Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Е. В. Лопаткина

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Владимир 2015

УДК 510
ББК 22.10
Л77

Рецензенты:
Доктор педагогических наук, профессор
зав. кафедрой педагогики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Е. Н. Селивёрстова

Кандидат педагогических наук
зав. кафедрой естественно-математического образования
Владимирского института развития образования имени Л. И. Новиковой
Е. И. Антонова

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Лопаткина, Е. В.
Л77 Элементарная математика : учеб. пособие / Е. В. Лопаткина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2015. – 131 с.
ISBN 978-5-9984-0581-5

Изложены избранные вопросы основных разделов элементарной математики – геометрии (планиметрии и стереометрии), алгебры, математического анализа и тригонометрии. Содержит теоретические основы и практические задания, помогающие студентам продуктивно организовать самостоятельную деятельность по изучению и освоению содержания программы базовой учебной дисциплины «Элементарная математика».

Адресовано студентам 3-го курса физико-математических факультетов очной формы обучения, обучающихся по направлению 44.03.05 – Педагогическое образование (бакалавриат). Может быть использовано магистрантами и учителями математики общеобразовательных организаций.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 79. Табл. 1. Библиогр.: 68 назв.

УДК 510
ББК 22.10

ISBN 978-5-9984-0581-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Мы с наслаждением познаём математику…
Она восхищает нас, как цветок лотоса.
Аристотель

Математика – это одна из немногих учебных дисциплин, которая целенаправленно учит рассуждать. По словам Марка Ивановича Башмакова, известного математика, педагога, автора университетских и школьных учебников, главная сила математики состоит в том, что вместе с решением одной конкретной задачи она создаёт общие приёмы и способы, применимые во многих ситуациях, которые даже не всегда можно предвидеть.

На протяжении всей истории математического образования многие обучающиеся как школьники, так и студенты, да и их родители считают математику очень сложной наукой. А вот большинство школьных учителей, преподавателей институтов и университетов согласны с высказыванием Александра Даниловича Александрова, который считал, что математика полезна тем, что она трудна.

Бесспорна мысль Роберта Брингхерста, что математика существует не для того, чтобы навязывать кому-либо тяжёлую работу при её освоении и применении. Наоборот, она существует только для удовольствия. Для удовольствия тех, кто любит анализировать то, что он делает или может сделать, или то, что уже сделал в надежде сделать это ещё лучше. Однако, решение проблемы повышения уровня и качества математической подготовки учащихся и студентов невозможно без ежедневного изучения математической теории, самостоятельного выполнения упражнений и решения задач из разных разделов математики.

Данное учебное пособие разработано в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования третьего поколения по направлению 44.03.05 – Педагогическое образование (бакалавриат). Учебная дисциплина «Элементарная математика» входит в блок общепрофессиональных дисциплин. Её изучение позволяет углубить и расширить базовую математическую подготовку, полученную обучающимися в средних общеобразовательных организациях.

Предлагаемая дисциплина поможет будущим учителям математики познакомиться с новыми математическими фактами, сделать первые шаги в рассмотрении неизвестных ранее математических объектов и изучении их свойств, установлении взаимосвязей между понятиями, традиционно входящими в содержание основных разделов математики.

Основной целью курса является формирование у студентов общекультурных, общепрофессиональных, профессиональных и специальных компетенций, способствующих систематизации знаний и их дополнении новыми интересными фактами из различных разделов элементарной математики, а также обучение студентов доказательству теорем курса и решению школьных математических задач разными способами, что позволяет увидеть внутри- и межпредметные связи математики, сформировать представление о разделах математики как составных частях целого.

Элементарная математика является базой для формирования практических знаний и умений, на основе которой будут раскрываться методические аспекты обучения математике. Поэтому изучение дисциплины способствует формированию профессиональной компетентности будущего учителя в единстве его математической и методической составляющих. Систематизирующим фактором интеграции элементарной математики и методики обучения математике могут служить содержательно-методические линии (разделы) школьного курса математики.

Среди задач курса особо необходимо выделить следующие:

- сформировать представления о роли и месте содержания школьного курса математики в системе математических знаний;
- систематизировать знания по элементарной алгебре, геометрии, теории функций, тригонометрии;
- дополнить знания по курсу элементарной математики новыми фактами, необходимыми для решения школьных математических задач;
- сформировать умения применять основные методы решения задач из разных разделов элементарной математики;

- обогатить опыт решения задач по основным содержательным линиям школьного курса математики;
- стимулировать развитие познавательного интереса к изучению истории развития элементарной математики.

Данное учебное пособие обеспечивает содержательное, методическое и организационное наполнение учебной дисциплины «Элементарная математика».

Главная задача пособия – стимулировать студентов к самостоятельному пополнению математических знаний, способствовать развитию личностно значимых практических умений и навыков, накоплению и совершенствованию опыта математической деятельности. Для этого в пособии выстроена особая система подачи теоретического и задачного материала, опережающая самостоятельная работа обучающихся по освоению и присвоению основных положений курса, выполнению практических заданий. Структурирование теоретического и практического материала является продолжением опыта рассмотрения автором проблем креативного обучения на уровне вузовских учебных пособий.

В пособии представлены лишь избранные вопросы основных разделов элементарной математики: геометрии (планиметрии и стереометрии), алгебры, тригонометрии и математического анализа. В начале каждой главы студентам предлагается опережающая самостоятельная работа, состоящая из практического и теоретического заданий. Такая работа помогает подготовиться к восприятию учебного материала в активной форме. Для постановки целей самообразования рекомендуется использовать план рассмотрения главы и ключевые понятия для обязательного усвоения. Основной текст дополнен историческими замечаниями, акцентирующими внимание студентов на вкладе учёных разных исторических эпох в развитие элементарной математики; указаниями, уточняющими некоторые моменты теории или рекомендующими правила её освоения. Каждая глава содержит вопросы, задания для самостоятельной работы и литературу, рекомендованную для дополнительного изучения по теме.

Планируя изучение элементарной математики с использованием данного учебного пособия, студентам следует систематически обращаться к разделу «Контрольно-измерительные материалы», в который включены вопросы и задания для самостоятельной работы ко всему курсу, задания для индивидуальной работы, темы расчётно-графических работ и вопросы к экзамену.

Для успешного изучения учебной дисциплины «Элементарная математика» необходимо выполнение определённых условий. На лекциях для повышения уровня освоения учебного материала рекомендуется широкое использование интерактивных и мультимедийных технологий обучения. Теоретический материал требует закрепления в процессе анализа и обсуждения программного материала, рефлексии уровня сформированности умений на практических занятиях.

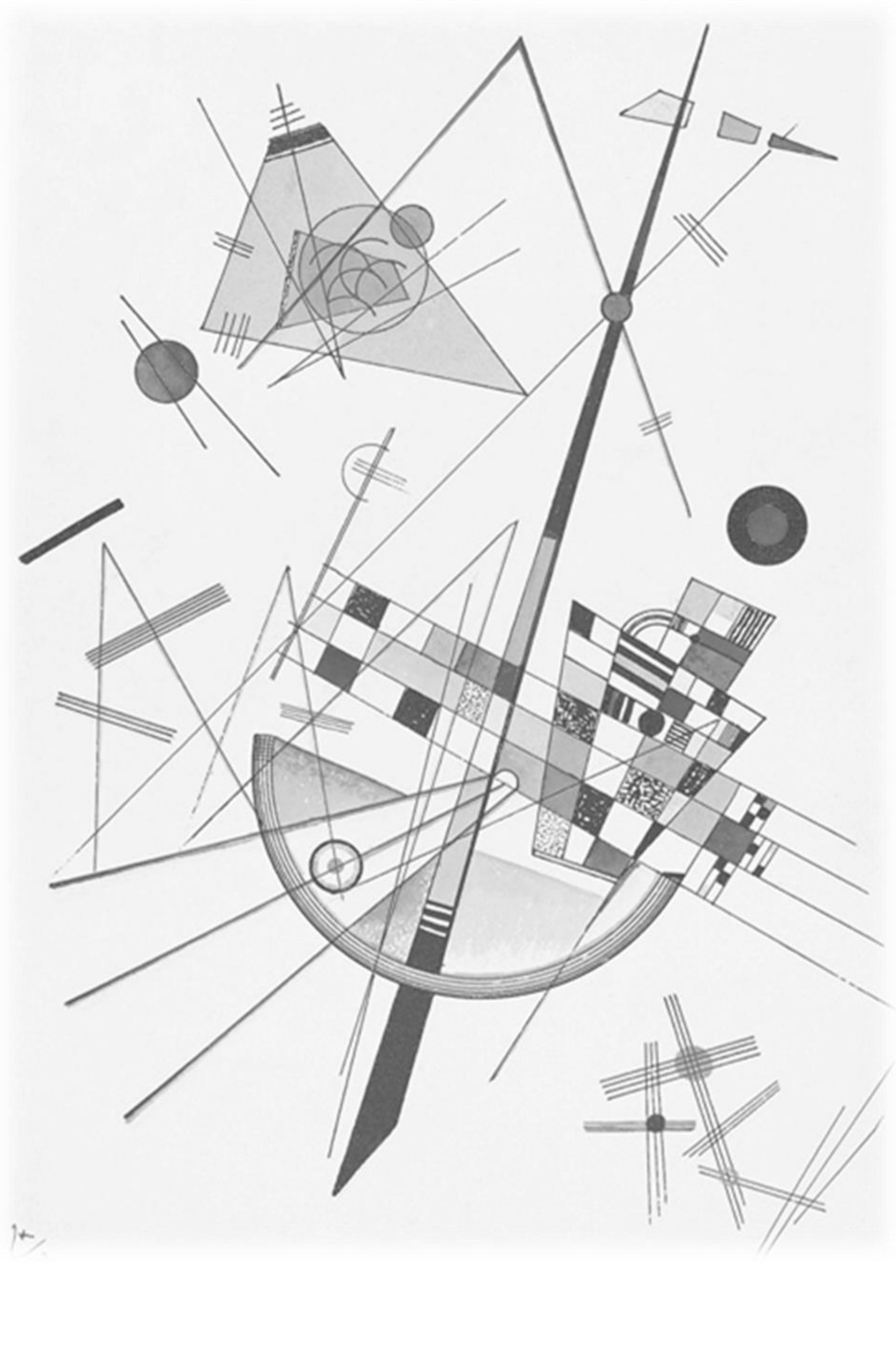
Материалы, предлагаемые в пособии, проверены на практике. В течение пяти лет они использовались автором при чтении лекций и проведения практических занятий на физико-математическом факультете Педагогического института Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых. Опыт подтвердил эффективность применяемых технологий обучения и оценивания результатов освоения учебной дисциплины «Элементарная математика».

