема которой представлена на рис. 1.1.

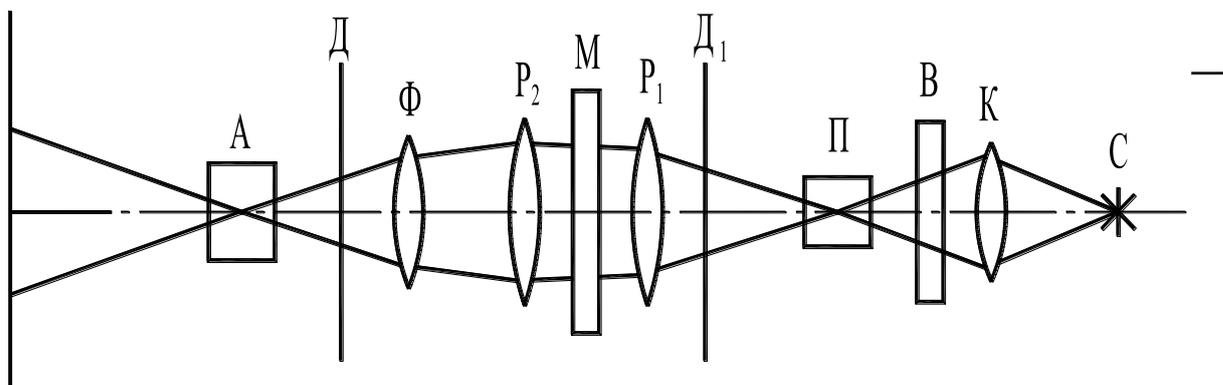


Рис. 1.1. Схема поляризационно-проекционной установки

Геометрическое место точек, на каждой из которых величина полуразности главных напряжений или максимального касательного напряжения сохраняет постоянное значение, называется изохромой.

На экране ППУ изохрома представляется (при использовании белого цвета) линией определенного цвета. Призматический образец служит для цены полосы  $C_0$ . При нагружении цвета образца регулярно чередуется, а приращение  $\Delta\tau_{\max}$ , соответствующее однократному изменению (одному порядку –  $n = 1$ ) окраски до прежнего значения и есть цена полосы. Напряженное состояние определяется по зависимости

$$\tau_{\max} = nC_0. \quad (1.2)$$

Для определения всех компонентов напряженного состояния следует расшифровать полученную интерференционную картину, путем дополнительных измерений, графических построения и интегрирования [84].

При определении напряжений методом компенсации разности хода компенсируется посредством введения дополнительной кристаллической пластинки. По толщине пластинки находится разность хода.

Для исследования напряженного состояния этим методом необходимо наличие координатно-синхронного поляриметра (КСП) с компенсатором (см. рис. 1.2). КСП дает более высокую точность, чем ППУ. При определении напряжений методом компенсации необходимо также измерение параметра  $\phi$  изоклины темной линии, определяющей место точек, имеющих одинаковое направление главных напряжений.

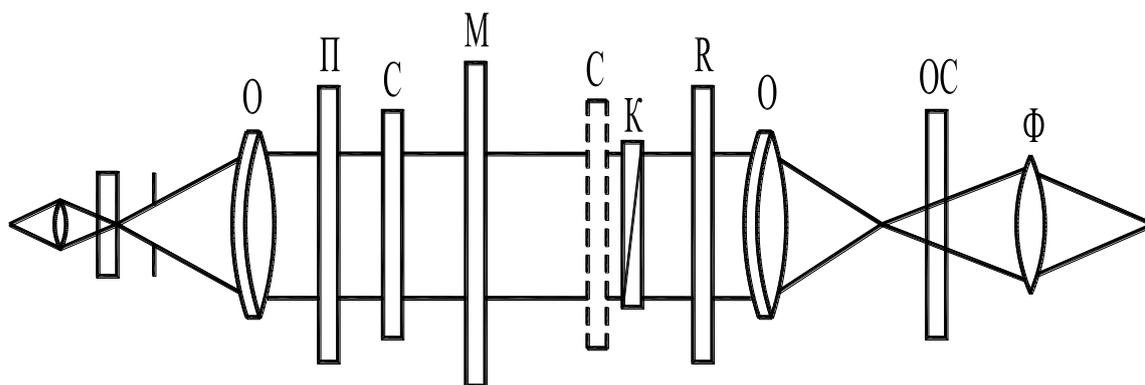


Рис. 1.2. Схема координатно-синхронного поляриметра

Для отыскания всех компонентов напряженного состояния измерения разности хода, параметр изоклины проводятся по двум сечениям (основному и вспомогательному) с последующим численным интегрированием. Исходя из уравнения равновесия для плоской задачи,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

можно записать

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= - \int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx + \sigma_{x_0} \\ \sigma_y &= - \int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy + \sigma_{y_0} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Для выбранных приращений  $\Delta x_i$  и  $\Delta y_i$  запишутся в виде [85]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x_0} - \sum_{i=1}^n (\Delta \tau_{xy}) \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} \\ \sigma_y &= \sigma_{y_0} - \sum_{i=1}^n (\Delta \tau_{xy}) \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \end{aligned} \right\}, \quad (1.5)$$

где  $n$  – количество точек наблюдения;  $\sigma_{x_0}$  и  $\sigma_{y_0}$  – определяется из условий на контуре;  $\tau_{xy}$  – определяется по известной из сопротивления материалов зависимости [85]:

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi. \quad (1.6)$$

Оптический метод применяется и при исследовании напряжений в объемных моделях. Чаще всего применяется для этого и «замораживание» деформацией и последующая распиловка модели на тонкие плоские срезы. В общем случае для определения всех компонентов напряжения требуется три совершенно одинаковые детали [84].

При деформировании первоначально оптически изотропной прозрачной модели в каждом ее элементе происходит изменение компонент тензора диэлектрической проницаемости, и элемент становится оптически анизотропным. Значение коэффициента оптической активности обычно определяют на образцах прямоугольного сечения, подвергаемых осевому

растяжению или сжатию. При этом неизбежно возникает внецентренность приложения нагрузки, существенно испытывающей одновременное напряженное состояние и приводящей к существенным погрешностям при определении искомых характеристик. Для определения  $C$  (или  $C_0$ ) целесообразнее использовать образцы в виде дисков, сжимаемых известной силой  $F$ . При этом внецентренность нагрузки исключается.

Оптическая разность хода определяется в центре диска, а искомый коэффициент вычисляется по формуле [84] (рис. 1.3, а):

$$C = \frac{\pi D}{8F} \delta, \quad (1.7)$$

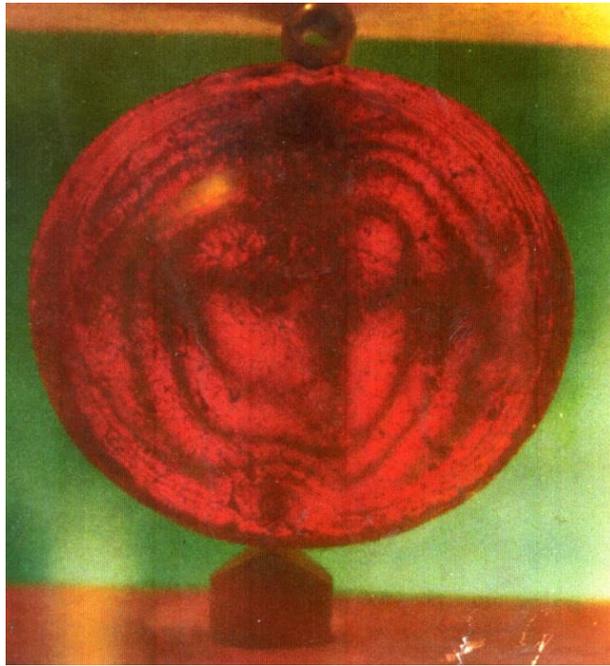
где  $D$  – диаметр диска;  $\delta$  – разность хода;  $F$  – приложенная сила.

Из сопротивления материала известно, что

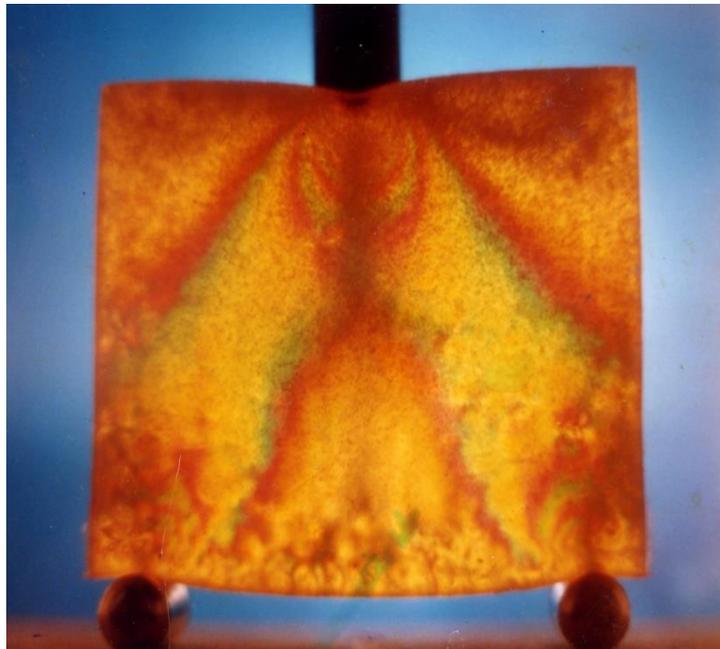
$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (1.8)$$

В случае циркулярной поляризации монохроматического света в результате эффекта двойного лучепреломления при наблюдении нагруженной пластинки, помещенной в поле полярископа, на пластинке появляется система темных полос, называемых изохромами. Из этих полос каждая является геометрическим местом точек имеющих одну и ту же величину  $\tau_{\text{макс}}$  (рис. 1.3, б). В этом случае величина касательного напряжения определится ценой полосы материала и ее порядком. Порядок полосы  $n$  измеряется разностью хода, выраженной в длинах волн. Цена полосы определяется, выражением:

$$\tau_0 = \frac{\tau_{\text{макс}} d}{n}. \quad (1.9)$$



а)



б)

Рис. 1.3. Изохроматическая картина образца для определения коэффициента оптической активности  $C$ :

а) образец в виде диска; б) образец прямоугольного сечения

Для определения цены полосы применяются различные методы. В случае применения белого цвета, наблюдаемые полосы равных касательных напряжений имеют различный цвет, зависящий от величины  $\tau_{\max}$ . Практика показывает, что для получения количественных характеристик удобнее пользоваться монохроматическим светом, а для наглядности – белым, дающим цветную картину, распределения напряжений. При применении плоско-поляризованного цвета на общем фоне картины полос наблюдается появление дополнительных темных полос или областей называемых изоклинами, которые являются геометрическим местом точек, имеющих параллельное направление главных напряжений. По имеющимся изоклинам можно построить сетку траекторий главных напряжений.

## **1.2. Изучение напряженного состояния моделей грунтовых сред**

При аналитическом методе определения напряженных состояний пластически деформируемого тела приходится пользоваться математическим аппаратом, который дает математическая теория пластичности и данными, предоставленными современной техникой лабораторного эксперимента. При этом, решение задач теории пластичности, даже больше, чем решение задач упругости, связано с решением весьма сложных дифференциальных уравнений в частных производных и затруднениями при определении граничных условий. В разработке экспериментального метода изучения напряжений важнейшим положением является то, что пластическая деформация может возникать и развиваться только в упруго деформируемой среде. Отсюда следует вывод о возможности наблюдения эффекта двойного лучепреломления при этом виде деформации. Метод фотопластичности моделирует процесс пластической деформации и решает задачи о напряженных состояниях при условии, что напряжения в модели превышают предел упругости.

У пластического тела сопротивление сдвигу не зависит от скорости деформации, но может зависеть от ее степени, причем в процессе пластической деформации происходит изменение структуры и свойств тела. Поэтому метод фотопластичности шире метода фотоупругости и позволяет

исследовать сам механизм пластической деформации с точки зрения механики сплошных сред, получать данные о распределении напряжений, деформаций и скоростей деформации в макрообъемах сплошной среды. Кроме того, метод фотопластичности пригоден для исследований и в микрообъектах (микрообъемах), поскольку позволяет моделировать и изучать механизмы пластической деформации и разрушение, структурные изменения и образования текстур, остаточные напряжения, явление усталости, релаксацию, ползучесть, упругое последствие природы пластичности при легировании модифицировании, влияние фаз, включений, границ зерен на пластические свойства комбинированных материалов и целый ряд других проблем. Направление исследований, приводимых методом фотопластичности, существенно отличается друг от друга по своей физической сущности и содержанию [84].

В соответствии с этим к материалу, используемому в фотопластичности, предъявляется ряд требований, зависящих от конкретных условий проводимых исследований:

- механическая и оптическая однородность (среда может быть и анизотропной);
- высокая пластичность;
- соответствие реологического поведения модели реологическому поведению природы;
- наличие определенной связи между эффектом, напряжениями, деформациями, деформаций и температурой;
- достаточная оптическая чувствительность;
- необходимые механические и оптические характеристики (прочность, твердость, обрабатываемость, прозрачность, отсутствие начальных оптических эффектов и т. д.).

Грунтовые основания являются сплошной средой, в которую входят и твердые, и жидкие, и газообразные компоненты, поэтому реальные грунты отличаются сложной связью между напряжениями и деформациями. Однако, используя ряд оправданных допущений решения теорий упругости и пластичности вполне применимы к задачам о напряженно-деформированном состоянии грунтов.

### 1.3. Поляризационные приборы

Для проведения оптических исследований были использованы поляризационно-проекционная установка и координатно-синхронный поляриметр [84], [89] (рис. 1.1 и 1.2), изготовленные экспериментальными мастерами научно-исследовательского института математики-механики Ленинградского государственного университета.

Поляризационно-проекционная установка (ППУ) с рабочим полем диаметром 120 мм предназначена для исследования всего поля напряжений моделей и фотографирования изохроматической картины. Оптическая схема ее изображена на рис. 1.1. Этим прибором пользуются для исследований при линейной и круговой поляризации. Фотографирование производят интерференционным светофильтром с пропусканием 30,6% монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 610$  нм и шириной полосы 12 нм. Поляризационно-проекционная установка может исследовать напряженное состояние в элементах строительных конструкций и деталях машин при помощи образцов, изготовленных из оптически активных материалов (целлулоида, бакелита). При исследованиях на экране могут быть получены изоклины – линии, характеризующие направление главных напряжений в заданных точках образца, и изохромы – геометрические места точек с одинаковыми значениями разности главных напряжений. Установка ППУ состоит из двух основных частей: поляризаторной (осветитель С, теплофильтр со светофильтром В, поляризатор П и рабочая линза Р<sub>1</sub>) и анализаторной (рабочая линза Р<sub>2</sub>, проекционный объектив Ф, анализатор А и экран Э). Все детали обеих частей установлены на двух оптических скамьях.

Лучи, посылаемые источником света С, собираются конденсором К в сходящийся пучок. В фокусе конденсора находится поляризационная призма П (поляризатор), преобразующая пучок света в плоско-поляризованный. Поляризующая призма А (анализатор) находится в фокусе систем линз Р<sub>2</sub> и Ф. Чтобы призма не нагревалась, между осветителем и поляризатором устанавливают охлаждающую водяную ванну или специальный теплофильтр В. На пути лучей расположена рабочая линза Р<sub>1</sub>, которая преобразует расходящийся пучок света в параллельный, а рабочая линза Р<sub>2</sub> и проекционный объектив Ф собирают параллельный пучок света в сходящийся. Изображение модели М, помещенной между линзами Р<sub>1</sub> и Р<sub>2</sub> проектируется на экран Э.

Поляризатор и анализатор установлены в поворотных оправках с отчетными лимбами. Нулевым отсчетом по лимбам соответствует скрещен-

ное положение поляризатора и анализатора, причем плоскость поляризации одной из призм вертикальная, а другой горизонтальная. При нулевом положении поляризатора и анализатора на экране появляются темные полосы – изоклины с параметром ноль. Для получения изоклин с другими параметрами, нужно повернуть поляризатор и анализатор на соответствующий угол. Чтобы получить изохромы без изоклин, необходимо просвечивать модель светом, поляризованным – по кругу. Для этого вводят слюдяные пластины  $D$  и  $D_1$  в  $1/4$  волны, прикрепленные на шарнирах к оправам поляризатора и анализатора.

Координатно-синхронный поляриметр (КСП) совместно с компенсатором Краснова СКК-2 предназначен для тех же целей, что и установка ППУ [84], [89]. Оптическая схема его изображена на рис 1.1. Состоит он из двух основных частей: координатной и поляризационно-оптической. Координатная часть обеспечивает одновременное перемещение поляризатора и анализатора по двум взаимно перпендикулярным направлениям с отсчетом координат, что дает возможность при помощи оптики рассматривать любую точку образца. Поляризационно-оптическая часть служит для получения поляризованного света и промеров разности хода в каждой точке образца.

В приборе также синхронно вращаются анализатор и поляризатор. Для измерения величины оптической разности хода в любой точке образца пользуются слюдяным компенсатором (СКК-2), который устанавливают на анализаторной части поляризационной установки. Образец помещают в рабочее поле поляризационного прибора, дающего параллельный пучок линейно-поляризованного света так, чтобы свет падал перпендикулярно к его плоскости. Затем поворачивают синхронно плоскости поляризатора и анализатора до тех пор, пока в исследуемой точке не наступит темнота. При этом, совмещаются плоскости поляризации прибора с главными осями напряжений в исследуемой точке образца. Угол поворота плоскостей поляризации прибора относительно выбранного направления определяет расположение главных осей. Измеряют разность хода в выбранной точке образца следующим образом. Плоскости поляризации установки поворачивают на  $45^\circ$  от положения темноты для получения наибольшего освещения. Компенсатор устанавливают в диагональное положение так, чтобы

плоскости поляризации слюдяной пластинки компенсатора составляли с плоскостями прибора угол  $45^\circ$ . Это необходимо для установления параллельности осей кристалла с главными осями в исследуемой точке. После этого поворачивают слюдяную пластинку компенсатора до исчезновения интерференционной окраски в данной точке. Диапазон измерения разности хода  $\delta$  обычно равен  $3,5 \lambda$ . Для определения напряжений в исследуемых образцах необходимо, в каждой точке поля напряжений получить оптическую разность хода и направление осей эллипсоида напряжений, определяемое углом  $\varphi^\circ$ .

Применение значительной нагрузки при исследованиях дало возможность получить оптическую разность хода фотографированием изохром (метод полос) на экране прибора ППУ в круговой поляризации. Изображения изохронических картин при предварительном определении цены полосы образца позволили построить графики распределения напряжений в поле напряжений, подвергнутом чистому изгибу с точностью до одной длины волны.

#### 1.4. Загрузочное приспособление

Для создания сосредоточенного давления на верхнюю грань образца использовали специальное нагрузочное приспособление (рис. 1.4).

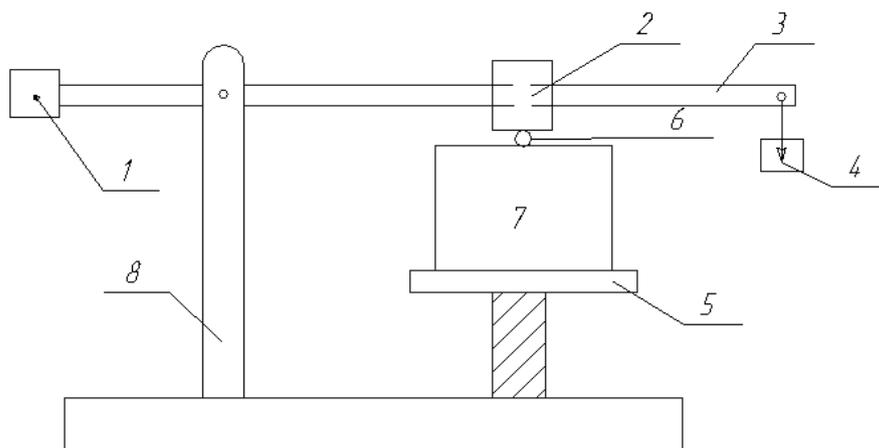


Рис. 1.4. Общий вид нагрузочного приспособления:  
 1) контргруз; 2) боек; 3) рычаг; 4) груз; 5) подъемный столик;  
 6) цилиндр; 7) испытуемый образец; 8) стойка

Образец устанавливали на подъемном столике (5) на такой высоте, чтобы рычаг (3) в горизонтальном положении касался бойком (2) верхней грани образца. Рычаг шарнирно связывался со стойкой (8). Для того, чтобы его вес не оказал давления на модель; он был уравновешен подвижным контргрузом (1).

Давление на модель создавалась грузом (4) и передавалось посредством цилиндра (6) диаметром 0,3 см. Для получения упругой деформации в большой зоне, на цилиндр бойка наклеивали тонкую кожицу, т.к. без нее даже при малых нагрузках могла возникнуть пластическая деформация, в виде сдвига, который может проникнуть глубоко в толщу образца и исказить поле напряжений.

### 1.5. Методика экспериментальных исследований

В настоящее время нет такой области техники и механики, в которой не приходилось бы иметь дело с напряжениями и деформациями как упругими, так и пластическими. Для изучения напряжений оптический метод является самым эффективным, т. к. позволяет получать не только количественные данные для выбранных точек, но и выдать картину распределения напряжений [84]. Некоторые прозрачные тела, подвергнутые действию внешних сил, изменяют свои оптические свойства. Изменения оптических свойств состоит в том, что тела первоначально оптически изотропные становятся под действием нагрузки анизотропными, т.е. возникает двойное лучепреломление, исчезающее при снятии нагрузки. Это явление, называемое так же эффектом фотоупругости, или пьзооптическим эффектом, было открыто в 1816 г. Д. Брюстером. Законы этого явления были детально исследованы учеными Френелем, Максвеллом, Вертгеймом, Леви и другие, что привело к широкому применению оптического метода.

Для экспериментов был выбран материал желатин, близкий по физическим свойствам к слабым грунтам и имеющий следующие физические характеристики [31]:  $\varphi = 7^\circ$ ;  $C = 0,0025$  мПа;  $\gamma = 1,045$  т/м<sup>3</sup> и  $E$

=3 мПа. Материал прозрачен, оптически чувствительный. Это дает возможность применять его для напряжений, вызываемых массовыми объемными силами среды. Было выполнено несколько серии испытаний образцов с разной концентрацией желатина и воды, прежде чем модель в двух случаях была приближена по своим физическим свойствам к слабой грунтовой среде. Концентрация испытуемого материала была [31]:

в первой случае: желатин – 50 г, вода – 500г;  
 во втором случае: желатин – 50 г; вода – 250 г.

Определение прочностных характеристик проб образцов проводили методом прямого сдвига на сдвиговом приборе с пневматическим нагружением ИСПА - 40/35, входящего в состав АСИС (автоматизированной системы для инженерно - строительных изысканий).

Испытание в первом случае выполнены при следующих значениях нормальных и касательных напряжений [31]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0,1 \text{ МПа}, & \tau &= 0,015 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0,2 \text{ МПа}, & \tau &= 0,03 \text{ МПа}; \\ \sigma_3 &= 0,3 \text{ МПа}, & \tau &= 0,04 \text{ МПа}; \\ \sigma_4 &= 0,4 \text{ МПа}, & \tau &= 0,04 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Графически результаты сдвиговых испытаний в первом случае представлены на рис. 1.5.

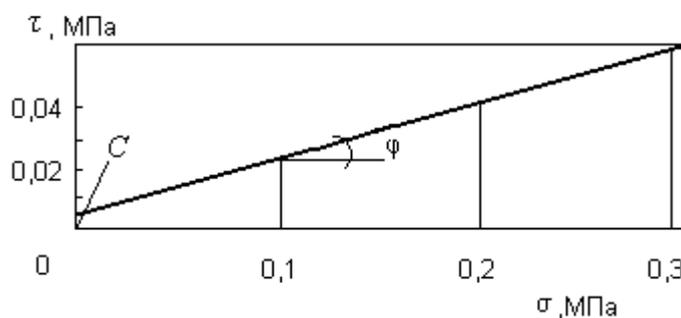


Рис.1.5.Результаты сдвиговых испытаний образцов в первом случае

Прочностные характеристики материала образцов, полученные испытанием на сдвиг в первом случае [31]:  $C = 0,025$  МПа;  $\varphi = 7^\circ$ ;  $f = \operatorname{tg} \varphi = 0,12278$ .

Испытания во втором случае выполнялись при следующих значениях нормальных и касательных напряжения [31].

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0,1 \text{ МПа}, & \tau &= 0,025 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= 0,2 \text{ МПа}, & \tau &= 0,04 \text{ МПа}; \\ \sigma_1 &= 0,3 \text{ МПа}, & \tau &= 0,06 \text{ МПа}; \\ \sigma_1 &= 0,4 \text{ МПа}, & \tau &= 0,08 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Графические результаты сдвиговых испытаний во втором случае представлены на рис. 1.6.

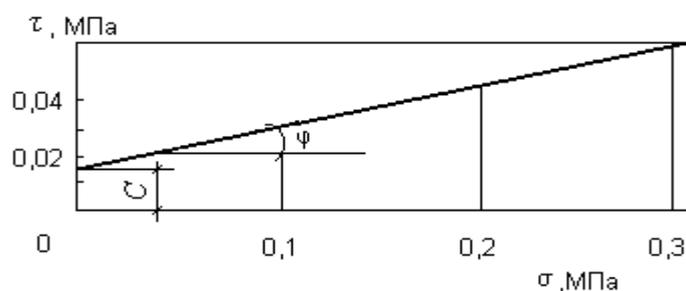


Рис.1.6. Результаты сдвиговых испытаний во втором случае

Прочностные характеристики материала, полученные испытанием на сдвиг во второй случае:  $C = 0,013$  МПа;  $\varphi = 9^\circ$ ;  $f = \operatorname{tg} \varphi = 0,1584$ .

В первой случае испытаний в образцах в соответствии с диаграммой напряжений Мора соблюдалось допредельное устойчивое напряжённое состояние, отвечающее условию

$$\tau \leq \operatorname{tg} \varphi + C \text{ или } \tau \leq \sigma f + C, \quad (1.10)$$

где постоянные  $f = \operatorname{tg} \varphi$  и  $C$  – коэффициент внутреннего трения и коэффициент сцепления. Во втором случае в пробах происходило нарушение прочности среды, что соответствовало запредельному состоянию, которое отвечало условию

$$\tau \geq \operatorname{tg} \varphi + C \text{ или } \tau \geq \sigma f + C. \quad (1.11)$$

Для образцов этих же концентраций были проведены исследования по определению коэффициента вязкости методом концентрического сдвига [31]. В зазор между двумя концентрическими кольцами заливался исследуемый материал (желатин). Внешнее кольцо закреплялось неподвижно, а к внутреннему кольцу прикладывался заданный крутящий момент. При вращении внутреннего кольца каждая точка образца деформировалась путём простого сдвига. Траектории напряжений максимальных сдвигов являлись концентрические окружности, а траекториями главных напряжений образовывали два семейства логарифмических спиралей в виде

$$r = A e^{+\varphi} ,$$

где  $A$  – постоянный коэффициент интегрирования.

При этом главные напряжения равны по величине и противоположны по знаку. Величина максимальных касательных напряжений, возникающих под действием момента  $M = RF$ , определялась по формуле

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{M}{2\pi r^2 d} , \quad (1.12)$$

где  $r$  – текущий радиус,  $d$  – толщина образца.

Оптическая чувствительность материала характеризуется ценой полосы

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\tau_{\text{макс}} d}{\sigma} = \frac{M}{2\pi r^2 \sigma} , \quad (1.13)$$

где  $\sigma$  – оптическая разность хода.

С помощью установки для концентрического сдвига был определён коэффициент вязкости по формуле [31]:

$$\eta = \frac{MR(r_2^2 - r_1^2)}{2\pi dh r_1^2 r_2^2} . \quad (1.14)$$

Коэффициенты вязкости составили:

для концентрации материала первой серии  $\eta = 73991,54$  Па·с;

для концентрации материала второй серии  $\eta = 287744,89$  Па·с.

После вышеуказанных исследований было выполнено следующее испытание образцов на вдавливание жёсткого пуансона в модель прямоугольной формы. Проведено так же, как и в первом случае, несколько серии испытаний, прежде чем модель в двух случаях была приближена по своим физическим свойствам к слабой грунтовой среде. Концентрация испытуемого материала составила:

в первом случае желатин – 100 г, вода – 800 г;

во втором случае желатин – 100 г, вода – 600 г.

Образцы испытывались в плоском контейнере, нагрузка прилагалась ступенями. При вдавливании жёсткого пуансона в образец наблюдалась система полос в виде кругов, проходящих через граничные точки пуансона. Была получена система изоклинических линий, которые позволили построить сетку траекторий касательных напряжений (характеристики) для моделей. Величина касательных напряжений определялась ценой полосы материала и её порядком:

$$T = C_0 n, \quad (1.15)$$

где  $C_0 = F/2bn$  – цена полосы модели;  $n$  – порядок полос;  $b$  – ширина образца.

Полученные численные значения нормальных и касательных напряжений при заданных нагрузках в первом случае испытаний составили [31]:

$$\sigma_1 = 0,16 \text{ МПа}, \quad \tau = 0,041 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0,33 \text{ МПа}, \quad \tau = 0,065 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 0,58 \text{ МПа}, \quad \tau = 0,1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 0,86 \text{ МПа}, \quad \tau = 0,14 \text{ МПа}.$$

Прочностные характеристики моделей были следующие:

$$\varphi = 8^\circ; f = \text{tg } \varphi = 0,1405.$$

Испытания во втором случае при численных значениях нормальных и касательных напряжений [32]:

$$\sigma_1 = 0,24 \text{ МПа}, \quad \tau = 0,053 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0,41 \text{ МПа}, \quad \tau = 0,08 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 0,92 \text{ МПа}, \quad \tau = 0,16 \text{ МПа};$$

$$\sigma_1 = 1,36 \text{ МПа} , \quad \tau = 0,23 \text{ МПа}.$$

Прочностные характеристики материала модели составили:

$$\varphi = 9^\circ; \quad f = \text{tg } \varphi = 0,1584.$$

Исследование образцов такой же концентрации с помощью метода шаровой пробы на специальном приборе дало возможность определить величину сил сцепления с учётом изменения их во времени. Сцепление материала после прохождения одного часа времени от начала загрузки определялось по формуле теории пластично-вязких сред [31]:

$$C = 0,18P / \pi DS , \quad (1.16)$$

где  $D$  – диаметр шара;  $S$  – величина осадки материала за определённый промежуток времени.

Полученные численные значения сцепления были равны:

для первого случая  $C = 0,019$  МПа;

для второго случая  $C = 0,015$  МПа.

Коэффициент вязкости был определён по формуле [31]:

$$\eta = \frac{\tau_{\text{макс}} a^3}{3V_0 \sqrt{(a^2 - y^2) + x^2 y^2}} \quad (1.17)$$

Коэффициенты вязкости по формуле (1.17) составили:

для концентрации материала в первом случае  $\eta = 115622,17$  Па·с ;

для концентрации материала во второй случае  $\eta = 279135,33$  Па·с .

Результаты испытаний моделей показали, что этот материал можно использовать для изучения напряжённо-деформированного состояния определённых слабых грунтов.

Для дальнейших экспериментальных исследований были использованы модели, полные физические характеристики материала которых составили: для первого вида  $\varphi = 7^\circ$ ,  $C = 0,025$  МПа,  $\gamma = 1,045$  т/м<sup>3</sup> и  $E = 3$  МПа; для второго вида  $\varphi = 9^\circ$ ,  $C = 0,013$  МПа,  $\gamma = 1,015$  т/м<sup>3</sup> и  $E = 3,6$  МПа.

Грунты, имеющие физические характеристики близкие к характеристикам моделей, являются суглинистые илы, супеси и суглинки текучей консистенции.

## 1.6. Исследование напряжённого состояния на моделях грунта

### 1.6.1. Изготовление моделей

При проведении экспериментальных исследований использовались модели, выполненные из желатиноглицеринового материала. Материал прозрачен, оптически чувствительный. Это дает возможность применять его для напряжений, вызываемых массовыми объемными силами. Чувствительность материала зависит от концентрации желатина, глицерина и температуры. При кратковременном нагружении модели из этого материала имеет место упругая деформация. Наблюдаемая картина изохроматических полос после снятия нагрузки сразу исчезает. В случае длительного нагружения наблюдается пластическая деформация, и модель необратимо изменит форму. Для изготовления моделей применялись оргстеклянные формы, которые представляют собой 2 стенки, стянутые винтами через проставки таким образом, что между стенками образована плоская щель 6 мм.

В пространство между стенками залит исследуемый материал (желатиновая масса).

Оргстеклянные формы должны удовлетворять основным требованиям, которые обычно предъявляют к формам, а именно:

- материал формы не должен входить в химическое взаимодействие с желатиновым материалом;
- поверхность формы должна быть гладкой без раковин;
- форма должна легко освобождаться от залитой ее модели;
- форма должна быть прозрачной и не иметь начальных напряжений (остаточных);
- формы стенки должны быть тщательно смазаны машинным маслом для предотвращения трения между материалом формы и испытываемой модели.

После изготовления формы и полной полимеризации (отвердения) желатина проводились эксперименты.

Для исследования напряженного состояния в специально загрузочных приспособлениях были испытаны 3 вида желатиновых моделей, имеющие размеры: 140x50x5 мм, 130x50x5 мм, 120x50x5 мм. Модели подвергались действию внешних давлений.

Для проведения оптических исследований были использованы поляризационно-проекционная установка и координатно-синхронный поляриметр [84], изготовленные экспериментальными мастерскими научно-исследовательского института математики - механики Ленинградского государственного университета. Поляризационно-проекционная установка (ППУ) и координатно-синхронный поляриметр (КСП) совместно с компенсатором Краснова СКК-2, предназначены для исследования всего поля напряжений моделей и фотографирования изохроматической картины.

При кратковременном нагружении модели имела место упругая деформация. Наблюдаемая картина изохроматических полос после снятия нагрузки сразу исчезала. В случае длительного нагружения наблюдалась пластическая деформация, и модель необратимо изменяла форму. Применение значительной нагрузки при исследованиях дало возможность получить оптическую разность хода фотографированием изохром (метод полос) на экране прибора ППУ в круговой поляризации. Изображения изохроматических картин при предварительном определении цены полосы моделей позволили построить графики распределения напряжений в моделях слабых грунтов.

### 1.6.2. Определение цены полосы модели

Основной характеристикой оптически активных материалов является цена полосы модели  $\tau_0$ , которая определяется по формуле [84]:

$$\tau_0 = \frac{\tau_{\max} d}{n}. \quad (1.18)$$

Для определения  $\tau_0$  необходимо знать величины  $\tau_{\max}$  и  $n$  в какой-либо точке модели. Эти две величины получаются при простом растяжении или сжатии. Для этого в оптическую установку ППУ помещается призматический образец и подвергается центральному растяжению (или сжатию) (рис. 1.7).

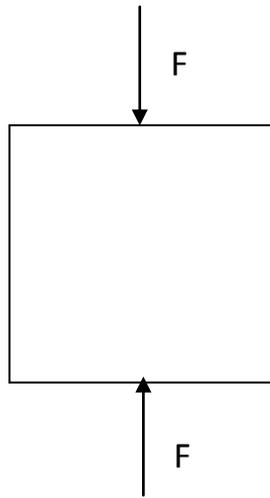


Рис. 1.7

В отдалении от захватов напряженное состояние является однородным, т.е. напряжения одинаковы во всех точках образца. Поэтому на экране весь образец приобретает одинаковую для всех точек окраску.

Тогда цена полосы материала  $\tau_0^{(10)} = \tau_0 d$ , а  $\tau_{\max}$  определяется по формуле [84]:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{F}{2A} = \frac{F}{2dB}, \quad (1.19)$$

следовательно,

$$\tau_0 = \frac{Fd}{2dBn} = \frac{F}{2Bn}, \quad (1.20)$$

где  $n$  – порядок полос;  $F$  – растягивающая сила;  $B$  – ширина образца.

### 1.7. Результаты экспериментальных исследований

Полученные данные лабораторного эксперимента дают окончательные результаты для построения графиков напряженного состояния на моделях для заданной грунтовой среды (рис. 1.8 - 1.13).

1. Полученные экспериментальные результаты показали, что во всех моделях (рис.1.8-1.13) максимальное значение напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$ , а также касательное максимальное напряжение  $\tau_{\max}$  имело максимальное

значение в точках распределенной нагрузки. По мере удаления точек сечения вглубь образца, характер напряжения остается прежним, а величина падает.

2. Картина распределения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{\max}$  в точках сечения под действием полосовой нагрузки  $q$  остается прежней, а по мере удаления вглубь образца, с глубины 35 мм начинает уменьшаться.

3. Величины касательных напряжений  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{\max}$  в точках сечений по мере удаления вглубь модели падают, а к середине образца они резко уменьшаются и принимают нулевое значение (рис.1.11).

4. В сечениях, расположенных под углом  $45^\circ$  к краю полосовой нагрузки  $q$  линии касательных напряжений принимают одинаковый характер и напряжения увеличиваются от оси  $ox$  до глубины 20 мм, а после происходит их уменьшение (рис.1.13).

5. Картина распределения максимальных касательных напряжений образца аналогична картине нормальных напряжений, с удалением от оси  $ox$  с глубины 35 мм эти напряжения уменьшаются.

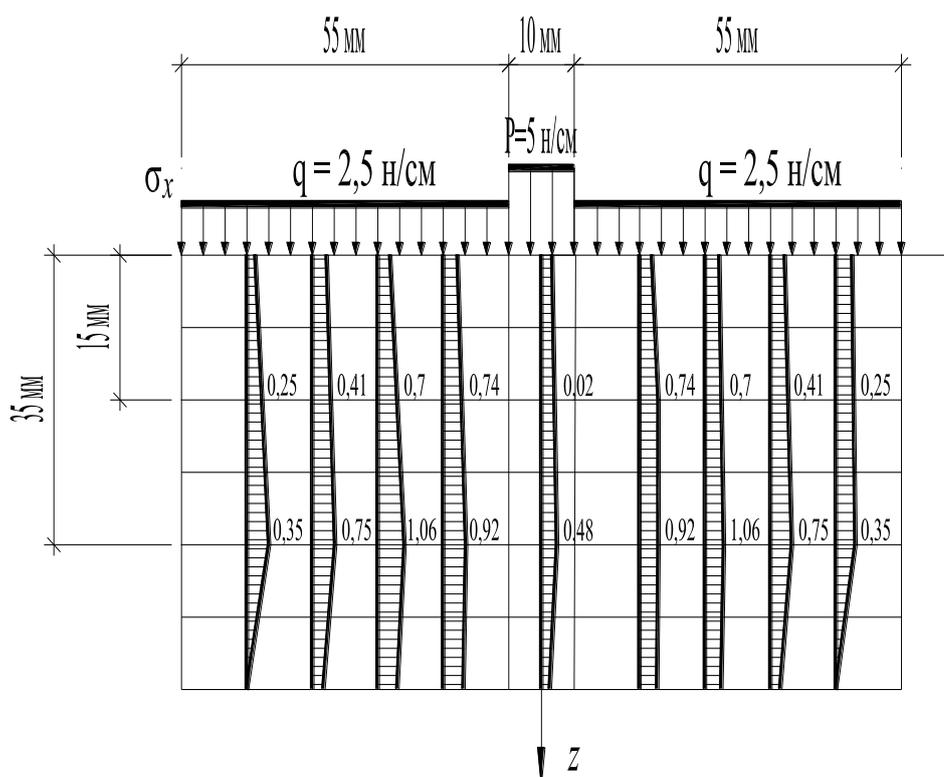


Рис. 1.8. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  в вертикальных сечениях образца модели основания фундамента

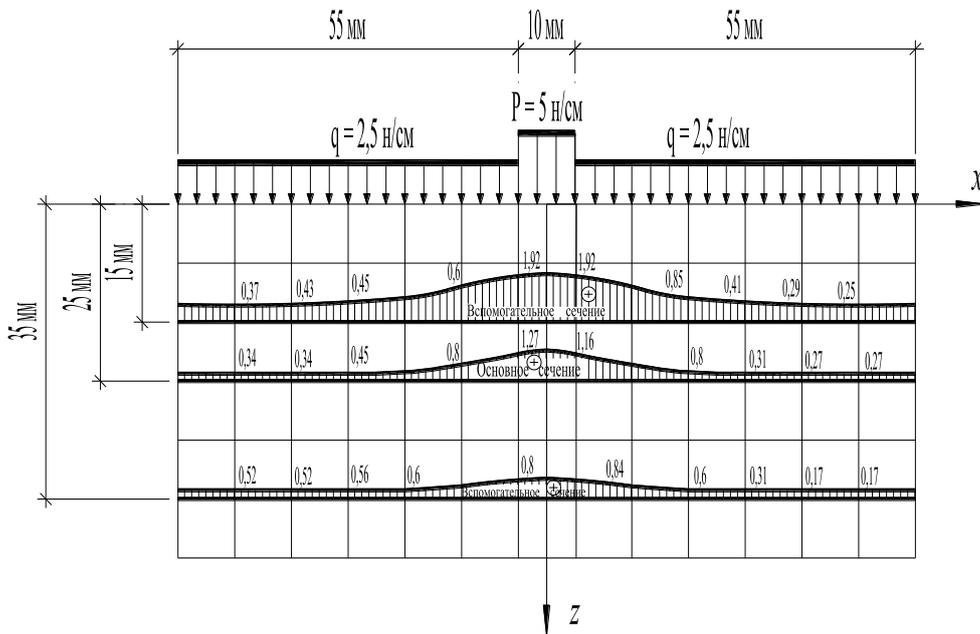


Рис. 1.9. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  в горизонтальных сечениях модели основания фундамента

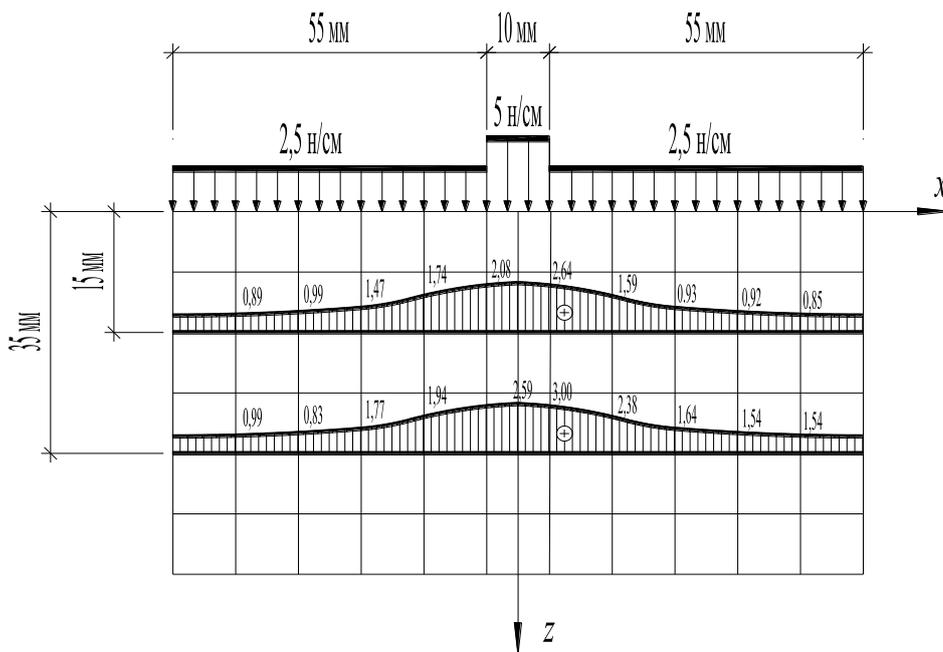


Рис. 1.10. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$  в горизонтальных сечениях модели основания фундамента

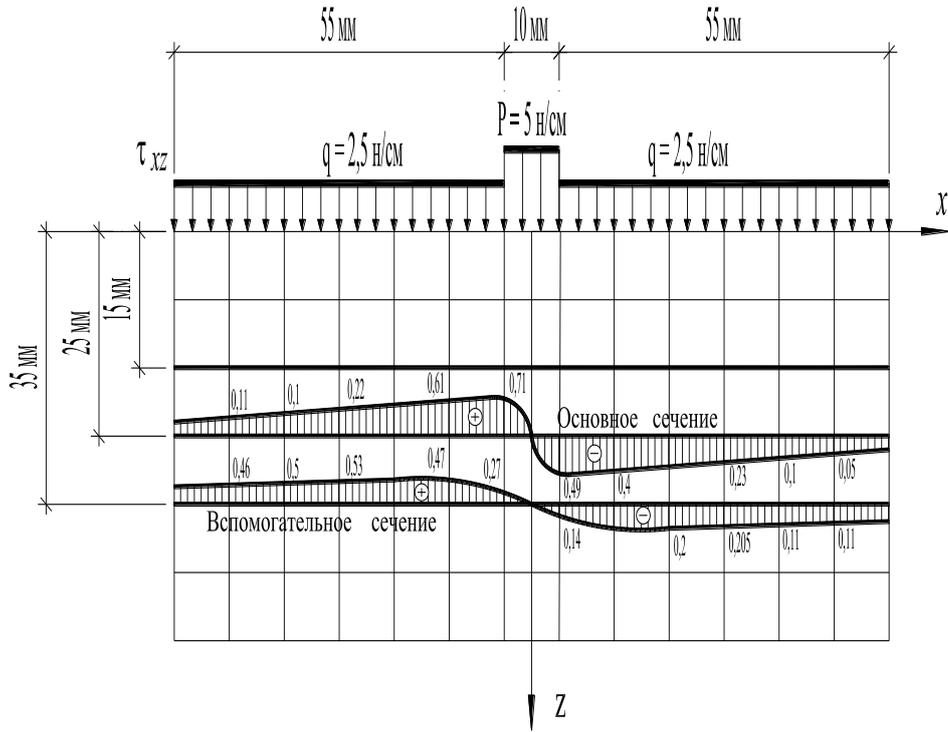


Рис. 1.11. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xz}$  в горизонтальных сечениях модели основания фундамента

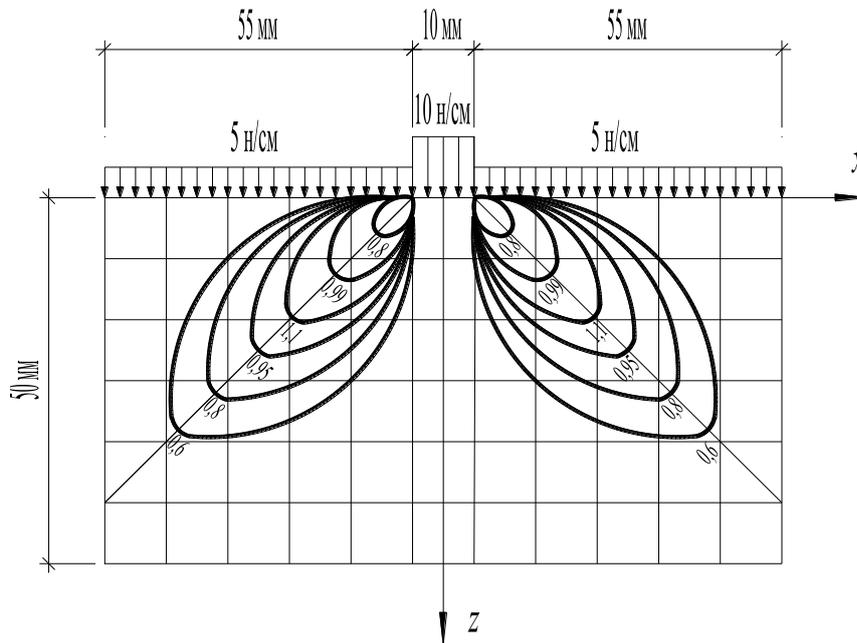


Рис1.12. Линии равных напряжений  $\tau_{\max}$  в линейно-деформированном массиве плоской задачи

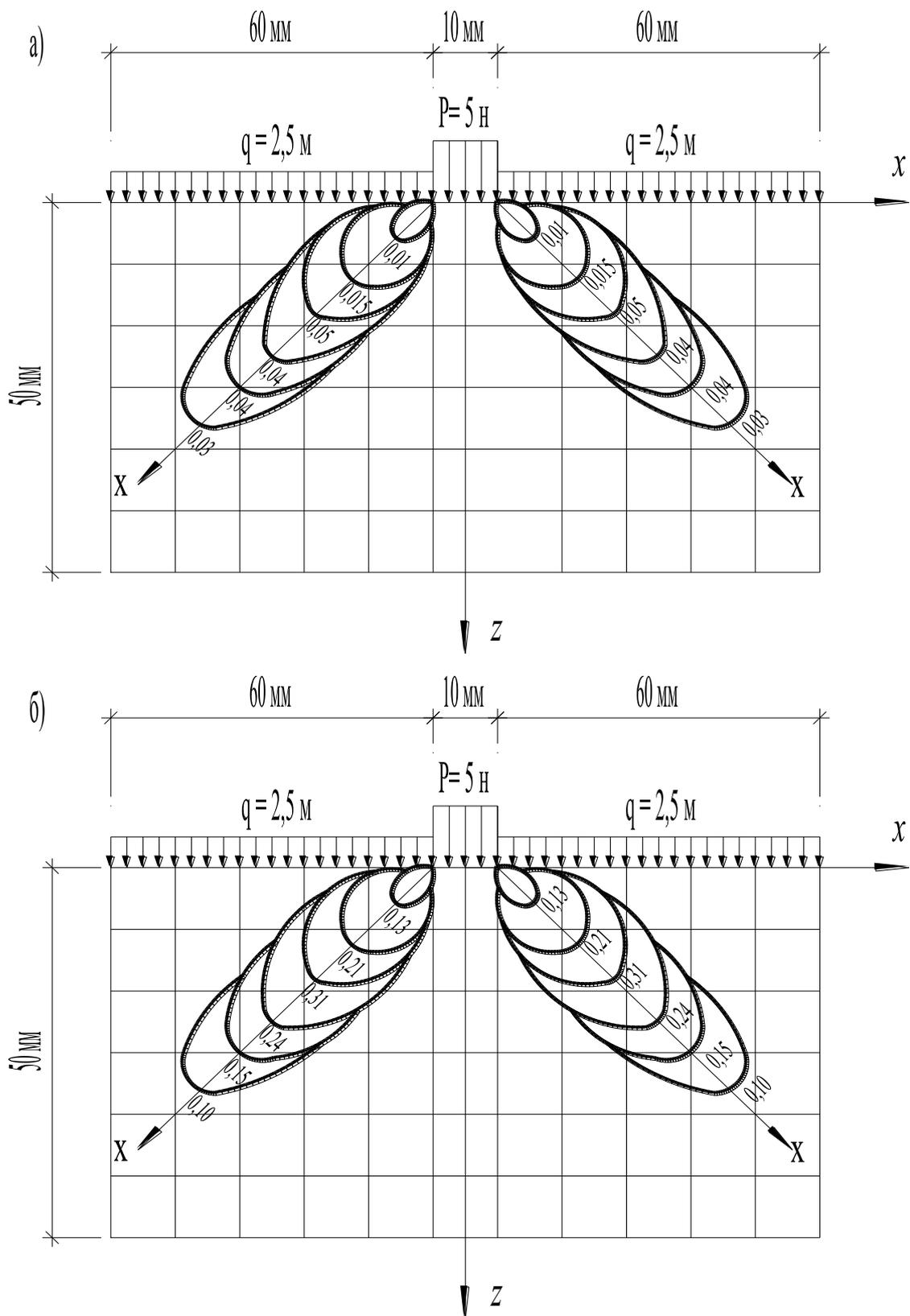


Рис. 1.13. Линии равных касательных напряжений в линейно-деформированном массиве в случае плоской задачи  
 а) для  $\tau_{\max}$ ; б) для  $\tau_{xz}$

Построенные графики распределения напряжённого состояния упругопластической грунтовой среды дают наглядное изображение зарождения упругопластических деформаций и их затухание в соответствии с приложенной нагрузкой. В следующей главе приведено исследование слабых сред с помощью радиоизотопного метода.

