Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

«Владимирский государственный университет имени

Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Е.В.ОРЛИК

ИМУЩЕСТВЕННОЕ СТРАХОВАНИЕ

*Практикум*

Владимир 2016

УДК 519.64:368

ББК 22.17

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, профессор

кафедры «Математика и информатика»

Московского университета имени С.Ю.Витте

*Крисько О.В.*

Имущественное страхование: практикум/ Е.В.Орлик; Владим.гос.ун-т. – Владимир. – 2016. 60 с.

Практикум включает в себя примеры и задачи по расчету страховых премий в различных видах имущественного страхования, определению страховых выплат, оценке финансовой устойчивости страховой организации.

Представленный материал может быть использован студентами экономических специальностей и прикладной математики всех форм обучения как дополнение к лекционному курсу и практических занятий по страховой математике.

**Предисловие.**

Настоящее практикум предназначен для распространения среди студентов знаний в области актуарной математики и теории риска и содержит примеры и задачи по расчетам тарифных ставок, страховых сумм, взносов и выплат в различных задачах имущественного страхования.

Выполнение предложенных задач позволит усвоить методологические основы страховой деятельности, получить практические навыки расчетов страховых премий и выплат, которые могут быть в дальнейшем использованы для определения финансовой устойчивости страховой организации.

Материал практикума составлен на основе прочитанных автором курсов «Страхование и актуарные расчеты» для студентов специальности «Математические методы в экономике» и «Математика и компьютерные науки», «Актуарная математика» для студентов специальности «Прикладная математика и информатика», а также «Страхование и управление рисками» для студентов специальности «Бизнес-информатика». Практикум может быть полезным для студентов других специальностей, изучающих в том или ином объеме страховую математику.

Данный практикум является практическим приложением учебного пособия Е.В.Орлика [5] и состоит из нескольких тем, последовательно раскрывающих механизм расчета страховых премий. В начале каждой темы приведены примеры с подробным решением. В конце тем дан набор задач для самостоятельного решения.

В представленном материале широко использованы задачи из книги Бауэрcа и др. [2], пособий Ю.Н.Миронкиной и др. [1], Г.И. Фалина и А.И.Фалина [6]. Автор также использовал материалы книг Корнилова [4], Лаппо [3], а также оригинальные задачи автора.

Учебный план для квалификации бакалавр предусматривает значительный объем внеаудиторных часов для самостоятельной работы, поэтому предлагаемый практикум может быть использован студентами как дополнение к лекционному курсу и практическим занятиям при освоении дисциплин, включающих изучение страховой математики и страховых рисков.

**Тема 1**. **Общие задачи в имущественном страховании**

**Пример 1.1*.*** Застраховано *N* = 15 автомобилей, причем *M* = 10 из них иномарки. В течение страхового периода произошло *n* = 5 аварий. Найти вероятность того, что в этих авариях оказалось *m* = 3 иномарки, если вероятность попасть в аварию у всех автомобилей одинакова.

**Решение**. Искомая вероятность соответствует гипергеометрическому распределению и равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:



Окончательно: 

**Пример 1.2.** В страховом портфеле *n1* = 12 договоров от угона автомобиля марки *m1*, *n2* = 20 договоров от угона автомобиля марки *m2*, *n3* = 18 договоров от угона автомобиля марки *m3*. Вероятности угона автомобиля марки *m1, m2* и *m3* равны соответственно *p1* = 0,1; *p2* = 0,2 и *p3* = 0,3. Найти вероятность того, что будет угнан один автомобиль.

**Решение.** Обозначим через *А* событие – угнан автомобиль. Возможны следующие предположения (гипотезы): *H1* – угнан автомобиль марки *m1*, *H2* – угнан автомобиль марки *m2*, *H3* – угнан автомобиль марки *m3****.***

Согласно формуле полной вероятности, вероятность события *А*, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) *H1, H2,…,Hn****.***, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события *А*:



Применяя эту формулу к условиям примера имеем:



Окончательно: 

**Пример 1.3*.*** Взяв данные из предыдущей задачи, определить вероятность того, что угнана была машина марки *m1*, машина марки *m2* и машина марки *m3*.

**Решение.** Данная задача решается с помощью формулы Байеса (формулы проверки гипотез).

Пусть событие *А* может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) *H1, H2,…,.Hn*, образующих полную группу. Если событие *А* уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Байеса:



Применяя эту формулу к условиям примера, получим:







**Пример 1.4*.*** Страховщик застраховал *n* = 10 автомобилей от аварии. Вероятность аварии одинакова и равна *p* = 0,2. Определить вероятность того, что в аварию попадут *k* = 4 машины.

**Решение.** Если производятся испытания при которых вероятность появления события *А* в каждом отдельном испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события* *А*.

Вероятность того, что в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *р (0 < р < 1),* событие наступит ровно *k* раз (безразлично, в какой последовательности), определяется *формулой Бернулли*:



Применяя данную формулу к условиям примера получим:



***Замечание***. При больших значениях *n* и *k* непосредственное применение формулы Бернулли становится затруднительным. Для решения задачи можно воспользоваться встроенной функцией Excel:

*БИНОМ.РАСПР(k; n; p; kod*)

Применение этой формулы для предыдущего примера дает следующий результат:

*БИНОМ.РАСПР(4; 10; 0,2; 0*) = 0,08808.

Другой способ расчета вероятности при больших значениях *n* является применение одного из асимптотического приближения, а именно, формулы Лапласа.

***Локальная теорема Лапласа.***

Вероятность того, что в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *р*, событие наступит ровно *k* раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше *n*)



Функции *φ(x)* табулирована, а также легко вычисляется.

**Пример 1.5.** В портфеле страховщика 243 договоров. Вероятность страхового случая одинакова для всех и равна *p* = 0,25. Найти вероятность того, что страховых событий наступит ровно 70 раз.

**Решение**. По условию *n* = 243; *k* = 70; *р* = 0,25; *q* = 0,75. Так как *n* достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:



По таблице №1 приложения находим *φ*(1,37) = 0,1561. Искомая вероятность равна:

*P243(70)* = 0,1561/6,75 = 0,0231.

*БИНОМ.РАСПР*(*70; 243; 0,25; 0*) = 0,0227. Ошибка 1,8 %.

***Интегральная теорема Лапласа***.

Вероятность того, что в *n* независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна *р*, событие наступит не менее *k1* раз и не более *k2* раз, приближенно равна

*P(k1, k2) = Ф(x2) – Ф(x1).*

где *Ф(х)* – функция Лапласа, определяемая как



Данная функция табулирована, а также может быть вычислена средствами Excel:

*НОРМ.РАСПР*(*x; Среднее; Стандартное\_откл; kod*).

**Пример 1.6*.*** Вероятность появления события в каждом из *n* = 100 независимых испытаний постоянна и равна *p* = 0,8. Найти вероятность того, что событие появится:

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;

б) не менее 75 раз;

в) не более 74 раз.

**Решение**.

а) Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

 

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т. е. *Ф(-х) = -Ф (x)*, получим

*Р100(75; 90) = Ф(2,5) - Ф(-1,25) =Ф(2,5) + Ф(1,25).*

По таблице № 2 приложения найдем:

*Ф(2,5) =0,4938; Ф(1,25) =0,3944.*

Искомая вероятность

*Р100(75; 90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882*.

*НОРМ.РАСПР*(-1,25; 0; 1; 1) = 0,1057.

*НОРМ.РАСПР*( 2,50; 0; 1; 1) = 0,9938.

*Р100(75; 90) = НОРМ.РАСПР*(2,50;0;1;1) - *НОРМ.РАСПР*(-1,25;0;1;1) = 0,8881.

б) Требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений события может быть равно 75, либо 76, ..., либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять *k1*= 75, *k2* = 100. Тогда *x1*= -1,25, *x2* = 5.

По таблице № 2 приложения найдем *Ф*(1,25) =0,3944; *Ф*(5) = 0,5. Искомая вероятность

*Р100(75; 100) = Ф(5) - Ф(- 1,25) =Ф(5) + Ф(1,25) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.*

в) События - «*A* появилось не менее 75 раз» и «*А* появилось не более 74 раз» противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно

*Р100(0; 74) = 1 - Р100(75; 100) = 0,1056*

**Пример 1.7*.*** Договором страхования от угона машин застраховано 100 000 автомобилей. Вероятность того, что автомобиль будет угнан, равна 0,0001. Найти вероятность того, что будет угнано ровно 15 автомобилей.

**Решение**.

*Формула Бернулли*: *БИНОМ.РАСПР*(15; 100 000; 0,0001; 0) = 0,03472.

*Формула Лапласа*: *НОРМ.РАСПР*(15, 0; 1; 0) = 5∙10-50.

Полученное существенное расхождение полученных результатов объясняется тем, что в данном случае формула Лапласа не работает.

***Распределение Пуассона***.

Если число испытаний велико (*n>>1*), а вероятность появления события в каждом испытании очень мала (*р<<1*), то используют другую асимптотику, а именно приближенную формулу:



где *k -* число появлений события в *п* независимых испытаниях, *λ = пр* (среднее число появлений события в *п* испытаниях), и говорят, что случайная величина распределена по *закону Пуассона.*

По условию, *n* = 100 000, *р* = 0,0001, *k* = 15. Число *n* велико, а вероятность *р*мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона.

Найдем *λ*. *λ* = *np* = 100000∙0,0001 = 10.



Воспользуемся для расчета встроенной функцией Excel.

*ПУАССОН.РАСПР*(*k, λ, kod*) = *ПУАССОН.РАСПР*(15,10,0) = 0,03472.

**Пример 1.8*.*** Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

**Решение**. Число *n* = 500 велико, вероятность *р* = 0,002 мала и рассматриваемые события (повреждение изделий) независимы, поэтому имеет место формула Пуассона. Найдем *λ*. *λ* = *np* = 500∙0,002 = 1.

a) Найдем вероятность того, что будет повреждено ровно 3 (*k* = 3) изделия:



б) Найдем вероятность того, что будет повреждено менее трех изделий:

*P(k<3)= Р*(*0*) + *Р*(*1*) + *P*(*2*) = *е*-1+*е*-1 + е-1/2 =(5/2)∙0,36788 =0,9197.

