

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В РАСЧЕТАХ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СИСТЕМАХ СО СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Учебное пособие



Владимир 2015

УДК 532.5
ББК 22.253.31
М54

Авторы: С. М. Аракелян, Д. Н. Бухаров, С. И. Абрахин, А. О. Кучерик

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук
профессор кафедры общей и прикладной физики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Л. В. Фуров

Доктор биологических наук, профессор
ведущий научный сотрудник факультета почвоведения
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
Т. А. Трифонова

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

М54 **Методы** вычислительной гидродинамики в расчетах движения жидкости в системах со сложной топологией : учеб пособие / С. М. Аракелян [и др.] ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2015. – 99 с. – ISBN 978-5-9984-0589-1.

Рассмотрены основы разделов гидродинамики, теории фракталов, позволяющие моделировать сложные разветвленные системы и производить расчеты течения в них.

Предназначено для студентов-бакалавров и магистров направления «Прикладная математика и информатика» очной формы обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 74. Табл. 4. Библиогр.: 14 назв.

УДК 532.5
ББК 22.253.31

ISBN 978-5-9984-0589-1

© ВлГУ, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ЧАСТЬ 1. ГИДРОДИНАМИКА	6
1. Основные определения гидродинамики	6
1.1. Жидкость и силы, действующие на нее	6
1.2. Механические характеристики и основные свойства жидкостей	8
2. Основы гидродинамики	11
2.1. Основные понятия о движении жидкости	11
2.2. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости	13
2.3. Уравнение Бернулли для реальной жидкости	15
2.4. Измерение скорости потока и расхода жидкости	17
Контрольные вопросы	18
3. Гидравлические сопротивления	19
3.1. Режимы движения жидкости	19
3.2. Кавитация	21
3.3. Потери напора при ламинарном течении жидкости	23
3.4. Потери напора при турбулентном течении жидкости	25
3.5. Местные гидравлические сопротивления	29
Контрольные вопросы	34
4. Истечение жидкости из отверстий, насадков и из-под затворов	35
4.1. Истечение через малые отверстия в тонкой стенке при постоянном напоре	35
4.2. Истечение при несовершенном сжатии	38
4.3. Истечение под уровень	39
4.4. Истечение через насадки при постоянном напоре	39
4.5. Истечения через отверстия и насадки при переменном напоре (опорожнение сосудов)	42
4.6. Истечение из-под затвора в горизонтальном лотке	43

4.7. Давление струи жидкости на ограждающие поверхности	45
Контрольные вопросы	47
5. Гидравлический расчет трубопроводов	47
5.1. Простой трубопровод постоянного сечения	48
5.2. Соединения простых трубопроводов.....	50
5.3. Сложные трубопроводы	53
5.4. Трубопроводы с насосной подачей жидкостей	56
5.5. Гидравлический удар	58
5.6. Изменение пропускной способности трубопроводов в процессе их эксплуатации	61
Контрольные вопросы	62
ЧАСТЬ 2. ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ПОДЗЕМНЫХ ТРЕЩИН	63
6. Понятие фрактала	63
6.1. Геометрические фракталы	65
6.2. Алгебраические фракталы	67
6.3. Стохастические фракталы.....	68
Контрольные вопросы	68
7. Применение методов фрактальной геометрии для моделирования разветвленных геологических систем ...	69
8. Модель формирования системы подземных трещин	76
Контрольные задания	82
ЧАСТЬ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В МОДЕЛИ ТРЕЩИНОВАТОСТИ	82
9. Транзит жидкости в предложенных моделях трещиноватости	82
9.1. Модель центрального потока жидкости	83
9.2. Модель пристеночного слоя	86
9.3. Расчет характеристик течений в системе фрактальных трещин	91
Контрольные задания	95
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	96
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	97

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамика является основой многих прикладных наук, в том числе связанных с проектированием и эксплуатацией водного транспорта и гидротехнических сооружений. Законы гидродинамики человечество постигало в течение всей своей истории, совершенствуя обводы и движители кораблей, создавая водяные мельницы, портовые сооружения, каналы, шлюзы, водопроводные системы и пр.

По мере развития гидродинамики её математические модули уточнялись, но при этом усложнялись, и их анализ стал невозможен без применения численных методов и компьютерных технологий. Так появилась вычислительная гидродинамика (CFD – Computer Fluid Dynamics). На основе её вычислительных алгоритмов созданы мощные компьютерные программы, позволяющие обычным инженерам и студентам виртуально экспериментировать с самыми сложными течениями жидкостей.

Часть 1. ГИДРОДИНАМИКА

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Решение различных технических проблем, связанных с вопросами движения жидкостей в открытых и закрытых руслах, а также с вопросами силового воздействия жидкости на стенки сосудов или обтекаемые жидкостью твердые тела, привело к созданию обширной науки, называемой гидромеханикой, которая делится на два раздела: техническая гидромеханика и теоретическая механика жидкости и газа.

Гидравлика (техническая механика жидкости) – прикладная часть гидромеханики, которая использует те или иные допущения для решения практических задач. Она обладает сравнительно простыми методиками расчета по сравнению с теоретической механикой жидкости, где применяется сложный математический аппарат. Однако гидравлика дает достаточную для технических приложений характеристику рассматриваемых явлений.

1.1. Жидкость и силы, действующие на нее

Жидкостью в гидравлике называют физическое тело, способное изменять свою форму при воздействии на нее сколь угодно малых сил. Различают два вида жидкостей: капельные и газообразные. Капельные жидкости представляют собой жидкости в обычном, общепринятом понимании этого слова (вода, нефть, керосин, масло и т.д.). Газообразные жидкости – газы, в обычных условиях представляют собой газообразные вещества (воздух, кислород, азот, пропан и т.д.).

Основной отличительной особенностью капельных и газообразных жидкостей является способность сжиматься (изменять объем) под воздействием внешних сил. Капельные жидкости (в дальнейшем просто жидкости) трудно поддаются сжатию, а газообразные жидкости (газы) сжимаются довольно легко, т.е. при воздействии небольших усилий способны изменить свой объем в несколько раз.

В гидравлике рассматриваются *реальная* и *идеальная* жидкости. Идеальная жидкость в отличие от реальной не обладает внутренним трением, а также трением о стенки сосудов и трубопроводов, по которым она движется. Идеальная жидкость также обладает абсолютной

несжимаемостью. Такая жидкость не существует в действительности, и была придумана для облегчения и упрощения ряда теоретических выводов и исследований.

На жидкость постоянно воздействуют внешние силы, которые разделяют на массовые и поверхностные.

Массовые: силы тяжести и инерции. Сила тяжести в земных условиях действует на жидкость постоянно, а сила инерции только при сообщении объему жидкости ускорений (положительных или отрицательных).

Поверхностные обусловлены воздействием соседних объемов жидкости на данный объем или воздействием других тел.

Рассмотрим сосуд, наполненный жидкостью. Если выделить в нем бесконечно малый объем жидкости, то на этот объем будут действовать силы со стороны соседних таких же бесконечно малых объемов (рис. 1.1). Кроме этого на свободную поверхность жидкости действуют сила атмосферного давления $P_{атм}$ и силы со стороны стенок сосуда.

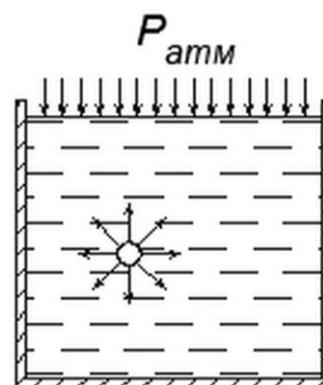


Рис. 1.1. Поверхностные силы

Если на жидкость действует какая-то внешняя сила, то говорят, что жидкость находится под давлением. Обычно для определения давления жидкости, вызванного воздействием на нее поверхностных сил, применяется формула $P=F/S$ (Н/м²) или (Па), где F – сила, действующая на жидкость, H ;

S – площадь, на которую действует эта сила, м².

Если давление P отсчитывают от абсолютного нуля, то его называют *абсолютным давлением* $P_{абс}$. Если давление отсчитывают от атмосферного, то оно называется *избыточным* $P_{изб}$. Атмосферное давление постоянно $P_a = 103$ кПа (рис. 1.2).

За единицу давления в Международной системе единиц (СИ) принят паскаль – давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м²:

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2 = 10^{-3} \text{ кПа} = 10^{-6} \text{ МПа}.$$

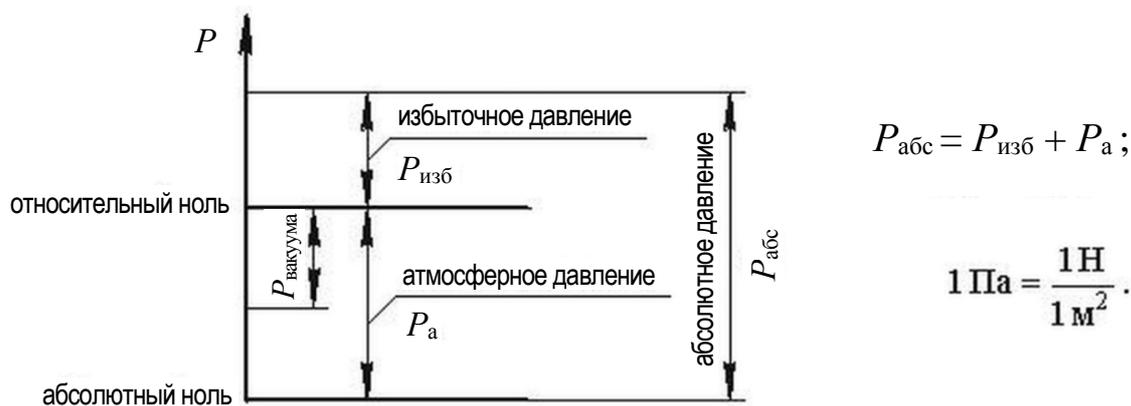


Рис. 1.2. Схема к определению давлений

Размерность давления обозначается как Па (паскаль), кПа (килопаскаль), МПа (мегапаскаль). В технике в настоящее время продолжают применять систему единиц МКГСС, в которой за единицу давления принимается 1 кгс/м^2 .

$$1 \text{ Па} = 0,102 \text{ кгс/м}^2 \text{ или } 1 \text{ кгс/м}^2 = 9,81 \text{ Па.}$$

1.2. Механические характеристики и основные свойства жидкостей

Основные механические характеристики

Одной из основных механических характеристик жидкости является ее плотность. *Плотностью* жидкости называют массу жидкости, заключенную в единице объема.

$$\rho = m/V, \text{ кг/м}^3.$$

Удельным весом называют вес единицы объема жидкости, который определяется по формуле

$$\beta_V = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}, \text{ м}^2/\text{Н}.$$

С увеличением температуры удельный вес жидкости уменьшается.

Основные физические свойства

1. *Сжимаемость* – свойство жидкости изменять свой объем под действием давления. Сжимаемость жидкости характеризуется коэффициентом объемного сжатия, который определяется по формуле

$$\gamma = \frac{G}{V}, \text{ Н/м}^3,$$

где V – первоначальный объем жидкости, dV – изменение этого объема при увеличении давления на величину dP .

Обратная величина называется модулем объемной упругости жидкости:

$$K = \frac{1}{\beta}, \text{ Н/м}^2.$$

Модуль объемной упругости не постоянен и зависит от давления и температуры. При гидравлических расчетах сжимаемостью жидкости обычно пренебрегают и считают жидкости практически несжимаемыми. Сжатие жидкостей в основном обусловлено сжатием растворенного в них газа.

Сжимаемость понижает жесткость гидропривода, так как на сжатие затрачивается энергия. Сжимаемость может явиться причиной возникновения автоколебаний в гидросистеме, создает запаздывание в срабатывании гидроаппаратуры и исполнительных механизмах.

Иногда сжимаемость жидкостей полезна – ее используют в гидравлических амортизаторах и пружинах.

2. *Температурное расширение* – относительное изменение объема жидкости при увеличении температуры на 1°C при $P = \text{const}$. Характеризуется коэффициентом температурного расширения

$$\beta_t = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}, \text{ } 1/^\circ\text{C}.$$

Поскольку для капельных жидкостей коэффициент температурного расширения ничтожно мал, то при практических расчетах его не учитывают.

3. *Сопротивление растяжению*. Особыми физическими опытами было показано, что покоящаяся жидкость (в частности вода, ртуть) иногда способна сопротивляться очень большим растягивающим усилиям. Но в обычных условиях такого не происходит, и поэтому считают, что жидкость не способна сопротивляться растягивающим усилиям.

4. *Силы поверхностного натяжения* – эти силы стремятся придать сферическую форму жидкости. Силы поверхностного натяжения обусловлены поверхностными силами и направлены всегда внутрь рассматриваемого объема перпендикулярно свободной поверхности жидкости. Рассмотрим бесконечно малый объем жидкости на свободной поверхности. На него будут действовать силы со стороны соседних объемов. В результате, если сложить векторы

всех сил, действующих на рассматриваемый объем, то суммарная составляющая сила будет направлена перпендикулярно внутрь рассматриваемого объема (рис. 1.3).

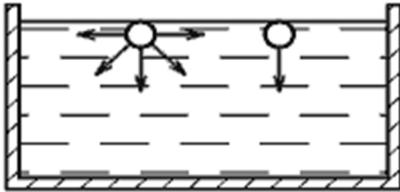


Рис. 1.3. Силы поверхностного натяжения

5. *Вязкость жидкости* – свойство жидкости сопротивляться скольжению или сдвигу ее слоев. Суть ее заключается в возникновении внутренней силы трения между движущимися слоями жидкости, которая определяется по формуле Ньютона

$$T = \mu S \frac{dv}{dy}, \text{ Н,}$$

где S – площадь слоев жидкости или стенки, соприкасающейся с жидкостью, м^2 ; μ – динамический коэффициент вязкости, или сила вязкостного трения; d/dy – градиент скорости, перпендикулярный к поверхности сдвига.

Отсюда динамическая вязкость равна

$$\mu = \tau \frac{dy}{dv}, \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2,$$

где τ – касательные напряжения жидкости, $\tau = T/S$.

При течении вязкой жидкости вдоль твердой стенки происходит торможение потока, обусловленное вязкостью (рис.1.4). Скорость уменьшается по мере уменьшения расстояния y от стенки. При этом при $y = 0$ скорость падает до нуля, а между слоями происходит проскальзывание, сопровождающееся возникновением касательных напряжений τ .

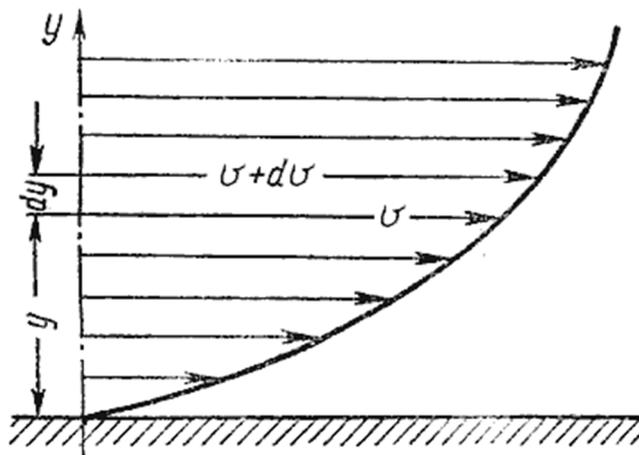


Рис. 1.4. Профиль скоростей при течении вязкой жидкости вдоль стенки

Величина, обратная динамическому коэффициенту вязкости ($1/\mu$), называется текучестью жидкости.

Отношение динамического коэффициента вязкости к плотности жидкости называется кинематическим коэффициентом вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \text{ м}^2/\text{с}.$$

Величина ν , равная 1 см²/с, называется стоксом, Ст, а 0,01 Ст – сантистоксом, сСт.

2. ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

Гидродинамика – раздел гидравлики, в котором изучаются законы движения жидкости и ее взаимодействие с неподвижными и подвижными поверхностями.

Если отдельные частицы абсолютно твердого тела жестко связаны между собой, то в движущейся жидкой среде такие связи отсутствуют. Движение жидкости состоит из чрезвычайно сложного перемещения отдельных молекул.

2.1. Основные понятия о движении жидкости

Живым сечением ω , м², называют площадь поперечного сечения потока, перпендикулярную к направлению течения. Например, живое сечение трубы – круг (рис. 2.1, а); живое сечение клапана – кольцо с изменяющимся внутренним диаметром (рис. 2.1, б).

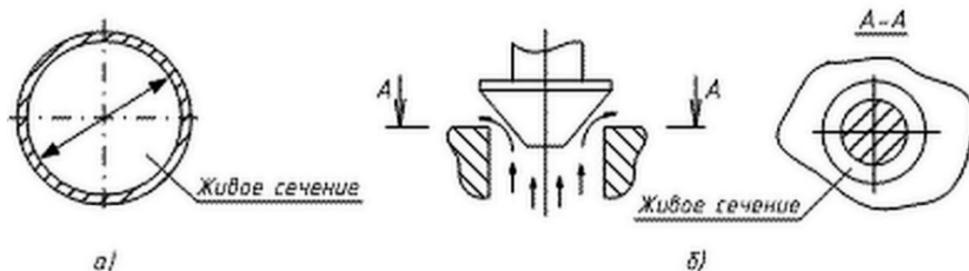


Рис. 2.1. Живые сечения: а – трубы; б – клапана

Смоченный периметр χ – часть периметра живого сечения, ограниченная твердыми стенками (рис. 2.2, выделен утолщенной линией).

Для круглой трубы $\chi = \frac{\pi D \varphi}{2\pi} = \frac{D \varphi}{2}$, если угол измеряется в радианах, или $\chi = \frac{\pi D \varphi}{360^\circ}$, если угол φ – в градусах.

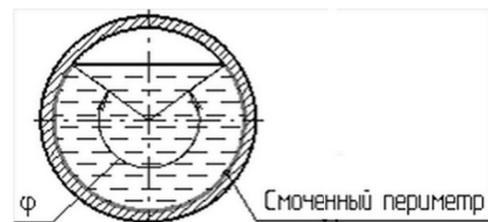


Рис. 2.2. Смоченный периметр

Расход потока Q – объем жидкости V , протекающей за единицу времени t через живое сечение ω .

$$Q = \frac{V}{t} \text{ м}^3/\text{с, л/мин.}$$

Средняя скорость потока v – скорость движения жидкости, определяющаяся отношением расхода жидкости Q к площади живого сечения ω $v_{\text{ср}} = \frac{Q}{\omega}$, м/с.

Поскольку скорость движения различных частиц жидкости отличается друг от друга, поэтому скорость движения усредняется. В круглой трубе, например, скорость на оси трубы максимальна, тогда как у стенок трубы она равна нулю.

Гидравлический радиус потока R – отношение живого сечения к смоченному периметру $R = \frac{\omega}{\chi}$, м.

Течение жидкости может быть установившимся и не установившимся. *Установившимся* движением называется такое движение жидкости, при котором в данной точке русла давление и скорость не изменяются во времени

$$v = f(x, y, z); P = \varphi f(x, y, z).$$

Движение, при котором скорость и давление изменяются не только от координат пространства, но и от времени, называется не установившимся, или нестационарным

$$v = f_1(x, y, z, t); P = \varphi f_1(x, y, z, t).$$

Линия тока (применяется при не установившемся движении) – это кривая, в каждой точке которой вектор скорости в данный момент времени направлен по касательной (рис. 2.3, а).

Трубка тока – трубчатая поверхность, образуемая линиями тока с бесконечно малым поперечным сечением. Часть потока, заключенная внутри трубки тока, называется *элементарной струйкой* (рис. 2.3, б).

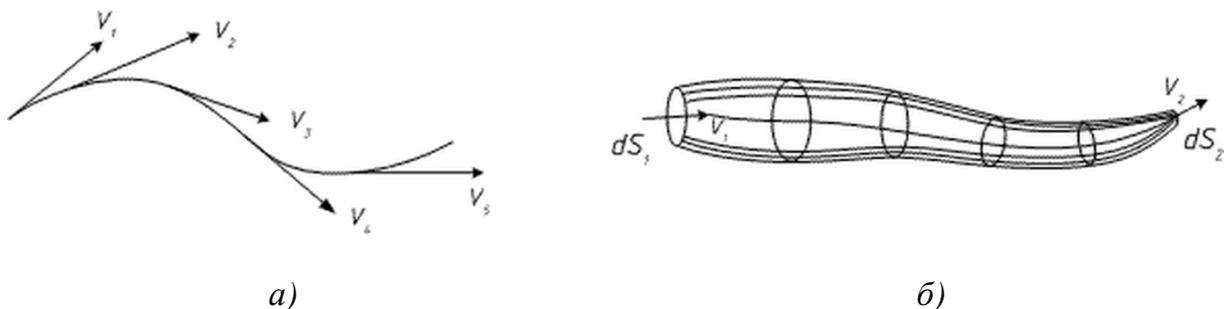


Рис. 2.3. Линия тока и элементарная струйка

Течение жидкости может быть напорным и безнапорным. *Напорное* течение наблюдается в закрытых руслах без свободной поверхности, например, в трубопроводах с повышенным (пониженным) давлением. *Безнапорное* – течение со свободной поверхностью, которое наблюдается в открытых руслах (реки, открытые каналы, лотки и т.п.).

Из закона сохранения вещества и постоянства расхода вытекает *уравнение неразрывности* течений. Представим трубу с переменным живым сечением (рис. 2.4). Расход жидкости через трубу в любом ее сечении постоянен, т.е. $Q_1 = Q_2 = \text{const}$, откуда $\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$.

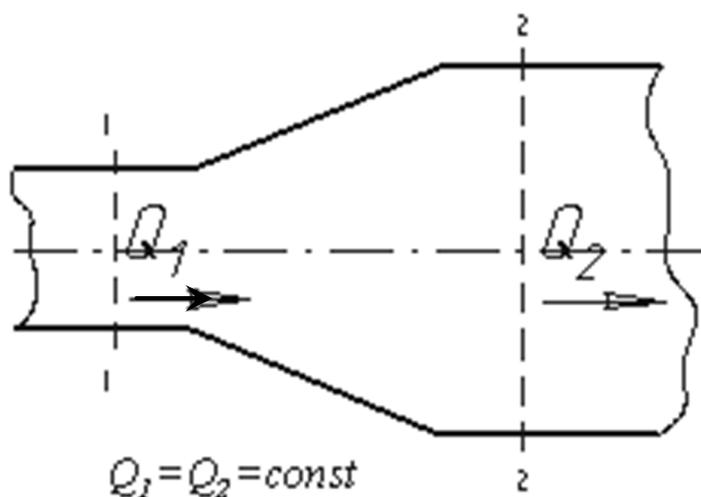


Рис. 2.4. Труба с переменным диаметром при постоянном расходе

Таким образом, если течение в трубе сплошное и неразрывное, то уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \text{const.}$$

2.2. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Уравнение Даниила Бернулли, полученное в 1738 г., является фундаментальным уравнением гидродинамики. Оно дает связь между давлением P , средней скоростью v и пьезометрической высотой z в раз-

личных сечениях потока и выражает закон сохранения энергии движущейся жидкости. С помощью этого уравнения решается большой круг задач.

Рассмотрим трубопровод переменного диаметра, расположенный в пространстве под углом β (рис. 2.5).

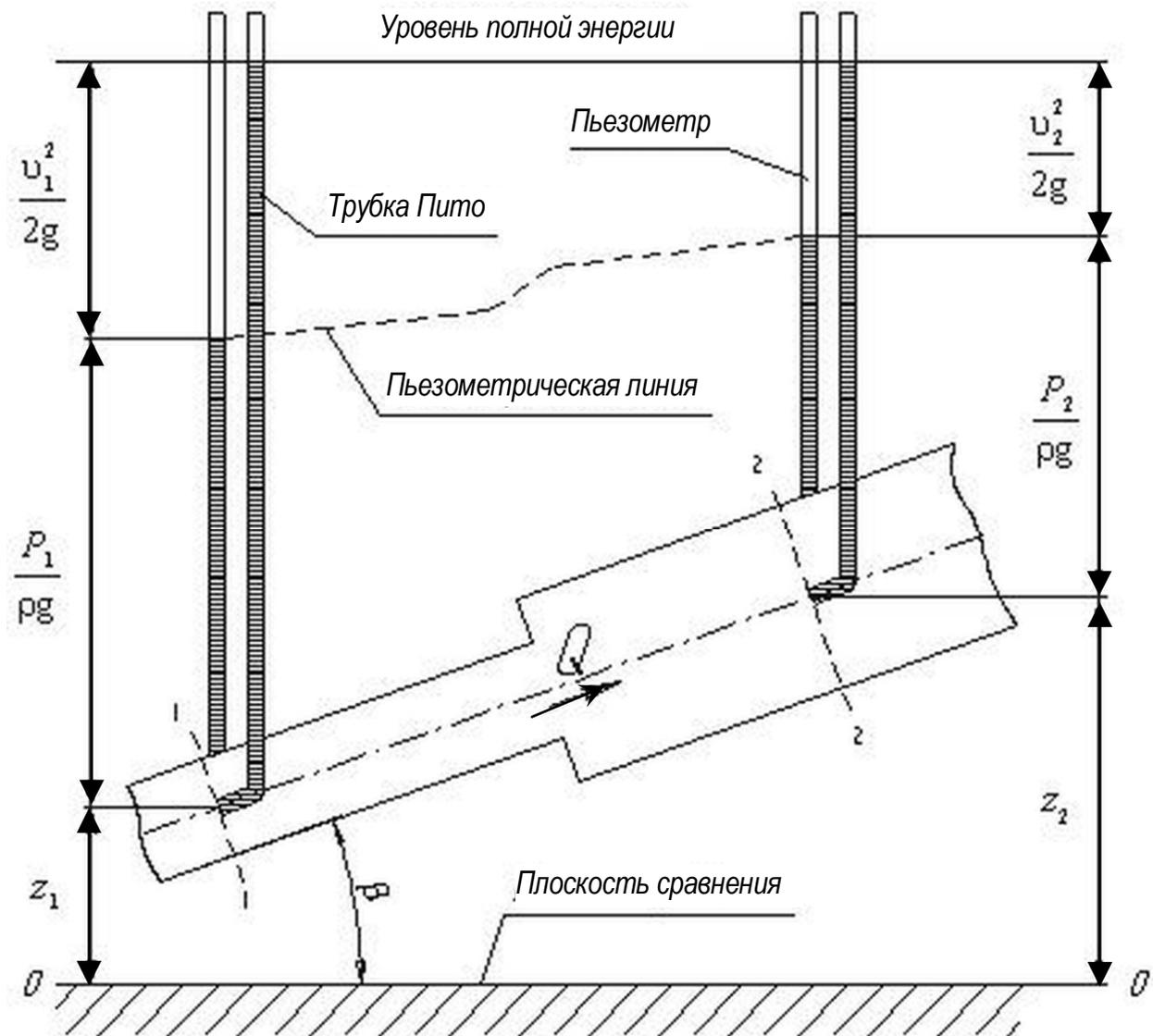


Рис. 2.5. Схема к выводу уравнения Бернулли для идеальной жидкости

Выберем произвольно на рассматриваемом участке трубопровода два сечения: сечение 1-1 и сечение 2-2. Вверх по трубопроводу от первого сечения ко второму движется жидкость, расход которой равен Q .

Для измерения давления жидкости применяют *пьезометры* – тонкостенные стеклянные трубки, в которых жидкость поднимается на высоту $p/\rho g$. В каждом сечении установлены пьезометры, в которых уровень жидкости поднимается на разные высоты.

Кроме пьезометров в каждом сечении 1-1 и 2-2 установлена трубка, загнутый конец которой направлен навстречу потоку жидкости, – *трубка Пито*. Жидкость в трубках Пито также поднимается на разные уровни, если отсчитывать их от *пьезометрической линии*.

Пьезометрическую линию можно построить следующим образом. Если между сечениями 1-1 и 2-2 поставить несколько таких же пьезометров и через показания уровней жидкости в них провести кривую, то мы получим ломаную линию (см. рис. 2.5).

Однако высота уровней в трубках Пито относительно произвольной горизонтальной прямой 0-0, называемой *плоскостью сравнения*, будет одинакова.

Если через показания уровней жидкости в трубках Пито провести линию, то она будет горизонтальна и будет отражать *уровень полной энергии трубопровода*.

Для двух произвольных сечений 1-1 и 2-2 потока идеальной жидкости уравнение Бернулли имеет следующий вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = H = \text{const.}$$

Так как сечения 1-1 и 2-2 взяты произвольно, то полученное уравнение можно переписать иначе:

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{const.}$$

2.3. Уравнение Бернулли для реальной жидкости

Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости несколько отличается от уравнения

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = H = \text{const.}$$

Дело в том, что при движении реальной вязкой жидкости возникают силы трения, на преодоление которых жидкость затрачивает энергию. В результате полная удельная энергия жидкости в сечении

1-1 будет больше полной удельной энергии в сечении 2-2 на величину потерь энергии (рис. 2.6).