## Глава 2

### ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ГРУНТОВЫХ СРЕД РАДИОИЗОТОПНЫМ МЕТОДОМ

#### 2.1. Метод гамма-излучения для определения плотности

В классических и современных теоретических исследованиях, относящихся к предельному равновесию грунтов, особенно устойчивости слабый грунтовых сред, принято считать величины характеризующие сопротивление грунта сдвигу (угол внутреннего трения и удельного сцепления) для всего массива всего грунта одинаковыми и постоянными. Вместе с тем несущая способность, определяемая существующими методами расчёта в значительной степени возрастает даже при небольшом увеличении характеристик прочности грунта основания. Так, например, при возрастании угла внутреннего трения с  $35^{\circ}$  до  $40^{\circ}$  предельная нагрузка по В.В. Соколовскому увеличивается на 108%, а по В.Г. Березанцеву – на 122%.

Теоретические соображения и экспериментальные исследования показывают, что изменение пористости грунтов, а следовательно и массовая плотность их, закономерно сопряжены с существенным изменением угла внутреннего трения и удельного сцепления.

Действительно, в процессе деформации грунта под нагрузкой происходит изменение пористости в различных местах массива. В связных грунтах с увеличением нагрузки на основание в нем частично разрушаются внутренние связи, изменяется его плотность и параметры прочности. В несвязном грунте происходит изменение плотности и угла внутреннего трения. К моменту разрушения свойства грунтов основания отличается от первоначальных. Следовательно, чтобы показатели прочности песчаных и глинистых грунтов соответствовали, необходимо знать характер распределения плотности перед началом и в момент разрушения грунтовых сред.

Этому условию отвечает радиоизотопный метод измерения плотности грунтов – метод гамма излучения.

Принцип метода гамма-излучений состоит в том, что интенсивность излучения при прохождении через вещество грунта уменьшается. Это уменьшение пропорционально общему количеству вещества на пути гамма-квантов. Обладая электромагнитной природой гамма-излучение, проникая в вещество, взаимодействует с электронами, ядрами и электрическим полем, окружающим их. Это взаимодействие носит вероятностный характер и может быть представлено в виде трех процессов: фотоэлектрическое поглощение (фотоэффект), комптоновское рассеяние (комpton-эффект) и процесс образования пары электрон-позитрон [26]. При изменении плотности грунтов приходится иметь дело с гамма-квантами, энергия которых лежит в пределах от 0,1 до 3 МэВ, испускаемых большинством радиоизотопных источников.

Исследуемые грунты в основном состоят из элементов с легким и средними атомными весами. При пропускании через их слои гамма-изотопных источников энергии 0,5-3 МэВ ослабление интенсивных элементов фотоэлектрическое поглощение заметно сказывается лишь при энергии гамма-квантов меньше 0,3 МэВ, а образование пар начинается с энергии порядка свыше 3,0 МэВ [26].

При прохождении гамма-квантов через вещество в зависимости от условий измерений различают геометрию узкого пучка (рис. 2.1) и геометрию широкого пучка (рис. 2.2). Геометрия узкого пучка представляет собой такие условия измерения, при которых в детектор попадают только гамма-кванты, проходящие через вещество без взаимодействия. Для осуществления геометрии узкого пучка необходимо использовать коллиматоры, как для источника, так и для детектора, как это иллюстрируется схемой рис.2.1

Рассмотрим прохождение гамма-квантов через слой грунта некоторой толщиной  $d$  в условиях геометрии узкого пучка (рис.2.1). Гамма-лучи, вышедшие из источника  $S$  в направлении детектора, попадают на поглотитель. Гамма-кванты могут либо пройти через вещество без взаимодействия с его электронами, либо испытать один из рассмотренных процессов. В первом случае они попадают детектор 2 (путь а). Во втором случае гамма – кванты либо поглощаются в результате фотоэффекта (путь б), либо рассеиваются на некоторый угол в процессе комптон – эффекта (путь в). Таким образом, рассеянные гамма – кванты не попадают в детек-

тор 2. В детектор попадают лишь гамма – кванты, прошедшие через вещество без взаимодействия (путь а).

Для геометрии узкого пучка ослабление гамма – квантов подчиняется экспоненциальному закону, который для случая измерения интенсивности излучения описывается уравнением:

$$\frac{J}{J_0} = e^{-\mu_m \gamma_0 d}, \quad (2.1)$$

а для случая измерения плотности потока гамма – квантов

$$N = N_0 e^{-\mu_m \gamma_0 d} \text{ или } \frac{N}{N_0} = e^{-\mu_m \gamma_0 d}, \quad (2.2)$$

где  $J$  – интенсивности первичного излучения, измеренная при помещении поглотителя толщиной  $d$  между источниками и приемником излучения;  $J_0$  – длительность первичного излучения гамма излучения;  $N_0$  – плотность потока гамма – квантов, измеренная при отсутствии поглотителя;  $N$  – плотность потока гамма – квантов, измеренная при помещении поглотителя толщиной  $d$  между источникам и приемником излучения;  $\mu_m$  – массовый коэффициент ослабления первичного излучения.

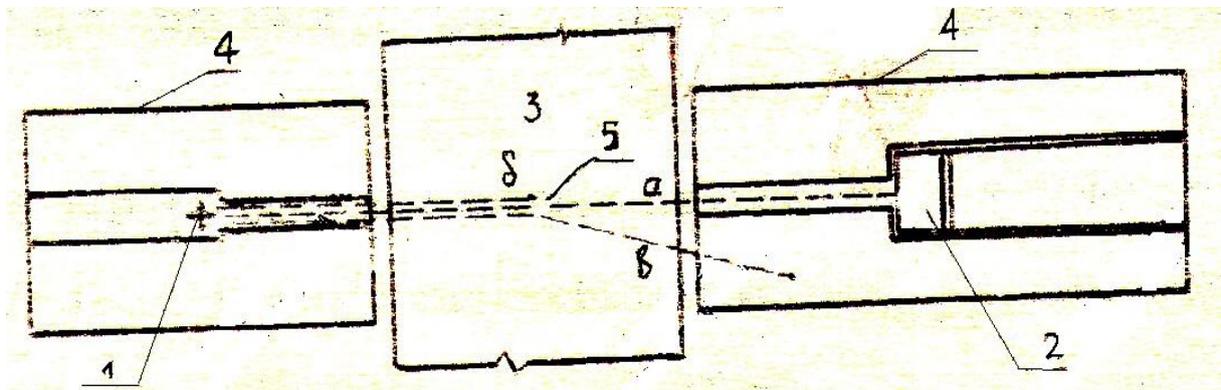


Рис. 2.1 Установка со свинцовыми коллиматорами для измерения плотности грунтов по ослаблению узкого пучка гамма-излучения  
1-источник гамма-излучения; 2-детектор; 3- исследуемый грунт; 4- коллиматоры; 5-пучок гамма-излучени

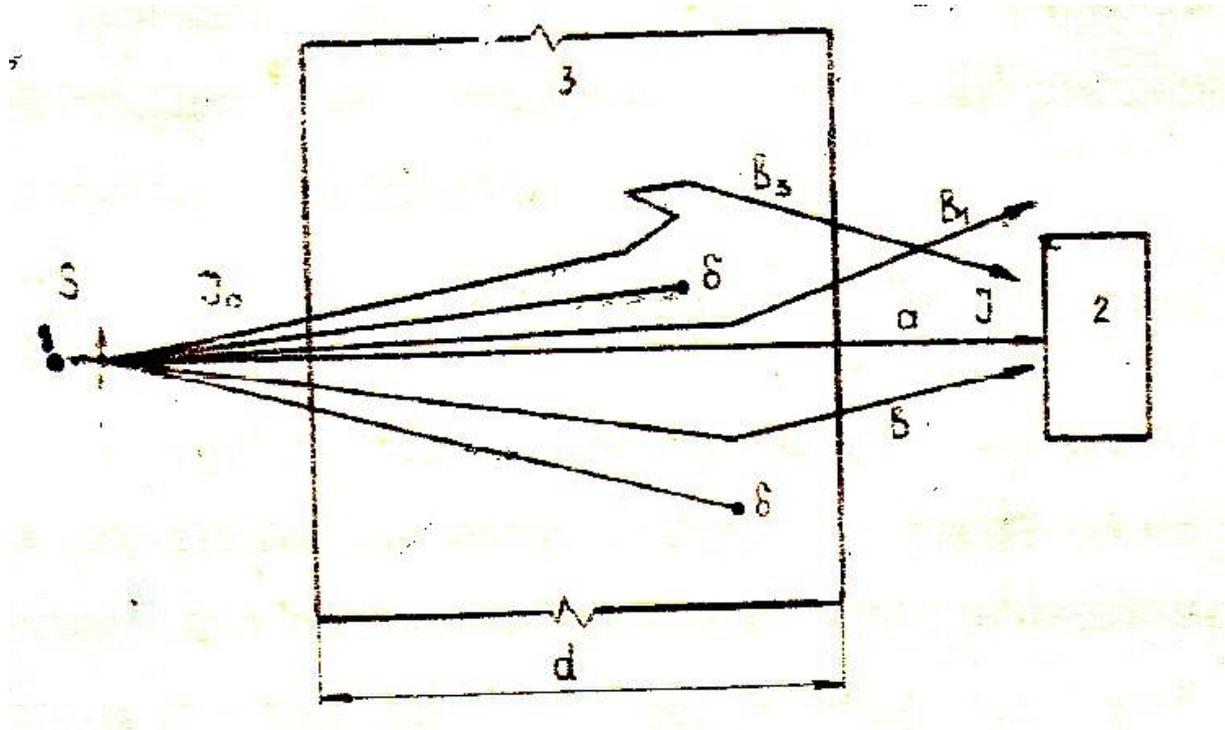


Рис. 2.2 Распространение гамма-квантов в условиях широкого пучка  
1- источник гамма-излучения; 2- детектор; 3 - грунт.

Величина  $\gamma_0 d$  ( $\text{г}/\text{см}^3$ ) называется массовой толщиной поглощающего слоя или поверхностной плотностью. Как известно, интенсивность излучения гамма – квантов связана с плотностью потока гамма – квантов соотношением

$$J = NE . \quad (2.3)$$

В случае узкого пучка, когда в детектор попадает лишь гамма-кванты, не испытавшие рассеяния и, следовательно, сохранившие свою энергию  $E$ , интенсивность излучения гамма квантов равна плотности потока гамма-квантов. Поэтому при выполнении геометрии узкого пучка эти величины будут употреблять, считая их тождественными.

При фиксированной толщине поглотителя  $d$  и известной величине массового коэффициента ослабления уравнения 2.1 и 2.2 позволяют определить плотность вещества по формуле:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\mu_m d} \ln \frac{N_0}{N} = \frac{2.302}{\mu_m d} \lg \frac{N_0}{N} . \quad (2.4)$$

Формула 2.4 справедлива для измерения плотности только однофазных сред. Для определения плотности среды, состоящей из нескольких компонентов, различающихся массовыми коэффициентами ослабления, закон параллельного пучка гамма-лучей запишется в виде:

$$N = N_0 e^{-\sum \mu_{mi} \gamma_{oi}}. \quad (2.5)$$

При определении плотности глинистых грунтов с различной влажностью, т.е. состоящих из твердой фазы и воды с разными массами коэффициентами ослабления, закон параллельного пучка гамма-квантов запишется в виде:

$$N = N_0 e^{-(\mu_m^{m\phi} \gamma_0^{m\phi} + \mu_m^e W_{eob})d}, \quad (2.6)$$

где  $\gamma_0^{m\phi}$  – число граммов твердой фазы грунта в  $1 \text{ см}^3$  (объемный вес твердой фазы грунта);  $W_{eob}$  – число граммов воды в  $1 \text{ см}^3$  (объемная влажность, выраженная в  $\text{г/см}^3$ );  $\mu_m^{m\phi}$  и  $\mu_m^e$  – массовые коэффициенты соответственно для грунта и воды.

Решая уравнение 2.6 относительно величин  $\gamma_0$ , получим формулу для вычисления плотности двухфазных сред:

$$\gamma_0 = \frac{\ln N_0 - \ln N}{\mu_m^{m\phi} * d} - \frac{\mu_m^e - \mu_m^{m\phi}}{\mu_m^{m\phi}} W_e = \frac{2.302}{\mu_m^{m\phi} * d} \ln \frac{N_0}{N} - \frac{\mu_m^e - \mu_m^{m\phi}}{\mu_m^{m\phi}} W_e. \quad (2.7)$$

Эта формула для определения плотности двухфазных сред используется в работе К.А. Дубова [22].

В условиях геометрии узкого пучка спектр квантов, пришедших детектор, такой же, как и спектр излучения источника. Кроме того, в условиях геометрии узкого пучка все гамма-кванты, попадающие в детектор, лежат в одном направлении – по прямой, соединяющей источник с детектором. Необходимо отметить, что геометрия узкого пучка справедлива только для источника и детектора точечных размеров. Применяемые в исследованиях источники и детекторы имеют конечный размеры, и поэтому в реальных условиях имеет дело в той или иной степени геометрией широкого пучка.

В общем случае схема геометрии широкого пучка представлена на рис. 2.2. В детектор могут попасть гамма – кванты, прошедшие поглоти-

тель без рассеивания (путь  $a$ ), рассеянные на некоторый угол (путь  $b_2$ ), а также рассеяться два или более раз (путь  $b_3$ ). Часть гамма-квантов выйдя из поглотителя не попадают в детектор (путь  $b_1$ ). Некоторые кванты не попадают в детектор из-за поглощения их в веществе (путь  $b$ ). Задача о распространении гамма – квантов в условиях геометрии широкого пучка гораздо сложнее [22]. При ее решении возникает вопрос не только об интенсивности излучения, но и об спектральном составе и угле распространения. Эффект косых лучей обычно принято учитывать с помощью величин  $B$ , называемой фактором накопления [22], тогда уравнение 2.1 примет вид:

$$J = J_0 B e^{-\mu_m \gamma_0 d}. \quad (2.8)$$

Возможность достижения геометрии узкого пучка определяются чисто техническими причинами: мощностью источника и чувствительностью детектора. Имея большую мощность источника гамма-излучения и чувствительные детекторы, можно работать при достаточно узких коллиматорах, но при этом возникают трудности изготовлением защитных контейнеров, вес которых может составлять до 1 тонны. Поэтому в реальных условиях измерения плотности среды, идут на уменьшение мощности источника и, следовательно, для получения реального времени измерений на увеличение диаметра коллиматора. т.е. в реальных условиях, чем ближе величина  $B$  к единице, тем ближе фактическая геометрия измерений к геометрии узкого пучка.

Исследуемые глинистые грунты в основном состоят из элементов Si, Al, Fe, Mg, C, H, O и т.д. с легкими средними атомными весами. Процент содержания этих элементов в глинистых грунтах зависит от вида грунта. Кроме того, эти грунты имеют различную влажность. При пропускании через их свои излучения изотопных источников энергией 0,5-3,0 МЭВ ослабление интенсивности обусловлено почти исключительно комптон-эффектом[4]. Исходя из этого, плотность глинистых грунтов в условиях геометрии узкого пучка определяется по формуле 2.7.

В имеющейся литературе обычно считается, что для сухих грунтов с различным химическим составом, такие же и для влажных грунтов можно практически использовать одни и те же усреднённые значение массового коэффициента ослабления. В дальнейшем мы рассматриваем правомерность этого допущения.

## 2.2. Зависимость массовых коэффициентов ослабления глинистых грунтов от химического состава

Для определения плотности грунтов с помощью метода гамма-излучения необходимо знание массового коэффициента ослабления. Величина массового коэффициента ослабления  $\mu_m$  зависит от состава исследования грунтов. Расчёты массовых коэффициентов ослабления выполнены Ф. С. Завельским [26] для 75 типов почво-грунтов различного гранулометрического состава, генезиса и возраста. Он делает вывод о том, что всё многообразие грунтов с точки зрения величины  $\mu_m$  в зависимости от энергии излучения можно разбить на две группы, которые приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Массовые коэффициенты ослабления для 73 типов почво-грунтов земного шара

№ пп	Энергия излучения МЭВ	Глина с содержанием железа до 5%	Пески
1	0,66	0,0763±0,2%	0,0733±0,1%
2	1,00	0,0630±0,2%	0,0634±0,2%
3	1,25	0,0565±0,2%	0,0568±0,1%

Исследования Реджинато и Ван Ванела [90] показали, что для 9 типичных почво-грунтов США крайние значения массового коэффициента ослабления применительно к излучению 0,66 МЭВ составили 0,0772-0,0780 см<sup>2</sup>/г (расчёты выполнены для каждого типа почво-грунтов по 15 элементам, включая водород твердой фазы).

Все эти рассуждения относились к простым объектам, т. е. состоящим только из данного вещества или смеси веществ с близкими массовыми коэффициентами ослабления (например, сухой грунт) и при незначительном проценте содержания железа в грунтах. Если же грунты состоят из смеси веществ с различными коэффициентами ослабления (например, двухфазная система: твердая фаза грунта + вода), то уравнения, характеризующие ослабление интенсивности излучения грунтов, должны учиты-

вать разницу коэффициентов ослабления для различных веществ и относительное содержание их в смеси.

Так, для воды массовый коэффициент ослабления при энергии излучения 0,5-1,5 МэВ на 11% больше, чем для твердой фазы почво–грунтов, и равен 0,036 для  $Cs^{137}$  и 0,063 для  $Co^{60}$  [22].

При энергиях излучения 0,5-1,5 МэВ (в практике гаммаскопии обычно используют  $Cs^{137}$  и  $Co^{60}$ ) массовые коэффициенты ослабления, приведенные в таблице 2.2 для алюминия и железа меньше, чем для кислорода, кремния и кальция.

Таблица 2.2

Массовые коэффициенты ослабления гамма–излучения для ряда элементов и соединений

Энергия гамма-излучения в МэВ	$\mu_m$ см <sup>2</sup> /г					
	O	Si	Al	Fe	C	Ca
0.5	0.0870	0.0872	0.0844	0.084	0.0870	0.0873
1.0	0.0636	0.0635	0.0614	0.0598	0.636	0.0637
1.5	0.0517	0.0518	0.0500	0.0484	0.0517	0.0521

Выполнение В. А. Арцыбашевым [7] расчёты показывают, что если применительно к твердой фазе грунтов пользоваться массовым коэффициентом для группы кремния и допускать погрешности измерений плотности грунтов из-за варьирования химического состава до  $\pm 0,5\%$ , то учёт концентрации отдельных элементов и влажности необходим лишь в тех случаях, когда они превышают величины, приведенные в таблице 2.3 [7].

Таблица 2.3.

Максимальные концентрации элементов значения влажности, которые можно не учитывать при расчётах плотности по массовому коэффициенту ослабления для элементов группы.

Излучатель	Группы элементов			Излучатель	Группы элементов		
	Al	Fe	H <sub>2</sub> O		Al	Fe	H <sub>2</sub> O
$Cs^{137}$	15	10	5	$Co^{60}$	15	8	5

В таблице 2.4 приведены экспериментальные значения массовых коэффициентов ослабления для параллельного пучка гамма-квантов излучения при энергии 1, 25 МЭВ для песков, суглинков и воды.

Таблица 2.4

Численные значения массового коэффициента ослабления для песков, суглинков и воды.

№ пп	Массовый коэффициент ослабления	Кто проводил опыты	Организация
1	0,0520	В.И. Верронский	МИСИ
2	0,0524	С.И. Носаль	НИИОСП
3	0,052±0,0005	Д.Е. Польшин, Ши Джун-Хен	НИИОСП
4	0,0522	А.И. Данилин	НИИ гидрометеорологического приборостроения
5	0,0510	К.В. Юрьев	ИФХ АН СССР
6	0,0512	Бернгар и Хасек	Англия
Среднее	0,05156		
7	Вода 0,0594	Д.Е. Польшин, Ши Чхун-Хен	НИИОСП

Значения массовых коэффициентов ослабления, приведенные в таблице 2.4, близко совпадают с их значениями для кислорода, кремния и кальция, т.е. для тех элементов, из которых в основном состоят пески и супеси. Поэтому для химических элементов с не очень большим порядковым номером массовые коэффициенты ослабления оказываются одинаковыми. Исходя из этого, ряд исследований принимает массовые коэффициенты ослабления для грунтов различного химического состава практически одинаковыми. Так, М.П. Беликов предлагает принимать при энергии излучения 1,25 МЭВ ( $Co^{60}$ ) для грунта  $\mu_{gp} = 0,057 \frac{cm^2}{g}$ , а для воды  $\mu_g = 0,063 \frac{cm^2}{g}$ .

Сравнение теоретических и экспериментальных значений массовых коэффициентов ослабления, приведенных выше, показало, что расхождение между ними доходит до 10%, что значительно превышает точность метода. Это различие, по-видимому, объясняется только влиянием химиче-

ского состава исследуемых грунтов и, в какой-то мере, погрешностью эксперимента.

Рассмотрим справедливость этого положения для глинистых и элювиальных грунтов Урала. Вследствие различия свойств исходных материнских пород и неравномерности протекающих процессов выветривания глинистые элювиальные грунты отличаются специфическими особенностями, резко отличающими их от всех остальных генетических видов грунта. Минералогический и химический состав элювиальных глинистых грунтов исследован недостаточно. Однако, имеющиеся данные показывают, что большинство грунтов глинистого элювия характеризуются полиминеральным составом и значительной ролью гидрослюдистых минералов, занимающих по химическому составу и свойствам промежуточное положение, как между глинистыми минералами и минералами коренных пород, так и среди глинистых минералов.

Особенности генезиса элювиальных грунтов отражаются на всех свойствах этих грунтов, в том числе составе, химическом составе и прочностных характеристиках. Имеющиеся данные о химическом составе элювиальных грунтов показали, что концентрация отдельных элементов или влажности не отвечает данным, приведенным в таблице 2.3. Рассмотрим ряд разновидностей глинистых элювиальных грунтов с числом пластичности от  $W_p = 8,8$  до  $W_p = 20,3$ , химический состав которых в оксидах и элементах приведен в таблицах 2.5 и 2.6.

Рассчитаем значения массовых коэффициентов ослабления для этих разновидностей грунтов. Вероятность комптоновского рассеивания гамма-квантов в  $1 \text{ см}^3$  вещества  $\mathcal{E}_k$ , представленного данным элементом, определяется произведением эффективного сечения рассеивания на одном электроны на количество электронов в этом объеме:

$$\mathcal{E}_k = \sigma_3 qz , \quad (2.9)$$

где  $q$  — количество атомов элемента в вещества в  $1 \text{ см}^3$ ;  $z$  — атомный номер элемента.

Причем в данном случае  $\sigma_3$  представляет собой линейный коэффициент ослабления (соответствующей комптон-эффекту). Так как количество

атомов элемента в  $1 \text{ см}^3$  вещества равно  $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{A} \rho_{\text{эл}}$ , где  $A$  - атомный вес элемента и  $\rho_{\text{эл}}$  - плотность его, то на основе формулы вероятности комптоновского рассеяния при  $\varepsilon_k = \mu_l$  можно написать:

$$\mu_l = \sigma_0 6,02 \cdot 10^{23} \rho_{\text{эл}} \frac{Z}{A}. \quad (2.10)$$

Таким образом, влияние вариации химического состава грунтов на линейный коэффициент ослабления обуславливается эффективным (средневзвешенным) отношением  $\frac{Z}{A}$ . Для водорода это отношение равно единице, а для остальных элементов, содержащихся в грунтах в значительных количествах, близко к 0,5.

Зависимость массового коэффициента ослабления от вариации концентрации элементов, за исключением водорода, определяется по формуле:

$$\mu_m = \sigma_0 6,02 \cdot 10^{23} \frac{Z}{A}. \quad (2.11)$$

Следует отметить, что меньшее значение массового коэффициента ослабления соответствует суглинку с числом пластичности равным 8,8, и большее значение - его глине с числом пластичности равным 20,3. Как видно из рис. 2.3, зависимость величины  $\mu_m$  от числа пластичности для шести разновидностей глинистых грунтов носит линейный характер. Зависимость величины  $\mu_m$  от числа пластичности грунтов, представлена на рис. 2.3, позволяет в ряде случаев не проводить кропотливых измерений массового коэффициента ослабления. В первом приближении значения  $\mu_m$  могут быть получены из графиков на рис. 2.3 в зависимости от числа пластичности исследуемых глинистых грунтов с близкими по химическому составу элементов приведена в таблице 2.5-2.8.

Таким образом, из результатов исследования видно, что для получения плотности грунтов с высокой точностью с помощью метода гамма-излучений, необходимо для каждого исследуемого грунта определить свое значение  $\mu_m$ .

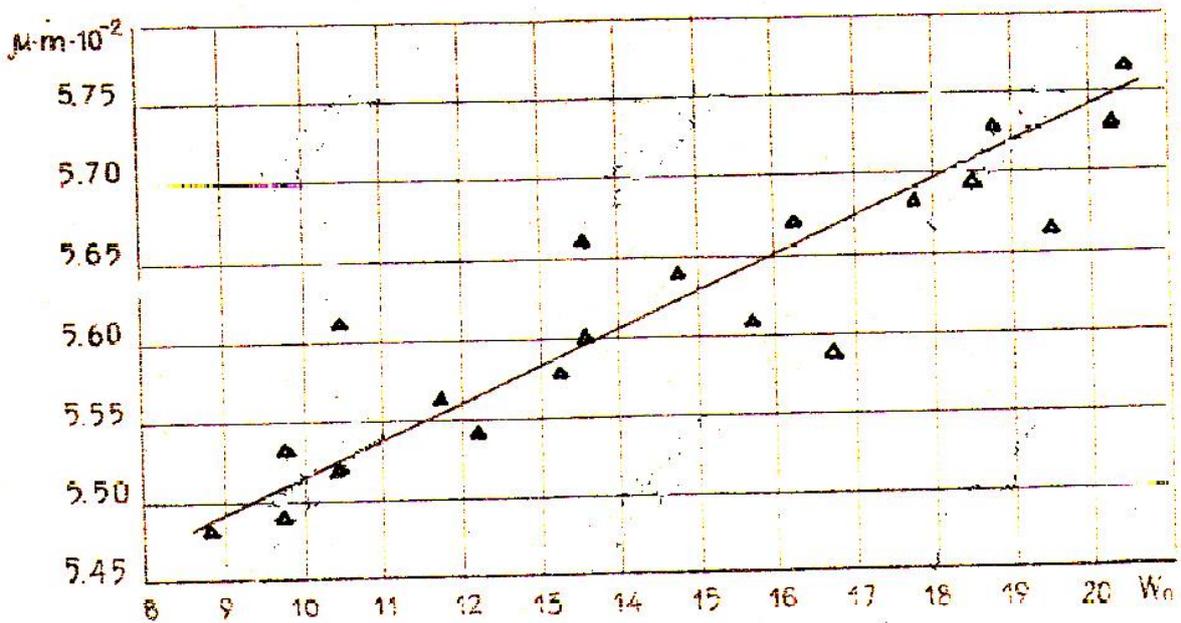


Рис. 2.3 Зависимость массового коэффициента ослабления гамма-излучения от числа пластичности глинистых грунтов.

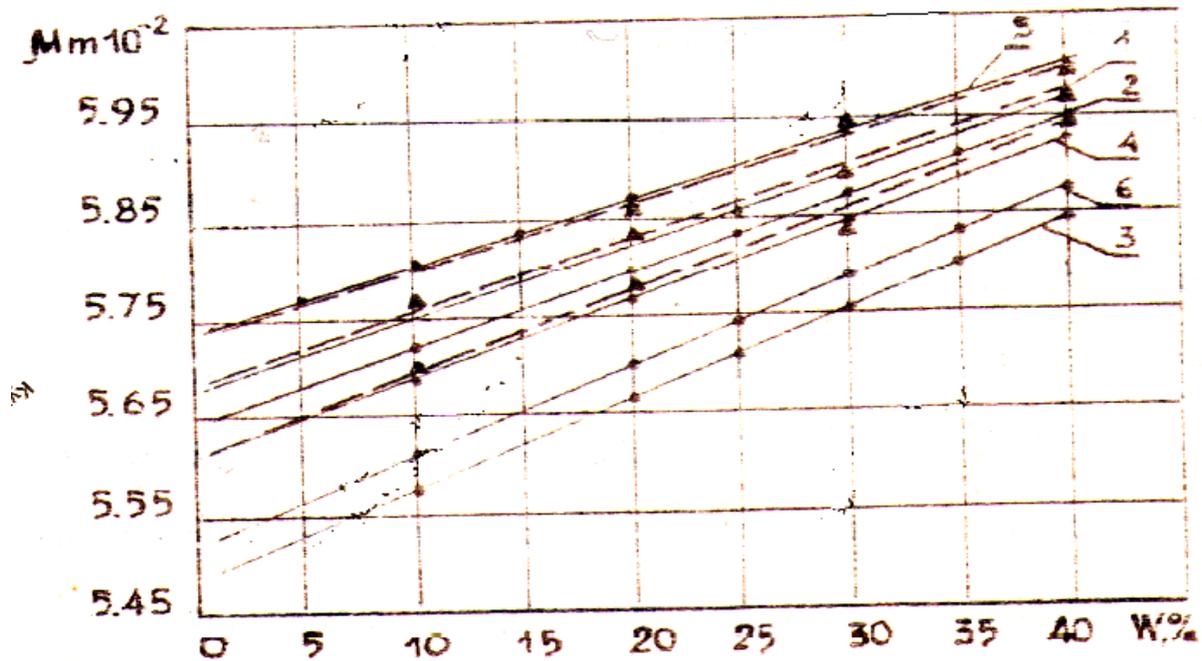


Рис. 2.4. Зависимость массового коэффициента ослабления гамма-излучения от числа пластичности глинистых грунтов.

Таблица 2.5

## Содержание элементов в глинистых грунтах

№ пп		W <sub>T</sub>	W <sub>p</sub>	W <sub>n</sub>	Si	Al	Fe	Ca	Mg	S	C	H	O <sub>2</sub>
1	Глина	49,4	41,6	17,8	22,8	10,7	10,56	2,28	1,55	0,108	-	1,05	60,66
2	Суглинок	43,4	28,6	14,8	26,95	10,53	8,90	0,74	0,72	0,792	-	1,48	51,313
3	Суглинок	33,7	24,9	8,8	36,3	3,20	2,94	1,48	1,655	0,365	-	0,8	51,352
4	Суглинок	40,8	27,2	13,6	26,8	5,40	5,70	6,30	2,04	0,365	1,00	1,19	51,273
5	Глина	51,5	31,2	20,3	21,2	12,2818	8,46	27,25	2,10	0,108	0,47	0,78	51,685
6	Суглинок	39,2	28,8	10,4	52,0	8,60	1,92	0,50	0,606	0,317	-	0,88	53,36

Таблица 2.6

## Процентное содержание оксидов в глинистых грунтах

Вид грунта	W <sub>T</sub>	W <sub>p</sub>	W <sub>n</sub>	SiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaO	MgO	S O <sub>3</sub>	C O <sub>2</sub>	CaCO <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> O
1. Глина	49.4	31.6	17.8	50.3	22.07	11.79	3.12	2.58	0.27	-	-	10.87
2. Суглинок	43.4	28.6	14.8	37.71	19.93	10.23	1.03	0.20	0.48	-	-	10.42
3. Суглинок	33.7	24.9	8.8	77.8	6.20	5.20	1.96	2.27	0.86	0.26	-	5.8
4. Суглинок	40.8	27.2	13.6	57.51	10.22	3.15	8.67	3.39	0.92	3.65	-	7.49
5. Глина	51.5	31.2	20.3	46.6	23.50	13.04	3.52	2.42	1.012	0.70	0.04	8.76
6. Суглинок	39.2	28.3	10.4	72.85	16.20	2.73	0.72	1.01	0.79	-	-	5.7

Таблица 2.7

Атомные веса и массовые коэффициенты ослабления элементов, входящих в глинистые грунты.

№ пп	Показатели	Si	Al	Fe	Ca	Mg	S	C	H	H <sub>2</sub> O
1	A	28,1	26,98	55,85	40,08	24,32	32,07	12,01	16,0	-
2	$\mu_m$	0,0576	0,05595	0,054	0,0576	0,05695	0,0577	0,0577	0,0577	0,064

Таблица 2.8

Значение массовых коэффициентов ослабления глинистых грунтов

Вид глинистого грунта	Глина	Суглинок	Суглинок	Суглинок	Глина	Суглинок
	W <sub>п</sub> =17.8	W <sub>п</sub> =14.8	W <sub>п</sub> =8.8	W <sub>п</sub> =13.6	W <sub>п</sub> =20.3	W <sub>п</sub> =10.4
Способ определения						
Теоретическое определение	0,05681	0,05644	0,05487	0,05605	0,05732	0,05518

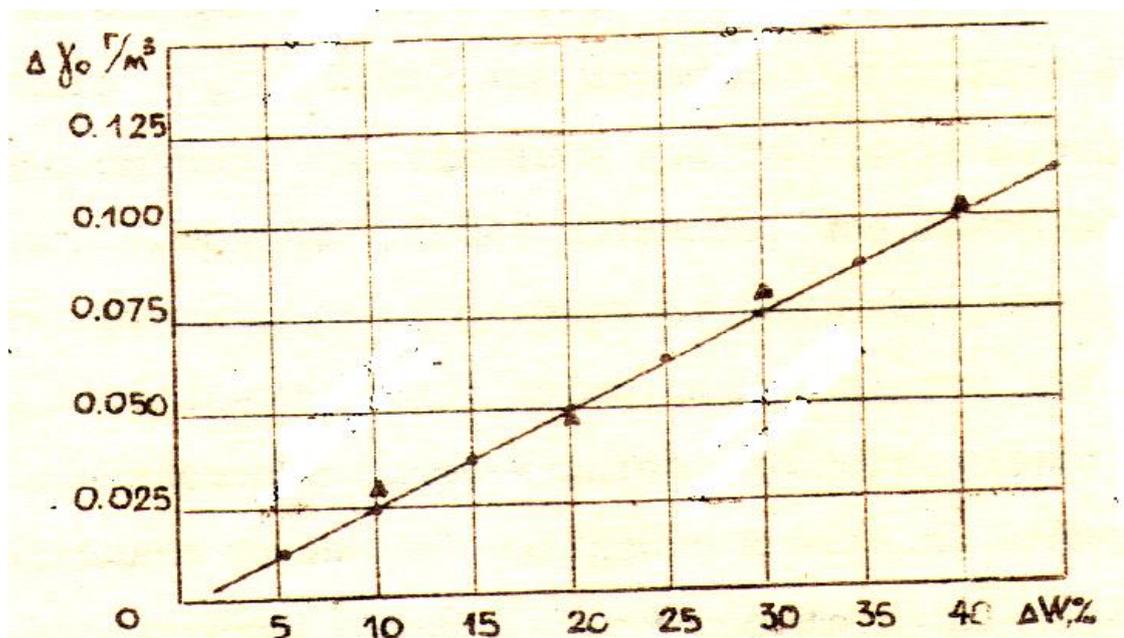


Рис.2.5 Зависимость занижения плотности глинистых грунтов определяемой методом гамма-излучений от завышения влажности.

### 2.3. Зависимость массы коэффициента ослабления глинистых грунтов от влажности

Глинистые грунты представляет собой трехфазную систему с разными массовыми коэффициентами ослабления. В дальнейшем твердой фазой воздухом – из-за ничтожной плотности, не влияющий на ослабление изучения, пренебрегаем [7]. Для глинистых двухфазных грунтов (твердых частиц + вода) с нарушенным строением имеет место лишь коагуляционные связи. В этом случае под влиянием нагрузки сжатие глинистого грунта будет происходить лишь при удалении воды из его пор, поскольку сжимаемостью воды и частиц можно пренебречь. Следствием этого будет уменьшение влажности и пористости в одних зонах и увеличение в других. Рассмотрим сущность этого процесса. При сжатии начнется процесс перемещения частиц и окружающих их водных оболочек. Те молекулы воды, которые не находятся под влиянием сил молекулярного притяжения (свободная вода), будут отталкиваться в первую очередь, при этом со скоростью, зависящей от коэффициента фильтрации. При дальнейшем увеличении

нагрузки произойдет трансформация физически связанной воды в свободную. Это обусловит дальнейшее уменьшение влажности грунта и толщины свободных оболочек вокруг его частиц. Изменение влажности грунтов может привести к изменению величины массовых коэффициентов ослабления грунтов, поскольку значения их меньше величины массового коэффициента ослабления для воды, равного  $\mu_v = 0,063$  для источника излучения  $Co^{60}$ .

Исследованиями, проведенными для кварцевых насыщенных водой песков и воды К. В. Юрьевым показано, что массовый коэффициент ослабления практически не зависит от влажности и не отличается от массового коэффициента ослабления гамма-квантов для воды.

Кривые поглощения гамма – квантов, представленные на рис. 8.6, для глин и суглинков различной влажности и воды не совпадают друг с другом и с возрастанием поверхностной плотности расходятся. Действительно, если на пути пучка гамма-лучей все количество воды расположить в один слой, то толщина слоя при увеличении влажности будет все время возрастать, и поэтому массовый коэффициент ослабления для грунтов будет приближаться к значению его для воды.

Как показано на рис. 2.3, увеличение влажности грунтов приводит к изменению величины  $\mu_m$ . Причем эта разница составляет 1,5% при изменении влажности на 10% и 6% при изменении влажности на 40%.

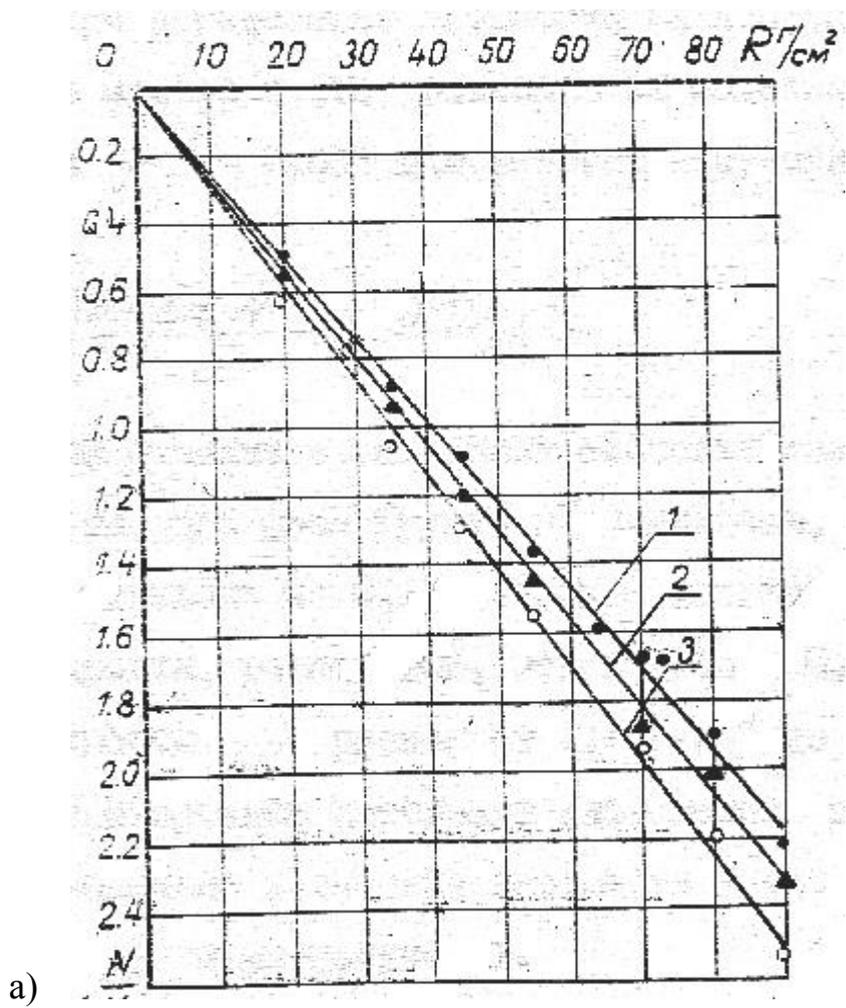
Таким образом, не учитывать влияние влажности можно только в том, случае, если требует точность измерений плотности ниже 2-6%. Метод гамма-излучений позволяет получать большую точность измерений и поэтому при дальнейших исследованиях изменения плотности необходима методика учёта влажности грунтов. Оценим влияние влажности на величину массового коэффициента ослабления.

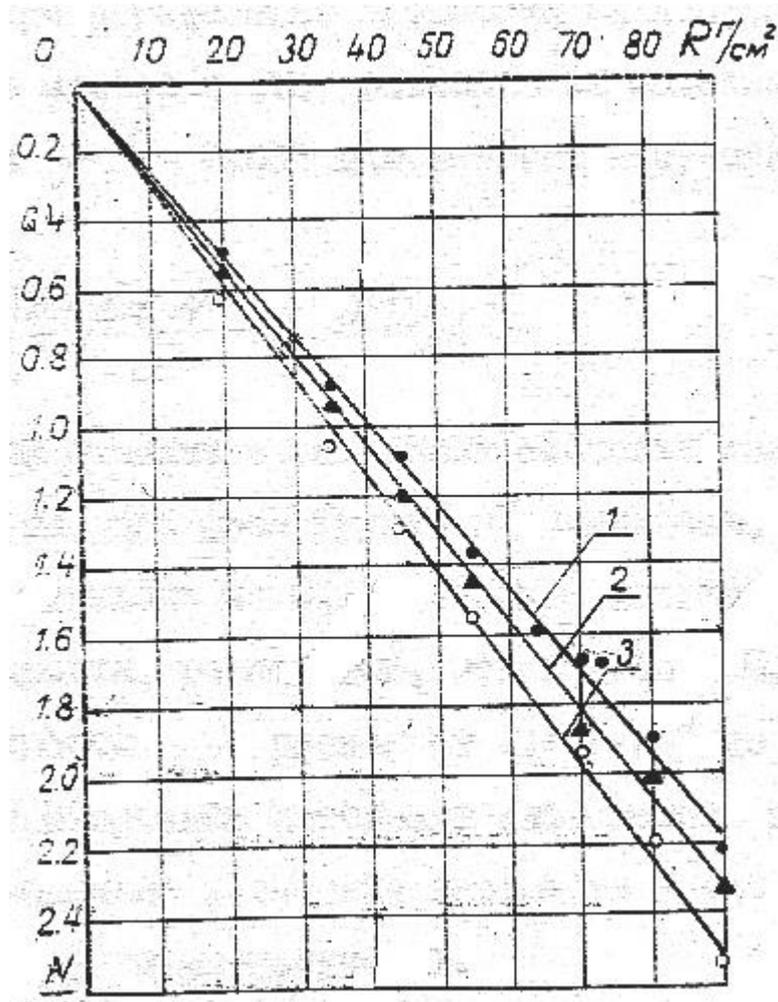
Массовые коэффициенты ослабления, приведенные в таблице 2.8, рассчитаны для глинистых грунтов, имеющих только кристаллизационную воду, которая прочно связана с кристаллической решеткой минералов. Рассмотрим влияние воды, находящейся в глинистых грунтах, или, иначе говоря, влажности на величину гамма – излучение. Для глинистых грунтов, состоящих из твердой фазы и воды, величина массового коэффициента ослабления может быть определена по формуле:

$$\mu_m = \mu_m^{m.ф} \frac{\gamma_0^{m.ф}}{100} + \mu_m^e \frac{W_6}{100}, \quad (2.12)$$

где  $\mu_m^{m.ф}$  и  $\mu_m^в$  – массовый коэффициент ослабления соответственно для твердой фазы грунта и воды;  $\gamma_0^{m.ф}$  и  $W_в$  – число граммов в твердой фазы и воды в единице объема.

Массовые коэффициенты ослабления определены теоретически по формуле 2.12 для шести разновидностей и экспериментально – для трех разновидностей глинистых грунтов и приведенные в таблице 2.9 и 2.10. В обоих случаях плотность принималась равной  $\gamma_0 = 1,8 \text{ г/см}^3$ , а влажность изменялась от нуля до 40% с интервалом 5% в каждом опыте. Экспериментально величина  $\mu_m$  определялась на радиоизотопной установке, приведенной в главе 3.





б)

Рис. 2.6. Поглощение гамма-квантов излучения  $\text{Co}^{60}$  глинистым грунтом различной влажности и водой:  
а - глина  $J_p=20,3$ ; б - суглинок  $J_p=13,6$   
1 -  $W=0$ ; 2 -  $W=30\%$ ; 3 - вода

Анализ полученных данных позволяет сделать вывод о том, что с увеличением влажности значение массовых коэффициентов ослабления возрастают, приближаясь к значениям его для воды. Причём эти зависимости, представленный на рис. 2.4, носят линейный характер. Повышенной влажности на 10% вызывает увеличение величины  $\mu_m$  в среднем на 1,5-2%.

Имеется расхождение между значениями  $\mu_m$ , полученными теоретически и экспериментально равное 0, 5% и лежит в пределах точности метода.

Примем массовый коэффициент ослабления для глинистых грунтов постоянным и не зависящим от влажности. Рассмотрим, какую погрешность несет это допущение при определении плотности глинистых грунтов. Если во второе слагаемое правой части уравнения 2.7 подставить значения  $\mu_m^{mв.ф.}$  из таблицы 2.8 и  $\mu_в = 0,063$  для энергии излучения  $Co^{60}$ , то формула 2.7 примет вид:

$$\gamma_0 = \frac{\ln N_0 - \ln N}{\mu_m^{mв.ф.} * d} - 0,12W_{об}. \quad (2.13)$$

Следовательно, если разницу в значениях массовых коэффициентов ослабления для воды и твердой фазы грунта не учитывать, то плотность влажного грунта будет завышена на 0,12 объемной влажности; так, например, при объемной влажности, равной 50%, это составит 0,060 г/см<sup>3</sup>, т.е. 3,0-3,5% при плотности  $\gamma_0$  равной от 1,7 г/см<sup>3</sup> до 2 г/см<sup>3</sup>. Таким образом, в приведенном интервале влажностей, принятом в данном исследовании, величина завышения плотности будет в 2.5-3.5 раза превышает точность метода гамма-излучений.