в) Найдем вероятность *P(k >3)*  того, что будет повреждено более трех изделий. События “повреждено более трех изделий” и “повреждено не более трех изделий” противоположны, поэтому искомая вероятность равна:

*P(k >3) = 1 – P(k < 3) – P(k = 3) = 1 - 0,9197 – 0,0613 = 0,0184*.

г) Найдем вероятность *P1* того, что будет повреждено хотя бы одно изделие. События «повреждено хотя бы «одно изделие» и «ни одно из изделий не повреждено» - противоположные, следовательно, искомая вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие, равна:

*P1 = 1 – P(k = 0) = 1 – e-1= 0,632.*

**Пример 1.9*.*** Среднее число аварий автомобилей за один месяц равно трем. Найти вероятность того, что за 2 месяца произойдет: а) четыре аварии; б) менее четырех аварий; в) не менее четырех аварий.

**Решение**. По условию, *λ* = 3, *t* = 2, *k* = 4. Воспользуемся формулой Пуассона



а) Искомая вероятность того, что за два месяца произойдет 4 аварии



б) Событие «произошло менее четырех аварий» произойдет, если наступит одно из следующих несовместных событий: произошло 3 аварии, произошло 2 аварии, произошла 1 авария или не произошло ни одной аварии. Эти события несовместны, поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:



в) События «произошло менее 4 аварий» и «произошло не менее четырех аварий» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 2 месяца произойдет не менее четырех аварий



***Нормальное распределение.***

Нормальное распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической статистике.

Случайная величина *x* *нормально распределена* с параметрами *a* и *σ*, *σ* > 0, если ее плотность распределения *f(x)* и функция распределения *F(x)* имеют соответственно вид:



Часто используемая запись *Х* ~ *N(a, σ)* означает, что случайная величина *Х* имеет нормальное распределение с параметрами *a* и *σ*.

Если *a = 0* и *σ = 1*, то говорят, что случайная величина *Х* имеет *стандартное нормальное распределение* *(Х ~ N(0, 1))*. Плотность и функция распределения стандартного нормального распределения имеют вид:









**Пример 1.10**.Математическое ожидание *a* и среднее квадратичное отклонение *σ,* нормально распределенной случайной величины *X,* равны 10 и 2, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

**Решение*.*** Воспользуемся формулой



Подставив *α* = 12, *β* = 14, *а* =10 и *σ* = 2, получим *Р* (12 < *X* < 14) = *Ф*(2) - *Ф*(1). По таблице приложения 2 находим: *Ф*(2)=0,477, *Ф*(1) = 0,341. Искомая вероятность *Р*(12 < *X* < 14) = 0,136.

*НОРМ.РАСПР*(2; 0; 1; 1) = 0,9773. *НОРМ.РАСПР*(1; 0; 1; 1) = 0,8413.

Искомая вероятность *Р*(12 < *X* < 14) = 0,9773 - 0,8413 = 0,136.

**Задачи для самостоятельного решения.**

**Задача 1.1*.*** Застрахованы от пожара 15 домов, причем пять из них – коттеджи. За страховой период произошло 3 пожара. Найти вероятность того, что хотя бы один из домов окажется коттеджем (событие *А*).

**Ответ:** 0,736.

**Задача 1.2.** Предприятие желает заключить договор страхования предпринимательского риска, связанного с вероятными претензиями потребителей по причинам возможного выпуска бракованных изделий на трех технологических линиях. Предприятие отгружает изделия вагонными партиями, в каждой из которых 20 % изделий изготовлено на линии №1, 30 *% -* на линии №2, 50 % - на линии №3. Вероятности выпуска кондиционных изделий на линиях соответственно равны: №1 - 99,4 %, №2 - 99,5 %, №3 - 99,3 %. Определить вероятность того, что взятое случайным образом из указанной партии изделие окажется бракованным.

**Ответ:** 0,62 %.

**Задача 1.3.** Предприятие желает заключить договор страхования предпринимательского риска, связанного с вероятными претензиями потребителей по причинам возможного выпуска бракованных изделий на трех технологических линиях, вероятности брака на линиях соответственно равны: №1 - 3,0 %, №2 - 1,6 %, №3 - 2,3 %. Изделия от всех трех линий поступают в один контейнер, причем производительность линии №1 в три раза выше, а линии №3 соответственно в 1,5 раза меньше, чем линии №2. Определить вероятность того, что взятое случайным образом из контейнера изделие окажется бракованным.

**Ответ:** 2,56 %.

**Задача 1.4.** Торговая фирма желает застраховать риск невозврата товарного кредита, который предоставляют клиентам три ее филиала. Известно, что в филиале №1 не было возвращено 0,2 % выданных кредитов, в №2 - 0,7 *%,* в №3 - 1,3 *%.* Филиал №1 заключил 1200 договоров товарного кредита, №2 - 920, №3 - 1650.

Определить вероятность невозврата товарного кредита в целом по торговой фирме.

**Ответ:** 0,8 %.

**Задача 1.5.** Страховщик полагает, что в период улучшения инвестиционного климата в регионе акции страховой компании будут расти в цене с вероятностью 65 %, в период ухудшения - 20 %, в период стагнации - 30 %. По экспертным оценкам, в течение любого периода времени, вероятности улучшения, ухудшения и стагнации инвестиционного климата в регионе соответственно равны: 30 %, 20 %, 50 %.

Курс акций страховой компании растет. Чему равна вероятность того, что анализируемый период совпал с периодом улучшения инвестиционного климата в регионе?

**Ответ:** 50,6 %.

**Задача 1.6**. Страховая компания (*СК*) планирует заключить договор страхования с крупным предприятием. По экспертным оценкам, если основной конкурент *СК* не станет одновременно претендовать на заключение договора, то вероятность заключения договора - 45 %, в противном случае - 25 %. Согласно собранной информации, вероятность действий конкурента - 40 %. Чему равна для *СК* вероятность заключения договора страхования? С учетом собранной информации уточнить вероятность того, что конкурент не будет претендовать на заключение договора страхования с данным клиентом.

**Ответ:** 27 %.

**Задача** 1.**7**. В *СК* обсуждается маркетинг нового страхового продукта, выпускаемого на рынок. Директор *СК* желал бы, чтобы новый страховой продукт превосходил по своим характеристикам соответствующие продукты конкурентов. На базе предварительных экспертных оценок *СК* определяет вероятность того, что новый страховой продукт более высокого качества по сравнению с аналогами в 50 %, одного уровня - в 30 %, более низкого - в 20 %.

Опрос потенциальных страхователей показал, что новый страховой продукт конкурентоспособен. Из прошлого опыта проведения опросов известно, что если продукт действительно конкурентоспособен, то предсказание такого же вывода имеет вероятность, равную 70 %. Если продукт такой же, как и аналогичные, то вероятность того, что опрос укажет на его превосходство, равна 40 %, а если хуже, чем аналогичные, то соответственно 20 %. С учетом результата опроса оценить вероятность того, что новый страховой продукт действительно более высокого качества и, следовательно, более конкурентоспособен, чем продукты-аналоги.

**Ответ:** 68,6 %.

**Задача 1.8.** Вероятность гибели объекта по договору страхования - 0,002. Какова вероятность того, что в 1000 страховых договорах произойдет 5 случаев гибели объектов?

**Ответ:** 3,6 %.

**Задача 1.9.** Вероятность гибели объекта по договору страхования - 0,001. Какова вероятность того, что в 2000 страховых договорах гибель объекта произойдет соответственно не менее, чем в двух и не более, чем в четырех договорах страхования?

**Ответ:** 51,4 %.

**Задача 1.10.** Страховщик планирует заключить 10000 договоров страхования автотранспортных средств. Прошлые статистические данные позволяют предположить, что вероятность страхового случая по договору составляет - 1 %. Чему равна вероятность того, что в планируемом количестве договоров произойдет от 95 до 120 страховых случаев?

**Ответ:** 68,2 %.

**Задача 1.11*.*** Среднее число аварий автомобилей за один месяц равно двум. Найти вероятность того, что за 4 месяца произойдет: а) три аварии; б) менее трех аварий; в) не менее трех аварий.

**Ответ:** 0,0286; 0,0137; 0,9863.

**Задача 1.12.** Страховщик использует модель нормального распределения для анализа вероятных выплат по страховому портфелю. Среднее значение страховой выплаты - 980, стандартное отклонение - 120.

1. Найти вероятность того, что размер страховой выплаты составит:

а) более 1250;

б) меньше 850;

в) больше 700 и меньше 1200;

г) отклонится от среднего значения страховой выплаты меньше, чем на 50;

д) отклонится от среднего значения больше, чем на 50.

**Ответ:** 0,012; 0,137; 0,956; 32,3; 67,7.

1. С вероятностью 0,899 определить интервал, в котором будет находиться размер страховой выплаты. Какова при этом условии максимальная величина отклонения страховой выплаты от среднего значения?

**Ответ:** 783 – 1177; 197.

**Задача 1.13.** Определить ожидаемый размер средней страховой выплаты по страховому портфелю, если предполагается, что размеры страховых выплат являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону с дисперсией - 22500. Известно, что 18 % страховых выплат по портфелю имеют размер более 1000.

**Ответ:** 863.

**Задача 1.14.** Страховщик полагает, что размеры выплат по страховому портфелю являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону. Известно, что 14 % выплат имеют размеры менее 800 и 36,4 % - более 1100. Определить ожидаемый размер страховой выплаты и стандартное отклонение страховой выплаты.

**Ответ:** 1027, 210.

**Задача 1.15.** Размер страховой выплаты по портфелю договоров имущественного страхования подчиняется нормальному закону распределения: ожидаемая средняя выплата - 375, стандартное отклонение - 25.

Найти вероятность того, что размер страховой выплаты составит:

а) от 350 до 400;

б) не более 450;

в) больше 300.

**Ответ:** 68,3 %; 84,1 %; 99,9 %.

**Задача 1.16**. Страховщик прогнозирует возможную величину выплат по страховому портфелю и полагает, что размер выплаты подчиняется нормальному закону распределения: ожидаемая средняя выплата - 23, стандартное отклонение - 0,51.

Найти симметричный интервал, в котором с вероятностью 95 % будут заключены размеры страховых выплат.