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам учебного пособия: профессору, доктору педагогических наук Елене Николаевне Селивёрстовой; кандидату педагогических наук Елене Ивановне Антоновой.

Автор пособия желает читателям удивления и удовольствия от восприятия и изучения великой из наук – математики, вдумчивого чтения математических и историко-математических текстов, при этом учиться чувствовать красоту математических объектов – формул, уравнений, фигур и прочего, тщательно и терпеливо осмысливать теоретические положения для дальнейшего применения в решении разнообразных задач. И, конечно, успехов в освоении элементарной математики!

Раздел I

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ПЛАНИМЕТРИИ



Глава 1
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ И ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ИХ СВОЙСТВА

> Вечность имеет форму треугольника,
> и её легко нарисовать на песке.
> *Милорад Павич*

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: постройте чевиану, установив связь между понятиями «чевиана», «медиана», «биссектриса» и «высота».
Теоретическое задание: перечислите известные вам из школьного курса замечательные линии и точки; повторите теоремы и их доказательства, связанные с ними; предположите свойства чевианы.
План:
1.1. Некоторые замечательные линии и точки треугольника.
1.2. Теорема Чевы и её доказательство.
1.3. Теорема Менелая и её доказательство.
1.4. Применение теорем Чевы и Менелая для решения задач.
1.5. Теорема Стюарта и её доказательство.

Самый простой из многоугольников – треугольник – издавна привлекает внимание геометров. После Евклида красивые теоремы о нём доказывали такие замечательные учёные древности, как Аполлоний, Герон, Менелай и Птолемей. Ближе к нашему времени треугольником увлеклись Эйлер, Понселе, Симсон, Дезарг, Клейн, Адамар. В наши дни треугольник не утратил своей былой красоты. И до сих пор вокруг треугольника есть ещё над чем подумать!

Мы предлагаем продолжить систематическое изучение геометрических структур, возникающих в треугольнике, и их свойств. Перед вами откроются новые страницы геометрии треугольника, и мы надеемся, что они будут весьма увлекательными для вас.

Ключевые понятия

- **биссектриса**
- **высота**
- **медиана**
- **чевиана**
- **инцентр**
- **центроид**
- **ортоцентр**

1.1. Некоторые замечательные линии и точки треугольника

Красивая теорема в геометрии треугольника связана, как правило, с замечательными точками, прямыми или окружностями. Но прямая или окружность замечательна, если содержит какие-нибудь замечательные точки треугольника. Значит, эти точки и являются самыми важными.

Существует много специальных линий и точек, связанных с треугольником, мы ограничимся только небольшим их числом.

Определение. **Биссектрисой треугольника** называют отрезок, являющийся частью биссектрисы угла треугольника и соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне (рис. 1).

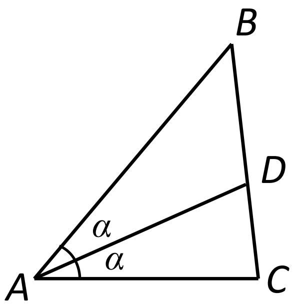


Рис. 1

Три биссектрисы пересекаются в одной точке, которая всегда лежит внутри треугольника. Эта точка является центром вписанной окружности, также её называют *инцентром* треугольника.

Теорема. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Доказательство. Продолжим сторону AC треугольника ABC за точку A. Проведём через точку B прямую, параллельную биссектрисе AD. Обозначим точку пересечения построенных прямых буквой E (рис. 2).

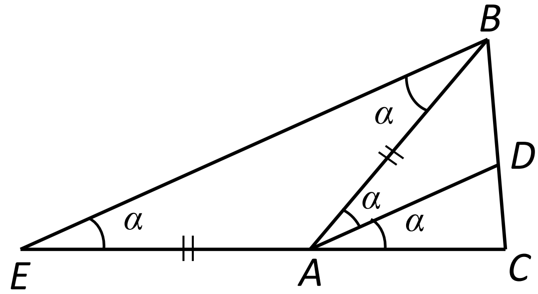


Рис. 2

Докажем, что отрезки AB и AE равны. Для этого заметим, что угол EBA равен углу BAD, поскольку эти углы являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых EB и AD и секущей AB.

Заметим также, что угол BEA равен углу DAC, поскольку эти углы являются соответственными при параллельных прямых EB и AD и секущей EC. Таким образом, угол EBA равен углу BEA, откуда вытекает, что треугольник EAB является равнобедренным, и отрезки AB и AE равны. Отсюда, воспользовавшись теоремой Фалеса, получаем

$$\frac{EA}{AC}=\frac{BD}{DC} \;\Rightarrow\; \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC},$$

что и требовалось доказать.

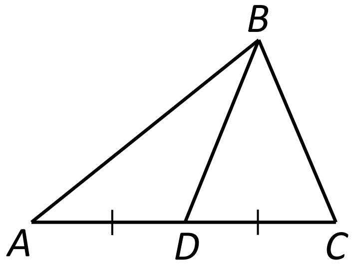


Рис. 3

Определение. **Медианой треугольника** называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 3).

Теорема 1. Медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади (равновеликих треугольника).

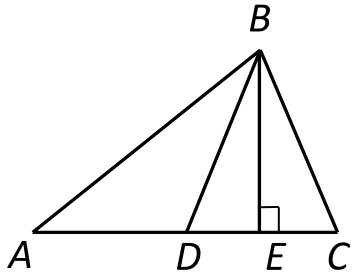


Рис. 4

Доказательство. Проведём из вершины B треугольника ABC медиану BD и высоту BE (рис. 4) и заметим, что $S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}AD\cdot BE, S_{\Delta DBC}=\frac{1}{2}DC\cdot BE.$ Поскольку отрезок BD является медианой, то $AD=DC$, значит, $S_{\Delta ABD}=S_{\Delta DBC}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Медианы треугольника делят треугольник на 6 равновеликих треугольников (рис. 5).

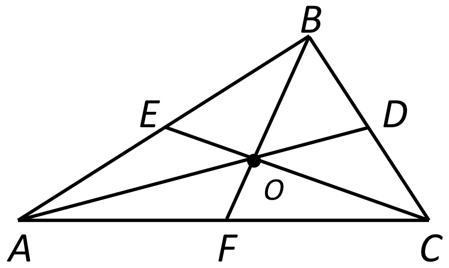


Рис. 5

Теорема 3. Точка пересечения медиан треугольника делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Точку пересечения медиан треугольника называют *центроидом* треугольника.

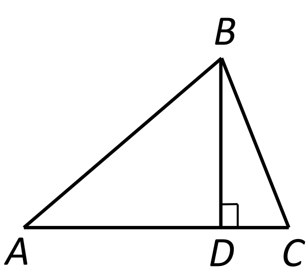


Рис. 6

Определение. **Высотой треугольника** называют перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону треугольника (рис. 6).

Основанием высоты называют основание этого перпендикуляра.

Теорема. Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке (рис. 7).