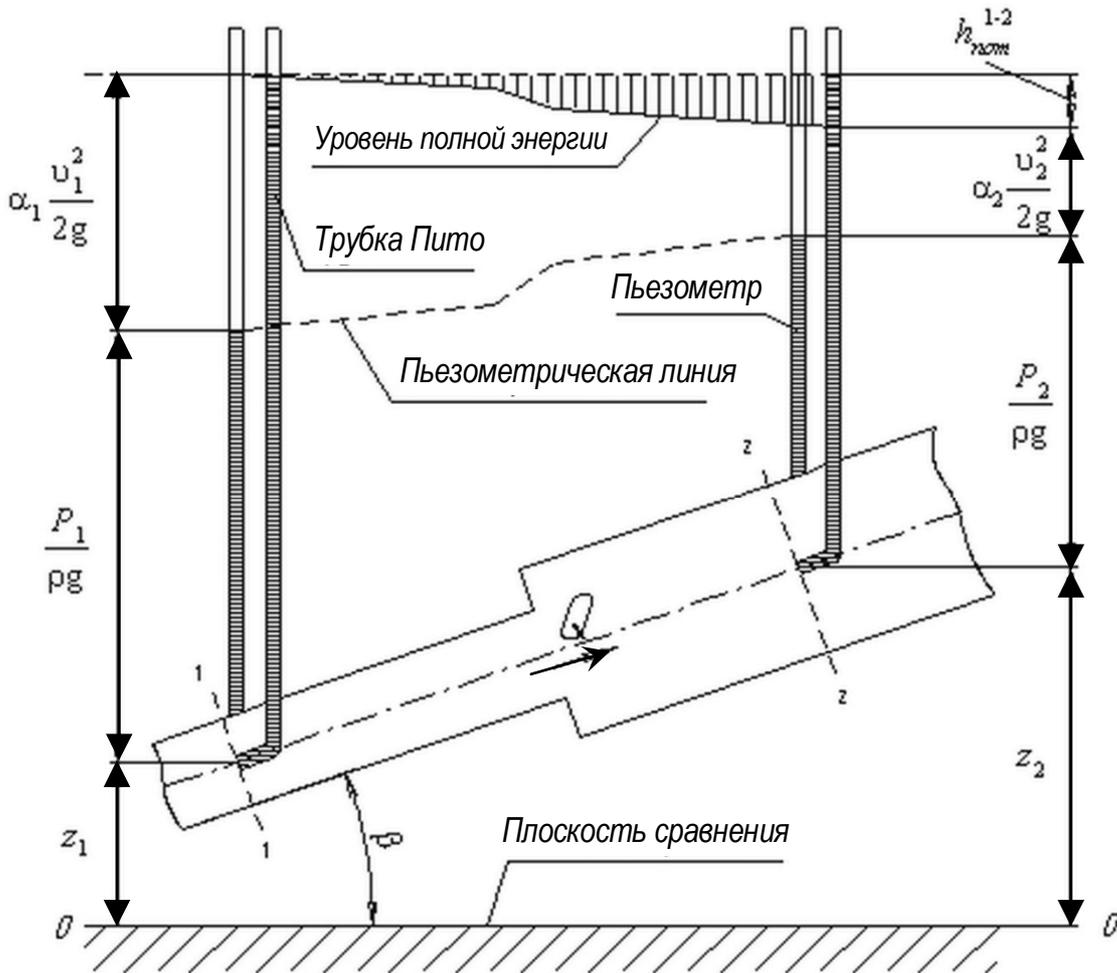


Рис. 2.6. Схема к выводу уравнения Бернулли для реальной жидкости

Потерянная энергия, или потерянный напор, обозначаются $h_{\text{пот}}^{1-2}$ и имеют также линейную размерность.

Уравнение Бернулли для реальной жидкости будет иметь вид

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{\text{пот}}^{1-2} = H = \text{const.}$$

Из рис. 2.6 видно, что по мере движения жидкости от сечения 1-1 до сечения 2-2 потерянный напор все время увеличивается (потерянный напор выделен вертикальной штриховкой). Таким образом, уровень первоначальной энергии, которой обладает жидкость в первом сечении, для второго сечения будет складываться из четырех составляющих: геометрической высоты, пьезометрической высоты, скоростной высоты и потерянного напора между сечениями 1-1 и 2-2.

Кроме этого в уравнении появились еще два коэффициента α_1 и α_2 , которые называются *коэффициентами Кориолиса* и зависят от режима течения жидкости ($\alpha = 2$ для ламинарного режима, $\alpha = 1$ для турбулентного режима).

Потерянная высота $h_{\text{пот}}^{1-2}$ складывается из линейных потерь, вызванных силой трения между слоями жидкости, и потерь, вызванных местными сопротивлениями (изменениями конфигурации потока) $h_{\text{пот}}^{1-2} = h_{\text{лин}} + h_{\text{мест}}$.

С помощью уравнения Бернулли решается большинство задач практической гидравлики. Для этого выбирают два сечения по длине потока таким образом, чтобы для одного из них были известны величины P , ρ , g , а для другого сечения одна величина или величины подлежали определению. При двух неизвестных для второго сечения используют уравнение постоянства расхода жидкости $v_1\omega_1 = v_2\omega_2$.

2.4. Измерение скорости потока и расхода жидкости

Для измерения скорости в точках потока широко используется работающая по принципу уравнения Бернулли трубка Пито (рис. 2.7, а), загнутый конец которой направлен навстречу потоку. Пусть требуется измерить скорость жидкости в какой-то точке потока. Поместив конец трубки в указанную точку и составив уравнение Бернулли для сечения 1-1 и сечения, проходящего на уровне жидкости в трубке Пито, получим:

$$\frac{P_{\text{ст}} + \gamma h}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H + h + \frac{P_{\text{ст}}}{\gamma}, \text{ или } v = \sqrt{2gH},$$

где H – столб жидкости в трубке Пито.

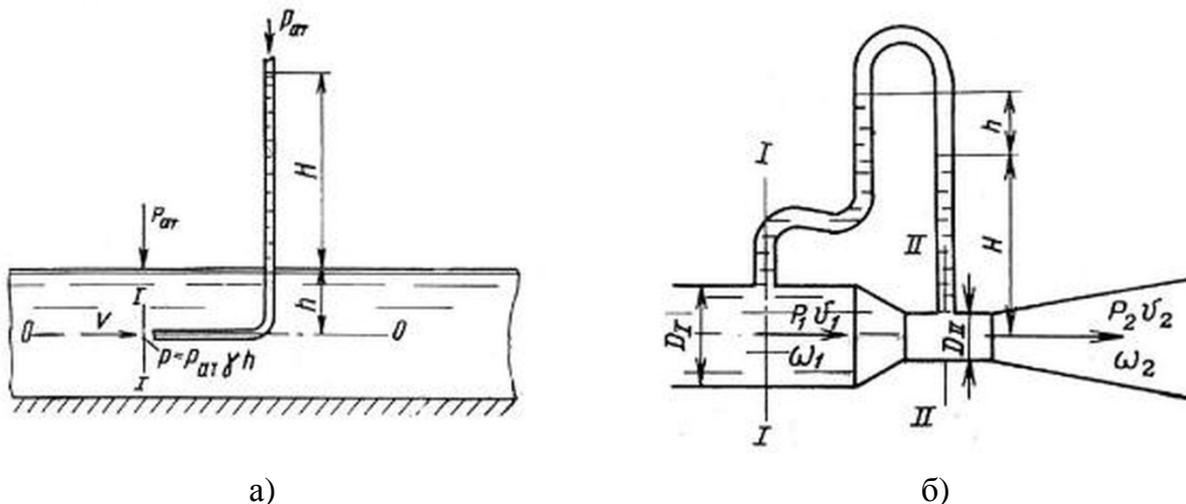


Рис. 2.7. Трубка Пито (а) и расходомер Вентури (б)

Для измерения расхода жидкости в трубопроводах часто используют расходомер Вентури, действие которого основано также на принципе уравнения Бернулли. Расходомер Вентури состоит из двух конических насадок с цилиндрической вставкой между ними (рис. 2.7, б). Если в сечениях I-I и II-II поставить пьезометры, то разность уровней в них будет зависеть от расхода жидкости, протекающей по трубе.

Пренебрегая потерями напора и считая $z_1 = z_2$, напишем уравнение Бернулли для сечений I-I и II-II:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g},$$

или

$$h = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} \left[1 + \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right].$$

Используя уравнение неразрывности

$$Q = v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2,$$

сделаем замену в полученном выражении

$$h = \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} \left[1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \right].$$

Решая относительно Q , получим

$$Q = \omega_1 \omega_2 \sqrt{\frac{2g}{\omega_1^2 - \omega_2^2}} \sqrt{h}.$$

Выражение, стоящее перед \sqrt{h} , является постоянной величиной, носящей название постоянной водомера Вентури.

Из полученного уравнения видно, что h зависит от расхода Q . Часто эту зависимость строят в виде тарировочной кривой h от Q , которая имеет параболический характер.

Контрольные вопросы

1. Что такое жидкость?
2. Что такое реальная жидкость?
3. В чем разница между реальной и идеальной жидкостями?
4. На какие виды разделяют действующие на жидкость внешние силы?

5. Какие силы называются массовыми, а какие поверхностными?
6. Чему равно атмосферное давление при нормальных условиях?
7. Что такое сжимаемость жидкости, и чем это свойство характеризуется?
8. Как определяется коэффициент объемного сжатия?
9. Как называется площадь поперечного сечения потока, перпендикулярная направлению движения?
10. Какую характеристику течения определяет объем жидкости, протекающий за единицу времени через живое сечение?
11. Как называется движение, при котором скорость и давление изменяются не только от координат пространства, но и от времени?

3. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Потери энергии (уменьшение гидравлического напора) можно наблюдать в движущейся жидкости не только на сравнительно длинных участках, но и на коротких. В одних случаях потери напора распределяются (иногда равномерно) по длине трубопровода – это линейные потери; в других они сосредоточены на очень коротких участках, длиной которых можно пренебречь, – на так называемых местных гидравлических сопротивлениях: вентили, всевозможные закругления, сужения, расширения и так далее – всюду, где поток претерпевает деформацию. Источником потерь во всех случаях является вязкость жидкости.

Следует заметить, что потери напора и по длине, и в местных гидравлических сопротивлениях существенным образом зависят от так называемого режима движения жидкости.

3.1. Режимы движения жидкости

При наблюдении за движением жидкости в трубах и каналах можно заметить, что в одном случае жидкость сохраняет определенный строй своих частиц, а в других – перемещается бессистемно. Однако исчерпывающие опыты по этому вопросу были проведены

Рейнольдсом в 1883 г. На рис. 3.1 изображена установка, аналогичная той, на которой Рейнольдс производил свои опыты.

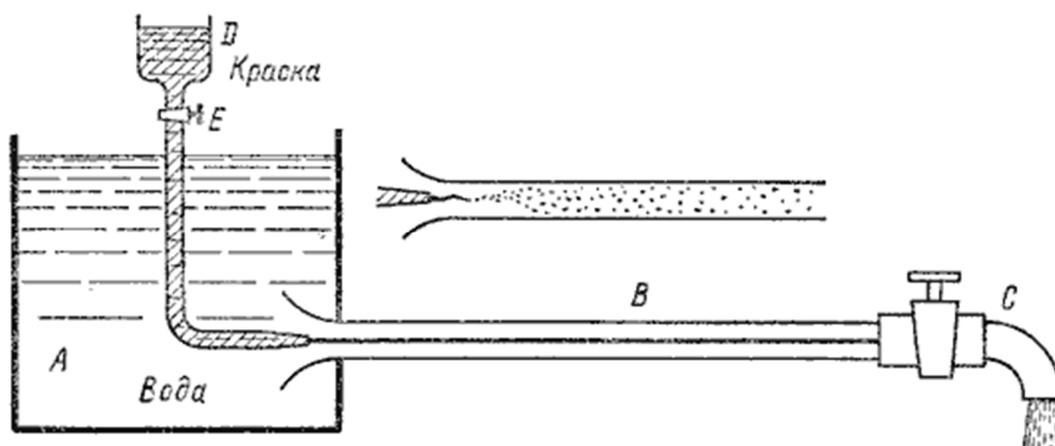


Рис. 3.1. Схема установки Рейнольдса

Установка состоит из резервуара *A* с водой, от которого отходит стеклянная труба *B* с краном *C* на конце, и сосуда *D* с водным раствором краски, которая может по трубке вводиться тонкой стружкой внутрь стеклянной трубы *B*.

Первый случай движения жидкости. Если немного приоткрыть кран *C* и дать возможность воде протекать в трубе с небольшой скоростью, а затем с помощью крана *E* впустить краску в поток воды, то увидим, что введенная в трубу краска не будет перемешиваться с потоком воды. Струйка краски будет отчетливо видимой вдоль всей стеклянной трубы, что указывает на слоистый характер течения жидкости и на отсутствие перемешивания. Если при этом к трубе подсоединить пьезометр или трубку Пито, то они покажут неизменность давления и скорости по времени. Такой режим движения называется *ламинарным*.

Второй случай движения жидкости. При постепенном увеличении скорости течения воды в трубе путем открытия крана *C* картина течения вначале не меняется, но затем при определенной скорости течения наступает быстрое ее изменение. Струйка краски по выходе из трубки начинает колебаться, затем размывается и перемешивается с потоком воды, причем становятся заметными вихреобразования и вращательное движение жидкости. Пьезометр и трубка Пито при этом покажут непрерывные пульсации давления и скорости в потоке воды. Такое течение называется *турбулентным* (рис. 3.1, вверху).

Если уменьшить скорость потока, то восстановится ламинарное течение.

Итак, *ламинарным* называется слоистое течение без перемешивания частиц жидкости и без пульсации скорости и давления. При ламинарном течении жидкости в прямой трубе постоянного сечения все линии тока направлены параллельно оси трубы, при этом отсутствуют поперечные перемещения частиц жидкости.

Турбулентным называется течение, сопровождающееся интенсивным перемешиванием жидкости с пульсациями скоростей и давлений. Наряду с основным продольным перемещением жидкости наблюдаются поперечные перемещения и вращательные движения отдельных объемов жидкости. Переход от ламинарного режима к турбулентному наблюдается при определенной скорости движения жидкости. Эта скорость называется *критической* $v_{кр}$.

Значение этой скорости прямо пропорционально кинематической вязкости жидкости и обратно пропорционально диаметру трубы $v_{кр} = \frac{\nu}{d} k$.

Как показывает опыт, для труб круглого сечения $Re_{кр}$ примерно равно 2300.

Таким образом, критерий подобия Рейнольдса позволяет судить о режиме течения жидкости в трубе. При $Re < Re_{кр}$ течение является ламинарным, а при $Re > Re_{кр}$ течение будет турбулентным. Точнее говоря, вполне развитое турбулентное течение в трубах устанавливается лишь при Re , примерно равно 4000, а при $Re = 2300 \dots 4000$ имеет место переходная, критическая область.

Режим движения жидкости напрямую влияет на степень гидравлического сопротивления трубопроводов.

3.2. Кавитация

В некоторых случаях при движении жидкости в закрытых руслах происходит явление, связанное с изменением агрегатного состояния жидкости, т.е. превращение ее в пар с выделением из жидкости растворенных в ней газов.

Наглядно это явление можно продемонстрировать на простом устройстве, состоящем из трубы, на отдельном участке которой

установлена прозрачная трубка Вентури (рис. 3.2). Вода под давлением движется от сечения 1-1 через сечение 2-2 к сечению 3-3. Как видно из рисунка, сечение 2-2 имеет меньший диаметр. Скорость течения жидкости в трубе можно изменять, например, установленным после сечения 3-3 краном.

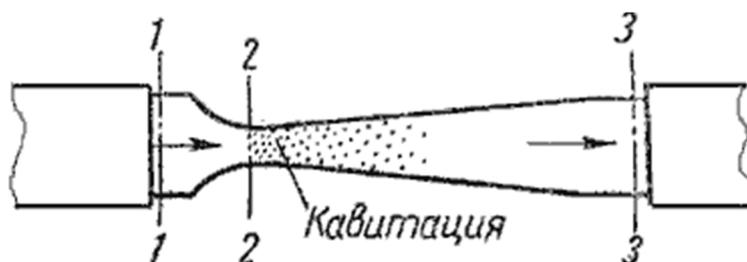


Рис. 3.2. Схема трубки для демонстрации кавитации

При небольшой скорости никаких видимых изменений в движении жидкости не происходит. При увеличении скорости движения жидкости в узком сечении трубки Вентури 2-2 появляется отчетливая зона с образованием пузырьков газа. Образуется область местного кипения, т.е. образование пара с выделением растворенного в воде газа. Далее при подходе жидкости к сечению 3-3 это явление исчезает.

Это явление обусловлено следующим. Известно, что при движении жидкой или газообразной среды давление в ней падает. Причем, чем выше скорость движения среды, тем давление в ней ниже. Поэтому при течении жидкости через местное сужение 2-2, согласно уравнению неразрывности течений, увеличивается скорость с одновременным падением давления в этом месте. Если абсолютное давление при этом достигает значения, равного давлению насыщенных паров жидкости при данной температуре, или значения, равного давлению, при котором начинается выделение из нее растворимых газов, то в данном месте потока наблюдаются интенсивное парообразование (кипение) и выделение газов. Такое явление называется кавитацией.

При дальнейшем движении жидкости к сечению 3-3 пузырьки исчезают, т.е. происходит резкое уменьшение их размеров. В то время когда пузырек исчезает (схлопывается), в точке его схлопывания происходит резкое увеличение давления, которое передается на соседние объемы жидкости и через них на стенки трубопровода. Таким образом, от таких многочисленных местных повышений давлений (гидроударов) возникает вибрация.

Итак, *кавитация* – это местное нарушение сплошности течения с образованием паровых и газовых пузырей (каверн), обусловленное местным падением давления в потоке.

Кавитация в обычных случаях – явление нежелательное, и ее не следует допускать в трубопроводах и других элементах гидросистем. Кавитация возникает в кранах, вентилях, задвижках, жиклерах и т.д.

Кавитация может иметь место в гидромашинах (насосах и гидротурбинах), снижая при этом их коэффициент полезного действия, а при длительном воздействии кавитации происходит разрушение деталей, подверженных вибрации. Кроме этого разрушаются стенки трубопроводов, уменьшается их пропускная способность вследствие уменьшения живого сечения трубы.

3.3. Потери напора при ламинарном течении жидкости

Как показывают исследования, при ламинарном течении жидкости в круглой трубе максимальная скорость находится на оси трубы. У стенок трубы скорость равна нулю, так как частицы жидкости покрывают внутреннюю поверхность трубопровода тонким неподвижным слоем. От стенок трубы к ее оси скорости нарастают плавно. *График распределения скоростей по поперечному сечению потока представляет собой параболоид вращения, а сечение параболоида осевой плоскостью – квадратичную параболу* (рис. 3.3).

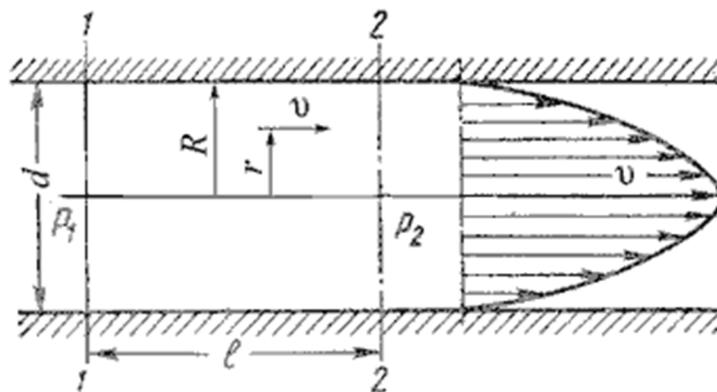


Рис. 3.3. Схема для рассмотрения ламинарного потока

Уравнение, связывающее переменные v и r , имеет следующий вид:

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\mu l} (R^2 - r^2),$$

где P_1 и P_2 – давления соответственно в сечениях 1-1 и 2-2.

У стенок трубы величина $r = R$, значит, скорость $v = 0$, а при $r = 0$ (на оси потока) скорость будет максимальной

$$v_{\text{макс}} = \frac{P_1 - P_2}{4\mu l} (R^2 - 0^2) = \frac{P_1 - P_2}{4\mu l} R^2.$$

Теперь определим расход жидкости при ламинарном течении в круглой трубе. Так как эпюра распределения скоростей в круглой трубе имеет вид параболоида вращения с максимальным значением скорости в центре трубы, то расход жидкости численно равен объему этого параболоида. Определим этот объем.

Максимальная скорость дает высоту параболоида

$$h = v_{\text{макс}} = \frac{P_1 - P_2}{4\mu l} R^2.$$

Как известно из геометрии, объем параболоида высотой h и площадью ρR^2 равен $V = \pi R^2 \frac{h}{2}$,

$$\text{а в нашем случае } Q = \frac{1}{2} \pi R^2 \frac{P_1 - P_2}{4\mu l} R^2 = \frac{P_1 - P_2}{8\mu l} \pi R^4.$$

Если вместо R подставить диаметр трубы d , то формула приобретает вид $Q = \frac{P_1 - P_2}{128\mu l} \pi d^4$.

Расход в трубе можно выразить через среднюю скорость

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{128\mu l} \pi d^4 = v_{\text{ср}} \frac{\pi d^2}{4}.$$

$$\text{Откуда } v_{\text{ср}} = \frac{P_1 - P_2}{32\mu l} d^2.$$

Для определения потерь напора при ламинарном течении жидкости в круглой трубе рассмотрим участок трубы длиной l , по которому поток течет в условиях ламинарного режима (см. рис. 3.3).

$$\text{Потеря давления в трубопроводе } P_1 - P_2 = \frac{32\mu l}{d^2} v_{\text{ср}}.$$

Если в формуле динамический коэффициент вязкости μ заменить через кинематический коэффициент вязкости ν и плотность ρ ($\mu = \nu\rho$) и разделить обе части равенства на объемный вес жидкости $\gamma = \rho g$, то получим

$$\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} = \frac{32\nu\rho l}{\rho g d^2} v_{\text{ср}}.$$

Так как левая часть полученного равенства равна потерям напора $h_{\text{пот}}$ в трубе постоянного диаметра, то окончательно это равенство примет вид $h_{\text{пот}} = \frac{32\nu l}{g d^2} v_{\text{ср}}$.

Уравнение может быть преобразовано в универсальную формулу Вейсбаха-Дарси, которая окончательно записывается так:

$$h_{\text{пот}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

где λ – коэффициент гидравлического трения, который для ламинарного потока вычисляется по выражению $\lambda = \frac{64}{Re}$.

Однако при ламинарном режиме для определения коэффициента гидравлического трения λ Т. М. Башта рекомендует при $Re < 2300$ применять формулу $\lambda = \frac{75}{Re}$.

3.4. Потери напора при турбулентном течении жидкости

Как было указано, для турбулентного течения характерно перемешивание жидкости, пульсации скоростей и давлений. Если с помощью особо чувствительного прибора-самописца измерять пульсации, например, скорости по времени в фиксированной точке потока, то получим картину, подобную показанной на рис. 3.4. Скорость беспорядочно колеблется около некоторого осредненного по времени значения $v_{\text{оср}}$, которое в данном случае остается постоянным.

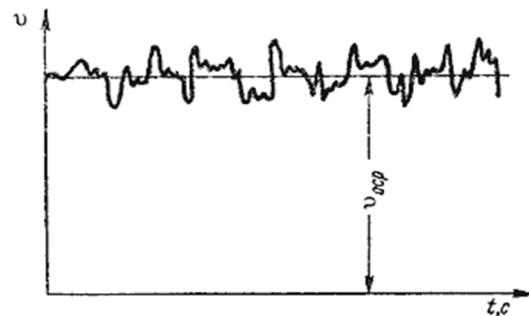


Рис. 3.4. Пульсация скорости в турбулентном потоке

Характер линий тока в трубе в данный момент времени отличается большим разнообразием (рис. 3.5).

При турбулентном режиме движения жидкости в трубах эпюра распределения скоростей имеет вид, показанный на рис. 3.6. В тонком пристенном слое толщиной δ жидкость течет в ламинарном режиме, а остальные слои текут в турбулентном режиме и называются *турбулентным ядром*.

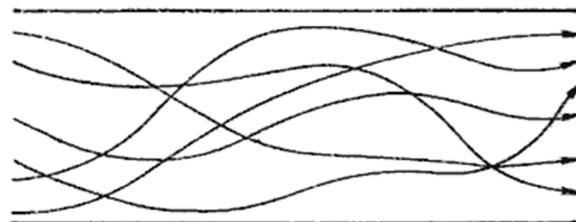


Рис. 3.5. Характер линий тока в турбулентном потоке

Таким образом, строго говоря, турбулентного движения в чистом виде не существует. Оно сопровождается ламинарным движением у стенок, хотя слой δ с ламинарным режимом весьма мал по сравнению с турбулентным ядром.

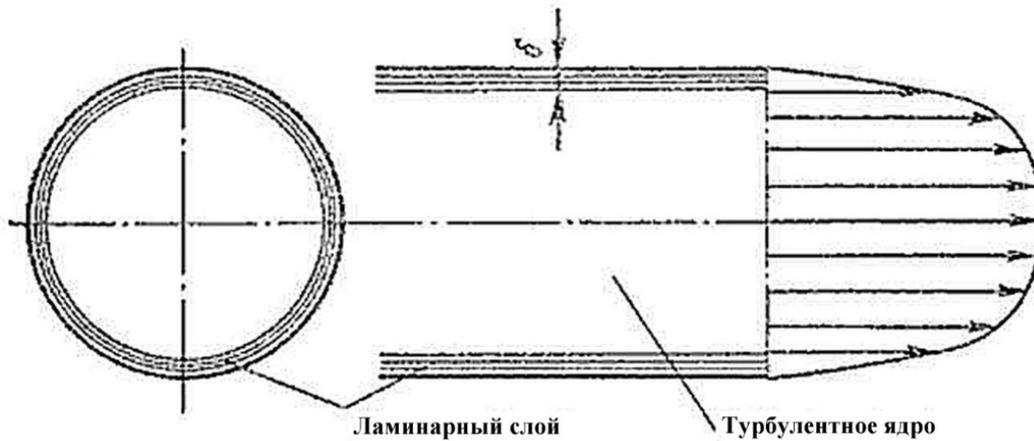


Рис. 3.6. Модель турбулентного режима движения жидкости

Основной расчетной формулой для потерь напора при турбулентном течении жидкости в круглых трубах является уже приводившаяся выше эмпирическая формула, называемая формулой Вейсбаха-Дарси и имеющая следующий вид:

$$h_{\text{пот}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Различие заключается лишь в значениях коэффициента гидравлического трения λ . Этот коэффициент зависит от числа Рейнольдса Re и от безразмерного геометрического фактора – относительной шероховатости Δ/d (или Δ/r_0 , где r_0 – радиус трубы).

Впервые наиболее исчерпывающие определения были даны в работе И. И. Никурадзе, который на основе опытных данных построил график зависимости $lg(1000\lambda)$ от $lg Re$ для ряда значений Δ/r_0 . Опыты Никурадзе были проведены на трубах с искусственно заданной шероховатостью, полученной путем приклейки песчинок определенного размера на внутренние стенки трубопровода. Результаты этих исследований представлены на рис. 3.7, где построены кривые зависимости $lg(1000\lambda)$ от $lg Re$ для ряда значений Δ/r_0 . Прямая I соответствует ламинарному режиму движения жидкости.

Далее на графике можно рассматривать три области.

Первая область – область малых Re и Δ/r_0 , где коэффициент λ не зависит от шероховатости, а определяется лишь числом Re (отмечена на рис. 3.7 прямой II). Это область гидравлически гладких труб. Если число Рейнольдса лежит в диапазоне $4000 < Re < 10(d/\Delta_0)$, коэффициент λ определяется по полуэмпирической формуле Блазиуса

$$\lambda_T = \frac{0,316}{Re^{0,25}}.$$

Для определения существует также эмпирическая формула П. К. Конова, которая применима для гидравлически гладких труб

$$\lambda_T = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2}$$

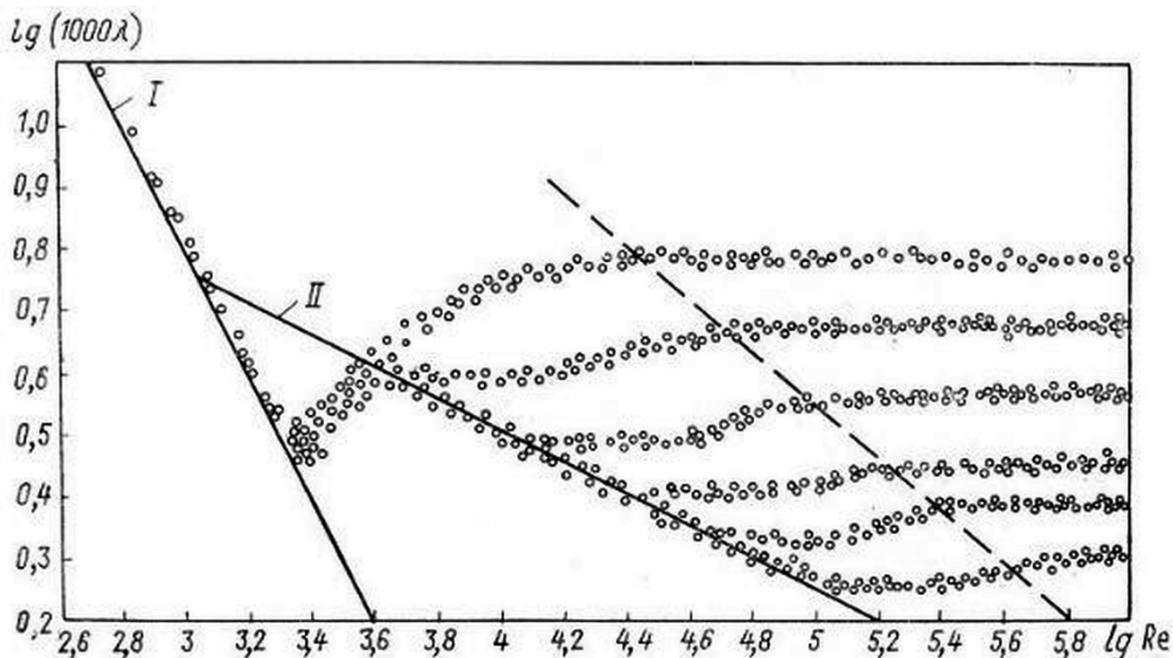


Рис. 3.7. График Никурадзе

Во второй области, расположенной между линиями II и пунктирной линией справа, коэффициент λ зависит одновременно от двух параметров — числа Re и относительной шероховатости Δ/r_0 , которую можно заменить на Δ_s . Для определения коэффициента λ в этой области может служить универсальная формула А. Д. Альтшуля

$$\lambda_T = 0,11 \left(\frac{\Delta_s}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25},$$

где Δ_s — эквивалентная абсолютная шероховатость.