При исследовании нагруженного глинистого основания измерения влажности возможно только в начале и в конце эксперимента. При нагружении основания происходят изменения влажности, поэтому при исследовании грунтов возможны случаи, когда влажность грунтов не будет точно известна, т. е. будет завышена или занижена по сравнению с исходной.

Действительно, в нагруженном глинистом основании влажность грунта изменяется, а массовые коэффициенты поглощения принимаются постоянными, исходя из первоначальной влажности. Следует отметить, что при производстве наблюдений за динамикой изменения влажности с помощью метода гамма-излучения объемный вес твердой фазы не должен изменяться в течение всего периода наблюдений. В противном случае, результаты измерений влажности будут ошибочными. Поскольку объемный

вес твёрдой фазы грунта в течение опыта изменялся, то в этом случае метод гамма-излучений не применим.

Рассмотрим погрешность, возникающую при измерении плотности методом гамма-излучений при возможном завышении влажности. Если плотность грунта принять постоянной при весовой влажности в пределах от 0 до 40%, то исходя из этого, что линейный коэффициент пропорционален плотности вещества, будет иметь:

$$\mu_{m_{i-1}}\gamma_{0_{i-1}} = \mu_{m_i}\gamma_{0_i}, \quad (2.14)$$

где  $i=1.2.3\dots n$  относится к различным значениям влажности. При известных величинах массового коэффициента ослабления, приведенных в таблице 2.9 и 2.10 и заданном объемном весе, фактический объемный вес при любой влажности может быть получен по формуле

$$\gamma_0 = \frac{\mu_{m_{i-1}}}{\mu_{m_i}}\gamma_{0_{i-1}}. \quad (2.15)$$

На рис. 2.5 представлены графики зависимости занижение плотности от повышения влажности. Из графиков видно, что завышение влажности приводит к снижению плотности грунтов и наоборот – занижение влажности приводит к завышению плотности.

Результаты исследований сжимаемости глин [22] в различных зонах нагруженного основания показывают, что влажность в зоне под штампом может уменьшаться в пределах до 12% по сравнению с первоначальной, что приводит к ошибке в определении плотности на 1, 5-2, 5%. Эта величина погрешности превышает точность метода гамма-излучений.

Аналогичные результаты получены при экспериментальном определении величины плотности для 3-х разновидностей глинистого грунта.

Таким образом, измеряя влажность грунтов до нагружения и после окончания эксперимента ( $\Delta W = 10 - 12\%$ ) и экстраполируя эти значения на промежуточные нагрузки на основание, ошибку в определении величины  $\mu_m$  равную 1,5-2, 5% для  $W=10-12\%$ , можно сократить вдвое, т. е. уменьшить до значений, лежащих в пределах точности метода.

## 2.4. Оценка погрешности и чувствительности метода гамма-излучений

При измерении плотности глинистых грунтов в узком параллельном пучке моноэнергетических гамма-лучей источниками систематических ошибок являются статистические ошибки при измерениях радиоактивности, неточности определения поправки на неполную коллимацию и величины массовый коэффициент ослабления, а также погрешностей при определении толщины измеряемого слоя грунта.

При измерении величины, пропорциональной числу распадающихся атомов, например, числа испускаемых гамма-квантов, ошибка отдельного наблюдения пропорциональна корню квадратному из средней скорости счета и обратно пропорционально корню квадратному из продолжительности наблюдения.

При измерении радиоактивности из наблюдаемой величины вычисляется так называемый фон. Тогда суммарная ошибка будет равна корню квадратному из суммы квадратов ошибок отдельных наблюдений. Согласно теории ошибок, относительная ошибка скорости счета гамма-излучения равна:

$$\sigma N = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{N+}{t} + \frac{N_{\phi}}{t_{\phi}}} \quad (2.16)$$

Относительная ошибка измерения гамма-излучения увеличивается с возрастанием фона. Исследования показали, что при измерениях гамма-излучений колебания фона независимо от причин, определяющих величину фона, и подчиняется таким же статическим законам. Поэтому всегда возможно применение приведенных формул для расчета ошибки отдельного измерения. При колебании величины фона, несвязанной со случайными отклонениями от среднего, например, при перемещении вблизи прибора радиоактивных препаратов, работающих установок и т. д. с выделением заряженных частиц, не могут быть применены законы теории вероятности. Величина относительной ошибки скорости счёта гамма-излучения согласно (2.16) может быть представлено формулой.

Таблица 2.9

Теоретические значения величин массовых коэффициентов ослабления грунтов в зависимости от влажности.

№ пп	Вид грунта	Влажность W%		от влажности						
		Число пластичности	0	10	20	25	30	35	40	
1	Глина	$J_p=17,8$	0,05681	0,05753	0,05824	0,05860	0,05897	0,05933	0,05969	
2	Суглинок	$J_p=14,3$	0,05644	0,05719	0,05795	0,05833	0,05871	0,05909	0,05947	
3	Суглинок	$J_p=8,8$	0,05487	0,05578	0,05670	0,05716	0,05761	0,05807	0,05852	
4	Суглинок	$J_p=13,8$	0,05605	0,05685	0,05764	0,05804	0,05844	0,05884	0,05923	
5	Глина	$J_p=20,3$	0,05732	0,05799	0,05866	0,05899	0,05992	0,05965	0,05999	
6	Суглинок	$J_p=10,3$	0,05518	0,05606	0,05694	0,057739	0,05783	0,05827	0,05871	

Таблица 2.10.

Экспериментальные значения величин массовых коэффициентов ослабления глинистых грунтов в зависимости от влажности

№ пп	Вид грунта	Влажность W%		от влажности						
		Число пластичности	0	10	20	25	30	35	40	
1	Глина	$J_p=17,8$	0,05531	0,05764	0,05322	0,05856	0,05906	0,05926	0,05974	
2	Суглинок	$J_p=13,6$	0,05605	0,05694	0,05772	0,05300	0,05836	0,05893	0,05936	
3	Глинок	$J_p=20,3$	0,05732	0,05802	0,05859	0,05857	0,05945	0,05960	0,05994	

$$\frac{\sigma N}{N} = \sqrt{\frac{N+2N_{\phi}}{tN^2}}. \quad (2.17)$$

Из последнего выражения видно влияние фона на точность измерений. Ошибка отдельного измерения при данной скорости счёта всегда обратно пропорциональна корню квадратному из продолжительности отсчёта. Поэтому для обеспечения требуемой точности при данных условиях измерения приходится выбирать надлежащую продолжительность измерения или задаваться требуемой точностью для подсчета времени измерения гамма-излучения.

Задавая статическую ошибку, равную 0, 5%, и решая уравнения (2.17) относительно величины  $t$ , получаем время, равное 300 сек., которым необходимо для измерения скорости счета импульсов (гамма – квантов) в измеренной точке нагруженного глинистого основания. Источниками систематических ошибок при измерении в узком пучке плотности грунтов является неточности определения величины массового коэффициента ослабления гамма-излучения  $\mu_m$ . Дифференцируя формулу (2.4) для определения плотности грунтов по переменной величине  $\mu_m$ , заменяя дифференциал абсолютной величиной приращения и выделяя относительное приращение плотности, получаем.

Ошибка за счёт неточности массового коэффициента может быть вызвана, во-первых, небольшой разницей в коэффициентах для различных элементов и, во-вторых, плохой геометрией при измерениях, в результате чего частично регистрируются рассеянное излучение, а это приводит к уменьшению коэффициент ослабления.

Применение амплитудной дискриминации, а также исследование зависимости массового коэффициента ослабления глинистых грунтов по химическому составу и влажности, значительно снижает ошибки определения массового коэффициента ослабления. Согласно экспериментальным исследованиям, величины массовых коэффициентов ослабления, приведенные в таблицах 2.9 и 2.10, находится с ошибкой до 0, 5%. Случайные ошибки определения плотности грунтов связаны с ошибками измерения толщины слоя  $d$ , интенсивности гамма-излучения  $N_0$  и  $N$ .

Рассмотрим соотношение  $k = \frac{N_0}{N}$ , называемое фактором накопления. Дифференцируя уравнения (2.4) по переменным  $d$  и  $k$ , выделяя относительное приращение плотности, получим следующее выражение величины относительной ошибки

$$\frac{\Delta\gamma_0}{\Delta\gamma} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{1}{\ln k} * \frac{\Delta k}{k} . \quad (2.18)$$

При экспериментальных значениях  $N_0$  и  $N$  соответствующих им значениям  $k = 63-97$  ошибка в определении плотности составляет 0, 5% [22]. Относительная погрешность измерения толщины слоя глинистого грунта составляет  $\frac{\Delta d}{d} < 0.001$  (0.1%).

Таким образом, анализ возможных источников ошибок показывает, что достигнутая нами суммарная относительная погрешность определения объемного веса не превышает 0,01- 0,015, т.е. 1,0-1,5%. Чувствительность гамма-метода зависит от приращение интенсивности гамма – излучения  $\Delta N_0$  на единицу приращения плотности  $\Delta\gamma_0$ , дифференцируя формулу (2.4), выражающую закон ослабления узкого пучка гамма-излучения находим

$$\frac{\Delta N_0}{\Delta\gamma_0} = \mu_m d N, \quad (2.19)$$

где приращения взяты по абсолютной величине. Как следует из выражения (2.18), чувствительность тем выше, чем больше величина массового коэффициента ослабления узкого пучка как гамма–излучение, толщина просвечиваемого слоя и величина ослабленной интенсивности  $N$ .

Следовательно, регулирование чувствительности метода гамма – излучение возможно соответствующим выбором типа источника и причины активности, а также изменением толщины слоя исследуемого грунта.

В данном исследовании регулирование чувствительности метода гамма – излучение осуществлялось выбором типа источника и величины активности, так как толщина слоя исследуемого глинистого грунта определяется законами теории подобия и необходимостью значительно уменьшить силы трения, возникающие на границе грунта и стен лотка.

Рассмотрим точность и чувствительность метода гамма–излучения по сравнению с методом режущих колец. Методом режущих колец отбирались образцы грунта на разных участках глинистого основания, где предварительно были проведены измерения плотности с помощью метода гамма–излучения. На основании экспериментальных данных, приведенных в таблице 2.11, можно прийти к выводу, что результат измерений плотности, полученные с помощью метода гамма – излучения, обладают большей сходимостью и меньшим разбросом, чем при методе режущих колец. По мнению В. И. Ферронского [80], расхождения между гаммаскопическим

методом и методом режущих колец полностью обусловлено неточностью последнего метода.

Изложенное не оставляет сомнений, что точность и чувствительность метода гамма – излучений при изменении плотности при выборе источника  $Co^{60}$  активностью 11 мкюри выше, чем метода режущих колец.

Таблица 2.11

Плотность глинистых грунтов во влажном состоянии по данным измерений методом гамма–излучений и режущих кольцами

№ пп	Метод измерения	Метод гамма-излучения			Метод режущих колец		
		плотность г/см <sup>3</sup>	Среднеквадратичная ошибка		Плотность г/см <sup>3</sup>	Среднеквадратичная ошибка	
			$\Delta\gamma_0$ , г/см <sup>3</sup>	%		$\Delta\gamma_0$ , г/см <sup>3</sup>	%
1.	Зона под штампом	1,98	0,0043	0,25	2,00	0,0374	1,92
		1,99			1,94		
		1,98			1,92		
		1,983			1,953		
		1,84			0,005		
2.		1,85			1,86		
		1,86			1,82		
		1,85			1,816		
3.	Зона за пределами штампа	1,76	0,0048	0,27	1,81	0,043	2,45
		1,77			1,75		
		1,75			1,79		
		1,76			1,783		
		1,81			0,014		
4.		1,80			1,88		
		1,78			1,78		
		1,798			1,796		

Как показали исследование измерения плотности в полевых условиях погрешности абсолютных гаммаскопических измерений плотности грунтов меньше погрешностей определения ее объемно-весовыми способами. Столь малые погрешности абсолютного гаммаскопического метода и его превосходная разрешающая способность позволяет измерять плотность грунтов с такой детализацией, которую не обеспечивают объемно-весовые способы. Из анализа полученных указанными выше авторами данных следует, что практические погрешности гомеопатического метода можно характеризовать величиной, не превышающей  $\pm 0,03 \text{ г/см}^3$ .

Таким образом, метод гамма – лучей по сравнению с другими объемно-весовыми способами позволяет исследовать изменение поля плотности грунтов в динамике. Кроме того, этот метод дает возможность сравнивать поле плотности массива грунта до деформации без внедрения каких-либо тел в грунтовую среду.

### Глава 3

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Кроме физического моделирования решение смешанной упруго-пластической задачи по определению напряжённого состояния в моделях грунтовой среды выполнялось с использованием метода конечных элементов [13]. В расчёте составлялась диагональная матрица жёсткости конечных элементов и посредством вычислений горизонтальных и вертикальных перемещений в каждом узле конечного элемента были вычислены напряжения. Равномерно - распределенная нагрузка  $P$  и полосовая нагрузка  $q$ , действующие вдоль оси  $ox$ , имеют такие же численные характеристики, как и при исследовании методом фотоупругости. Физические характеристики желатиновой модели остаются прежними. Исследование охватывает такую стадию нагружения, при которой имеет место начальное критическое напряжённое состояние, не допускающее разрушение модели.

### 3.1. Результаты исследований напряжений по закону равномерно-распределённой нагрузки

Полученные результаты исследований показали следующую картину распределения напряжений в моделях. Изополя напряжений приведены на диаграммах рис. 3.1 и 3.2.

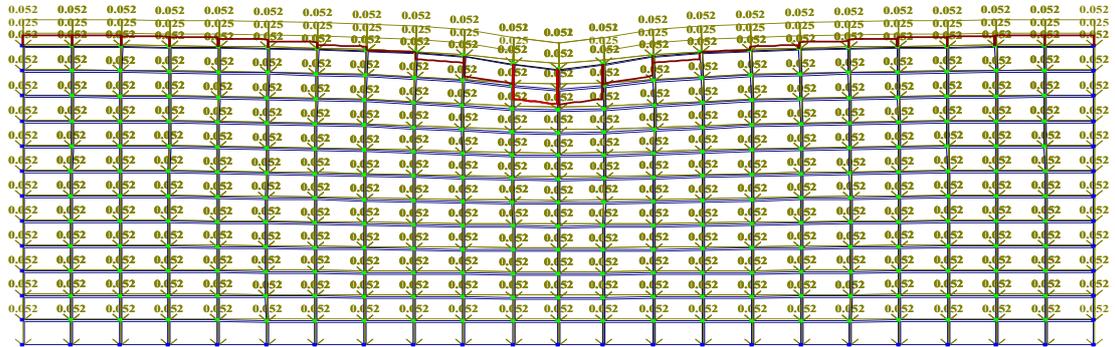
В результате полученных численных характеристик можно дать подробное описание развития зон напряжённого состояния грунтовой среды для равномерно - распределённой нагрузки.

1. Во всех моделях зоны с развитием максимального напряжённого состояния  $\sigma_x$  расположены под равномерно - распределённой нагрузкой  $P$ . С глубины 1 см от оси  $ox$  напряжение уменьшается и приобретает минимальное значение, с глубины 2 см начинает увеличиваться до низа модели. Напряжение под полосовой нагрузкой  $q$  имеет минимальное значение и с глубины 0,5 - 1 см от оси  $ox$  начинает увеличиваться и принимает постоянное значение в нижней угловой части модели (рис.3. 2.).

2. Напряжение  $\sigma_z$  имеет максимальное значение в середине распределённой нагрузки  $P$ , с глубиной сечения начинает уменьшаться и с глубины 1,8 см приобретает постоянное значение (рис. 3.2 б.).

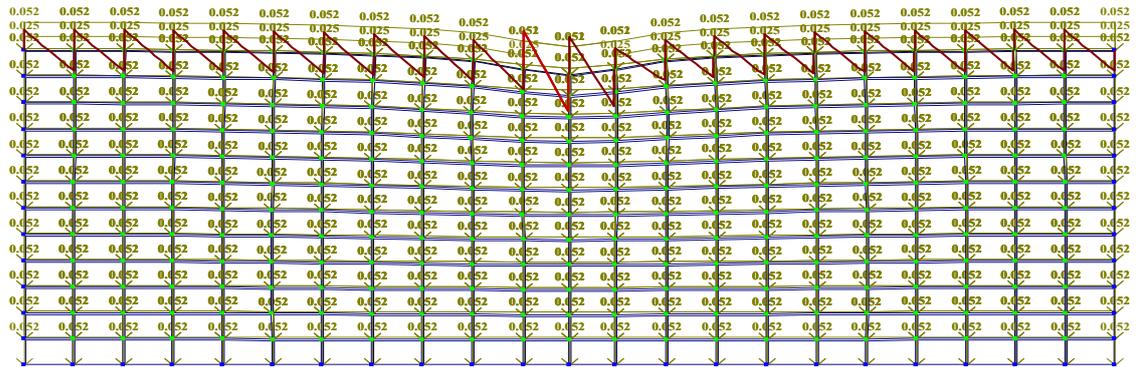
3. Зоны с максимальным развитием касательного напряжения  $\tau_{xz}$  расположены под краями распределённой нагрузки  $P$ , с глубиной сечения напряжение уменьшается и под нижним краем модели приобретает минимальное значение (рис.3.2.).

Загружение 1  
Эпюра N  
Единицы измерения - т



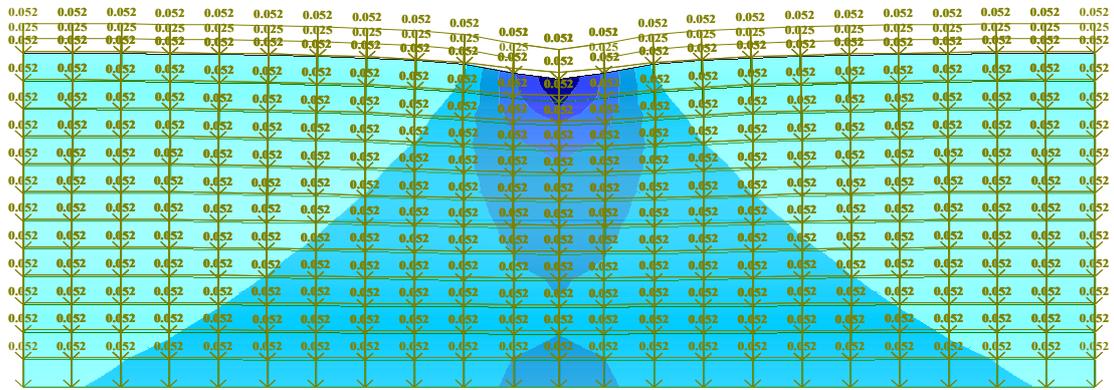
a)

Загружение 1  
Эпюра Sz  
Единицы измерения - т

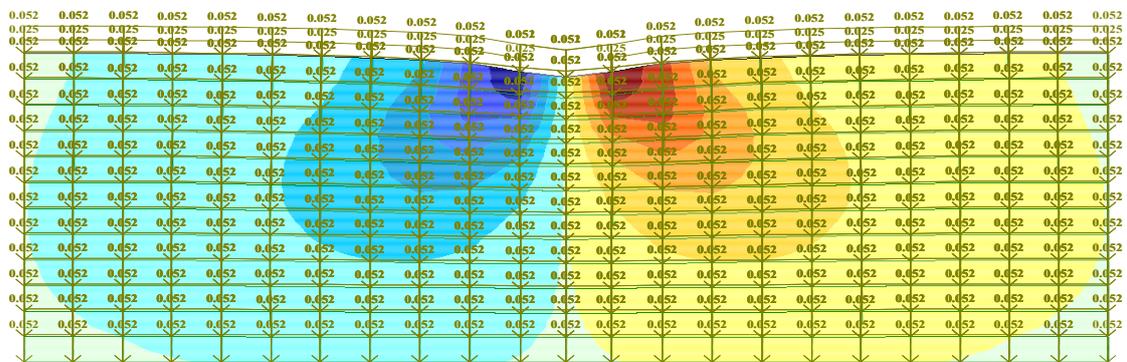


б)



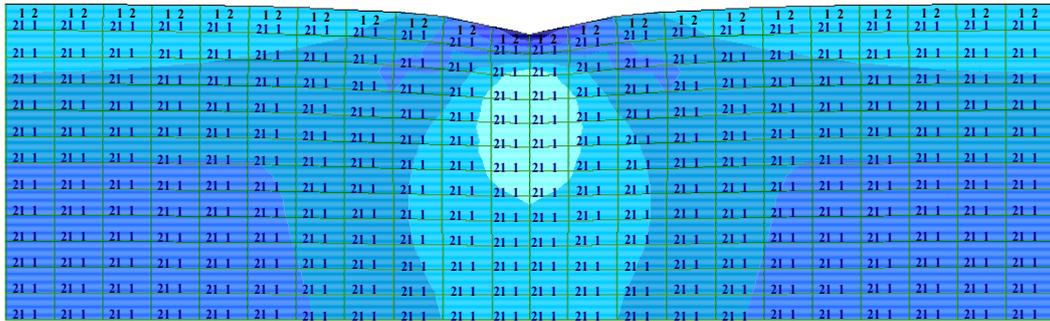


б)

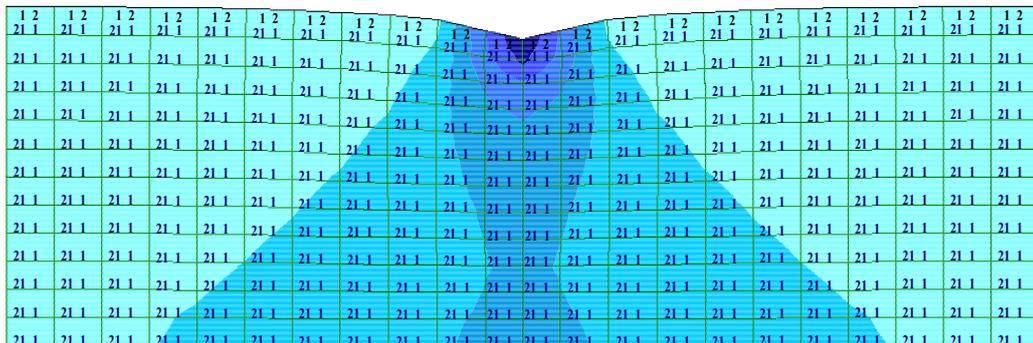


в)

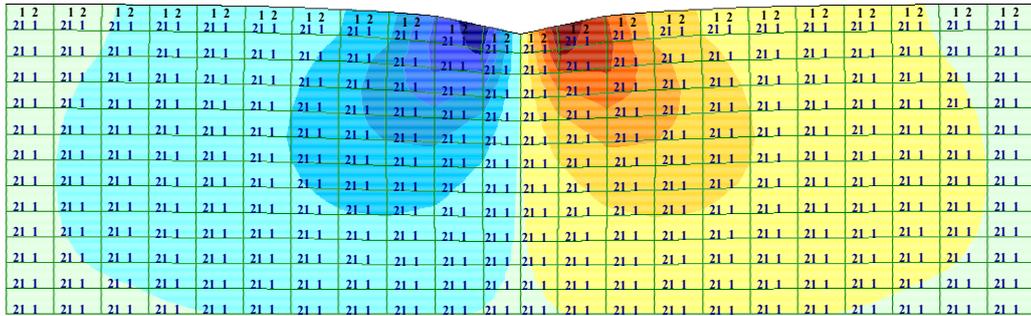
Рис.3.2 а,б,в. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца от равномерно – распределённой нагрузки для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



а)

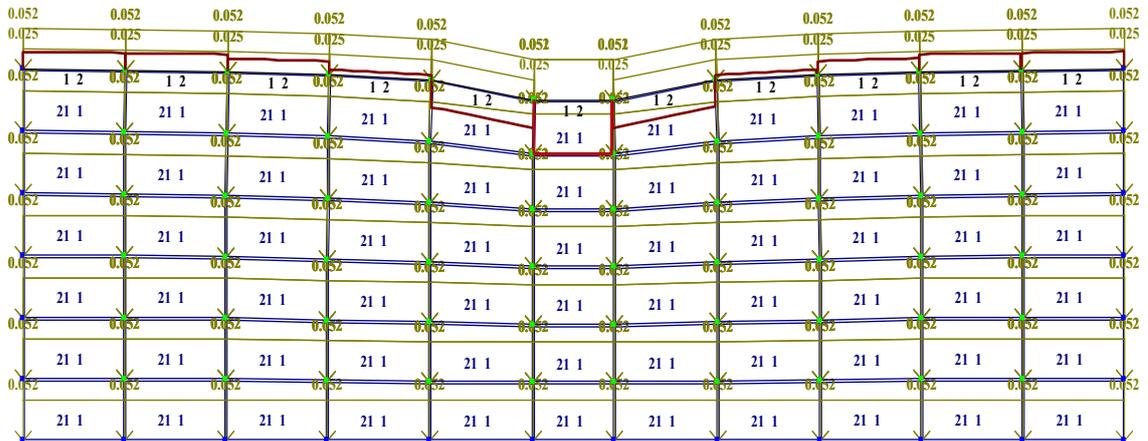


б)

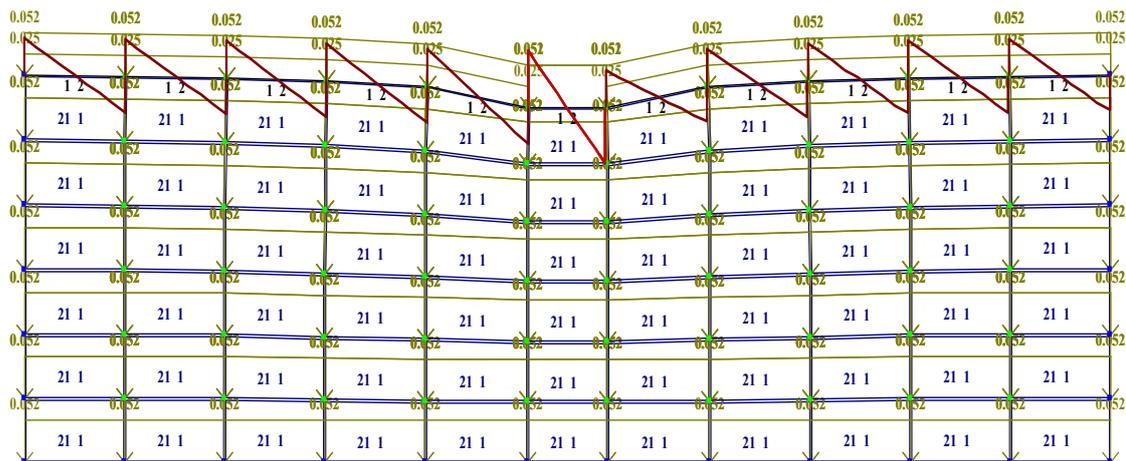


в)

Рис.3.3. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца от равномерно-распределённой нагрузки для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$

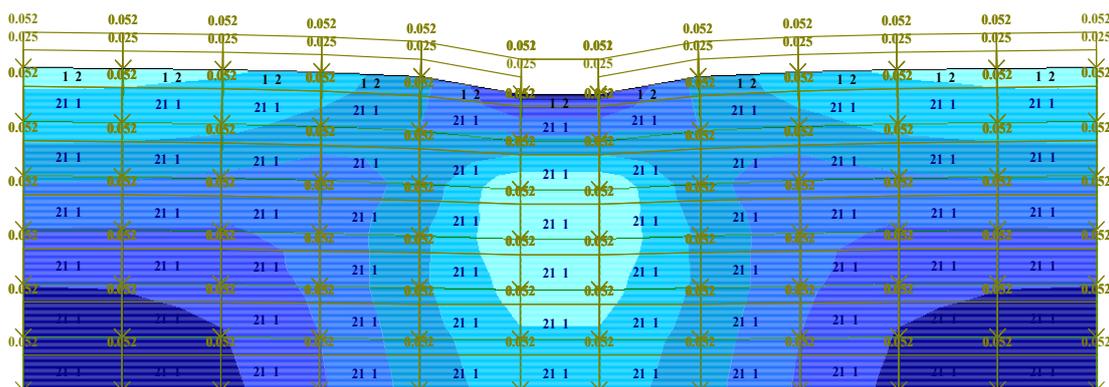


а)

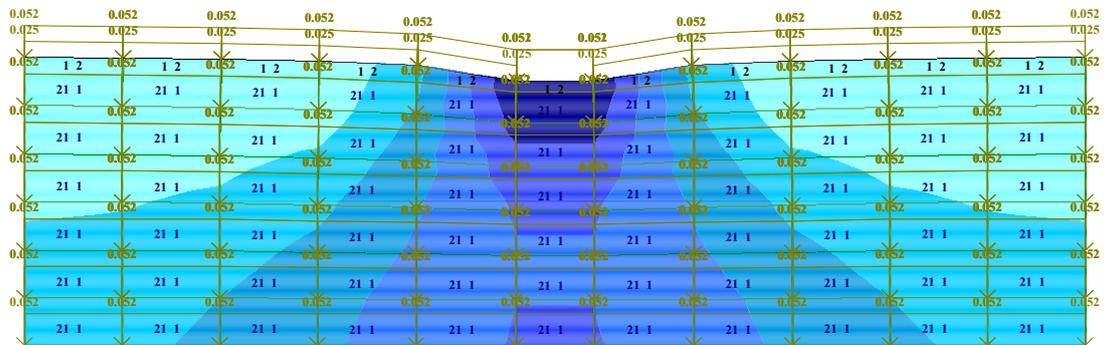


б)

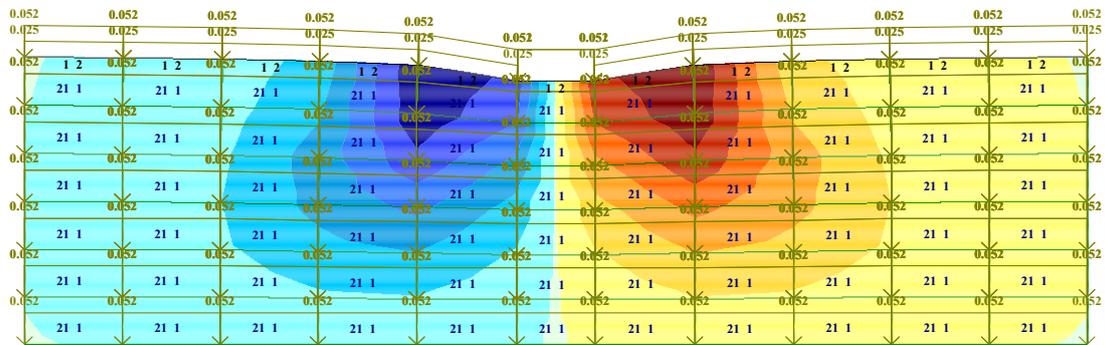
Рис. 3.4 а), б). Схемы нагружения модели от равномерно – распределённой загрузки



а)

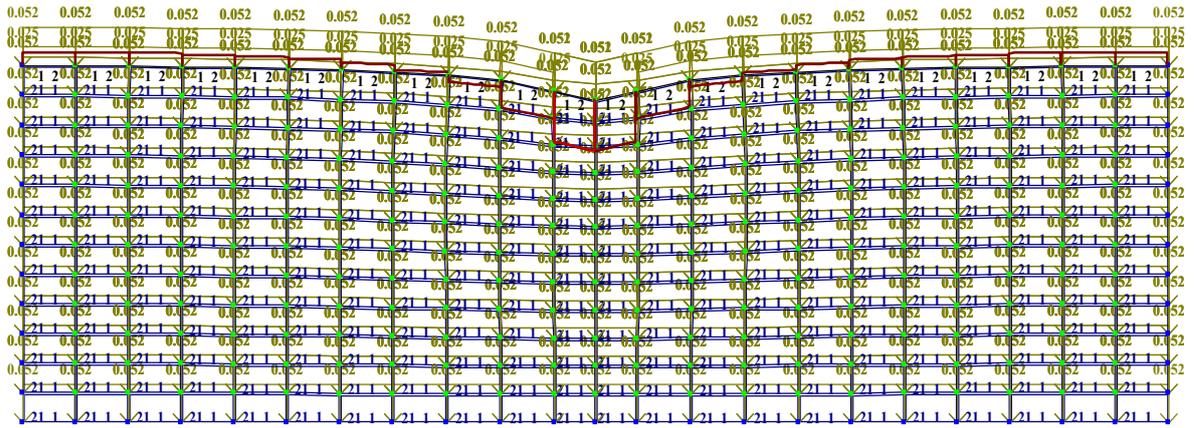


б)

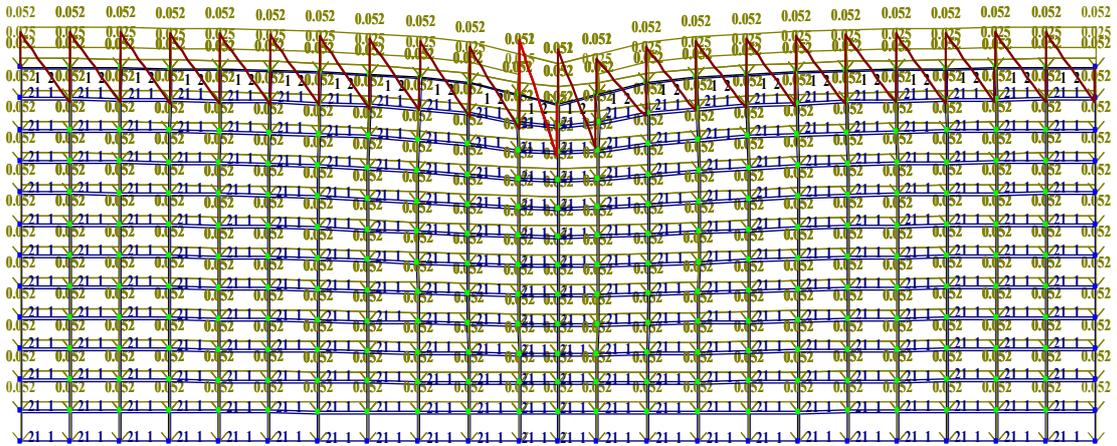


в)

Рис. 3.5 а, б, в. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца от равномерно-распределённой нагрузки для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

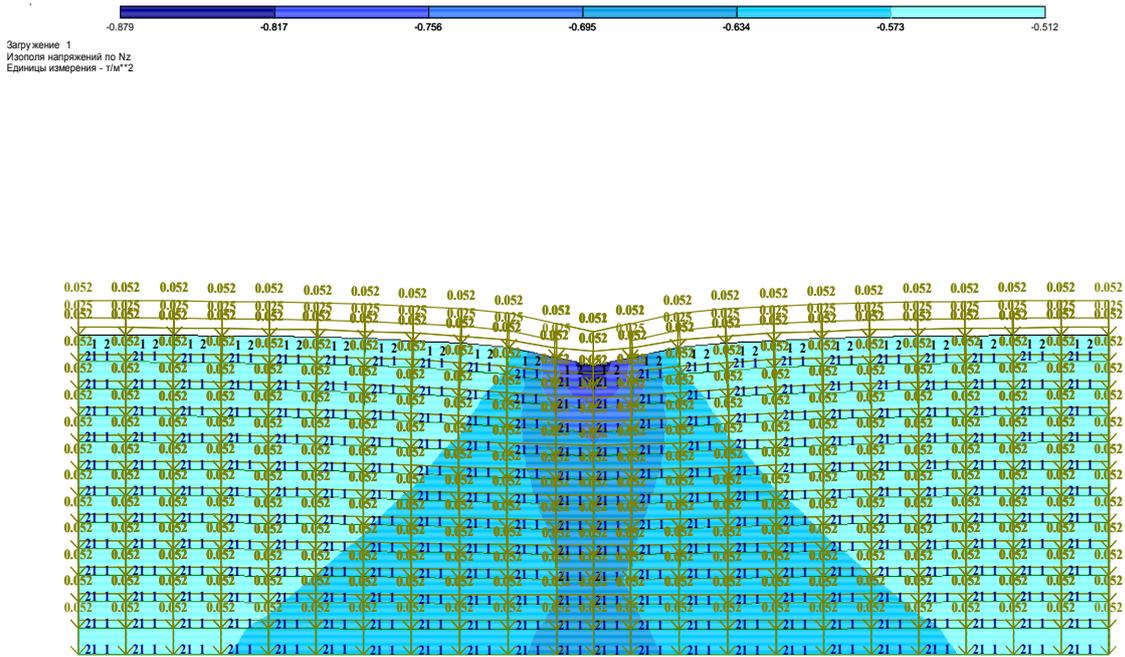


a)

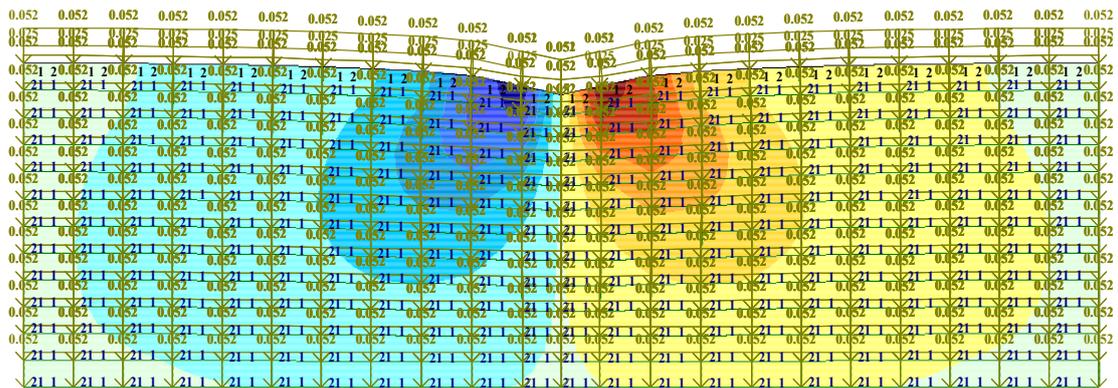
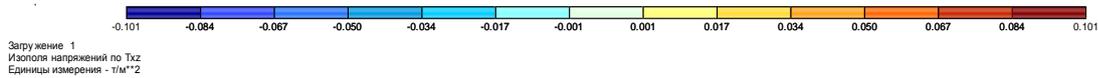


b)





б)



в)

Рис. 3.7. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

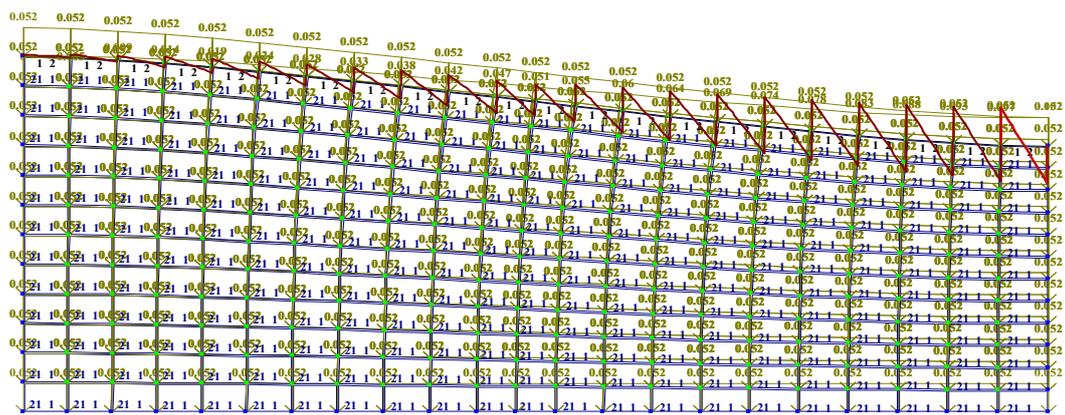
### 3.2. Результаты исследований напряжений по закону треугольной нагрузки

1. Развитие зон с максимальным напряжением  $\sigma_x$  происходит справа образца от края модели на 2,4 см, с глубиной сечения оно начинает уменьшаться и принимает минимальное значение под нижним краем модели. Под центром тяжести треугольной нагрузки в точках сечения образца с глубиной напряжение начинает уменьшаться (рис. 3.4 а.).

2. Зоны с максимальным значением  $\sigma_z$  проходят близко к центру тяжести треугольной нагрузки, далее напряжение начинает уменьшаться по вертикальным сечениям к левому краю модели (рис.3.4 б.).

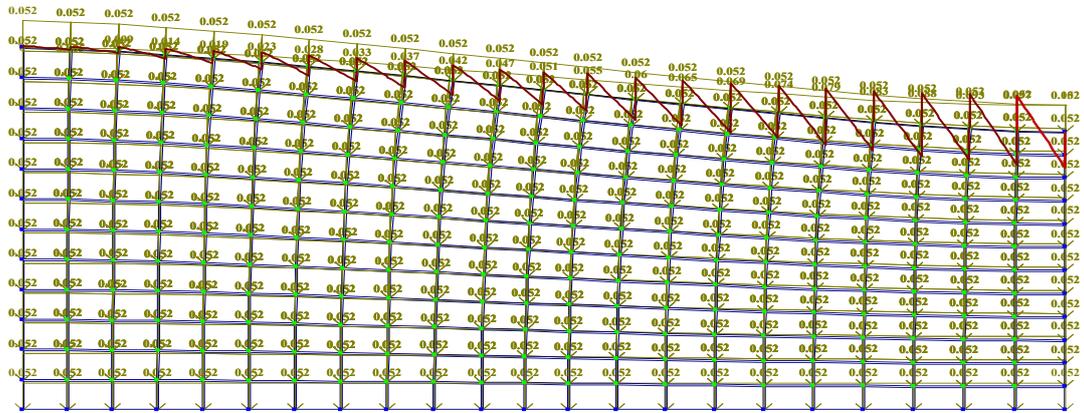
3. Зоны с максимальным касательным напряжением  $\tau_{xz}$  представлены в виде двух эллипсоидных форм, сдвинутых к боковым краям модели от центра. Под центром тяжести треугольной нагрузки напряжение принимает минимальное значение, с удалением сечений в глубь образца начинает увеличиваться до глубины 3,5 см, а потом уменьшается (рис.3.4 в.).

Загружение 2  
Элемент Qz  
Единицы измерения - т



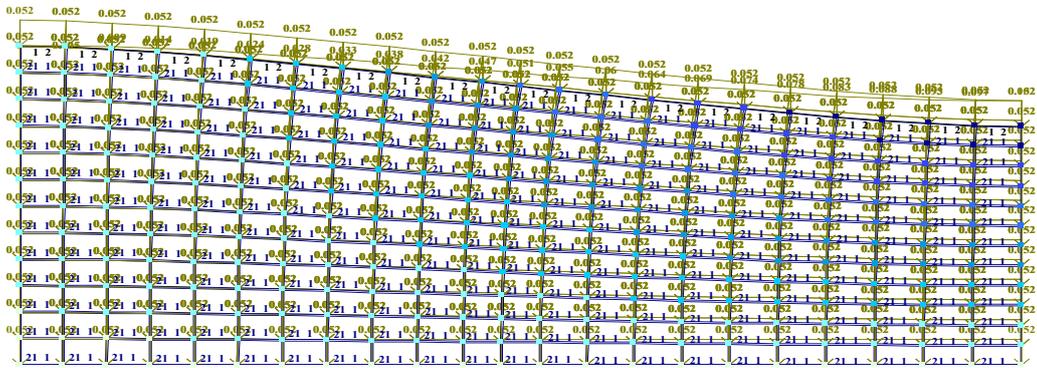
a)

Загружение 2  
Эпюра Qz  
Единицы измерения - т



б)

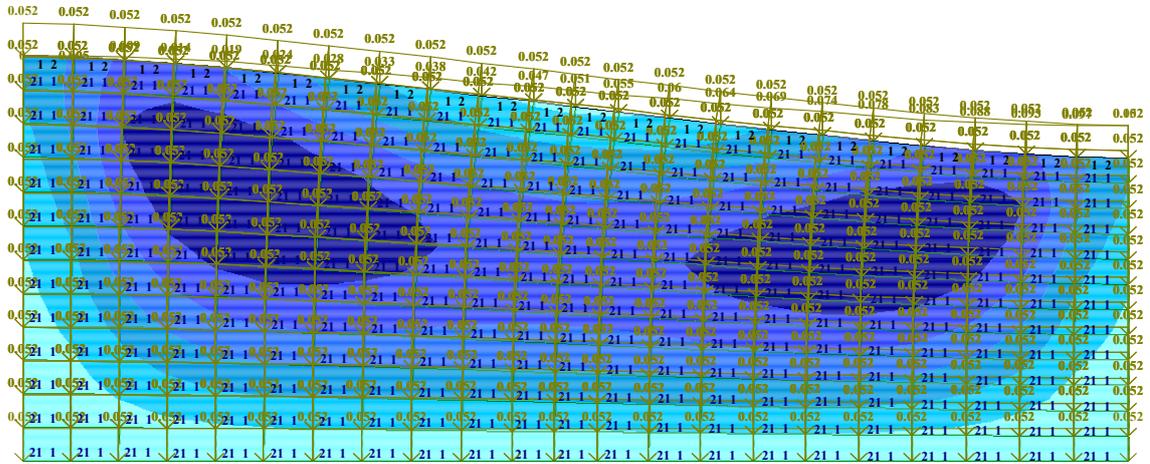
Загружение 2  
Матрица перемещений по Z(G)  
Единицы измерения - см



в)

Рис. 3.8 а, б, в. Схемы нагружения модели от треугольной нагрузки

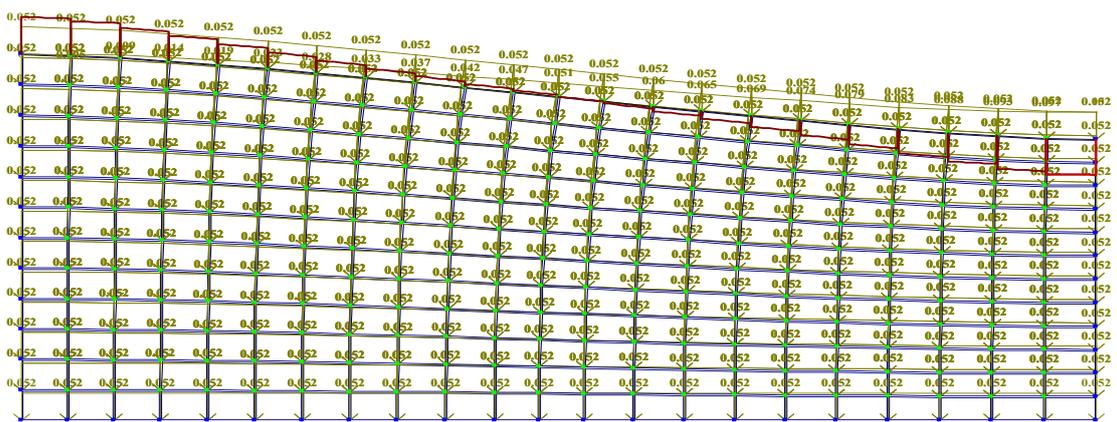




в)

Рис.3.9 а,б,в. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца от треугольной нагрузки для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

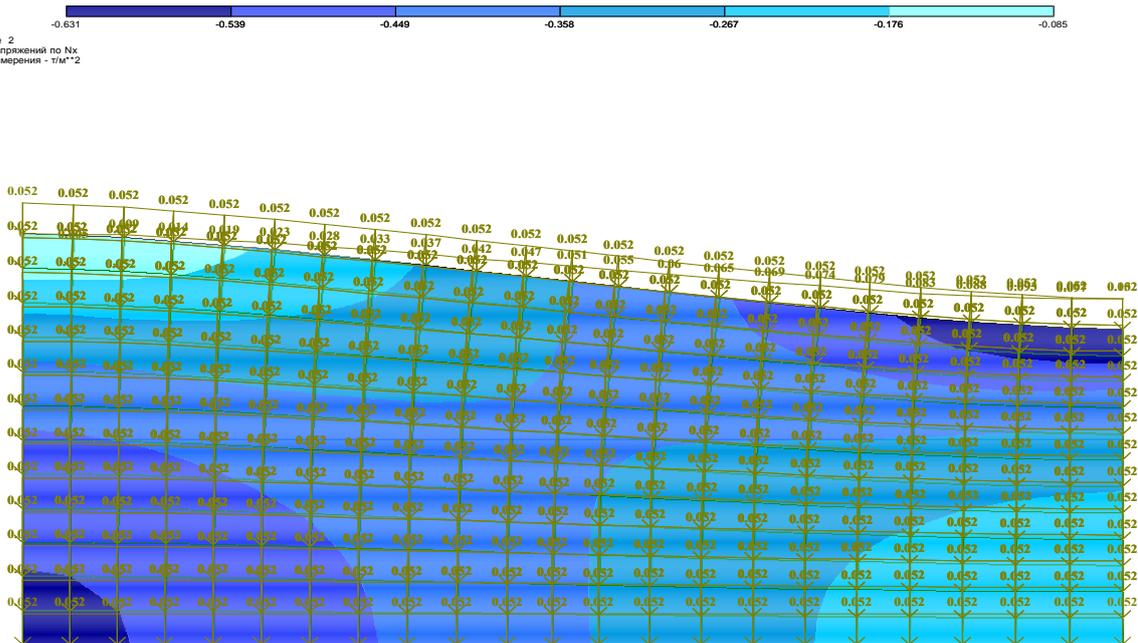
гружение 2  
нора N  
единицы измерения - 1



а)

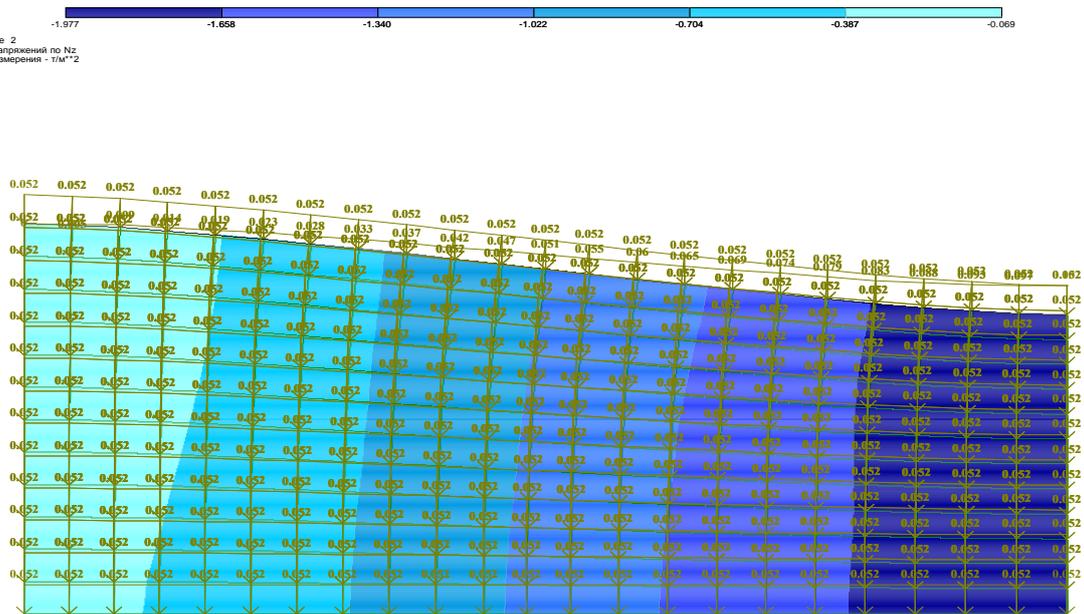


Загружение 2  
Изополя напряжений по Nx  
Единицы измерения - т/м<sup>2</sup>



a)

Загружение 2  
Изополя напряжений по Nz  
Единицы измерения - т/м<sup>2</sup>



b)



## Глава 4

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД

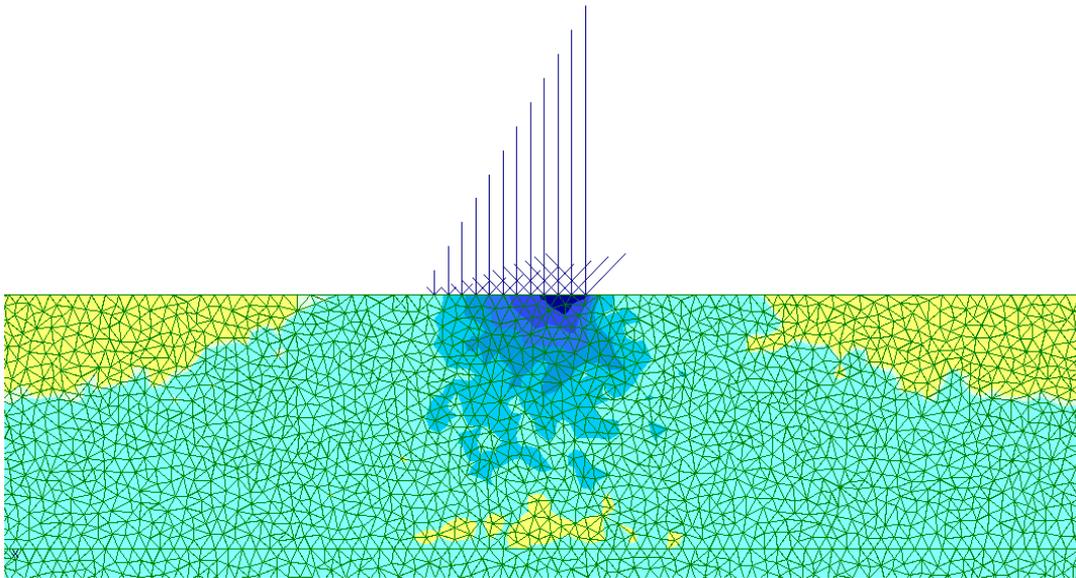
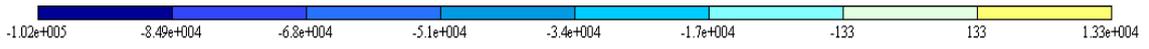
#### 4.1. Исследование напряжённого состояния методом конечных элементов

При выявлении характера деформирования грунтового полупространства была проведена серия исследований непосредственно на моделях при помощи систем ЛИР-ВИЗОР и ГРУНТ с использованием метода конечных элементов [13]. Задавая различные вертикальные полосовые нагрузки на создаваемые модели, были получены картины развития напряжённого и деформированного состояния в моделях разных грунтов. Физико-механические характеристики слабых грунтов и вертикальные усилия, прикладываемые к моделям были взяты в соответствии с таблицами

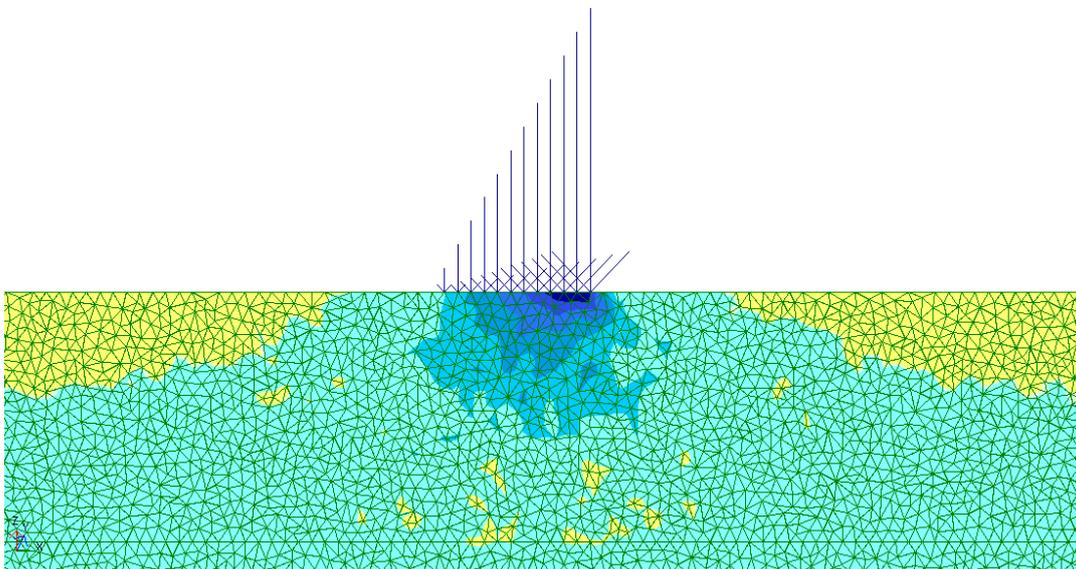
При действии небольшой нагрузки на модель имела место упругая деформация, форма модели оставалась прежней. Придавая модели значительные нарастающие усилия, наблюдались области начала развития пластической деформации в виде линейно-деформированного контура.