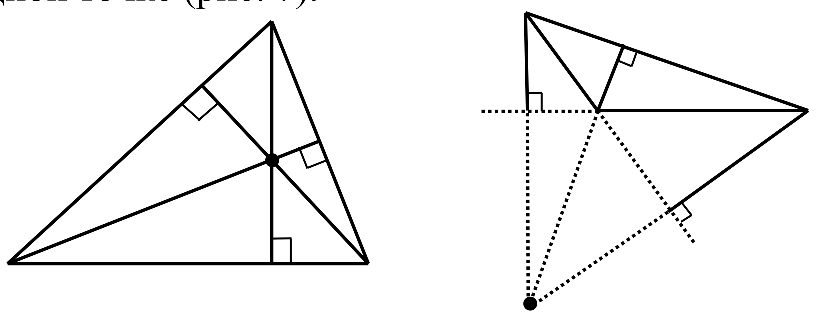


Рис. 7

Точку пересечения высот треугольника (или их продолжений) называют *ортоцентром* треугольника.

Самостоятельно. Определите, как располагаются ортоцентры треугольников различных видов.

Определение. **Серединный перпендикуляр** (или **медиатриса**) – прямая, перпендикулярная к данному отрезку и делящая его на две равные части (рис. 8).

Теорема. Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

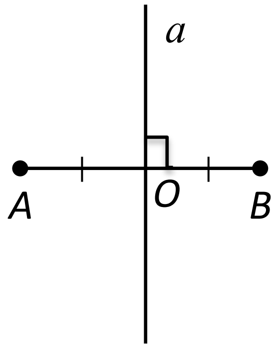


Рис. 8

Теорема. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника (или другого описываемого окружностью многоугольника) пересекаются в одной точке – центре описанной окружности.

У остроугольного треугольника эта точка лежит внутри, у тупоугольного – вне треугольника, у прямоугольного – на середине гипотенузы.

Итак, замечательных точек первого порядка в треугольнике четыре:

1) точка пересечения биссектрис треугольника (рис. 9) – ***центр вписанной окружности (инцентр)***;

2) точка пересечения медиан треугольника (рис. 10) – ***центр тяжести (центроид)***;

3) точка пересечения высот (или их продолжений) треугольника (рис. 11) – ***ортоцентр***;

4) точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника (рис. 12) – ***центр описанной окружности***.

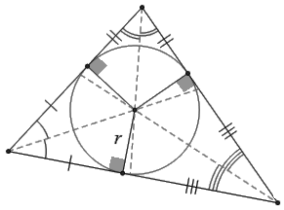


Рис. 9

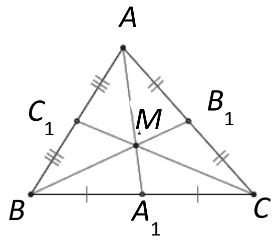


Рис. 10

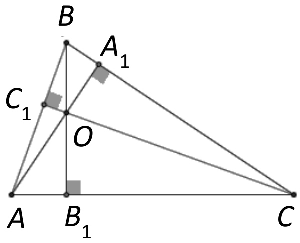


Рис. 11

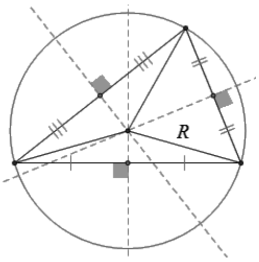


Рис. 12

Самостоятельно. Найдите другие замечательные точки, связанные с треугольником. Их можно считать точками второго порядка, поскольку они являются «производными» от точек первого порядка.

Большинство замечательных точек треугольника могут быть получены при помощи следующей процедуры.

Пусть у нас имеется некоторое правило, согласно которому мы сможем выбрать определённую точку A_1, на стороне BC (или её продолжении) треугольника ABC (например, выберем середину этой стороны). Затем построим аналогичные точки B_1, C_1 на двух других сторонах треугольника (в нашем примере ещё две середины сторон). Если правило выбора удачное, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекутся в некоторой точке Z (выбор середин сторон в этом смысле, конечно, удачный).

Поэтому хотелось бы иметь какой-нибудь общий метод, позволяющий по положению точек на сторонах треугольника определять, пересекается ли соответствующая тройка прямых в одной точке или нет.

Историческое замечание

Универсальное условие, «закрывшее» эту проблему, нашёл в 1678 г. итальянский инженер ***Джованни Чева***.

1.2. Теорема Чевы и её доказательство

Определение. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне или её продолжении, называют **чевианой**.

Теорема Чевы 1. Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 (рис. 13), то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (1)$$

Доказательство необходимости. Докажем, что, если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то выполнено равенство (1). Для этого проведём через точку B прямую, параллельную прямой AC, и обозначим буквами D и Е точки пересечения прямых CC_1 и AA_1 с этой прямой соответственно (рис. 14).

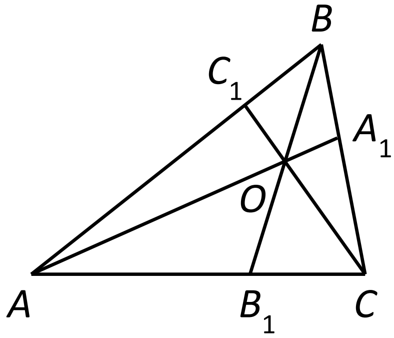


Рис. 13

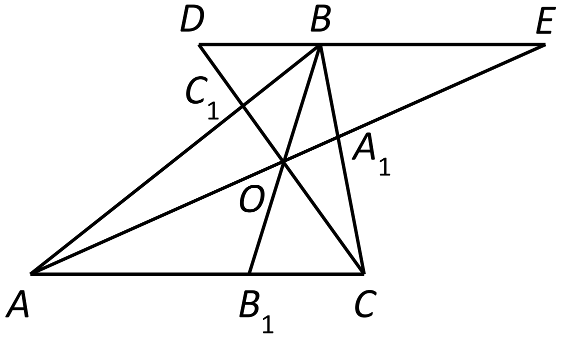


Рис. 14

Треугольник AC_1C подобен треугольнику BC_1D, а треугольник AC_1C подобен треугольнику BA_1E, значит, выполняются равенства

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{DB}, \qquad (2)$$

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BE}{AC}. \qquad (3)$$

Треугольник CB_1O подобен треугольнику DBO, а треугольник AOB_1 подобен треугольнику BOE, то выполняются равенства

$$\frac{CB_1}{OB_1}=\frac{DB}{OB}, \qquad (4)$$

$$\frac{OB_1}{B_1A}=\frac{OB}{BE}. \qquad (5)$$

Следовательно,

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{OB_1}\cdot\frac{OB_1}{B_1A}=\frac{AC}{DB}\cdot\frac{BE}{AC}\cdot\frac{DB}{OB}\cdot\frac{OB}{BE}\Rightarrow\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \quad (6)$$

Доказательство необходимости завершено.

Доказательство достаточности. Докажем, что, если выполнено равенство (1), то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Воспользуемся методом «от противного». С этой целью обозначим буквой O точку пересечения отрезков AA_1 и CC_1 и предположим, что отрезок BB_1 не проходит через точку O (рис. 15).

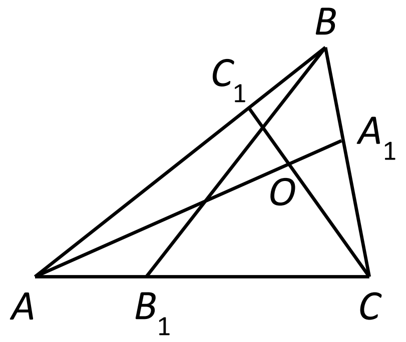


Рис. 15

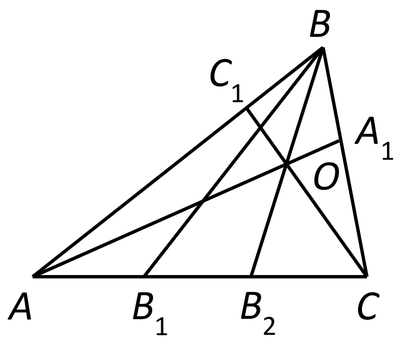


Рис. 16

Проведём через точку O отрезок BB_2 (рис. 16). Поскольку отрезки AA_1, BB_2и CC_1 пересекаются в одной точке, то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1. \tag{7}$$

Кроме того, выполнено равенство (1)

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Разделив равенство (7) на равенство (1), получим

$$\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{B_1A}{CB_1}=1\Rightarrow\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{CB_1}{B_1A}.$$

Из последнего равенства вытекает, что точки B_1 и B_2 совпадают. Доказательство достаточности завершено. Теорема Чевы 1 доказана.