Характерные значения Δ_s , мм, для труб из различных материалов приведены ниже:

Стекло	0
Трубы, тянутые из латуни, свинца, меди	0...0,002
Высококачественные бесшовные стальные трубы	0,06...0,2
Стальные трубы	0,1...0,5
Чугунные асфальтированные трубы	0,1...0,2
Чугунные трубы	0,2...1,0

Третья область – область больших Re и Δ/r_0 , где коэффициент λ не зависит от числа Re , а определяется лишь относительной шероховатостью (область расположена справа от пунктирной линии). Это область шероховатых труб, в которой все линии с различными шероховатостями параллельны между собой. Эту область называют областью автомодельности, или режимом квадратичного сопротивления, так как здесь гидравлические потери пропорциональны квадрату скорости.

Определение λ для этой области производят по упрощенной формуле Альтшуля $\lambda_T = 0,11 \left(\frac{\Delta_3}{d}\right)^{0,25}$ или по формуле Прандтля – Никурадзе

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} = -2 \lg \left(\frac{\Delta_3}{3,71d} \right) .$$

Итак, потери напора, определяемые по формуле Вейсбаха-Дарси, можно определить, зная коэффициент гидравлического сопротивления, который определяется в зависимости от числа Рейнольдса Re и от эквивалентной абсолютной шероховатости Δ_3 . Для удобства сводные данные по определению λ представлены в таблице.

Пользоваться приведенными в таблице формулами для определения коэффициента λ не всегда удобно. Для облегчения расчетов можно воспользоваться номограммой Колбрука – Уайта (рис. 3.8), при помощи которой по известным Re и Δ_3/d весьма просто определяется λ .

Определение коэффициента гидравлического трения

Режим движения		Число Рейнольдса	Определение λ
Ламинарный		$Re < 2300$	$\lambda = \frac{64}{Re}$ или $\lambda = \frac{75}{Re}$
Переходный		$2300 < Re < 4000$	Проектирование трубопроводов не рекомендуется
Турбулентный	1-я область	$4000 < Re < 10 \frac{d}{\Delta_3}$	$\lambda_T = \frac{0,316}{Re^{0,25}}$ (ф-ла Блазиуса) $\lambda_T = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2}$ (ф-ла Конакова)
	2-я область	$10 \frac{d}{\Delta_3} < Re < 560 \frac{d}{\Delta_3}$	$\lambda_T = 0,11 \left(\frac{\Delta_3}{d} + \frac{68}{Re}\right)^{0,25}$ (ф-ла Альтшуля)
	3-я область	$Re > 560 \frac{d}{\Delta_3}$	$\lambda_T = 0,11 \left(\frac{\Delta_3}{d}\right)^{0,25}$ (ф-ла Альтшуля) $\frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} = -2 \lg \left(\frac{\Delta_3}{3,71d}\right)$ (ф-ла Никурадзе)

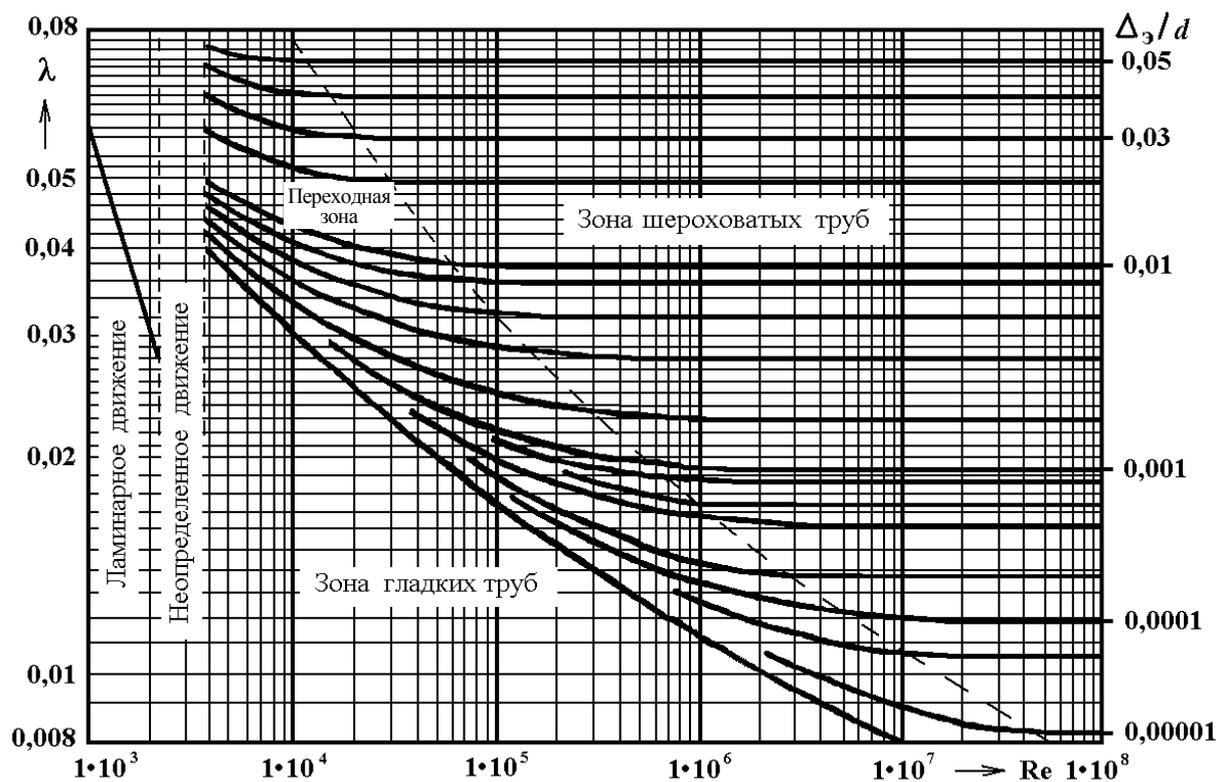


Рис. 3.8. Номограмма Колбрука – Уайта для определения коэффициента гидравлического трения

3.5. Местные гидравлические сопротивления

Все гидравлические потери энергии делятся на два типа: потери на трение по длине трубопроводов и местные потери, вызванные такими элементами трубопроводов, в которых вследствие изменения размеров или конфигурации русла происходит изменение скорости потока, отрыв потока от стенок русла и возникновение вихреобразования.

Простейшие местные гидравлические сопротивления можно разделить на расширения, сужения и повороты русла, каждое из которых может быть внезапным или постепенным. Более сложные случаи местного сопротивления представляют собой соединения или комбинации перечисленных простейших сопротивлений.

Рассмотрим простейшие местные сопротивления при турбулентном режиме течения в трубе.

1. *Внезапное расширение русла.* Потеря напора (энергии) при внезапном расширении русла расходуется на вихреобразование, связанное с отрывом потока от стенок, т.е. на поддержание вращательного непрерывного движения жидких масс с постоянным их обновлением.

При внезапном расширении русла (трубы) (рис. 3.9) поток срывается с угла и расширяется не внезапно, как русло, а постепенно, причем в кольцевом пространстве между потоком и стенкой трубы образуются вихри, которые и являются причиной потерь энергии. Рассмотрим два сечения потока: 1-1 – в плоскости расширения трубы и 2-2 – в том месте, где поток, расширившись, заполнил все сечение широкой трубы. Так как поток между рассматриваемыми сечениями расширяется, то скорость его уменьшается, а давление возрастает. Поэтому второй пьезометр показывает высоту, на ΔH большую, чем первый; но если бы потеря напора в данном месте не было, то второй пьезометр показал бы высоту, большую еще на $h_{\text{расш}}$. Эта

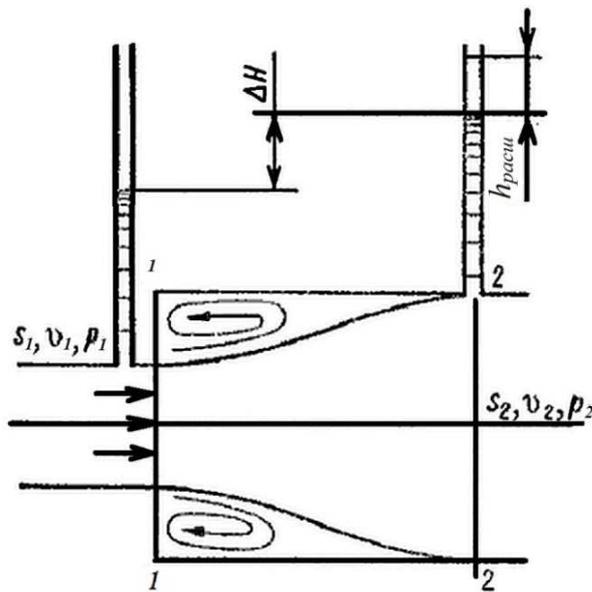


Рис. 3.9. Внезапное расширение трубы

высота и есть местная потеря напора на расширение, которая определяется по формуле

где S_1, S_2 – площадь поперечных сечений 1-1 и 2-2.

$$h_{\text{расш}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g},$$

Это выражение является следствием *теоремы Борда*, которая гласит, что потеря напора при внезапном расширении русла равна скоростному напору, определенному по разности скоростей

Выражение $(1 - S_1/S_2)^2$ обозначается греческой буквой ζ и называется коэффициентом потерь, таким образом, $h_{\text{расш}} = \zeta \frac{v_1^2}{2g}$.

$$h_{\text{расш}} = \left(\frac{v_1 - v_2}{2g}\right)^2.$$

2. *Постепенное расширение русла.* Постепенно расширяющаяся труба называется диффузором (рис. 3.10). Течение скорости в диффузоре сопровождается ее уменьшением и увеличением давления, а следовательно, преобразованием кинетической энергии жидкости в энергию давления. В диффузоре, так же как и при внезапном расширении

русла, происходит отрыв основного потока от стенки и вихреобразование. Интенсивность этих явлений возрастает с увеличением угла расширения диффузора α .

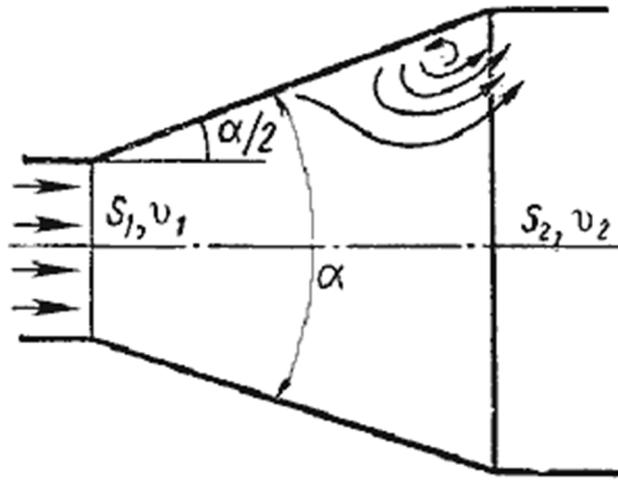


Рис. 3.10. Постепенное расширение трубы

Кроме того, в диффузоре имеются и обычные потери на трение, подобные тем, которые возникают в трубах постоянного сечения. Полную потерю напора в диффузоре рассматривают как сумму двух слагаемых

$$h_{\text{диф}} = h_{\text{тр}} + h_{\text{расш}},$$

где $h_{\text{тр}}$ и $h_{\text{расш}}$ – потери напора на трение и расширение (вихреобразование).

$$h_{\text{тр}} = \frac{\lambda_T}{8 \sin(\frac{\alpha}{2})} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{v_1^2}{2g},$$

где $n = S_2/S_1 = (r_2/r_1)^2$ – степень расширения диффузора. Потеря напора на расширение $h_{\text{расш}}$ имеет ту же самую природу, что и при внезапном расширении русла

$$h_{\text{расш}} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 k \frac{v_1^2}{2g},$$

где k – коэффициент смягчения при $\alpha = 5 \dots 20^\circ$, $k = \sin \alpha$.

Учитывая это, полную потерю напора можно переписать в виде

$$h_{\text{диф}} = \left[\frac{\lambda_T}{8 \sin(\frac{\alpha}{2})} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + k \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2 \right] \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_{\text{диф}} \frac{v_1^2}{2g},$$

откуда коэффициент сопротивления диффузора можно выразить формулой

$$\zeta_{\text{диф}} = \frac{\lambda_T}{8 \sin(\frac{\alpha}{2})} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \sin \alpha \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2.$$

Функция $\zeta = f(\alpha)$ имеет минимум при некотором наивыгоднейшем оптимальном значении угла α , оптимальное значение которого определится следующим выражением:

$$\alpha_{\text{опт}} = \arcsin \sqrt{\frac{n+1}{n-1} \frac{\lambda_T}{4}}$$

При подстановке в эту формулу $\lambda_T = 0,015 \dots 0,025$ и $n = 2 \dots 4$ получим $\alpha_{\text{опт}} = 6$ (рис. 3.11).

3. *Внезапное сужение русла.* В этом случае потеря напора обусловлена трением потока при входе в более узкую трубу и потерями на вихреобразование, которые образуются в кольцевом пространстве вокруг суженной части потока (рис. 3.12).

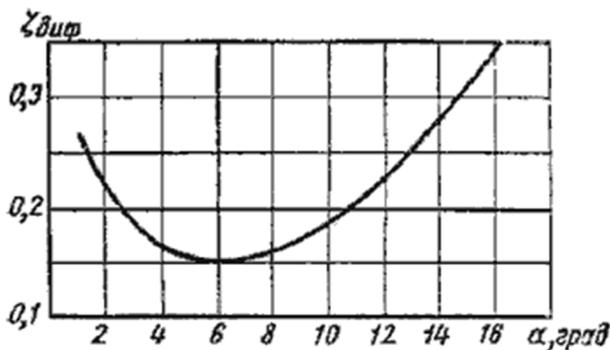


Рис. 3.11. Зависимость $\zeta_{\text{лиф}}$ от угла

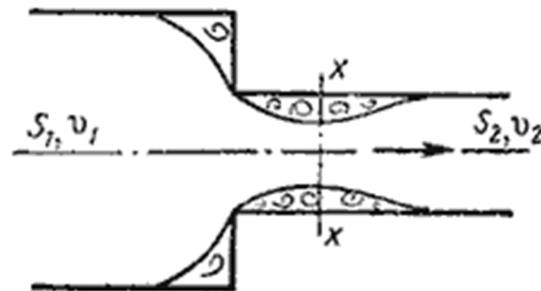


Рис. 3.12. Внезапное сужение трубы

Полная потеря напора определится по формуле

$$h_{\text{суж}} = \zeta_{\text{суж}} \frac{v_1^2}{2g},$$

где коэффициент сопротивления сужения определяется по полуэмпирической формуле И. Е. Идельчика $\zeta_{\text{суж}} = 0,5 \left(1 - \frac{2}{S_1}\right) = 0,5 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

При выходе трубы из резервуара больших размеров, когда можно считать, что $S_2/S_1 = 0$, а также при отсутствии закругления входного угла, коэффициент сопротивления $\zeta_{\text{суж}} = 0,5$.

4. *Постепенное сужение русла.* Данное местное сопротивление представляет собой коническую сходящуюся трубу, которая называется *конфузором* (рис. 3.13). Течение жидкости в конфузоре сопровождается увеличением скорости и падением давления. В конфузоре имеются лишь потери на трение

$$h_{\text{конф}} = \frac{\lambda_T}{8 \sin(\frac{\alpha}{2})} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{v_2^2}{2g},$$

где коэффициент сопротивления конфузора определяется по формуле $\zeta_{\text{суж}} = \frac{\lambda_T}{8 \sin(\frac{\alpha}{2})} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, в которой $n = S_1/S_2$ – степень сужения.

Небольшое вихреобразование и отрыв потока от стенки с одновременным сжатием потока возникает лишь на выходе из конфузора в месте соединения конической трубы с цилиндрической. Закруглением входного угла можно значительно уменьшить потерю напора при входе в трубу. Конфузор с плавно сопряженными цилиндрическими и коническими частями называется *соплом* (рис. 3.14).

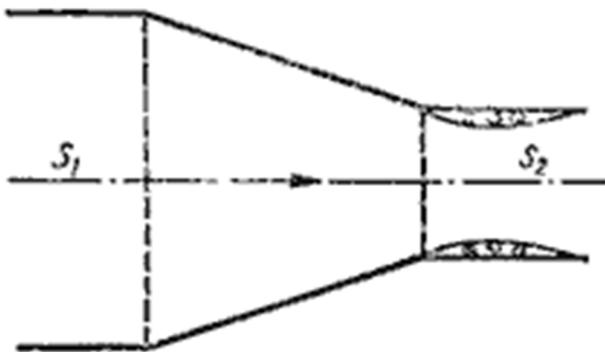


Рис. 3.13. Конфузор

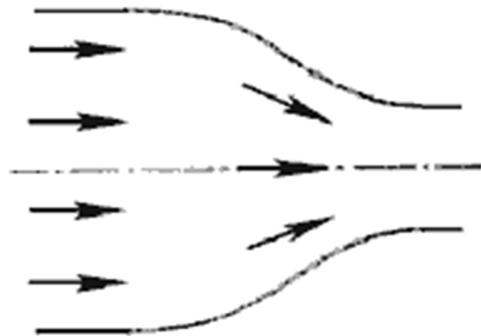


Рис. 3.14. Сопло

5. *Внезапный поворот трубы (колени)*. Данный вид местного сопротивления (рис. 3.15) вызывает значительные потери энергии, так как в нем происходят отрыв потока и вихреобразование, причем потери тем больше, чем больше угол δ . Потерю напора рассчитывают по формуле $h_{\text{кол}} = \zeta_{\text{кол}} \frac{v^2}{2g}$, где $\zeta_{\text{кол}}$ – коэффициент сопротивления колена круглого сечения, который определяется по графику в зависимости от угла колена δ (рис. 3.16).

6. *Постепенный поворот трубы (закругленное колено, или отвод)*. Плавность поворота значительно уменьшает интенсивность вихреобразования, а следовательно, и сопротивление отвода по сравнению с коленом. Это уменьшение тем больше, чем больше относительный радиус кривизны отвода R/d (рис. 3.17). Коэффициент сопротивления отвода $\zeta_{\text{отв}}$ зависит от отношения R/d , угла δ , а также формы поперечного сечения трубы.

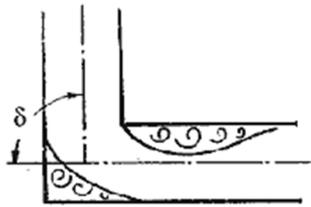


Рис. 3.15. Колено

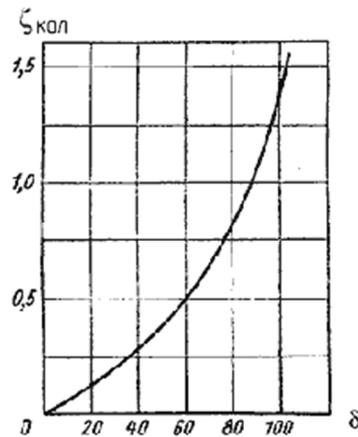


Рис. 3.16. Зависимость $\zeta_{\text{кол}}$ от угла δ

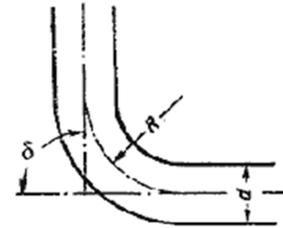


Рис. 3.17. Отвод

Для отводов круглого сечения с углом $\delta = 90$ и $R/d \geq 1$ при турбулентном течении можно воспользоваться эмпирической формулой $\zeta_{\text{отв}} = 0,051 + \frac{0,19d}{R}$.

Для углов $\delta \leq 70^\circ$ коэффициент сопротивления $\zeta_{\text{отв}} = 0,9\zeta_{\text{отв}} \sin \delta$, а при $\delta \geq 100^\circ$ $\zeta_{\text{отв}} = \left(0,7 + \frac{\delta}{90} 0,35\right) \zeta_{\text{отв}}$.

Потеря напора в колене определится как $h_{\text{кол}} = \zeta_{\text{кол}} \frac{v^2}{2g}$.

Все вышеизложенное относится к турбулентному движению жидкости. При ламинарном движении местные сопротивления играют малую роль при определении общего сопротивления трубопровода. Кроме этого закон сопротивления при ламинарном режиме является более сложным и исследован в меньшей степени.

Контрольные вопросы

1. Чем характеризуются ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости?
2. При каком режиме движения жидкости в трубопроводе пульсация скоростей и давлений не происходит?
3. При каком режиме движения жидкости в трубопроводе наблюдается пульсация скоростей и давлений в трубопроводе?
4. Где скорость движения жидкости максимальна при турбулентном режиме?
5. Где скорость движения жидкости максимальна при ламинарном режиме?

6. Как определяется критическая скорость, при которой наблюдается переход от ламинарного режима к турбулентному?
7. От каких параметров зависит значение числа Рейнольдса?
8. Чему равно критическое значение числа Рейнольдса?
9. По какой формуле определяется коэффициент гидравлического трения для ламинарного режима?
10. На сколько областей делится турбулентный режим движения при определении коэффициента гидравлического трения?
11. Что является основной причиной потери напора в местных гидравлических сопротивлениях?
12. Что такое кавитация?

4. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ, НАСАДКОВ И ИЗ-ПОД ЗАТВОРОВ

Рассмотрим различные случаи истечения жидкости из резервуаров, баков, котлов через отверстия и насадки (короткие трубки различной формы) в атмосферу или пространство, заполненное газом или той же жидкостью. В процессе такого истечения запас потенциальной энергии, которым обладает жидкость, находящаяся в резервуаре, превращается в кинетическую энергию свободной струи.

Основным вопросом, который интересует в данном случае, является определение скорости истечения и расхода жидкости для различных форм отверстий и насадков.

4.1. Истечение через малые отверстия в тонкой стенке при постоянном напоре

Рассмотрим большой резервуар с жидкостью под давлением P_0 , имеющий малое круглое отверстие в стенке на достаточно большой глубине H_0 от свободной поверхности (рис. 4.1).

Жидкость вытекает в воздушное пространство с давлением P_1 .

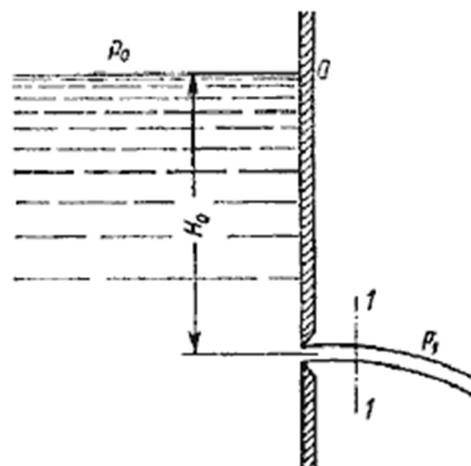


Рис. 4.1. Истечение из резервуара через малое отверстие

Пусть отверстие имеет форму, показанную на рис. 4.2, *а*, т.е. выполнено в виде сверления в тонкой стенке без обработки входной кромки или имеет форму, показанную на рис. 4.2, *б*, т.е. выполнено в толстой стенке, но с заострением входной кромки с внешней стороны. Струя, отрываясь от кромки отверстия, несколько сжимается (рис. 4.2, *а*). Такое сжатие обусловлено движением жидкости от различных направлений, в том числе и от радиального движения по осевому сечению движения в струе.

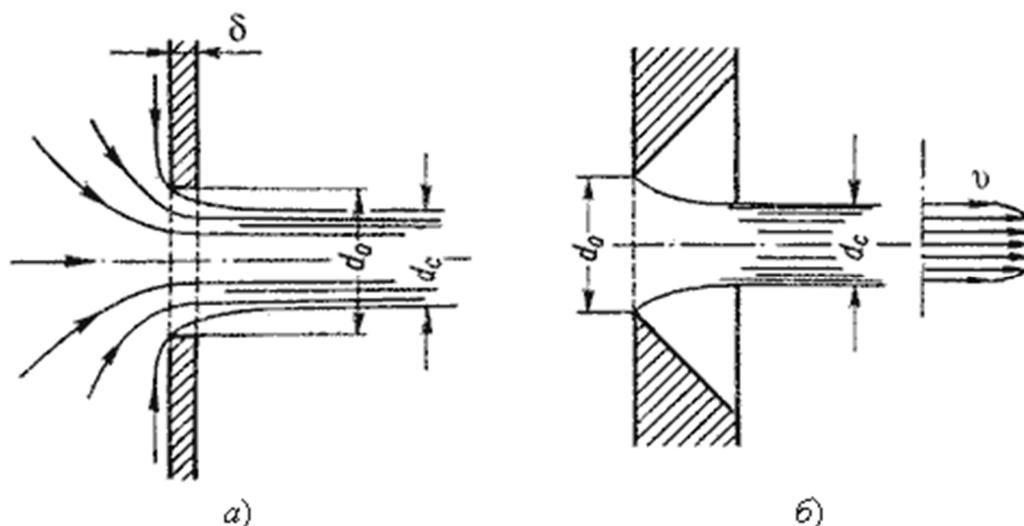


Рис. 4.2. Истечение через круглое отверстие

Степень сжатия оценивается коэффициентом сжатия

$$\varepsilon = \frac{S_c}{S_0} = \left(\frac{d_c}{d_0}\right)^2,$$

где S_c и S_0 – площади поперечного сечения струи и отверстия соответственно; d_c и d_0 – диаметры струи и отверстия соответственно.

Скорость истечения жидкости через отверстие

$$v = \varphi \sqrt{2gH},$$

где H – напор жидкости, определяется как $H = H_0 + \frac{P_0 - P_1}{\rho g}$; φ – коэффициент скорости $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta}}$, где α – коэффициент Кориолиса; ζ – коэффициент сопротивления отверстия.

Расход жидкости определяется как произведение действительной скорости истечения на фактическую площадь сечения $Q = S_c v = \varepsilon S_0 \varphi \sqrt{2gH}$.

Произведение ϵ и φ принято обозначать буквой μ и называть коэффициентом расхода, т.е. $\mu = \epsilon\varphi$.

В итоге получаем расход

$$Q = \mu S_c \sqrt{2gH} = \mu S_c \sqrt{2 \frac{\Delta P}{\rho}},$$

где ΔP – расчетная разность давлений, под действием которой происходит истечение.

При помощи этого выражения решается основная задача – определяется расход.

Значения коэффициента сжатия ϵ , сопротивления ζ , скорости φ и расхода μ для круглого отверстия можно рассчитать по эмпирически построенным зависимостям. На рис. 4.3 показаны зависимости коэффициентов ϵ , φ и μ от числа Рейнольдса, подсчитанного для идеальной скорости

$$Re_u = \frac{d\sqrt{2gH}}{\nu}, \text{ где } \nu \text{ – кинематическая вязкость.}$$

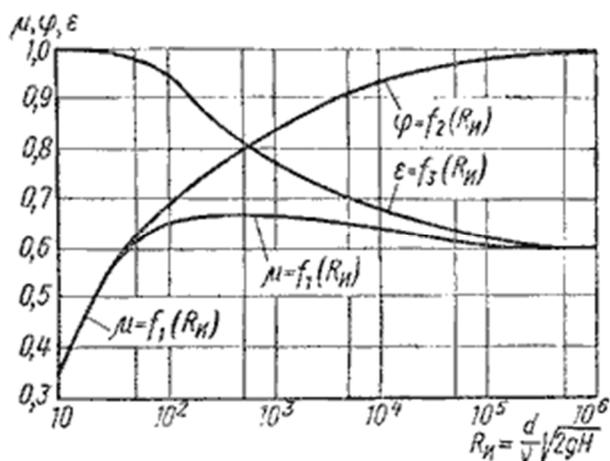


Рис. 4.3. Зависимость ϵ , φ и μ от числа Re_u

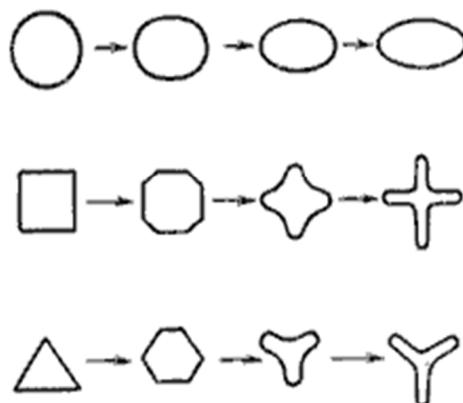


Рис. 4.4. Инверсия струй

При истечении струи в атмосферу из малого отверстия в тонкой стенке происходит изменение формы струи по ее длине, называемое *инверсией струи* (рис. 4.4). Обуславливается это явление в основном действием сил поверхностного натяжения на вытекающие криволинейные струйки и различными условиями сжатия по периметру отверстия. Инверсия больше всего проявляется при истечении из некруглых отверстий.

4.2. Истечение при несовершенном сжатии

Несовершенное сжатие наблюдается в том случае, когда на истечение жидкости через отверстие и на формирование струи оказывает влияние близость боковых стенок резервуара (рис. 4.5).