**Ответ:** (22, 24).

**Задача 1.17.** Страховщик полагает, что размер страховой выплаты по страховому портфелю представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с математическим ожиданием - 20 и дисперсией - 0,04. Найти вероятность того, что размер страховой выплаты по портфелю будет находиться в интервале между 19 и 21. Какой максимальный размер страховой выплаты можно гарантировать с вероятностью 96 %?

**Ответ:** 98,8 %; 20,7.

**Тема 2**. **Рисковая премия**

**Пример 2.1*.*** Страховая компания (*СК*) оценила вероятность страхового случая в отдельном договоре *p* = 0,04. Число однородных договоров в портфеле *n* = 250? При каком числе страховых случаев *k* собранных рисковых премий достаточно для выплаты возмещений? Какова вероятность *Pn(k)* данной ситуации?

**Решение.** Математическое ожидание числа страховых случаев равно: , поэтому страховщик на собранные рисковые премии может оплатить до 10 случаев включительно. Вероятность того, что в *n* = 250 договорах произойдет *k* =< 10 страховых случаев, равна:



***Замечание***. Для решения задачи можно воспользоваться встроенной функцией Excel:

*БИНОМ.РАСПР(10; 250; 0,04;1*) = 0,583

**Пример 2.2.** *СК* оценила вероятность страхового случая *p* = 0,03. Число однородных договоров в портфеле *n* = 200, а страховая сумма *S* = 2 000. Чему равна рисковая премия *π0*? Найти начальный резерв *U* страховой компании, чтобы обеспечить выплату 10 возмещений, при сборе только рисковых премий.

**Решение**:



**Ответ:** 8000.

**Пример 2.3*.*** *СК* оценила вероятность страхового случая в отдельном договоре *p* = 0,05. Число однородных договоров в портфеле *n* = 400. Собственный начальный резерв страховой компании составляет *U =*10 000*,* а страховая сумма по договору *S* = 2 000. Какое число исков по страховым случаям может выполнить *СК,* если собраны только рисковые премии? Какова вероятность данной ситуации?

**Решение.** Рисковая премия равна:  Математическое ожидание числа страховых случаев равно: . Собранных страховых премий достаточно для выплаты 20 исков. Имеющийся резерв позволяет погасить еще исков. Таким образом, максимальное число исков, которые может исполнить *СК,* равно 20 + 5 = 25. Вероятность того, что в *n* = 400 договорах произойдет не более *k* = 25 страховых случаев, равна:



**Пример 2.4.** Объем портфеля *n* = 2000, вероятность страхового случая *p* = 0,01. Оценить коэффициент вариации в портфеле  и отдельном договоре .

**Решение.** Коэффициент вариации портфеля равен:



Коэффициент вариации договора равен:



**Пример 2.5.** Вероятность наступления страхового случая в од­ном договоре с фиксированным ущербом (страхование автомо­биля от угона) равна *p* = 0,05. Определите, каким должен быть объем портфеля *n*, чтобы вероятность возникновения в нем хотя бы одного страхового случая не превышала *γ* = 0,8.

**Решение.**



**Ответ:** n=< 31,4.

**Пример 2.6.** Распределение размера страхового возмещения *Y* для договоров страхования автомобилей задается таблицей {*yi,gi*}. Какова доля страховых возмещений, которые отличаются от своего среднего значения меньше, чем на одно стандартное отклонение?

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *y* | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| *g* | 0,15 | 0,10 | 0,05 | 0,20 | 0,10 | 0,10 | 0,30 |

**Решение**.







**Ответ**: 0,45.

**Пример 2.7.** Вероятность предъявления требования равна *p* = 0,05. При возникновении страхового случая *А* ущерб *Х* распределен равномерно на отрезке (0,*C*), где *С* = 300. Найти математическое ожидание[[1]](#footnote-1)® и коэффициент вариации возмещения *Y*.

**Решение.**



**Ответ**: 7,5 и 5,07.

**Пример 2.8.** Вероятность страхового случая равна *p* = 0,1. Ущерб при страховом случае моделируется как непрерывная положительная случайная величина *Х* с плотностью, пропорциональной *(1 + х)-4* (при *х > 0*). Определить рисковую премию *π0*.

**Решение.**

Пусть *f(x)* – плотность распределения случайной величины *Х*.

 

Следовательно, *С**=3000* и поэтому



Теперь для искомой величины *ЕХ* имеем:



Искомая рисковая премия равна: 

*Примечание.*

Распределение с плотностью вида , где *λ > 0, α > 0*– некоторые положительные параметры, называется *распределением Парето*. Таким образом, случайная величина *Х* имеет распределение Парето с *λ = 10* и *α =3*.

Для распределения Парето



**Пример 2.9.** Статистический анализ данных о размерах страховых возмещений по некоторому портфелю показал, что если *Y* – размер страхового возмещения, то величина *Z = lnY* имеет нормальное распределение со средним 6,00 и дисперсией 1,96.

Подсчитайте вероятность того, что страховое возмещение превышает 200, но менее, чем 500.

**Решение**. Искомая вероятность *Р*(200 < *Y* < 500) может быть записана в виде:



Центрируя и нормируя гауссовскую величину Z, мы имеем (*ξ* - стандартная гауссовская величина):



*Примечание.* Следует отметить, что в Microsoft Excel, функция *ЛОГНОРМ.РАСП(х;a;σ,kod)* позволяет сразу найти значение логнормальной функции распределения со средним *а* и стандартным отклонением *σ* в произвольной точке *х*. Если *kod* = 1, то получаем значение функции распределения *F*(*x*), если *kod* = 0, то получаем значение плотности распределения *f*(*x*).

*F(500) = ЛОГНОРМ.РАСП(500;6,00;КОРЕНЬ(1,96),1)=0,561*

*F(200) = ЛОГНОРМ.РАСП(200;6,00;КОРЕНЬ(1,96),1)=0,308*

*P(200 < Y < 500) = F(500) – F(200) = 0,263.*

**Пример 2.10*.*** Время от момента приобретения оборудования до момента его отказа имеет экспоненциальное распределение со средним 10 лет. Владелец оборудования решил застраховать его на случай раннего отказа. По условию договора страховая компания выплачивает определенную страховую сумму *S* в случае отказа в течение первого года эксплуатации, 50 % от этой суммы в случае отказа в течение второго или третьего года эксплуатации и не платит ничего, если оборудование проработает без отказа три года.

Известно, что ожидаемые выплаты страховой компании по этому договору составляют 1000. Найти размер страховой суммы *S*.

**Решение.**

Обозначим через *Т* время до отказа оборудования. Тот факт, что случайная величина *Т* имеет экспоненциальное распределение, означает, что ее плотность имеет вид



где *λ* > 0 - некоторый параметр. Соответственное функция распределения случайной величины *Т* дается формулой.



Для среднего значения 

Пусть *Y* - выплаты страховщика по договору страхования. Условия договора относительно размера страхового возмещения можно выразить следующим образом:



Поэтому



**Пример 2.11.** Дано: рисковая премия *π0* равна 2; дисперсия ущерба объекта страхователя *DX* = 16, дисперсия ущерба страховщика *DY* = 30. Найти вероятность наступления страхового случая *р* и средний размер ущерба объекта страхователя *EX*.

**Решение**. *π0 = EY = p∙EX. DY = p∙DX + p∙q∙(EX)2*.

Имеем: 2 = *p∙EX. 30 = 16∙p + p∙(1 – p)∙(EX)2*. Получим квадратное уравнение: *8p2 – 17p + 2 = 0. p* = 2 и *p* = 1/8.

**Ответ**: *p = 1/8* и *EX = 16*.

**Задачи для самостоятельного решения.**

**Задача 2.1*.*** Портфель состоит из *n* = 4000 однородных договоров (*S* = 1000, *р* = 0,01). Найти единовременную рисковую премию *π0* и коэффициент вариации портфеля .

**Ответ**: 10; 0,16.

**Задача 2.2.** Страховщик желает принять на страхование 200 объектов, страховая сумма по договору страхования каждого объекта - 1000 у.е., вероятность гибели объекта - 2 %. Каким резервным капиталом должен обладать страховщик, чтобы принять на страхование данные объекты с надежностью *γ* = 0,95? Распределение вероятностей убытков принять биномиальным.

**Ответ**: 3000.

Задача 2.3. Вероятность страхового случая 0,02. В портфеле 2500 договоров с фиксированным ущербом. Определите, чему равно среднее число страховых случаев в таком портфеле. Найдите правую границу числа страховых случаев в портфеле, которая не пре­вышается с вероятностью 0,95.

**Ответ**: 50; 62.

Задача 2.4. Воинская часть перед началом учений застраховала 500 своих военнослужащих, участвующих в учениях, на случай травмы. Страховщик оценил вероятность травмы в 0,4%. Сколько в среднем выплат ожидает страховую компанию? Найдите вероятность, что травму получат: 3 человека, не менее 2 человек, не более 4 человек.

**Ответ**: 2; 0,18; 0,594; 0,948.

Задача 2.5. Страховая компания собрала статистику, что в среднем из всех ее страхователей КАСКО 65% пролонгируют договор на следующий год. Найдите вероятность того, что из 1000 случайно отобранных клиентов компании число пролонгировавших на следующий год договор КАСКО:

а) будет равно 650;

б) будет находиться в пределах от 640 до 700 человек;

в) доля пролонгировавших договор будет отличаться от указан­ного значения 0,65 не более чем на 0,02 (на 2%).

**Ответ**: 0,026; 0,513; 0,629.

**Задача 2.6*.***  Объект застрахован от пожара на страховую сумму *S* = 6 млн.руб., равную цене объекта *С*. Вероятность пожара равна *p* = 0,0001, а величина ущерба *X* распределена равномерно на отрезке (0,*С*), где *С* = 6 млн.руб. Найти рисковую премию и коэффициент вариации возмещения *Y*.

**Ответ**. 300; 115.

**Задача 2.7.**Рассмотрим непрерывно распределенный размер ущерба. Пусть случай наступает с вероятностью 0,05, и тогда ущерб распределен равномерно на отрезке (0, 600). Найти рисковую премию.

**Ответ**. 15.

Задача 2.8. Ущерб при наступлении страхового случая в порт­феле распределен логнормально со средним значением 15 млн у.е. Известно, что вероятность попадания размера логарифма ущерба в интервал (12,15) млн у.е. равна 0,4. Найдите вероятность того, что логарифм ущерба составит от 15 до 18 млн у.е. Чему равна дисперсия логарифма ущерба?