#### 4.2. Результаты исследований напряжений от действия треугольных нагрузок

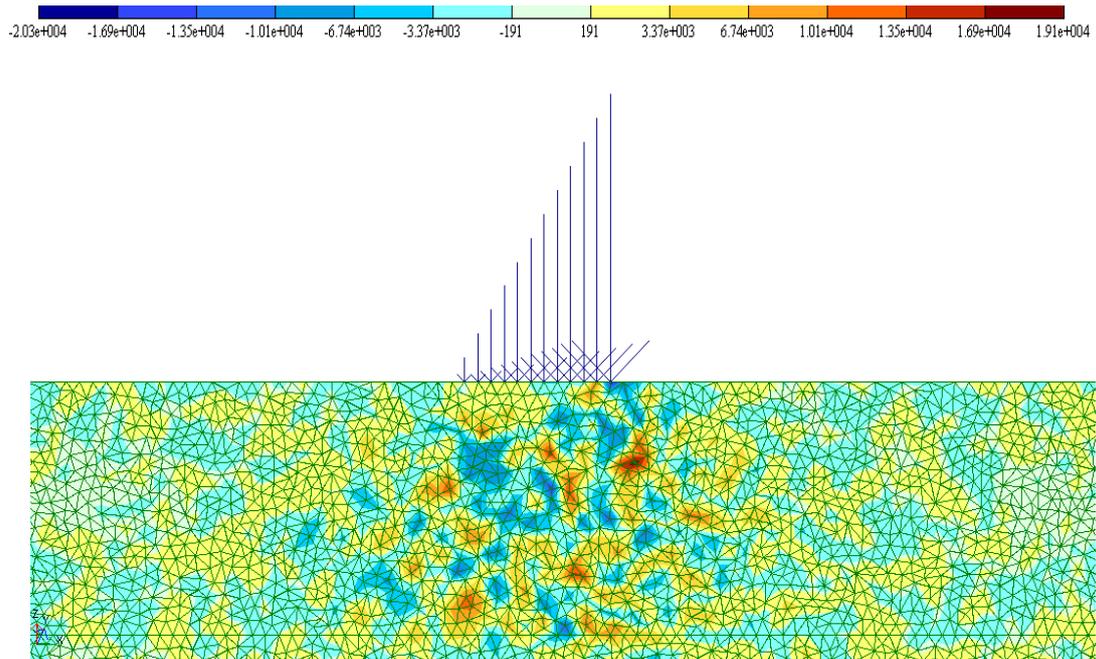
В результате выполненных расчётов с помощью вышеуказанных программных систем получено наглядное изображение областей напряжённого и деформированного состояния в моделях грунтового полупространства (рис.4.1-4.5). Изображения картин изополей напряжений и деформаций, позволили выявить характер поведения и работы грунтового основания под действием внешних нагрузок.



a)

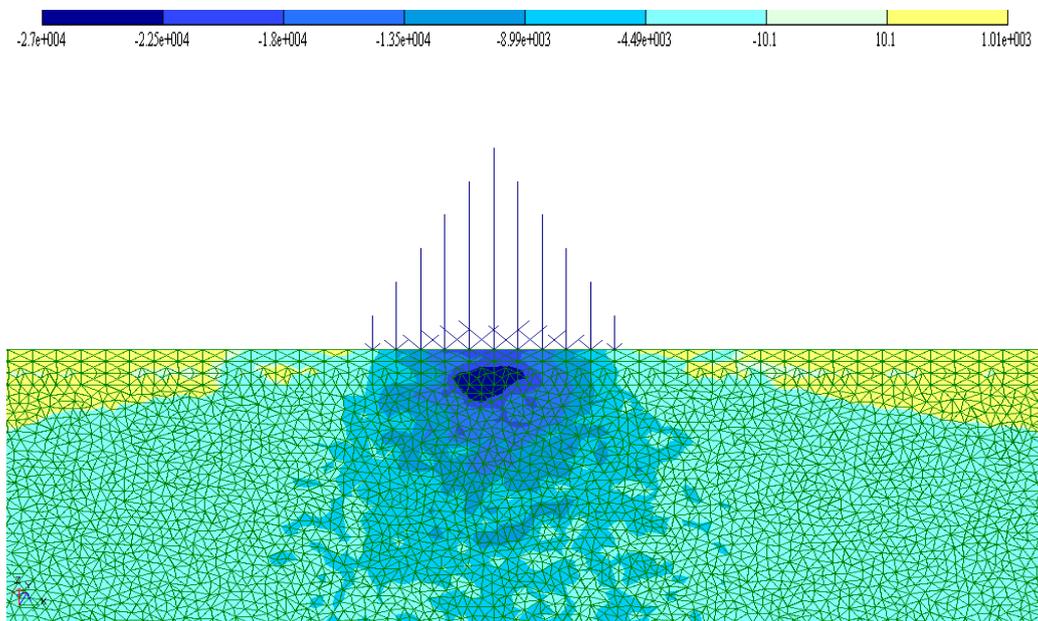


b)

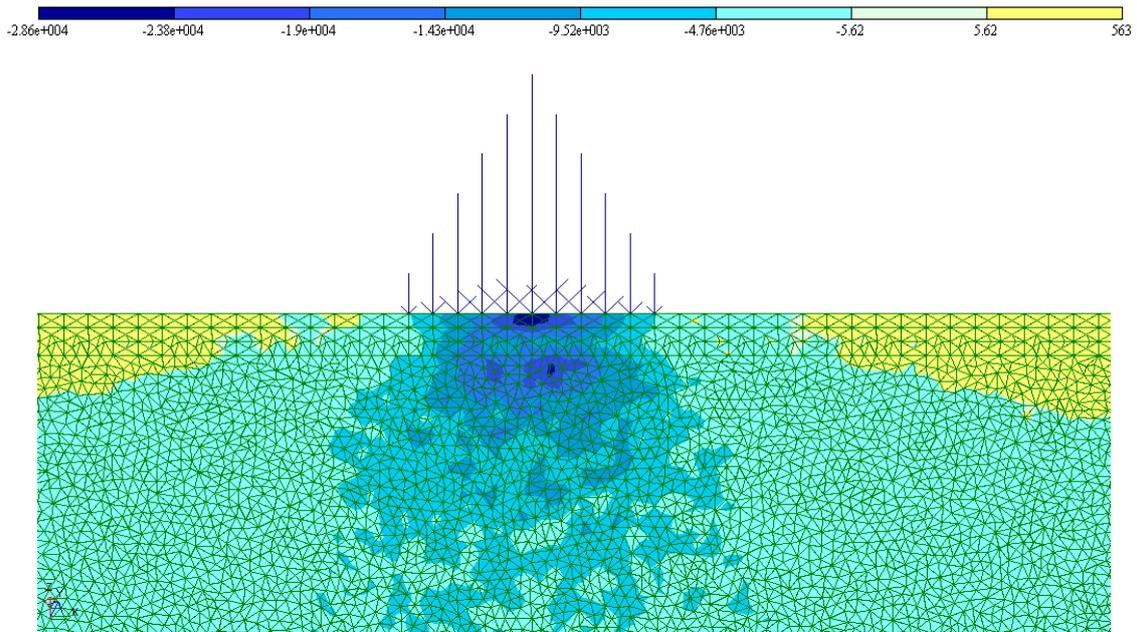


в)

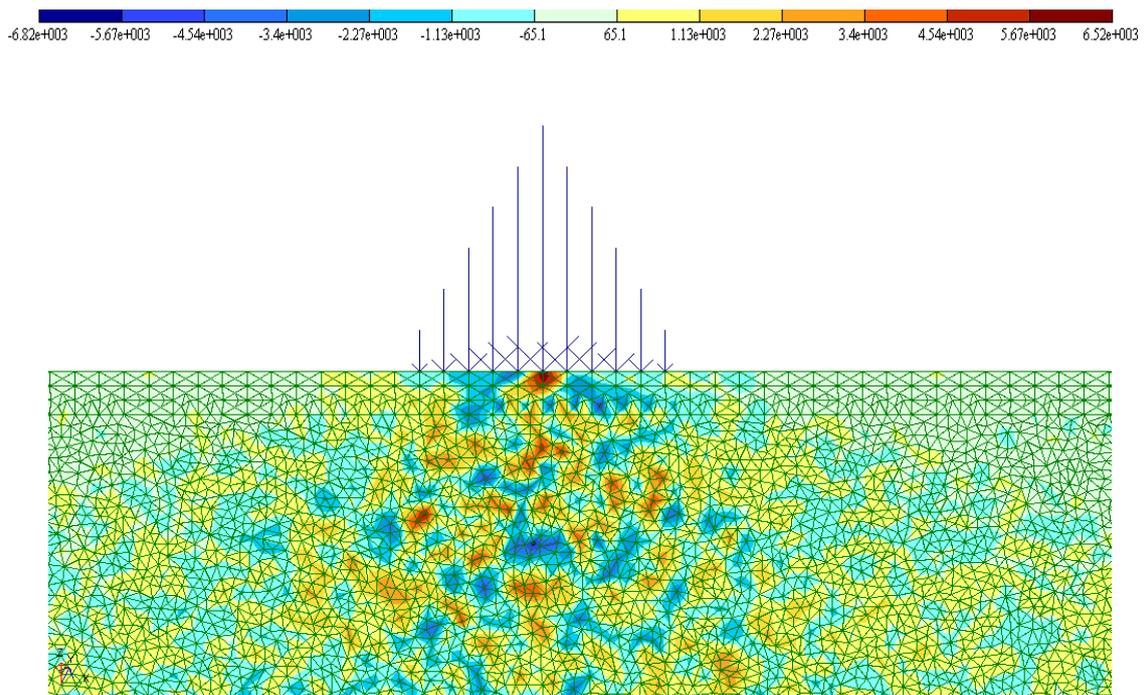
Рис.4.1 а,б,в. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца от нагрузки по закону прямоугольного треугольника в линейно-деформированном слое для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



а)

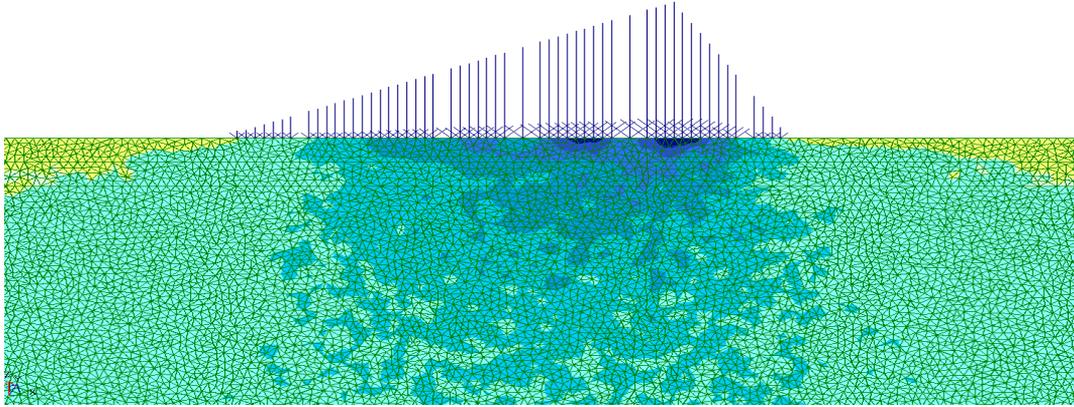
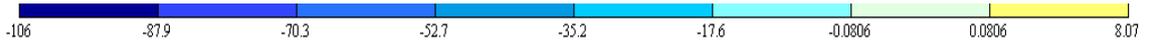


б)

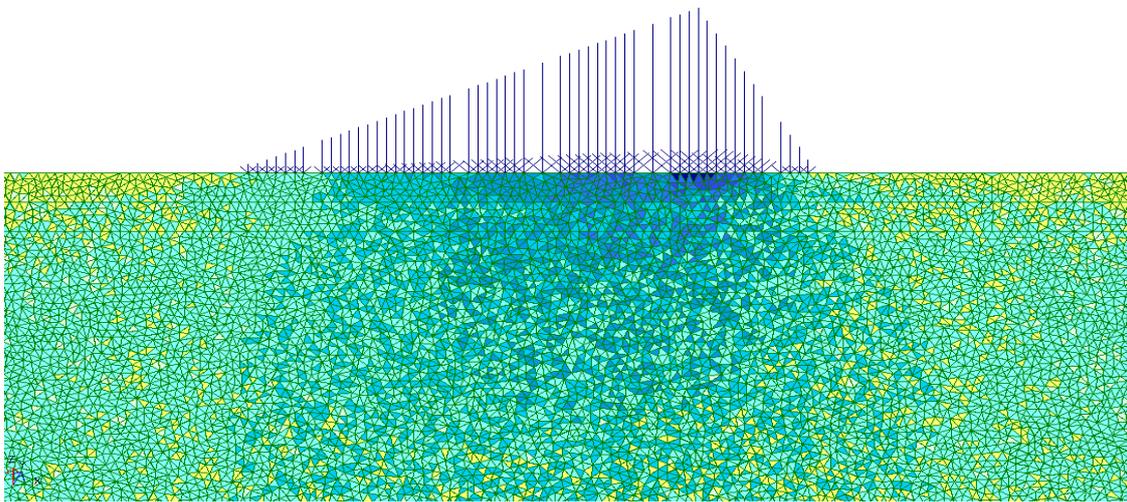
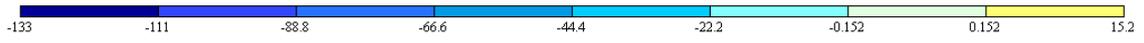


в)

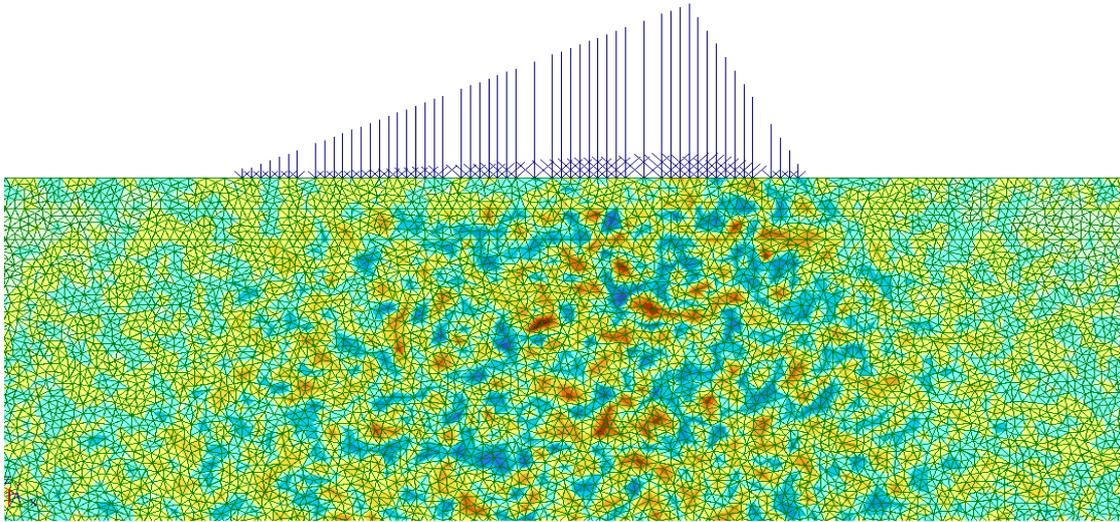
Рис.4.2 а,б,в. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца от равносторонней треугольной нагрузки в линейно-деформированном слое для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



a)

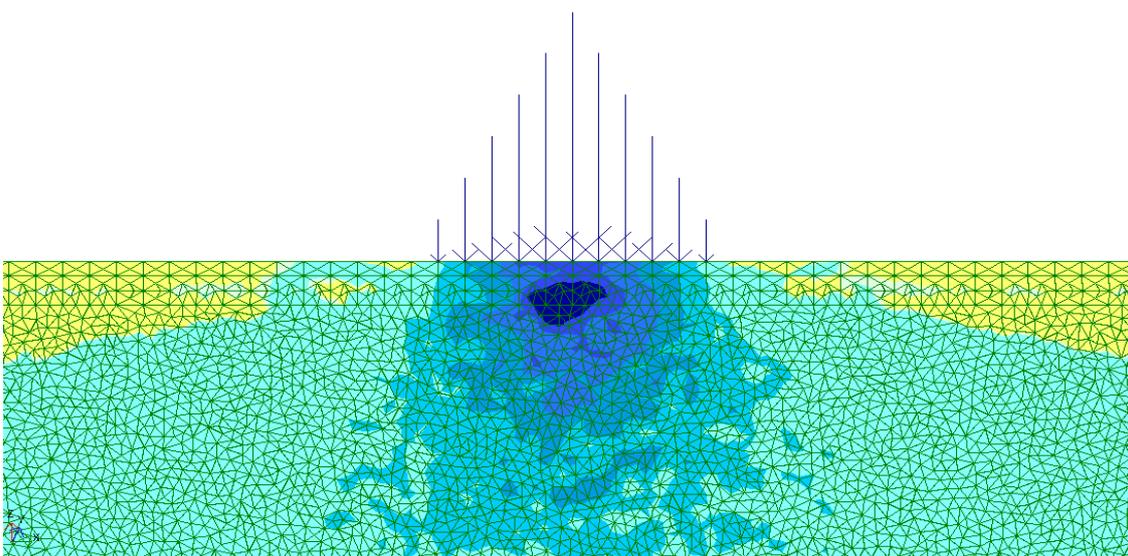
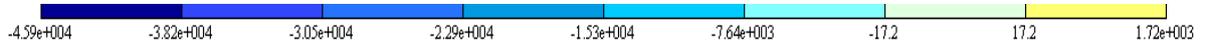


b)

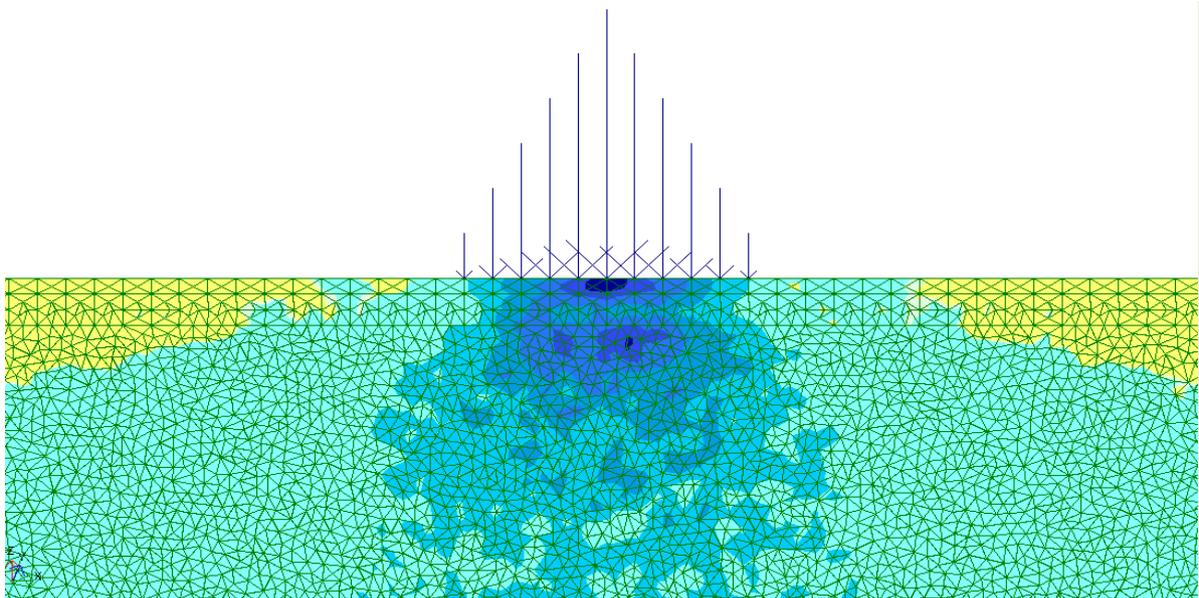


в)

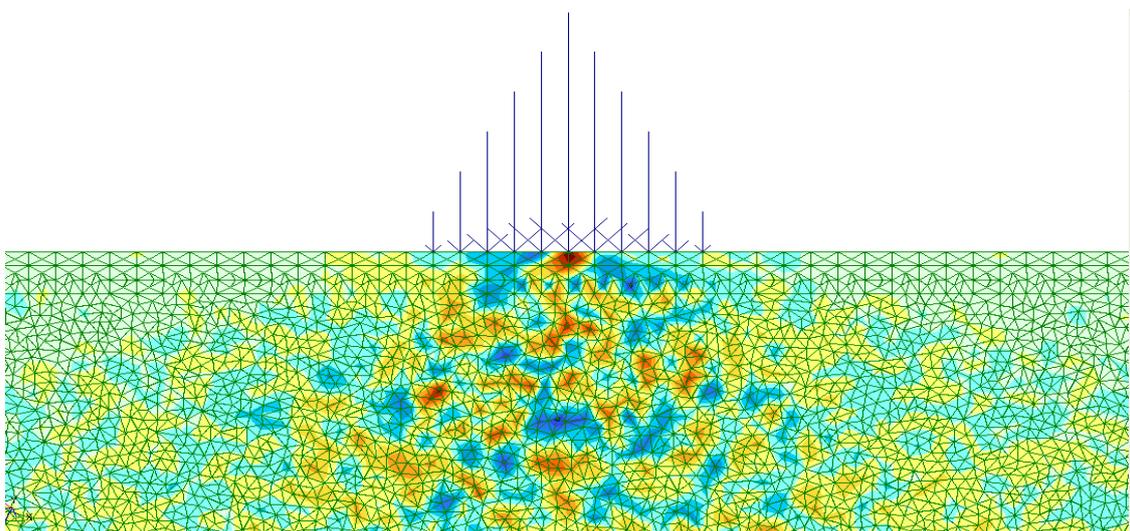
Рис.4.3 а,б,в. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца от неравносторонней треугольной нагрузки в линейно-деформированном слое для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



а)

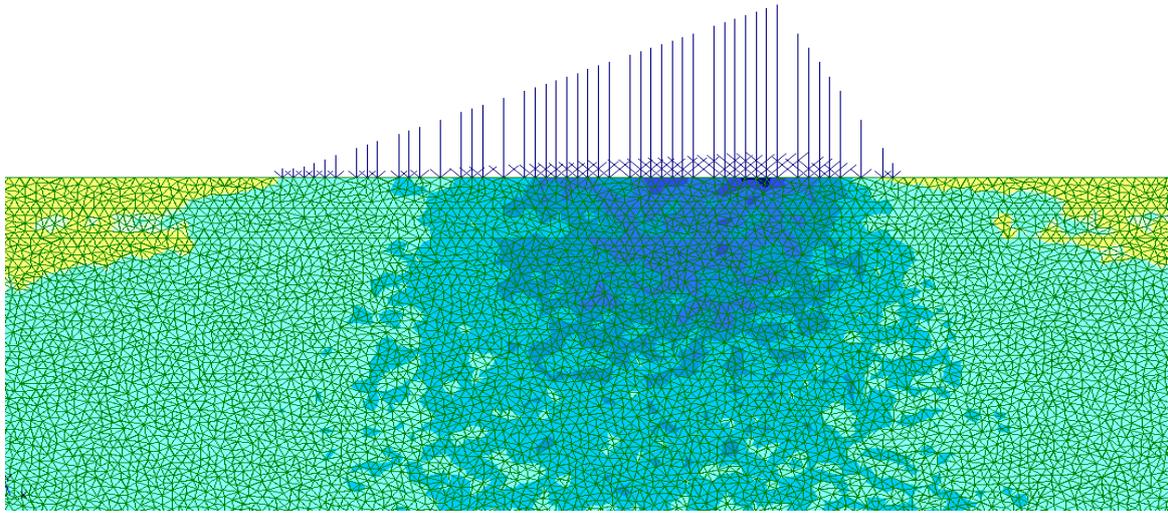


б)

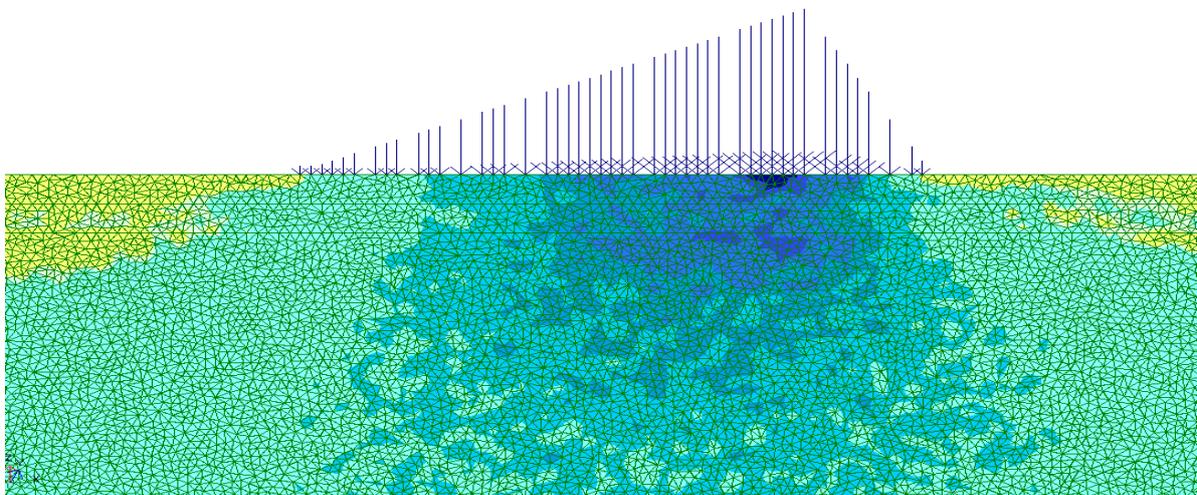
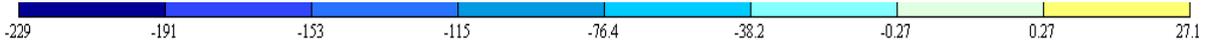


в)

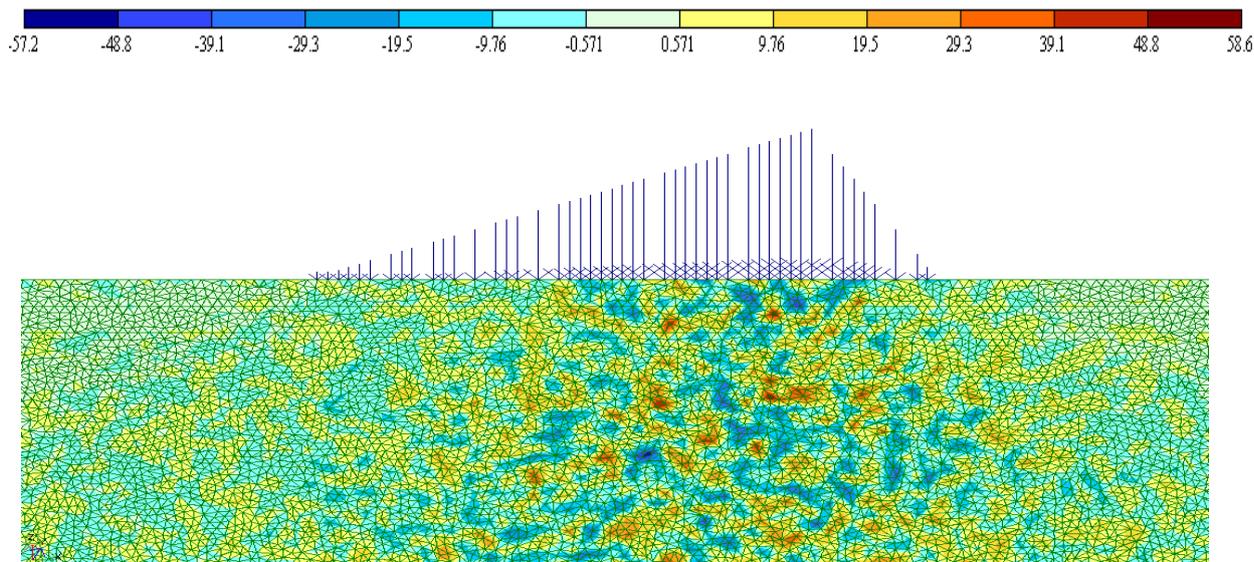
Рис.4.4 а,б,в. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца от равносторонней нагрузки для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$



a)



b)



в)

Рис.4.5 а, б, в. Изополя составляющих напряжений в вертикальных сечениях образца от неравносторонней нагрузки для а)  $\sigma_x$ ; б)  $\sigma_z$ ; в)  $\tau_{xz}$

Полученные данные экспериментального исследования, указанные на рис.4.1-4.5 позволяют обосновать результаты напряженно- деформированного состояния на моделях для заданных грунтовых сред :

- полученные экспериментальные результаты показали, что в моделях максимальное значение напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$ , а также касательное напряжение  $\tau_{xz}$  имеет максимальное значение в точках под распределенной нагрузкой. По мере удаления точек сечения вглубь образца, характер напряжения остаётся прежним, а величина падает;

- зоны с максимальным значением  $\sigma_z$  проходят близко к центру тяжести треугольных нагрузок, далее напряжение с глубиной модели начинает уменьшаться;

-зоны с максимальным значением  $\sigma_x$  проходят близко к центру тяжести всех нагрузок, в нижней части для равносторонней и неравносторонней треугольных нагрузок напряжение начинает умеренно уменьшаться, где-то с глубиной модели на 1-2% через 3 мм по вертикальным сечениям и принимает минимальное значение;

-области с максимальным значением касательных напряжений  $\tau_{xz}$  для равнобедренной и неравносторонней нагрузок расположены близко к центру тяжести модели, далее величина напряжения падает и принимает минимальное значение в нижней части модели.

Исследование напряжённого состояния численным методом при упругопластической реакции среды показало усложнение картин распределения напряжений, при котором происходит появление областей развития пластических деформаций, соответствующему условию:  $P_{стр} < P < P_{кр}^{нач}$ , т.е. нарушение предельного состояния не наблюдается.

Исследование моделей слоистых грунтов численным методом при заданных физико-механических характеристиках и приложенных внешних нагрузках подтвердило начало развития упругопластических областей на определённых глубинах полупространства.

## ВЫВОДЫ КО 2-й ЧАСТИ

Исследование методических вопросов по применению метода гамма – излучение для изменений плотности глинистых грунтов позволяет заключить следующее.

1. Проведено усовершенствование метода гамма – лучей для измерения плотности глинистого грунтов. В результате теоретических и экспериментальных исследований достигнута точность определения абсолютных значений плотности, равная 1-1,5%.

2. В отличие от других методов измерений плотности грунтов метод гамма – излучений позволяет решать ряд вопросов по исследованию развития пластических деформаций в связных грунтах.

3. Величина массового коэффициента ослабления зависит от химического состава глинистых грунтов. Определение плотности грунтов с точностью выше 1,5% требует для каждого исследуемого грунта определять свое значение  $\mu_m$ .

4. Увеличение влажности грунтов приводит к возрастанию массового коэффициента ослабления. Пренебрежение разницей в массовых коэффициентах ослабления для грунта и воды приводит к завышению плотности на  $0,12 \text{ г/см}^3$ , объемной влажности, величины завышения метода гамма – излучения в 2, 5-3, 5 раза.

5. Выполненное исследование на моделях с использованием двух методов даёт всестороннюю оценку напряжённо - деформированного состояния грунтовой среды. Поэтому при анализе напряженного состояния для конкретной модели можно в равной степени использовать тот и другой метод, делая выбор в пользу наиболее удобного для конкретной ситуации.

6. Исследование напряжённого состояния методом конечных элементов при упругопластической реакции среды показало усложнение картин распределения напряжений, в виде появления областей развития пластических деформаций.

Полученные аналитические и экспериментальные методики изучения слабых грунтов быть использованы при решении практических задач на конкретных примерах в строительстве.

## **Часть 3**

# **ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ ОТ ДЕЙСТВИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ**

## Глава 1

# ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ ПОД ФУНДАМЕНТАМИ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

В данной главе работы выполненное исследование направлено на решение основной проблемы, стоящей при изучении оснований расчетно-конструктивных решений по устройству взлётно-посадочных полос (ВПП), отвалов сырья химической промышленности и торфяных насыпей, оснований стальных резервуаров на участках залегания слабых водонасыщенных грунтов.

Принцип и конкретное решение задач исследования выбрано на основе технико-экономического сравнения вариантов с учётом:

- требуемой высоты насыпи и качества имеющего для ее отсыпки грунта;
- вида и особенностей свойств слабых грунтов, залегающих на участке, и особенностей строения слабой толщи, наличие переслаивания, уклон кровли подстилающих пород и т.д.

При этом в основу анализа положены следующие мероприятия: использование слабого грунта в качестве основания с применением расчётов по проверке устойчивости и надёжности оснований.

### 1.1. Исследование критического усилия основания взлётно-посадочной полосы (ВПП)

Настоящие технические решения разработаны на основе инженерно-геологических данных и общих параметров взлётно-посадочных полос и их обочин. Одной из основных особенностей ВПП является то, что взлётное поле расположено на значительном протяжении на слабых грунтах. С точки зрения обеспечения безопасности и регулярности полётов воздушных судов в соответствии с [17], [65] идеальной является ВПП с горизонтальной поверхностью. Взлётная полоса имеет боль-

шую длину, и её строительство может быть связано с устройством выемки и перемещением больших объёмов земляных масс. Для обеспечения приемлемой безопасности выполнения взлётно-посадочных операций продольные уклоны ВПП по возможности должны быть минимальными, а их изменений следует избегать. На основании [17], [65] максимально допускаемые продольные уклоны ВПП обычно составляют 1,25-1,5%.

В соответствии с имеющимися данными характеристика толщи слабого грунта под взлётное поле указана в таблице 1.1.

Таблица 1.1.

Геотехнические характеристики грунтовой толщи

№ слоя	Наименование грунта	Мощность слоя, м	Расстояние от поверхности земли до подошвы слоя, м
1	Насыпной грунт	3	3
2	Водный слой	0,3	0,3
3	Суглинок мягкопластичный	9	12,3

\*Почвенно-растительный слой толщ. 0,2 - 0,3 м срезается и в расчётах не учитывается.

Физические характеристики грунтового полупространства приведены в таблицах 1.1 и 1.2.

Таблица 1.2.

Физико-механические характеристики грунтового полупространства

Порода	Удельный вес грунта $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °	Удельное сцепление $C$ , кПа	Модуль деформации $E$ , МПа	Макс. глубина крит. усилия $z_{крит}$ , М
Суглинок мягкопластичный	17,05	13	14	8,7	8,7

Поперечный профиль взлётно-посадочной полосы представлен на рис. 1.1.

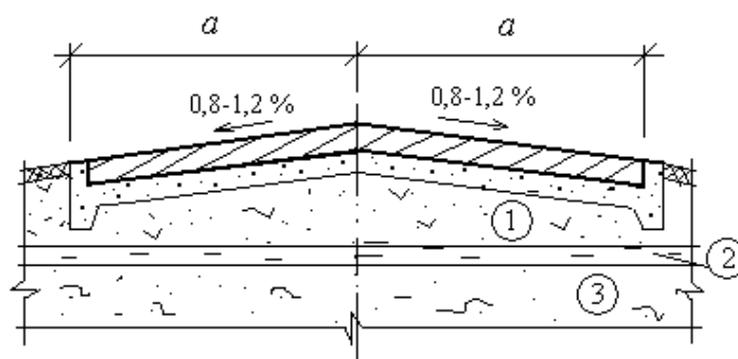


Рис. 1.1. Двухскатный поперечный профиль взлётно-посадочной полосы

\*Наименование грунтов для слоёв 1, 2 и 3 указаны в таблице 1.1.

Выполнение геотехнических расчётов целесообразно провести для нескольких расчётных случаев, то есть для насыпей ВПП высотой 2, 3, 4 и 5 м. При этом в соответствии с [17], [65] на рис. 1.1 ширина взлётно-посадочной полосы составляет  $a + a = 75$  м, уклоны покрытия двухскатного поперечного профиля полосы составляют 0,8 -12%.

Покрытие ВПП состоит: из слоя асфальтобетона  $\gamma = 24$  кН/м<sup>3</sup> толщ. 0,1м, из слоя щебня  $\gamma = 13,6$  кН/м<sup>3</sup>, фракционированного, обработанного вязким битумом толщ. 0,15 м и подстилающего слоя щебня  $\gamma = 13,9$  кН/м<sup>3</sup> толщ. 0,25м. Толщина подстилающего слоя меняется в зависимости от высоты насыпи. Расчётная нагрузка на основание взлётной полосы высотой  $h = 2-5$ м указана в табл.1.3.

Расчёт устойчивости взлётной полосы выполнен на основании формул, полученных в Главе 1.

Результаты расчётов устойчивости взлётной полосы в зависимости от высот  $h = 3-5$ м указаны в таблице 1.3.

Таблица 1.3.

Результаты полученных исследований

Насыпные конструкции взлётно-посадочных полос $h$ , м	$\alpha$	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
2	154 <sup>0</sup>	8,7	0,184	1,66
3			0,203	
4			0,221	
5			0,240	

При высоте насыпных конструкций взлётно-посадочных полос  $h = 2-5$  м устойчивость основания является достаточной и специальных мер по его усилению не требуется.

## 1.2. Исследование критического усилия в основании насыпей, состоящих из отвалов продуктов переработки химической промышленности

Насыпь представляет собой отвал продукта химической промышленности – шлама, предназначенного для дальнейшей переработки и производства готовой продукции.

В основу анализа насыпи входят следующие мероприятия:

- проверка устойчивости и надежности основания с использованием формул критических нагрузок, полученных в Главе 3 части 1.

Поперечный профиль насыпи указан на рис. 1.2.

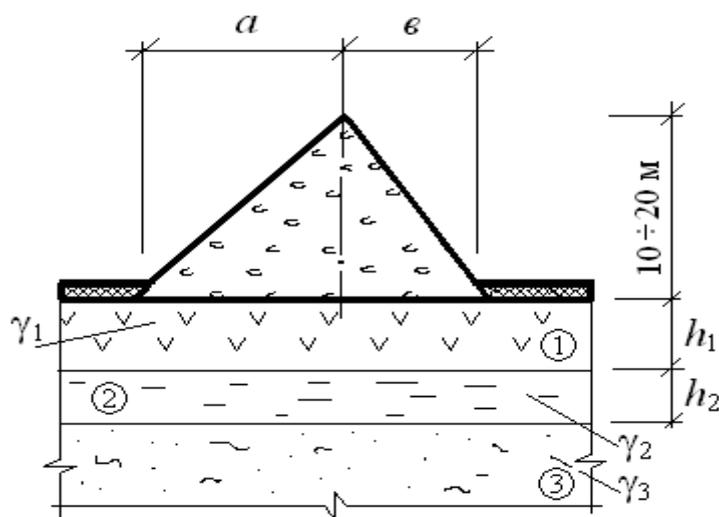


Рис. 1.2. Схема насыпи отвала продукта химической промышленности

Физические характеристики грунтового полупространства приведены в таблицах 1.4 и 1.5.

Таблица 1.4.

## Геотехнические характеристики грунтовой толщи

№ слоя	Наименование грунта	Мощность слоя, м	Расстояние от поверхности земли до подошвы слоя, м
1	Насыпной грунт	1	1
2	Водный слой	0,4	1,4
3	Суглинок мягкопластичный	9	10,4

\*Почвенно-растительный слой толщ. 0,2 - 0,3 м срезается и в расчётах не учитывается.

Таблица 1.5.

## Физико-механические характеристики грунтового полупространства

Порода	Удельный вес $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °	Удельное сцепление $C$ , кПа	Модуль деформации $E$ , МПа	Макс. глубина крит. усилия $z_{\text{макс}}$ , м
Текуче-пластичный суглинок	18,06	17	14	2,7	8,7

Расчётное давление на основание насыпи высотой  $h = 10$  м. [66], равно:

$$P^{\text{расч}} = 1,2P + 1,4 P_{\text{сн}} = 1,2 \cdot 16 + 1,4 \cdot 1,8 = 21,72 \text{ кН/м}^2 = 0,022 \text{ МПа},$$

где  $P = 16 \text{ кН/м}^2$  – нормативная нагрузка от насыпи отвала продукта переработки  $h = 10$  м,  $P_{\text{сн}} = 1,8 \text{ кН/м}^2$  – нормативная снеговая нагрузка.

Расчётная схема от неравносторонней треугольной нагрузки указана на рис.1.3.