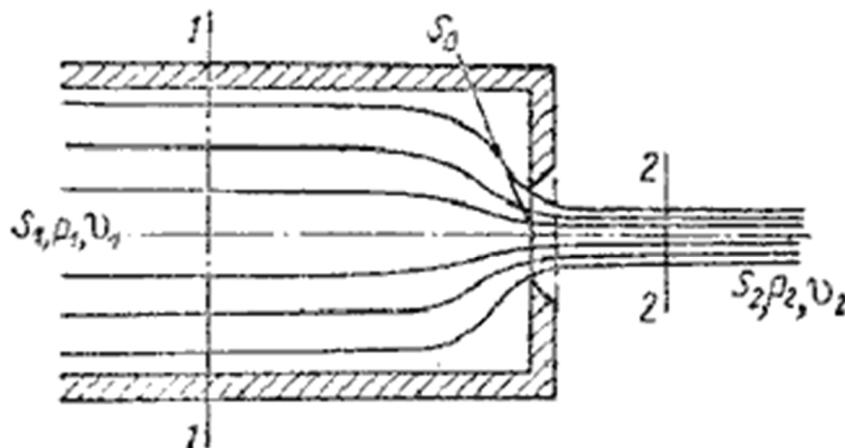


Рис. 4.5. Схема несовершенного сжатия струи

Так как боковые стенки частично направляют движение жидкости при подходе к отверстию, то струя по выходе из отверстия сжимается в меньшей степени, чем из резервуара неограниченных размеров, как это было описано в п. 4.1.

При истечении жидкостей из цилиндрического резервуара круглого сечения через круглое отверстие, расположенное в центре торцевой стенки, при больших числах Re коэффициент сжатия для идеальной жидкости можно найти по формуле, представленной Н. Е. Жуковским:

$$\epsilon_1 = 0,57 + \frac{0,043}{1,1-n},$$

где n – отношение площади отверстия S_0 к площади поперечного сечения резервуара S_1 ; $n = \frac{S_0}{S_1}$.

Расход жидкости при несовершенном сжатии

$$Q = \mu_1 S_0 \sqrt{2gH},$$

где напор H нужно находить с учетом скоростного напора в резервуаре

$$H = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}.$$

4.3. Истечение под уровень

Часто приходится иметь дело с истечением жидкости не в атмосферу, а в пространство, заполненное этой же жидкостью (рис. 4.6). Такой случай называется *истечением под уровень*, или истечением через затопленное отверстие.

В этом случае вся кинетическая энергия струи теряется на вихреобразование, как при внезапном расширении.

Скорость истечения в сжатом сечении струи

$$v = \varphi \sqrt{2gH},$$

где φ – коэффициент скорости; H – расчетный напор, $H = H_0 + \frac{P_0 - P_1}{\rho g}$.

Расход жидкости равен

$$Q = S_c v = \varepsilon S_0 \varphi \sqrt{2gH} = \mu S_0 \sqrt{2gH}.$$

Таким образом, имеем те же расчетные формулы, что и при истечении в воздух (газ), только расчетный напор H в данном случае представляет собой разность гидростатических напоров по обе стенки, т.е. скорость и расход жидкости в данном случае не зависят от высот расположения отверстия.

Коэффициенты сжатия и расхода при истечении под уровень можно принимать те же, что и при истечении в воздушную среду.

4.4. Истечение через насадки при постоянном напоре

Внешним цилиндрическим насадком называется короткая трубка длиной, равной нескольким диаметрам, без закругления входной кромки (рис. 4.7). На практике такой насадок часто получается в тех случаях, когда выполняют сверление в толстой стенке и не обрабатывают входную кромку. Истечение через такой насадок в газовую среду может происходить в двух режимах.

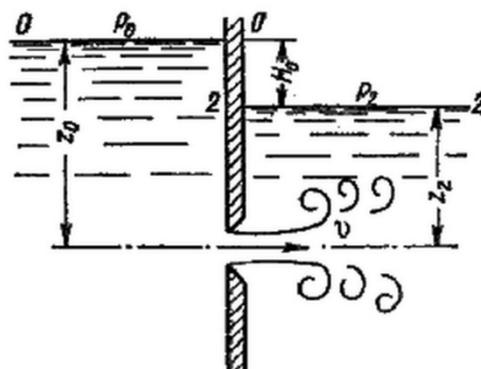


Рис. 4.6. Истечение под уровень

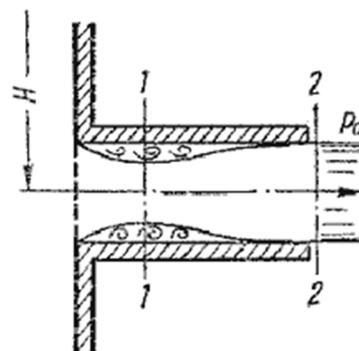


Рис. 4.7. Истечение через насадок

Первый режим – *безотрывный*. При истечении струя после входа в насадок сжимается примерно так же, как и при истечении через отверстие в тонкой стенке. Затем струя постепенно расширяется до размеров отверстия, из насадка выходит полным сечением (см. рис. 4.7).

Коэффициент расхода μ , зависящий от относительной длины насадка l/d и числа Рейнольдса, определяется по эмпирической формуле

$$\mu = \frac{1}{1,23 + \frac{58}{Re} \frac{l}{d}}$$

Так как на выходе из насадка диаметр струи равен диаметру отверстия, то коэффициент сжатия $\varepsilon = 1$ и, следовательно, $\mu = \varphi$, а коэффициент сопротивления $\zeta = 0,5$.

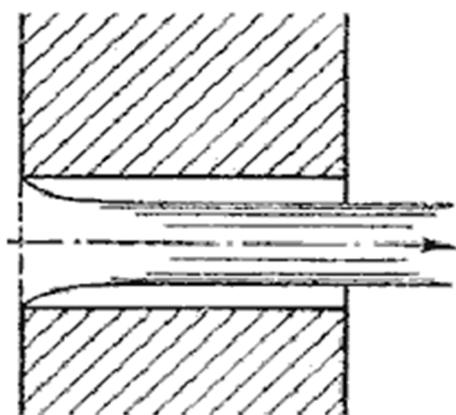


Рис. 4.8. Второй режим истечения через насадок

Если составить уравнение Бернулли для сжатого сечения 1-1 и сечения за насадком 2-2 и преобразовать его, то можно получить падение давления внутри насадка $P_2 - P_1 \approx 0,75H\rho g$.

При некотором критическом напоре $H_{кр}$ абсолютное давление внутри насадка (сечение 1-1) становится равным нулю ($P_1 = 0$), и поэтому $H_{кр} \approx \frac{P_2}{0,75\rho g}$.

Следовательно, при $H > H_{кр}$ давление P_1 должно было бы стать отрицательным, но так как в жидкостях отрицательных давлений не бывает, то первый режим движения становится невозможным. Поэтому при $H \approx H_{кр}$ происходит изменение режима истечения, переход от первого режима ко второму (рис. 4.8).

Второй режим характеризуется тем, что струя после сжатия уже не расширяется, а сохраняет цилиндрическую форму и перемещается внутри насадка, не соприкасаясь с его стенками. Истечение становится точно таким же, как и из отверстия в тонкой стенке, с теми же значе-

ниями коэффициентов. Следовательно, при переходе от первого режима ко второму скорость возрастает, а расход уменьшается благодаря сжатию струи.

При истечении через цилиндрический насадок под уровень первый режим истечения не будет отличаться от описанного выше. Но при $H > H_{кр}$ перехода ко второму режиму не происходит, а начинается кавитационный режим.

Таким образом, внешний цилиндрический насадок имеет существенные недостатки: на первом режиме – большое сопротивление и недостаточно высокий коэффициент расхода, а на втором – очень низкий коэффициент расхода. Недостатком также является возможность кавитации при истечении под уровень.

Внешний цилиндрический насадок может быть значительно улучшен путем закругления входной кромки или устройства конического входа. На рис. 4.9 даны различные типы насадков и указаны значения соответствующих коэффициентов.

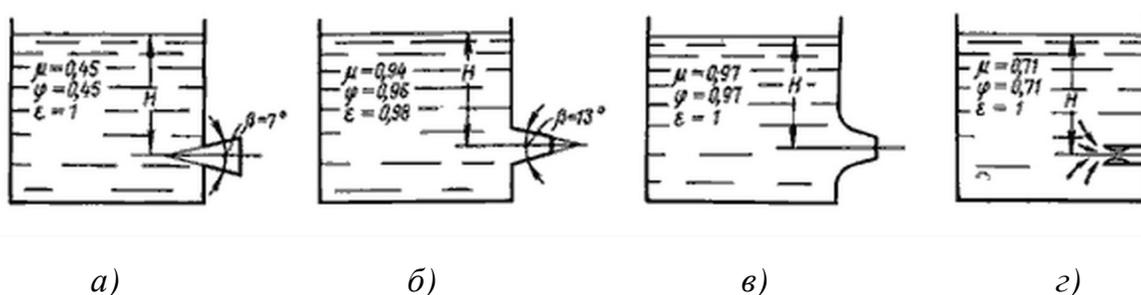


Рис. 4.9. Истечение жидкости через насадки: а – расширяющиеся конические; б – сужающиеся конические; в – коноидальные; г – внутренние цилиндрические

Конические сходящиеся и коноидальные насадки применяют там, где необходимо получить хорошую компактную струю сравнительно большой длины при малых потерях энергии (в напорных брандспойтах, гидромониторах и т.д.). Конически сходящиеся насадки используют для увеличения расхода истечения при малых выходных скоростях.

4.5. Истечения через отверстия и насадки при переменном напоре (опорожнение сосудов)

Рассмотрим случай опорожнения открытого в атмосферу сосуда при постоянно уменьшающемся напоре, при котором течение является неустановившимся (рис. 4.10).

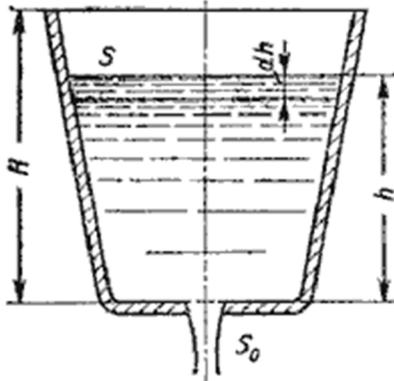


Рис. 4.10. Схема опорожнения резервуара

Однако если напор, а следовательно, и скорость истечения изменяются медленно, то движение в каждый момент времени можно рассматривать как установившееся, и для решения задачи применить уравнение Бернулли.

Обозначим переменную высоту уровня жидкости в сосуде за h , площадь сечения резервуара на этом уровне S , площадь отверстия S_0 , и, взяв бесконечно малый отрезок времени dt , можно записать следующее уравнение объемов:

$$Sdh = -Qdt \quad \text{или} \quad Sdh = -\mu S_0 \sqrt{2gh} dt,$$

где dh – изменение уровня жидкости за время dt .

Отсюда время полного опорожнения сосуда высотой H :

$$t = -\frac{1}{\mu S_0 \sqrt{2g}} \int_{h-H}^{h-0} S \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Если будет известен закон изменения площади S по высоте h , то интеграл можно подсчитать. Для призматического сосуда $S = \text{const}$ (рис. 4.11), следовательно, время его полного опорожнения

$$t = \frac{2SH}{\mu S_0 \sqrt{2gH}}.$$

Из этого выражения следует, что время полного опорожнения призматического сосуда в два раза больше времени истечения того же объема жидкости при постоянном напоре, равном первоначальному.

Для определения времени истечения жидкости из горизонтального цилиндрического сосуда (цистерны) (рис. 4.12) выразим зависимость переменной площади S от h

$$S = 2l\sqrt{h(D-h)},$$

где l – длина цистерны; D – диаметр цистерны.

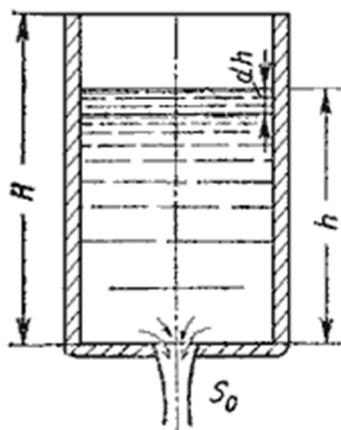


Рис. 4.11. Опорожнение призматического резервуара

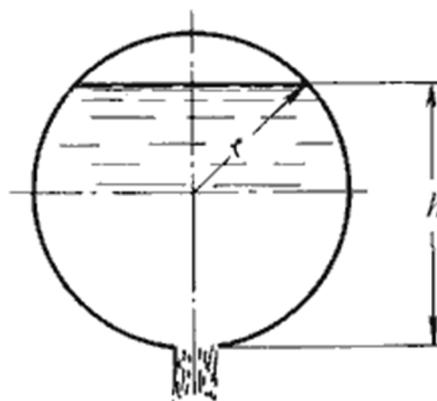


Рис. 4.12. Опорожнение непризматического резервуара

Тогда время полного опорожнения такой цистерны, т.е. время изменения напора от $h_1 = D$ до $h_2 = 0$ получится равным

$$t = \frac{4lD\sqrt{D}}{3\mu S_0\sqrt{2g}}$$

4.6. Истечение из-под затвора в горизонтальном лотке

Во многих водозаборных и водопропускных гидротехнических сооружениях расходы воды проходят через отверстия, перекрываемые затворами. Затворы поднимают на определенную высоту над дном, и пропускают через отверстия необходимые расходы. Чаще всего на гидромелиоративных сооружениях устраивают отверстия прямоугольного сечения, истечение из которых и рассмотрим.

Отверстия могут быть незатопленными (истечение свободное) и затопленными, когда уровень воды за затвором влияет на истечение.

Если отверстие незатопленное, то вытекающая из-под затвора струя находится под атмосферным давлением (рис. 4.13). При истечении через затопленное отверстие струя за затвором находится под некоторым слоем воды (рис. 4.14).

Когда затвор приподнят над дном, вытекающая из-под него струя испытывает сжатие в вертикальной плоскости. На расстоянии, примерно равном высоте отверстия a (высоте поднятия затвора), наблюдается наиболее сжатое сечение. Глубина в сжатом сечении h_c связана с высотой отверстия a следующей зависимостью:

$$h_c = \varepsilon' a,$$

где ε' – коэффициент вертикального сжатия струи.

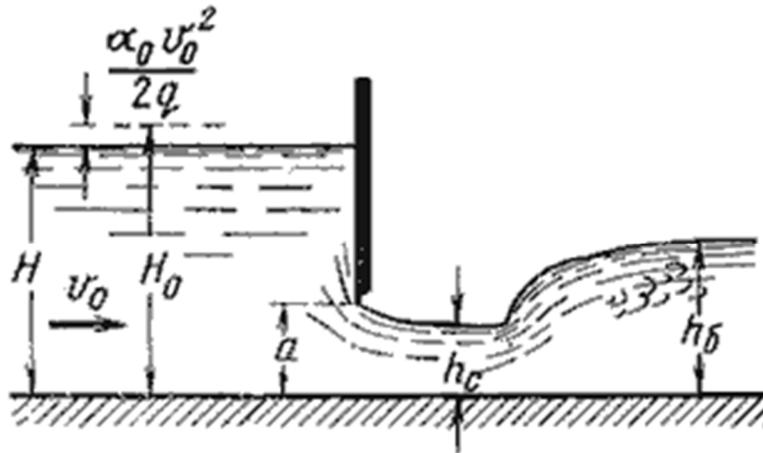


Рис. 4.13. Истечение из-под затвора через незатопленное отверстие

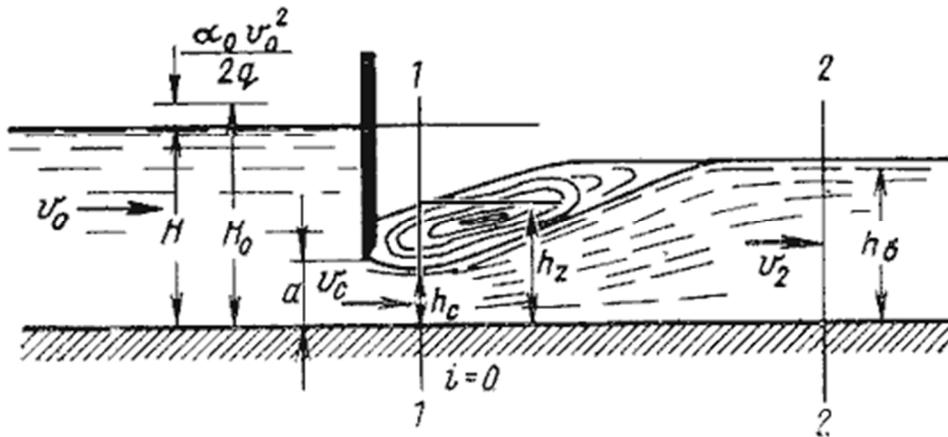


Рис. 4.14. Истечение из-под затвора при затопленном отверстии

Коэффициент вертикального сжатия ϵ' зависит от отношения высоты отверстия a к напору (глубине воды перед затвором) H . Для ориентировочных расчетов можно принимать $\epsilon' = 0,64$.

Если составить уравнение Бернулли для сечений, проведенных перед затвором и в сжатом сечении, после преобразований получим

$$v_c = \varphi \sqrt{2g(H_0 - h_c)},$$

где φ – коэффициент скорости, $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_c}}$; H_0 – напор с учетом скорости подхода, $H_0 = H + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g}$.

Тогда расход при истечении из-под затвора при незатопленном отверстии определим по формуле

$$Q = S_{\text{отв}} v_c = ab\varepsilon' \varphi \sqrt{2g(H_0 - h_c)},$$

где S – площадь отверстия, $S = ab$.

При истечении через затопленное отверстие (см. рис. 4.14) расход определим по формуле

$$Q = ab\mu\sqrt{2g(H_0 - h_z)},$$

где h_z – глубина в том сечении, где наблюдается максимальное сжатие истекающей из-под затвора струи.

Глубину h_z найдем из зависимости

$$h_z = \sqrt{h_6^2 - M \left(H_0 - \frac{M}{4} \right) + \frac{M}{2}}, \text{ в которой } M = 4\mu^2 a^2 \frac{h_6 - h_c}{h_6 h_c},$$

а h_6 – глубина в отводящем канале (бытовая глубина).

4.7. Давление струи жидкости на ограждающие поверхности

Если вытекающая из отверстия или насадка струя попадает на неподвижную стенку, то она с определенным давлением воздействует на нее. Основное уравнение, по которому вычисляют давление струи на площадку, имеет вид $P = \frac{\gamma}{g} Qv$.

На рис. 4.15 приведены наиболее часто встречающиеся в практике ограждающие поверхности (преграды) и уравнения, по которым вычисляется давление струи на соответствующую поверхность.

Величина давления струи, естественно, зависит от расстояния насадка до преграды. С увеличением расстояния струя рассеивается и давление уменьшается. Соответствующие исследования показывают, что в данном случае струя может быть разбита на три характерные части: компактную, раздробленную и распыленную (рис. 4.16).

В пределах компактной части сохраняется цилиндрическая форма струи без нарушения сплошности движения. В пределах раздробленной части сплошность потока нарушается, причем струя постепенно расширяется. Наконец, в пределах распыленной части струи происходит окончательный распад потока на отдельные капли.

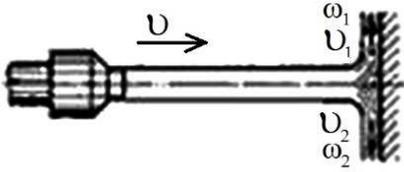
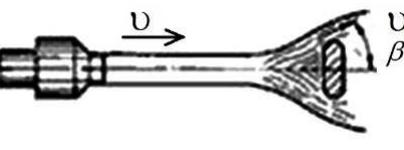
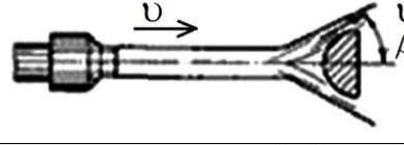
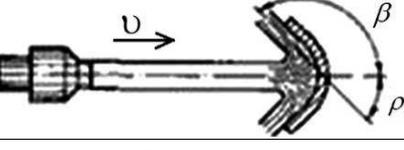
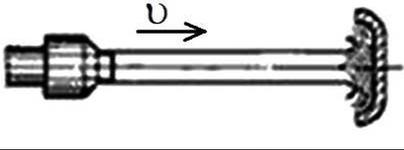
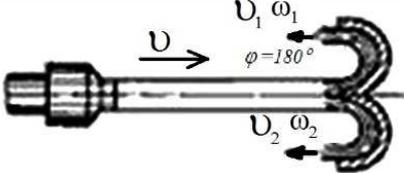
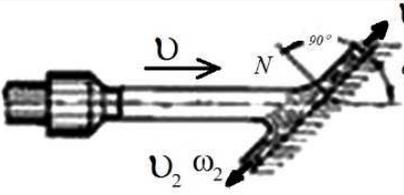
a)		$P = \frac{\gamma}{g} Qv$
б)		$P = \frac{\gamma}{g} Qv(1 - \cos \beta)$
в)		$P = \frac{\gamma}{g} Qv(1 - \cos \beta)$
г)		$P = \frac{\gamma}{g} Qv(1 - \cos \beta)$
д)		$P = \frac{\gamma}{g} Qv$
е)		$P = \frac{\gamma}{g} Qv$
ж)		$P = \frac{\gamma}{g} Qv \sin \alpha$

Рис. 4.15. Взаимодействие струи жидкости с неподвижной поверхностью

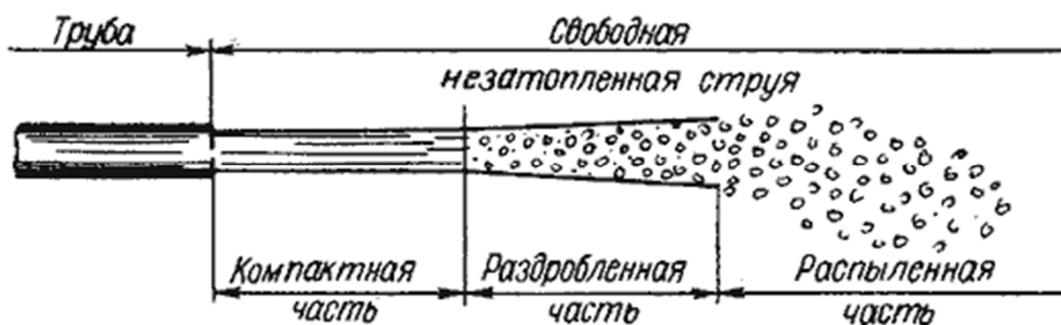


Рис. 4.16. Составные части свободной струи

Контрольные вопросы

1. Чем обусловлено сжатие струи жидкости, вытекающей из резервуара через отверстие?
2. Как определяется расход жидкости через отверстие?
3. По какой формуле определяется число Рейнольдса при истечении струи через отверстие в резервуаре?
4. При истечении жидкости через внешний цилиндрический насадок струя из насадка выходит с поперечным сечением, равным поперечному сечению самого насадка. Как называется этот режим истечения?
5. Во сколько раз отличается время полного опорожнения призматического сосуда с переменным напором по сравнению с истечением того же объема жидкости при постоянном напоре?
6. Диаметр отверстия в резервуаре равен 10 мм, а диаметр истекающей через это отверстие струи равен 8 мм. Чему равен коэффициент сжатия струи?
7. Из резервуара через отверстие происходит истечение жидкости с турбулентным режимом. Напор $H = 38$ см, коэффициент сопротивления отверстия $\xi = 0,6$. Чему равна скорость истечения жидкости?

5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

При расчетах напорных трубопроводов основной задачей является либо определение пропускной способности (расхода), либо потери напора на том или ином участке, равно как и на всей длине, либо диаметра трубопровода на заданных расходе и потерях напора.

В практике трубопроводы делятся на *короткие* и *длинные*. К первым относятся все трубопроводы, в которых местные потери напора превышают 5...10 % потерь напора по длине. При расчетах таких трубопроводов обязательно учитывают потери напора в местных сопротивлениях. К ним относят, к примеру, маслопроводы объемных передач.

Ко вторым относятся трубопроводы, в которых местные потери меньше 5...10 % потерь напора по длине. Их расчет ведется без учета местных потерь. К таким трубопроводам относятся, например, магистральные водоводы, нефтепроводы.

Учитывая гидравлическую схему работы длинных трубопроводов, их можно разделить также на *простые* и *сложные*. Простыми называются последовательно соединенные трубопроводы одного или различных сечений, не имеющих никаких ответвлений. К сложным трубопроводам относятся системы труб с одним или несколькими ответвлениями, параллельными ветвями и т.д. К сложным относятся и так называемые кольцевые трубопроводы.

5.1. Простой трубопровод постоянного сечения

Жидкость по трубопроводу движется благодаря тому, что ее энергия в начале трубопровода больше, чем в конце. Этот перепад уровней энергии может создаваться несколькими способами: работой насоса, разностью уровней жидкости, давлением газа.

Рассмотрим простой трубопровод постоянного сечения, который расположен произвольно в пространстве (рис. 5.1), имеет общую длину l и диаметр d , а также содержит ряд местных сопротивлений (вентиль, фильтр и обратный клапан). В начальном сечении трубопровода 1-1 геометрическая высота равна z_1 и избыточное давление P_1 , а в конечном сечении 2-2 – соответственно z_2 и P_2 . Скорость потока в этих сечениях вследствие постоянства диаметра трубы одинакова и равна v .

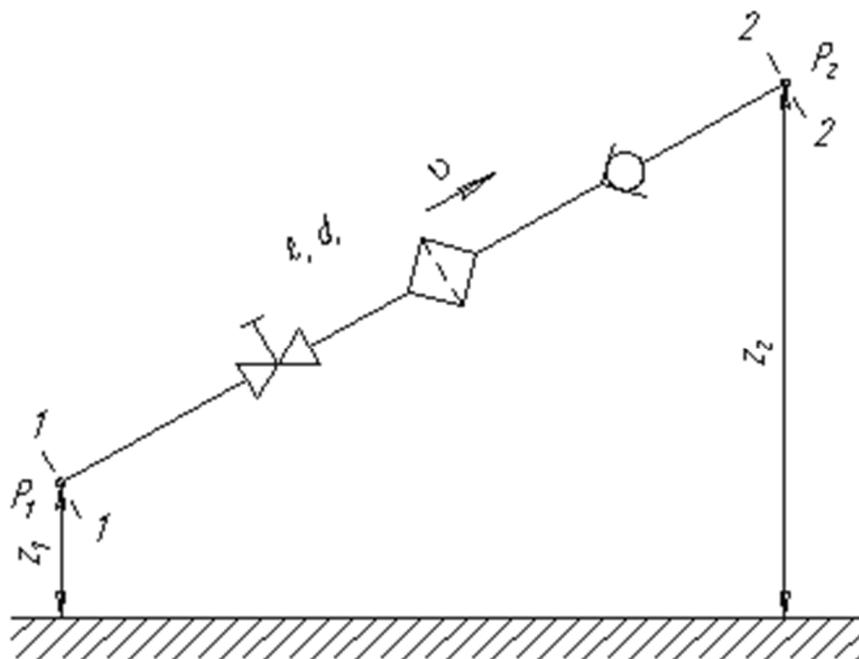


Рис. 5.1. Схема простого трубопровода

Запишем уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2. Поскольку скорость в обоих сечениях одинакова и $\alpha_1 = \alpha_2$, то скоростной напор можно не учитывать. При этом получим

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \sum h, \text{ или } \frac{P_1}{\rho g} = z_2 - z_1 + \frac{P_2}{\rho g} + \sum h.$$

Пьезометрическую высоту, стоящую в левой части уравнения, назовем *потребным напором* $H_{\text{потр}}$. Если же эта пьезометрическая высота задана, то ее называют *располагаемым напором* $H_{\text{расп}}$. Такой напор складывается из геометрической высоты $H_{\text{потр}}$, на которую поднимается жидкость, пьезометрической высоты в конце трубопровода и суммы всех потерь напора в трубопроводе.

Назовем сумму первых двух слагаемых *статическим напором*, который представим как некоторую эквивалентную геометрическую высоту $H_{\text{ст}} = \Delta z + \frac{P_2}{\rho g}$, а последнее слагаемое $\sum h$ – как степенную функцию расхода $\sum h = KQ^m$.

$$\text{Тогда } H_{\text{потр}} = H_{\text{ст}} + KQ^m,$$

где K – величина, называемая сопротивлением трубопровода; Q – расход жидкости; m – показатель степени, который имеет разные значения в зависимости от режима течения.

Для ламинарного течения при замене местных сопротивлений эквивалентными длинами сопротивление трубопровода равно

$$K = \frac{128\nu l_{\text{расч}}}{\pi g d^4} \text{ и } m=1,$$

где $l_{\text{расч}} = l + l_{\text{экв}}$.

Численные значения эквивалентных длин $l_{\text{экв}}$ для различных местных сопротивлений обычно находят опытным путем.

Для турбулентного течения, используя формулу Вейсбаха-Дарси и выражая в ней скорость через расход, получаем:

$$K = \left(\sum \zeta + \lambda_T \frac{l}{d} \right) \frac{16}{2\pi g d^4} \text{ и } m = 2.$$

По этим формулам можно построить кривую потребного напора в зависимости от расхода. Чем больше расход Q , который необходимо обеспечить в трубопроводе, тем больше требуется потребный напор $H_{\text{потр}}$. При ламинарном течении эта кривая изображается прямой линией (рис. 5.2, а), при турбулентном – параболой с показателем степени, равным двум (рис. 5.2, б).

Крутизна кривых требуемого напора зависит от сопротивления трубопровода K и возрастает с увеличением длины трубопровода и уменьшением диаметра, а также с увеличением местных гидравлических сопротивлений.