**Ответ**: 0,4; 5,48.

**Задача 2.9**. Распределение размера страхового возмещения при наступлении страхового случая для договоров страхования автомобилей задается таблицей:

Страховое возмещение при наступлении страхового случая

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Размер страхового возмещения, у.е. | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| Вероятность | 0,15 | 0,10 | 0,05 | 0,20 | 0,10 | 0,10 | 0,30 |

Чему равна доля страховых возмещений, которые отличаются от своего среднего значения меньше чем на одно среднее квадратическое от­клонение:

**Ответ**: 0,45.

Задача 2.10. Ежемесячные выплаты страховой компании моделируются как непрерывная положительная случайная величина Y с плотностью, пропорциональной (20 + у)-4 (при у>0). Чему равны средние вы­платы компании за один месяц?

**Ответ**: 10,0.

Задача 2.11. Время от момента приобретения оборудования до момента его отказа имеет экспоненциальное распределение со сред­ним значением 8 лет. Владелец оборудования решил застраховать его на случай раннего отказа. По условиям договора страхования компания выплачивает определенную страховую сумму S в случае отказа в течение 1-го года эксплуатации, 50% от этой суммы в случае отказа в течение 2-го года и 25% от суммы *S* в течении 3-го года эксплуатации и не платит ничего, если оборудование проработает без отказа 3 года.

Известно, что ожидаемые выплаты страховой компании по этому договору составляют 2000 у.е. Чему равна страховая сумма S?

**Ответ**: 10404 у.е.

**Задача 2.12.** Дано: рисковая премия *π0* равна 4; дисперсия ущерба объекта страхователя *DX* = 16, дисперсия ущерба страховщика *DY* = 24. Найти вероятность наступления страхового случая *р* и средний размер ущерба объекта страхователя *EX*.

**Ответ**: (0,5; 8).

Задача 2.13. Актуарий страховой компании установил, что за время действия определенного вида договоров застрахованные за­являют два страховых случая в три раза чаще, чем четыре. Чему равна дисперсия числа заявляемых страховых случаев, если оно имеет распределение Пуассона?

**Ответ**: 2.

**Задача 2.14.** Математическое ожидание и дисперсия ущерба в одном договоре страхования равны соответственно 3 у.е. и 29 (у.е.)2, дисперсия ущерба страховщика среди договоров, в которых наступил страховой случай — 8 (у.е.)2. Определите вероят­ность наступления страхового случая и средний размер страхового возмещения по убыточным договорам.

**Ответ**: 2/9; 2/3.

Задача 2.**15**. Пусть страховой случай наступает с вероятностью 0,05, и тогда ущерб распределен экспоненциально с параметром *λ*=0,001. Найдите рисковую премию.

**Ответ**: 50.

Задача **2.16**. Объект застрахован от пожара на сумму 3 млн. у.е., равную цене объекта. Вероятность пожара 0,001, а размер ущерба распределен равномерно от 0 до 3 млн у.е. Найдите среднее значение и среднеквадратическое отклонение возмещения.

**Ответ**: 1500; 1731.

Задача 2.17. Дом стоимостью 20 000 у.е. застрахован на полную стоимость с полными выплатами независимо от степени разруше­ния при землетрясении или цунами с вероятностью *р*1 = 0,01 и от пожара с вероятностью *р*2 = 0,11, при котором ущерб распределен по экспоненциальному закону с параметром *λ* = 0,0001, усеченному справа максимально возможными выплатами *С*.

Определите единовременные рисковые премии при раздель­ном (в разных договорах) и комбинированном (в одном договоре) страховании, предположив условие невозможности их совместного наступления, сравните и сделайте выводы.

**Ответ**: 1038; 1026.

**Тема 3**. **Рисковая надбавка**

**Пример 3.1.**Объем портфеля *n* = 8000, вероятность наступления страхового случая *p* = 0,01. Оценить коэффициент вариации в портфеле  и относительную рисковую надбавку *θ* при надежности *γ* = 0,95. Чему равна нетто-премия, если страховая сумма *S* = 1000?

**Решение**:



**Пример 3.2.** По данным прошлого года: *n* = 1000; *k* = 100. Найти точечную оценку вероятности и правую границу доверительного интервала для числа страховых случаев при надежности*γ* = 0,99.

**Решение:**



**Пример 3.3.** Портфель состоит из *n* = 4000 однородных договоров. Страховая сумма *S* = 1000. Вероятность наступления страхового случая *p* = 0,1. Найти единовременную рисковую надбавку, обеспечивающую надежность *γ* не ниже 0,95.

**Решение:**



**Пример 3.4**. Объем портфеля *n* = 5000, вероятность предъявления требования об оплате *p* = 0,005. Страховая сумма *S* = 100. Найти резерв *U*, обеспечивающий надежность *γ* не ниже 99% при среднерыночной относительной надбавке *θср* = 20 %.

**Решение**:



**Пример 3.5.** Портфель состоит из *n* = 4000 однородных договоров. Страховая сумма *S* = 1000. Вероятность предъявления требования об оплате *p* = 0,01. Найти единовременную рисковую надбавку, обеспечивающую вероятность неразорения *γ* не ниже 0,95.

**Решение:**



**Пример 3.6.** В условиях задачи *4* найти брутто-премию, если нагрузка на ведение дел *f* составляет 20% от тарифа.

**Решение**:



**Пример 3.7.** Портфель состоит из *n* = 1000 однородных договоров. Страховая сумма *S* = 1000. Вероятность предъявления требования об оплате *p* = 0,1. Оценить вероятность неразорения *γ*, если относительная рисковая надбавка *θ* = 10%.

**Решение:**



**Пример 3.8.** Портфель состоит из *n* = 400 однородных договоров. Страховая сумма *S* = 1000. Вероятность предъявления требования об оплате *p* = 0,045. На рынке средняя относительная рисковая надбавка *θср* = 20%. Какую надежность *γ* может обеспечить *СК* при собственном капитале *U* = 6000?

**Решение**:



**Пример 3.9.**Вероятность страхового случая *p* = 0,02. Оценить коэффициент вариации в портфеле. Какой объем портфеля обеспечит надежность *γ* = 0,99, если относительная рисковая надбавка *θ* = 20% .

**Решение**:



**Пример 3.10.**На страховом рынке данный риск страхуют две *СК*. Объем портфелей у страховых компаний *n1* = 300 и *n2* = 800, соответственно. Вероятность наступления страхового случая одинакова и равна *p* = 0,03. Страховая сумма *S* = 10000. Страховщики обязаны обеспечить надежность γ = 0,95. Оценить нетто-премии у каждого страховщика.

**Решение.**



**Пример 3.11.** Страховая компания имеет *n* = 1000 договоров страхования автомобилей от ущерба. Распределение размера страхового ущерба объекта страхования *X* задается таблицей {*xi,gi*}. Вероятность аварии в отдельном договоре *p* = 0,1. Какова нетто премия  для надежности *γ* =0,95?

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| *g* | 0,15 | 0,10 | 0,05 | 0,20 | 0,10 | 0,10 | 0,30 |

**Решение**:









**Пример 3.12**. В портфеле страховщика *n* = 10000 договоров страхования от пожара. Стоимость объектов *C* = 6 млн.руб. Вероятность наступления страхового случая *p* = 10-3. В случае пожара ущерб равномерно распределен от нуля до полной стоимости объекта. Подсчитайте нетто премию, для надежности *γ* = 0,95.

**Решение**.



**Пример 3.13**. В портфеле страховщика *n* = 2000 договоров страхования от пожара. Вероятность наступления страхового случая *p* = 0,05. Среднерыночная относительная надбавка *θср* = 12 %. Оцените конкурентоспособность компании – найдите надежность, которую может обеспечить надбавка в 12%.

**Решение.**



**Пример 3.14**. По условиям примера 13 проанализируйте ситуацию у другого страховщика, который имеет дело с такими же рисками *p* = 0,05, но объем портфеля у него в 10 раз больше: *n* = 20000. **Решение.**



**Задачи для самостоятельного решения.**

**Задача 3.1.** Портфель состоит из *n* = 5000 однородных договоров. Страховая сумма *S* = 1000. Вероятность предъявления требования об оплате *p* = 0,01. Найти единовременную рисковую надбавку, обеспечивающую вероятность не разорения не ниже 0,95.

**Ответ:** 2,3.

**Задача 3.2*.*** Портфель состоит из *n* = 4000 однородных договоров. Страховая сумма *S* = 1000. Вероятность предъявления требования об оплате *p* = 0,01. Найти нетто-премию, обеспечивающую вероятность не разорения не ниже 0,99.

**Ответ**: 12,6.

**Задача 3.3.** Портфель состоит из *n* = 400 однородных договоров. Страховая сумма *S* = 1000. Вероятность наступления страхового случая *p* = 0,075. На рынке средняя относительная надбавка - 20%. Найти капитал, обеспечивающий надежность 99%.

**Ответ**: 6274.

**Задача 3.4.** Портфель состоит из *n* = 4000 однородных договоров. Страховая сумма *S* = 2000. Вероятность наступления страхового случая *p* = 0,04. Найти единовременную рисковую надбавку, обеспечивающую вероятность неразорения *γ* не ниже 0,95.

**Ответ:** 10,2.

**Задача 3.5.**Вероятность страхового случая *p* = 0,01. Оценить необходимый объем портфеля, чтобы обеспечить надежность *γ* = 0,95, если относительная рисковая надбавка *θ* = 15%.

**Ответ**: 11 907.

**Задача 3.6*.*** Объем портфеля *n* = 2000, вероятность предъявления требования об оплате *p* = 0,02, страховая сумма *S* = 1000. Найти резерв *U*, обеспечивающий вероятность не разорения не ниже 95% при среднерыночной относительной надбавке θср = 20 %.

**Ответ:** 2300.

**Задача 3.7.** Портфель состоит из *n* = 4000 однородных договоров, вероятность предъявления требования об оплате *p* = 0,01, страховая сумма *S* = 1000. Оценить надежность *γ*, если относительная рисковая надбавка θ = 15%.