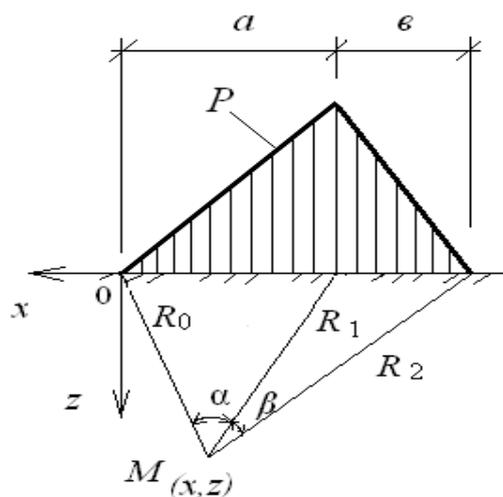


Рис.1.3.Расчётная схема от неравносторонней треугольной нагрузки на грунтовое полупространство

Расчёт устойчивости насыпи выполнен на основании формул, полученных во второй главе. Угол видимости  $\alpha$  получим из выражений Гл. 3 ч. 1:

$$\begin{aligned} \cos \frac{2}{3} \alpha &= \frac{11,34}{0,36 \cdot 12} \sin 17^\circ = 0,811; & 0,811 &= \cos \frac{2}{3} \alpha; \\ 0,811 &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \alpha\right); & 54^\circ &= 90^\circ - \frac{2}{3} \alpha; & \frac{2}{3} \alpha &= 36^\circ; \\ \alpha &= \frac{36^\circ \cdot 3}{2} = 54^\circ. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Максимальная глубина развития критического усилия равна

$$z_{\text{макс}} = \frac{12}{\text{tg } 54^\circ} = 8,7 \text{ м}. \quad (1.2)$$

Угол видимости  $\beta$  найдём из выражения

$$\text{tg } \beta = \frac{e}{z_{\text{макс}}} = \frac{10}{8,7} = 1,5; \quad \beta = 49^\circ.$$

Критическая нагрузка равна (2.117) Гл. 3, ч. 1:

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\} = \frac{-3244605,01}{2 \cdot (-21,84)} \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{4 \cdot 21,84 \cdot 2657205,6}{(3244605,01)^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\} =$$

$$= 0,82 \text{ кН/м}^2 = 0,0008 \text{ МПа}, \quad (1.3)$$

где

$$M = \frac{0,88}{\sin \varphi} \left[ (0,96 - \sin \varphi) \left( \varepsilon \ln \frac{R_1}{R_0} + a \ln \frac{R_1}{R_2} \right) + 0,4(\varepsilon \alpha - a\beta) \right] = \frac{0,88}{0,292} \left[ (0,96 - \right.$$

$$\left. - 0,292) \left( 10 \ln \frac{8,7}{14,82} + 12 \ln \frac{8,7}{13,25} \right) + 0,4(10 \cdot 0,942 - 12 \cdot 0,855) \right] =$$

$$= 3,01 \cdot [0,668 \cdot (-10,36) - 0,336] = -21,84 ;$$

$$N = -\left\{ 0,88 \pi a \varepsilon \gamma_3 + \frac{C_z a \varepsilon}{(a + \varepsilon)} [\varepsilon x \alpha + a(a + \varepsilon - x)\beta] \right\} = -\left[ 0,88 \cdot 120 \cdot 3,14 \cdot 18,06 + \right.$$

$$\left. + \frac{2746,41 \cdot 120}{22} (106,82 + 109,37) \right] = -(5988,41 + 3238616,6) = -3244605,01;$$

$$L = \frac{\pi a \varepsilon C_z}{(a + \varepsilon)} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \operatorname{ctg} \varphi] = \frac{3,14 \cdot 2746,41 \cdot 120}{22} (15,5 \cdot 1 + 10,3 \cdot 0,4 -$$

$$- 18,06 \cdot 1,4 + 14 \cdot 4,33) = 47038,513 \cdot 56,49 = 2657205,6.$$

Численные результаты представлены в таблице 1.6.

Таблица 1.6.

Результаты расчётов физических и силовых характеристик на  
грунтовое полупространство

Складирование сырья высотой $h$ , м	$\alpha / \beta$	$z_{\max}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
10	54 <sup>0</sup> /49 <sup>0</sup>	8,7	0,022	0,0008
12			0,026	
16			0,035	
20			0,044	

При высоте насыпи сырья  $h = 10-20$  м устойчивость насыпи не обеспечена, т. к.  $P_{кр} < P_{расч}$ , поэтому требуются специальные меры по повышению устойчивости основания.

### 1.3. Исследование критического усилия основания стального резервуара

В зависимости от чувствительности к деформациям основания всех сооружений условно разделяются на три основных типа: абсолютно гибкие, абсолютно жёсткие и конечной жёсткости. Сооружения, относящиеся к абсолютно гибким, беспрепятственно следуют за перемещениями поверхности грунтов основания во всех точках контакта так, что дополнительных усилий при развитии неравномерных осадок в их конструкциях практически не возникает. Даже значительная неравномерная осадка для них не является опасной. К типу таких сооружений относятся днища вертикальных металлических резервуаров, которые без ущерба для прочности могут получать большой прогиб (рис. 1.4) при заполнении их водой.

В основу исследования положены следующие мероприятия: использование слабого грунта в качестве основания с применением расчётов по проверке устойчивости и надёжности грунта.

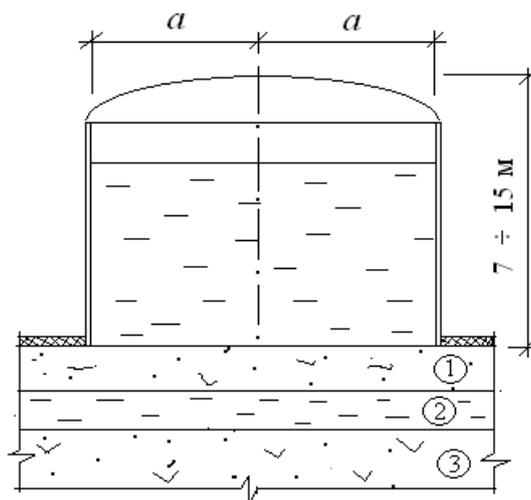


Рис. 1.4. Схема стального цилиндрического резервуара.

\* Наименование грунтов для слоёв 1,2 и 3 указано в таблице 1.4

Грунты, залегающие под резервуаром указаны в таблице 1.7.

Таблица 1.7.

Геотехнические характеристики грунтовой толщи

№ слоя	Наименование грунта	Мощность слоя, м	Расстояние от поверхности земли до подошвы слоя, м
1	Насыпной грунт	1	1
2	Водный слой	0,8	1,8
3	Мягкопластичные суглинки с участками торфяных залежей	8	9,6

\*Почвенно-растительный слой толщ. 0,2 - 0,3 м срезается и в расчётах не учитывается.

В качестве расчётных геотехнических характеристик слабого грунтового слоя приняты значения, указанные таблице 1.8.

Таблица 1.8.

Физико-механические характеристики грунтового полупространства

Порода	Удельный вес $\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	Угол внутреннего трения $\varphi$ , °	Удельное сцепление $C$ , кПа	Модуль деформации $E$ , МПа	Коэф. упругого полупространства $C_z$ , МПа
Мягко-пластичные суглинки с участками торфяных залежей	16,05	14	12	13,2	13,43

Расчётное давление на основание резервуара, наполненного водой равно:

$$P^{\text{расч}} = 1,2P + 1,4 P_{\text{сн}} = 1,2 \cdot 180 + 1,4 \cdot 1,8 = 218,52 \text{ кН/м}^2 = 0,22 \text{ МПа}, \quad (1.19)$$

где  $P = 180 \text{ кН/м}^2$  – нормативная нагрузка от конструкций резервуара  $h = 7 \text{ м}$ , с учётом воды,  $P_{\text{сн}} = 1,8 \text{ кН/м}^2$  – нормативная снеговая нагрузка.

В основу расчётной схемы предложена модель грунта в виде линейно-деформированного слоя (рис.1.5).

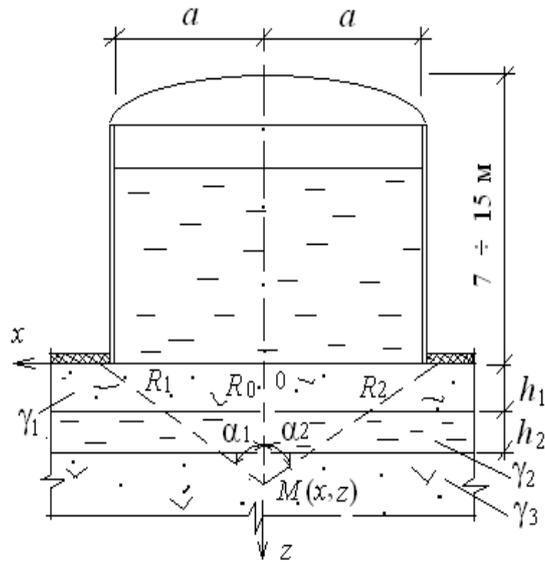


Рис. 1.5. Расчётная схема от прогиба дна  
стального резервуара

Критическую нагрузку найдём по формуле (2.106)

$$P_{кр} = \frac{N}{2M} \left\{ - \left[ \left( 1 - \frac{4ML}{N^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\} = \frac{-34615,61}{2 \cdot 12,13} \left\{ - \left[ \left( 1 + \frac{4 \cdot 12,13 \cdot 2280392,27}{1198240456} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\} =$$

$$= 2917,37 \text{ кН/м}^2 = 2,92 \text{ МПа},$$

(1.4)

где

$$M = \frac{1,76}{\sin \varphi} [(0,96 - \sin \varphi) \ln \frac{R_1 R_2}{R_0^2} + 0,4(\alpha_1 - \alpha_2)] =$$

$$= \frac{1,76}{0,242} [(0,96 - 0,242) \ln \frac{10,53 \cdot 10,53}{10,89} + 0,4 \cdot 0] = 12,13;$$

$$N = - \left\{ C_z [(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{x}{a} (\alpha_1 - \alpha_2)] + 1,76 \pi a \gamma_3 \right\} = 13427(2,512 + 0) +$$

$$+ 1,76 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 16,05 = -34615,61;$$

$$L = -\pi C_z [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 (h_1 + h_2) + C \text{ ctg } \varphi] = -3,14 \cdot 13427(15,05 \cdot 1 + 10,3 \cdot 0,8 -$$

$$- 16,05 \cdot 1,8 + 12 \cdot 4,011) = 2280392,27.$$

(1.5)

Результаты, полученных исследований, указаны в таблице 1.9.

Таблица 1.9.

Результаты расчётов физических и силовых характеристик на  
грунтовое полупространство

Металлический резервуар с водой $h$ , м	$\alpha, ^\circ$	$z_{\text{ макс,}}$ м	$P_{\text{ расч,}}$ МПа	$P_{\text{ кр}}$ МПа
7	144	3,3	0,22	2,92
9			0,28	
11			0,34	
15			0,47	

При высоте резервуара с водой  $h = 7-15$  м устойчивость основания является достаточной и специальных мер по повышению устойчивости не требуется.

Критерием устойчивости послужило неравенство  $P_{\text{ РАСЧ}} < P_{\text{ КР}}$ . Расчёт критического давления от действия треугольных нагрузок выполнен с использованием аналитических выражений, полученных в Главе 3 части 1. В тех случаях, где условие устойчивости сооружений не соблюдалось, необходимо производить технические мероприятия, связанные с усилением грунтовых оснований.

## Глава 2

### ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ В ОСНОВАНИЯХ НАСЫПЕЙ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

В данной главе работы выполненное исследование направлено на решение основной проблемы, стоящей при изучении оснований расчетно-конструктивных решений по устройству земляного полотна и отвалов торфяных насыпей на участках залегания слабых грунтов.

В соответствии с этим нами были рассмотрены следующие вопросы:

- разработка теоретических решений по улучшению инженерно-геологического обеспечения при изучении оснований;
- выполнение геотехнических исследований, необходимых для количественной оценки конструктивных вариантов строительства земляного полотна на участках слабых грунтов;
- разработка специальных схем и методики расчета конструкций на слабых основаниях.

В этом случае имеющиеся методические документы по строительству земляного полотна на слабых грунтах не ориентированы на такие условия строительства, что часто требует оперативного решения многих практических вопросов на стадии изучения.

Вместе с тем здесь приводятся новые решения и методики, которые могут, несмотря на их приближенность в дальнейшем использоваться для уточнения теоретических положений на стадии изучения оснований.

## **2.1. Существующие методы исследования насыпей**

К насыпям на слабых основаниях предъявляются следующие дополнительные требования [67]:

- должна быть обеспечена устойчивость основания, т.е. должно быть исключено боковое выдавливание слабого грунта из-под насыпи;
- должна быть обеспечена стабильность основания, т.е. интенсивная часть осадки должна завершиться до устройства покрытия (исключение допускается при применении сборных покрытий в условиях двухстадийного строительства);
- за завершение интенсивной части осадки допускается принимать момент достижения 90% консолидации основания или интенсивности осадки не более 2см/год при капитальных дорожных одеждах и 80% консолидации или интенсивности осадки не более 5см/год при одеждах облегченного типа;
- упругие колебания земляного полотна при движении транспортных средств не должны превышать значения, допускаемого для данного типа покрытия (для насыпей на торфяных основаниях).

При расчете устойчивости насыпи [68] определяется коэффициент безопасности:

$$K_{\text{без.}} = P_{\text{без.}} / P_{\text{расч.}}, \quad (2.1)$$

где  $P_{\text{без.}}$  – безопасная нагрузка на основание;  $P_{\text{расч.}}$  – расчетная нагрузка на основание.

Безопасная нагрузка равна [68]:

$$P_{\text{без.}} = \left[ \frac{C + \gamma Z \operatorname{tg} \varphi}{\beta} \right] \min + q, \quad (2.2)$$

где  $C$  и  $\varphi$  – расчётные значения сцепления и угла внутреннего трения слабого грунта на расчётном горизонте  $z$ ;  $\gamma$  – удельный вес грунта слабой толщи;

$\beta$  – функция глубины расположения расчётного горизонта  $z$ , геометрических параметров насыпи и расчётного угла внутреннего трения грунта основания;

$q$  – расчётная нагрузка на толщу от боковых пригрузочных призм при их наличии.

При исследовании откосов насыпи выполняется расчёт его общей и местной устойчивости. В результате нарушения общей устойчивости происходит смещение значительных по размерам массивов грунта, слагающего откос.

Нарушение местной устойчивости возникают в приоткосной зоне, непосредственно подверженной воздействию погодно-климатических факторов, вызывающих циклические процессы набухания-высушивания, промерзания, оттаивания и связанного с ними нарушения сплошности и снижения прочности грунта (выветривание). Основные формы нарушения общей устойчивости: скольжение, выдавливание, расползание.

Проверку устойчивости откоса выполняют с помощью метода круглоцилиндрических поверхностей скольжения (КЦПС) [68].

## 2.2. Исследование критических усилий основания окружной автодороги в г. Санкт-Петербурге

Настоящие технические решения разработаны на основе инженерно-геологических данных и общих параметров окружной автодороги .  
Одной из основных особенностей дорожного объекта является то, что автомобильная дорога первой технической категории, проходит на значительном протяжении по слабым грунтам, полное удаление которых ни технически, ни экономически невозможно ( рис.2.2). При этом в основу анализа автотрассы положены следующие мероприятия: использование слабого грунта в качестве основания с применением расчетов по проверке устойчивости и надежности оснований. Принцип и конкретное решение задач исследования выбрано на основе технико-экономического сравнения вариантов с учетом:

- требуемой высоты насыпи и качества имеющего для ее отсыпки грунта;
- вида и особенностей свойств слабых грунтов, залегающих на участке, и особенностей строения слабой толщи (мощность, наличие переслаивания, уклон кровли подстилающих пород и т.д.

В соответствии с имеющимися данными характеристика толщи слабого грунта указана в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

### Геотехническая характеристика слабого грунта

№ слоя	Наименование грунта	Мощность слоя, м	Расстояние от поверхности земли до подошвы слоя, м
1	Почвенно - растительный горизонт	0,3	0,3
2	Ил суглинистый, текучий с участками торфяных залежей	9	9,3

Мощность слабой толщи, складывающейся из слоя № 2 (с учётом удаления верхнего почвенно - растительного слоя 0,3 м), может оцениваться в 9 м.

Техническое решение должно предусматривать использование слабого грунта с принятием тех или иных конструктивных или организационных мер, т.к. удаление слабого грунта из основания с его заменой при мощности слабой толщи порядка 9 м ни по техническим, ни по экономическим соображениям не может считаться реальным.

Для реализации указанного пути необходимо, прежде всего, определить количественные геотехнические оценки процессов, которые могут иметь место во время возведения насыпи и в период эксплуатации дороги.

Поперечный профиль насыпи автодороги, представлен на (рис. 2.1 ).

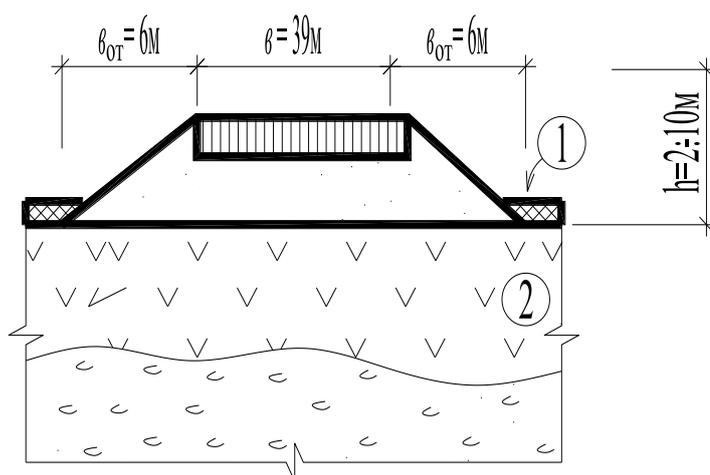


Рис. 2.1. Схема насыпи автодороги.

\*Наименование грунтов для слоёв 1 и 2 указано в таблице 2. 1.

Выполнение геотехнических расчётов целесообразно провести для нескольких расчётных случаев, то есть для насыпей, высотой 2, 3,6 и 10 м. При этом в соответствии с рис. 2.1 ширина верхней части насыпи составляет  $v = 39$  м, ширина откосов насыпи  $v_{от} = 6$  м с углом наклона  $\alpha = 20 - 45^\circ$ .

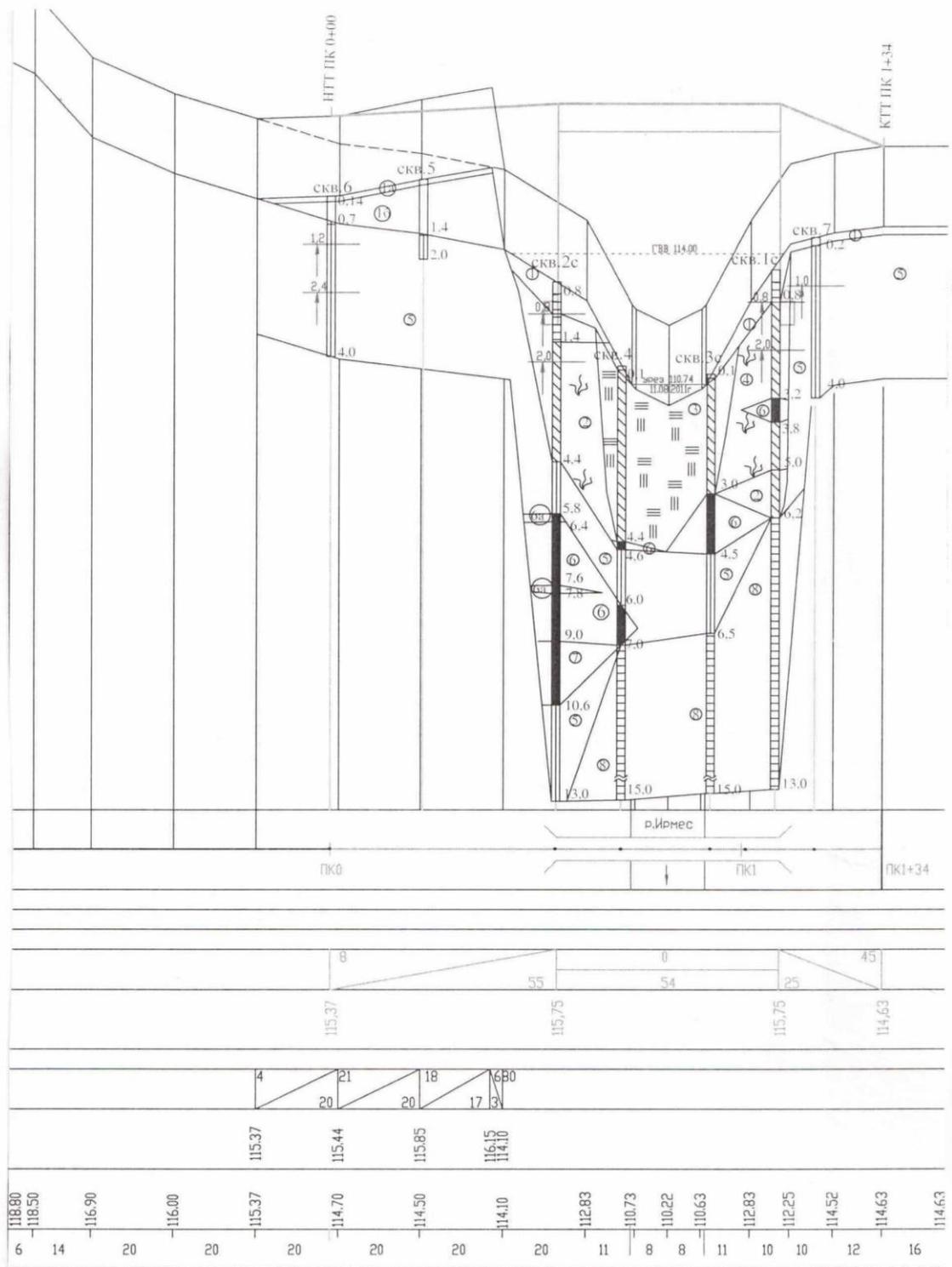


Рис. 2.2. Инженерно – геологический разрез окружной автодороги г. Санкт-Петербурга

Покрытие автодороги состоит из асфальтобетона  $\gamma = 0,024$  МПа/м толщиной 1,5м, подстилающего слоя – песка с  $\gamma = 0,02$  МПа /м. Толщина подстилающего слоя меняется в зависимости от высоты насыпи. Расчётное давление на основание от откоса высотой  $h = 2-10$  м дороги равно [66]

$$P^{\text{расч}} = 1,2P + 1,2P_{\text{тр}} + 1,4$$

где  $P = \gamma \cdot h$  – нагрузка от откоса, принимаемая в зависимости от высоты насыпи;  $P_{\text{сн}} = 0,001$  МПа /м снеговая нагрузка;  $P_{\text{тр}} = 0,02$  МПа м – транспортная нагрузка на автотрассу;  $\kappa = 1,2$ ;  $1,4$  – коэффициенты надёжности в зависимости от нагрузки.

Учитывая генезис ила и достаточно часто встречающиеся в природном залегании значения физико-механических характеристик суглинистого ила, можно предположить, что индекс пластичности ила не будет превышать 1,5 - 2,5. При этом допущении значение геотехнических характеристик ила можно назначить, опираясь на данные таблицы 6 [64]. В соответствии с изложенным, в качестве расчетных приняты значения геотехнических характеристик, представленных в табл.2.1. Слой №1 удаляется и в расчётах не учитывается.

Таблица 2.2.

Геотехнические характеристики слабого грунта в основании насыпи

№ слоя	Наименование грунта	Сдвиговые характеристики		Удельный вес $\gamma$ , МПа /м	Модуль деформации $E$ , МПа
		$C$ , МПа	$\varphi$ , <sup>0</sup>		
2	Ил суглинистый, текучий с участками торфяных залежей	0,009	3	0,018	1

### 2.3. Исследование критического усилия основания откоса автомобильной дороги

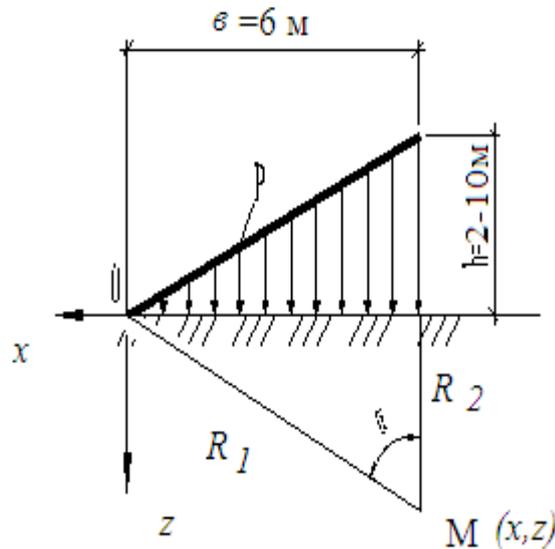


Рис.2.3. Схема действия треугольной нагрузки от откоса насыпи

Расчёт критического давления от действия треугольной нагрузки, выполнен с использованием формул, полученных в 1 части. Действие треугольной нагрузки откоса представлено на рис. 2.3.

Проверим устойчивость основания под откосами. Угол видимости получим из выражения (2.10) Гл.1, ч.2:

$$\alpha = \frac{3}{2} \left( \arccos \frac{x}{0,355b} \sin \varphi \right) = \frac{3}{2} \left( \arccos \frac{4}{0,355 \cdot 6} \sin 3^\circ \right) = 126^\circ$$

$$\alpha = 126^\circ . \quad (2.3)$$

Максимальную глубину залегания найдём через рекуррентные формулы краевых задач [70]

$$\begin{cases} z - z_1 = (x - x_1) \operatorname{tg}(90^\circ - \varepsilon_1) \\ z - z_2 = (x - x_2) \operatorname{tg}(90^\circ + \varepsilon_2) \end{cases} \quad \begin{cases} z = x \operatorname{tg}(90^\circ - 75^\circ) \\ z = (x - 6) \operatorname{tg}(90^\circ + 51^\circ) \end{cases}$$

$$z = 0,27x ;$$

$$0,27x = -1,15x + 6,9$$

$$z = (x - 6)(-1,15)$$

$$1,42x = 6,9$$

$$x = 4,9 \text{ м}$$

$$z = 4,9 \cdot 0,27 = 1,32$$

$$z_{\max} = 1,32 \text{ м.}$$

(2.4)

Критическую нагрузку определим по формуле (2.13) Гл.1, ч.2:

$$\begin{aligned} P_{\text{кр}} &= \frac{\pi(\gamma \cdot z_{\max} \sin \varphi + C \cdot \cos \varphi)}{\frac{z_{\max}}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \varphi) - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \varphi + 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha} = \\ &= \frac{3,14 \cdot (17,9 \cdot 0,052 \cdot 1,32 + 9 \cdot 1)}{\frac{1,32}{6} (-0,127)(0,71 - 0,052) - 2 \cdot 0,67 \cdot 2,2 \cdot 0,052 + 0,71 \cdot 1} = 0,06 \text{ МПа,} \end{aligned}$$

(2.5)

где  $R_1 = \sqrt{4^2 + 1,32^2} = \sqrt{17,742} = 4,2$ ,

$$R_2 = \sqrt{2^2 + 1,32^2} = \sqrt{5,742} = 2,4 \text{ м,}$$

$$\ln \frac{2,4^2}{4,2^2} = \ln \frac{5,742}{17,742} = \ln 0,324 = -0,127.$$

Полученные результаты занесены в таблицу 2.3

Таблица 2.3.

Расчётные данные критического усилия и максимальной глубины залегания в зависимости от высоты насыпи

Откос авто- трассы высотой $h$ , м	$\alpha, ^\circ$	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
2	126	1,32	0,05	0,06
3			0,062	
6			0,09	
10			0,133	

При высоте откосов  $h = 2 - 3$  м устойчивость основания представляется достаточной, и специальных мер по выполнению устойчивости не требуется. При высоте насыпи откосов более 3 м требуются меры по повышению устойчивости основания. При этом принимаемые технические решения по своим параметрам могут быть дифференцированы в зависимости от высоты насыпи откоса.

Для повышения устойчивости насыпи автодороги высотой более 3 метров было предусмотрено устройство грунтоцементных свай, заложённых в основании.

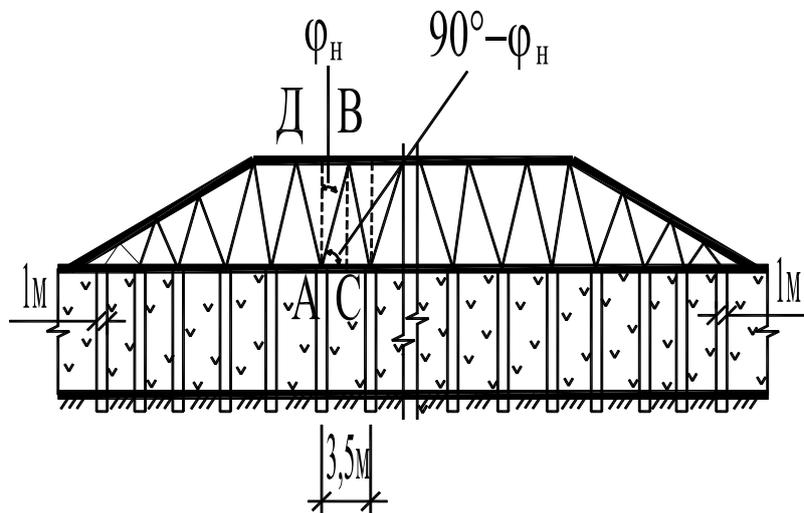


Рис. 2.4. Поперечный разрез насыпи на свайном основании

Проверка устойчивости основания при различных диаметрах свай и шаге между ними показала, что необходимому условию прочности отвечает свайное основание у которого диаметр свай равен 1 м с расстоянием между ними 3,5 м (рис. 2.4).

Механизм работы насыпи сводится к следующему: в результате деформаций, возникающих в насыпном слое под влиянием осадки слабого грунта возникает арочный эффект, приводящий к распределению напряжений от веса насыпного грунта между сваями и слабым грунтом. Слабый грунт в межсвайном пространстве оказывается под воздействием нагрузки от веса призмы под аркой.

#### 2.4. Исследование влияния критического усилия уплотнения грунта в межсвайном пространстве

Проверим устойчивость основания насыпи в промежутке между сваями от треугольной нагрузки грунта (треугольник ABC) (рис.2.5).

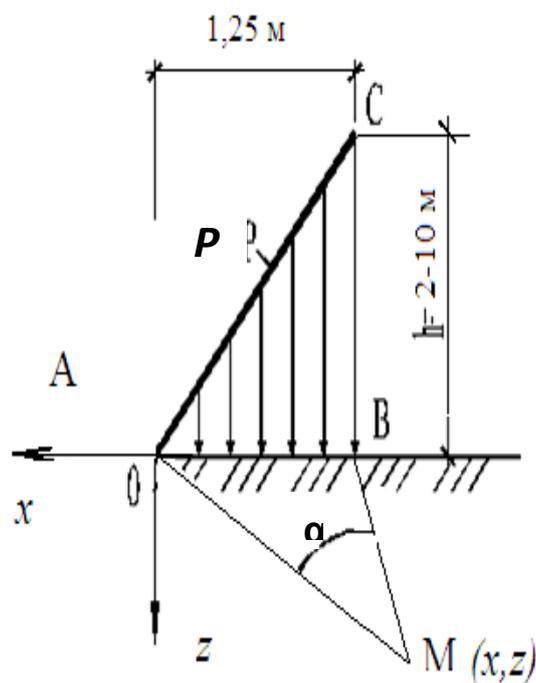


Рис. 2.5. Действие треугольной нагрузки в межсвайном пространстве

Для треугольной нагрузки угол видимости  $\alpha = 126^\circ$  (см. данные расчёта откосов). Используя рекуррентные формулы краевых задач [70], найдем максимальную глубину залегания зон предельного напряженного состояния

$$z_{\text{макс}} = 0,27 \text{ м.}$$

Расчётную несущую способность грунта основания с учётом сил трения, действующих по боковой поверхности сваи вычислим по формуле [64]

$$F_d = \gamma_c (\gamma_{cr} R \cdot A \cdot R + u \sum \gamma_{cf} \cdot f_i \cdot h_i) = 1(1,1 \cdot 0,79 \cdot 2800 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5,6) = 2389,24 \text{ кН} = 2,39 \text{ МПа}, \quad (2.6)$$

где  $\gamma_c = 1$  - коэффициент условий работы сваи в грунте;  $\gamma_{cr} = 1,1$  и  $\gamma_{cf} = 1$  - коэффициенты условий работы грунта под нижним концом и по боковой поверхности сваи;  $R = 2800 \text{ кН/м}^2$  (2800 кПа) - расчётное сопротивление под нижним концом сваи;  $A = 0,79 \text{ м}^2$  - площадь опирания сваи на грунт;  $u = 3,14 \text{ м}$  - длина наружного периметра поперечного сечения сваи;  $f_i = 5 \text{ кН/м}^2$  (5 кПа) - расчётное сопротивление  $i$ -го слоя грунта основания по боковой поверхности сваи;  $h_i = 5,6 \text{ м}$  - толщина  $i$ -го слоя грунта соприкасающегося с боковой поверхностью сваи.

Предельная несущая способность сваи в межсвайном пространстве будет равна [64]

$$N = F_d / \gamma_k = 2389,24 / 1,4 = 1706,6 \text{ кН}, \quad (2.7)$$

где  $\gamma_k = 1,4$  - коэффициент надёжности.

Тогда давление в нижней части сваи с учётом сил трения составит

$$P = 1706,6 / 0,79 = 2160,25 \text{ кН/м}^2 = 2,16 \text{ МПа}. \quad (2.8)$$

На основании формулы (2.13), полученной в Гл.1, ч.2 найдем критическое давление от треугольной нагрузки:

$$P_{кр} = \frac{3,14 \cdot (17,9 \cdot 0,052 \cdot 0,27 + 9 \cdot 1)}{\frac{0,27}{1,25}(-0,131)(0,71 - 0,052) - 2 \cdot 0,67 \cdot 2,2 \cdot 0,052 + 0,71 \cdot 1} =$$

$$= 54 \text{ кН/м}^2 = 0,054 \text{ МПа},$$

(2.9)

где  $R_1 = \sqrt{0,833^2 + 0,27^2} = \sqrt{0,7744} = 0,88 \text{ м},$

$$R_2 = \sqrt{0,417^2 + 0,27^2} = \sqrt{0,247} = 0,5 \text{ м},$$

$$\ln \frac{0,5^2}{0,88^2} = \ln \frac{0,25}{0,7744} = \ln 0,323 = -0,131 .$$

Полное критическое усилие от треугольной нагрузки с учётом давления грунта будет равна

$$P_{кр..общ} = P_{кр} + P = 54 + 2160,25 = 2214,25 \text{ кН/м}^2 = 2,214 \text{ МПа} .$$

(2.10)

Полученные расчетные данные занесены в таблицу 2. 4.

Таблица 2.4.

Расчётные данные критического усилия и максимальной глубины залегания в зависимости от высоты насыпи

Высота насыпи $h, \text{ м}$	$\alpha, ^\circ$	$z_{\text{ макс}},$ м	$P_{\text{ расч}},$ МПа	$P_{\text{ кр..общ}},$ МПа
6	126	0,27	0,084	2,214
8			0,112	
10			0,140	

$P_{\text{ расч}}$  вычислена при переменном угле внутреннего трения подстилающего слоя, т.е.  $\varphi_n = 10 - 32^\circ$ .

Вывод: прочность основания для насыпи высотой  $h = 2$  - 6 м по всем критериям обеспечена.

## **2.5. Исследование критического усилия основания насыпи автодороги Иваново – Кострома**

Формулы предельного состояния были использованы при расчёте устойчивости основания откоса насыпи автомобильной автодороги Иваново – Кострома, проектированием которой занимался ОГУП «Ивановодорпроект». Положение трассы автодороги на местности с нормальными геологическими условиями не представлялось возможным из-за густонаселённой местности, а так же земель, занятых ценными сельхозугодьями. Поэтому автомобильная дорога прошла на участках местности, где по геологическим условиям присутствуют слабые грунты, замена их практически не возможна. На фотографиях рис. 2.7 а, б, в, г указаны места для строительства авто-трассы. Геологическая схема грунтов в основании дороги представлена на рис. 2.8. Акты о внедрении результатов работы даны в Приложении.

Проверка несущей способности насыпей автодороги Иваново – Кострома выполнялась так же как и для насыпи автотрассы г. Санкт-Петербурга. Критерием устойчивости послужило неравенство  $P_{РАСЧ} < P_{КР}$ . Расчёт критического давления от действия треугольных нагрузок откоса и межсвайного пространства насыпи, выполнен с использованием аналитических выражений, полученных во 2-й главе работы.

В тех случаях, где устойчивость не соблюдалась, выполнялись необходимые технические мероприятия по усилению грунтового основания.



a)



б)



в)



г)

Рис.2.7 . Фотоизображение участков автодороги Иваново – Кострома перед началом строительства

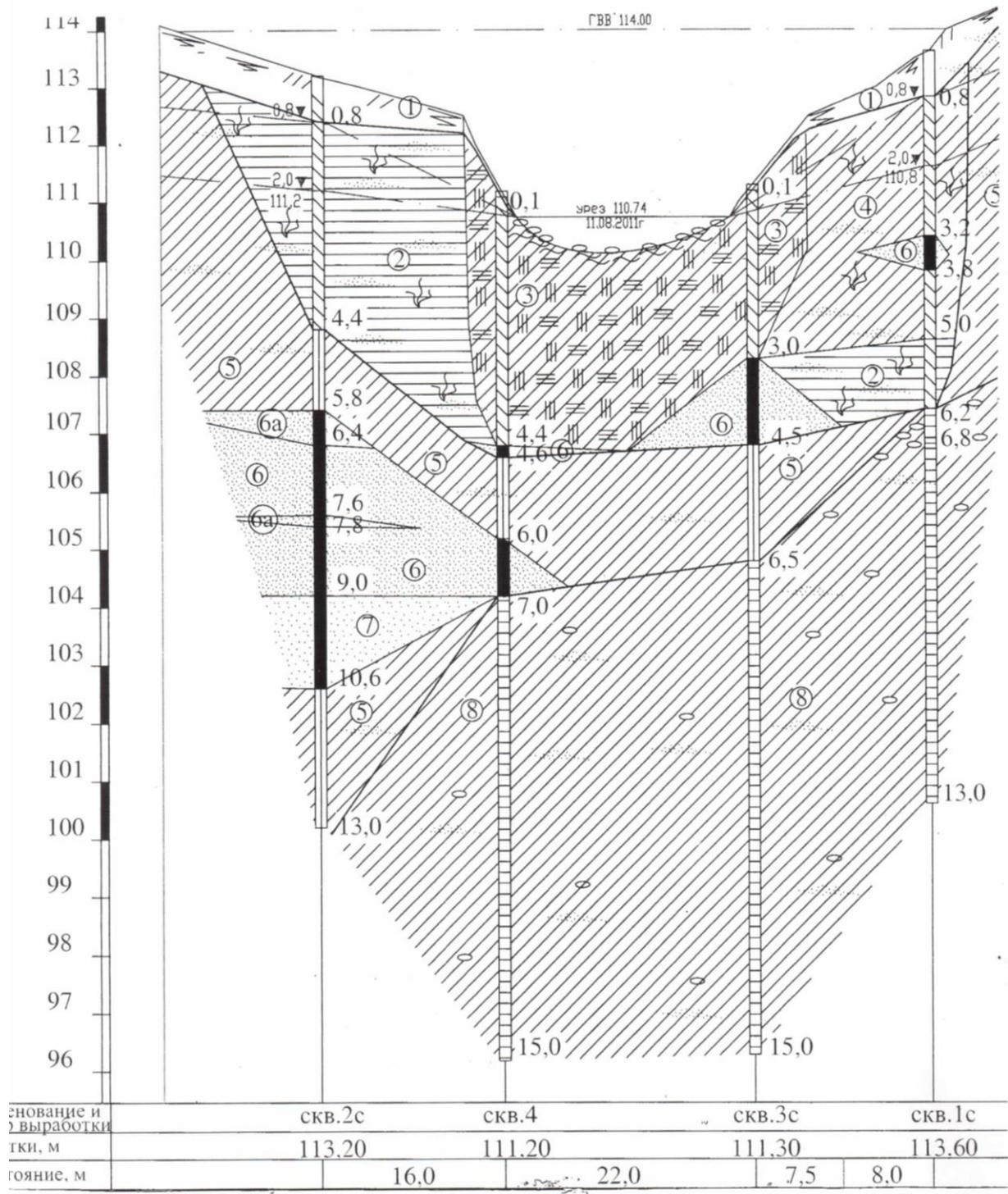
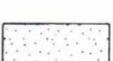
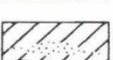
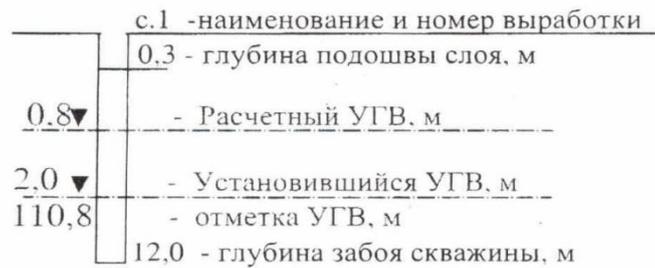


Рис.2.8. Инженерно – геологический разрез для насыпи автотрассы Иваново - Кострома

### Условные обозначения

-  ИГЭ-1 Почвенно-растительный слой
-  ИГЭ-2 Глина коричневатая-серая, мягкопластичная, с примесью органических веществ
-  ИГЭ-3 Суглинок серый мягкопластичный, слабозаторфованный, с прослоями песка
-  ИГЭ-4 Суглинок серый, мягкопластичный, с прослоями песка, с примесью органических веществ
-  ИГЭ-5 Суглинок коричневатая-серый, тугопластичный, с прослоями песка
-  ИГЭ-6,6а Песок мелкий коричневатая-серый, средней плотности (ИГЭ-6), плотный (ИГЭ-6а), насыщенный водой
-  ИГЭ-7 Песок гравелистый, коричневатая-серый, средней плотности, насыщенный водой
-  ИГЭ-8 Суглинок коричневый, полутвердый, с прослоями песка, с включением гравия



 литологическая граница  
 номер ИГЭ

консистенция	степень влажн.
полутвердый	_____
пластичная	_____
тугопластичный	_____

Рис.2.9. Условные обозначения к инженерно – геологическому разрезу автодороги

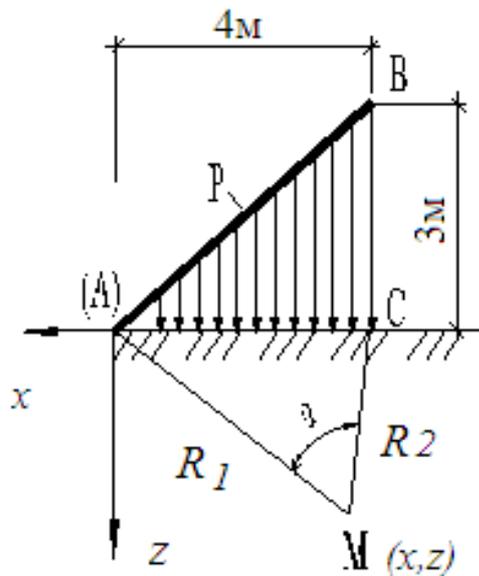


Рис. 2.10. Схема действия треугольной нагрузки откоса

Исходные данные: ширина откоса дороги составляет  $b_{от} = 4$  м, высота насыпи  $h = 3$  м, расчётная нагрузка на основание насыпи равна  $P_{расч} = 153,4 \text{ кН/м}^2 = 0,153 \text{ МПа}$ . Грунты в основании – серые суглинки, слабо-заторфованные с расчётными физическими характеристиками:  $\varphi = 18^\circ$ ,  $C = 14 \text{ кН/м}^2 = 0,014 \text{ МПа}$ ,  $\gamma = 11,5 \text{ кН/м}^3 = 0,0115 \text{ МПа/м}$ . Расчёт выполняется так же, как для насыпи автодороги с использованием формул, полученных в Гл.1, ч.2.

Угол видимости получен из выражения (2.10) Гл.1, ч.2:

$$\alpha = \frac{3}{2} \arccos\left(\frac{x}{0,355b} \sin \varphi\right) = 1,5 \arccos\left(\frac{0,67 \cdot 4}{0,355 \cdot 4} \sin 18^\circ\right) = 1,5 \arccos 0,585 = 1,5 \cdot 54 = 81^\circ;$$

$$\alpha = 81^\circ. \quad (2.18)$$

Максимальная глубина залегания вычислена через рекуррентные формулы краевых задач [70].

$$\begin{cases} z - z_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} (90^\circ - \varepsilon_1), \\ z - z_2 = (x - x_2) \operatorname{tg} (90^\circ + \varepsilon_2) ; \end{cases} \quad \begin{cases} z = x \operatorname{tg} (90^\circ - 54^\circ), \\ z = (x - 4) \operatorname{tg} (90^\circ + 27^\circ) ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 0,727 x, \\ z = -1,963 (x - 4) ; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2,92, \\ z_{\max} = 2,12 \text{ м.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Критическую нагрузку определим по формуле (2.13) Гл.1, ч.2:

$$\begin{aligned}
P_{кр} &= \frac{\pi(\gamma \cdot z_{\max} \sin \rho + C \cdot \cos \rho)}{\frac{z_{\max}}{e} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \rho) - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \rho + 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha} = \\
&= \frac{3,14 \cdot (11,5 \cdot 2,12 \cdot 0,31 + 14 \cdot 0,95)}{\frac{2,12}{4} (-0,832) \cdot (0,71 - 0,31) - 2 \cdot 0,73 \cdot 1,413 \cdot 0,31 + 0,71 \cdot 0,81} = \\
&= \frac{3,14 \cdot 15,11}{-0,176 - 0,640 + 0,576} = \frac{65,4934}{0,24} = 272,9 \text{ кН/м}^2 = 0,273 \text{ МПа},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

где  $R_1 = \sqrt{2,92^2 + 2,12^2} = \sqrt{13,021} = 3,61 \text{ м};$

$R_2 = \sqrt{1,08^2 + 2,12^2} = \sqrt{5,661} = 2,38 \text{ м};$

$\ln \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{2,38^2}{3,61^2} = \ln \frac{5,6644}{13,0321} = \ln 0,435 = -0,832$

Численные результаты представлены в таблице 2. 6.

Таблица 2.6.

Результаты расчёта характеристик для откоса насыпи

Откос высотой $h, \text{ м}$	$\alpha, ^\circ$	$z_{\max},$ м	$P_{\max},$ МПа	$P_{кр},$ МПа
3	81	2,12	0,153	0,273

Следовательно, при высоте откоса  $h = 3 \text{ м}$  соблюдается условие:  $P_{\max} < P_{кр}$ , которое указывает на его устойчивость при заданной нагрузке.

## 2.6. Исследование критического усилия оснований отвалов торфяных грунтов

Насыпь представляет собой отвал торфяного грунта, предназначенного для формирования и дальнейшей вывозки потребителю. В основу изучения насыпи входят следующие мероприятия: - проверка устойчивости и надежности основания с использованием формул, полученных во второй главе;

- разработка технических решений по укреплению основания торфяной насыпи.

Геотехнические характеристики основания насыпи из отвала торфяного грунта представлены в таблице 2. 7.

Таблица 2.7.

Геотехническая характеристика основания насыпи

№ слоя	Наименование грунта	Мощность слоя, м	Расстояние от поверхности земли до подошвы слоя, м
1	Растительный покров	0,2	0,2
2	Увлажнённые заторфованные грунты	6	6,2

Поперечный профиль насыпи отвала торфяного грунта представлен на рис. 2.11. При выполнении расчётов модель торфяного отвала была разбита на 2 фрагмента А и Б. Так как фрагменты симметричные, расчёт выполнялся для одного фрагмента модели.

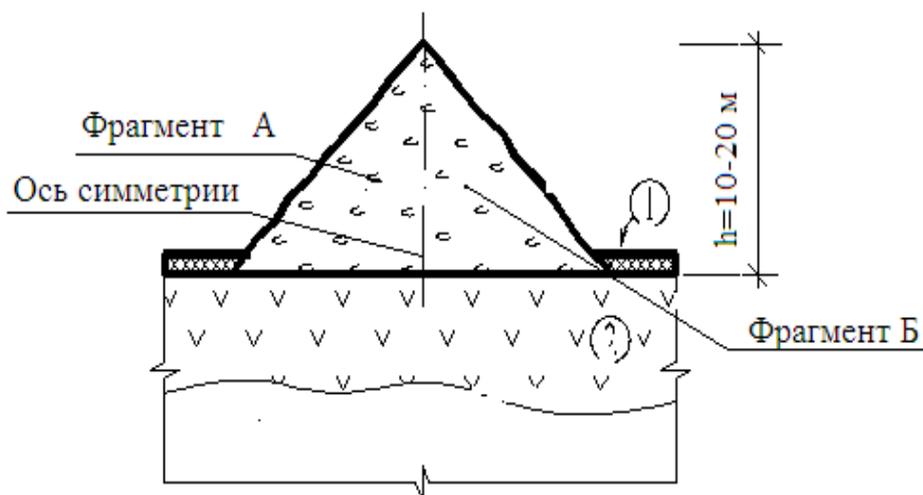


Рис. 2.11. Схема насыпи отвала торфяного грунта

Расчётное давление на основание насыпей высотами  $h = 10 - 20$  м определяется по формуле [66] :

$$P^{\text{расч}} = 1,2 \cdot P + 1,4 P_{\text{сн}},$$

где  $P = \gamma h$  – нормативная нагрузка от насыпей, вычисленная в зависимости от высот насыпей;  $\gamma = 0,012$  МПа/м – удельный вес продукта переработки насыпи отвала,  $P_{сн} = 0,001$  МПа – нормативная снеговая нагрузка.

$P^{расч}$  вычислена при переменном угле внутреннего трения подстилающего слоя, т.е.  $\varphi_n = 10^0 - 30^0$ .

В качестве расчетных показателей приняты значения геотехнических характеристик, представленных в таблице 2.8.