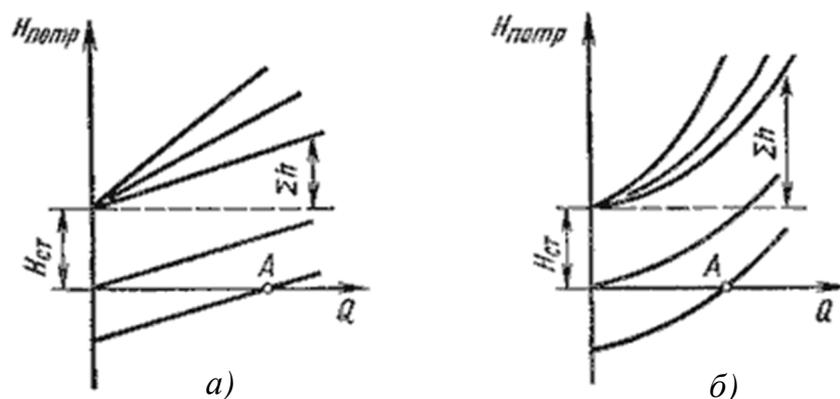


Рис. 5.2. Зависимости требуемых напоров от расхода жидкости в трубопроводе

Величина статического напора $H_{ст}$ положительна в том случае, когда жидкость движется вверх или в полость с повышенным давлением, и отрицательна при опускании жидкости или движении в полость с пониженным давлением. Точка пересечения кривой требуемого напора с осью абсцисс (точка A) определяет расход при движении жидкости самотеком. Требуемый напор в этом случае равен нулю.

Иногда вместо кривых требуемого напора удобнее пользоваться характеристиками трубопровода. *Характеристикой трубопровода* называется зависимость суммарной потери напора (или давления) в трубопроводе от расхода $\Sigma h = f(q)$.

5.2. Соединения простых трубопроводов

Простые трубопроводы могут соединяться между собой, при этом их соединение может быть *последовательным* или *параллельным*.

Последовательное соединение. Возьмем несколько труб различной длины, разного диаметра и содержащих разные местные сопротивления и соединим их последовательно (рис. 5.3, *a*).

При подаче жидкости по такому составному трубопроводу от точки M к точке N расход жидкости Q во всех последовательно соединенных трубах 1, 2 и 3 будет одинаков, а полная потеря напора между

точками M и N равна сумме потерь напора во всех последовательно соединенных трубах. Таким образом, для последовательного соединения имеем следующие основные уравнения:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q; \quad \Sigma h_{M-N} = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 + \Sigma h_3.$$

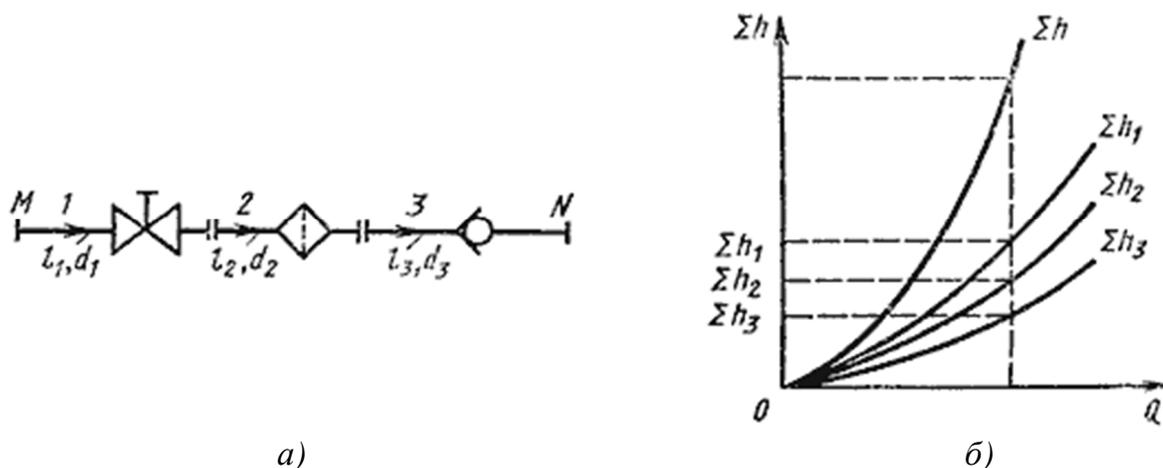


Рис. 5.3. Последовательное соединение трубопроводов

Эти уравнения определяют правила построения характеристик последовательного соединения труб (рис. 5.3, б). Если известны характеристики каждого трубопровода, то по ним можно построить характеристику всего последовательного соединения $M-N$. Для этого нужно сложить ординаты всех трех кривых.

Параллельное соединение. Такое соединение показано на рис. 5.4, а. Трубопроводы 1, 2 и 3 расположены горизонтально.

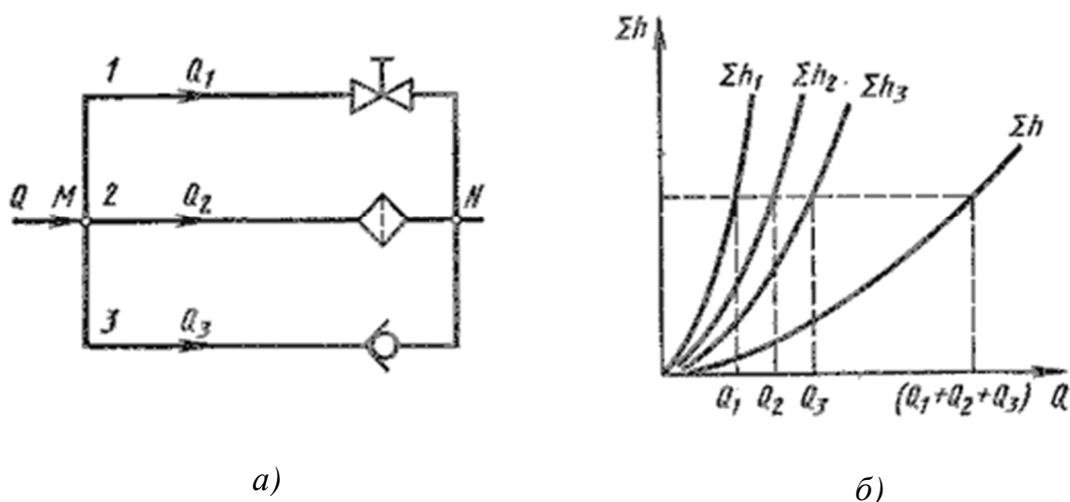


Рис. 5.4. Параллельное соединение трубопроводов

Обозначим полные напоры в точках M и N соответственно H_M и H_N , расход в основной магистрали (т.е. до разветвления и после слияния) – через Q , а в параллельных трубопроводах через Q_1 , Q_2 и Q_3 ; суммарные потери в этих трубопроводах через Σh_1 , Σh_2 и Σh_3 .

Очевидно, что расход жидкости в основной магистрали

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3.$$

Выразим потери напора в каждом из трубопроводов через полные напоры в точках M и N :

$$\Sigma h_1 = H_M - H_N, \quad \Sigma h_2 = H_M - H_N, \quad \Sigma h_3 = H_M - H_N.$$

Отсюда делаем вывод, что $\Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3$, т.е. потери напора в параллельных трубопроводах равны между собой. Их можно выразить в общем виде через соответствующие расходы следующим образом:

$$\Sigma h_1 = K_1 Q_1^m; \quad \Sigma h_2 = K_2 Q_2^m; \quad \Sigma h_3 = K_3 Q_3^m,$$

где K и m определяются в зависимости от режима течения.

Из двух последних уравнений вытекает следующее правило: для построения характеристики параллельного соединения нескольких трубопроводов следует сложить абсциссы (расходы) характеристик этих трубопроводов при одинаковых ординатах (Σh). Пример такого построения дан на рис. 5.4, б.

Разветвленное соединение. Разветвленным соединением называется совокупность нескольких простых трубопроводов, имеющих одно общее сечение – место разветвления (или смыкания) труб.

Пусть основной трубопровод имеет разветвление в сечении $M-M$, от которого отходят, например, три трубы 1, 2 и 3 разных диаметров, содержащие различные местные сопротивления (рис. 5.5, а).

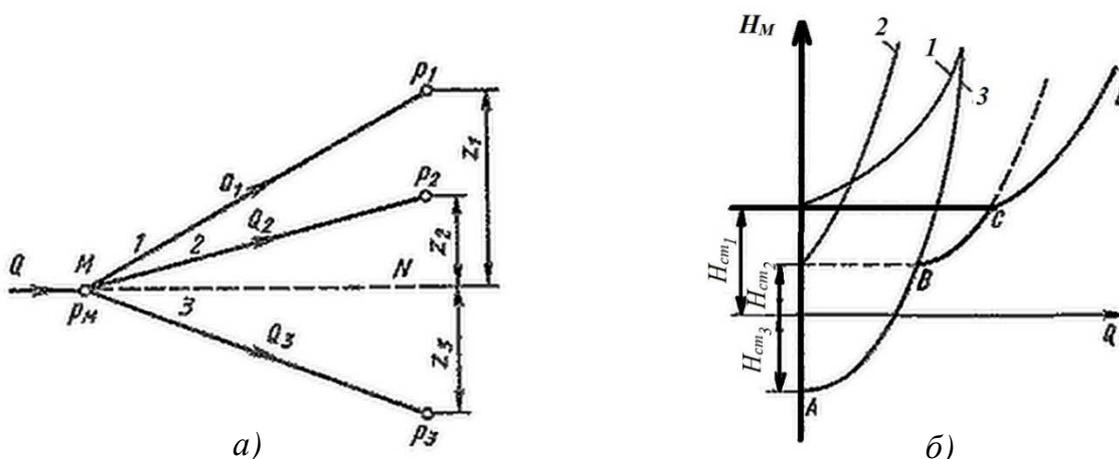


Рис. 5.5. Разветвленный трубопровод

Геометрические высоты z_1, z_2 и z_3 конечных сечений и давления P_1, P_2 и P_3 в них будут также различны.

Так же как и для параллельных трубопроводов, общий расход в основном трубопроводе будет равен сумме расходов в каждом трубопроводе

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3.$$

Записав уравнение Бернулли для сечения $M-M$ и конечного сечения, например первого трубопровода, получим, пренебрегая разностью скоростных высот,

$$H_M = z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \sum h_1.$$

Обозначив сумму первых двух членов через $H_{ст}$ и выражая третий член через расход, получаем

$$H_M = H_{ст1} + KQ_1^m.$$

Аналогично для двух других трубопроводов можно записать:

$$H_M = H_{ст2} + KQ_2^m; \quad H_M = H_{ст3} + KQ_3^m.$$

Таким образом, получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными Q_1, Q_2 и Q_3 и H_M .

Построение кривой потребного напора для разветвленного трубопровода выполняется сложением кривых потребных напоров для ветвей по правилу сложения характеристик параллельных трубопроводов (рис. 5.5, б) – сложением абсцисс (Q) при одинаковых ординатах (H_M). Кривые потребных напоров для ветвей отмечены цифрами 1, 2 и 3, а суммарная кривая потребного напора для всего разветвления обозначена буквами $ABCD$. Из графика видно, что условием подачи жидкости во все ветви является неравенство $H_M > H_{ст1}$.

5.3. Сложные трубопроводы

Сложный трубопровод в общем случае составлен из простых трубопроводов с последовательным и параллельным их соединением (рис. 5.6, а) или с разветвлениями (рис. 5.6, б).

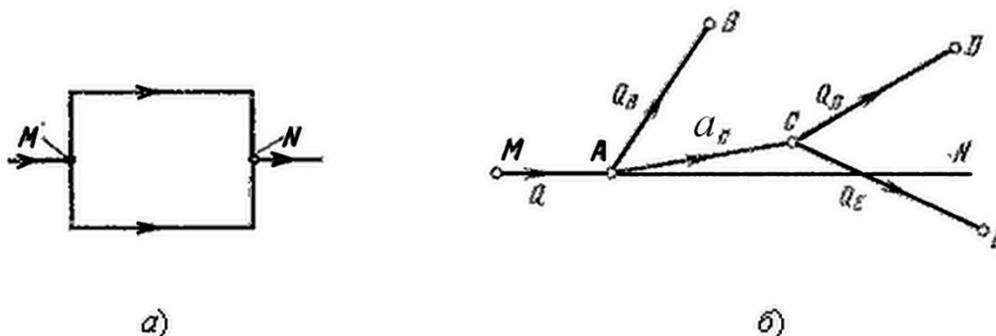


Рис. 5.6. Схемы сложных трубопроводов

Рассмотрим разомкнутый сложный трубопровод (рис. 5.6, б). Магистральный трубопровод разветвляется в точках A и C . Жидкость подается к точкам (сечениям) B , D и E с расходами Q_B и Q_D и Q_E .

Пусть известны размеры магистралей и всех ветвей (простых трубопроводов), заданы все местные сопротивления, а также геометрические высоты конечных точек, отсчитываемые от плоскости $M-N$, и избыточные давления в конечных точках P_B и P_D и P_E .

Для этого случая возможны два вида задач:

Задача 1. Дан расход Q в основной магистрали MA . Необходимо определить расходы Q_B и Q_D и Q_E , а также потребный напор в точке M .

$$H_{\text{потр}} = H_M = \frac{P_M}{\rho g}.$$

Задача 2. Дан напор в точке M . Определить расход в магистрали Q и расходы в каждой ветви.

Обе задачи решают на основе одной и той же системы уравнений, число которых на единицу больше числа конечных ветвей, а именно:

– уравнение расходов

$$Q = Q_B + Q_D + Q_E;$$

– уравнение равенства потребных напоров для ветвей CD и CE

$$H_{\text{ст}D} + K_{CD}Q_D^m = H_{\text{ст}E} + K_{CE}Q_E^m;$$

– уравнение равенства потребных напоров для ветви AB и сложного трубопровода $ACED$:

$$H_{\text{ст}B} + K_{AB}Q_B^m = H_{\text{ст}D} + K_{CD}Q_D^m + K_{AC}(Q_D + Q_E)^m;$$

– выражение для потребного напора в точке M :

$$H_M = \frac{P_M}{\rho g} = K_{MA}Q^m + H_{\text{ст}B} + K_{MA}Q_B^m.$$

Расчет сложных трубопроводов часто выполняют графоаналитическим способом, т.е. с применением кривых потребного напора и характеристик трубопроводов. Кривую потребного напора для сложного трубопровода следует строить следующим образом:

- 1) сложный трубопровод разбивают на ряд простых;
- 2) строят кривые потребных напоров для каждого из простых трубопроводов;
- 3) складывают кривые потребных напоров для ветвей (и параллельных линий, если они имеются) по правилу сложения характеристик параллельных трубопроводов;

4) полученную кривую складывают с характеристикой последовательно присоединенного трубопровода по соответствующему правилу (см. п. 5.2).

Таким образом, при расчете идут от конечных точек трубопровода к начальной точке, т.е. против течения жидкости.

Сложный кольцевой трубопровод. Представляет собой систему смежных замкнутых контуров с отбором жидкости в узловых точках или с непрерывной раздачей жидкости на отдельных участках (рис. 5.7).

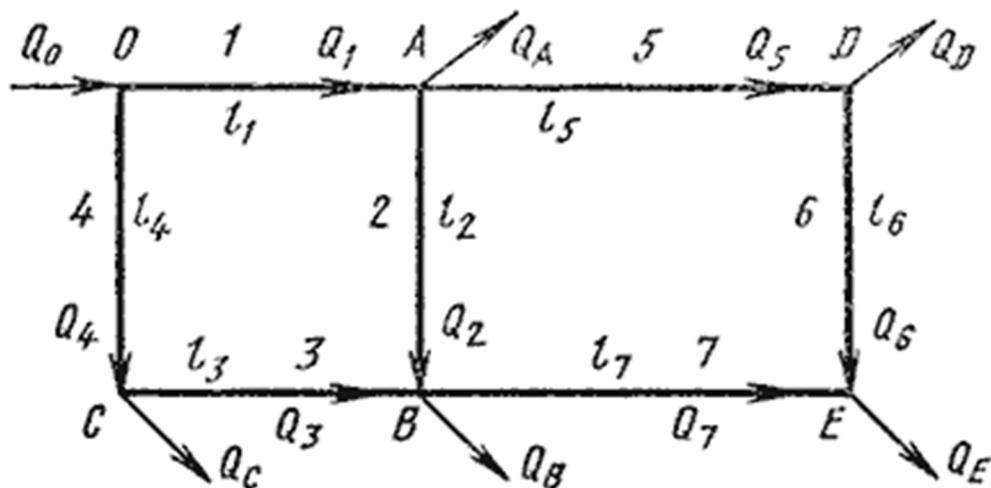


Рис. 5.7. Схема сложного кольцевого трубопровода

Задачи для таких трубопроводов решают аналогичным методом с применением электроаналогий (закон Кирхгофа). При этом основываются на двух обязательных условиях. Первое условие – баланс расходов, т.е. равенство притока и оттока жидкости для каждой узловой точки. Второе условие – баланс напоров, т.е. равенство нулю алгебраической суммы потерь напора для каждого кольца (контура) при подсчете по направлению движения часовой стрелки или против нее.

Для расчета таких трубопроводов типичной является следующая задача. Дан максимальный напор в начальной точке, т.е. в точке 0, минимальный напор в наиболее удаленной точке E, расходы во всех шести узлах и длины семи участков. Требуется определить диаметры трубопроводов на всех участках.

5.4. Трубопроводы с насосной подачей жидкостей

Как уже отмечалось выше, перепад уровней энергии, за счет которого жидкость течет по трубопроводу, может создаваться работой насоса, что широко применяется в машиностроении. Рассмотрим совместную работу трубопровода с насосом и принцип расчета трубопровода с насосной подачей жидкости.

Трубопровод с насосной подачей жидкости может быть *разомкнутым*, по которому жидкость перекачивается из одной емкости в другую (рис. 5.8, а), или *замкнутым* (кольцевым), в котором циркулирует одно и то же количество жидкости (рис. 5.8, б).

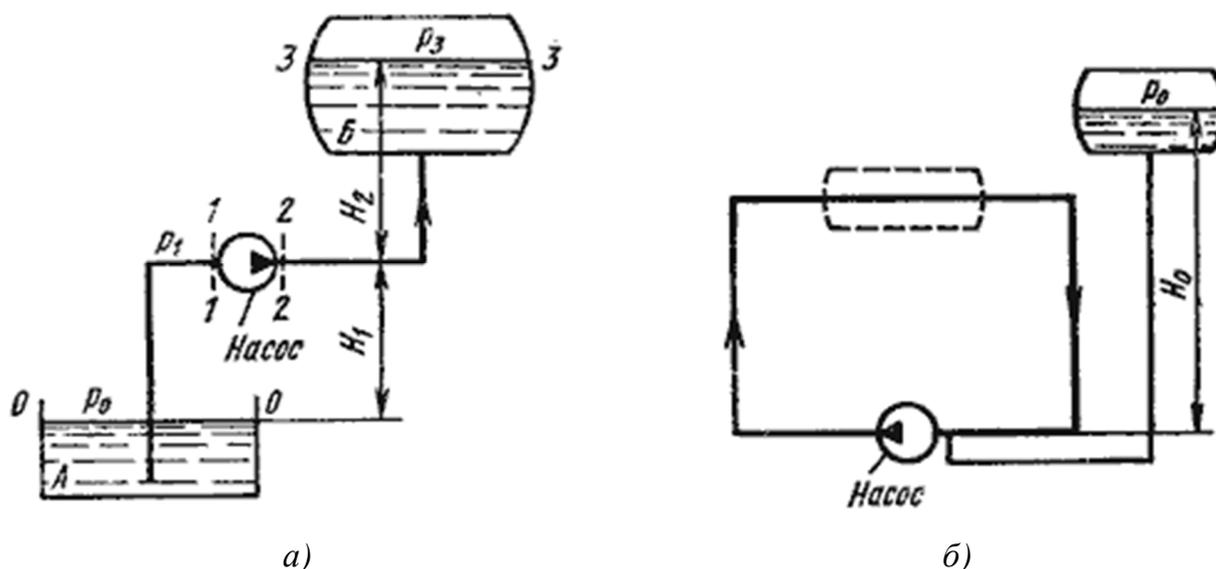


Рис. 5.8. Трубопроводы с насосной подачей

Рассмотрим трубопровод, по которому перекачивают жидкость из нижнего резервуара с давлением P_0 в другой резервуар с давлением P_3 (см. рис. 5.8, а). Высота расположения оси насоса H_1 называется *геометрической высотой всасывания*, а трубопровод, по которому жидкость поступает к насосу, *всасывающим трубопроводом*, или *линией всасывания*. Высота расположения конечного сечения трубопровода H_2 называется *геометрической высотой нагнетания*, а трубопровод, по которому жидкость движется от насоса, *напорным*, или *линией нагнетания*.

Составим уравнение Бернулли для потока рабочей жидкости во всасывающем трубопроводе, т.е. для сечений 0-0 и 1-1 (принимая $\alpha = 1$)

$$\frac{P_0}{\rho g} = H_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + \sum h_{0-1}.$$

Это уравнение считается основным для расчета всасывающих трубопроводов.

Теперь рассмотрим напорный трубопровод, для которого запишем уравнение Бернулли, т.е. для сечений 2-2 и 3-3

$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = H_2 + \frac{P_3}{\rho g} + \sum h_{2-3}.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой энергию жидкости на выходе из насоса. А на входе насоса энергию жидкости можно будет аналогично выразить из уравнения

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_0}{\rho g} - H_1 - \sum h_{0-1}.$$

Таким образом, можно подсчитать приращение энергии жидкости, проходящей через насос. Эта энергия сообщается жидкости насосом и поэтому обозначается обычно $H_{\text{нас}}$.

Для нахождения напора $H_{\text{нас}}$ вычислим уравнение

$$H_{\text{нас}} = \left(\frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left(\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) = H_1 + H_2 + \frac{P_3 - P_0}{\rho g} + \sum h_{0-1} + \sum h_{2-3};$$

$$H_{\text{нас}} = \Delta z + \frac{P_3 - P_0}{\rho g} + KQ^m,$$

где Δz – полная геометрическая высота подъема жидкости, $\Delta z = H_1 + H_2$; KQ^m – сумма гидравлических потерь, P_3 и P_0 – давление в верхней и нижней емкости соответственно.

Если к действительной разности уровней Δz добавить разность пьезометрических высот $(P_3 - P_0) / (\rho g)$, то можно рассматривать увеличенную разность уровней $H_{\text{ст}} = \Delta z + \frac{P_3 - P_0}{\rho g}$ и записать формулу следующим образом:

$$H_{\text{нас}} = H_{\text{ст}} + KQ^m.$$

Из формулы делаем вывод, что $H_{\text{нас}} = H_{\text{потр}}$.

Отсюда вытекает следующее правило устойчивой работы насоса: при установившемся течении жидкости в трубопроводе насос развивает напор, равный потребному.

На этом равенстве основывается метод расчета трубопроводов с насосной подачей, который заключается в совместном построении в одном и том же масштабе и на одном графике двух кривых: напора $H_{\text{потр}} = f_1(Q)$ и характеристики насоса $H_{\text{нас}} = f_2(Q)$ и в нахождении их точки пересечения (рис. 5.9).

Характеристикой насоса называется зависимость напора, создаваемого насосом, от его подачи (расхода жидкости) при постоянной частоте вращения вала насоса. На рис. 5.9 дано два варианта графика: а – для турбулентного режима; б – для ламинарного режима.

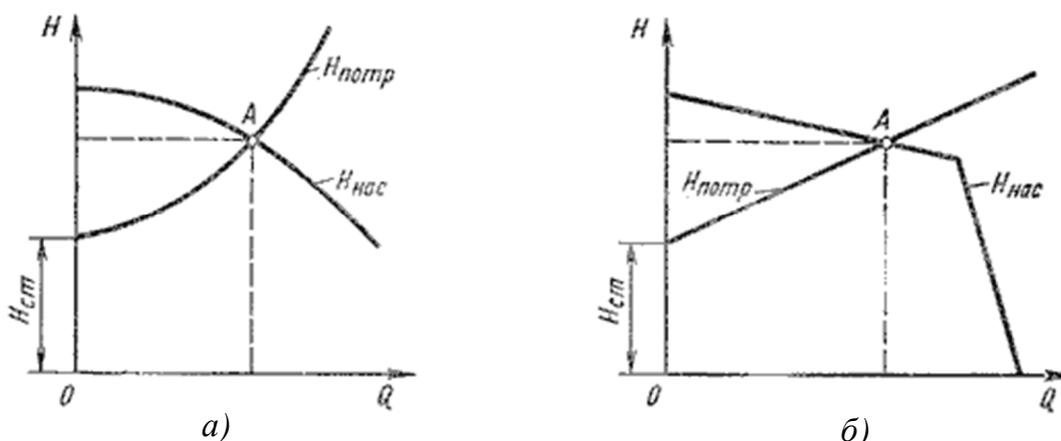


Рис. 5.9. Графическое нахождение рабочей точки

Точка пересечения кривой потребного напора с характеристикой насоса называется *рабочей точкой*. Чтобы получить другую рабочую точку, необходимо изменить открытие регулировочного крана (изменить характеристику трубопровода) или частоту вращения вала насоса.

5.5. Гидравлический удар

Гидравлическим ударом называется резкое повышение давления, возникающее в напорном трубопроводе при внезапном торможении потока рабочей жидкости. Этот процесс очень быстротечный и характеризуется чередованием резких повышений и понижений давления, которое связано с упругими деформациями жидкости и стенок трубопровода. Гидравлический удар чаще всего возникает при резком открытии или закрытии крана или другого устройства, управляемого потоком.

Пусть в конце трубы, по которой движется жидкость со скоростью v_0 , произведено мгновенное закрытие крана (рис. 5.10, а).

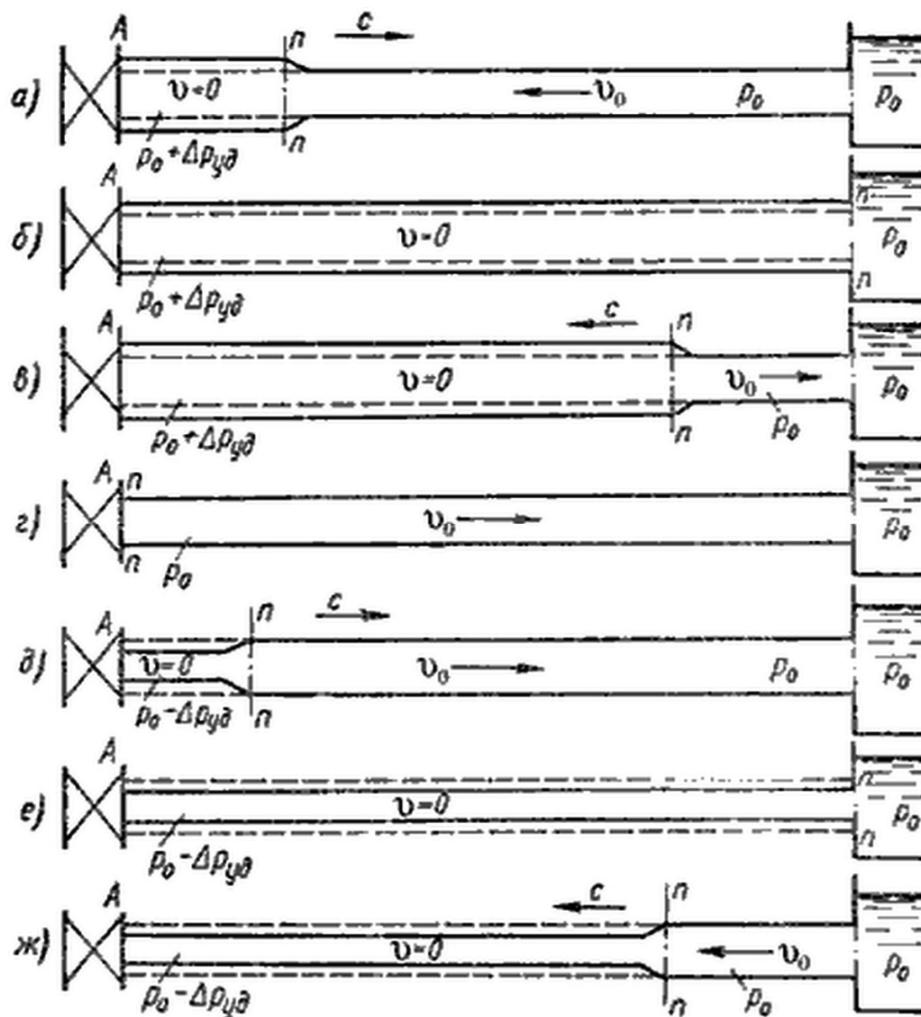


Рис. 5.10. Стадии гидравлического удара

При этом скорость частиц, натолкнувшихся на кран, будет погашена, а их кинетическая энергия перейдет в работу деформации стенок трубы и жидкости. При этом стенки трубы растягиваются, а жидкость сжимается в соответствии с увеличением давления на величину $\Delta P_{\text{уд}}$, которое называется ударным. Область (сечение $n-n$), в которой происходит увеличение давления, называется ударной волной. Ударная волна распространяется вправо со скоростью c , называемой скоростью ударной волны.

Когда ударная волна переместится до резервуара, жидкость окажется остановленной и сжатой во всей трубе, а стенки трубы – растянутыми. Ударное повышение давления распространится на всю длину трубы (рис. 5.10, б).

Далее под действием перепада давления $\Delta P_{\text{уд}}$ частицы жидкости устремятся из трубы в резервуар, причем это течение начнется с сечения, непосредственно прилегающего к резервуару. Теперь сечение $n-n$ перемещается обратно к крану с той же скоростью c , оставляя за собой выровненное давление P_0 (рис. 5.10, *в*).

Жидкость и стенки трубы предполагаются упругими, поэтому они возвращаются к прежнему состоянию, соответствующему давлению P_0 . Работа деформации полностью переходит в кинетическую энергию, и жидкость в трубе приобретает первоначальную скорость v_0 , но направленную теперь в противоположную сторону (рис. 5.10, *г*).