**Ответ:** 82,9.

**Задача 3.8.** Страховая компания имеет *n* = 2000 договоров страхования автомобилей от ущерба. Вероятность аварии в отдельном договоре *p* = 0,01. Распределение размера страхового ущерба объекта страхования *X* задается таблицей {*xi,gi*}. Какова нетто премия  для надежности *γ* =0,99?

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
| *g* | 0,40 | 0,25 | 0,15 | 0,10 | 0,05 | 0,03 | 0,02 |

**Ответ.** 0,52.

**Задача 3.9**. В портфеле страховщика *n* = 10000 договоров страхования от пожара. Стоимость объектов *C* = 1 млн.руб. Вероятность страхового случая *p* = 10-2. В случае пожара ущерб равномерно распределен от нуля до полной стоимости объекта. Подсчитайте нетто премию, для надежности *γ* = 0,95.

**Ответ:** 5946.

**Тема 4**. **Системы ответственности**

В случае применения в страховых договорах разделения ответственности между страхователем и страховщиком меняется понятие ущерба страхуемого объекта *X*. Для расчета возмещения применяется стоимость ущерба страхуемого объекта , которая учитывает применяемую систему ответственности.

Так для полной ответственности: . Для пропорциональной ответственности:  , где *С* – стоимость объекта, *S* – страховая сумма. Для страхования по первому риска:



Для системы ответственности с условной франшизой *d*:



Для системы ответственности с безусловной франшизой *d*:



*Замечание:* для удобства обозначения будем вместо  писать , учитывая все вышесказанное.

Пример **4.1**. Вероятность страхового случая *р* = 0,1. Стоимость объекта *С* = 400. Условное рас­пределение ущерба *X* при наступлении страхового случая имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 100 | 200 | 300 | 400 |
| *gi* | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

Найдите характеристики ущерба страховщика (математическое ожидание *EY*, дисперсию выплат *DY* и коэффициент вариации договора *kvar*) для случая полной ответственности страховщика.

**Решение.**



**Пример 4.2**. Решить пример 1 для случая пропорциональной защиты с ответственностью страховщика 70% от ущерба.

**Решение.**



**Пример 4.3**. Решить пример 1 для случая страхования по правилу первого риска со страховой суммой *S* = 75% от цены объекта *C* = 400.

**Решение.** Таблица распределения ущерба X, предназначенного для возмещения, для случая первого риска имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 100 | 200 | 300 | 300 |
| *gi* | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |



**Пример 4.4**. Решить пример 1 для случая страхования с безусловной франшизой *d* = 30% от цены объекта.

**Решение.**  Таблица распределения ущерба *X*, предназначенного для возмещения, для случая безусловной франшизы имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 80 | 180 | 280 |
| *gi* | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |





**Пример 4.5**. Решить пример 1 для случая страхования с условной франшизой *d* = 30% от стоимости объекта.

**Решение.**  Таблица распределения ущерба X, предназначенного для возмещения, для случая условной франшизы имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 0 | 200 | 300 | 400 |
| *gi* | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |



**Пример 4.6*.***  При возникновении страхового случая (*р* = 0,05) величина ущерба распределена дискретно. Объем портфеля *n* = 10000.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 200 | 500 | 800 | 1000 |
| *рi* | 0,3 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

Найти нетто-премию для надежности *γ* = 0,95, если ущерб компенсируется полностью.

**Решение.**



**Пример 4.7*.***  В условиях примера 6 найти нетто-премию при страховой сумме *S* = 700, если договор предусматривает возмещение по первому риску.

**Решение.**







**Пример 4.8*.***  В условиях примера 6 найти нетто-премию при страховой сумме *S* = 700, если договор предусматривает пропорциональное возмещение.

**Решение.**





**Пример 4.9.** В условиях примера 6 найти нетто-премию при условной франшизе *d* = 300.

**Решение.**



**Пример 4.10.** В условиях примера 6 найти нетто-премию при безусловной франшизе *d* = 300.

**Решение.**



**Пример 4.11.** Стоимость объекта страхования C = 1000. Величина ущерба для этого объекта *X*, является случайной величиной и имеет равномерное распределение на интервале [0,*С*]. Объем портфеля *n* = 10000. Вероятность страхового случая *p* = 0,01. Рассчитать нетто-премию для надежности *γ* = 0,99 при предельной ответственности страховщика.

**Решение.**



**Пример 4.12.** Решить пример 11 для пропорционального страхования, если страховая сумма *S* = 800.

**Решение.**



**Пример 4.13*.***  В условиях примера 11 найти нетто-премию при страховой сумме *S* = 800, если договор предусматривает возмещение по первому риску.

**Решение.**



**Пример 4.14.** В условиях примера 11 найти нетто-премию при условной франшизе *d* = 300.

**Решение.**





**Пример 4.15.** В условиях примера 11 найти нетто-премию при безусловной франшизе *d* = 300.

**Решение.**



**Задачи для самостоятельного решения.**

**Задача 4.1.** Объем страхового портфеля равен *n* = 1000. Распределение ущерба *X* объекта страхования задано таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 100 | 200 | 300 | 400 |
| *gi* | 0,5 | 0,3 | 0,15 | 0,05 |

Найти нетто-премию при полной ответственности страховщика, если вероятность страхового случая *p* = 0,03, а заданная надежность *γ* = 0,95.

**Ответ:** 7,0.

Задача 4.2. Решить задачу 1, если в договоре предусмотрена пропорциональная защита с коэффициентом пропорциональ­ности 0,8.

**Ответ:** 5,88.

Задача 4.3. Решить задачу 1, если в договоре предусмотрено страхование по первому риску со страховой суммой *S* = 300.

**Ответ:** 6,76.

Задача 4.4. Решить задачу 1, если в договоре предусмотрено страхование с условной франшизой равной *d* = 200.

**Ответ:** 5,39.

Задача 4.5. Решить задачу 1, если в договоре предусмотрено страхование с безусловной франшизой равной *d* = 200.

**Ответ:** 2,26.

Задача 4.6. Вероятность страхового случая оценена страховой компанией как *p* = 0,01. Объем портфеля *n* = 1000. Возможный ущерб по имеющемуся объекту страхования при наступлении страхового случая распределен равно­мерно на интервале от 0 до цены застрахованного объекта *C* = 10 000. Найдите нетто-премию, если рисковая надбавка должна обеспечивать надежность *γ* = 0,95. В договоре страхования предусмотрена полная страховая защита объекта.

Ответ: 79,9.

Задача 4.7. Решить задачу 6, если в договоре предусмотрена пропорциональная защита с коэффициентом пропорциональ­ности 0,8.

Ответ: 63,9.

**Задача 4.8.** Решить задачу 6, если в договоре предусмотрена защита по правилу первого риска, страховая сумма составляет 80% от стоимости объекта;

**Ответ:** 76,3.

**Задача 4.9.** Решить задачу 6, если в договоре предусмотрена условная франшиза, составляющая 20% от стоимости объ­екта.

**Ответ:** 77,8.

**Задача 4.10**. Решить задачу 6, если в договоре предусмотрена безусловная франшиза, составляющая 20% от стоимости объ­екта

**Ответ:** 53,4.

Задача 4.11. Для того чтобы покрыть убытки, которые равномер­но распределены в интервале [0; 1000], рассматривается вопрос о заключении договора страхования. Чтобы уменьшить премию, стра­ховая компания предлагает клиенту договор с безусловной (вычита­емой) франшизой d. Определите, на каком уровне нужно установить франшизу, чтобы ожидаемая величина среднего размера страхового возмещения при наступлении страхового случая снизилась в 4 раза по сравнению со случаем полной ответственности страховщика.

**Ответ**: *d* = 500.

**Задача 4.12**. Решить задачу 11, если в договоре предусмотрена условная франшиза.

**Ответ:** *d* = 866.

**Тема 5**. **Индивидуальная модель риска**

**Пример 5.1*.*** Страховая компания сформировала два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 4000, *р1 =* 0,002, *n2 =* 6000, *р2* = 0,003. Оценить степень риска *kvar* в каждом субпортфеле и во всем портфеле, если страховые суммы в субпортфелях фиксированы и одинаковы, т.е. *S1* = *S2*.

**Решение:** Степень риска определяется коэффициентом вариации выплат *Z*, который в случае фиксированного ущерба равен



где *K* – случайная величина определяющая число страховых случаев. Для субпортфелей в отдельности:



Для всего портфеля в случае *S1* =*S2*= *S*:



*Примечание.* Как видно из полученных результатов коэффициент риска портфеля меньше коэффициентов риска субпортфелей. Данный эффект возникает из-за увеличения общего объема портфеля, т.к. 

**Пример 5.2**. Страховая компания сформировала два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 2000, *S1* = 20, *n2 =* 3000, *S2* = 30. Оценить степень риска *kvar* в каждом субпортфеле и во всем портфеле, если вероятности наступления страхового случая в каждом субпортфеле одинаковы и равны  *р1 = р2* =0,01.

**Решение:** Определим сначала коэффициенты вариации для *Z1* и *Z2* в отдельных субпортфелях.



Для всего портфеля имеем:



**Пример 5.3**. Страховая компания сформировала два субпортфеля со следующими характеристиками: *р1 =* 0,03, *S1* = 10, *р2* = 0,01, *S2* = 20. Оценить степень риска *kvar* в каждом субпортфеле и во всем портфеле, если объемы субпортфелей одинаковы и равны *n1* = *n2 =* 3000.

**Решение:** Определим сначала коэффициенты вариации для *Z1* и *Z2* в отдельных субпортфелях.



Для всего портфеля имеем:



**Пример 5.4**. Страховая компания сформировала два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 1000, *р1 =* 0,010, *S1* = 10, *n2 =* 4000, *р2* = 0,005, *S2* = 3. Оценить степень риска *kvar* в каждом субпортфеле и во всем портфеле.

**Решение:** Определим сначала коэффициенты вариации для *Z1* и *Z2* в отдельных субпортфелях.



Для всего портфеля имеем:



**Пример 5.5**. По данным примера 4 найти одинаковую относительную рисковую надбавку *θ*, обеспечивающую вероятность неразорения в портфеле не ниже *γ* = 0,95.

**Решение:** Относительная рисковая надбавка связана с коэффициентом риска следующим соотношением:



*Вывод*: относительная рисковая надбавка велика, необходимо увеличивать объем портфеля.