Теорема Чевы 2. Если на продолжениях за точку B сторон AB и CB треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, а на стороне CA взята точка B_1 (рис. 17), то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

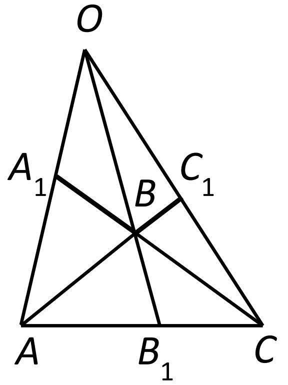


Рис. 17

Указание. А как запомнить, произведение каких именно отношений входит в теорему Чевы? Обойдём все три вершины треугольника по часовой стрелке, стартовав из точки A в точку C, обязательно пройдём точку B. Итак, идём из A в B и образуем дробь, в числителе которой будет AC_1, а в знаменателе – C_1B. Далее идём из B в C, записываем второе отношение, и потом идём из C в A, получаем последнее отношение.

Самостоятельно. Покажите, что эта процедура не зависит от выбора «отправной» вершины и направления обхода, т. е., что всегда будет получаться, по сути, одно и то же равенство.

1.3. Теорема Менелая и её доказательство

Если даны две точки, то можно смело заявить, что они лежат на одной прямой. Но как же выяснить, лежат ли три точки на одной прямой? Доказать принадлежность точек одной прямой можно разными способами, один из них отражён в теореме Менелая. Эта теорема красива и проста, но в школьном курсе затерялась где-то среди задач. Между тем, теорема Менелая входит в золотой фонд древнегреческой математики.

> ***Историческое замечание***
>
> Эта теорема доказывается в третьей книге «Сферики» Менелая Александрийского (ок. 100 г. н. э.). Сначала он доказывает теорему для плоского случая, а потом центральным проектированием переносит её на сферу. Возможно, что плоский случай теоремы рассматривался ранее в несохранившихся «Поризмах» Евклида.

Теорема Менелая 1. Если на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1, а точка B_1 взята на продолжении стороны AC за точку C (рис. 18), то точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (1)$$

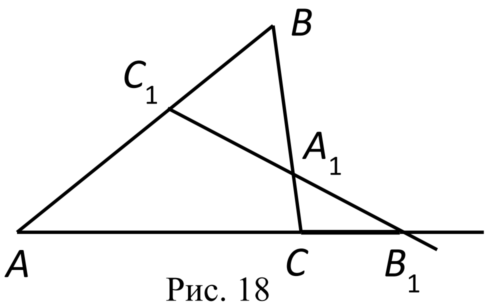


Рис. 18

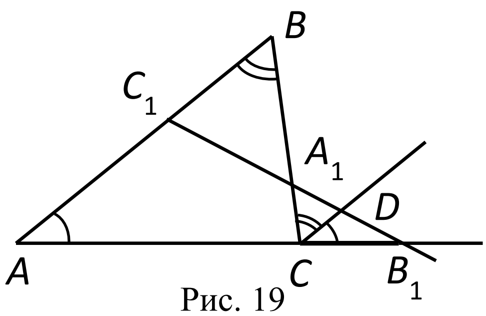


Рис. 19

Доказательство необходимости. Докажем, что если точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой, то выполнено равенство (1). Для этого проведём через точку C прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквой D её точку пересечения с прямой C_1B_1 (рис. 19).

Треугольники AC_1B_1 и CDB_1 подобны, поэтому верно равенство

$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{CD}{CB_1}. \qquad (2)$$

Поскольку треугольник BA_1C_1 подобен треугольнику CA_1D, то выполнено равенство

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{A_1C}{CD}. \tag{3}$$

Перемножая равенства (2) и (3), получим

$$\frac{AC_1}{AB_1} \cdot \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{CD}{CB_1} \cdot \frac{A_1C}{CD} \Rightarrow \frac{AC_1}{AB_1} \cdot \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{A_1C}{CB_1} \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Доказательство необходимости завершено.

Доказательство достаточности. Докажем, что если выполнено равенство (1), то точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой. Воспользуемся методом «от противного». С этой целью проведём прямую через точки C_1 и A_1 и обозначим символом B_2 точку пересечения этой прямой с прямой AC (рис. 20).

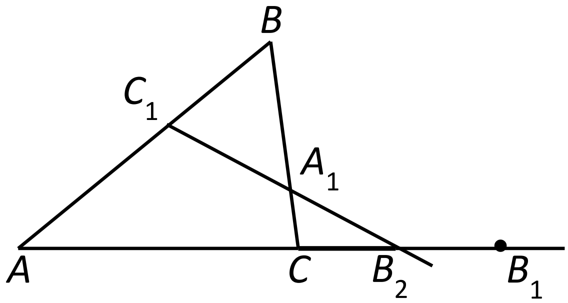


Рис. 20

Поскольку точки C_1, A_1 и B_2 лежат на одной прямой, то выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1. \tag{4}$$

Кроме того, выполнено равенство (1). Поэтому, разделив равенство (4) на равенство (1), получим равенство

$$\frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{B_1A}{CB_1} = 1,$$

следствием которого является равенство

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{CB_1}{B_1A}. \tag{5}$$

Воспользовавшись свойствами производных пропорций, из равенства (5) получаем, что точки B_1 и B_2 совпадают. Доказательство достаточности завершено.

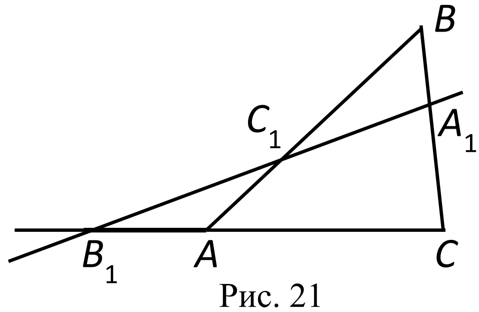


Рис. 21

Теорема Менелая 1 доказана.

Замечание. Если выбрать точку B_1 на продолжении стороны AC за точку A (рис. 21), то доказательство теоремы Менелая 1 практически не изменится (рассмотрите самостоятельно).

Теорема Менелая 2. Если на продолжениях сторон AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 (рис. 22), то точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (6)$$

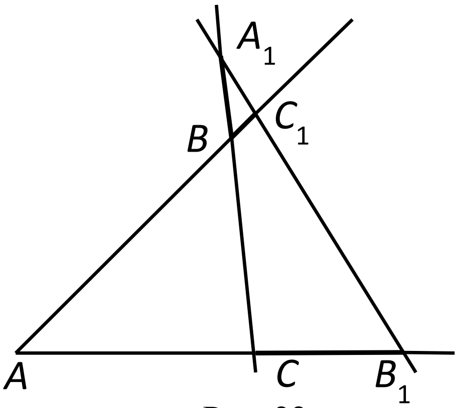


Рис. 22

Самостоятельно. Доказательство теоремы Менелая 2 проведите по аналогии доказательству теоремы Менелая 1. Найдите другие способы доказательства теоремы Менелая. Сравните их, выделяя основу каждого доказательства.

1.4. Применение теорем Чевы и Менелая для решения задач

Рассмотрим вначале задачи на доказательство. Докажем теорему о том, что *медианы треугольника пересекаются в одной точке.* Проведём её доказательство, основанное на теореме Чевы. С этой целью рассмотрим медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC (рис. 23).

Поскольку

$$\frac{AC_1}{C_1B}=1,\quad \frac{BA_1}{A_1C}=1,\quad \frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

то выполнено равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

откуда следует, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

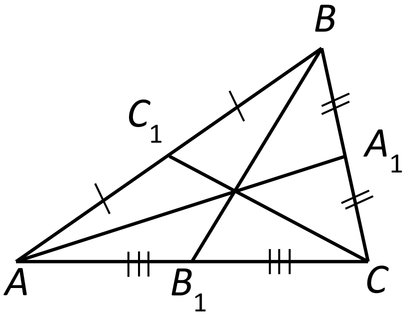


Рис. 23

Докажем теорему о том, что *биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке*, используя теорему Чевы. Для этого рассмотрим биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC (рис. 24).

В соответствии со свойством биссектрисы справедливы равенства

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{BC},\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC},\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC}{AB}.$$

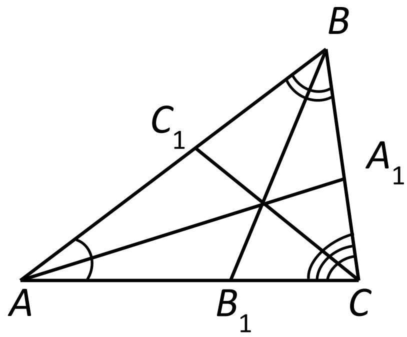


Рис. 24

Если перемножить эти три равенства, то мы получим равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

из которого вытекает, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1пересекаются в одной точке.

Для проведения доказательства теоремы о том, что *высоты треугольника пересекаются в одной точке,* основанного на теореме Чевы, необходимо рассмотреть сначала высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC (рис. 25), а затем высоты AA_1, BB_1 и CC_1 тупоугольного треугольника ABC (рис. 26).