С этой скоростью весь объем жидкости стремится оторваться от крана, в результате возникает отрицательная ударная волна под давлением $P_0 - \Delta P_{\text{уд}}$, которая направляется от крана к резервуару со скоростью c , оставляя за собой сжавшиеся стенки трубы и расширившуюся жидкость, что обусловлено снижением давления (рис. 5.10, *д*). Кинетическая энергия жидкости вновь переходит в работу деформаций, но противоположного знака.

Состояние трубы в момент прихода отрицательной ударной волны к резервуару показано на рис. 5.10, *е*. Так же как и для случая, изображенного на рис. 5.10, *б*, оно не является равновесным. На рис. 5.10, *ж*, показан процесс выравнивания давления в трубе и резервуаре, сопровождающийся возникновением движения жидкости со скоростью v_0 .

Очевидно, что как только отраженная от резервуара ударная волна под давлением $\Delta P_{\text{уд}}$ достигнет крана, возникнет ситуация, уже имевшая место в момент закрытия крана. Весь цикл гидравлического удара повторится.

Протекание гидравлического удара во времени иллюстрируется диаграммой, представленной на рис. 5.11, *а* и *б*.

Штриховыми линиями показано теоретическое изменение давления у крана в точке *A* (см. рис. 5.10), а сплошной – действительный вид картины изменения давления по времени (рис. 5.11, *а*). При этом затухание колебаний давления происходит за счет потерь энергии жидкости на преодоление сил трения и ухода энергии в резервуар.

Если давление P_0 невелико ($P_0 < \Delta P_{\text{уд}}$), то картина изменения амплитуды давления получается несколько иная, примерно такая, как показано на рис. 5.11, *б*.

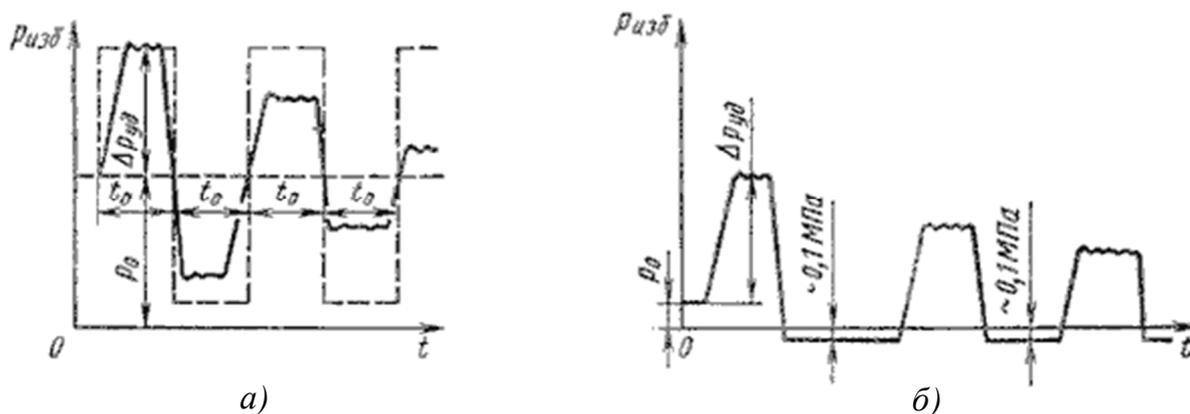


Рис. 5.11. Изменение давления по времени у крана

Повышение давления при гидравлическом ударе можно определить по формуле $\Delta P_{уд} = \rho v_0 c$.

Данное выражение носит название формулы Жуковского. В нем скорость распространения ударной волны c рассчитываем по формуле

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho r}{\delta E}}},$$

где r – радиус трубопровода;

E – модуль упругости материала трубы;

δ – толщина стенки трубопровода;

K – объемный модуль упругости.

Если предположить, что труба имеет абсолютно жесткие стенки, т.е. $E = \infty$, то скорость ударной волны определяем из выражения

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

Для воды эта скорость равна 1435 м/с, для бензина – 1116 м/с, для масла – 1200 – 1400 м/с.

5.6. Изменение пропускной способности трубопроводов в процессе их эксплуатации

При проектировании напорных трубопроводов следует учитывать, что их пропускная способность в период эксплуатации снижается (например, для водопроводных труб до 50 % и даже ниже). Вследствие коррозии и образования отложений в трубах (инкрустации) шероховатость труб увеличивается. Это можно оценить по формуле

$$k_t = k_0 + at,$$

где k_0 – абсолютная шероховатость для новых труб, мм;

k_t – шероховатость через t лет эксплуатации; α – коэффициент, характеризующий быстроту возрастания шероховатости, мм/год (см. таблицу).

Значение коэффициента α в зависимости от физико-химических свойств транспортируемой воды

Коррозионное воздействие	Характеристика природных вод	α , мм/год
Слабое	Слабоминерализованные некоррозионные воды с незначительным содержанием органических веществ и растворенного железа	0,005 – 0,055 (среднее 0,025)
Умеренное	Слабоминерализованные коррозионные воды, содержащие органические вещества и растворенное железо в количестве 3 мг/л	0,035 – 0,18 (среднее 0,07)
Значительное	Весьма коррозионные воды с содержанием железа более 30 мг/л, но с малым содержанием хлоридов	0,18 – 0,4 (среднее 0,2)
Сильное	Содержание хлоридов и сульфатов более 500-700 мг/л, а также необработанные воды с большим содержанием органических веществ	0,4 – 0,6 (среднее 0,51)
Очень сильное	Вода со значительной карбонатной и малой постоянной жесткостью, с плотным осадком больше 2000 мг/л, сильно минерализованная и коррозионная	от 0,6 до 1 и более

Контрольные вопросы

1. Что такое короткий трубопровод?
2. Что такое длинный трубопровод?
3. На какие виды делятся длинные трубопроводы?
4. Какие трубопроводы называются простыми?
5. Какие трубопроводы называются сложными?
6. Что такое характеристика трубопровода?
7. При подаче жидкости по последовательно соединенным трубопроводам 1, 2, и 3 расход жидкости в них:
 - а) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$; б) $Q_1 > Q_2 > Q_3$;
 - в) $Q_1 < Q_2 < Q_3$; г) $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$.
8. При подаче жидкости по последовательно соединенным трубопроводам 1, 2, и 3 общая потеря напора в них:
 - а) $\Sigma h = \Sigma h_1 - \Sigma h_2 - \Sigma h_3$; б) $\Sigma h_1 > \Sigma h_2 > \Sigma h_3$;
 - в) $\Sigma h = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 + \Sigma h_3$; г) $\Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3$.

9. При подаче жидкости по параллельно соединенным трубопроводам 1, 2, и 3 расход жидкости в них:

- а) $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$; б) $Q_1 > Q_2 > Q_3$;
в) $Q_1 < Q_2 < Q_3$; г) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$.

10. При подаче жидкости по параллельно соединенным трубопроводам 1, 2, и 3 общая потеря напора в них:

- а) $\Sigma h_1 = \Sigma h_2 = \Sigma h_3$. б) $\Sigma h_1 > \Sigma h_2 > \Sigma h_3$;
в) $\Sigma h = \Sigma h_1 - \Sigma h_2 - \Sigma h_3$; г) $\Sigma h = \Sigma h_1 + \Sigma h_2 + \Sigma h_3$.

11. Что такое разветвленный трубопровод?

12. При подаче жидкости по разветвленным трубопроводам 1, 2, и 3 расход жидкости:

- а) $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$; б) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$;
в) $Q_1 > Q_2 > Q_3$; г) $Q_1 < Q_2 < Q_3$.

13. Как называется резкое повышение давления, возникающее в напорном трубопроводе при внезапном торможении рабочей жидкости?

Часть 2. ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ПОДЗЕМНЫХ ТРЕЩИН

6. ПОНЯТИЕ ФРАКТАЛА

Фрактальная геометрия изучает закономерности, проявляемые в структуре природных объектов, процессов и явлений, обладающих явно выраженной фрагментарностью, изломанностью и искривленностью. Достаточно большое число объектов на поверхности Земли и атмосфере подчиняются степенным законам. Моделированием этих закономерностей занимается фрактальная геометрия. Методы фрактальной геометрии широко применяются в различных отраслях естествознания и техники [6].

Термин фрактал (от лат. Fractus – дробный, дробленный) был введен Бенуа Б. Мандельбротом в 1975 году [6] для обозначения объектов, имеющих фрагментированную (негладкую) форму, но обладающих определенной формой порядка – самоподобием. Наиболее общее понятие фрактала, данное Мандельбротом, следующее: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

Распространенность фрактальных структур в природе невообразима. Фрактальны пористые минералы и горные породы; расположение ветвей, узоры листьев, капиллярная система растений; кровеносная, нервная, лимфатическая и др. системы в организмах животных и человека; реки, облака, линия морского побережья, горный рельеф и многое другое. Мало того, фрактальны практически все поверхности твердых тел.

Фрактальные объекты имеют удивительные свойства: как в целом, так и любые их участки обладают одной и той же размерностью. Это свойство называется самоподобием. Если наблюдать в микроскоп за кривой линией, то стараясь разглядеть более тонкую структуру, можно заметить, что в окуляре микроскопа ничего не меняется.

Математическую формулировку самоподобия фрактальных объектов можно дать интуитивным, очевидным образом. Растянем или сожмем кривую линию в η раз, так что новая длина будет

$$L_* = \eta L. \quad (6.1)$$

Величину η называют масштабным множителем. Поскольку самоподобие означает, что любая часть кривой подобна всей линии, то измерение новой длины можно осуществить масштабом, в η раз отличным от исходного масштаба, т. е.

$$\chi_* = \eta \chi. \quad (6.2)$$

Два выражения (6.1) и (6.2) составляют математическую формулировку аксиомы фрактальной геометрии – самоподобия фрактальных объектов [6].

Другим важным свойством фракталов является их иерархичность, т.е. способность повторяться в разных масштабах пространства и времени. Однако существует четкий критерий принадлежности объекта к фракталам – объект нельзя считать фрактальным, если он не обладает свойством самоподобия, но можно, если он не иерархичен.

Фракталы делятся на группы.

Самые большие группы:

- геометрические фракталы;
- алгебраические фракталы;
- стохастические фракталы.

Существуют и другие классификации фракталов, например, деление фракталов на детерминированные (алгебраические и геометрические) и недетерминированные (стохастические).

6.1. Геометрические фракталы

Фракталы этого класса самые наглядные. В двумерном случае их получают с помощью некоторой ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал.

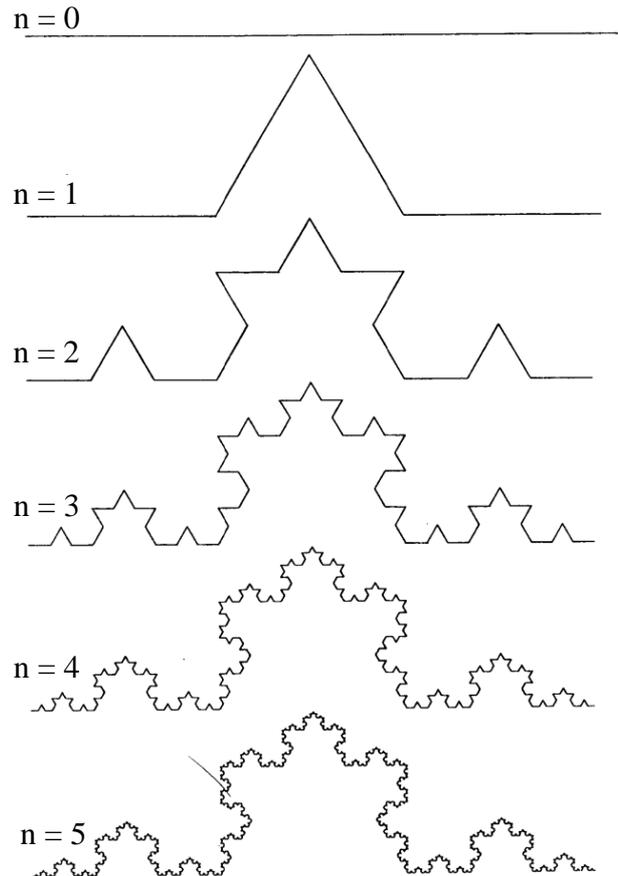


Рис. 6.1. Построение триадной кривой Кох

Рассмотрим один из таких фрактальных объектов – триадную кривую Кох [1, 7]. Построение кривой начинается с отрезка единичной длины на рис. 6.1 – это 0-е поколение кривой Кох. Далее каждое звено (в нулевом поколении один отрезок) заменяется на образующий элемент, обозначенный на рисунке через $n = 1$. В результате такой замены получается следующее поколение кривой Кох. В 1-м поколении – это кривая из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по $1/3$. Для получения 3-го поколения прodelываются те же действия – каждое

звено заменяется на уменьшенный образующий элемент. Итак, для получения каждого последующего поколения все звенья предыдущего поколения необходимо заменить уменьшенным образующим элементом. Кривая n -го поколения при любом конечном n называется предфракталом. На рис. 6.1 представлены пять поколений кривой. При n , стремящемся к бесконечности, кривая Кох становится фрактальным объектом [6, 13].

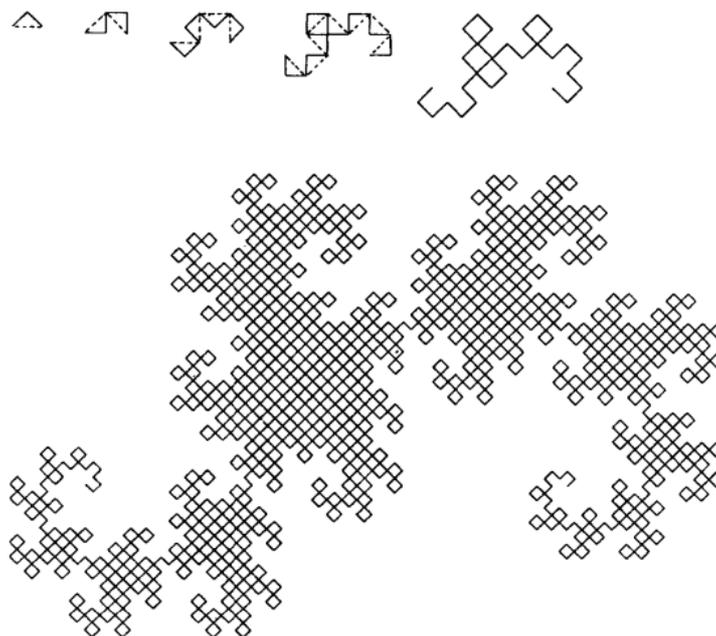


Рис. 6.2. Построение «дракона» Хартера – Хейтуэя

Для получения другого фрактального объекта нужно изменить правила построения. Пусть образующим элементом будут два равных отрезка, соединенных под прямым углом. В нулевом поколении заменим единичный отрезок на этот образующий элемент так, чтобы угол был сверху. Можно сказать, что при такой замене происходит смещение середины звена. При построении следующих поколений выполняется правило: самое первое слева звено заменяется на образующий элемент так, чтобы середина звена смещалась влево от направления движения, а при замене следующих звеньев направления смещения середин отрезков должны чередоваться. На рис. 6.2 представлены несколько первых поколений и 11-е поколение кривой, построенной по вышеописанному принципу. Предельная фрактальная кривая (при n , стремящемся к бесконечности) называется драконом Хартера – Хейтуэя.

В машинной графике использование геометрических фракталов необходимо при получении изображений деревьев, кустов, береговой линии. Двухмерные геометрические фракталы используются для создания объемных текстур (рисунка на поверхности объекта) [6].

6.2. Алгебраические фракталы

Это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах. Наиболее изучены двухмерные процессы. Интерпретируя нелинейный итерационный процесс как дискретную динамическую систему, можно пользоваться терминологией теории этих систем: фазовый портрет, установившийся процесс, аттрактор и т.д.

Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (или, как говорят, – аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом, фазовое пространство системы разбивается на области притяжения аттракторов. Если фазовым считается двухмерное пространство, то, окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью примитивных алгоритмов порождать очень сложные нетривиальные структуры.

В качестве примера рассмотрим множество Мандельброта (рис. 6.3 и 6.4).

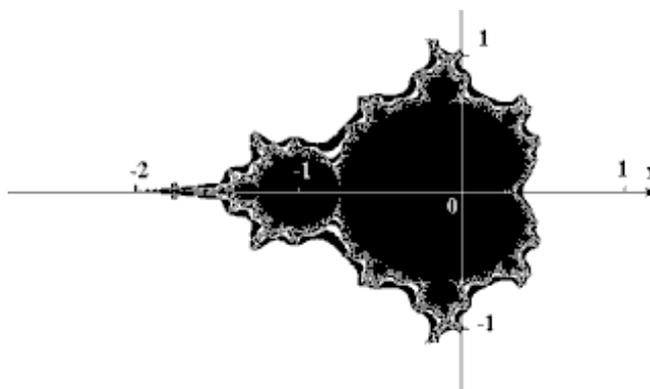


Рис. 6.3. Множество Мандельброта

Алгоритм его построения достаточно прост и основан на простом итеративном выражении: $Z[i+1] = Z[i] \cdot Z[i] + C$, где Z_i и C – комплексные переменные. Итерации выполняются для каждой стартовой точки C прямоугольной или квадратной области – подмножестве комплексной плоскости. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока $Z[i]$ не выйдет за пределы окружности радиусом 2, центр которой лежит в точке $(0,0)$ (это означает, что аттрактор динамической системы находится в бесконечности), или после достаточно большого числа итераций (например, 200 – 500) $Z[i]$ сойдется к какой-нибудь точке окружности. В зависимости от количества итераций, в течение которых $Z[i]$ оставалась внутри окружности, можно установить цвет точки C (если $Z[i]$ остается внутри окружности в течение достаточно



Рис. 6.4. Участок границы множества Мандельброта, увеличенный в 200 раз

большого количества итераций, итерационный процесс прекращается и эта точка раstra окрашивается в черный цвет).

большого количества итераций, итерационный процесс прекращается и эта точка раstra окрашивается в черный цвет).

6.3. Стохастические фракталы

Еще одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты, очень похожие на природные – несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря [6, 13].

Контрольные вопросы

1. Раскройте понятия «фрактал», «фрактальный».
2. Приведите примеры фрактальных структур в природе.
3. В чем отличие природных фрактальных структур от их математических («идеальных») представлений?

4. Назовите основные виды фракталов, в чем заключаются особенности каждого из них?
5. Что такое геометрический фрактал? Перечислите его основные разновидности.
6. Что такое алгебраический фрактал? Перечислите его основные разновидности.
7. Что такое стохастический фрактал? Перечислите его основные разновидности.

7. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Фракталы широко используются для моделирования пространственно масштабируемых разветвленных систем в силу наличия у них фрактальных свойств. В качестве объекта для исследования разветвленных геологических систем мы рассмотрим речной бассейн, который может быть ассоциирован с 3D-системой подземных трещин в земной коре, видимым проявлением которой на земной поверхности являются русла рек и их притоков.

Для гидрологических задач важно свойство фракталов как геометрических объектов, обладающих свойством самоподобия, когда каждая (даже самая малая) часть этого объекта подобна любой более крупной его части и всему объекту в целом. В частности, в гидрологии суши наиболее выраженными фрактальными свойствами обладают системы постоянных и временных водотоков, а также древние русла рек. Когда речь идет об аналогии с 3D-системой, то она наиболее наглядно проявляется в горном рельефе для малых рек, хотя имеет общее значение и для равнинных (в том числе великих рек). Принципиальным в подобной 3D-модели трещиноватости земной коры можно считать рост и развитие трещин «снизу-вверх» через механизм бифуркаций; их выход на поверхность земли – это следствие глубинных динамических процессов. Осадочные породы в верхних земных слоях и явления выветривания на поверхности создают существующие топологии глубинных слоев. Если говорить об управляющих механизмах трещинообразования, то в их основе лежат современные тектонические процессы, которые в конечном итоге продолжают формировать облик Земли.

В границах каждого речного бассейна функционирующие водотоки образуют хорошо видимую иерархию временных ручейковых, овражно-балочных и постоянных речных систем разного (подобного) размера. В результате возникает подобие (фрактальность) строения русловой сети. Однако это подобие имеет относительный характер. Сравнение русловых систем рек на земной поверхности, ее крупных притоков, показывает, что русловые сети, имея сходную древовидную форму, все же сильно отличаются по рисунку русловой сети, что характерно и для систем подземных трещин.

Интегрировано русловые сети можно представить в виде двух типов: со стволовым и древовидным рисунком. Стволовые сети характеризуются более малым числом водотоков по сравнению с древовидными сетями (рис. 7.1).

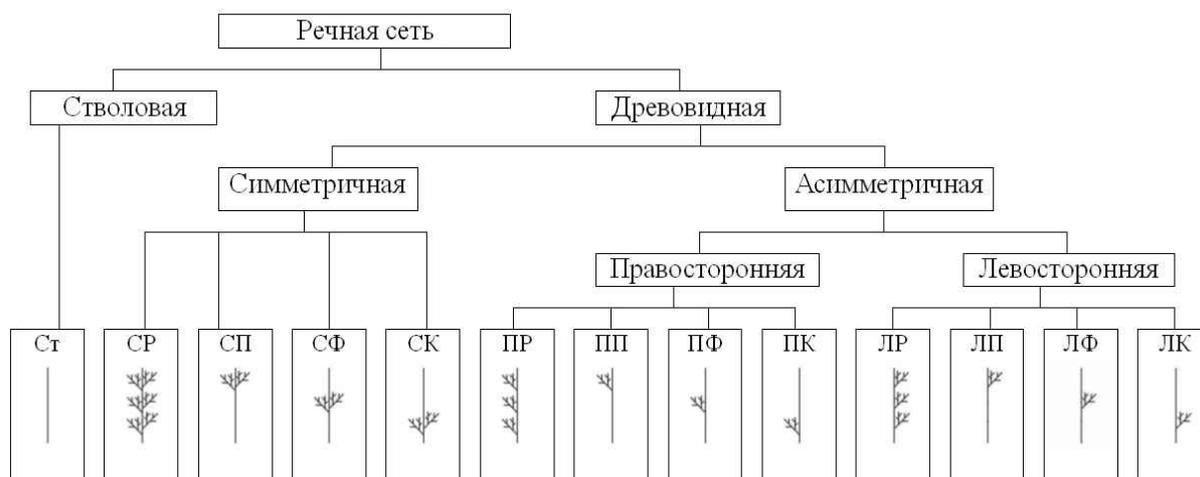


Рис. 7.1. Классификация рисунков речной сети: Ст – стволовая; СР – симметричная равномерная; СП – симметричная привершинная; СФ – симметричная Ф-образная; СК – симметричная корневая; ПР – правобережная равномерная; ПП – правобережная привершинная; ПФ – правобережная Ф-образная; ПК – правобережная корневая; ЛР – левобережная равномерная; ЛП – левобережная привершинная; ЛФ – левобережная Ф-образная; ЛК – левобережная корневая

Однако абсолютное большинство рек имеют древовидную структуру, такой же вид имеют трещины в земной коре, которая может быть выражена в большей или меньшей мере. Степень выраженности древовидного строения речной сети определена ее симметричностью. Симметричность или асимметрия русловой сети территории зависит от соотношения площади водосборов правобережных $F_{пр}$ и левобережных

$F_{\text{л}}$ притоков. При условии $F_{\text{пр}} = F_{\text{л}}$ древовидная русловая сеть симметрична. Чаще формируются асимметричные русловые сети (см. рис. 7.1), для которых $F_{\text{пр}} \neq F_{\text{л}}$.

Для количественного определения меры выраженности симметричности (или асимметричности) рисунка русловых систем можно использовать отношение между суммарной площадью бассейнов правобережных и левобережных притоков. Если выполняется неравенство

$$0,5 < \Sigma F_{\text{пр}} / \Sigma F_{\text{л}} < 2, \quad (7.1)$$

речную сеть можно считать симметричной. В случае $\Sigma F_{\text{пр}} / \Sigma F_{\text{л}} < 0,5$, речная сеть имеет левостороннюю, а при $\Sigma F_{\text{пр}} / \Sigma F_{\text{л}} > 2$ – правостороннюю асимметрию [7].

Особенности строения русловой сети определены равномерностью (неравномерностью) впадения притоков в главную реку. При равномерном впадении притоков число узлов слияния водотоков в бассейне реки – возрастающая функция ее длины. Большинство речных систем имеет квазиравномерную сеть. Для таких систем увеличение числа узлов слияния мало отличается от «идеальной» древовидности русловой сети. Если основные притоки реки сосредоточены в ее верховьях, то русловая сеть называется неравномерной привершинной. Она характерна для случаев расположения верховий реки в зоне избыточного (или достаточного) увлажнения, а средней и нижней части ее бассейна – в аридной области. Если основное количество притоков приурочено к среднему или нижнему течению главной реки, то такой рисунок сети считается неравномерным Ф-образным и корневым. Такие рисунки русловой сети формируются относительно редко [7, 10].

Несмотря на возможные различия в строении русловой сети, элементы этой сети обладают свойствами самоподобия (фрактальности). Их подобие устанавливает, в частности, порядки рек N , закономерно изменяющиеся от истока к их устьям. Большинство гидрографических, гидрологических и морфодинамических характеристик рек на их произвольном участке являются функцией величины N , если она определена в соответствии с концепцией Р. Хортонa [1, 10] и его последователей. В рамках данной концепции рекой первого порядка ($N = 1$) принимается самый малый водоток, не имеющий притоков. По схеме формализации структуры водотоков Стралера – Философова [1, 10] слияние двух рек первого порядка дает реку с $N = 2$. Слияние двух рек второго порядка даст реку третьего порядка и т.д. (рис. 7.2, б). В общем случае

$N_{ш} = 1, 2, \dots, T$, где T – максимальная величина порядка реки выше вершины ее устьевой области. В результате порядок реки оказывается размером элементов русловой сети территории. Лишь в частном случае величина порядков рек является целочисленной. Этим размерам элементов русловой сети (порядкам) соответствуют вполне определенные гидрографические характеристики («меры» в терминологии теории фракталов). Увеличение порядков рек сопровождается возрастанием их длины L , а также площадей их бассейнов F . Закономерно изменяются при этом средние гидрологические (характерные расходы воды, сток взвешенных и влекомых наносов) и морфодинамические характеристики русла [1].

В теории фракталов меру M и размер самоподобных объектов S дополняет фрактальная размерность D [1, 6]. Эта характеристика отражает закономерное увеличение (уменьшение) меры объекта при увеличении (уменьшении) его размера. Все перечисленные переменные связаны между собой соотношением

$$M = S^D. \quad (7.3)$$

В русловых системах эта закономерность выполняется при замене S на N . Масштабные эффекты изменения их характеристик («меры») определяются фрактальной размерностью, величина которой является функцией условий формирования речной сети, речного стока и т.п. В практике геоморфологических и гидрологических исследований в качестве фрактальной размерности рассматривается коэффициент бифуркации [5] или коэффициент масштабных изменений длины рек, площади их водосборов, характерных расходов воды и т.п. [1]. Они отражают изменение этих характеристик при увеличении порядка реки (проявление масштабного эффекта). Мерой масштабного эффекта считается, в частности, коэффициент масштабного изменения

$$K_i = \frac{M_{N+1}}{M_N}. \quad (7.4)$$

Он показывает кратность изменения той или иной гидрографической, гидрологической или морфодинамической характеристики рек при последовательном увеличении их порядка на единицу. Фрактальная размерность некоторых перечисленных характеристик является переменной или постоянной (преобладающий случай) величиной не только для одного, но и многих речных бассейнов [9, 10]. В частности, стабильность фрактальной размерности (масштабного эффекта) характерна для изменения площади бассейна, поскольку значение $K_F = 2,0$ инвариантно

по отношению к разнообразию изученных водосборов. Это связано с тем, что увеличение порядка реки на единицу предполагает (в соответствии с уравнением (7.2)) двукратное увеличение числа водотоков длиной менее 10 км и аналогичное изменение площади водосбора, если густота водотоков в его пределах есть величина постоянная. Чем больше густота водотоков d , тем меньше площадь водосбора F , необходимая для формирования реки заданного порядка N .