Таблица 2.8. Геотехнические характеристики слабого грунта основания

№ слоя	Наименование грунта	Сдвиговые характеристики		Удельный вес грунта $\gamma$ , МПа/м	Модуль деформации грунта $E$ , МПа
		$C$ , МПа	$\varphi$ , <sup>0</sup>		
2	Увлажнённые за-торфованные грунты	0,012	4 <sup>0</sup>	0,012	1,2

Примечание: слой № 1 удаляется и в расчётах не учитывается.

Расчёт выполняется так же, как для насыпи автодороги с использованием формул Гл.1, ч.2. Угол видимости равен

$$\alpha = \frac{3}{2} \arccos\left(\frac{x}{0,355b} \sin \rho\right) = 1,5$$

$$\arccos\left(\frac{0,67 \cdot 10}{0,355 \cdot 10} \sin 4^\circ\right) =$$

$$= 1,5 \arccos 0,132 = 1,5 \cdot (90^\circ - 7^\circ) = 125^\circ$$

$$\alpha = 125^\circ. \quad (2.21)$$

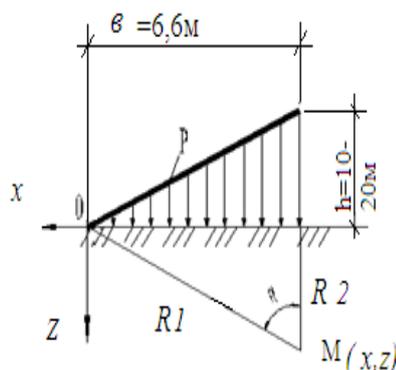


Рис.2.12.Схема действия треугольной нагрузки на основание

Максимальную глубину залегания вычислим через рекуррентные формулы краевых задач [70].

$$\left\{ \begin{array}{l} z - z_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} (90^\circ - \xi_1) ; \\ z = x \operatorname{tg} (90^\circ - 71^\circ) \end{array} \right. , \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z - z_2 = (x - x_2) \operatorname{tg} (90^\circ + \xi_2) ; \\ z = (x - 10) \operatorname{tg} (90^\circ + 54^\circ) \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0,344 x ; \\ z = -0,727 (x - 10) , \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0,344x = -0,727x + 7,27 \\ 1,071x = 7,27 \end{array}$$

$$x = \frac{7,27}{1,071} = 6,79 , \quad y = 6,79 \cdot 0,344 = 2,34$$

$$z_{\max} = 2,34 \text{ м.} \quad (2.23)$$

Критическая нагрузка равна (2.14):

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi(\gamma \cdot z_{\max} \sin \rho + C \cdot \cos \rho)}{\frac{z_{\max}}{b} \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} (0,71 - \sin \rho) - 2 \frac{x}{b} \alpha \sin \rho + 0,71 \sin \frac{2}{3} \alpha} =$$

$$= \frac{3,14 \cdot (11,5 \cdot 0,07 \cdot 2,34 + 12 \cdot 1)}{\frac{2,34}{10} (-0,103) \cdot (0,71 - 0,07) - 2 \cdot 0,667 \cdot 2,18 \cdot 0,07 + 0,71 \cdot 0,993} =$$

$$= \frac{3,14 \cdot 15,11}{-0,01543 - 0,204 + 0,705} = \frac{43,595}{0,4856} = 89,78 \text{ кН/м}^2 = 0,090 \text{ МПа,} \quad (2.24)$$

где

$$R_1 = \sqrt{6,67^2 + 2,34^2} = \sqrt{49,965} = 7,07 \text{ м;}$$

$$R_2 = \sqrt{3,33^2 + 2,34^2} = \sqrt{16,5645} = 4,07 \text{ м;}$$

$$\ln \frac{4,07^2}{7,07^2} = \ln \frac{16,5645}{49,965} = \ln 0,332 = -0,103$$

Численные результаты указаны в таблице 2.9.

Таблица 2.9.

Расчётные данные характеристик торфяной насыпи

Высота складирования $h$ , м	$\alpha, ^\circ$	$z_{\text{макс}}$ , м	$P_{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
10	125	2,54	0,073	0,090
12			0,088	
16			0,117	
20			0,145	

Выводы по результатам выполненного исследования

1. При высоте насыпи  $h = 10-12$  м устойчивость основания является достаточной и специальных мер по повышению устойчивости основания не требуется.
2. При высоте насыпи больше 12 м требуется меры по повышению устойчивости.

### **2.7. Исследование критического усилия основания отвала торфяного грунта, укрепленного песчаными сваями**

Для повышения устойчивости основания для отвала торфяного грунта высотой более 12 метров может быть предусмотрено применение песчаных свай, заложенных в этом основании (рис. 2.13). Для изучения этого вопроса нами были выполнены расчёты предельной критической нагрузки на свайное основание при различном диаметре свай и различном расстоянии между осями этих свай при условии, что сваи выполнены из песка.

Песчаные сваи устраивают путем забивки в грунт металлической трубы с закрытым концом с последующим заполнением тщательно уплотненным песчаным грунтом [24]. Вокруг ствола сваи образуется уплотнённая зона слабого грунта за счет его смещения в окружающую область. За

счет забивки металлической трубы в уплотненной зоне возникают большие напряжения (до 0,8 мПа), которые воспринимаются поровой водой. После устройства основания с песчаными сваями внешняя нагрузка, передаваемая насыпью, воспринимается песчаными сваями и уплотненным окружающим грунтом. После устройства песчаных свай над ними выполняются песчаную подушку толщиной 60 см. Для заполнения свай используется песок средней крупности или крупный с содержанием пылеватых и глинистых частиц не более 10% .

Применение песчаных свай позволяет удешевить строительство оснований по сравнению с использованием бетонных свай при сохранении величины допускаемых нагрузок на основании.

$P_{расч}$  вычислена при переменном угле внутреннего трения подстилающего слоя  $\varphi_H = 10^\circ - 30^\circ$ .

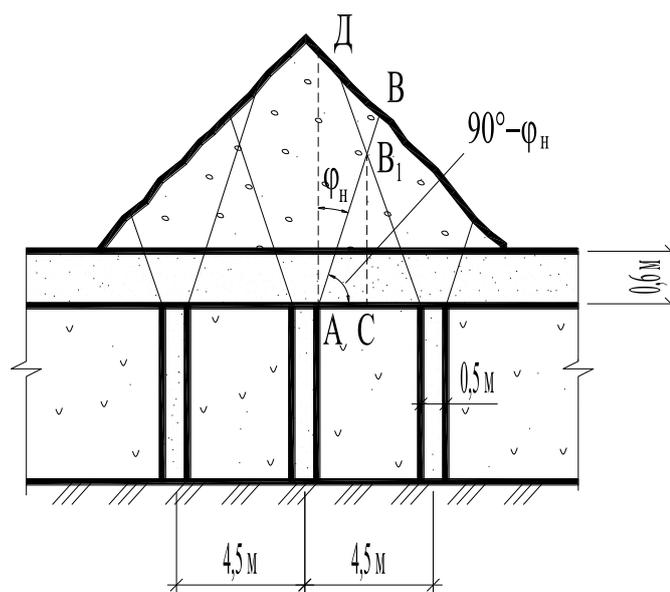


Рис. 2.13. Поперечный разрез насыпи, укрепленной сваями

Проверка устойчивости основания при различных диаметрах свай и межсвайных расстояний показала, что необходимому условию прочности отвечает свайное основание у которого диаметр свай равен 0,5 м с расстоянием между сваями 4,5 м. Ниже приведён расчёт критической нагрузки для этого свайного основания.

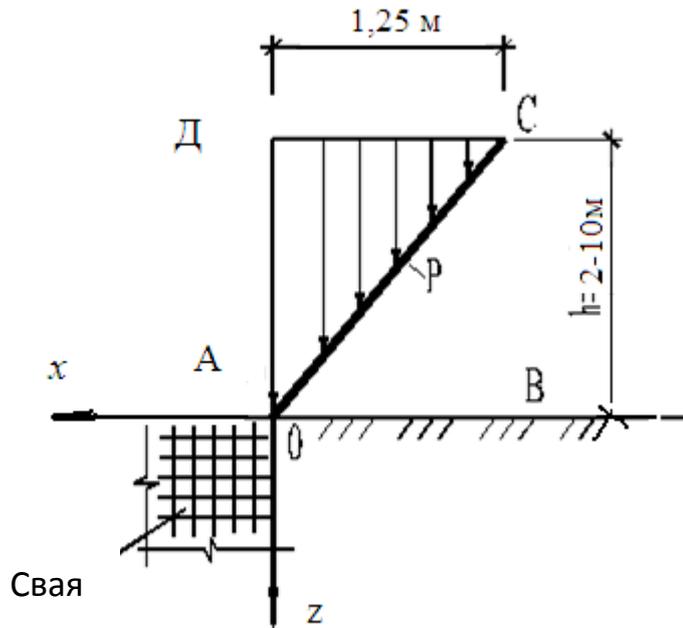


Рис. 2.14

Для треугольной нагрузки из ранее полученных расчётов угол видимости  $\alpha = 125^\circ$ . Используя рекуррентные формулы краевых задач [70], найдем максимальную глубину залегания предельного состояния.

$$\begin{cases} z = x \operatorname{tg} ( 90^\circ - 76^\circ ) ; \\ z = ( x - 2 ) \operatorname{tg} ( 90^\circ + 49^\circ ) , \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0,25 x ; \\ z = ( x - 2 ) (- 0,87) , \end{cases} \quad (9.25)$$

$$0,25x = - 0,87x + 1,74 \quad x = \frac{1,74}{1,12} = 1,55$$

$$z = 1,55 \cdot 0,25 = 0,388$$

$$z_{\text{макс}} = 0,39 \text{ м.} \quad (2.26)$$

Критическая нагрузка равна:

$$P_{\text{кр}} = \frac{3,14(11,5 \cdot 0,07 \cdot 0,39 + 12 \cdot 1)}{\frac{0,39}{2}(-0,84)(0,71 - 0,07) - 2 \cdot 0,07 \cdot 0,84 \cdot 2,13 + 0,71 \cdot 0,99} =$$

$$= \frac{38,665}{0,3497} = 110,57 \text{ кН/м}^2 = 0,111 \text{ МПа} ,$$
(2.27)

где  $R_1 = \sqrt{1,33^2 + 0,39^2} = \sqrt{1,921} = 1,39 \text{ м} ;$

$$R_2 = \sqrt{0,67^2 + 0,39^2} = \sqrt{0,601} = 0,78 \text{ м} ;$$

$$\ell n \frac{0,78^2}{1,39^2} = \ell n \frac{0,601}{1,39} = \ell n 0,432 = -0,84 .$$

Расчётную несущую способность грунта основания с учётом сил трения, по боковой поверхности сваи вычислим по формуле [64]:

$$F_d = \gamma_c (\gamma_{CR} \cdot A \cdot R + u \sum \gamma_{cf} \cdot f_i \cdot h_i) = 1(1,1 \cdot 0,196 \cdot 2800 - 1,57 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5,6) = 2168,04 \text{ кН},$$
(2.28)

где  $A = 0,196 \text{ м}^2$ ;  $u = 1,57 \text{ м}$ ; численные значения остальных параметров см. [64].

Предельная несущая способность сваи в межсвайном промежутке будет равна [64]

$$N = F_d / \gamma_k = 2168,04 / 1,4 = 1548,6 \text{ кН},$$

где  $\gamma_k = 1,4$  – коэффициент надёжности.

Тогда давление в нижней части сваи с учётом сил трения составит

$$P = 1548,6 / 0,196 = 7901,02 \text{ кН/м}^2 = 7,901 \text{ МПа}. \quad (2.29)$$

Полная критическая нагрузка с учётом сил трения по боковой поверхности сваи будет равна

$$P_{\text{кр. общ}} = P_{\text{кр}} + P = 110,57 + 7901,02 = 8011,59 \text{ кН/м}^2 = 8,012 \text{ МПа}$$
(2.30)

Численные результаты расчётов представлены в таблице 2.10.

Таблица 2.10.

Результаты расчётов показатели характеристик насыпи  
в межсвайном пространстве

Высота насы- пи $h$ , м	$\alpha$ , <sup>0</sup>	$z_{\text{макс}}$ , м	$P^{\text{расч}}$ , МПа	$P_{\text{кр}}$ , МПа
7,75	125	0,39	0,109	8,012
10,08			0,141	
11,38			0,159	
14,22			0,199	

Прочность основания для насыпи высотой  $h = 10 - 20$  м в промежутке между сваями обеспечена.

Выполненные исследования насыпи высотой  $h = 10 - 20$  м с помощью полученных формул и с использованием известных методов расчёта отвечает критериям устойчивости.

### Глава 3

## ИЗУЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ ФУНДАМЕНТОВ НА СЛАБЫХ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТАХ

### 3.1. Гибкие фундаменты

Гибким называется фундамент, деформации которого приводят к перераспределению реактивных давлений грунта по его подошве [21]. Гибкие фундаменты обладают способностью изгибаться в одном или обоих направлениях подошвы. К ним могут быть отнесены фундаменты, у которых отношение высоты к их длине составляет менее 1/3.

Для расчёта гибких фундаментов решают задачу о взаимодействии фундамента и его основания, которая даёт возможность находить контактные напряжения в плоскости их соприкосновения. Учитываются возникающие изгибающие моменты и поперечные силы, которые определяются только после расчёта контактных реактивных давлений по подошве фундамента. Реактивные давления по подошве определяются исходя из совместной работы фундамента и основания и зависят от прогиба фундамента.

Неравномерные деформации основания являются следствием силовых воздействий на фундамент вследствие неоднородной структуры грунта, различной мощности слоев грунта или же деформационных воздействий: сложного деформирования земной поверхности вследствие замачивания лессовых просадочных, засоленных и набухающих грунтов, подработки угольных, калийных и рудных месторождений, карстовых и тектонических явлений.

В настоящее время нет единого метода определения реактивных напряжений. Существуют три принципиальных направления, приведённые в [22], каждое из которых имеет свои достоинства, недостатки и преимущественную область применения.

### **3.2. Методика исследования устойчивости оснований гибких фундаментов**

При оценке напряженно - деформированного состояния в строительной практике встречаются некоторые случаи в исследованиях оснований фундаментов, сложенных слабыми грунтами. Эти случаи приведены ниже, а физико-технические характеристики слабых оснований взяты из проектных разработок научно-исследовательских институтов «Промстройпроект» г. Иванова и «Гражданпроект» г. Владимира. При решении задач, связанных с оценкой напряжённо-деформированного состояния, в основу расчётных схем положена модель грунта в виде линейно-упругого и пластического слоёв. В исследованиях поставленных за-

дач, также как для насыпи, были использована формулы критических усилий для различных видов нагрузок [41] и [863].

### 1 - й случай

Исследуем устойчивость основания для ленточного блочного фундамента (рис. 3.1). Исходные данные: ширина подошвы фундамента  $b_{\phi} = 1,2\text{ м}$ , глубина его заглубления давление от  $h_{\text{прив}} = 1,6\text{ м}$ , приложенные нагрузки под подошвой фундамента  $P_{\text{норм}} = 0,210\text{ МПа}$ ,  $P_{\text{расч}} = 0,360\text{ МПа}$ . Грунты в основании – глины с расчётными характеристиками:  $\varphi = 26^\circ$ ,  $C = 0,032\text{ МПа}$ ,  $\gamma = 0,022\text{ МПа/м}$ ,  $IL = 0,7$ . Фундамент находится в напряжённно-деформированном состоянии. Наблюдается крен участка фундамента.

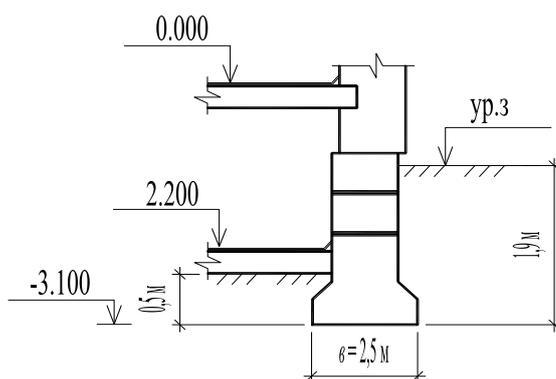


Рис. 3.1. Сечение ленточного блочного фундамента

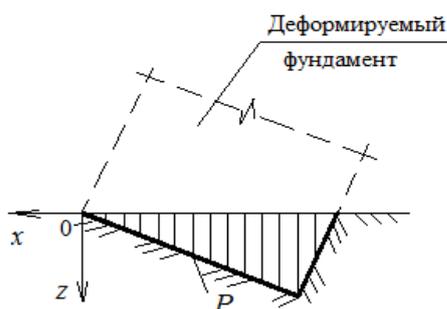


Рис. 3.2. Схема от неравносторонней треугольной нагрузки в основании фундамента

Расчётная схема нагрузки в основании фундамента имеет форму неравностороннего треугольника (см. рис.3.2). Максимальную глубину залегания и критическую нагрузку находим по известным зависимостям. Результаты полученных исследований занесены в табл. 3.1.

Таблица 3.1.

Результаты расчётов силовых и геометрических характеристик для 1 - го случая

Вид полосовой нагрузки	$\alpha, ^\circ$	$z_{\text{макс}}, \text{ м}$	$P_{\text{расч}}, \text{ МПа}$	$P_{\text{кр}}, \text{ МПа}$	$R, \text{ МПа}$
Нагрузка по закону неравностороннего треугольника	$54^\circ$	0,35	0,290	0,317	0,319

Ввиду того, что  $P_{\text{расч}} > P_{\text{кр}} > R$ , устойчивость основания для фундаментов не обеспечивается, необходимо выполнить усиление участка фундамента.

## 2-й случай

Проводилось исследование устойчивости основания ленточного фундамента 10-ти этажного жилого дома по ул. Революционной в г. Иваново (рис. 3.3). Исходные данные: ширина подошвы фундамента  $b_{\text{ф}} = 3\text{ м}$ , глубина его заложения  $h_{\text{прив}} = 1,82\text{ м}$ , давление от приложенных нагрузок под подошвой фундамента  $P_{\text{норм}} = 0,282\text{ МПа}$ ,  $P_{\text{расч}} = 0,495\text{ МПа}$ . Грунты в основании – суглинки с участками торфяных залежей, с расчётными физическими характеристиками:  $\varphi = 23^\circ$ ,  $C = 27\text{ кПа}$ ,  $\gamma = 18,9\text{ кН/м}^3$ ,  $IL = 0,7$ . Расчётная схема нагрузки в основании фундамента имеет форму равностороннего треугольника (см. рис.3.4).

Максимальная глубина залегания и критическая нагрузка вычислены по формулам Главы 2. Расчётное сопротивление грунта согласно [63].

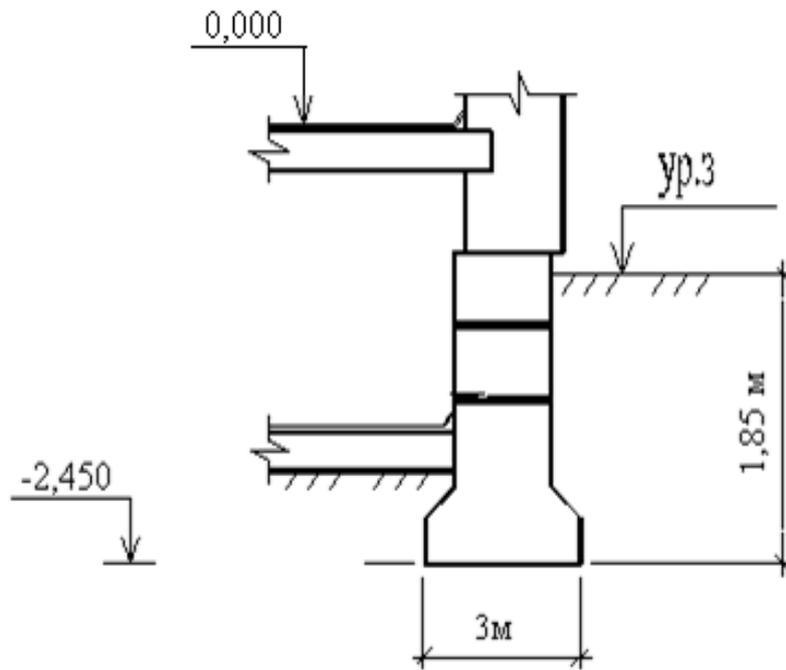


Рис. 3.3. Сечение ленточного фундамента

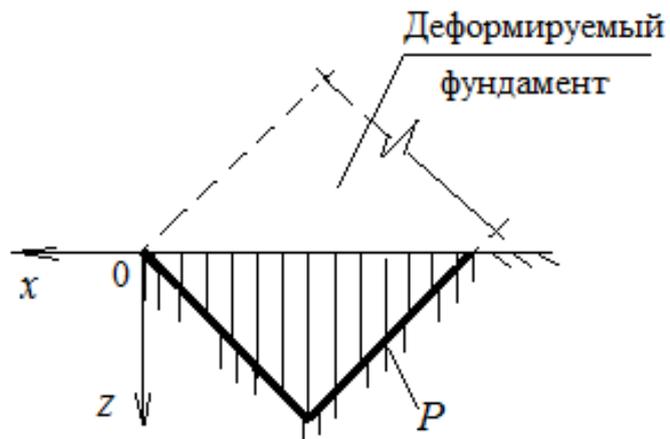


Рис.3.4. Схема от равносроронней треугольной нагрузки в основании фундамента

Полученные результаты расчётов приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2.

Результаты расчётов силовых и геометрических характеристик  
для 2 - го случая

Вид полосовой нагрузки	$\alpha, ^\circ$	$z_{\text{макс}}, \text{м}$	$P_{\text{расч}}, \text{МПа}$	$P_{\text{кр}}, \text{МПа}$	$R, \text{МПа}$
Нагрузка по закону равностороннего треугольника	63	0,75	0,370	0,380	0,382

### ВЫВОДЫ К 3-й ЧАСТИ

По результатам анализа предельных критических нагрузок для оснований насыпей и фундаментов было определено техническое решение о наиболее целесообразном варианте конструкции основания в слабом грунте.

Критерием устойчивости оснований насыпей и фундаментов является проверка грунтовой среды на условие:

$$P_{\text{расч}} < P_{\text{кр}}$$

Приведенные примеры показывают эффективность разработанной нами методики для расчёта оснований различных сооружений в слабых грунтах.

Для других случаев, где условие устойчивости не соблюдается, т.е.  $P_{\text{расч}} > P_{\text{кр}}$  должно предусматриваться использование слабого грунта в качестве основания с применением мероприятий, обеспечивающих устойчивость основания.

В следующей главе выполняется расчёт устойчивости гибких фундаментов для некоторых случаев строительной практики.

## **Часть 4**

# **ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ СРЕД ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ**

## Глава 1

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СЫПУЧИХ СРЕД С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ

### 1.1. Метод решения задачи о несущей способности сыпучей среды грунтовых оснований

Одной из основных задач, рассматриваемой в теории предельного равновесия сыпучей среды, является задача о несущей способности оснований. Теория предельного равновесия была сформулирована применительно к плоской задаче, где система оказалась определенной. Позднее при наличии допущения о полной сыпучести была сформулирована пространственная осесимметричная задача [11]. Рассмотрим эти решения.

В плоской задаче имеются два уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

содержащие три неизвестных  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , и одно замыкающее систему уравнение предельного равновесия:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2 c \operatorname{ctg} \varphi)^2 \sin^2 \varphi. \quad (1.2)$$

Долгое время имелось лишь простейшее решение приведенной системы уравнений для частного случая  $\tau_{xy} = 0$ , когда система сразу линеаризуется относительно напряжений. Это решение принадлежит Ренкину. В.В. Соколовским был предложен метод интегрирования и предварительных преобразований [69] и [70], основанный на предложениях С.А. Христиановича.

В задаче предлагается подстановка, тождественно удовлетворяющая уравнению (1.2), и тем самым сводящая систему из трех уравнений к системе из двух уравнений.

Компоненты напряжений были приняты в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2 \omega_1) - C \operatorname{ctg} \varphi; \\ \sigma_y &= \sigma (1 - \sin \varphi \cos 2 \omega_1) - C \operatorname{ctg} \varphi; \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \varphi \sin 2 \omega_1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Путем преобразования данной системы были получены две новые переменные  $\sigma$  и  $\omega_1$ , определяющиеся следующим образом:

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 + C \operatorname{ctg} \varphi; \quad (1.4)$$

$$\operatorname{tg} 2 \omega_1 = 2 \tau_{xy} / (\sigma_x - \sigma_y).$$

Были введены новые постановки

$$\chi = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2} \ln \frac{\sigma}{\sigma_0}; \quad \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}, \quad (1.5)$$

где  $\sigma_0$  – произвольная, выбранная заранее величина, имеющая размерность напряжения для того чтобы под знаком логарифма была безразмерная величина.

Затем была использована еще одна подстановка:

$$\xi = \chi + \omega_1; \quad \eta = \chi - \omega_1. \quad (1.6)$$

В результате подстановки зависимости (1.3) и последовательных теоретических преобразований [69], были получены дифференциальные уравнения характеристик, принадлежащие к гиперболическому типу.

Первое семейство характеристик определяется уравнениями:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\omega_1 - \mu); \quad \frac{d\xi}{dx} = a_1. \quad (1.7)$$

Для второго семейства характеристик – уравнениями:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\omega_1 - \mu); \quad \frac{d\eta}{dx} = a_2. \quad (1.8)$$

Характеристики составляют углы с осью  $x$  либо  $(\omega_1 + \mu)$ , либо  $(\omega_1 - \mu)$ . Характеристики совпадают с линиями скольжения, так как линии скольжения составляют углы  $\pm \mu$  с направлением наибольшего главного напряжения, угол между характеристиками равен  $2\mu$ . Через каждую точку рассматриваемой области в плоскости  $x, y$  проходят две характеристики. Компоненты напряжений претерпевают на линиях разрыва конечные скачки. Линиями скольжения называются линии, вдоль которых удовлетворяется условие

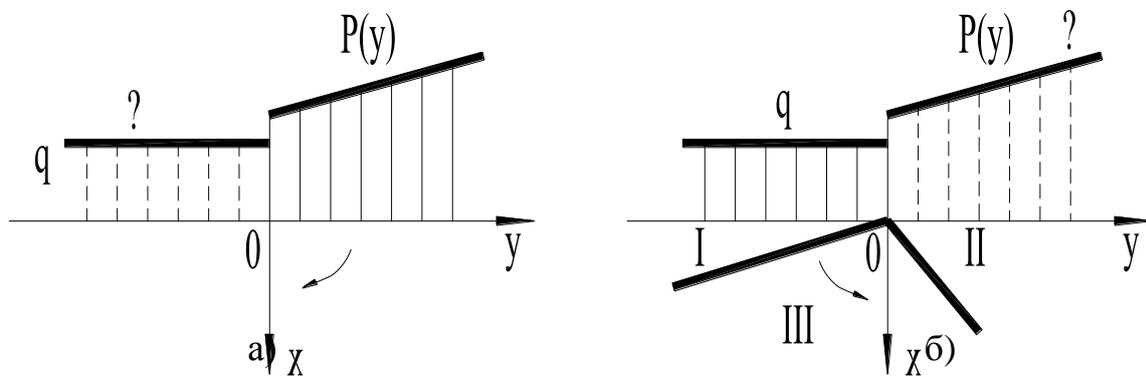


Рис. 1.1.

а) прямая задача,

б) обратная задача; стрелка – направления хода расчёта

$$|\tau_{xy}| = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + C, \quad (1.9)$$

где  $\tau_{xy}$  и  $\sigma_n$  – соответственно касательная и нормальная компоненты, действующие по площадке с внешней нормалью  $n$ .

Постановка задачи разделяется на прямую и обратную [70].

Прямая постановка задачи (рис.1.1.) заключается в том, что вдоль положительного направления оси  $y$  задана нагрузка и по величине и по направлению (наклону по отношению к вертикали). На отрицательном участке оси  $y$  действует пригрузка. Предварительно задается направление этой пригрузки вертикальной или наклонной и отыскивается ее величина. Обратная постановка задачи – по данным величине и направлению пригрузки и заданному направлению нагрузки найти последнюю.

По характеру напряжённого состояния вся предельно напряженная область основания делится на три зоны. I и II (рис. 1.1б) обобщенные зоны Ренкина и III обобщенная зона Прандтля. В зонах I и II характеристики (линии скольжения) в случае весовой среды прямые или слабо искривлены. В зоне III они представляют собой логарифмические спирали или слабо отличающиеся от них кривые.

В зонах I и II напряжение рассматривается в декартовых координатах, в зоне III – радиальной зоне, ее рассмотрение удобнее проводить в полярных координатах. Дифференциальные уравнения линии скольжения, полученные в результате расчётов [70] имеют вид:

$$r = \frac{d\theta}{dr} = \operatorname{tg}(\omega_2 \pm \mu c), \quad (1.10)$$

$$\text{откуда было получено: } r = r_0 \cdot \ell_0^{\int \operatorname{ctg}(\omega_2 \pm \mu c) d\theta} \quad (1.11)$$

В осесимметричной задаче В.Г. Березанцев [11] принимает так называемое условие полной сыпучести, согласно которому два главных напряжения (промежуточное и минимальное) называются равными.

При осесимметричном напряженном состоянии применяется цилиндрическая система координат  $r^{\theta z}$ .

В пространственном случае задачи имеется шесть неизвестных напряжений, три дифференциальных уравнения равновесия и одно условие предельного равновесия. В силу осевой симметрии одно из уравнений равновесия выпадает, остается только два. Два касательных напряжения также оказываются равными нулю.

Таким образом, остаются два уравнения равновесия. В задаче сетка характеристик принимаются за криволинейную систему координат на плоскости  $x, y$  причем  $\alpha$  и  $\beta$  принимаются за независимые переменные  $\alpha, x, y, \xi, \eta$  считаются функциями  $\alpha$  и  $\beta$ .

Каноническая система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = \operatorname{tg}(\omega_1 + \mu) \frac{\partial x}{\partial \alpha}; \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \operatorname{tg}(\omega_1 - \mu) \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad (1.12)$$

а так же

$$\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = a_1 \frac{\partial x}{\partial \beta}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = a_2 \frac{\partial x}{\partial \alpha}. \quad (1.13)$$

В.В. Соколовским были получены дифференциальные уравнения [69] в следующем виде

$$dy = dx \operatorname{tg} (\omega_1 \pm \mu). \quad (1.14)$$

Вдоль характеристик выполнено следующее уравнение относительно  $\sigma$ :

$$d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg} \varphi d\omega_1 = \gamma (dx \mp \operatorname{tg} \varphi dy). \quad (1.15)$$

Из уравнения (1.15) выводятся известные уравнения Кеттера, содержащие радиусы кривизны  $R_\alpha$  и  $R_\beta$  характеристик или линий скольжения первого и второго семейств.

Первое уравнение будет:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} + 2\sigma \operatorname{tg} \gamma = \gamma R_A \frac{\cos(\omega_1 - \mu)}{\cos \varphi}. \quad (1.16)$$

Второе уравнение будет таким:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} - 2\sigma \operatorname{tg} \gamma = -\gamma R_A \frac{\cos(\omega_1 - \mu)}{\cos \varphi}. \quad (1.17)$$

Путем интегрирования уравнения (1.16) ,было получено:

$$\sigma = \sigma_o \ell^{2\omega_1 \operatorname{tg} \varphi} + \gamma R_a \frac{\cos \rho_o}{\cos \varphi} \sin(\omega_1 - \mu + \rho_o); \quad (1.18)$$

$$\operatorname{tg} \rho_o = 2 \operatorname{tg} \varphi + n.$$

Аналогичным путем интегрирования уравнения (1.17) было получено:

$$\sigma = \sigma_o \ell^{-2\omega_1 \operatorname{tg} \varphi} - \gamma R_\beta \frac{\cos \rho_o}{\cos \varphi} \sin(\omega_1 + \mu - \rho_o). \quad (1.19)$$

## 1.2. Методы решения плоской задачи предельного равновесия сыпучей среды

Плоская задача теории предельного равновесия сыпучей среды имеет возможные подходы к решению основной системы для общего случая [69].

Уравнения равновесия в декартовой системе координат имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \gamma; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad (1.20)$$

Уравнения предельного равновесия, замыкающее систему и имеющие тот смысл, что в каждой точке рассматриваемой области сыпучей среды имеет место предельное состояние:

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = (\sigma_x + \sigma_y + 2C \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi . \quad (1.21)$$

Система уравнений (1.20) и (1.21) существенно нелинейная, и поэтому в замкнутом виде может быть решена только в частных случаях, одним из которых является случай Ренкина, где рассматривается условие  $\tau_{xy} = 0$ , сразу линеаризующее систему и позволяющее получить простое решение в конечном виде [69].

В.В. Соколовский провел преобразование исходной системы по другим переменным и получил квазилинейные уравнения, решаемые численным методом по предложенной им схеме. Эта система имеет две новых переменных и состоит из двух уравнений. Предлагается постановка, с помощью которой удастся точно удовлетворить уравнениям (1.21). Однако такая постановка «портит» систему (1.20), превращая ее из линейной в квазилинейную. Эта система решается численно, таким образом условия равновесия удовлетворяются приближенно, правда всегда имеется возможность повысить степень точности их интегрирования численным путем.

Возможен и другой путь решения, предложенный М.В. Малышевым [44], когда уравнения равновесия (1.20) удовлетворялись точно, а условие предельного напряженного состояния (1.21) – приближенно. Удовлетворить условиям равновесия можно введением функции напряжения Эри [49]. При использовании функции Эри  $F$  и после подстановки в условие (1.21) зависимостей, тождественно удовлетворяющих системе (1.20):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \lambda x; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \xi_0 \lambda x; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (1.22)$$

было получено это нелинейное уравнение.

Приближенность решения связана с аппроксимацией уравнений (1.22) линейным уравнением. В данном случае удовлетворяется уравнение равновесия, но «портится» условие предельного равновесия. Удачным считается решение задачи, которое допускает шаг за шагом увеличение степени приближенности, т.е. итерационный способ вычисления.

Для преобразования исходной системы уравнений (1.20) и (1.21) были использована в качестве подстановки, примененной В.В. Соколовским [69] выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma[1 + \sin \varphi \sin(2\omega_1 + \varphi)] - C \operatorname{ctg} \varphi; \\ \sigma_y &= \sigma[1 - \sin \varphi \sin(2\omega_1 + \varphi)] - C \operatorname{ctg} \varphi; \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \varphi \cos(2\omega_1 + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

где  $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + 2 C \operatorname{ctg} \varphi) / 2 = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 + C \operatorname{ctg} \varphi$ ;

$\omega_1$  – угол между направлением большего главного напряжения и осью  $y$ .

Уравнение (1.21) с помощью подстановки (1.23) удовлетворяется тождественно. Далее путем теоретических преобразований М.В. Малышевым были получены уравнения характеристик:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2\omega_1 \pm \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos 2\omega_1} = -\operatorname{ctg}[\omega_1 \mp (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})]. \quad (1.24)$$

В данном случае характеристики совпадают с линиями скольжения, а угол между ними составляет  $\pi/2 - \varphi$ .

Аналогичный приём может быть использован для решения задачи в полярных коэффициентах [45]. В результате расчетов этой задачи были получены уравнения линий скольжения, которые совпадают с характеристиками [58]:

$$\frac{dr}{d\theta} = r \operatorname{ctg}[\omega_2 \pm (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})], \quad (1.25)$$

откуда следует, что

$$r = r_{oe} \int_0^{\theta} \operatorname{ctg}[\omega_2 \pm (\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})] d\theta. \quad (1.26)$$

Если угол  $\omega_2$  постоянен, то получаем два семейства логарифмических спиралей. Решение уравнения (1.25) можно получить с помощью метода Фурье.

### 1.3. Аналитические методы решения слоистых сред с использованием краевых задач теории предельного равновесия

Прилагаемые краевые задачи для сыпучей среды являются теоретическим преобразованием краевых задач для пластических сред прикладной механики [32].

#### 1.3.1. Приближенный метод решения краевых задач

Приближенный метод решения основных краевых задач позволяет определить искомые функции в конечном числе узловых точек сетки характеристик для дифференциальных уравнений. В данном методе рассматривается узловая точка характеристик и соседние точки 1 и 2, расположенные на горизонтальных и вертикальных характеристиках (рис. 1.2) в плоскости  $\mu\lambda$ .

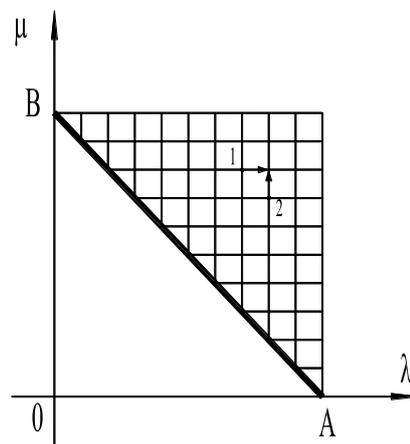


Рис. 1.2

Определены значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  в указанной узловой точке, при известных значениях  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\varphi_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $\sigma_2$ ,  $\varphi_2$  в соседних узловых точках 1 и 2.

Для дифференциальных уравнениях [58] дифференциалы  $dx$ ,  $dy$ ,  $d\sigma$  и  $d\varphi$  подлежат замене конечными разностями  $x-x_1$ ,  $y-y_1$ ,  $\sigma-\sigma_1$ ,  $\varphi-\varphi_1$ , а в дифференциальных уравнениях [58] – конечными разностями  $x-x_2$ ,  $y-y_2$ ,  $\sigma-\sigma_2$ ,  $\varphi-\varphi_2$ . Таким образом, вместо уравнений [58] было получено

$$\left. \begin{aligned} y - y_1 &= (x - x_1) \operatorname{tg}(\varphi_1 - \mu); \\ \sigma - \sigma_1 - 2\sigma_1(\varphi - \varphi_1) \operatorname{tg} \rho &= y - y_1 - (x - x_1) \operatorname{tg} \rho \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

$$\left. \begin{aligned} y - y_2 &= (x - x_2) \operatorname{tg}(\varphi_2 + \varepsilon); \\ \sigma - \sigma_2 + 2\sigma_2(\varphi - \varphi_2) \operatorname{tg} \rho &= y - y_2 + (x - x_2) \operatorname{tg} \rho \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

### 1.3.2. Первая краевая задача

Вдоль отрезка АВ заданы значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$ . Отрезок АВ разделен на несколько частей и построена на плоскости  $\mu\lambda$ , координатная сетка характеристик. Приведенные рекуррентные формулы (1.27), (1.28) вместе с граничными данными позволяют провести вычисления во всех узловых точках координатной сетки характеристик.

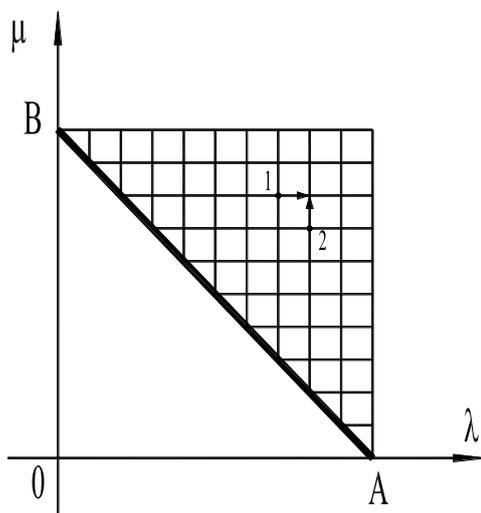


Рис. 1.3

Схема определения значений  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  в какой-нибудь внутренней узловой точке по значениям  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\varphi_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $\sigma_2$ ,  $\varphi_2$  в соседних узловых точках 1 и 2 изображена на рис.1.3 [58].

Вследствие существования и единственности решений можно утверждать, что при достаточной густоте координатной сетки характеристик полученные значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  дают приближенное решение первой краевой задачи.

Вследствие существования и единственности решений можно утверждать, что при достаточной густоте координатной сетки характеристик полученные значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  дают приближенное решение первой краевой задачи.

### 1.3.3. Вторая краевая задача

Вдоль отрезков характеристик  $OA$  и  $OB$  заданы значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$  и  $\varphi$ . Отрезки  $OA$  и  $OB$  разделены на несколько частей и на плоскости  $\lambda\mu$  построена сетка характеристик. Установленные рекуррентные формулы (1.27) и (1.28) вместе с граничными данными позволяют осуществить вычисления во всех внутренних узловых точках координатной сетки характеристик.

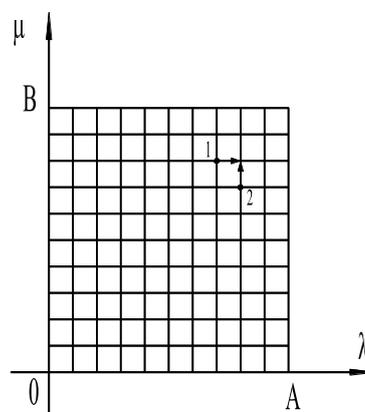


Рис.1.4

Схема определения значений  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  в какой-нибудь внутренней узловой точке по значениям  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\varphi_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $\sigma_2$ ,  $\varphi_2$  в соседних узловых точках 1 и 2 представлены на рис. 1.4. Основываясь на существовании и единственности решений, было выявлено, что при достаточной густоте координатной сетки найденные значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  дают приближенное решение первой краевой задачи.

### 1.3.4. Третья краевая задача

Вдоль отрезка  $OA$  биссектрисы координатного узла известны два конечных или дифференциальных соотношения между  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$ , а вдоль отрезка  $OB$  характеристики второго семейства заданы значения  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$ . Отрезок  $OA$  разделен на несколько частей и на плоскости  $\mu\lambda$  построена координатная сетка характеристик. Установленные ранее формулы (1.27), (1.28) и граничные данные позволяют провести вычисления во всех узловых точках отрезка  $OA$ .

Схема определения значений  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$  в какой-нибудь узловой точке отрезка  $OA$  по значениям  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\varphi_1$  и  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $\sigma_a$ ,  $\varphi_a$  в соседних узловых точках 1 и  $a$  показаны на рис. 1.5.

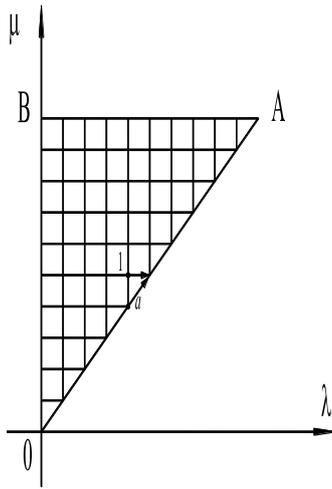


Рис. 1.5

### 1.3.5. Четвертая краевая задача

Вдоль отрезков OA и OB заданы по два конечных или дифференциальных соотношения между  $x, y, \sigma, \varphi$ . Отрезки OA и OB разделены на несколько частей и на плоскости  $\mu\lambda$  построена координатная сетка характеристик. Приведенные выше формулы (1.27-1.28) и граничные данные позволяют осуществить вычисления во всех узловых точках отрезка OA и OB. Схема получения значений  $x, y, \sigma, \varphi$  в узловых точках отрезков OA

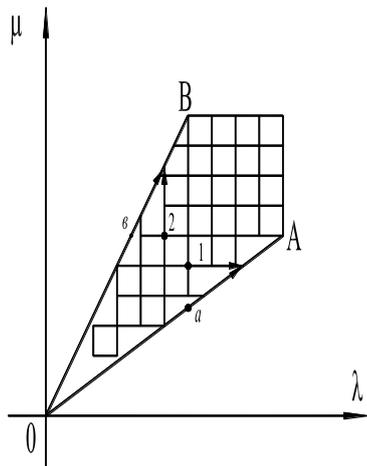


Рис. 1.6

и OB по значениям  $x_1, y_1, \sigma_1, \varphi_1$  и  $x_a, y_a, \sigma_a, \varphi_a$  в соседних узловых точках 1 и a или по значениям  $x_2, y_2, \sigma_2, \varphi_2$  и  $x_b, y_b, \sigma_b, \varphi_b$  в точках 2 и b показаны на рис. 1.6. Для увеличения точности вычислений в рекуррентных формулах (1.27) и (1.28) вместо  $\varphi_1$  подставлены  $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi)$  и  $\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi)$ .

## 1.4. Приближенный метод решения канонических уравнений в плоских задачах грунтовой среды

### 1-й случай

Вдоль участка  $0A_3$  и  $0A_2$  отрицательной полуоси  $x$  равномерно распределены нормативные давления  $P$  и  $q$ , а вдоль положительной полуоси  $x$  они распределены неравномерно (рис. 1.7). Грунты основания представляют супеси просадочные, где  $\rho = 17^\circ$ ,  $C = 0,009$  кН/м<sup>2</sup>,  $P = 30$  кН/м<sup>2</sup>,  $P_0 = 20$  кН/м<sup>2</sup>.

Необходимо определить значения напряжений  $\sigma$  и угла  $\varphi$  во всех заданных точках и построить сетку характеристик по координатам узловых точек. Вдоль положительной полуоси  $x$  при  $\chi = -1$ , вследствие формул [58], примем

$$\sigma = \frac{P(x)}{1 + \sin \rho}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}; \quad (1.29)$$

$$q = \sigma(1 + \sin \rho), \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (1.30)$$

Вдоль отрицательной полуоси  $x$  при  $\chi = +1$ , вследствие формул [58], примем

$$\sigma = \frac{P}{1 - \sin \rho}, \quad \varphi = 0; \quad (1.31)$$

$$\sigma = \frac{q}{1 - \sin \rho}, \quad \varphi = \pi. \quad (1.32)$$

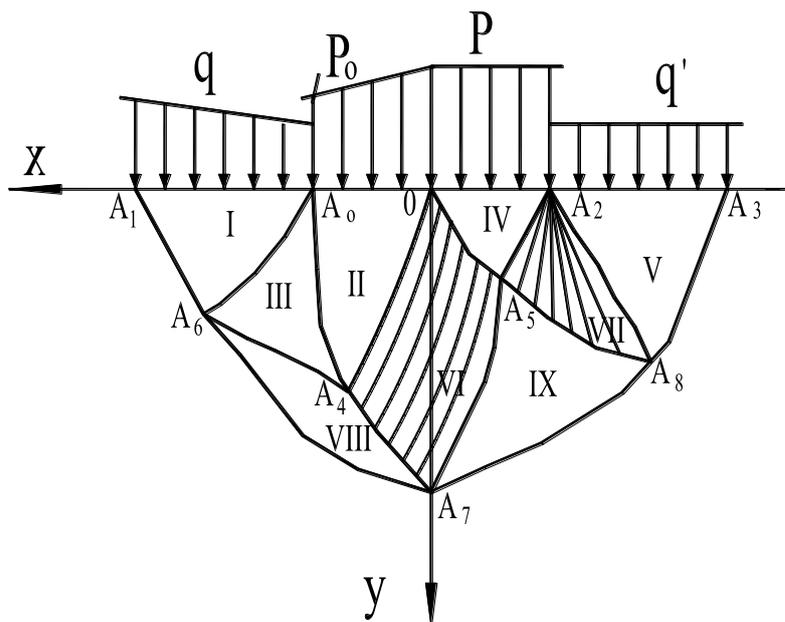


Рис. 1.7

Рассмотрим сначала поставленную задачу для невесомой среды (рис.1.8). Выполним ряд построений на плоскости  $\xi\eta$ , считая ее состоящей из 10<sup>ти</sup> листов. Такая 10-ти листовая область может быть развернута в 8 - листовую, если перегнуть прямоугольные треугольники  $\Delta A_0(2)A_6A_1$  вокруг  $\Delta A_0(2)A_6$ , а  $\Delta A_2(2)A_3A_8$  вокруг  $\Delta A_2(2)A_8$ . В областях  $OA_2A_5$  и  $A_2A_3A_8$  в соответствующих точках  $A_2(1)$  и  $A_2(2)$  величины  $\sigma$  и  $\varphi$  постоянны и равны своим значениям в точках  $A_2(1)$  и  $A_2(2)$ . Используя формулу (1.31), получим значение в т.  $A_2(1)$   $\sigma=42,3 \text{ кН/м}^3$ ,  $\varphi=0$ . В области  $A_5A_2A_8$ , отвечающей отрезку характеристики  $A_2(1)$  и  $A_2(2)$ , величина  $\xi$ , постоянна, поэтому здесь имеют место интегралы уравнений предельного равновесия для вырожденного случая [58], т.е.

$$\sigma = \frac{P}{1 - \sin \rho} \exp[(\pi - \varphi)t \operatorname{gr} \rho] = \frac{30}{1 - 0,29} \exp[(180 - 2 \cdot 127^\circ)0,31] =$$

$$= 42,3 \cdot \exp[(-1,29) \cdot 0,31] = 42,3 \cdot 0,91 = 38,5 \text{ кН/м}^2,$$

(1.33)

где  $\varphi = \theta + \varepsilon = \frac{\pi}{2} + 37^\circ = 90^\circ + 37^\circ = 127^\circ$ .