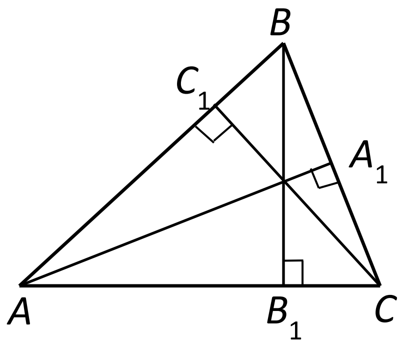


Рис. 25

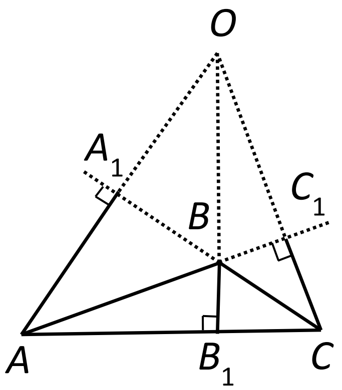


Рис. 26

Самостоятельно. Необходимо ли доказывать теорему о том, что в случае прямоугольного треугольника все высоты пересекаются в одной точке?

Теперь решим задачу на вычисление.

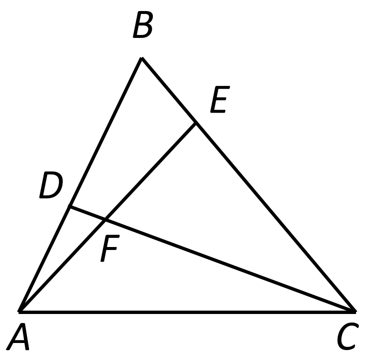


Рис. 27

Задача. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно, причём $AD = \frac{3}{8}AB$, $BE = \frac{1}{5}BC$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F (рис. 27). В каком отношении отрезки AE и CD делятся точкой F?

Решение. Применив к треугольнику BCD теорему Менелая, получим

$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FD} \cdot \frac{DA}{AB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{CF}{FD} \cdot \frac{3}{8} = 1.$$

Выразив из последнего равенства искомое отношение, имеем

$$\frac{CF}{FD} = \frac{32}{3}.$$

Применив к треугольнику ABE теорему Менелая, получим

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BC}{CE}\cdot\frac{EF}{FA}=1 \Rightarrow \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{EF}{FA}=1 \Rightarrow \frac{EF}{FA}=\frac{4}{3}.$$

Ответ:

$$\frac{CF}{FD}=\frac{32}{3}, \qquad \frac{EF}{FA}=\frac{4}{3}.$$

1.5. Теорема Стюарта и её доказательство

Теорема. Произведение квадрата расстояния от точки, лежащей на стороне треугольника (основании), до противоположной вершины на длину этой стороны равно сумме произведений квадратов оставшихся сторон на несмежные с ними отрезки первой стороны без произведения этих отрезков на длину основания.

Историческое замечание

Теорема названа по имени доказавшего её шотландского математика Мэтью Стюарта и опубликовавшего её в труде «Некоторые общие теоремы» (1746, Эдинбург). Теорему сообщил Стюарту его учитель Роберт Симсон, который опубликовал эту теорему лишь в 1749 г.

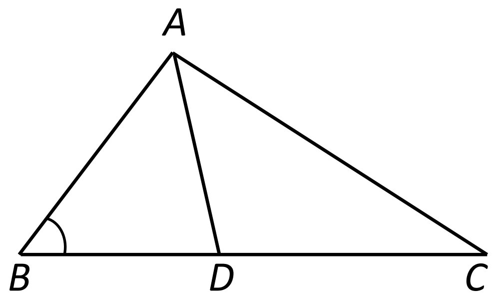


Рис. 28

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 28) и докажем, что $DA^2\cdot BC = AB^2\cdot DC + AC^2\cdot BD - DC\cdot BD\cdot BC$.

1. Рассмотрим $\Delta\, ABC$:

$$\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}.$$

2. Рассмотрим $\Delta\, BAD$:

$$\cos B = \frac{AB^2+BD^2-DA^2}{2AB\cdot BD}.$$

3. Откуда

$$\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{AB^2+BD^2-DA^2}{2AB\cdot BD}.$$

4. Обе части полученного равенства умножим на $2AB$:

$$\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{BC}=\frac{AB^2+BD^2-DA^2}{BD}.$$

5. Применяя свойство пропорции, имеем

$$AB^2 \cdot BD + BC^2 \cdot BD - AC^2 \cdot BD = AB^2 \cdot BC + BD^2 \cdot BC - DA^2 \cdot BC.$$

6. Из полученного равенства выразим искомое произведение $DA^2 \cdot BC = -AB^2 \cdot BD - BC^2 \cdot BD + AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot BC + BD^2 \cdot BC$, тогда $DA^2 \cdot BC = AB^2(BC - BD) - BC \cdot BD(BC - BD) + AC^2 \cdot BD$, т.е.

$$DA^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - DC \cdot BD \cdot BC.$$

Теорема доказана.

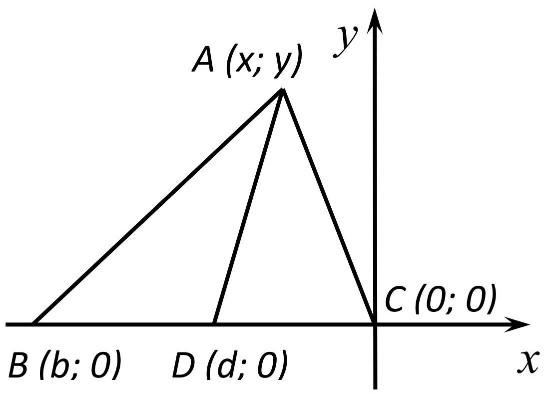


Рис. 29

Самостоятельно. Докажите теорему Стюарта другим способом. Для этого введите прямоугольную систему координат с началом в точке C так, чтобы точка B лежала на оси Cx (рис. 29).

Задания

1. Перечислите замечательные точки и линии треугольника. Выполните их построения с помощью циркуля и линейки.
2. Решите задачи:
   - В треугольнике ABC отрезок AD является биссектрисой, $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см. Найдите AD.
   - В треугольнике ABC отрезок AD является медианой. Известно, что $AB = 12$ см, $BC = 16$ см, $AC = 20$ см. Найдите AD.

Список рекомендуемой литературы

1. Орач, Б. Теорема Менелая / Б. Орач // Квант. – 1991. – № 3. – С. 52 – 55.
2. Рафаилов, Э. Медианы треугольника / Э. Рафаилов // Квант. – 1990. – № 7. – С. 40 – 42.
3. Шарыгин, И. Теоремы Чевы и Менелая / И. Шарыгин // Квант. – 1976. – № 11. – С. 22 – 30.
4. Шарыгин, И. Узнайте точку / И. Шарыгин // Квант. – 1989. – № 9. – С. 52 – 57.
5. Эрдниев, Б. Теоремы Чевы и Менелая / Б. Эрдниев, Н. Манцаев // Квант. – 1990. – № 3. – С. 56 – 59.

Глава 2
НОВЫЕ ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Тот, кто совершает открытие,
видит то, что видят все, и думает то,
что никому не приходит в голову.
Альберт Сент-Дьерди

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: постройте с помощью циркуля и линейки известные вам виды треугольников.
Теоретическое задание: продолжите перечень этих треугольников, используя понятия «высота» и «средняя линия».
План:
2.1. Ортотреугольник и его свойства.
2.2. Серединный треугольник и его свойства.
2.3. Педальный треугольник и его свойства.
2.4. Теорема Нейберга.

По определению треугольник – геометрическая фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Значит, чтобы «открыть» новые виды треугольников, требуется выбрать три «особые» точки и соединить их попарно отрезками.

Ключевые понятия

- **ортотреугольник**
- **серединный треугольник**
- **педальный треугольник**

Историческое замечание

В начале XVIII в. итальянский инженер и математик Фаньяно деи Тоски (1682 – 1766) поставил следующую задачу: «Вписать в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра так, чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала одна вершина треугольника». Ответом к этой задаче стал именно ортотреугольник. А сама задача получила название «задача Фаньяно».

2.1. Ортотреугольник и его свойства

Определение. Пусть дан остроугольный треугольник ABC. Проведём в нём высоты AA_1, BB_1, CC_1. Треугольник $A_1B_1C_1$ называют высотным, или **ортотреугольником** (рис. 30).