**Пример 5.6*.*** Объем портфеля: *n1* = 6000 договоров со страховой суммой *S*1 = 10 и *n2* = 4000 договоров со страховой суммой *S2* = 20. Вероятность предъявления требований об оплате одинакова и равна *p* = 0,01. Оценить вероятность разорения *Pr*, если компания имеет собственный капитал *U0* = 300, а собраны только рискованные премии.

**Решение**:



*Напоминание.*



**Пример 5.7*.*** Страховая компания имеет два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 200; *p1* =0,1; *S1* = 30 и *n2* = 300; *p2* =0,12; *S2* = 50. Найти нетто-премии в изолированных субпортфелях, если задана вероятность неразорения *γ* = 0,9. Как изменятся нетто-премии в субпортфелях, если они будут объединены?

**Решение**:



Для определения нетто-премий в субпортфелях воспользуемся следующими формулами.



В случае объединения субпортфелей в общий портфель их нетто-премии уменьшаются за счет увеличения объема портфеля. Расчет премий ведется по следующим формулам:



**Пример 5.8.** Страховая компания имеет два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 2000; *p1* =0,01; *S1* = 100 и *n2* = 4000; *p2* =0,05. Во втором портфеле ущерб имеет равномерное распределение: *Х2* ~ *U*(0,*C*), где *С* = 30. Найти относительную рисковую надбавку портфеля *θ*, обеспечивающую вероятность неразорения *γ* в портфеле не ниже 0,95.

**Решение.**



**Задачи для самостоятельного решения.**

**Задача 5.1*.*** Страховая компания имеет два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 2000; *p1* =0,01, *n2* = 1000; *p2* =0,005. Оценить степень риска *kvar* в каждом субпортфеле и во всем портфеле, если страховые суммы в субпортфелях фиксированы и одинаковы, т.е. *S1* = *S2*.

**Ответ:** 22,2%; 44,6%; 19,9%.

**Задача 5.2*.*** Страховая компания имеет два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 2000; *p1* =0,01; *S1* = 100 и *n2* = 4000; *p2* =0,02; *S2* = 50. Оценить степень риска *kvar* в каждом субпортфеле и во всем портфеле.

**Ответ:** 22,2%; 11,1%; 10,5%.

**Пример 5.3**. Страховая компания имеет два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 3000; *p1* =0,01; *S1* = 100 и *n2* = 4000; *p2* =0,02; *S2* = 40. Найти относительную рисковую надбавку портфеля *θ*, обеспечивающую вероятность неразорения *γ* в портфеле не ниже 0,95.

**Ответ:** *θ* = 0,172 = 17,2 %.

**Задача 5.4*.*** Страховая компания имеет два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 750; *p1* =0,004; *S1* = 1000 и *n2* = 500; *p2* =0,006; *S2* = 1000. Найти нетто премии в изолированных субпортфелях, если задана вероятность неразорения *γ* = 0,95.

**Ответ**: 

**Задача 5.5*.*** Как изменятся нетто-премии в субпортфелях задачи 5.4, если они будут объединены?

**Ответ:** 

**Задача 5.6.** Страховая компания имеет два субпортфеля со следующими характеристиками: *n1* = 2000; *p1* =0,05; *S1* = 200 и *n2* = 4000; *p2* =0,01. Во втором портфеле ущерб имеет равномерное распределение: *Х2* ~ *U*(0,*C*), где *С* = 300. Найти относительную рисковую надбавку портфеля *θ*, обеспечивающую вероятность неразорения *γ* в портфеле не ниже 0,95.

**Ответ:** *θ* = 0,141 = 14,1 %.

**Задача 5.7.** Случайная величина потерь *X* имеет плотность распределения вероятностей



Найти:

1. *EX; DX.*
2. Рассмотреть пропорциональное страхование *I1*(*x*) = *kx*, и страхование с безусловной франшизой *d*.



Определить *k* и *d* в каждом случае такими, чтобы нетто-премия π была равна 12,5.

1. Показать, что 

**Ответ:** *EX* = 50. *DX* = 2500/3.

**Тема 6. Коллективная модель риска**

**Пример 6.1**.Пусть *N* – число появлений решки при *5* бросаниях правильной монеты. После того как брошены монеты, бросаются *N* игральных костей. Пусть *S* – сумма очков *X*, выпавших на всех игральных костях. Найти *ES*, *DS*.

**Решение*.*** 



**Пример 6.2**.Пусть *Х* – число очков, выпавших при бросании игральной кости, а *Y* – число решек, появившихся при бросании *X* монет. Найти *EY*, *DY*.

**Решение*.*** Воспользуемся формулой Вальда и данными предыдущего примера. Учитывая, что *Y* = *Y1*+ ... + *Yx*.



**Пример 6.3**.Пусть *Х* – число выпавших очков при бросании игральной кости, а *Y* – сумма очков, полученных при бросании *X* костей. Найти *EY*, *DY*.

**Решение*.*** Решаем аналогично примеру 2:



**Пример 6.4.** Используя основные законы классической теории вероятностей, найти функцию распре­деления *Fs(x)* для *х* = 0,1,...,9, где *S* = *X1 + Х2 + Х3.* а независи­мые случайные величины *Хк* имеют дискретное распределение вероятностей, приведенное ниже.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | P(X1 = x) | P(X2 = x) | P(X3 = x) |
| 0 | 0,6 | 0,7 | 0,6 |
| 1 | 0,0 | 0,2 | 0,0 |
| 2 | 0,3 | 0,1 | 0,0 |
| 3 | 0,0 | 0,0 | 0,4 |
| 4 | 0,1 | 0,0 | 0,0 |

**Решение*.*** Представим результат в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | P1(x) | P2(x) | P3(x) | PS(x) | FS(x) |
| 0 | 0,6 | 0,7 | 0,6 | 0,252 | 0,252 |
| 1 | 0,0 | 0,2 | 0,0 | 0,072 | 0,324 |
| 2 | 0,3 | 0,1 | 0,0 | 0,162 | 0,486 |
| 3 | 0,0 | 0,0 | 0,4 | 0,204 | 0,690 |
| 4 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 0,108 | 0,798 |
| 5 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,120 | 0,918 |
| 6 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,030 | 0,948 |
| 7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,040 | 0,988 |
| 8 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,008 | 0,996 |
| 9 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 0,004 | 1,000 |

**Пример 6.5.** Решить предыдущий пример, используя процесс получения свертки.

**Решение*.*** Представим результат в виде таблицы

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | f1(x) | f2(x) | f3(x) | F(1)(x) | f(2)(x) | F(2)(x) | f(3)(x) | F(3)(x) |
| 0 | 0,6 | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 0,42 | 0,42 | 0,252 | 0,252 |
| 1 | 0,0 | 0,2 | 0,0 | 0,6 | 0,12 | 0,54 | 0,072 | 0,324 |
| 2 | 0,3 | 0,1 | 0,0 | 0,9 | 0,27 | 0,81 | 0,162 | 0,486 |
| 3 | 0,0 | 0,0 | 0,4 | 0,9 | 0,06 | 0,87 | 0,204 | 0,690 |
| 4 | 0,1 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,10 | 0,97 | 0,099 | 0,798 |
| 5 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,02 | 0,99 | 0,064 | 0,864 |
| 6 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 1,0 | 0,084 | 0,948 |
| 7 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 1,0 | 0,04 | 0,988 |
| 8 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 1,0 | 0,008 | 0,996 |
| 9 | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 1,0 | 0,0 | 1,0 | 0,004 | 1,0 |

Аналогично проводят расчет для *f(3)(x)*

**Пример 6.6.** Пусть *Хi, i = 1,...,3* независимые, одинаково распределенные случайные величины с функциями распределения:



*S=X1+ X2+X3.*

Найти функцию распределения *S,* а также:

1. *ES*;

2. *VarS;*

3. Pr{S<0,5}, Pr{S<l,5}, Pr{S<l,0}.

**Решение*.***

Используем функциональные преобразование и свойство согла­сованных плотностей:















Теперь найдем 1, 2 и 3:



**Пример 6.7.** Пусть *X1, X2, Х3 -* независимые, экспоненциально распределен­ные случайные величины с математическим ожиданием *EXi =* *i, i=* 1,2,3. Найти плотность распределения *S = Х1 + Х2 + Х3.*

**Решение*.***

Имеем, что



**Пример 6.8.** Компания по страхованию от пожаров страхует 160 структур (объектов). Контракты на различные суммы распределены следующим образом.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *bk* | 10 000 | 20 000 | 30 000 | 50 000 | 100 000 |
| *nk* | 80 | 35 | 25 | 15 | 5 |

Вероятность появления 1-го пожара в год каждой структуре равна *p* = 0,04. Вероятность появления более одного пожара в год одной структуре равна 0. Пожары на различных объектах - со­бытия независимые. Предположим, что условное распределение размера иска при условии, что пожар случился, является равно­мерным на отрезке [0, bk]. Пусть *N* - число исков, a *S -* суммарный иск за этот год.

1. Найти среднее и дисперсию *N.*
2. Найти среднее и дисперсию S.
3. Какая нагрузка безопасности должна быть использована ком­панией, чтобы она собрала сумму, равную 99 %-ному квантилю распределения S?

*Указание:* использовать нормальную аппроксимацию.

**Решение*.***

1. Число исков *N* имеет биномиальное распределение.

*N = np* = 160∙0,04 = 6,4. *DN = npq* = 160∙0,04∙0,96=6,144.

2. Так как xk равномерно распределены, то

*EX = bk /2*. *DX = b2k /12*.



Получаем





**Пример 6.9.** Рассмотрим портфель из 32 страховок с вероятностью иска *p =* 1/6. Величина иска для каждой страховки имеет следующую плотность распределения:



Обозначим через S суммарный иск. Найти *Pr(S >* 4), исполь­зуя нормальную аппроксимацию

**Решение*.***

Представим страховые выплаты в виде *S = X1 + X2 + … + X32,* тогда





Используя нормальную аппроксимацию, получаем следующее:



**Пример 6.10**. В таблице приведено распределение числа застрахованных случаев по некоторому портфелю.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | 0 | 1 | 2 |
| *P(N = n)* | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

Когда происходит страховой случай, размер страхового возмещения задан таблицей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Y* | 0 | 2 | 4 |
| *p* | 0,7 | 0,2 | 0,1 |

1. Подсчитайте вероятность того, что суммарные выплаты по портфелю превысят свое среднее больше, чем на два стандартных отклонения.