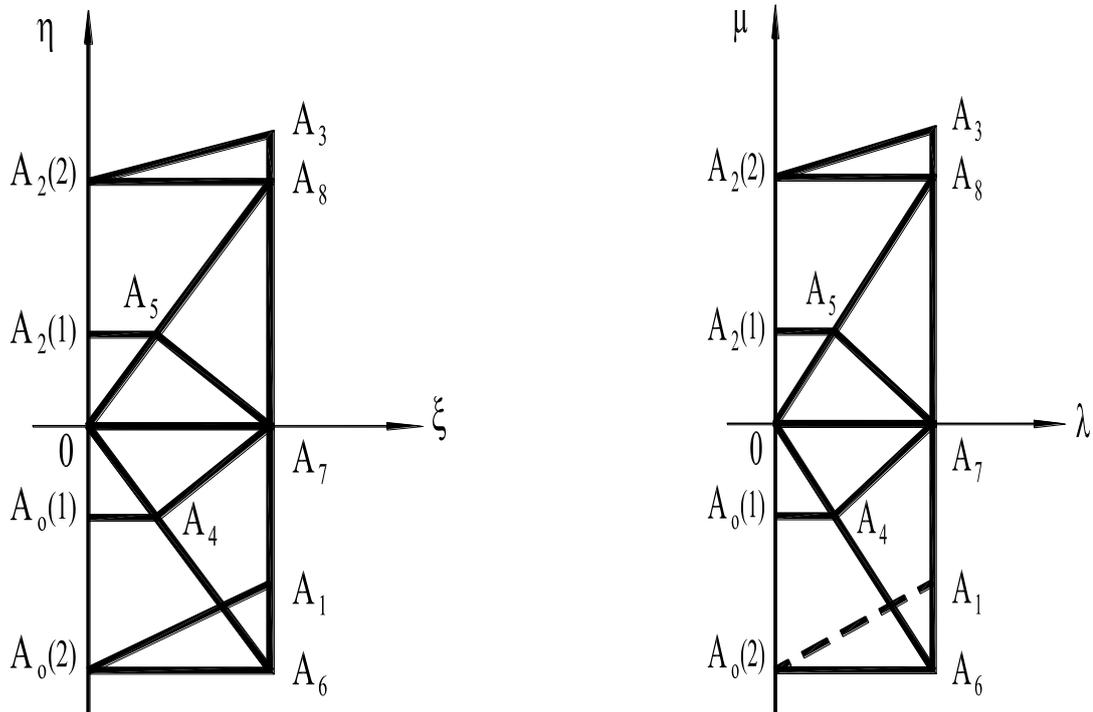


Рис.1.8. Невесомая область

Рис.1.9 Весомая область

Найдём значение  $q'$  по формуле значение [58]:

$$q' = 30 \exp(-0,973) = 30 \cdot 0,03 = 0,9 \text{ кН/м}^2. \quad (1.34)$$

Определим значение  $\sigma$  в т.  $A_2(2)$  и во всей области  $A_2A_8A_3$  по формуле (1.32):

$$\sigma = \frac{0,9}{1 - 0,29} = 1,3 \text{ кН/м}^2. \quad (1.35)$$

Найдём значение  $\sigma$  в т.  $A_0(1)$  по (1.29)

$$\sigma = \frac{20}{1 + 0,29} = 15,5 \text{ кН/м}^2. \quad (1.36)$$

Значение приведенного давления  $q = q_0$  в т.  $A_0$  может быть выражено через значение приведенного давления  $P = P_0$  в той же т.  $A_0$ . Этим значениям  $P_0$  и  $q_0$  соответствует на плоскости  $\xi\eta$  т.  $A_0(1)$  и  $A_0(2)$ , лежащие на одной и той же характеристике  $\xi = \chi + \varphi = \text{const}$  второго семейства.

Таким образом здесь имеют место интегралы уравнений предельного равновесия [58], следовательно вдоль характеристики  $A_0(1)$  и  $A_0(2)$  известно:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{P_0}{1 + \sin \rho} \exp[(\pi - 2\varphi) \operatorname{tg} \rho] = \frac{20}{1 + 0,29} \exp[(180^\circ - 2 \cdot 127^\circ) 0,31] = \\ &= 15,5 \exp[(-1,29) 0,31] = 15,5 \cdot 0,91 = 14,1 \text{ кН/м}^2, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где  $\varphi = \theta + \varepsilon = 90^\circ + 37^\circ = 127^\circ$ .

Найдем значение  $q_0$  в т.  $A_0(2)$  по формуле [58]

$$q_0 = P \frac{1 + \sin \rho}{1 + \sin \rho} \exp(-\pi \operatorname{tg} \rho) = 20 \cdot 1 \cdot 0,03 = 0,6 \text{ кН/м}^2. \quad (1.38)$$

А  $\sigma$  в т.  $A_0(2)$  будет равно

$$\sigma = \frac{P_0}{1 + \sin \rho} = \frac{0,6}{1 + 0,29} = 0,5 \text{ кН/м}^2. \quad (1.39)$$

Комбинированная область на плоскости  $\xi\eta$  теперь значительного упрощается. Прямоугольный  $\Delta A_2(2) A_8 A_3$  и  $\Delta O A_5 A_2(1)$  превращается в т.  $A_2(2)$  и  $A_2(1)$ , а прямоугольник  $A_5 A_2(1) A_2(2) A_8$  – в один отрезок характеристики  $A_2(1) A_2(2)$ . Перейдем к решению задачи для весомой среды (см. рис. 1.9), построим плоскость  $\lambda\mu$  и пользуясь свободой выбора параметров  $\lambda$  и  $\mu$ , можно вдоль положительной и отрицательной полуосей задать  $\lambda = -\mu = x$ . Данные первой краевой задачи дают возможность построить решения канонических уравнений во всех зонах на плоскости  $\lambda\mu$  (см. рис. 1.9). Найдем значение  $\sigma$  в т.  $A_1$  по рекуррентным формулам (1.27) и (1.28):

$$\sigma = 0,5 + 2 \cdot 0,5(\pi - \pi) \operatorname{tg} 17^\circ + 0 - 0 - (5 - 2) \operatorname{tg} 17^\circ = 0,5 + 3 \cdot 0,31 = -0,43 \text{ кН/м}^2.$$

Значение в точках  $A_4 - A_8$  находим по такому же принципу, используя рекуррентные формулы. Вдоль отрезка характеристики  $A_5A_8$  значения  $x$  и  $y$  найдем по следующим формулам [58]:

$$x = \frac{a \cos(\varphi - \varepsilon)}{2 \sin \varepsilon} \exp\left[\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} \varepsilon\right], \quad y = x \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon). \quad (1.40)$$

Полученные результаты в заданных точках будут равны следующим значениям:

$$\begin{array}{l} \text{т. } A_0 \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \text{ м,} \\ y = 0, \\ \sigma = 14,1 \text{ кН/м}^2, \\ \varphi = 127^\circ. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{т. } 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \\ \sigma = 42,3 \text{ кН/м}^2, \\ \varphi = 90^\circ. \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{т. } A_2 \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \text{ м,} \\ y = 0, \\ \sigma = 38,5 \text{ кН/м}^2, \\ \varphi = 127^\circ. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{т. } A_3 \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \text{ м,} \\ y = 0, \\ \sigma = 1,3 \text{ кН/м}^2, \\ \varphi = 180^\circ. \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{т. } A_6 \left\{ \begin{array}{l} x = 3,5 \text{ м,} \\ y = 1,13 \text{ м,} \\ \sigma = 1,12 \text{ кН/м}^2, \\ \varphi = 172^\circ. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{т. } A_4 \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \text{ м,} \\ y = 1,33 \text{ м,} \\ \sigma = 1,32 \text{ кН/м}^2, \\ \varphi = 180^\circ. \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{т. } A_5 \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \text{ м,} \\ y = 1,33 \text{ м,} \\ \sigma = 40,6 \text{ кН/м}^2, \\ \varphi = 92^\circ. \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{т. } A_7 \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 1,84 \text{ м,} \\ \sigma = 1,17 \text{ кН/м}^2, \\ \varphi = 43^\circ. \end{array} \right. \end{array}$$

Данные значения  $\sigma$ ,  $\varphi$ ,  $x$ ,  $y$  сведены в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

	$i \setminus j$	0	1	2	3	4
$x$				0		
$y$	0			0		
$\sigma$				42,3		
$\varphi$				90°		
$x$			2	0	2	
$y$	1		0	1,84	0	
$\sigma$			14,1	1,17	38,5	
$\varphi$			127°	43°	127°	
$x$		5	1		1	5
$y$	2	0	1,33		1,33	0
$\sigma$		0,43	1,32		40,6	1,3
$\varphi$		180°	190°		92°	180°
$x$		3,5				3,5
$y$	3	1,13				1,13
$\sigma$		1,12				1,8
$\varphi$		172°				190°

Найдем составляющие напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по формулам [58]:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \sigma(1 \pm \sin \rho \cos 2\varphi) - H, \quad \text{где } H = k \operatorname{ctg} \rho; \quad (1.41)$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sin \rho \sin 2\varphi.$$

Полученные значения занесены в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

кН/м <sup>2</sup>	т.0	т.А <sub>0</sub>	т.А <sub>1</sub>	т.А <sub>2</sub>	т.А <sub>3</sub>	т.А <sub>4</sub>	т.А <sub>5</sub>	т.А <sub>6</sub>	т.А <sub>7</sub>	т.А <sub>8</sub>
$\sigma_x$	54,5	10,7	0,28	33,5	0,89	1,29	28,8	1,0	0,13	1,77
$\sigma_y$	29,8	17,5	0,52	43,5	1,65	0,91	52,3	1,41	1,4	1,77
$\tau_{xy}$	0	0	0	0	0	0,13	0,82	0,09	0,9	0,18

По полученным данным таблицы построим сетку характеристик для составляющих напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  (см. рис.1.10).

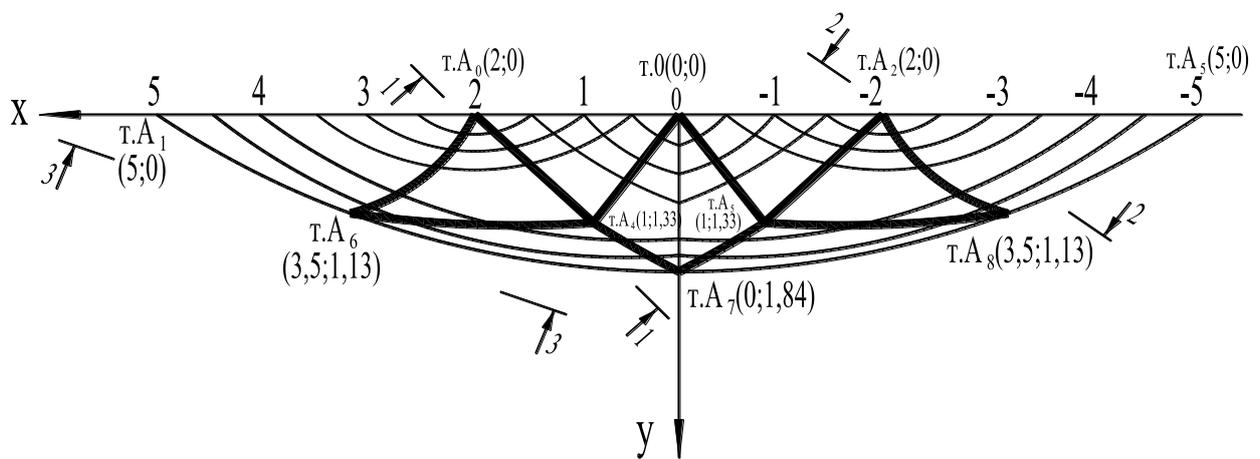


Рис. 1.10

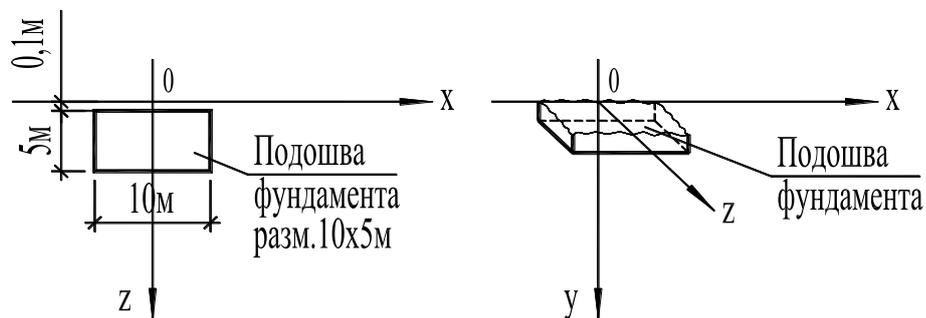


Рис. 1.11

График (рис. 1.10) построен в плоскости  $oxy$ , а в целях исследования построим в плоскости  $ozu$ , для сечения 1-1÷3-3 (рис. 1.11) давление  $P$  и  $q$  под подошвой фундамента неравномерно распределены.

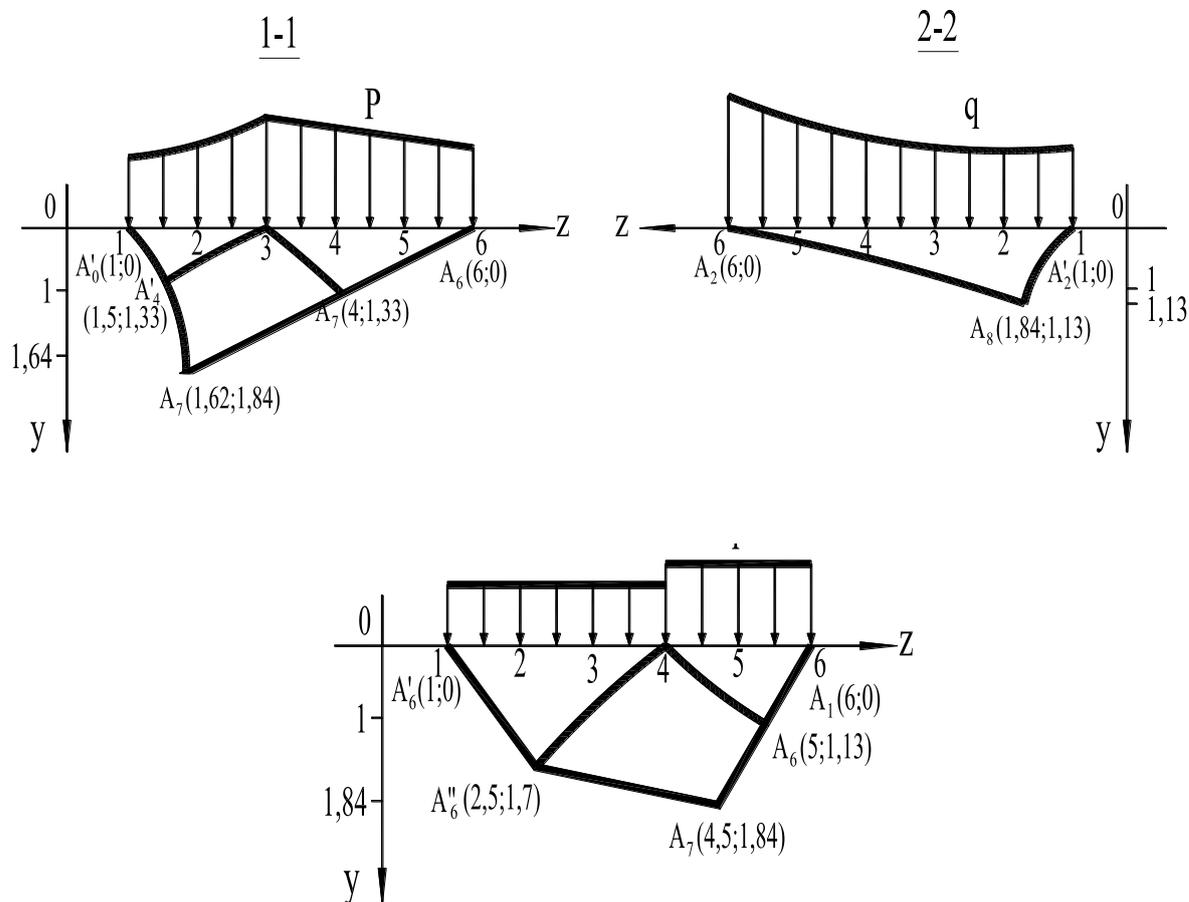


Рис. 1.12

Для сечения 1-1, координаты  $y$  точек  $A_0$ ,  $A_4$  и  $A_7$  будут те же самые, как для 1-го графика. Координаты т.  $A_0'$  по  $z$  будет равна 1, а т.  $A_0 z = 6$ , т.к. ширина фундамента равна  $b = 5$  м. Необходимо найти координаты  $z$  и  $y$  для т.  $A_4'$  и координату  $z$  для т.  $A_4$  по рекуррентным формулам

$$1,33 - 0 = (x - 5) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 37^\circ\right); \quad (1.42)$$

$$1,33 = (x - 5) \operatorname{tg} 53^\circ;$$

$$1,33 = (x - 5)(-1,33);$$

$$1,33 = -1,33x + 6,65; \quad x = \frac{5,32}{1,33} = 4; \quad x = z;$$

$$\text{т. } A_4 \begin{cases} z = 4\text{м;} \\ y = 1,33\text{м.} \end{cases} \quad (1.43)$$

Найдём координату  $z$  для т.  $A_0'$  тоже по рекуррентным формулам

$$\text{т. } A_0' \begin{cases} z = 3\text{м;} \\ y = 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

Найдём координаты т.  $A_4'$  и т.  $A_7'$  по такому же принципу, по рекуррентным формулам (1.27) и (1.28).

$$\text{т. } A_4' \begin{cases} z = 2,0\text{м;} \\ y = 1,33 \text{ м.} \end{cases} \quad \text{т. } A_7' \begin{cases} z = 1,62\text{м;} \\ y = 1,84 \text{ м.} \end{cases} \quad (1.45)$$

По такому же принципу расчёта найдём координаты точек для сечения 1-1 ÷ 2-2.

Построение сетки характеристик для  $\tau_{xy}$ .

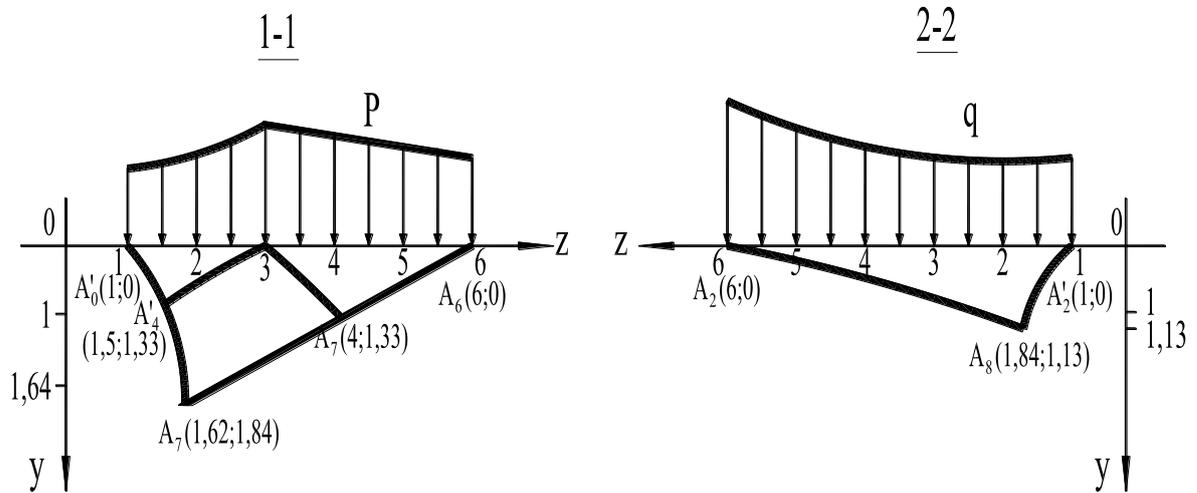


Рис. 1.13

Данные  $\tau_{xy}$ ,  $z$ ,  $y$  сведены в таблицу 1.3.

Таблица 1.3

	j\i	0	1	2
z				6
y	0			0
$\tau_{xy}$				0,09
z			3	4
y	1		0	1,33
$\tau_{xy}$			0,07	0,13
z		1	2	1,62
y	2	0	1,33	1,84
$\tau_{xy}$		0,03	0,10	0,34

### 1.5. Методика отображения физической плоскости $x, y$ на плоскость параметров $\xi\eta$ в линейных задачах

В задачах о предельном равновесии используется метод отображения плоскостей [32], в котором функции  $x = x(\xi\eta)$ ,  $y = y(\xi\eta)$  отображают многолистную комбинированную область в однолистную на  $\xi\eta$ , если в этой области нет линий скольжения.

#### 1-й случай

Рассмотрим на примере задачу, а именно предельное равновесие основания, ограниченного осью  $x$ , вдоль которого распределено приведенное нормальное давление  $P = P(x)$  (рис. 1.14). Таким образом, вдоль оси  $x$  при  $\chi = -1$  примем условие (1.29):

$$\sigma = \frac{P(x)}{1 + \sin \rho}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Решим задачу для невесомой среды, участок оси  $x$  можно разбить на два участка  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$ , в каждом из которых соответственно  $P(x)$  и  $P'(x) < 0$ . Выполним ряд построений на плоскости  $\xi\eta$ , которая должна быть многолистной, состоящей из трех листов. На листах 1 и 3 проведем

отрезки  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$ , соответствующие одноименным участкам оси  $x$ .

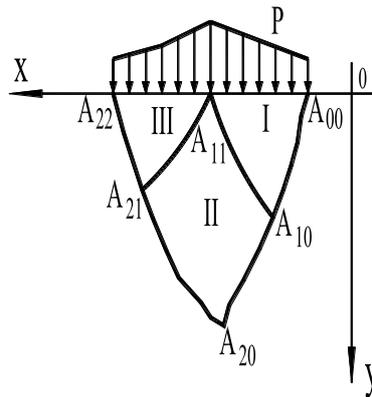


Рис. 1.14

Принимая эти отрезки за гипотенузы, построим на листах 1 и 3 прямоугольные треугольники  $A_{00}A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}A_{22}$ , а на листе 2 прямоугольник  $A_{10}A_{20}A_{21}A_{11}$ . Эти области соединены в одну трехлиственную комбинированную область, изображенную на рис. 1.15 а), путем скрепления листов вдоль отрезков характеристик  $A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}$ . Важно отметить, что такая трехлиственная область может быть развернута в однолиственную, представленную на рис. 1.15 б), если перегнуть прямоугольник  $A_{11}A_{10}A_{21}A_{20}$  вокруг  $A_{10}A_{11}$ , а затем перегнуть прямоугольный треугольник  $A_{11}A_{21}A_{22}$  вокруг  $A_{11}A_{21}$ . Отрезки  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$  на листах 1 и 2 соответствуют одноименным участкам оси  $x$ , а потому вдоль этих отрезков известны  $x = x(a)$ ,  $y = 0$ .

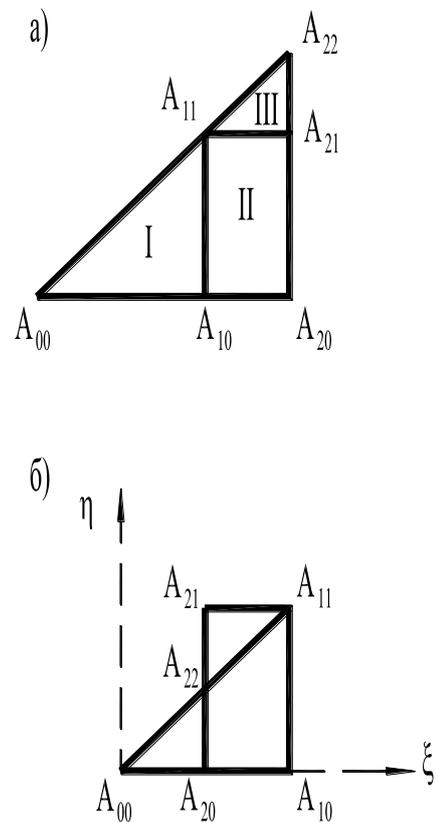


Рис.1.15

По этим данным первой краевой задачи может быть определено решение канонических уравнений в прямоугольных треугольниках  $A_{00}A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}A_{22}$  на листах 1 и 3.

Вместе с тем будут установлены значения  $x$  и  $y$  вдоль 2 - х отрезков (рис. 1.15 б) характеристик  $A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}$  на листе 2.

Эти же данные второй краевой задачи позволяют найти решение канонических уравнений в прямоугольнике  $A_{10}A_{20}A_{21}A_{11}$ .

Обратимся теперь к решению той же задачи для весомой среды, не требуя, чтобы функция  $P(x)$  на участках  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$  была монотонной. С этой целью построим на плоскости  $\lambda\mu$  комбинированную область, изображенную на рис. 1.16. В выборе параметров  $\lambda$  и  $\mu$  существует известная свобода, которая позволяет вдоль границы оси  $x$  задать  $\lambda = \mu = x - x_0$ .

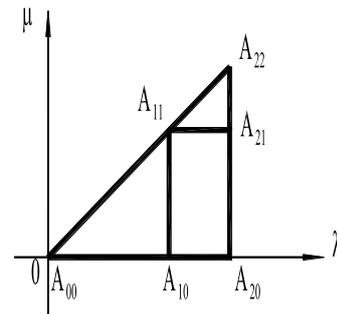


Рис. 1.16

Тогда участкам  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$  будут на плоскости  $\lambda\mu$  (рис. 1.16), соответствовать некоторые одноименные отрезки  $A_{00}A_{11}$  и  $A_{11}A_{22}$ . Вдоль  $A_{00}A_{11}A_{22}$  значения известны:

$$\chi = x + \lambda, \quad y = 0, \quad \sigma = \frac{P(x)}{1 + \sin \rho}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

По этим данным первой краевой задачи могут быть получены решения канонических уравнений в прямоугольных треугольниках  $A_{00}A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}A_{22}$ . Тем самым будут установлены значения  $x$ ,  $y$  и  $\sigma$ ,  $\varphi$  вдоль отрезков характеристик  $A_{10}A_{11}$  и  $A_{11}A_{21}$ . Эти данные второй краевой задачи позволяют найти решения канонических уравнений в прямоугольнике  $A_{10}A_{20}A_{21}A_{11}$ .

Следовательно, в комбинированной области будут определены непрерывные функции  $x = x(\lambda, \mu)$ ,  $y = y(\lambda, \mu)$ ,  $\sigma = \sigma(\lambda, \mu)$ , являющиеся решениями канонических уравнений в каждой из областей  $A_{00}A_{10}A_{11}$ ,  $A_{11}A_{21}A_{22}$  и  $A_{10}A_{20}A_{21}$ .

## 2-й случай

Рассмотрим еще задачу о сжатии пластической полосы между двумя гладкими прямоугольными пуансонами, которые создают давление  $k\sigma$  на верхней и нижней плоскостях полосы (рис. 1.17 а). В этом случае приводится 4-листная комбинированная область на плоскости  $xу$ . Выполним ряд построений на плоскости  $\xi\eta$ . Четырехлистная комбинированная область на плоскости  $\xi\eta$  значительно упрощается и будет расположена на 3-х листах. Прямоугольный треугольник  $B_1BC$  превращается в точку  $B$  или  $B_1$ , т.к. в 1-й зоне имеется равномерное напряженное состояние ( $\xi=\xi_0$ ,  $\eta=\eta_0$ ) (рис. 1.17б). Эта 3-х листовая область может развернута в однолистную, представленную на рис. 1.18.

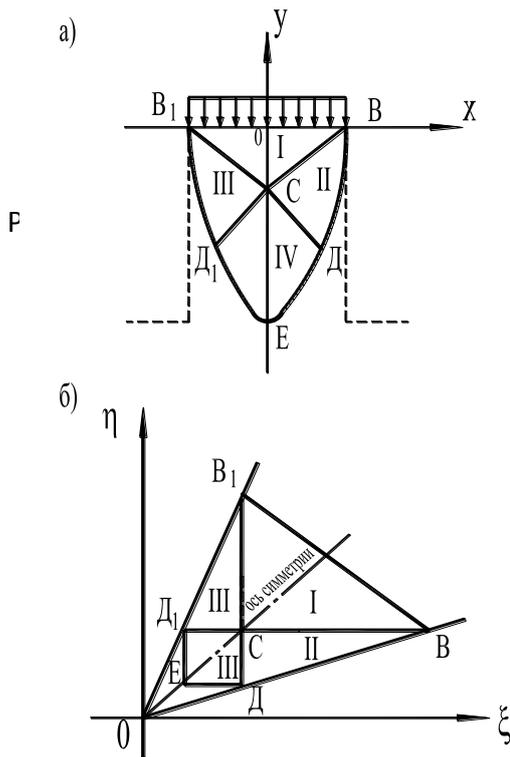


Рис. 1.17

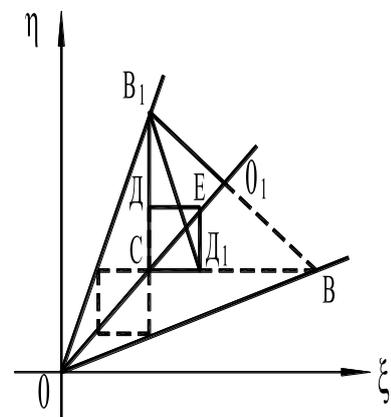


Рис. 1.18

На листе 1 проведем отрезок  $BB_1$  прямой соответствующей участку  $ox$ . Принимая этот отрезок за гипотенузу, построим на листе 1 прямоугольный треугольник  $B_1BC$ , на листах 2 и 3 построим прямоугольный

треугольник  $B_1D_1C$  и  $CDV$ , а на листе 4 построим прямоугольник  $D_1CDE$ . Эти области соединены в одну четырехлистную комбинированную область, изображённую на рис. 1.17 путем скрепления листов вдоль отрезков характеристик  $B_1D$  и  $D_1V$ . Такая четырехлистная область может быть развёрнута в однолистную, представленную на рис. 1.18, если перегнуть прямоугольник  $D_1CDE$  вокруг  $D_1C$ , треугольник  $CDV$  совместить с треугольником  $D_1B_1C$  и эти совмещенные треугольники с прямоугольником  $D_1CDE$  повернуть вокруг  $B_1C$ . Отрезок  $B_1V$  на листе 1 соответствует одноименному участку оси  $x$ , а поэтому вдоль этого отрезка известны  $x$ ,  $y = 0$  и  $\sigma = \text{const}$ .

По данным четвертой краевой задачи может быть также определено решение канонических уравнений в прямоугольных треугольниках и в прямоугольнике.

## Глава 2

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ИТЕРАЦИИ, КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПРИБЛИЖЁННЫХ ПАРАМЕТРОВ

#### 2.1. Метод итерации в решениях плоской задачи

Для решения, плоских задач методом итерации используется уравнение Лапласа [13] :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.1)$$

которое основано на том, что значение функции  $u$  в любой точке (т.О) (рис. 2.1) области  $R$  должно удовлетворять общему уравнению [13]

$$\left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bd} \right) u_0 = \frac{1}{a(a+c)} u_a + \frac{1}{b(b+d)} u_b + \frac{1}{c(c+a)} u_c + \frac{1}{d(d+b)} u_d, \quad (2.2)$$

где  $u_a, u_b, u_c, u_d$  – значения гармонической функции в четырех соседних точках А,В,С,Д. Уравнение (2.1) называется разностным уравнением для

четырёх точек. Общий метод решения этого уравнения заключается в нанесении на область  $R$  сетки со стороны квадрата  $h$  и в подборе таких значений  $u$  в каждой точке пересечения линий сетки (в узловых точках), при которых они удовлетворяют уравнению (2.2). Расстояние между линиями сетки называется шагом. Точки А, В, С, Д могут быть расположены как на линиях сетки, так и на линиях, наклоненных к сетке под углом  $45^\circ$ . В первом случае вычисления ведутся по перекрестной схеме, во втором случае - по диагональной схеме. Большинство внутренних узловых точек равно удалены друг от друга. Для таких точек уравнение (2.2) принимает вид:

$$4u_o = u_a + u_b + u_c + u_d . \quad (2.3)$$

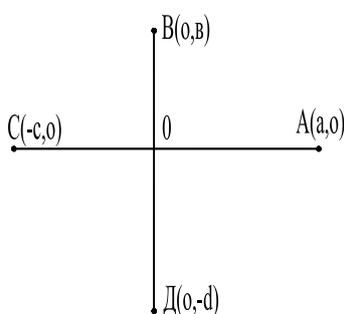


Рис. 2.1

Уравнение (2.3) называется формулой Либмана [13].

### 1-й случай

Рассмотрим применение метода итерации на примере решения плоской задачи о напряженном состоянии основания при действии полосовой равномерно распределенной нагрузки  $P_c$  с пригрузкой  $q$  (рис. 2.2). Примем следующие исходные данные: ширина полосовой нагрузки  $b=0,5$  м, угол внутреннего трения  $\varphi=18^\circ$ , удельное сцепление  $C=0,0324$  мПа, удельный вес грунта  $\gamma=17,4$  кН/м<sup>3</sup>.

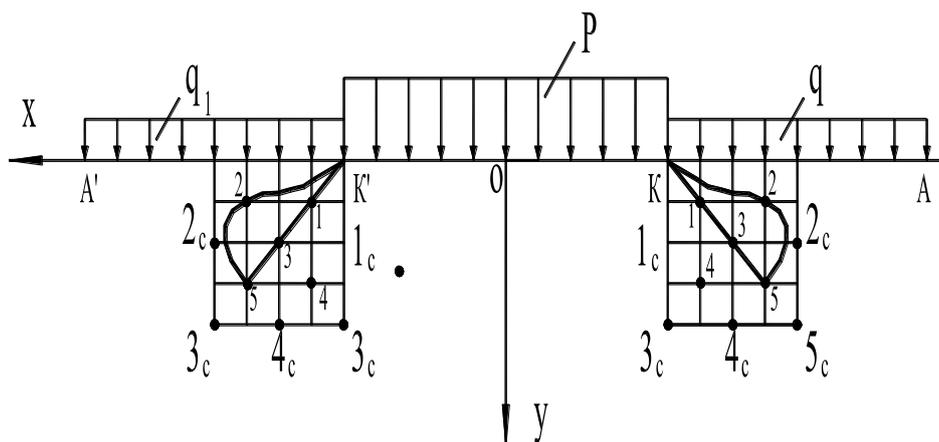


Рис. 2.2

Напряжения находим по узлам сетки с шагом 0,1 м, с общим размером поля по горизонтали (0,4 м) и по глубине (0,4 м) (рис.2.2).

Используя условия равновесия [80], уравнение совместности деформации [80] и соответствующие условия на контуре, решение задачи позволяет получить формулы для определения составляющих напряжений в точках 1с, 2с, 3с, 4с, и 5с при геометрических размерах  $OK=OK_1=0,5\text{м}$ ,  $AK=A'K'=0,8\text{ м}$  по формулам [50].

Начальную критическую нагрузку  $P$  определим по формулам [50]

$$P_{н.к} = P_{зар} = \frac{(\gamma h + c \operatorname{ctg} \varphi) \pi}{\operatorname{ctg} \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} + \gamma h = \frac{3,14(0,0087 + 0,1)}{3,1 + 0,314 - 1,57} + 0,0087 = 0,197 \text{ мПа} .$$

(2.4)

Находим напряжение и пригрузку  $q$  вдоль  $OK'$  и  $K'A'$  по формулам [58].

$$\sigma = \frac{P_{н.к}}{1 + \sin \varphi} = \frac{0,197}{1 + 0,31} = 0,150 \text{ мПа} ;$$

(2.5)

$$q = P_{н.к} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \exp(-\pi \operatorname{ctg} \varphi) = 0,002 \text{ мПа} .$$

(2.6)

Значение среднего напряжения  $\sigma$  вдоль  $K'A'$  равно:

$$\sigma = \frac{q}{1 + \sin \varphi} = \frac{0,002}{1,31} = 0,0015 \text{ мПа} .$$

(2.7)

Определим значения  $\sigma$  в точках 1с, 2с, 3с и 5с по формулам [50]

$$\begin{aligned} \sigma_y &= P - 1/\pi(P - q)(\pi - Q_1 - 1/2 \sin 2Q_1 - Q_2 - 1/2 \sin 2Q_2) ; \\ \sigma_x &= P - 1/(P - q)(\pi - Q_1 + 1/2 \sin 2Q_1 - Q_2 + 1/2 \sin 2Q_2) ; \\ \tau_{xy} &= 1/(2\pi)(P - q)(\cos 2Q_1 - \cos 2Q_2) , \end{aligned}$$

(2.8)

где  $Q_1 = \operatorname{tg} \frac{m}{n}$ ,  $Q_2 = \operatorname{tg} \frac{m}{n}$ .

Значение  $\sigma$  в точках 1с, 2с, 3с, 4с и 5с занесем в таблицу 1.1.

Таблица 1.1

№ точек	$\sigma_x$ , МПа	$\sigma_y$	$\sigma_0$	$\tau_{xy}$
1с	0,073	0,098	0,086	0,06
2с	0,122	0,193	0,158	0,01
3с	0,112	0,201	0,157	0,05
4с	0,054	0,143	0,099	0,03
5с	0,201	0,301	0,251	0,022

Найдем напряжения в точках 1, 2, 3, 4 и 5 для полного квадрата из уравнения Лапласа (2.1) по ключевым значениям. Для внутренних узловых точек, равноудаленных друг от друга, это уравнение имеет вид (2.3).

Составляем следующую систему уравнений, используя диагональный метод решения:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\sigma_1 = \sigma_{1c} + \sigma_p + \sigma_q + \sigma_3 \\ 4\sigma_3 = \sigma_4 + \sigma_2 + \sigma_1 + \sigma_3 \\ 4\sigma_5 = \sigma_3 + \sigma_{5c} + \sigma_{3c} + \sigma_{2c} \end{array} \right. ; \quad (2.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_p + \sigma_q + \sigma_{2c} \\ 4\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_5 + \sigma_2 + \sigma_4 \\ 4\sigma_4 = \sigma_3 + \sigma_{3c} + \sigma_{1c} + \sigma_{4c} \end{array} \right. . \quad (2.10)$$

Решив эту систему, получим

$$\sigma_3 = \frac{(2\sigma_p + 2\sigma_q + 2\sigma_{1c} + 2\sigma_{4c} + 2\sigma_{2c} + \sigma_{3c} + \sigma_{4c})}{12} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,003 + 2 \cdot 0,0015 + 2 \cdot 0,086 + 2 \cdot 0,099 + 2 \cdot 0,158 + 0,157 + 0,251}{12} = 0,092 \text{ мПа}$$

(2.11)

Подставляя данное значение (2.11) в уравнение системы (2.9) и (2.10), находим значение характеристик для других точек, т.е.:

$$\sigma_1 = 0,05 \text{ мПа}; \quad \sigma_2 = 0,064 \text{ мПа}; \quad \sigma_4 = 0,109 \text{ мПа}; \quad \sigma_5 = 0,150 \text{ мПа}.$$

Разложим полученные напряжения на составляющие, используя формулы (2.8), находим по формуле  $\sigma_y = 2\sigma - \sigma_x$ .

Полученные составляющие напряжений в точках 1, 2, 3, 4, 5 занесены в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

№ точек	$\sigma_x$ , мПа	$\sigma_y$	$\sigma_o$	$\tau_{xy}$
1	0,079	0,179	0,05	0,03
2	0,067	0,195	0,064	0,006
3	0,04	0,179	0,109	0,03
4	0,081	0,137	0,109	0,002
5	0,151	0,149	0,150	0,03

## 2.2. Метод конечных элементов в решениях плоских задач

На рис. 2.3 а) изображена плоская область, составленная из треугольников [13]. Каждый треугольник является конечным элементом, имеющий свой порядковый номер. Общие вершины треугольников, т.е. узлы тоже нумеруются. Кинематические граничные условия задаются в узлах и на границе.

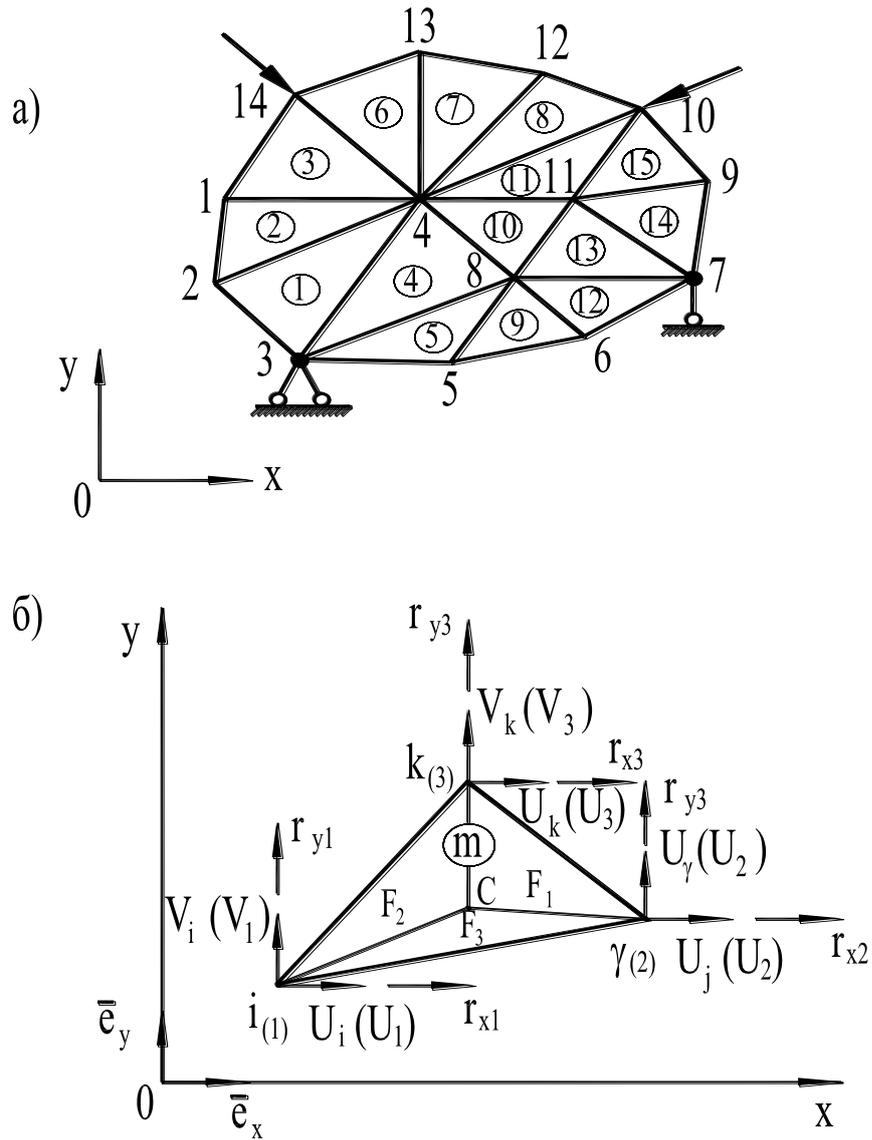


Рис. 2.3

Нагрузки на границе заменяются сосредоточенными силами в узлах. Был рассмотрен отдельно  $n$ -й треугольный конечный элемент с узлами  $i, \gamma, k$  (рис. 2.3б)). Введены локальные номера узлов 1, 2, 3, узлов против хода часовой стрелки. Была использована естественная система  $L$ - координат [13]:

$$L_1 = \frac{F_1}{F}; \quad L_2 = \frac{F_2}{F}; \quad L_3 = \frac{F_3}{F}, \quad (2.12)$$

где  $F$  – площадь треугольного конечного элемента;  $F_1, F_2, F_3$  – составляющие площади треугольника;  $C$  – произвольная точка;  $L$  – координаты удовлетворяют условию  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ .

Координаты произвольной точки  $C$  в декартовой системе выражаются через  $L$  – координаты, следующим образом:

$$X = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3; \quad Y = y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3, \quad (2.13)$$

где  $x_l, y_l (l=1, 2, 3)$  – координаты узлов треугольного элемента, индексы 1, 2, 3 соответствуют номера узлов  $i, j, k$ .

Вычисленные площади  $F, F_1, F_2$  и  $F_3$  через векторные произведения равны:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1) \bar{e}_x + (y_2 - y_1) \bar{e}_y] \cdot [(x_3 - x_1) \bar{e}_x + (y_3 - y_1) \bar{e}_y]; \\ F_1 = \frac{1}{2} [(x_2 - x) \bar{e}_x + (y_2 - y) \bar{e}_y] \cdot [(x_3 - x) \bar{e}_x + (y_3 - y) \bar{e}_y]; \\ F_2 = \frac{1}{2} [(x_3 - x) \bar{e}_x + (y_3 - y) \bar{e}_y] \cdot [(x_1 - x) \bar{e}_x + (y_1 - y) \bar{e}_y]; \\ F_3 = \frac{1}{2} [(x_1 - x) \bar{e}_x + (y_1 - y) \bar{e}_y] \cdot [(x_2 - x) \bar{e}_x + (y_2 - y) \bar{e}_y], \end{array} \right. \quad (2.14)$$

где  $\bar{e}_x, \bar{e}_y$  – единичные орты координатных осей  $O_x, O_y$ .

Формулы  $L$  – координат, выраженные через декартовы координаты  $x$  и  $y$ , с использованием формул (2.13) и (2.14):

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2F} \begin{pmatrix} a_1 & y_{23} & x_{32} \\ a_2 & y_{31} & x_{13} \\ a_3 & y_{12} & x_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

где  $a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$ ;  $y_{23} = y_2 - y_3$ ;  $x_{32} = x_3 - x_2$ .

Поле перемещений в треугольном конечном элементе описывается линейной зависимостью, аналогичной (2.13):

$$\left. \begin{array}{l} U = u_1 L_1 + u_2 L_2 + u_3 L_3; \\ v = v_1 L_1 + v_2 L_2 + v_3 L_3 \end{array} \right\}. \quad (2.16)$$

Вектор внутренних усилий равен

$$\bar{r} = (r_{x1}, r_{y1}, r_{x2}, r_{y2}, r_{x3}, r_{y3})^T. \quad (2.17)$$

Соотношения Коши, связывающие деформации с перемещениями, имеют вид [13]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.18)$$

Так как

$$\begin{aligned} u &= u(L_1(x, y), L_2(x, y), L_3(x, y)); \\ v &= v(L_1(x, y), L_2(x, y), L_3(x, y)), \end{aligned} \quad (2.19)$$

то с учётом формул, следующих из равенства (2.15) и в соответствии с линейными зависимостями (2.19) соотношения Коши имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2F}(y_{23}u_1 + y_{31}u_2 + y_{12}u_3); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2F}(x_{32}v_1 + x_{13}v_3 + x_{21}v_3); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2F}(x_{32}u_1 + y_{23}v_1 + x_{13}u_2 + y_{31}v_2 + x_{21}u_3 + y_{12}v_3). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Матрица жёсткости после всех преобразований равна

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{31} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{15} & K_{25} & K_{35} & K_{45} & K_{55} & K_{56} \\ K_{16} & K_{26} & K_{36} & K_{46} & K_{56} & K_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Эта матрица симметрична относительно главной диагонали, и ее элементы равны выражениям [15]. Приведем пример МКЭ сплошной плоской задачи.

### Случай 1-й

В качестве примера рассмотрим задачу при действии равномерно распределенной нагрузки  $p$  с дополнительной нагрузкой  $q$  вдоль оси  $OX$ . Примем следующие исходные данные:  $P = 0,160$  мПа, ширина полосовой нагрузки  $b = 0,5$  м, угол внутреннего трения  $\varphi = 18^\circ$ , удельное сцепление  $C = 0,0324$  мПа, удельный вес грунта  $\gamma = 17,4$  кН/м<sup>3</sup>,  $P < P_{н.к} = 0,197$  мПа (см. рис. 2.4).

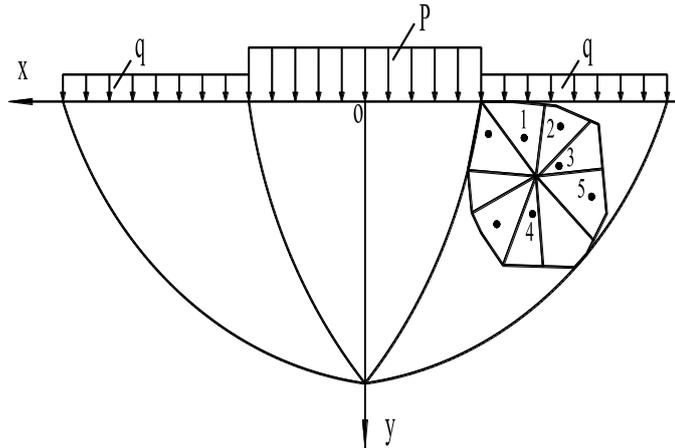


Рис. 2.4

Найдем координаты т.1.