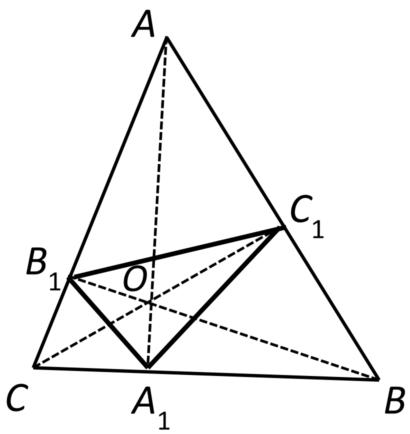


Рис. 30

Замечание. В геометрии существует понятие «ортогональность» – перпендикулярность, отсюда и происходит название треугольника. Точка пересечения высот треугольника – ортоцентр, поэтому треугольник называют ещё ортоцентрическим.

Свойства ортотреугольника

1. Ортотреугольник отсекает треугольники, подобные данному.
2. Две смежные стороны ортотреугольника образуют равные углы с соответствующей стороной исходного треугольника.
3. Высоты треугольника являются биссектрисами ортотреугольника.
4. Ортотреугольник – это треугольник с наименьшим периметром, который можно вписать в этот треугольник (задача Фаньяно).
5. Периметр ортотреугольника равен удвоенному произведению высоты треугольника на синус угла, из которого она исходит.
6. Периметр ортотреугольника равен удвоенной площади, делённой на радиус описанной окружности.

Докажем некоторые из них.

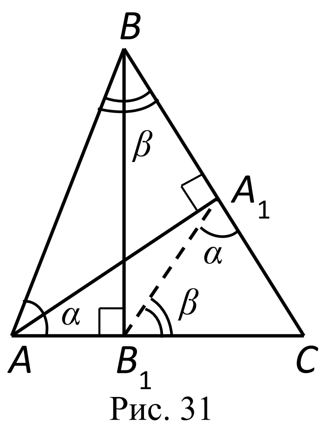


Рис. 31

Теорема. Ортотреугольник отсекает треугольники, подобные данному.

Доказательство. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 (рис. 31). Найдём углы треугольника A_1B_1C, если $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$.

Прямоугольные треугольники AA_1C и BB_1C имеют общий угол при вершине C, они подобны, поэтому $\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$. Из этого равенства следует, что в треугольниках A_1CB_1 и ACB стороны, прилежащие к общему углу при вершине C, пропорциональны. Следовательно, треугольник A_1CB_1 подобен треугольнику ACB по второму признаку подобия.

В подобных треугольниках против соответственных сторон лежат равные углы, поэтому $\angle B_1A_1C = \alpha, \angle A_1B_1C = \beta$.

Аналогично можно доказать подобие треугольников A_1BC_1 и ABC; B_1AC_1 и BAC, если провести высоту CC_1. При этом $\angle BA_1C_1 =$ $= \angle B_1AC_1 = \alpha, \angle A_1BC_1 = \angle AB_1C_1 = \beta$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1 = \angle C$.

Самостоятельно. Сформулируйте утверждение, являющееся следствием данной теоремы. Какой из треугольников, вписанных в данный треугольник, обладает свойством, зафиксированным в следствии?

Теорема. Высоты треугольника являются биссектрисами ортотреугольника.

Доказательство. Будем доказывать это свойство, используя метод вспомогательных окружностей.

Пусть в остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот (рис. 32). Докажем, что точка H пересечения высот треугольника ABC является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

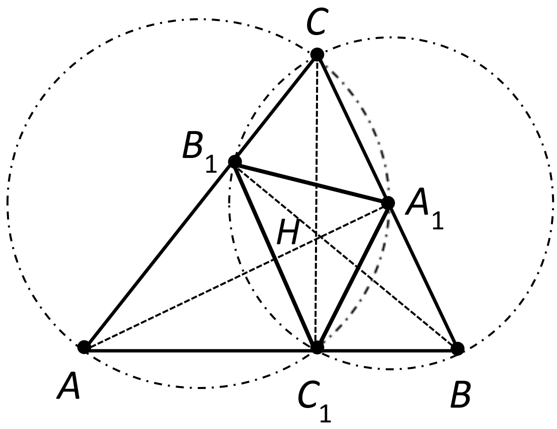


Рис. 32

На сторонах AC и BC треугольника ABC, как на диаметрах, построим окружности. Точки A_1, B_1, C_1 принадлежат этим окружностям. Поэтому $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC$ как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности. $\angle B_1BC = \angle CAA_1$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. $\angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$ как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности.

Следовательно, $\angle B_1C_1C = \angle CC_1A_1$, то есть CC_1 является биссектрисой угла $B_1C_1A_1$. Аналогичным образом показывается, что AA_1 и BB_1 являются биссектрисами углов $B_1A_1C_1$ и $A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Справедливо и обратное утверждение: «Если на сторонах AB, BC, CA остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно, при этом $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и

$\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC».

2.2. Серединный треугольник и его свойства

Определение. Треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника, называется **серединным треугольником**.

На рис. 33 треугольник $A'B'C'$ есть серединный треугольник для треугольника ABC.

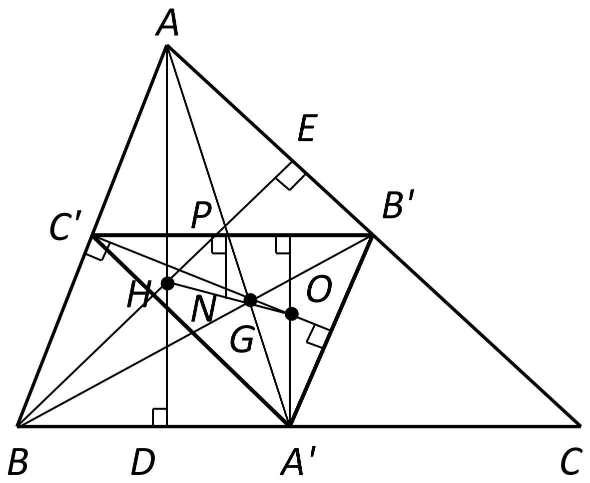


Рис. 33

Рассмотрим две медианы AA' и BB', пересекающиеся в точке G, две высоты треугольника ABC, пересекающиеся в точке H, и две высоты треугольника $A'B'C'$, пересекающиеся в точке O.

Изучая этот рисунок, можно обнаружить много свойств. Во-первых, стороны треугольника $A'B'C'$ параллельны сторонам треугольника ABC, поэтому эти треугольники подобны. Во-вторых, $C'B' = \frac{1}{2}BC$, поэтому отношение длин любых двух соответствующих отрезков (а не только соответствующих сторон) будет равно 1 : 2. Действительно, отрезки $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ разбивают треугольник ABC на четыре равных треугольника, а точка P – середина отрезка $B'C'$– также является и серединой отрезка AA'.

Далее мы видим, что $AC'A'B'$– параллелограмм, следовательно, прямая AA' делит пополам отрезок $B'C'$, поэтому медианы треугольника $A'B'C'$ лежат на медианах треугольника ABC, а это означает, что оба треугольника имеют один и тот же центроид G.

Высоты треугольника $A'B'C'$ (см. рис. 33) являются серединными перпендикулярами сторон AB и BC треугольника ABC. Отсюда следует, что точка O – ортоцентр треугольника $A'B'C'$ – является в то же время и центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Так как точка H – ортоцентр треугольника ABC, а точка O – ортоцентр подобного ему треугольника $A'B'C'$, то $|AH| = 2\,|OA'|$. $|AG| = 2\,|GA'|$. И, наконец, так как оба отрезка, AD и OA', перпендикулярны стороне BC, то они параллельны. Следовательно,

$\angle HAG = \angle OA'G, \triangle HAG \backsim \triangle OA'G$ и $\angle AGH = \angle A'GO.$

Это означает, что точки O, G, H коллинеарны и $|HG| = 2\,|GO'|$, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема. Ортоцентр, центроид и центр описанной окружности произвольного треугольника лежат на одной прямой. Центроид делит расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности в отношении 2 : 1.

Прямая, на которой лежат эти три точки, называется *прямой Эйлера* этого треугольника.

Изучим рис. 33 более тщательно. Мы отметили точку N, где прямая Эйлера HO пересекает прямую, проходящую через точку P, перпендикулярно отрезку $B'C'$. Все три прямые AH, PN и $A'O$, перпендикулярные к отрезку $B'C'$, параллельны. Так как $|AP| = |PA'|$, то прямая PN равноудалена от прямых AH и $A'O$. Следовательно, точка N – середина отрезка HO.

В наших рассуждениях фигурировала сторона $B'C'$ треугольника $A'B'C'$. Проводя аналогичные рассуждения для других сторон этого треугольника, отрезок HO останется тем же, и он будет делиться пополам серединным перпендикуляром к новой стороне. Так как у отрезка HO только одна середина, то можно утверждать, что серединные перпендикуляры всех трёх сторон треугольника $A'B'C'$ будут проходить через точку N. Значит, точка N должна быть центром окружности, описанной вокруг треугольника $A'B'C'$.

Итак, центр окружности, описанной вокруг серединного треугольника, лежит в середине отрезка HO прямой Эйлера исходного треугольника.