Соответствие порядка реки, площади бассейна и густоты речной сети (при учете формулы (7.2)) устанавливает зависимость типа

$$P = cF^a d^b. \quad (7.5)$$

Из формул (7.2) и (7.5) следует, что

$$N = a \log_2 F + b \log_2 d + C, \quad (7.6)$$

где $C = 1 + \log_2 c$. Универсальность зависимости (7.5) подтверждает обобщение данных по рекам в бассейнах Верхней Волги, Печоры и Амура (русская часть), разделенного (для сокращения разницы в численности рек) на Верхний, Средний и Нижний Амур. В пределах каждого из пяти частных бассейнов выделялось n водосборов с характерными для них значениями N_i , F_i и d_i ($i = 1, \dots, n$). Эмпирические параметры a , b и C в формуле (7.6) оценивались на основе метода наименьших квадратов, а ее погрешность для каждого бассейна – стандартной оценки средней квадратической погрешности

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n (N_i - a \log_2 F_i - b \log_2 d_i - C)^2}. \quad (7.7)$$

Структуру этой формулы можно получить и на основе теории фракталов. Из геометрического подобия всех элементов фрактала на плоскости [1, 6] следует, что длина каждого элемента русловой сети L пропорциональна квадратному корню из значения площади его водосбора (т.е. $L = \gamma F^{0.5}$, где γ – общий коэффициент пропорциональности). Анализ фактического соотношения между длиной реки и площадью ее водосбора показал, что коэффициент $\gamma \approx 1,4$ [9]. Если количество рек на территории бассейна равно P , то средняя площадь каждой реки $f_{\text{cp}} = F/P$, а средняя длина $l_{\text{cp}} = L_{\text{п}}/P$, где $L_{\text{п}}$ – протяженность русловой сети. При выполнении для средних значений показателей f_{cp} и l_{cp} условия геометрического подобия $l_{\text{cp}} = \gamma \sqrt{f_{\text{cp}}}$; возведение в квадрат обеих частей уравнения приводит к соотношению

$$\frac{L_{\text{п}}}{P^2} = \gamma^2 \frac{F}{P}. \quad (7.8)$$

С учетом равенства $L_n=dF$ из уравнения (7.8) следует, что

$$P = \frac{1}{\gamma^2} d^2 F. \quad (7.9)$$

При относительно устойчивом значении $\gamma \approx 1,4$ для рек России и сопредельных территорий [9] приходим к полуэмпирической формуле

$$P = 0,5d^2 F. \quad (7.10)$$

Из формул (7.2) и (7.10) следует выражение, определяющее величину порядка реки N :

$$N = \log_2 F + 2 \log_2 d. \quad (7.11)$$

Полуэмпирическая формула (7.11) лишь незначительно отличается от обобщенной формулы (7.8), что подтверждает ее эффективность для рек, находящихся в разных природных условиях. Среднее отклонение фактических значений N от рассчитанных величин по формуле (7.11) мало отличается от нуля. Для пяти изученных бассейнов [9, 11] коэффициент корреляции между фактическими и рассчитанными по формуле (7.11) значениями N превышал 0,95. Эффективность этой формулы для оценки порядка рек характеризует средняя квадратическая погрешность σ_c , рассчитанная по формуле (7.7) при $a = 1$, $b = 2$ и $C = 0$. Разность $n - 3$ в знаменателе подкоренного выражения заменялось на n , так как ни один из параметров формулы (7.7) не оценивался по данным о водосборах рассматриваемых бассейнов. Значения σ_c несколько превышают значения погрешностей σ для случая использования зависимостей вида (7.6) со специально подобранными для каждого бассейна значениями ее параметров. Отметим, однако, что значения σ_0 достаточно малы по сравнению со значениями порядков рек N . Вычисленная по всем 274 водосборам общая средняя квадратическая погрешность σ_c формулы (7.11) равна 0,27. Это позволяет ее использовать для определения порядка реки без предварительного учета особенностей ее водосбора.

Таким образом, порядок реки является характеристикой размера элементов структуры русловых потоков, мерой их подобия в отношении изменения гидрографических, гидрологических параметров речного бассейна. В частности, существует закономерное увеличение площади водосбора F при возрастании порядка реки N . Верно и обратное утверждение: чем больше площадь водосбора, тем больше река, которая может сформироваться в ее пределах. При $F = \text{const}$ порядок реки

является возрастающей функцией густоты речной сети: чем больше d , тем больше N . Густота речной сети определяет условия изменения характеристик речного стока по длине русловых систем. При прочих равных условиях большим значениям густоты речной сети соответствуют более полноводные реки. Учет фрактальных особенностей русловых систем открывает перспективы развития методов гидрологических расчетов и прогнозов.

8. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ПОДЗЕМНЫХ ТРЕЩИН

Существует ряд методов, с помощью которых можно реализовать те или иные фракталы.

В общем случае фрактальное дерево можно определить как систему итерируемых функций, которые позволяют построить ствол и набор ветвей. Фракталы с простой структурой можно построить, используя геометрический метод, т.е. рекурсивно рисуя отдельные отрезки, повернутые на заданный угол.

Сформулируем основной принцип построения геометрических фракталов, он всегда начинается с двух фигур – инициатора и генератора. Последний представляет собой ориентированную ломаную, состоящую из N отрезков длины r . В начале каждого этапа построения мы имеем некоторую ломаную, сам этап построения заключается в замене каждого прямого участка копией генератора, уменьшенной и смещенной так, чтобы ее концевые точки совпали с концевыми точками заменяемого отрезка. На каждом этапе $d = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$.

Алгоритм построения фрактала типа ветка и куст состоит из следующих шагов:

1. Нарисовать отрезок.
2. Вызвать рекурсивную процедуру, рисующую левую ветку, с новыми параметрами (за координаты начала отрезка взять только что вычисленные координаты конца отрезка, за длину – длину, уменьшенную в два раза, за угол, уменьшенный на 30°).

3. Вызвать рекурсивную процедуру, рисующую правую ветку (параметры такие же, как в п. 2, за исключением угла – новый угол увеличивается на заданное число градусов относительно первоначального угла).

4. Выход из процедуры осуществляется, когда длина ветки становится меньше заданного минимума.

Для реализации поворота отрезка применяются аффинные преобразования – поворот.

Рассмотрим преобразование поворота плоскости на угол против часовой стрелки относительно угла α . Его в матричной форме можно записать в следующем виде.

Пусть $M = x_0, y_0$ – некоторая точка плоскости, относительно которой совершается поворот. Тогда совершим преобразования координат так, чтобы точка M в новой системе координат имела координаты $(0,0)$, поэтому выражение преобразования координат Θ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Обратное преобразование Θ^{-1} имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $R' = \Theta^{-1}R_{\alpha,0}\Theta$, где R' – поворот α относительно центра новой системы координат. Имеем

$$\begin{aligned} R_{\alpha,M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \Theta^{-1}R_{\alpha,0}\Theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Theta^{-1}R_{\alpha,0} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \Theta^{-1} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \\ &+ \left(- \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В нашем случае $Rx = x + l \cos(u)$; $Ry = y + l \sin(u)$, где l – коэффициент уменьшения.

Алгоритм построения бинарного дерева аналогичен, он строится по следующему принципу: на каждом уровне вертикальная линия разделяется на две с заданным показателем уменьшения. V – дерево строится аналогично бинарному, но с привлечением аффинного преобразования поворота линии на заданный угол.

Далее рассмотрим алгоритм построения случайного дерева с применением метода итерируемых функций.

Алгоритм построения случайного дерева состоит из следующей последовательности действий:

1. Генерация ствола дерева.
2. В цикле – по количеству итераций;
3. Задаем случайную координату конца следующей ветви, заданную по равномерному закону распределения на отрезке от 1 до заданного количества итераций;
4. Генерируем две ветви с заданными координатами;
5. Рисуем две новые ветви.

Функция, генерирующая ветви, имеет входными данными масштабный коэффициент r , координаты ветви l и угол поворота (θ).

Аффинные преобразования поворота имеют вид:

$$A1 = r \cdot [\cos(\theta), -\sin(\theta); \sin(\theta), \cos(\theta)];$$

$$A2 = r \cdot [\cos(\theta), \sin(\theta); -\sin(\theta), \cos(\theta)];$$

А две новые ветви ($L1$ и $L2$) генерируются по правилу:

$$L1 = A1 \cdot (v(:,2) - v(:,1)) + t;$$

$$L2 = A2 \cdot (v(:,2) - v(:,1)) + t;$$

$$L1 = [t(1), t(2), L1(1), L1(2)];$$

$$L2 = [t(1), t(2), L2(1), L2(2)],$$

где векторы v и t содержат координаты концов новых ветвей и извлекаются из вектора l .

Алгоритм генерации DLA фрактала

Модель построения формирования системы подземных трещин по алгоритму *DLA* была выбрана исходя из нескольких соображений.

Во-первых, экспериментальные исследования показывают, что системе подземных трещин присущи фрактальные свойства. Во-вторых, система подземных трещин визуально похожа на фрактальные кластеры, получаемые по алгоритму *DLA*.

Ограниченное диффузией агрегирование возникает, когда случайно перемещающиеся частицы налипают на начальный зародыш, представленный фиксированным объектом, и постепенно наращивают его [1, 6, 13].

В стандартной модели *DLA* блуждающая частица прилипает к покоящейся частице и становится покоящейся. Такой принцип позволяет моделировать классическое броуновское движение и фракталы типа «снежинка». Введение величины вероятности прилипания блуждающей частицы к покоящейся позволяет получить различные модельные картины, качественно отвечающие экспериментальным результатам.

На начальном этапе в заданную точку расчетной области помещается частица – зародыш. Далее частица инициализируется в случайной точке круговой «области зарождения» и двигается до тех пор, пока не достигнет «области агрегации» или не выйдет за границы расчетной области. После этого генерируется следующая частица и процедура блуждания повторяется. Случайное блуждание реализуется клеточным автоматом с окрестностью фон Неймана [1, 6].

Применение *DLA* фрактала позволяет моделировать системы трещин, расходящиеся из центра (рис 8.1).

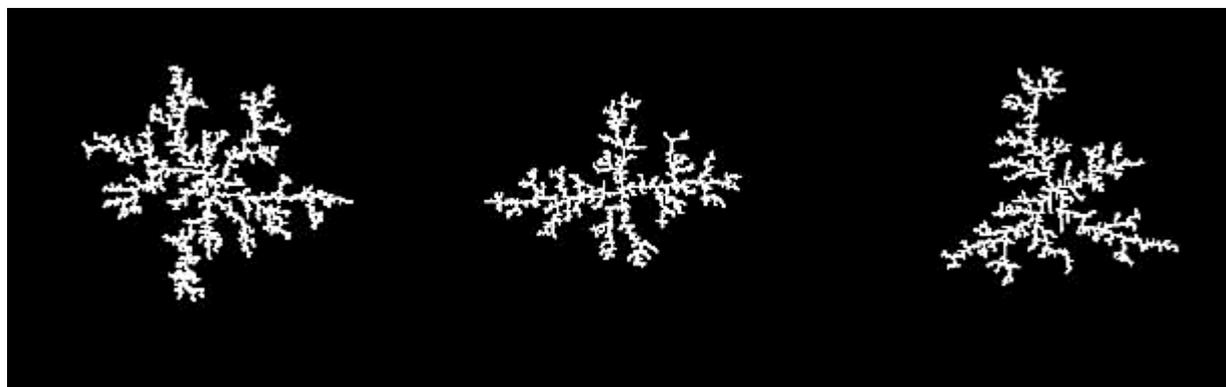


Рис. 8.1. Система каналов в *DLA* приближении

Структура смоделированных фрактальных островков существенно зависит от величины вероятности прилипания (рис. 8.2). С одной стороны, чем выше вероятность прилипания, тем более разветвленной образуется фрактальная структура, что подтверждается величинами фрактальной размерности. Фрактальная структура разветвляется наружу вследствие того, что частице сложнее уйти во вне, не столкнувшись с покоящимися частицами. Так же с увеличением вероятности прилипания уменьшается фрактальная размерность, фрактальная структура стремится к линии (фрактальная размерность линии равна 1). Обратно – фрактальная структура стремится к плоскости (фрактальная размерность плоскости равна 2). С другой стороны, с уменьшением вероятности прилипания движущаяся частица может диффундировать глубже внутрь фрактальной структуры, что позволяет моделировать систему трещин «круглой» формы.

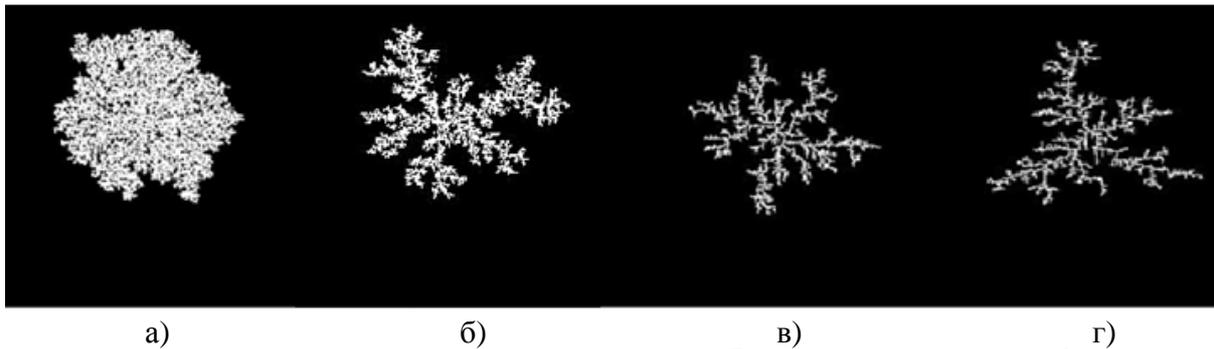


Рис. 8.2. Модельные изображения фрактальных структур системы трещин при величине вероятности прилипания: а – 0,01; б – 0,1; в – 0,5; г – 1

Используя эти базовые представления, мы предлагаем алгоритм для моделирования структуры 3D-системы подземных трещин, являющихся каналами для транзита подземных вод. Эти каналы рассматриваются как в приближении детерминированного фрактального дерева (рис. 8.3), так и стохастического (рис. 8.4). Наша модель применима к несильно густой сети трещин, в предположении того, что систему мелких каналов можно рассматривать как один усредненный. При этом считаем, что система подземных трещин имеет один основной входной канал, а характер течения жидкости принимаем одинаковым для каналов одного уровня.

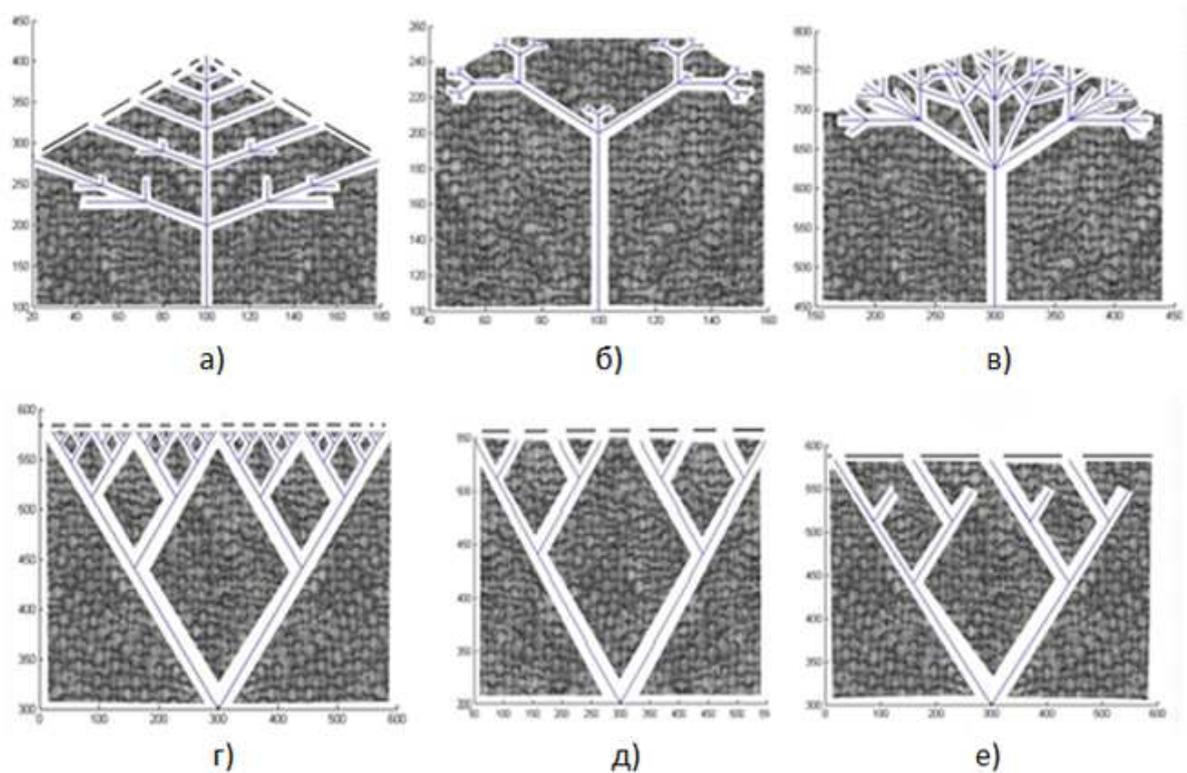


Рис. 8.3. Модель каналов в приближении детерминированного фрактального дерева: а – «ветка»; б – «привершинная»; в – «привершинная Ф-образная»; г – густое V-дерево; д – разреженное V-дерево; е – V-дерево с левым преобладанием

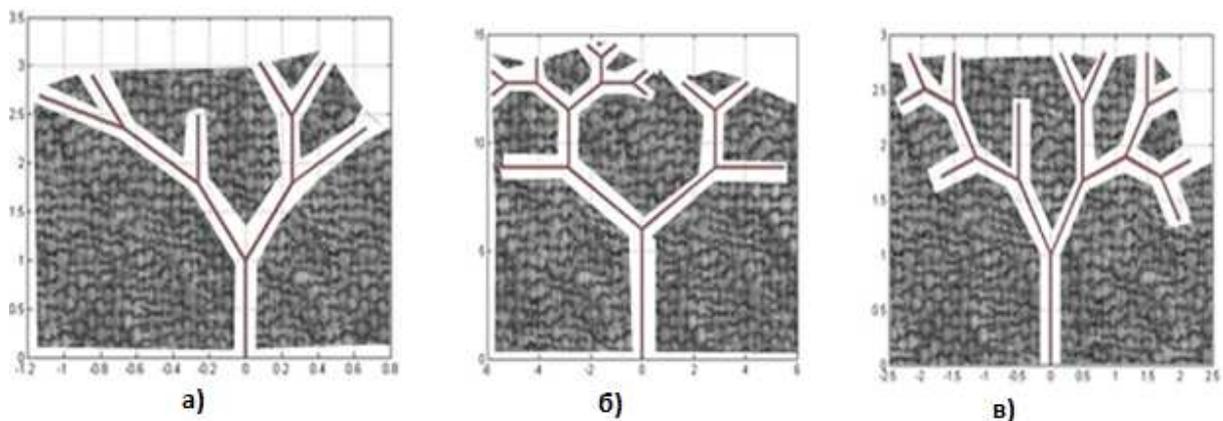


Рис. 8.4. Модель каналов в приближении стохастического фрактального дерева для случаев различной густоты и углов поворота: а – угол поворота $\pi/10$, число итераций – 5; б – длинный основной канал: угол поворота $\pi/3$, число итераций – 5; в – угол поворота $\pi/3$, число итераций – 10

Модели, изображенные на рис. 8.3 (а – в) и рис. 8.4, наиболее подходят при выходе подземных каналов на поверхность для горного рельефа, а модели в приближении V-дерева – для равнинной поверхности (рис. 8.3, г – е). Кроме этого модель стохастического фрактального

дерева позволяет реализовать случайный выход каналов на поверхность, т.е. может определяться выброс подземных вод в неожиданных местах. Для решения подобной задачи необходимо решить две отдельные проблемы: движение жидкости в основном подземном русле и распространение жидкости по системе фрактальных трещин, соединяющих основное русло с поверхностью. Рассмотрению данных вопросов посвящены следующие разделы.

Контрольные задания

1. Построить фрактал дерево Пифагора.
2. Построить фрактал ветка или куст.
3. Построить фрактал случайное дерево.
4. Построить фрактал V-дерево.
5. Построить DLA фрактал.

Часть 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В МОДЕЛИ ТРЕЩИНОВАТОСТИ

9. ТРАНЗИТ ЖИДКОСТИ В ПРЕДЛОЖЕННЫХ МОДЕЛЯХ ТРЕЩИНОВАТОСТИ

Поток реальной жидкости в основном канале в простейшем случае можно считать состоящим из ламинарной зоны (у стенки канала) и турбулентного ядра течения (в центре). Поскольку скорость к центру турбулентного потока нарастает, то толщина периферийного ламинарного слоя чаще всего незначительна, и, естественно, сам слой представим в виде ламинарной плёнки, толщина которой зависит от скорости движения жидкости (рис. 9.1).

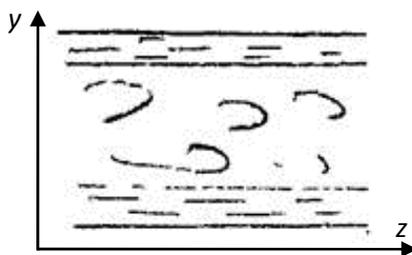


Рис. 9.1. Модель движения реальной жидкости в канале

Таким образом, моделирование движения жидкости в основном канале требует учета двух приближений: у стенки – ламинарного и в центре канала – турбулентного [9]. Оба случая рассматриваются ниже.

9.1. Модель центрального потока жидкости

Построим профиль скорости для жидкости, движущейся по каналу длиной L и радиусом r . В соответствии с [4, 10] воспользуемся полуэмпирической моделью Прандтля и получим из нее выражение для профиля скорости.

Приблизительно распределение скоростей при турбулентном режиме может быть выражено степенной формулой

$$u/u_{\max} = [(r - y)/r]^{0,84\sqrt{\lambda}},$$

где $\lambda = 64/Re$ – коэффициент гидравлического трения, зависящий от числа Рейнольдса (Re), y – поперечная координата (отсчитывается от центра канала). Для максимального значения скорости u_{\max} имеем

$$u_{\max} = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2,$$

где $P_1 - P_2 \equiv \Delta P$ – перепад давления по длине канала; η – динамическая вязкость жидкости.

Рассмотрим вариант течения воды ($\eta = 1,01$) по каналу длиной 10 м радиусом 2 м при различных значениях Re 2300, 3000, при перепаде давления 10 %.

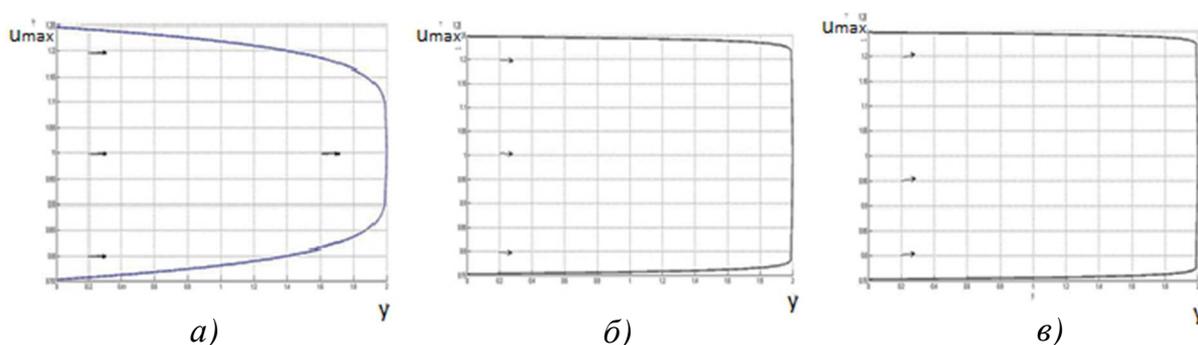


Рис. 9.2. Профиль скорости водного потока в центральной части канала:
 а – зависимость $u(y)$ при $Re = 300$; б – зависимость $u(y)$ при $Re = 2300$;
 в – зависимость $u(y)$ при $Re = 3000$

Из рис. 9.2 видно, что приблизительно квадратичный профиль скорости водного потока с увеличением числа Рейнольдса переходит в

прямоугольный, что говорит о развитии турбулентности и уменьшении ламинарного пристеночного подслоя. Такое поведение полностью отвечает теоретическим предположениям о режиме течения воды в трубе, так как значение $Re = 2300$ является критическим и отвечает развитию турбулентного режима движения жидкости.

Состояние стенок трубы в значительной мере влияет на поведение жидкости в турбулентном потоке. Так, при ламинарном движении жидкость движется медленно и плавно, спокойно обтекая на своём пути незначительные препятствия. Возникающие при этом местные сопротивления малы; их величиной можно пренебречь. В турбулентном же потоке такие малые препятствия служат источником вихревого движения жидкости, что приводит к возрастанию этих малых местных гидравлических сопротивлений. Поэтому в зависимости от соотношения толщины ламинарной плёнки и величины выступов шероховатости будет меняться характер движения жидкости в потоке.

Рассмотрим вопрос влияния величины шероховатости на логарифмический профиль скоростей.

В соответствии с [4, 10, 5] усредненный логарифмический профиль течения в канале с гладкими стенками будет иметь вид

$$u(r) = \sqrt{r \frac{\Delta p}{2\chi^2 \rho L}} \ln \left(\frac{r}{v} \sqrt{r \frac{\Delta p}{2\rho L}} \right),$$

где χ – константа Кармана, равная 0,4, ρ – плотность воды, v – кинематическая вязкость воды.

Оценим влияние величины относительной шероховатости α на гидродинамические процессы в канале. В соответствии с [7] будем брать величину шероховатости от 7 до 30 %. Тогда по [6] усредненный логарифмический профиль течения жидкости в канале с шероховатыми стенками будет иметь вид

$$u(r) = \sqrt{r \frac{\Delta p}{2\chi^2 \rho L}} \ln \left(\frac{r}{d(r)} \right),$$

где $d(r) = \alpha r$ – высота бугорков шероховатости.

На рис. 9.3 приведены профили скоростей для различных вариантов α .

Из рис. 9.3 следует, что шероховатость стенок канала оказывает существенное влияние на профиль скорости водного потока.

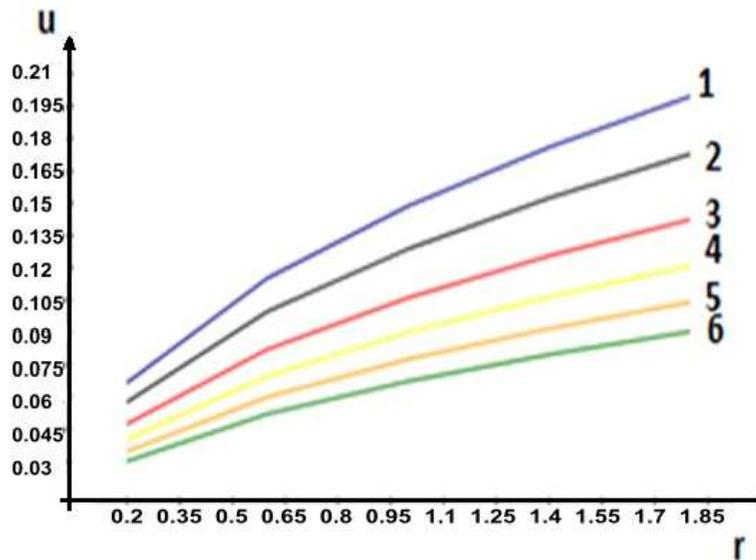


Рис. 9.3. Профили скоростей для случая шероховатого канала при разных значениях параметра α : 1 – 7 %; 2 – 10 %; 3 – 15 %; 4 – 20 %; 5 – 25 %; 6 – 30 %

На рис. 9.4 приведен вариант сопоставления профилей скоростей для случая канала с гладкими 1 и шероховатыми стенками 2 – 3.

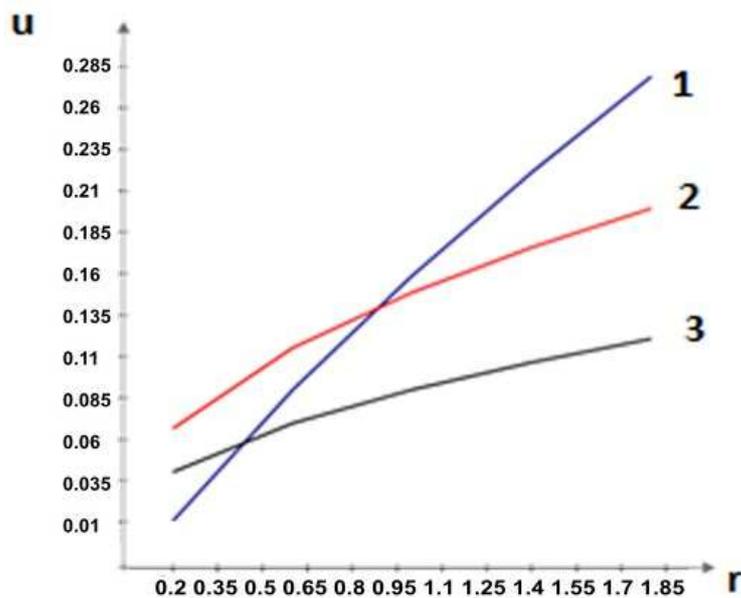


Рис. 9.4. Сравнение профилей в гладком 1 и шероховатых каналах: 2 – 10 %; 3 – 15 %

Из рис. 9.4 делаем вывод, что даже наличие несильной шероховатости оказывает существенное влияние на профиль скорости. Для областей, близких к стенкам, имеет место картина преобладания значений скорости в шероховатом канале по сравнению со случаем гладкого канала. Такой эффект обусловлен наличием вихреобразований и отрывов вблизи шероховатостей.

9.2. Модель пристеночного слоя

Необходимость учета пристеночного слоя в процессе моделирования объясняется тем фактом, что во многих экспериментах в этом слое наблюдается также формирование вихрей, которые могут нелинейным образом обмениваться энергией с вихрями, образовавшимися в центре течения. Такое поведение может приводить к существенному усложнению режима течения жидкости в области образования трещин, отходящих от основного канала.

Модель пристеночного слоя жидкости описывается стационарными уравнениями Навье – Стокса для задачи с плоской геометрией в переменных функции тока и вихря (рис. 9.5, 9.6).

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega;$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_x, \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u_y,$$

где Ψ – функция тока, ω – вихрь, u_x , u_y – проекции скорости на оси координат.