2. Какова будет эта вероятность, если суммарные потери страховой компании распределены по нормальному закону?

**Решение.**Для решения используем производные функции



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *S* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *p* | 0,808 | 0 | 0,116 | 0 | 0,066 | 0 | 0,008 | 0 | 0.002 |

*ES* + 2*σS* = 3,11. P(*S* > 3,11) = 0,066 + 0,008 + 0,002 = 0,076 = 7,6 %.

**Пример 6.11**. Число страховых случаев по некоторому портфелю распределено по закону Пуассона с ***λ*** = 4.

Когда происходит страховой случай, размер страхового возмещения задан таблицей

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Y* | 0 | 1 | 2 |
| *p* | 0,6 | 0,3 | 0,1 |

1. Подсчитайте вероятность того, что суммарные выплаты по портфелю превысят в 1,5 раза математическое ожидание.

2. Какова будет эта вероятность, если суммарные потери страховой компании распределены по нормальному закону?

**Решение*.***

Для производящей функции суммарных потерь имеем:





|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *S* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| *P* | 0,202 | 0,242 | 0,226 | 0,155 | 0,092 | 0,047 | 0,021 | 0,021 | 0,007 |

*P(S > 1,5ES) = P(S > 3) = 1 – (0,202 + 0,242 + 0,226 + 0,155)= 0,175*

Если суммарные потери страховой компании распределены по нормальному закону, тогда



**Пример 6.12**. Случайная величина Z1 имеет составное пуассоновское распределение с параметром λ1 = 4 и следующим распределением слагаемых *Y1*:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *y1* | 1 | 2 | 3 |
| *p1* | 6/11 | 3/11 | 2/11 |

Случайная величина Z2 имеет составное пуассоновское распределение с параметром λ2 = 2 и следующим распределением слагаемых Y2:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *y2* | 1 | 2 |
| *p2* | 3/4 | 1/4 |

Величины Z1 и Z2 независимы. Подсчитайте вероятность того, что Z = 2Z1 + 4Z2 равняется 4.

**Решение**. Cоответствующие производящие функции даются формулами:



Для производящих функций случайных величин Z1, Z2 имеем:



Теперь мы можем найти производящую функцию суммы Z = 2Z1 + 4Z2



Искомая вероятность может быть найдена как коэффициент при *u4* в разложении G(u) в ряд по степеням *u*. Ясно, что для получения искомого коэффициента достаточно взять три первых члена в разложении экспоненты:



Поэтому P(Z = 4) = 1203/242 e-6 = 0,0123

***Задачи для самостоятельного решения.***

**Задача 6.1*.*** Распределение числа страховых случаев и размера индивидуальных потерь имеет следующие параметры:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *k* | 0 | 1 | 2 |
| *g* | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Y* | 1 | 4 |
| *p* | 0,8 | 0,2 |

Подсчитайте вероятность того, что суммарные выплаты превысят свое среднее более, чем в два раза.

**Ответ:** 0,132.

**Задача 6.2*.*** Распределение числа страховых случаев и размера индивидуальных потерь имеет следующие параметры:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *k* | 0 | 2 | 3 |
| *g* | 0,7 | 0,2 | 0,1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *Y* | 0 | 10 |
| *p* | 0,8 | 0,2 |

Подсчитайте вероятность того, что суммарные выплаты по портфелю превысят свое среднее более, чем на два стандартных отклонения.

**Ответ:** 0,12.

**Задача 6.3*.*** В модели коллективного риска суммарные выплаты *S* имеют составное пуассоновское распределение с *λ* = 63 и распределением величины страхового возмещения, приведенным в таблице. С помощью нормального распределения подсчитайте вероятность *P*(*S* > 315).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *y* | 1 | 5 | 10 |
| *p* | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

**Ответ:** 0,07.

**Задача 6.4*.*** Распределение числа страховых случаев и размера индивидуальных потерь имеет следующие параметры:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *k* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *g* | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *y* | 1 | 2 | 3 |
| *p* | 0,6 | 0,3 | 0,1 |

Определите наиболее вероятное значение суммарных потерь за рассматриваемый промежуток времени.

**Ответ:** 2.

**Тема 7. Теория полезности*[[2]](#footnote-2)®1***

**Пример 7.1.** Пусть лицо, принимающее решение (*ЛПР*), имеет текущий ка­питал *w =* 10 000. Пусть для функции полезности *u*(*w*) этого лица определены два значения: *u*(0) = -1; *u*(10000) = 0. Предполо­жим, что *ЛПР* может понести финансовые потери *X* с вероят­ностью *p* = 0,5 или остаться со своим капиталом с такой же вероятностью. Обозначим через *G* максимальную премию, кото­рую лицо готово заплатить за полное страхование от потерь. Значения *X* и *G* представлены в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 10 000 | 6 000 | 3 300 |
| *G* | 6 000 | 3 300 | 1 700 |

Определить значение функции полезности в этих трех точках.

**Решение.** Воспользуемся формулой из теории полезности:

 (\*)

Тогда



**Пример 7.2.*[[3]](#footnote-3)®2*** Игра состоит в подбрасывании монеты до тех пор, пока не по­явится орел, вероятность появления которого в каждом испыта­нии равна *p* = 0,5. *N -* число испытаний до первого появления орла. Найти:

1. Распределение *N.*
2. *EN; DN.*
3. Если при выпадении орла выплачивается вознаграждение *X = 2N,* то найти *ЕХ.*
4. Если функция полезности *u(w) = lnw,* то найти ожидаемую полезность от этой игры *E{u(x)}.*

**Решение.** Для случайной величины *N* мы имеем геометрическое распределение вероятностей.







**Пример 7.3.** Пусть функция полезности *ЛПР* *u(w) = k lnw, k >* 0. *ЛПР* имеет капитал *w* > 1 и сталкивается со случайными потерями *X*, которые имеют равномерное распределение на [0, 1]. Используя соотношение (\*), показать, что максимальная премия, которую *ЛПР* готово заплатить за полное страхование:

******

**Решение.**

******

Отсюда

******

**Пример 7.4.** Используя аппроксимации для функции полезности

******

1. Показать справедливость следующей аппроксимации для *G*:



где *μ* = *EX*, *σ2* = *DX*;

1. Показать, что при *u(w) = kln w,*



**Решение.**

1. 

отсюда



и, значит,

******

2. Если *u*(*w*) = *klnw*, то

******

Тогда в силу пункта 1

******

**Пример 7.5.** Показать, что если *u” > 0,* то *G* > *μ* = *EX*.

**Решение.**

Используя формулу ******и неравенство Йенсена:

******

мы получаем ****** Так как *u’*>0, то ****** и, значит, *μ* ≤ *G*.

**Пример 7.6.** Небольшая страховая компания с капиталом *w* = 100 считает, что некоторый риск *X* имеет распределение

*Pr*(*X* = 0) = *Pr*(*X* = 51) = 0,5.

Какую максимальную премию *G* она должна заплатить пере­страховщику, чтобы покрыть 100 % этих потерь *X*? Предполо­жить, что функция полезности страховщика имеет вид *u(w) = lnw.*

**Решение.**

Используя формулу ******мы получаем:

******

Отсюда 100 – *G* = 70 и, значит, *G* = 30.

**Пример 7.7.** Компания, занимающаяся перестрахованием, с капиталом *w* =650 и функцией полезности *u(w) = lnw* рассматривает воз­можность принятия на себя этого риска. Какую максимальную сумму *Н* она могла бы допустить как премию для перестрахова­ния 100 % потерь?

**Решение.**

Используя соотношение

***.***

Тогда

******

******

Из последнего равенства имеем

******

Решая это квадратное уравнение, мы находим, что *Н* = 26.

**Пример 7.8.** Предположим, что случайная величина ущерба *Х* имеет показательное распределение с параметром *λ* = 0,01: . Функция полезности страхователя также имеет показательный вид ** с *α* = 0,005. Определить *G*.

**Решение.** Для страхователя уравнение равновесия полезности имеет вид:



Решая это уравнение с показательной функцией полезности, получим:



где  - производящая функция моментов случайной величины *Х*, с параметром *α*.

.



Формула приближенной оценки максимальной премии страхователя дает значение



Полученное значение показывает, что страхователь готов согласиться на довольно значительную добавку к рисковой премии *π0* = *EX = 1/λ = 100*. Несложно проверить, что параметр *α* равен коэффициенту несклонности к риску страхователя *r(w)*:



*u’(w) =α2e-αw; u”(w) = -α3e-αw ; r(w) = α.*

*Примечание.* Особенностью показательной функции полезности является независимость премии страхователя от его текущего капитала.

Формула приближенной оценки максимальной премии страхователя дает значение



Полученное значение показывает, что страхователь готов согласится на довольно значительную добавку к рисковой премии *π0* = *EX = 1/λ = 100*.

**Пример 7.9.** Функция полезности страхователя, имеющего капитал *w* = 100, задается выражением **. Какую максимальную премию готов заплатить страхователь за полное страховое покрытие, если ущерб X распределен равномерно на отрезке [0;100].

**Решение.** Подставляя данные задачи в уравнение равновесия полезности страхователя (\*), получим:



Страхователь не склонен к риску, поэтому он согласен платить премию большую, чем ожидаемый ущерб *ЕХ* = 50.

*Примечание*. Семейство степенных с дробным показателем функций полезности задается соотношением:

**

Данная функция может представлять функцию полезности страхователя, поскольку

*w’(u) = γuγ-1> 0 и w”(u) = γ(γ-1)uγ-2< 0.*

Коэффициент несклонности к риску равен:



Согласно полученному результату видно, что размер премии зависит от капитала *w* *ЛПР*, что является реалистичным.

**Пример 7.10.** Функция полезности *ЛПР* имеет вид *u(w) = -e-5w*. Для принимающего решения имеется две случайные экономические возможности. Первая из них, обозначаемая через *Х*, имеет нормальное распределение со средним 5 и дисперсией 2. Говоря о нормальном распределении со средним *µ* и с дисперсией *σ2*, пользуются сокращенной записью *N(µ,σ2).* Другая возможность, обозначаемая через *Y*, имеет распределение *N(6;2,5)*. Какую возможность следует предпочесть?