Кроме того, так как треугольник $A'B'C'$ подобен треугольнику ABC, то радиус окружности, описанной вокруг серединного треугольника, равен половине радиуса окружности, описанной вокруг исходного треугольника.

Самостоятельно. Найдите другие свойства ортотреугольника и докажите их.

2.3. Педальный треугольник и его свойства

Определение. Пусть P – любая точка внутри данного треугольника ABC (рис. 34), и пусть перпендикуляры, опущенные из точки P на стороны BC, AC, AB треугольника, будут PA_1, PB_1 и PC_1. Треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания этих перпендикуляров, называется **педальным треугольником** треугольника *ABC для педальной точки P*.

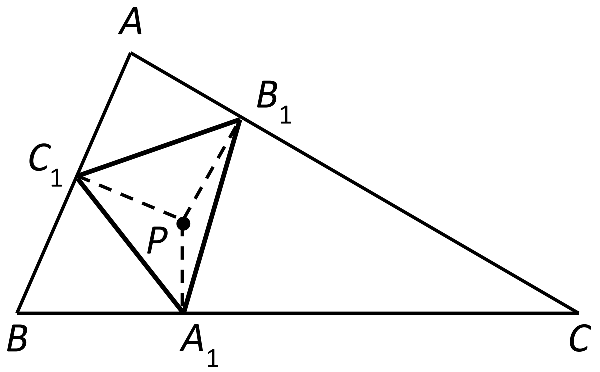


Рис. 34

Свойство 1. Если расстояния от педальной точки до вершин тре-треугольника ABC равны x, y, z, то длины сторон педального треугольника равны

$$\frac{ax}{2R}, \frac{by}{2R}, \frac{cz}{2R},$$

где a, b, c – стороны треугольника ABC, R – радиус окружности, описанной около него.

Доказательство. Около каждого из полученных четырёхугольников AC_1PB_1, BA_1PC_1, CB_1PA_1 можно описать окружность (рис. 35). Прямые углы в точках C_1 и B_1 указывают на то, что эти точки лежат на окружности с диаметром AP. Значит, точка P лежит на окружности, описанной вокруг треугольника AB_1C_1. Аналогично точка P лежит на окружностях, описанных вокруг треугольников CA_1B_1, BC_1A_1.

Опишем окружность около четырёхугольника AC_1PB_1, её диаметром будет AP. Пусть $B_1C_1 = a_1$, тогда на основании теоремы синусов для треугольника C_1AB_1

$$\frac{a_1}{sin\, A} = AP. \qquad (1)$$

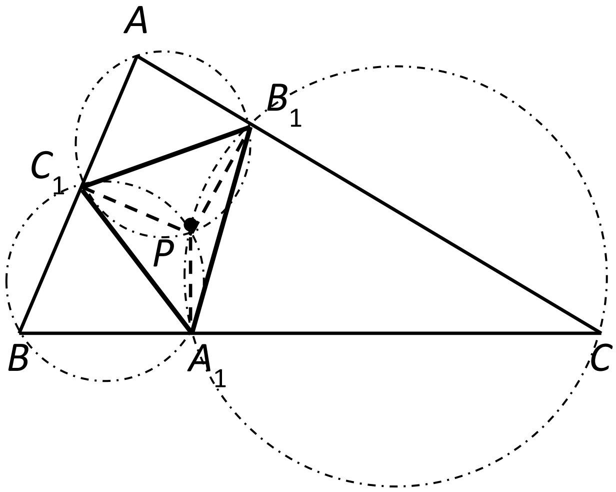


Рис. 35

Применив теорему синусов к треугольнику ABC, получим

$$\frac{a}{sin\, A} = 2R. \qquad (2)$$

Разделив почленно равенство (1) на равенство (2), получим

$$\frac{a_1}{a} = \frac{AP}{2R} \Rightarrow a_1 = \frac{a \cdot AP}{2R}.$$

Аналогично получаем

$$b_1 = \frac{b \cdot BP}{2R};\ c_1 = \frac{c \cdot CP}{2R},$$

где $b_1 = C_1A_1$, $c_1 = B_1A_1$.

Если $AP = x$, $BP = y$, $CP = z$, то длины сторон педального треугольника равны

$$a_1 = \frac{ax}{2R};\quad b_1 = \frac{by}{2R};\ c_1 = \frac{cz}{2R}.$$

Таким образом, свойство 1 доказано.

Свойство 2. Основания перпендикуляров, опущенных из точки на стороны треугольника, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда эта точка лежит на описанной окружности.

> ***Историческое замечание***
>
> Прямая, содержащая эти основания, известна как *прямая Симсона* данной точки относительно данного треугольника. Эта прямая приписывалась Симсону, поскольку казалась типичной для его геометрических идей. Но историкам не удалось найти её в работах учёного. В действительности она была открыта в 1797 г. Вильямом Уоллесом.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда точка P лежит на окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 36). Для определённости будем считать, что точка P лежит на дуге CA, не содержащей точку B. Точки A_1, B_1 и C_1 – основания перпендикуляров, поэтому углы A_1, B_1 и C_1 – прямые. Тогда точка P находится также на окружностях, описанных вокруг треугольников A_1BC_1, A_1B_1C и $A\,B_1C_1$.

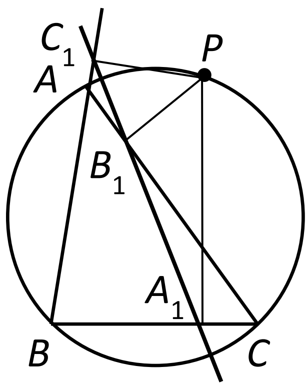


Рис. 36

Поэтому $\angle APC = 180° - \angle B = \angle C_1PA_1$ и, вычитая $\angle APA_1$, выводим, что $\angle A_1PC = \angle C_1PA$.

Но так как точки A_1, C, P и B_1 лежат на окружности, то $\angle A_1PC = \angle A_1B_1C$, и так как точки B, A, P и C лежат на окружности, то $\angle C_1PA = \angle C_1B_1A$. Таким образом, $\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A$.

Отсюда следует, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, в этом случае педальный треугольник «вырождается». Наоборот, если точка P расположена так, что педальный треугольник ABC вырождается, то, очевидно, что точка P должна лежать внутри одного из углов треугольника ABC и вне противолежащей ему стороны.

Переобозначив вершины, мы можем предположить, что этот «один угол» является углом B и что точка C_1 лежит на продолжении стороны BA за точку A (см. рис. 36). Повторяя проведённые выше рассуждения об углах в обратном порядке, мы получим, что точка P лежит на описанной окружности.

Следовательно, свойство 2 доказано.

Замечание. Требование, чтобы педальная точка находилась внутри треугольника, можно ослабить, запретив лишь этой точке лежать на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

2.4. Теорема Нейберга

Решим задачу, в которой рассматриваются педальные треугольники педальных треугольников.

На рис. 37 внутренняя точка P использована для определения первого педального треугольника $A_1B_1C_1$ для треугольника ABC. Эта же точка P снова использовалась для определения педального треугольника $A_1B_1C_1$, который обозначен через $A_2B_2C_2$ (второй педальный треугольник для треугольника ABC). Третья операция даёт треугольник $A_3B_3C_3$ – педальный треугольник для треугольника $A_2B_2C_2$. Естественно, что и для «третьего педального треугольника» использовалась та же самая точка P.

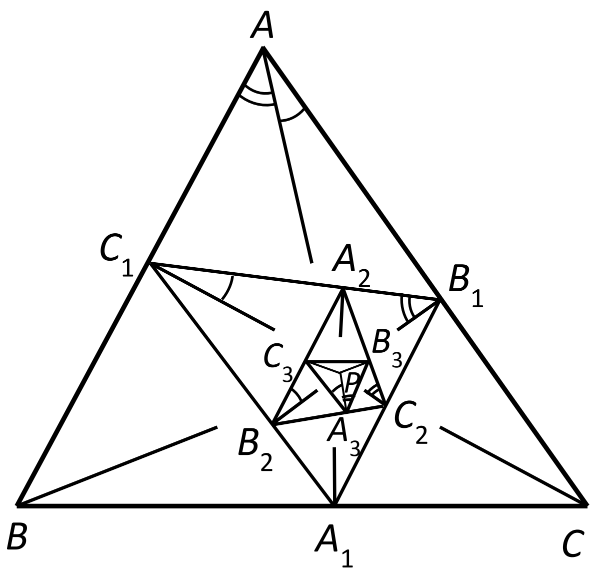


Рис. 37

В этих терминах открытие Нейберга можно выразить следующим образом.

Теорема. Третий педальный треугольник подобен исходному.