Координаты во всех узлах исследуемых треугольников известны. Используя формулы (2.11), имеем:

$$L_1 = \frac{F_1}{F} = \frac{0,01}{0,02} = 0,5; \quad L_2 = \frac{0,0048}{0,02} = 0,24; \quad L_3 = \frac{0,0048}{0,02} = 0,24, \quad (2.22)$$

где  $F = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,02 \text{ м}^2$ ;  $F_1 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,01 \text{ м}^2$ ;

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot 0,24 \cdot 0,04 = 0,0048 \text{ м}^2;$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot 0,24 \cdot 0,04 = 0,0048 \text{ м}^2.$$

Отсюда

$$x = x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3 =$$

$$= 0,6 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,25 + 0,7 \cdot 0,25 = 0,30 + 0,125 + 0,175 = 0,60. \quad (2.23)$$

$L$  – координаты удовлетворяют условию:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (2.24)$$

$$0,5 + 0,25 + 0,25 = 1$$

$$y = 0,2 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,25 = 0,1,$$

координаты т.1: 
$$\begin{cases} x = 0,6; \\ y = 0,1. \end{cases} \quad (2.25)$$

По такому же принципу находим координаты для всех других точек. Координаты точек будут следующие

$$\begin{array}{ll} \text{т.2} \begin{cases} x = 0,8; \\ y = 0,1 \end{cases} & \text{т.3} \begin{cases} x = 0,7; \\ y = 0,2 \end{cases} \end{array} \quad (2.26)$$

$$\begin{array}{ll} \text{т.4} \begin{cases} x = 0,6; \\ y = 0,3 \end{cases} & \text{т.5} \begin{cases} x = 0,8; \\ y = 0,3. \end{cases} \end{array}$$

Вычислим  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в каждой точке через матрицу жёсткости конечного элемента (2.21).

Рассмотрим 2 конечных элемента с точками 1 и 2 (рис. 2.5).

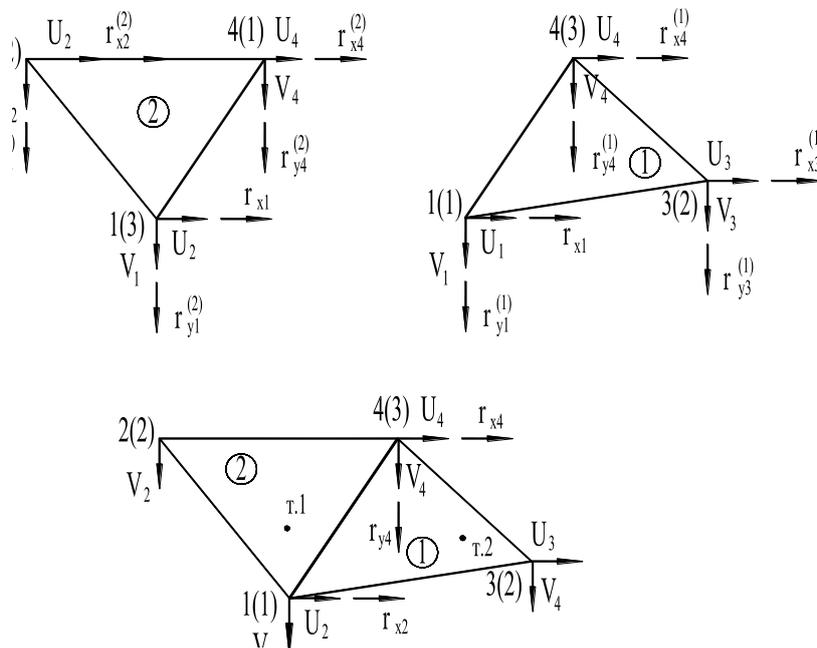


Рис. 2.5

Выпишем матрицу жесткости  $K$  (1) для конечного элемента (1) по формуле (2.21), учитывая что

$$y_{23} = 0 \qquad x_{32} = 0,3$$

$$y_{31} = -0,2 \qquad x_{13} = -0,1$$

$$y_{12} = 0,2 \qquad x_{21} = -0,3$$

$$x_{31} = 0,1$$

Следовательно, матрица жесткости будет равна

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,09\alpha, & 0 & 0,03\alpha, & -0,06\alpha, & -0,09\alpha, & 0,06\alpha, \\ 0 & 0,09\alpha & -0,006\alpha, & -0,03\alpha & 0,06\alpha, & -0,09\alpha \\ 0,03\alpha, & -0,06\alpha, & \alpha(0,01\beta + 0,04) & 0,02\alpha, & \alpha(0,03\beta - 0,04) & \alpha(0,02\beta - 0,06\gamma), \\ -0,06\alpha, & -0,03\alpha, & 0,02\alpha, & \alpha(0,01 + 0,04\beta), & \alpha(-0,02\gamma + 0,06\beta), & \alpha(0,03 - 0,04)\beta \\ -0,09\alpha, & 0,06\alpha, & \alpha(0,03\beta - 0,04) & \alpha(-0,02\gamma + 0,06\beta), & \alpha(0,09\beta + 0,04) & -0,06\alpha, \\ 0,06\alpha, & -0,09\alpha & \alpha(-0,02\gamma + 0,06\beta), & \alpha(0,03 - 0,04\beta), & -0,06\alpha, & \alpha(0,09\beta + 0,04) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Усилия в узлах для конечных элементов 1 и 2 находим по формуле [13]:

$$\bar{r}(1) = (r_{x1}^{(1)}, r_{y1}^{(1)}, r_{x3}^{(1)}, r_{y3}^{(1)}, r_{x4}^{(1)}, r_{y3}^{(1)}) \quad (2.28)$$

и

$$\bar{r}(2) = (r_{x4}^{(2)}, r_{y4}^{(2)}, r_{x2}^{(2)}, r_{y2}^{(2)}, r_{x1}^{(2)}, r_{y1}^{(2)}) \quad (2.29)$$

Векторы перемещений найдем по формуле [15], они будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \bar{v}(1) &= (u_1, v_1, u_3, v_3, u_4, v_4)^T; \\ \bar{v}(2) &= (u_4, v_4, u_2, v_2, u_1, v_1)^T. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Прежде чем составить уравнения равновесия для узлов двух конечных элементов 1 и 2, найдем сжимающие усилия в 3-м и 4-м узлах. Найдем сжимающее усилие  $\sigma_y$  в 3-м узле по формуле (2.8):

$$\sigma_{y3} = -0,159 \text{ МПа} \quad (2.31)$$

$q$  найдем по формуле [58 ]:

$$q = P \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \exp(-\pi \operatorname{tg} \varphi) = 0,160 \frac{1 - \sin 18^\circ}{1 + \sin 18^\circ} \exp(-3,14 \operatorname{tg} 18^\circ), \quad (2.32)$$

где

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{m}{n} = \frac{1,9}{0,1} = 19 \rightarrow Q_1 = 87^\circ;$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{0,4}{0,1} = 4 \rightarrow Q_2 = 76^\circ.$$

Найдем сжимающее напряжение  $\sigma_y$  в 4-м узле по формуле (2.8):

$$\sigma_{y4} = -0,002 \text{ МПа}, \quad (2.33)$$

где

$$\operatorname{tg}\theta_1 = 0 \rightarrow Q_1 = 0;$$

$$\operatorname{tg}\theta_2 = 0 \rightarrow Q_2 = 0.$$

Учитывая, что  $u_2=0$ ,  $u_1=0$ ,  $v_1=0$ ,  $u_3=0$ ,  $v_2=0$ ,  $u_4=0$ . Складываем выражения (2.28) и (2.29), получим

$$r_{y4}^{(1)} + r_{y4}^{(2)} = \sigma_{y4}. \quad (2.34)$$

Усилие в 3-м узле равно:

$$\sigma_{y3} = r_{y3}^{(1)} = \alpha(0,01 + 0,04\beta)v_3 + \alpha(0,03 + 0,04\beta)v_4. \quad (2.35)$$

Усилие в 4-м узле:

$$\alpha(0,03 - 0,04\beta)v_3 - \alpha(0,09 + 0,04\beta)v_4 - 0,09\alpha v_4 - 0,09\alpha v_3 = 2 \text{ кН/м}^2$$

;  
(2.36)

$$\begin{cases} \alpha(0,03 - 0,04\beta)v_3 - \alpha(0,09 + 0,04\beta)v_4 - 0,09\alpha v_4 - 0,09\alpha v_3 = 2 \text{ кН/м}^2; \\ \alpha(0,01 + 0,04\beta)v_3 + \alpha(0,03 + 0,04\beta)v_4 = 159 \text{ кН/м}^2; \end{cases} \quad (2.37)$$

$$52818,2 \cdot (0,01 + 0,04 \cdot 0,65)v_3 + 52818,2 \cdot (0,03 + 0,04 \cdot 0,65)v_4 = 159 \quad ; \quad (2.39)$$

$$1901,5v_3 + 2958v_4 = 159;$$

$$v_3 = \frac{159 - 2958v_4}{1901,5} = 0,084 - 1,6v_4 \quad (2.40)$$

$$52818,2 \cdot (0,09 + 0,04 \cdot 0,65)v_3 + 0,09 \cdot 52818,2v_4 - 0,09 \cdot 52818,2v_3 = 2,0;$$

$$514,7 - 9803,05v_4 - 4754v_4 - 1373v_4 - 4754v_4 - 399,3 + 7606v_4 = 2,0; \quad (2.41)$$

$$-3613v_4 = -115,4;$$

$$v_4 = 0,03 \text{ м};$$

$$v_3 = 0,084 - 1,6 \cdot 0,03 = -0,036 \text{ м}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} v_3 = 0,036 \text{ м}; \\ v_4 = 0,03 \text{ м}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Теперь рассмотрим узел 1 - й. Этот узел является общим узлом для обоих конечных элементов. По такому же принципу расчёта находим вертикальные перемещения в 1-м и во 2 - м узлах, т.е.

$$\begin{cases} v_1 = 0,004 \text{ м}; \\ v_2 = 0,038 \text{ м}. \end{cases} \quad (2.43)$$

Найдем растягивающиеся усилия в узлах т.1 и 2. Рассмотрим 1- й узел. Найдем растягивающиеся усилия в 1-м узле по формуле (2.8)

$$\sigma_{x1} = 115 \text{ кН/м}^2, \quad (2.44)$$

где

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{1,1}{0,2} = 5,5 \rightarrow \theta_1 = 80^\circ,$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{0,6}{0,2} = 3 \rightarrow \theta_2 = 72^\circ.$$

Внутренние усилия для 1-го узла равны:

$$r_{1x}^{(1)} = 0,09\alpha\beta u_1 + 0,03\alpha\beta u_3 - 0,06\alpha\beta v_3 - 0,09\alpha\beta u_4 + 0,06\alpha\beta v_4;$$

$$r_{1x}^{(2)} = 0,09\alpha u_4 + 0,06\alpha v_4 + \alpha(0,03\beta - 0,04)u_2 + \alpha(-0,002v + 0,06\beta)v_4 + \alpha(0,09\beta + 0,04)u_1 - 0,06\alpha\gamma v_1. \quad (2.45)$$

2-й узел принадлежит только к конечному элементу 2. Усилия во 2-м узле равно:

$$r_{x2}^{(2)} = 0,03\alpha\beta u_4 - 0,06\alpha v_4 + \alpha(0,01\beta + 0,04)u_2 + 0,02\alpha\gamma v_2 + \alpha(0,03\beta - 0,04)u_1 + \alpha(-0,002\beta + 0,06v)v_1. \quad (2.46)$$

Растягивающееся усилие во 2-м узле найдём по формуле (2.8)

$$\begin{aligned} \sigma_{x2} &= 0,160 - \frac{1}{3,14} (0,160 - 0,0016)(3,14 - 0 + 0 - 0 + 0) = \\ &= 0,160 - 0,1584 = 0,0016 \text{ мПа} = 1,6 \text{ кН/м}^2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Составим систему из усилий

$$\begin{cases} r_{x1}^{(1)} + r_{x2}^{(2)} = \sigma_{x1}; \\ r_{x2} = \sigma_{x2}. \end{cases} \quad (2.48)$$

Учитывая, что  $v_1 = 0, v_2 = 0, u_4 = 0, u_3 = 0, v_3 = 0, u_4$  и  $v_4 = 0$ , следовательно

$$\alpha(0,01\beta + 0,04)u_2 + \alpha(0,03\beta - 0,04)u_1 = 1,6; \quad (2.49)$$

$$52818,2(0,01 \cdot 0,65 + 0,04)u_2 + 52818,2(0,03 \cdot 0,65 - 0,04)u_1 = 1,6;$$

$$2456u_2 - 1082,8u_1 = 1;$$

$$u_2 = \frac{1,6 + 1082,8u_1}{2456} = 0,0006 + 0,44u_1. \quad (2.50)$$

Подставим  $u_2$  в уравнение (2.49) найдём значения  $u_1$  и  $u_2$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,03; \\ u_2 &= 0,0006 + 0,44 \cdot 0,03 = 0,014. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Следовательно,

$$\begin{cases} u_1 = 0,03 \text{ м;} \\ u_2 = 0,014 \text{ м.} \end{cases} \quad (2.52)$$

Горизонтальные перемещения в 3-м и 4-м узлах находим по такому же принципу расчёта.

Следовательно,

$$\begin{cases} u_3 = 0,048 \text{ м;} \\ u_4 = 0,037 \text{ м.} \end{cases} \quad (2.53)$$

Горизонтальные и вертикальные перемещения для узлов конечных элементов с т. 3, 4, 5 вычисляем по такому же принципу.

Следовательно:

для треугольника с т. 3:

$$\begin{cases} v'_{4o\delta} = 0,03 \text{ м;} \\ v'_{1o\delta} = 0,014 \text{ м;} \\ v'_2 = 0,02 \text{ м} \end{cases} \quad \begin{cases} v'_{1o\delta} = 0,03 \text{ м;} \\ v'_2 = 0,1 \text{ м;} \\ v'_{4o\delta} = 0,03 \text{ м} \end{cases}$$

(2.54)

для треугольника с т.4:

$$\begin{cases} v'_{4o\delta} = 0,03 \text{ м;} \\ v'_{1o\delta} = 0,014 \text{ м;} \\ v'_3 = 0,02 \text{ м} \end{cases} \quad \begin{cases} v'_{1o\delta} = 0,03 \text{ м;} \\ v'_3 = 0,1 \text{ м;} \\ v'_{4o\delta} = 0,03 \text{ м} \end{cases} \quad (2.55)$$

Для каждого конечного элемента находим деформации перемещений по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2F} (y_{23}u_1 + y_{31}u_2 + y_{12}u_3); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2F} (x_{32}v_1 + x_{13}v_2 + x_{21}v_3); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2F} (x_{32}u_1 + y_{32}v_1 + x_{13}u_2 + y_{31}v_2 + x_{21}u_3 + y_{12}v_3) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\text{Для треугольника с т.1: } \begin{cases} \varepsilon_x = 0,55; \\ \varepsilon_y = 0,46; \\ \gamma_{xy} = 0,062 \end{cases}$$

$$\text{Для треугольник с т.2: } \begin{cases} \varepsilon_x = 0,36; \\ \varepsilon_y = 0,45; \\ \gamma_{xy} = 0,15 \end{cases}$$

$$\text{Для треугольника с т.3: } \begin{cases} \varepsilon_x = 0,23; \\ \varepsilon_y = 0,43; \\ \gamma_{xy} = 0,74 \end{cases}$$

$$\text{Для треугольника с т.4: } \begin{cases} \varepsilon_x = 0,23; \\ \varepsilon_y = 0,003; \\ \gamma_{xy} = 0,72 \end{cases}$$

$$\text{Для треугольника с т.5: } \begin{cases} \varepsilon_x = 0,013; \\ \varepsilon_y = 0,004; \\ \gamma_{xy} = 0,1 \end{cases}$$

Найдем напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в т. 1, 2, 3, 4, 5 по формулам [13]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\gamma^2} (\varepsilon_x + \gamma \varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\gamma^2} (\gamma \varepsilon_x + \varepsilon_y); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\gamma)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

Найденные составляющие напряжения в упругой зоне сведем в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

№ точек	$\sigma_x$ (МПа)	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
1	0,060	0,115	0,01
2	0,036	0,124	0,004
3	0,01	0, 115	0,02
4	0,059	0,100	0,001
5	0,15	0, 102	0,01

Проведённый анализ показал, что расчёты, выполненные методом итерации и методом конечных элементов практически совпадают.

### 2.3. Метод переменных параметров для решения линейных задач грунтовой среды

Метод переменных параметров в теории упруго пластичности, разработан в [13] и является итерационным.

$$\text{Равенство} \quad \varepsilon_x = \sigma_x \left( \frac{1}{E_c} + \frac{1-2\gamma_0}{3E_0} \right) - (\sigma_x + \sigma_z) \cdot \left( \frac{1}{2E_c} - \frac{1-2\gamma_0}{3E_0} \right) \quad (2.58)$$

получается из соотношения [15] данного закона изменения формулы, выразив из него деформацию  $\varepsilon_x$  с учётом, что

$$l = \frac{\varepsilon_0}{k}; \quad \varepsilon_0 = \frac{l}{3}$$

и

$$\sigma_0 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3}.$$

Если ввести обозначения

$$\frac{1}{E_{II}} = \frac{1}{E_C} + \frac{1-2\gamma_0}{3E_0}; \quad \gamma_{II} = \frac{3E_{II}}{2E_C} - 1,$$

то выражение (2.58) запишется в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_{II}} [\sigma_x - \gamma_{II} (\sigma_y + \sigma_z)], \quad (2.59)$$

совпадающего по формуле с уравнением закона Гука. По аналогии получаются выражения и для остальных деформаций, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_{II}} [\sigma_x - \gamma_{II} (\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{3\tau_{xy}}{E_C}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_{II}} [\sigma_y - \gamma_{II} (\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{3\tau_{yz}}{E_C}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_{II}} [\sigma_z - \gamma_{II} (\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{3\tau_{zx}}{E_C} \end{aligned} \right\}. \quad (2.60)$$

Равенства (2.60) отличаются от закона Гука тем, что содержат не постоянные упругости материала, а переменные параметры  $E_{II}$ ,  $\nu_{II}$ , которые в свою очередь зависят от секущего модуля, который определяется из уравнения [13]:

$$E_C = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad \text{где } G_C = \frac{E_C}{3}. \quad (2.61)$$

Интенсивность напряжений определяется из [13] по формуле

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (2.62)$$

а  $\varepsilon_i$  – интенсивность деформации по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} . \quad (2.63)$$

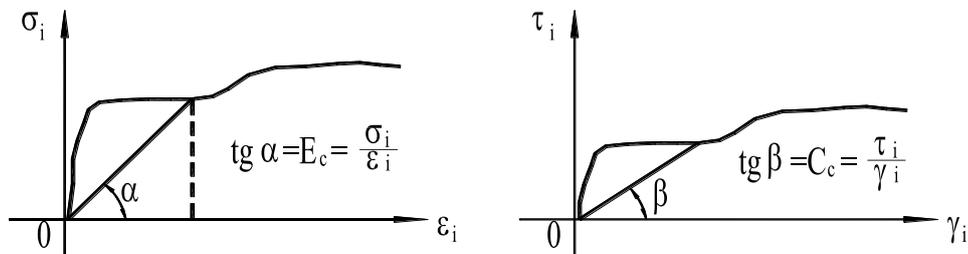


Рис. 2.6

Поскольку секущий модуль зависит от напряжений и деформаций в данной точке тела (рис. 2.6), то  $E_{\Pi}$  и  $\nu_{\Pi}$  являются функциями координат, таким образом, равенство (2.63) как бы является физическими соотношениями теории упругости для неоднородного тела.  $E_{\Pi}(x, y, z)$  и  $\nu_{\Pi}(x, y, z)$  могут быть найдены лишь после решение задачи, т.е. по известным напряжениям и деформациям можно определить  $\sigma_i(x, y, z)$ ,  $\varepsilon_i(x, y, z)$  и затем  $E_{\Pi}(x, y, z)$ ,  $\nu_{\Pi}(x, y, z)$ .

Применяя для решения задачи МКЭ на первом этапе решаем упругую задачу, когда модуль упругости и коэффициент поперечной деформации считаются постоянными и равными соответственно  $E_{\Pi}$  и  $\nu_{\Pi}$ .

Вычислив напряжения и деформации, определяем  $\sigma_i^{(1)}$ ,  $\varepsilon_i^{(1)}$ , а следовательно  $E_c^{(1)} = \frac{\sigma_i^{(1)}}{\varepsilon_i^{(1)}}$ , в каждой точке тела. На втором этапе решаем задачу, в кото-

рой в качестве физических соотношений используем равенства (2.63), содержащие  $E_c^{(1)}$ ,  $E_{\Pi}^{(1)}$  и  $\nu_{\Pi}^{(1)}$ .

Полученные таким образом решения позволяют вычислить  $E_c^{(2)}$ ,  $E_{II}^{(2)}$  и  $\nu_{II}^{(2)}$  и перейти к следующему приближению. Последовательность решений сходится к искомому решению задачи теории пластичности, путем проверки каждого решения, т. е. полученных напряжения на условия предельного равновесия [80]:

$$\frac{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yz}}{(\sigma_z + \sigma_y + 2c \operatorname{ctg} \varphi)^2} = \sin^2 \varphi. \quad (2.64)$$

По найденным значениям напряжения и деформаций полученных методом конечных элементов для каждой точки среды определяется интенсивность напряжений и деформаций по формулам  $\sigma_i(x, y, z)$  и  $\varepsilon_i(x, y, z)$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2.65)$$

и

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (2.66)$$

И затем определяем по формулам  $E_{II}(x, y, z)$  и  $\nu_{II}(x, y, z)$  [13]

$$\frac{1}{E_{II}} = \frac{1}{E_C} + \frac{1 - 2\nu_0}{3E_0}; \quad \nu_{II} = \frac{3E_{II}}{2E_C} - 1, \quad (2.67)$$

где  $E_C^{(1)} = \frac{\sigma_i^{(1)}}{\varepsilon_i^{(1)}}$  в каждой точке среды.

Найденные значения  $E_{II}$ ,  $\nu_{II}$  и найденные значения напряжений и деформаций по МКЭ подставляем в известные формулы (2.66) и (2.67). По вычисленным заново деформациям определяем напряжения в каждой точке тела по такому же методу, как и в первом приближении. Полученные значения напряжений заносим в таблицу 2.2.

Значения напряжений смешанной плоской задачи в пластической зоне.

Таблица 2.2.

№ точек	$\sigma_y$ , МПа	$\sigma_z$ ,	$\tau_{yz}$
1	0,078	0,180	0,03
2	0,064	0,193	0,006
3	0,04	0,176	0,03
4	0,80	0,135	0,002
5	0,149	0,147	0,003

Картина распределения напряжений в упругой среде, полученных в данной главе аналогична картине распределения напряжений, исследуемых с помощью поляризационно-оптического метода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведённых исследований решены поставленные задачи и получены следующие выводы.

1. Известные расчётные методы, используемые в современной нормативной литературе, не всегда обеспечивают возможность найти экономичные и эффективные решения при проектировании фундаментов и насыпей на слабых грунтах.

2. Разработанные методики расчётов несущей способности слабых оснований с помощью физических и численного метода позволяют исследовать напряжённо - деформированное состояние в любых точках грунтов под действием внешней нагрузки, в которых происходит начало развития и завершение пластических областей, напряжённое состояние в этих случаях не может нарушить предельного равновесия массива грунта.

3. Лабораторные опыты показали, что для моделирования напряженно - деформированного состояния толщи слабого грунта можно использовать материал с высокой оптической чувствительностью – желатин, близкий к грунтам по физическим свойствам. Это позволило обосновать методику проведения экспериментов и правильный выбор материала (желатина).

4. Проверка полученных решений задач, с применением поляризационно - оптического метода, обладающего наглядностью и метода конечных элементов (МКЭ) дала достоверный результат.

5. Установлена экспериментально и теоретически обоснована на приведенных моделях аналогия картин распределения изохром, изоклин в упругой и пластической зоне, но напряжённое состояние которых имеет существенное различие.

6. Экспериментальные графики изменения напряженного состояния упругопластической среды подобны графикам, выполненными численным методом при действии внешней нагрузки.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абелев М.Ю. Слабые водонасыщенные глинистые грунты как основания сооружения [Текст]: учеб. пособие / М.Ю. Абелев. - М: Изд. МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1973.-218с.
2. Абелев М.Ю. Строительство промышленных и гражданских сооружений на слабых водонасыщенных грунтах [Текст]: учеб. пособие/ М.Ю. Абелев.- М.: Стройиздат, 1983.-248 с.
3. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость.[Текст]: учеб.- мет.пособие / Х. К. Абен. -Таллин: Валгус, 1975. -218с.
4. Александров А.Я. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела [Текст]: учеб. пособие / А.Я. Александров, М.Х. Аметренков.- М.: Наука, 1973.-576 с.
5. Амарян Л. Г. Разумные экстремальные задачи [Текст] : учеб. пособие / Л. Г. Амарян. - СПб.: Издательство Гиппократ, 1995.-230с.
6. Амарян Л. Г.Свойства слабых грунтов и методы их изучения [Текст]: учеб. для вузов / Л. Г. Амарян. - СПб.: Издательство Недр, 1990.-220с.
7. Арцыбашев В.А. Гамма–метод измерения плотности [Текст] : учеб. пособие / В.А. Арцыбашев.-М.:Атомиздат,1965.-143 с.
8. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] : учеб. пособие / Н.И. Безухов. -М.: Высшая школа, 1968.-512с.
9. Березанцев В.Г. Расчёт оснований сооружений [Текст]: учеб. пособие / В.Г. Березанцев. - Л.: Стройиздат, 1970.-207с.
10. Березанцев, В.Г. Расчёт прочности оснований и сооружений [Текст]: учеб.- метод. пособие / В.Г. Березанцев.- Л.: Госстройиздат, 1960. – 138 с.

11. Березанцев В. Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды [Текст]: учеб.-метод. пособие / В. Г. Березанцев. - М.: Гостехиздат, 1952.- 120с.
12. Ван Цзи -Де. Прикладная теория упругости [Текст]: учеб. пособие / Ван Цзи -Де. - М.: Физматгиз, 1959.-400с.
13. Варданян Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст]: учеб. пособие / Г.С. Варданян, В.И. Андреев. - М.: АСВ, 1995.-502с.
14. Вольтмир А.С. Устойчивость деформируемых систем [Текст]: учеб. пособие / А.С. Вольтмир. - М.: Физматгиз, 1967.-307с.
15. Воронцов В.К. Фотопластичность [Текст]: учеб. пособие / В.К. Воронцов, П.И. Полухин. - М.: Металлургия, 1969.-400с.
16. Герсеванов Н.И. Свайные основания и расчёт фундаментов сооружений [Текст] / Н.И Герсеванов // Собр. соч.: т. 1.- М.: Стройвоенмориздат, 1948.- 270 с.
17. Глушков Г.И. Изыскания и проектирование аэродромов [Текст]: учебное пособие / Г.И. Глушков, Б.С. Раев – Богословский.- М.: «Транспорт», 1972.-280 с.
18. Голушкевич С.С. Плоская задача теории предельного равновесия сыпучей среды [Текст]: учеб. пособие / С.С. Голушкевич.- М.: Гостехиздат, 1948.- 258 с.
19. Голушкевич С.С. Статика предельных состояний грунтовых масс[Текст]: учеб. пособие / С.С. Голушкевич.- М. : Гостехиздат , 1957.- 408 с.
20. Горбунов-Посадов М.И. Устойчивость фундаментов на песчаном основании [Текст]: учеб. пособие / М.И. Горбунов-Посадов. - М.: Гостройиздат, 1962.- 230с.

21. Далматов Б.И. Проектирование свайных фундаментов в условиях слабых грунтов [Текст]: учеб. пособие для вузов / Б.И. Далматов, Ф.К. Лапшин, Ю.В. Россихин. - М.: Высшая школа, 1975.- 295 с.
22. Дубов К.А., Методика и некоторые результаты исследования плоского поля плотности грунтов с помощью гамма – излучения  $Co^{60}$  [Текст] / К.А. Дубов, Голиков, П.П. Зольников // Сборник трудов молодых учёных Уральского Промстройниипроекта. - Свердловск, 1988.- С.42-47.
23. Дубов К.А. Некоторые закономерности образования и развития пластических деформаций в глинистом грунте [Текст] / К.А. Дубов // Сборник материалов третьей научно-технической конференции УПИ.- Свердловск, 1980.-С.33-37.
24. Дубов К.А. Форма уплотнённого ядра, образующегося в глинистом основании под жёстким фундаментом при критической нагрузке [Текст] / К.А. Дубов // Основания, фундаменты и подземные сооружения: сб. науч. тр. НИИОСП .- Екатеринбург, 1972.- № 63.-С.45-49.
25. Емельянов В.А. Полевая радиометрия влажности и плотности почвогрунтов [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.А. Емельянов.- М.: Атомиздат, 1970.- С.123с.
26. Завельский Ф.С. Определение плотности и влажности грунта методом поглощения гамма-излучения в условиях геометрии узкого и широкого пучка [Текст] / Ф.С. Завельский // Разведка и охрана недр : учеб. пособие , №9, 1969.- С.55-64.
27. Кагановская С.Е. Исследование устойчивости глинистого основания с помощью экранов [Текст] / С.Е. Кагановская // Основание, фундаменты и механика грунтов: межвуз. сб. науч. тр. № 3.-Екатеринбург: Изд-во Уральского гос. горного ун-та ,1973.- Вып. 3.- С.58-64.

28. Качанов Л.М. Основы теории пластичности [Текст]: учеб. пособие для вузов / Л.М. Качанов. - М.: Наука, 1969.-420с.
29. Кац А.М. Теория упругости [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.М. Кац.- М. - Л.: Гостехиздат, 1956.- 251с.
30. Кравченко Т.И. Исследование устойчивости оснований фундаментов на слабых грунтах [Текст] / Т.И. Кравченко, О. Г. Вострикова // Известия Ивановского отделения ПАНИ при ИГТА. Секция технических наук.- Иваново, 2003.- С.100 -106.
31. Кравченко Т. И. Исследование прочностных характеристик желатина в качестве упругопластической среды с определением коэффициента вязкости [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // / Изв. вузов. Строительство. Вып.1. – 2007. С.108 -112.
32. Кравченко Т.И. Оценка предельного критического усилия на упругопластическую грунтовую среду от действия треугольной нагрузки [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Изв. вузов. Горный журнал.- 2012.- №5.- С.68-72.
33. Кравченко Т.И. Оценка предельного критического усилия на упругопластическую грунтовую среду от действия треугольной нагрузки [Текст] / Т.И. Кравченко, В.В. Филатов // Изв. вузов. Горный журнал.- 2015.- №5.- С.68-72 .
34. Кравченко Т.И. Оценка критической нагрузки, обусловленной отрицательной формой техногенного рельефа [Текст] / Т.И. Кравченко, В.В. Филатов // Вест. Курганского гос. ун-та. Сер. Естественные науки.- 2015.- № 35. - С.67-70.
35. Кравченко Т. И. Современный взгляд на проблемы технических наук [Текст] / Т.И. Кравченко, В.В. Филатов // Сб. науч. тр. по итогам II международной научно - практической конференции (10.09.15 г.). - Уфа, 2015.- № 2. - С. 108 -113.

36. Кравченко Т.И., Филатов В.В. Оценка критической нагрузки, обусловленной отрицательной формой техногенного рельефа [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Изв. Саратовского гос. ун-та. Серия: Наука о земле.- 2015 г.- № 4. - С.67-70.
37. Кравченко Т.И. Аппроксимация аналитических зависимостей критических усилий и максимальных глубин их проявления линейными функциями [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Вест. Тувинского гос. ун-та.- 2015.- №3.- С.27-31 .
38. Кравченко Т.И. Критические усилия в слабых водонасыщенных грунтовых средах под действием внешних нагрузок [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Вест. Воронежского гос. ун-та.- 2015.- №4.- С.139-145.
39. Кравченко Т.И. Прогноз устойчивости слабых грунтовых сред физическими и численным методами [Текст]: монография / Т. И. Кравченко, В. В. Филатов. - Изд-во Владимирского гос. ун-та. -2015. -86 с.
40. Кравченко Т.И. Прогноз устойчивости однослойных и многослойных грунтовых сред в линейной постановке задач [Текст]: монография / Т. И. Кравченко, В. В. Филатов. - Изд-во Владимирского гос. ун-та. - 2015.-142 с.
41. Кравченко Т. И. Расчёт однослойных и многослойных грунтовых сред от действия внешних нагрузок в линейной постановке задач [Текст]: учеб. пособие / Т. И. Кравченко, В. В. Филатов. - Изд-во Владимирского гос. ун-та. - 2015. - 146 с.
42. Кравченко Т.И. Дефекты зданий и сооружений. Усиление строительных конструкций [Текст] / Т. И Кравченко, В.В. Филатов // Сборник научных статей XIX научно-методической конференции ВИТУ(19.03. 2015 г.)/ ВИ (ИТ) ВА МТО (ВИТУ).- СПб, 2015 г.- С.162-167.

43. Криворотов А.П. Экспериментальные исследования несущей способности песчаного основания [Текст] / А.П. Криворотов // Основания, фундаменты и механика грунтов: межвуз. сб. науч.тр.- Екатеринбург: Изд-во Уральского гос. горного ун-та, 1962.- № 5.- С. 34-41.
44. Лейпунский О.И. Распределение гамма-квантов в веществе [Текст]: учеб. метод.- пособие / О.И. Лейпунский.- М., Физматгиз, 1960.-115 с.
45. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статической теории обработки наблюдений [Текст]: учеб. для вузов / Ю.В. Линник.- 2-е изд. - М.: Физматгиз, 1962.-349 с.
46. Малинин А.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Малинин.- М.: 1975.-415с.
47. Малышев М.В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений [Текст]: учеб. пособие / М.В. Малышев.- 1-е изд. - М.: Машстройиздат, 1980.- 227с.
48. Малышев М. В. О совместной работе жёстких фундаментов и нелинейно-деформируемого основания [Текст] / М.В. Малышев, Ю.К. Зарецкий, В.Н. Широков, В.А Черемных // Сб. науч. тр. к VIII Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению.- М.: Стройиздат, 1973.- 224 с.
49. Малышев М.В. Прочность грунтов и устойчивость оснований сооружений [Текст] : учеб. пособие / М.В. Малышев.- 2 - е изд. - М.: Машстройиздат,1994.- 312с.
50. Малышев М.В. Механика грунтов. Основания и фундаменты [Текст]: учеб. пособие / М.В. Малышев.- М.: Ассоциация строительных вузов, 2000. - 319с.

51. Маслов Н.Н. Основы механики грунтов и инженерной геологии [Текст]: учеб.-метод. пособие / Н.Н. Маслов. - М.: Высшая школа, 1968.- 629с.
52. Маслов Н.Н. Прикладная механика грунтов [Текст]: учеб. пособие / Н.Н. Маслов. - М.: Машстройиздат, 1949.-328с.
53. Мурзенко Ю.Н. Некоторые особенности и область применения решения смешанной упругопластической задачи в расчётах оснований [Текст] / Ю.Н. Мурзенко // Экспериментально - теоретические исследования нелинейных задач в области оснований и фундаментов: сб. НПИ. - Новочеркасск, 1979.- С. 106 -139.
54. Мурзенко Ю.Н. Расчёт оснований зданий и сооружений в упругопластической стадии работы с применением ЭВМ [Текст]: учеб.- метод. пособие / Ю.Н. Мурзенко. - Л: Стройиздат, 1989.- 234 с.
55. Мурзенко Ю.Н. Упругопластическое состояние основания при полосовой нагрузке [Текст] / Ю.Н. Мурзенко // Труды НПИ, т.2. - Новочеркасск, 1971.- С. 315-456.
56. Нетребко В.П. Исследование метода линейной фотовязкоупругости [Текст] / В.П. Нетребко, Г.З. Шарафутдинов // Отчет о НИР (42<sup>й</sup>). - М.: Издательство МГУ, 1974.- 191с.
57. Нетребко В.П. Исследование метода линейной фотовязкоупругости [Текст] / В.П. Нетребко, Г.З. Шарафутдинов // Отчет о НИР (ч. 1). - М: Издательство МГУ, 1972.- 227с.
58. Петраков А.А. Механика грунтов [Текст]: /учеб. пособие Дон НАСА / А.А. Петраков, В. В. Яркин, Р. А.Таран, Т. В. Казачек. - Украина, Макеевка: Из-во Дон НАСА, 2004.- 79 с.
59. Пигулевский М.Х. Физикоо-механические свойства рыхлых дорожных материалов [Текст]: учеб.- метод. пособие / М.Х. Пигулевский.- М.: Транспечать, 1929.-210 с.

60. Ржаницын А.Р. Расчёт сооружений с учётом пластических свойств материала [Текст]: учеб. для вузов / А.Р. Ржаницын.- М.: Стройиздат, 1954. - 288с.
61. Роза С.А. Механика грунтов [Текст]: учеб. для вузов / С.А. Роза.- М.: Высшая школа, 1962. – 229с.
62. Скибин Г.М. Экспериментальное обоснование расчётной модели упругопластического основания ленточных фундаментов [Текст] / Г.М. Скибин // Изв. вузов. Строительство.- Новосибирск : Из-во Сибстрин, 2005.- С.28 -33с.
63. СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений [Текст]: Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83\* -1995.-Введ.1985-01-01.- М.: Госстройиздат, 2000.- 40 с.
64. СП24.13330.2011.Свайные фундаменты [Текст]: Актуализированная редакция СНиП2.02.03-85 -1995.- Введ.1987- 01- 01.- М.:Стройиздат,1995. -63 с.
65. СП 121.13330.2012. Аэродромы [Текст]: Актуализированная редакция СНиП 32.03.96-1996.- Введ.1997-01-01.- М.: Минстрой России, 2000. - 59 с.
66. СП 20.13330.2011. Нагрузки воздействия [Текст]: Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\* -1996. - Введ.1987-01-01. - М.: ЦИТП Госстроя СССР, 2003.- 36 с.
67. СП 34.13330.2012. Автомобильные дороги [Текст]: Актуализированная редакция СНиП 2.05.02.-85. - Введ.1987-01-01. М.: Стройиздат, 2003. - 70 с.
68. Справочник инженера-строителя под ред. Г.А. Федотова /«Проектирование автомобильных дорог». - М.: Транспорт, 1992.- 423с.

69. Соколовский В.В. Теория пластичности [Текст]: учеб. для вузов / В.В. Соколовский.- 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Гостехиздат, 1969.- 608с.
70. Соколовский В.В. О плоской задаче теории пластичности [Текст] / В.В. Соколовский // Прикладная математика и механика.-Т.1.-1949.- Вып. 4.- 280с.
71. Соколовский В.В. Теория пластичности [Текст]: учеб. для вузов / В.В. Соколовский.- 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Гостехиздат, 1950.- 203с.
72. Строганов А.С. Несущая способность глинистого водонасыщенного основания [Текст] / А.С. Строганов // Основания, фундаменты и механика грунтов: учеб. пособие. - М., 1977. - № 5.-110 с.
73. Строганов А.С. Прочность оснований сооружений [Текст] / А.С. Строганов // Основания, фундаменты и механика грунтов: учеб. для вузов. - 1983.- № 23. - 127с.
74. Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов [Текст]: монография / З.Г. Тер-Мартirosян . - М.: Изд-во АСВ, 2009. - 552 с.
75. Терцаги К. Теория механики грунтов [Текст]: учеб. пособие / К. Терцаги. - М.: Госстройиздат, 1961.- 507с.
76. Тимошенко С.П. Теория упругости [Текст]: учеб. пособие / С.П. Тимошенко, Дж Гудьер. - М., 1975.- 386 с.
77. Ухов С.Б. Механика грунтов, основания и фундаменты [Текст]: учеб. пособие / С.Б. Ухов. - М.: Высшая школа, 2007.- 566 с.
78. Учайкин В.В. Механика. [Текст] / Л. Файлон. М. // Основы механики сплошных сред: учеб. пособие. - М.: Институт компьютерных исследований, 2002. - 281 с.
79. Файлон Л. Оптический метод исследования напряжений [Текст]: учеб. пособие / Л. Файлон. М.-Л.: Гостоптехиздат, 1940. - 402 с.

80. Феронский В.И. Радиоизотопные методы исследований в инженерной геологии [Текст]: учеб.- метод. пособие / В.И. Феронский, А.И. Данилин, В.Т. Дубинчук. - М.: Атомиздат, 1968.-210 с.
81. Фёдоров И.В. Некоторые задачи упругопластического распределения напряжений в грунтах, связанные с расчётом оснований [Текст] / И.В. Фёдоров // Сб. института механики АН СССР: в 2 т. - М., 1958.- С. 151- 160.
82. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости [Текст]: учеб. пособие / М.М. Филоненко-Бородич.- М.: Физматгиз, 1959. - 364 с.
83. Флорин В.А. Основы механики грунтов [Текст]: учеб.- метод. пособие в 2-х т./В.А. Флорин. - М., 1959, 1961.-284 и 293 с.
84. Фрохт Н.М. Фотоупругость [Текст]: учеб. пособие в 2-х т./ Н.М. Фрохт. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950. - 450 и 488 с.
85. Хаар М.Е. Основы теоретической механики грунтов [Текст]: учеб.- метод. пособие / М.Е. Хаар. - М., 1971.- 341 с.
86. Хилл Р. Математическая теория пластичности [Текст]: учеб.-метод. пособие / Р. Хилл.- М.: Гостехиздат, 1956. - 407 с.
87. Цытович Н.А. Механика грунтов [Текст]: учеб. пособие / Н.А. Цытович. - 4 изд. - М.: Высшая школа, 1983. -281 с.
88. Шарафутдинов Г.З. Фотовязкоупругость [Текст]: учеб. пособие / Г.З. Шарафутдинов.- М.: Издательство МГУ, 1987. - 198 с.
89. Эдельштейн Е.И. Координатно-синхронный поляриметр КСП-10 [Текст]: материалы к Всесоюзной конф. по методу фотоупругости / Е.И. Эдельштейн. -Таллин: АНЭ ССР, 1970.- С. 115 - 119.
90. Reginato, Van Bavel. Soil water seacuresent with genna attennation. Soil soi. Soc. of Amer. Proc., 28 p., 1964.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
------------------	---

### Часть 1

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛАБЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕД ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ НАГРУЗОК

Глава 1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЗУЧЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ГРУНТОВОГО МАССИВА В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ .....	6
1.1. Характеристика слабых водонасыщенных грунтовых оснований сооружений .....	6
1.2. Влияние подземных вод на физические свойства грунтов....	15
1.3. Фазы деформированного состояния грунтов в зависимости от статики нагружения .....	16
1.4. Развитие деформаций в глинистых грунтах различной консистенции при действии возрастающей нагрузки .....	19
1.4.1. Развитие деформаций под заглублёнными штампами .....	19
1.4.2. Формы и размеры уплотнённого ядра под действием внешних нагрузок .....	20
1.5. Методы расчёта критических нагрузок на грунты основания .....	29
Глава 2. РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКОГО УСИЛИЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ И В МНОГОСЛОЙНЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕДАХ.....	35
2.1. Актуальность задачи и вопросы, возникающие при её решении .....	35
2.2. Решение плоской задачи от действия внешних треугольных нагрузок в полупространстве .....	36
2.2.1. Метод расчёта критического усилия в полупространстве от действия треугольной нагрузки с помощью рекуррентных формул.....	36

2.2.2. Метод расчёта критического усилия через коэффициент упругого полупространства.....	43
2.2.3. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону равнобедренного треугольника.....	48
2.2.4. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону неравностороннего треугольника.....	55
2.2.5. Расчёт критического усилия от действия отрицательной трапециевидной нагрузки.....	61
2.2.6. Расчёт критического усилия от действия отрицательной треугольной нагрузки.....	68

### Глава 3. РАСЧЁТ КРИТИЧЕСКОГО УСИЛИЯ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫХ ГРУНТОВЫХ СРЕД.....76

3.1. Расчёт критического усилия для некоторых видов внешних нагрузок в слоистой грунтовой среде.....	77
3.1.1. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону прямоугольного треугольника.....	78
3.1.2. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону равнобедренного треугольника.....	84
3.1.3. Расчёт критического усилия от действия нагрузки по закону неравностороннего треугольника.....	90
3.1.4. Расчёт критического усилия от действия отрицательной трапециевидной нагрузки.....	97
3.1.5. Расчёт критического усилия от действия отрицательной треугольной нагрузки.....	105

### Глава 4. АППРОКСИМАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ВНЕШНИХ НАГРУЗОК..... 113

4.1. Нагрузка по закону равнобедренного треугольника.....	113
4.2. Нагрузка по закону неравностороннего треугольника.....	116
4.3. Отрицательная нагрузка по закону трапеции.....	117
4.4. Отрицательная нагрузка по закону треугольника.....	119

### ВЫВОДЫ К 1-Й ЧАСТИ..... 122

**Часть 2**  
**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ**  
**МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД ФИЗИЧЕСКИМИ**  
**И ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ**

Глава 1. ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ ПОЛЯРИЗАЦИОННО- ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ.....	124
1.1. Аналитическая иллюстрация оптического метода исследования напряжений (ОМИН).....	124
1.2. Изучение напряженного состояния моделей грунтовых сред. ....	130
1.3. Поляризационные приборы .....	132
1.4. Загрузочное приспособление.....	134
1.5. Методика экспериментальных исследований.....	135
1.6. Исследование напряжённого состояния на моделях грунта.....	141
1.6.1. Изготовление моделей.....	141
1.6.2. Определение цены полосы модели .....	142
1.7. Результаты экспериментальных исследований .....	143
 Глава 2. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ГРУНТОВЫХ СРЕД РАДИОИЗОТОПНЫМ МЕТОДОМ.....	 148
2.1. Метод гамма-излучения для определения плотности.....	148
2.2. Зависимость массовых коэффициентов ослабления глинистых грунтов от химического состава.....	154
2.3. Зависимость массы коэффициента ослабления глинистых грунтов от влажности .....	162
2.4. Оценка погрешности и чувствительности метода гамма-излучений.....	168

Глава 3. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	173
3.1. Результаты исследований напряжений по закону равномерно-распределённой нагрузки.....	174
3.2. Результаты исследований напряжений по закону треугольной нагрузки.....	185
Глава 4. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ СРЕД.....	192
4.1. Исследование напряжённого состояния методом конечных элементов.....	192
4.2. Результаты исследований напряжений от действия треугольных нагрузок .....	193
ВЫВОДЫ КО 2-Й ЧАСТИ .....	202

### **Часть 3**

## **ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ ОТ ДЕЙСТВИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ**

Глава 1. ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ ПОД ФУНДАМЕНТАМИ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ.....	204
1.1. Исследование критического усилия основания взлётно- посадочной полосы (ВПП) .....	204
1.2. Исследование критического усилия в основании насыпей, состоящих из отвалов продуктов переработки химической промышленности.....	207
1.3. Исследование критического усилия основания стального резервуара.....	211

Глава 2. ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ УСИЛИЙ В ОСНОВАНИЯХ НАСЫПЕЙ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ .....	214
2.1. Существующие методы исследования насыпей .....	215
2.2. Исследование критических усилий основания окружной автодороги в г. Санкт-Петербурге .....	217
2.3. Исследование критического усилия основания откоса автомобильной дороги .....	221
2.4. Исследование влияния критического усилия уплотнения грунта в межсвайном пространстве .....	224
2.5. Исследование критического усилия основания насыпи автодороги Иваново – Кострома .....	227
2.6. Исследование критического усилия оснований отвалов торфяных грунтов .....	233
2.7. Исследование критического усилия основания отвала торфяного грунта, укрепленного песчаными сваями .....	237
 Глава 3. ИЗУЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ ФУНДАМЕНТОВ НА СЛАБЫХ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТАХ .....	241
3.1. Гибкие фундаменты .....	241
3.2. Методика исследования устойчивости оснований гибких фундаментов .....	242
ВЫВОДЫ К 3-Й ЧАСТИ .....	246

#### **Часть 4**

### **ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТЫХ СРЕД ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ**

Глава 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ СЫПУЧИХ СРЕД С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ .....	248
1.1. Метод решения задачи о несущей способности сыпучей среды грунтовых оснований .....	248

1.2. Методы решения плоской задачи предельного равновесия сыпучей среды .....	252
1.3. Аналитические методы решения слоистых сред с использованием краевых задач теории предельного равновесия.....	255
1.3.1. Приближённый метод решения краевых задач .....	255
1.3.2. Первая краевая задача .....	256
1.3.3. Вторая краевая задача.....	257
1.3.4. Третья краевая задача .....	257
1.3.5. Четвёртая краевая задача .....	258
1.4. Приближенный метод решения канонических уравнений в плоских задачах грунтовой среды .....	259
1.5. Методика отображения физической плоскости $x, y$ на плоскость параметров $\xi\eta$ в линейных задачах .....	268
<b>Глава 2. ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ИТЕРАЦИИ, КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПРИБЛИЖЁННЫХ ПАРАМЕТРОВ.....</b>	<b>272</b>
2.1. Метод итерации в решениях плоской задачи .....	272
2.2. Метод конечных элементов в решениях плоских задач.....	276
2.3. Метод переменных параметров для решения линейных задач грунтовой среды.....	289
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>294</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>295</b>

*Научное издание*

КРАВЧЕНКО Татьяна Ивановна  
ФИЛАТОВ Владимир Викторович  
ДУБОВ Константин Алистархович

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОГО УСИЛИЯ  
НА СЛАБЫЙ ГРУНТ

Монография

*Издается в авторской редакции*

Подписано в печать 17.03.16.  
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 18,14. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.