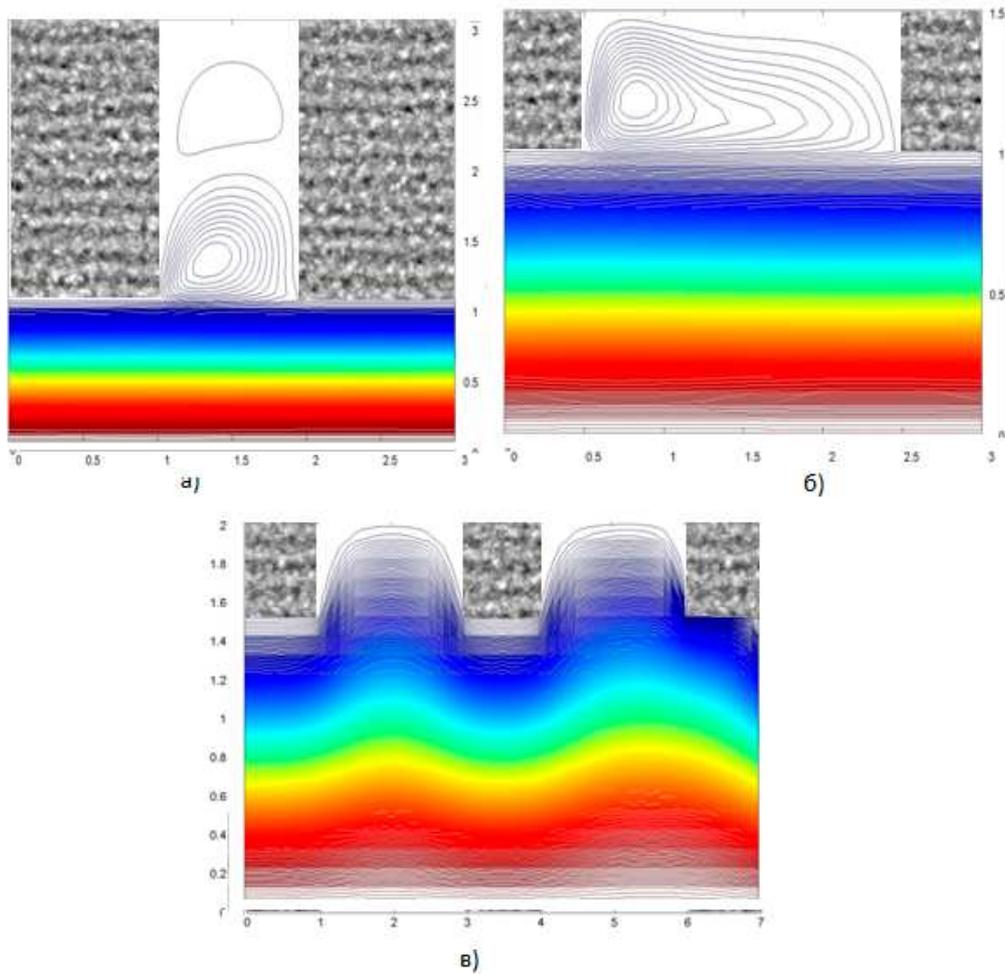


Рис. 9.5. График функции тока для разных вариантов при значении $Re = 1000$: а – «глубокая» неоднородность; б – «одиночная широкая неглубокая» неоднородность; в – «две неглубокие» неоднородности в широком канале

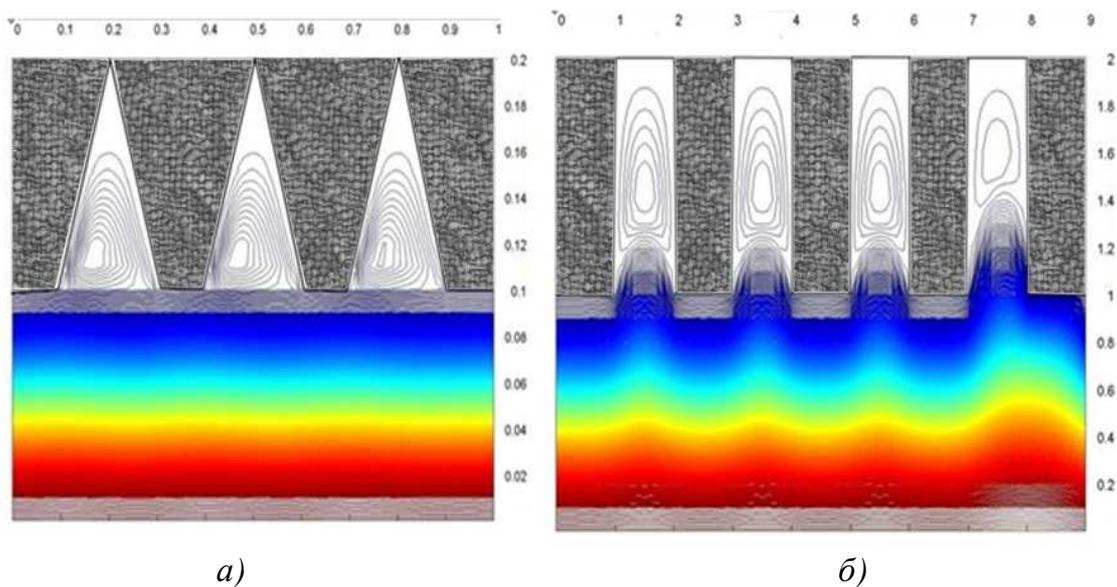


Рис. 9.6. График функции тока для $Re = 1000$ с разными типами впадин: а – с 4 прямоугольными впадинами; б – с 4 треугольными впадинами

Расчетная область представляется каналом с неоднородностями на верхней плоскости в виде прямоугольных (рис. 9.6, а) и треугольных впадин (рис. 9.6, б). Граничные условия на входном и выходных сечениях представляют точные значения, исходя из соответствующих значений для течения Пуазейля:

$$u_x(x_\Gamma, y) = 6y(1 - y); \quad u_y(x_\Gamma, y) = 0;$$

$$\omega_x(x_\Gamma, y) = 6(2y - 1); \quad \Psi(x_\Gamma, y) = y^2(3 - 2y),$$

где x_Γ – горизонтальная координата границы, y – вертикальная координата.

На стенках канала значения функции тока заданы также точно – $\Psi = 0$ для нижней левой стенки и $\Psi = 1$. Значения вихря на твердых стенках задаются приближенно по формуле Вудса и уточняются в процессе расчета.

Например, для граничного узла (x_i, y_k) левой твердой стенки условие Вудса будет иметь вид

$$\omega_{i,k} = \frac{3}{hx^2} (\Psi_{i+1,k} - \Psi_{i,k}) - \frac{1}{2} \omega_{i+1,k}.$$

Для граничного узла (x_i, y_k) правой границы впадины условие Вудса запишем в виде

$$\omega_{i,k} = \frac{3}{hx^2} (\Psi_{i-1,k} - \Psi_{i,k}) - \frac{1}{2} \omega_{i-1,k}.$$

Для граничного узла (x_i, y_k) на верхней стенке условие Вудса запишем

$$\omega_{i,k} = \frac{3}{hy^2} (\Psi_{i,k-1} - \Psi_{i,k}) - \frac{1}{2} \omega_{i,k-1}.$$

При построении численной модели использовалась равномерная сетка. Разностные уравнения для определения решения в узлах сетки получены на пятиточечном шаблоне.

Уравнение для вихря имеет вид

$$C\omega_{i,k} = A_1\omega_{i-1,k} + B_1\omega_{i+1,k} + A_2\omega_{i,k-1} + B_2\omega_{i,k+1},$$

где $A_1 = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2} Re|u_{i-1/2}|hx} + Reu_{i+1/2}^+ hx \right) \frac{1}{hx^2};$

$$B_1 = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2} Re|u_{i+1/2}|hx} - Reu_{i+1/2}^- hx \right) \frac{1}{hx^2};$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2} Re |v_{k-1/2}| hy} + Re v_{k-1/2}^+ hy \right) \frac{1}{hy^2};$$

$$B_2 = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2} Re |v_{k+1/2}| hy} - Re v_{k+1/2}^- hy \right) \frac{1}{hy^2};$$

$$C = A_1 + B_1 + A_2 + B_2;$$

$$u_{i+1/2} = \frac{\Psi_{i+1,k+1} + \Psi_{i,k+1} - \Psi_{i+1,k-1} - \Psi_{i,k-1}}{4hy};$$

$$u_{i-1/2} = \frac{\Psi_{i-1,k+1} + \Psi_{i,k+1} - \Psi_{i-1,k-1} - \Psi_{i,k-1}}{4hy};$$

$$v_{k+1/2} = \frac{\Psi_{i-1,k+1} + \Psi_{i-1,k} - \Psi_{i+1,k+1} - \Psi_{i+1,k}}{4hy};$$

$$v_{k-1/2} = \frac{\Psi_{i-1,k-1} + \Psi_{i-1,k} - \Psi_{i+1,k-1} - \Psi_{i+1,k}}{4hy};$$

$$u^+ = \frac{1}{2}(u + |u|) = \begin{cases} u, & \text{если } u \geq 0, \\ 0, & \text{если } u < 0, \end{cases}$$

$$u^- = \frac{1}{2}(u - |u|) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \geq 0, \\ u, & \text{если } u < 0, \end{cases}$$

где hx , hy – шаги сетки, $u_{i+1/2}$, $u_{i-1/2}$, $v_{k+1/2}$, $v_{k-1/2}$ – аппроксимации скоростей в полушаге от узла (x_i, y_i) , A_1 , B_1 , A_2 , B_2 – коэффициенты разностной схемы.

Уравнение для функции тока

$$\left(\frac{2}{hx^2} + \frac{2}{hy^2} \right) \Psi_{i,k} = \frac{\Psi_{i-1,k} + \Psi_{i+1,k}}{hx^2} + \frac{\Psi_{i,k-1} + \Psi_{i,k+1}}{hy^2} + \omega_{i,k}.$$

Разностная схема аппроксимирует исходную задачу со вторым порядком приближения относительно шагов сетки. Уравнения для вихря получены на основе интегрального метода, так что разностная схема является консервативной. Важной особенностью схемы является монотонность (так как $u_\alpha^+, v_\alpha^+ \geq 0$, а $u_\alpha^-, v_\alpha^- \leq 0$, где α – номер узла, то все коэффициенты разностной схемы положительны при любых значениях шагов сетки, т.е. схема удовлетворяет принципу максимума), что обеспечивает ее устойчивость без специальных ограничений на величину шагов сетки. Система уравнений относительно значений решения в узлах сетки решается методом релаксации. В этом случае уравнения для функции тока и вихря имеют вид:

$$\Psi_{i,k}^{s+1} = (1 - q_\Psi)\Psi_{i,k}^s + q_\Psi \frac{\left(\frac{1}{hx^2}(\Psi_{i-1,k}^{s+1} + \Psi_{i+1,k}^s) + \frac{1}{hy^2}(\Psi_{i,k-1}^{s+1} + \Psi_{i,k+1}^s) + \omega_{i,k}^{s+1}\right)}{\left(\frac{2}{hx^2} + \frac{2}{hy^2}\right)};$$

$$\omega_{i,k}^{s+1} = (1 - q_\omega)\omega_{i,k}^s + q_\omega \frac{(A_1\omega_{i-1,k}^{s+1} + B_1\omega_{i+1,k}^s + A_2\omega_{i,k-1}^{s+1} + B_2\omega_{i,k+1}^s)}{C},$$

где s – номер итерации; q_Ψ, q_ω – параметры релаксации.

В этом алгоритме, который при $q_\Psi = q_\omega = 1$ соответствует методу Зейделя для системы нелинейных уравнений, вычисление функции тока и вихря на итерационном слое происходит параллельно, причем найденные в узле (x_i, y_k) значения $\Psi_{i,k}^{s+1}$ и $\omega_{i,k}^{s+1}$ помещаются на место предыдущих приближений $\Psi_{i,k}^s$ и $\omega_{i,k}^s$, не требуя дополнительной памяти. Верхние индексы в формулах расставлены так, чтобы движение по узлам осуществлялось по направлению возрастания нижних индексов i, k .

Вообще говоря, порядок счета может быть изменен. В частности, небольшой выигрыш по числу итераций удастся получить, ведя счет «по спирали» от границы к центру единичной области. В качестве начального приближения можно задать нулевое распределение, но лучше использовать решение при меньших значениях числа Рейнольдса.

Релаксационная процедура применяется не только во внутренних узлах, но и распространяется на граничные условия. Например, условие Вудса для верхней стенки преобразуется к виду

$$\omega_{i,k}^{s+1} = (1 - q_\omega)\omega_{i,k}^s + q_\omega \left(\frac{3}{hy^2}(\Psi_{i,k-1}^{s+1} - \Psi_{i,k}^{s+1}) - \frac{1}{2}\omega_{i,k-1}^{s+1}\right),$$

где итерационные номера приграничных величин соответствуют выбранному порядку счета.

Процесс итерационного уточнения решения задачи не может продолжаться бесконечно, поэтому необходимо сформировать условие его окончания: критерий сходимости итераций. В нашем случае итерации можно прекращать, если на некотором $(s + 1)$ -шаге будет выполнено условие: $\max(\varepsilon_\omega, \varepsilon_\Psi) < \varepsilon = 10^{-3} - 10^{-4}$,

где $\varepsilon_\omega = \max_{i,k} |\omega_{i,k}^{s+1} - \omega_{i,k}^s| / \omega_{cp}^s$; $\varepsilon_\Psi = \max_{i,k} |\Psi_{i,k}^{s+1} - \Psi_{i,k}^s| / \Psi_{cp}^s$;

$\omega_{cp}^s = \sum_{i,k} |\omega_{i,k}^s| / M$; $\Psi_{cp}^s = \sum_{i,k} |\Psi_{i,k}^s| / M$;

M – полное число узлов сеточной области.

Анализ полученных результатов расчета показывает, что когда расстояние между неоднородностями верхней стенки одного порядка с шириной впадины, то структура течения во всех впадинах одинакова и подобна структуре течения в одной впадине. При этом в сравнительно неглубоких впадинах при больших числах Рейнольдса циклы не наблюдаются, однако скорость течения во впадинах существенно меньше скоростей входного сечения. В глубоких впадинах формируется один или несколько вихрей, как и в случае одной впадины (см. рис. 9.6).

При этом область проникновения основного потока для первой впадины несколько больше, чем для остальных, а области слабых циклических движений – меньше, чем в последующих впадинах. На наш взгляд, это обстоятельство обусловлено влиянием жестких граничных условий на входной границе потока. Максимальное значение скоростей в вихрях также уменьшается по мере удаления от входной границы, однако разность максимальных значений настолько мала, что ею можно пренебречь.

Сравнение результатов расчетов течения в каналах с прямоугольными и треугольными впадинами показывает, что эти течения имеют много общего: при малых числах Рейнольдса во впадинах течение практически отсутствует, так как скорость на 2 – 3 порядка меньше скорости во входном потоке; при умеренных и больших числах Рейнольдса во впадинах формируются замкнутые циклические течения, не связанные со входным течением [2, 4, 10].

9.3. Расчет характеристик течений в системе фрактальных трещин

На некотором уровне ветвления подземного русла, примыкающего к основной трещине, количество мелких трещин становится достаточно большим. В принципе, они могут быть включены в общий вид системы подземных трещин, однако необходимость в подобной детализации может отсутствовать. В этом случае вместо набора мелких трещин можно рассматривать их как составную часть системы и описывать законом Дарси [1, 6]. Однако по ряду причин может потребоваться рассмотрение этих систем трещин именно как трещин. В этом случае можно заменить систему мелких трещин эффективной (в некотором смысле эквивалентной) трещиной.

Проведем расчет для модели V-дерева (рис. 9.7). Положим, что жидкость поступает снизу, в начале моделируемой системы трещин имеется относительное давление p_0 , а жидкость поступает с относительной скоростью v_0 . Рассчитаем длину, радиус и площадь сечения каналов, скорости и перепады давлений в них, используя принципы фрактальной геометрии, положив коэффициент самоподобия $q = 1/2$.

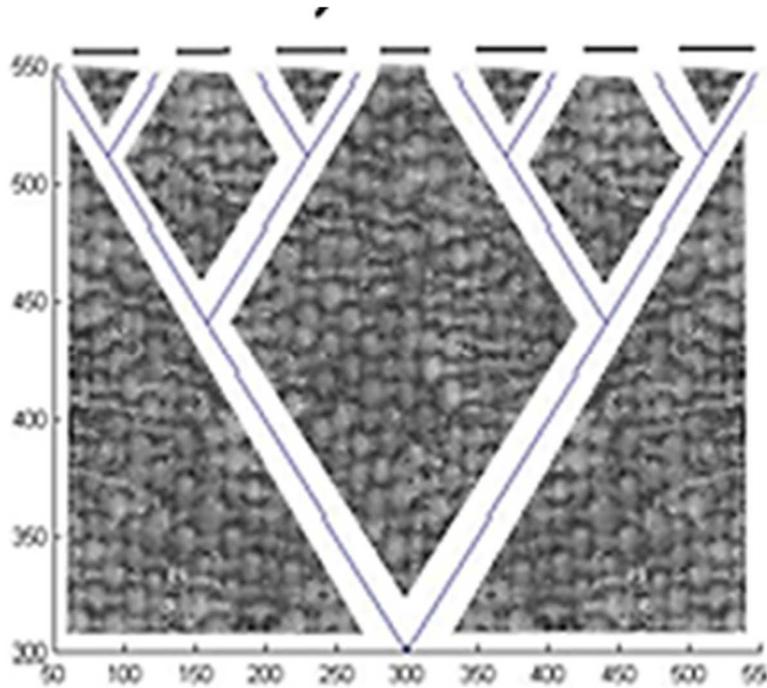


Рис. 9.7. Модель каналов в приближении V-дерева

В соответствии с [1, 6] выделим в смоделированной системе трещин k ($k = 0 \dots 3$) характерных уровней ($k = 0$ в корне дерева, $k = 1$ – на первом уровне ветвления, $k = 2$ – на втором уровне, $k = 3$ – на поверхности) и рассчитаем для них значения перепада давления Δp_k , площади сечения S_k , скорости v_k , длины ответвления l_k .

Положим во входной трещине, что $r_0 = 1$; $S_0 = \pi r_0^2 = \pi$; $V_0 = 0,1$; $q = 0,5$ $\eta = 10^{-3}$, тогда $\Delta p_k = -\eta \frac{Q_k}{S_k^2} l_k = -\eta \frac{V_k S_k}{S_k^2} l_k = -\eta \frac{V_k}{S_k} l_k$;

$$S_k = \pi r_k^2 = \pi q^{2k} r_0^2; \quad r_k = q r_{k-1}; \quad l_k = q l_{k-1}; \quad V_k = \frac{V_0}{q^k}.$$

Результаты расчета сведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Расчет характеристик каналов в приближении V-дерева

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$S_0 = \pi$	$S_1 = \frac{\pi}{4}$	$S_2 = \frac{\pi}{16}$	$S_3 = \frac{\pi}{64}$
$V_0 = 0,1$	$V_1 = 2V_0 = 0,2$	$V_2 = 0,4$	$V_3 = 0,8$
$L_0 = 1$	$L_1 = \frac{1}{2}$	$L_2 = \frac{1}{4}$	$L_3 = \frac{1}{16}$
$r_0 = 1$	$r_1 = \frac{1}{2}$	$r_2 = \frac{1}{4}$	$r_3 = \frac{1}{8}$
$p_0 = 1, 1$	$\Delta p_{01} = -\frac{0,4}{\pi} 10^{-3}$	$\Delta p_{12} = -\frac{1,6}{\pi} 10^{-3}$	$\Delta p_{23} = -\frac{6,4}{\pi} 10^{-3}$

Зная скорости и площади сечений трещин, рассчитаем расходы в них по формуле $Q_k = v_k S_k$. Тогда $Q_0 = 0,1\pi$, $Q_1 = \pi/2$, $Q_2 = \pi/4$, $Q_3 = \pi/8$. Рассчитаем расход на поверхности, учитывая количество выходов на поверхность: $Q_b = 8Q_3 = \pi$.

Для стохастического случая проведем аналогичный расчет (рис. 9.8).

Для данного случая имеем $n = 11$ ответвлений. Обозначим точкой A входной канал. Тогда $S_A = \pi$, $r_0 = \pi$; $V_A = 0,1$; $L_A = 1$.

Так как в стохастическом случае возможно большое количество мелких каналов, то имеет смысл воспользоваться моделью эффективных каналов [3, 5] и рассчитать средние значения длин, площадей сечения и скоростей в каналах.

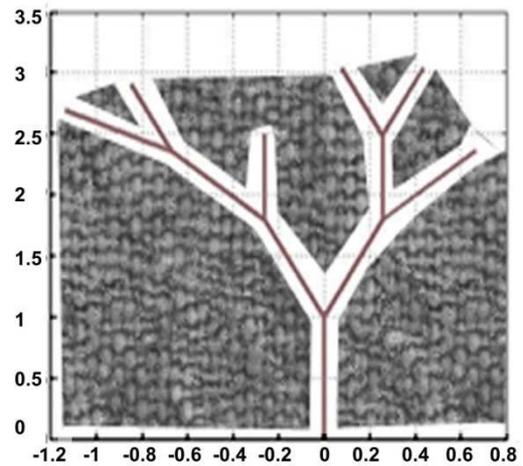


Рис. 9.8. Модель каналов в приближении случайного дерева

Пусть имеется n мелких каналов (рис. 9.9), исходящих из более крупного, имеющего характерное сечение S_0 , через который проходит поток жидкости Q_0 .

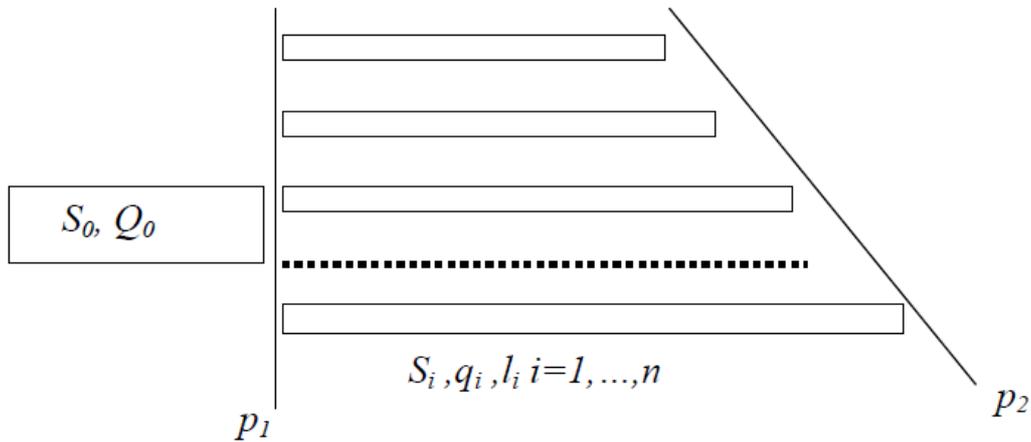


Рис. 9.9. Система мелких каналов

Здесь l_i – длина, S_i – сечение, u_i – скорость для i -го канала, $i = 1, \dots, n$. Построим канал сечения \bar{S} и длины \bar{l} , заменяющий системы малых каналов так, чтобы сохранить характерные для системы каналов перепад давления и объем жидкости. Течение примем однородным, и площадь поперечного сечения канала примем постоянной.

Примем, что все каналы в системе одинаковые, т.е. $S_i = S_A$, $l_i = l_A$, $u_i = u_A = \frac{Q_0}{nS_A}$, $i = 1, \dots, n$, то придем к соотношениям:

$$\frac{\bar{l}}{\bar{S}^2} = \frac{1}{n} \frac{l_A}{S_A^2}; \quad \bar{l} = \sqrt[3]{nl_A}; \quad \bar{S} = \sqrt[3]{n^2 S_A}.$$

Обозначим $\bar{u} = \frac{Q_0}{\bar{S}}$ – скорость течения жидкости по эффективному каналу. Тогда, если все каналы в системе одинаковые, то $\bar{u} = \sqrt[3]{u_A}$ и время прохождения «частиц» жидкости через системы каналов одинаковое, и время прохождения через эффективный канал одинаковое $\frac{l_A}{u_A} = \frac{\bar{l}}{\bar{u}}$.

Рассчитаем значения средней скорости \bar{u} , средней длины \bar{l} и средней площади сечения канала \bar{S} :

$$\bar{U}_i = 0,464; \quad \bar{l} = \sqrt[3]{11}; \quad \bar{S} = \sqrt[3]{11^2 \pi}; \quad \bar{U} = \sqrt[3]{0,1}.$$

Выделим из системы трещин (см. рис. 9.8) четыре характерных уровня k и рассчитаем для них значения площади, длины, скорости и перепада давления, используя модель двоичного дерева. Результаты расчета представлены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Расчет характеристик каналов в приближении случайного дерева

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$S_0 = \pi$	$S_1 = \frac{\pi}{4}$	$S_2 = \frac{\pi}{16}$	$S_3 = \frac{\pi}{64}$	$S_4 = \frac{\pi}{1024}$
$V_0 = 0,1$	$V_1 = 0,2$	$V_2 = 0,4$	$V_3 = 0,8$	$V_4 = 1,6$
$L_0 = 1$	$L_1 = \frac{1}{2}$	$L_2 = \frac{1}{4}$	$L_3 = \frac{1}{16}$	$L_4 = \frac{1}{32}$
$r_0 = 1$	$r_1 = \frac{1}{2}$	$r_2 = \frac{1}{4}$	$r_3 = \frac{1}{8}$	$r_4 = \frac{1}{32}$
$p_0 = 1,1$	$\Delta p_{01} = -\frac{0,4}{\pi} 10^{-3}$	$\Delta p_{12} = -\frac{1,6}{\pi} 10^{-3}$	$\Delta p_{23} = -\frac{6,4}{\pi} 10^{-3}$	$\Delta p_{34} = -\frac{1,6}{32} 10^{-3}$

Таким образом, зная характеристики течения во входной трещине, возможно рассчитать течение во время выхода на поверхность, что позволит предсказать водные катастрофические явления на поверхности.

Контрольные задания

1. По трубке длиной l и радиусом R течет стационарный поток жидкости, плотность которой ρ и вязкость η . Скорость течения жидкости зависит от расстояния r до оси трубки по закону $v = v_0 (l - r^2/R^2)$. Найти:

а) объем жидкости, протекающей через сечение трубки в единицу времени;

б) кинетическую энергию жидкости в объеме трубки;

в) силу трения, которую испытывает трубка со стороны жидкости;

г) разность давлений на концах трубки.

2. Сформулировать закон Дарси.

3. Построить систему трещин как фрактал дерево Пифагора и рассчитать для него расходы для выходных каналов.

4. Построить систему трещин как фрактал ветка или куст и рассчитать для него расходы для выходных каналов.

5. Построить поле скоростей течения Пуайзейля, рассчитать расход.

6. Построить поле скоростей течения Куэтта, рассчитать расход.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной задачей вычислительной гидродинамики является получение численных решений уравнений, описывающих движение жидкостей при многообразных условиях, возникающих в окружающей среде, в том числе для моделирования распространения таких опасных стихийных бедствий, как наводнения и сели.

Для успешного изучения данных вопросов огромное значение имеет наличие хорошо отобранного и систематизированного материала. Данное учебное пособие, в котором на доступном языке изложены теоретические аспекты движения жидкостей в системах со сложной топологией и возникающие при этом гидравлические сопротивления, позволяет лучше понять основные методики расчета движения жидкости.

Книга представляет интерес для студентов естественнонаучных направлений, проводящих исследования по механике движения жидкостей. Благодаря широкому охвату материала, доступности его изложения и наличию примеров издание может быть использовано для подготовки выпускных квалификационных работ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алексеевский, Н. И. Фрактальные свойства речных систем и их использование в гидрологических расчетах / Н. И. Алексеевский, А. Г. Косицкий, А. В. Христофоров // Вестник Томского государственного университета. – 2013. – № 371. – С. 167 – 170.

2. Численное моделирование процесса распространения и осаждения аблированных частиц в схеме прямого лазерного напыления / А. А. Антипов [и др.] // Ученые записки физического факультета. – URL: <http://uzmu.phys.msu.ru/file/2012/1/120103.pdf> (дата обращения: 05.04.2015).

3. Загузов, И. С. Математическое моделирование течений вязкой жидкости вблизи твердых поверхностей : учеб. пособие / И. С. Загузов, К. А. Поляков. – Самара : Изд-во Самар. ун-та, 1999. – 91 с. – ISBN 5-230-06019-0.

4. Ландау, Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2001. – 731 с. – ISBN 5-9221-0121-8.

5. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Дрофа, 2003. – 840 с. – ISBN 5-7107-6327-6.

6. Морозов, А. Д. Введение в теорию фракталов / А. Д. Морозов. – М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 160 с. – ISBN 5-93972-172-9.

7. Математические модели квазиодномерной гемодинамики : метод. пособие / В. Б. Кошелев [и др.]. – М. : МАКС Пресс, 2010. – 114 с.

8. Фрик, П. Г. Турбулентность: модели и подходы : курс лекций / П. Г. Фрик. – Пермь : Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 1999. – 136 с.

9. Хортон, Р. Эрозионное развитие рек и водосборных бассейнов / Р. Хортон. – М. : Иностран. лит., 1948. – 158 с.

10. Кононов, А. А. Лекции по курсу «Основы гидравлики». – URL: <http://gidravl.narod.ru/index1.html> (дата обращения: 20.08.2014).

11. Пульсации скорости в турбулентном потоке. – URL: <http://www.heuristic.su/effects/catalog/est/byId/description/666/index.html> (дата обращения: 20.08.2014).

12. Andre Offringa Diffusion Limited Aggregation. – URL: <http://www.astro.rug.nl/~offringa/Diffusion%20Limited%20Aggregation.pdf> (дата обращения: 20.08.2014).

13. Генерация фрактальных деревьев. – URL: http://fractalworld.хаос.ru/Creating_fractal_trees (дата обращения: 20.08.2014).

14. Расчет сложных трубопроводов. – URL: <http://nex7.narod.ru/gidra/11.htm> (дата обращения: 20.08.2014).

Учебное издание

АРАКЕЛЯН Сергей Мартиросович
БУХАРОВ Дмитрий Николаевич
АБРАХИН Сергей Иванович
и др.

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В РАСЧЕТАХ
ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СИСТЕМАХ СО СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Учебное пособие

Редактор А. П. Володина
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева
Корректор Е. П. Викулова
Компьютерная верстка Е. А. Балясовой

Подписано в печать 30.10.15.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,81. Тираж 80 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.