**Решение.**

Если случайная величина *Х* имеет нормальное распределение *N(µ,σ2),* то производящая функция моментов имеет вид:

**

Используя это выражение получим:

**

**

Таким образом,

**

и распределение с.в. *Х* предпочтительнее распределения с.в. *Y*.

*Примечание.* В данном примере с.в. *Х* предпочтительнее, чем *Y*, несмотря на то, что *µХ* = 5 < *µY* = 6. Поскольку принимающий решение не склонен к риску, тот факт, что распределение с.в. Y более «*размазано*», чем распределение с.в. *Х*, свидетельствует против распределения с.в. *Y* при оценки его желательности. Если с.в. *Y* имеет распределение *N*(6; 2,4), то *Е*[*u(Y)*] = -1 и для принимающего решения будет безразлично, выбрать распределение *Х* или распределение *Y*.

**Пример 7.11.** Функция полезности лица, принимающего решения, задается выражением

u(w) = w - 0,01*w2*, *w* < 50.

Принимающий решения сохранит капитал *w* = 30 с вероятностью *р* = 0,6 и будет нести финансовые потери величины X = 10 с вероятностью *q = 1 - р*. Найти максимальную страховую премию *G*, которую *ЛПР* готов заплатить за полное страховое покрытие. Предположим, что X ≤ w < 50.

Решение.

Для нашей задачи формула (\*) приобретает вид





Для заданных значений w, *X* и *р* эта формула становится квадратным уравнением с решением *G* = 4,49.

**Пример 7.12.** Вероятность того, что собственности не будет нанесен ущерб, равняется 0,75. Функция плотности возможных положительных потерь задается соотношением Функция полезности владельца собственности имеет вид  Вычислим ожидаемые потери и максимальный размер страховой премии, которую владелец собственности готов заплатить за полное страховое покрытие.

**Решение.**

Ожидаемые потери задаются формулой

**

Рассчитаем максимальную премию, которую владелец собственности выплатит за такой страховой договор.

**

Т

**

**

Таким образом, владелец собственности готов заплатить сумму, значительно превышающую ожидаемые частичные потери, самое большее, на величину

44,63 – 25 = 19,63.

**Тема 8. Методика Росстрахнадзора.**

**Пример 8.1.**

Страховая компания планирует заключить 40 000 договоров страхования имущества. Вероятность наступления страхового случая 0,02. Средняя страховая сумма 1000 000 руб. Среднее страховое возмещение при наступлении страхового события 800 000 руб. Данных о разбросе возможных страховых возмещений нет. Возможные страховые возмещения не должны превысить собранных страховых премий с вероятностью 0,95. Доля нагрузки в структуре страхового тарифа 25 %. Рассчитать страховой тариф.

**Решение.**

По условию *n* = 40 000, *p* = 0,02,  = 1000 000,  = 800 000, *γ* = 0,95, *f* = 25 %. Вычислим основную часть *Т0* нетто-ставки:



С помощью табл. находим, что *α(γ=0,95)=1,645*. Вычислим рисковую надбавку:

≈ 0,11

Вычислим нетто-ставку: *Тн = Т0 + Тр* = 1,6 + 0,11 = 1,71 руб.

Вычислим тарифную ставку:



**Ответ*.*** 2,28руб.

**Пример 8.2.**

Страховая компания планирует заключить 9000 договоров страхования граждан от несчастных случаев. Вероятность наступления страхового случая 0,03. Средняя страховая сумма 18 000 руб. Среднее страховое возмещение при наступлении страхового события 7200 руб. Средний разброс возможных страховых возмещений 2000 руб. Возможные страховые возмещения не должны превысить собранных страховых премий с вероятностью 0,95. Доля нагрузки в структуре страхового тарифа 25 %. Рассчитать страховой тариф.

**Решение**.

По условию задачи *n* = 9000, *p* = 0,03,  = 18 000,  = 7 200, *Rb* = 2 000, *γ* = 0,95, *f* = 25 %. Вычислим основную часть *Т0* нетто-ставки:



Заметим, что, как и в предыдущей задаче, *α(γ = 0,95) = 1,645*.

Вычислим рисковую надбавку *Тр*:



Вычислим нетто-ставку по (3):

*Тн = Т0 + Тр* = 1,2 + 0,123 = 1,323 руб.

Вычислим тарифную ставку:



**Ответ.** 1,76 руб.

**Пример 8.3.**

Страховая компания проводит оба вида страхования, описанные в задачах 1 и 2. Рассчитать страховые тарифы.

**Решение**.

Обозначим числовые данные, относящиеся к имущественному страхованию, при помощи индекса 1, а к страхованию от несчастных случаев - при помощи индекса 2. Тогда по условиям задач 1 и 2

*n1* = 40 000; *p1* = 0,02;  = 1 000 000;  = 800 000;

*n2* = 9 000; *p2* = 0,03;  = 18 000;  = 7 200;  = 2 000;

*γ* = 0,95; *f* = 25%.

Следовательно,

*ml = nlpl* =40 000∙0,02 = 800;

*m2 =n2p2* = 9 000∙0,03 = 270.

Учитывая, что средний разброс страховых возмещений по первому риску неизвестен, а по второму - известен, вычислим коэффициент *μ*:



Рисковая надбавка для любого вида страхования, входящего в страховой портфель, вычисляется по формуле

*Тр = Т0∙α(γ)∙μ = Т0∙1,645∙0,0419 = 0,0689∙Т0****.***

Поэтому для страхования имущества

*Тн1 = Т0 + Тр* = *Т0 + 0,0689 Т0* = *1,0689 Т0* = *1,0689 1,6* = *1,71* руб.



Для страхования от несчастных случаев

*Тн2 = Т0 + Тр* = *Т0 + 0,0689 Т0* = *1,0689 Т0* = *1,0689 1,2* = *1,28* руб.



**Ответ*.*** 2,28 руб. для страхования имущества; 1,71 руб. для страхования от несчастных случаев.

**Пример 8.4*.***

Страховая компания заключила *n1* = 10000 договоров имущественного страхования. Вероятность наступления страхового случая *p1* = 0,01, средняя страховая сумма *S1* = 500 тыс. руб., среднее возмещение при наступлении страхового случая *Sb1* = 375 тыс. руб., доля нагрузки в структуре тарифа *f1* = 30 %. Данных о разбросе возможных возмещений нет. Определить соответствующие тарифы.

**Решение**.

Основная часть нетто-ставки со 100 руб. страховой суммы равна:



Рассчитаем страховую надбавку. Пусть страховая компания с надежностью *γ1* = 0,95 предполагает обеспечить не превышение возможных возмещений над собранными премиями, тогда из таблицы *α(γ)* = 1,645. Рисковая надбавка равна:



Нетто-ставка со 100 руб. страховой суммы:



Брутто-ставка со 100 руб. страховой суммы:



**Пример 8.5.**

Страховая компания заключила *n2* = 3000 договоров страхования граждан от несчастных случаев. Вероятность наступления страхового случая *p2* = 0,04, средняя страховая сумма *S2* = 140 тыс. руб., среднее возмещение при наступлении страхового случая *Sb2* = 56 тыс. руб., доля нагрузки в структуре тарифа *f2* = 30 %. Средний разброс возмещений *Rb2* = 30 тыс.руб. Определить соответствующие тарифы.

**Решение.**

Основная часть нетто-ставки со 100 руб. страховой суммы равна:



Рассчитаем страховую надбавку. Для надежности *γ2* = 0,95 *α(γ)* = 1,645. Отсюда:



Нетто-ставка со 100 руб. страховой суммы:



Брутто-ставка со 100 руб. страховой суммы:



**Задача 8.6.**

Допустим, что страховая компания проводит виды страхования, описанные в предыдущих примерах, т.е. в ее портфеле есть разнородные риски. В этом случае основные части нетто-ставок будут такими же, как в примерах 4 и 5. Для расчета рисковых надбавок определяем коэффициент *μ* учитывая, что средний разброс выплат по 1-му риску неизвестен:



Рисковая надбавка рассчитывается по формуле:



Нетто-ставка для любого вида страхования, составляющего страховой портфель:



Нетто-ставка со 100 руб. страховой суммы: при имущественном страховании , при страховании граждан от несчастных случаев . Соответствующие брутто-ставки со 100 руб. страховой суммы: .

**Рекомендуемая литература.**

1. Актуарные расчеты: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Ю.Н. Миронкина, Н.В. Звездина, М.А. Скорик, Л.В. Иванова. – М.:Издательство Юрайт,2015. – 663 с.

2. Бауэрс Н. Л., и др. Актуарная математика (2-е"изд.). - М.: Янус-К, 2001.

3. Задачи по курсу «Страховая математика» (с решениями): Учеб.-метод.пособие / Авт.-сост. П.М.Лаппо. – Мн.: БГУ, 203. 73 с.

4. Корнилов И.А. «Основы страховой математики». М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 400 с.

5. Страхование и актуарные расчеты: учебное пособие / Е.В.Орлик; Владим.гос.ун-т. – Владимир. 2014. 124 с.

6. Фалин Г.И., Фалин А.И. «Теория риска для актуариев в задачах» - М.:Мир. 2004. – 240 с.

**Оглавление.**

Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

Тема 1. Общие задачи в имущественном страховании . . . . . . . . . . . 4

Тема 2. Рисковая премия . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14

Тема 3. Рисковая надбавка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 22

Тема 4. Системы ответственности. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

Тема 5. Индивидуальная модель риска . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

Тема 6. Коллективная модель риска . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

Тема 7. Теория полезности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47

Тема 8. Методика Росстрахнадзора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54

Рекомендуемая литература . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59

1. ® *Здесь и дальше, для краткости условное математическое ожидание E(X|A) и дисперсию E(X|A) будет обозначаться как EX и DX*. [↑](#footnote-ref-1)
2. ®1 Большинство примеров этой темы взяты из книги Бауэрс и др. Данные задачи включены в квалификационные экзамены Общества актуариев. [↑](#footnote-ref-2)
3. ®2 Данная задача носит название «*Петербургский парадокс*» ». Этот парадокс был рассмотрен Даниилом Бернулли (1700-1782). Парадокс был впервые опубликован в «Комментариях Санкт-Петербургской Академии» в 1738 г. [↑](#footnote-ref-3)