Доказательство. Его можно провести удивительно просто, стоит лишь соединить точки P и A (см. рис. 37). Если рассмотреть окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, $A_2B_1C_2$, $A_3B_3C_2$, $A_2B_2C_1$ и $A_3B_2C_3$, то точка P принадлежит каждой из них, поэтому

$$\angle C_1AP = \angle C_1B_1P = \angle A_2B_1P = \angle A_2C_2P = \angle B_3C_2P = \angle B_3A_3P$$

и

$$\angle PAB_1 = \angle PC_1B_1 = \angle PC_1A_2 = \angle PB_2A_2 = \angle PB_2C_3 = \angle PA_3C_3.$$

Другими словами, две части, на которые прямая AP делит угол A (обозначенные на чертеже одинарной и двойной дугами), имеют двойников: одна – при вершине B_1, а другая – при вершине C_1, далее – при вершинах C_2 и B_2 и, наконец, обе – при вершине A_3.

> ***Историческое замечание***
>
> Впервые теорема появилась в 1892 г., когда была добавлена редактором Ж. Нейбергом в шестое издание классического труда Джона Кейси. Это свойство продолжающихся педальных треугольников было обобщено доктором А. Оппенгеймом, проректором Малайского университета в Сингапуре, он установил, что n-й педальный треугольник любого n-угольника подобен первоначальному n-угольнику.

Следовательно, треугольник ABC и треугольник $A_3B_3C_3$ имеют равные углы при вершинах A и A_3. Аналогично, они имеют равные углы при вершинах B и B_3. Теорема доказана.

Задания

1. Сформулируйте определения и докажите свойства ортотреугольника, серединного треугольника и педального треугольника.
2. Постройте ортотреугольник, серединный треугольник и педальный треугольник с помощью циркуля и линейки.

Список рекомендуемой литературы

1. Вагутен, В. Средние линии / В. Вагутен // Квант. – 1989. – № 6. – С. 46 – 51.
2. Егоров, А. Ортоцентрический треугольник / А. Егоров // Квант. – 2001. – № 4. – С. 36 – 38.
3. Жуков, А. В. Несостоявшаяся замечательная точка / А. В. Жуков, С. В. Дворянинов // Математика в школе. – 2012. – № 3. – С. 50 – 53.
4. Коксетер, Гарольд. Новые встречи с геометрией / Гарольд Коксетер, Самуэль Грейтцер. – М. : Наука, 1978. – 224 с.

Глава 3
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ОКРУЖНОСТИ

Есть в математике нечто,
вызывающее человеческий восторг.
Феликс Хаусдорф

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: изобразите всевозможные конфигурации из окружностей и многоугольников.
Теоретическое задание: сколько точек определяют окружность; назовите известные виды окружностей; найдите новые окружности.
План:
3.1. Обобщённая теорема синусов.
3.2. Вписанная и вневписанная окружности.
3.3. Формула Эйлера.
3.4. Окружность девяти точек. Прямая Эйлера.

В первой главе мы назвали прямую или окружность замечательной, если она содержит какие-нибудь замечательные точки треугольника. Рассмотрим некоторые из таких окружностей и прямых.

3.1. Обобщённая теорема синусов

Теорема: Для любого треугольника (рис. 38) справедливы равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Ключевые понятия

- **вписанная окружность**
- **вневписанная окружность**
- **формула Эйлера**
- **окружность девяти точек**

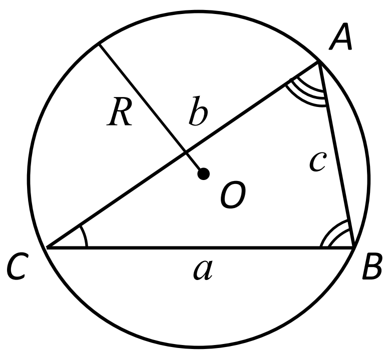


Рис. 38

Доказательство. Докажем сначала, что длина хорды окружности радиуса R, на которую опирается вписанный угол величины φ, вычисляется по формуле

$$l = 2R\,sin\,\varphi. \quad (1)$$

Рассмотрим сначала случай, когда одна из сторон вписанного угла является диаметром окружности (рис. 39).

Угол MPN опирается на диаметр, значит, является прямым углом, и равенство (1) вытекает из определения синуса угла прямоугольного треугольника.

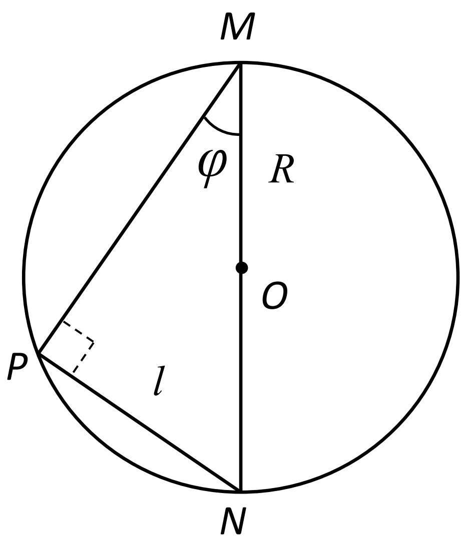


Рис. 39

Поскольку все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны, то для произвольного вписанного угла всегда найдётся равный ему вписанный угол, у которого одна из сторон является диаметром окружности.

Формула (1) доказана.

Из формулы (1) для вписанного треугольника ABC (см. рис. 38) получаем

$$\begin{cases} a = 2R\,sin\,A \\ b = 2R\,sin\,B \\ c = 2R\,sin\,C \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{a}{sin\,A} = \frac{b}{sin\,B} = \frac{c}{sin\,C} = 2R.$$

Теорема синусов доказана.

3.2. Вписанная и вневписанная окружности

Определение. **Вписанной в треугольник окружностью** называют окружность, которая касается всех его сторон.

Для определения центра вписанной в треугольник окружности пользуются свойством биссектрисы угла.

Теорема. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Доказательство. Пусть окружность с центром в точке O вписана в угол с вершиной A. Пусть B и C – точки касания окружности с прямыми b и a соответственно. Соединим точки B и C с центром O окружности. $OB \perp b$ и $OC \perp a$ и $OB = OC = R$. Таким образом, точка O равноудалена от сторон угла на расстояние, равное радиусу окружности, и принадлежит биссектрисе и только ей.

Пусть теперь AMN – данный треугольник, а O – центр вписанной в него окружности. По определению окружность одновременно вписана в каждый угол треугольника и её центр лежит на биссектрисах его углов. Следовательно, точка O лежит на пересечении всех трёх биссектрис углов треугольника.

Определение. **Вневписанная окружность** – окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других его сторон (рис. 40).

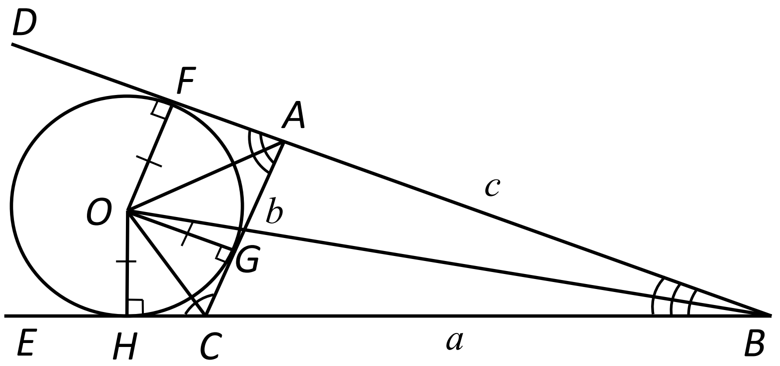


Рис. 40

Теорема. Расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности с продолжением его боковой стороны равно полупериметру.

Доказательство. Рассмотрим рис. 40 и докажем, что

$$BF = \frac{a+b+c}{2} \text{ и } BH = \frac{a+b+c}{2},$$

где a, b, c – стороны треугольника ABC.

Действительно, отрезки AG и AF равны как отрезки касательных к окружности, выходящих из точки A. Отрезки CG и CH равны как отрезки касательных к окружности, выходящих из точки C. Отрезки BF и BH равны как отрезки касательных к окружности, выходящих из точки B. Отсюда получаем

$$\begin{cases} BF = BA + AF = BA + AG \\ BH = BC + CH = BC + CG \\ \qquad BF = BH \end{cases} \Rightarrow$$

$$BF = BH = \frac{1}{2}(BA + AG + BC + CG) = \frac{a+b+c}{2} = \frac{p}{2},$$

где p – полупериметр треугольника ABC.

Примечание: точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника делит его периметр пополам: $|AB| + |AG| = p$.

Следствие. $AG = p - AB = p - c$, $CG = p - AC = p - b$.

Теорема. Радиус вневписанной окружности, проведённый к стороне b, вычисляется по формуле $r_b = \frac{S}{p-b}$, где S – площадь треугольника ABC.

Доказательство. Рассматривая рис. 40, заметим, что

$$S = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BFO} + S_{\Delta BHO} - S_{\Delta AFO} - S_{\Delta AGO} - S_{\Delta CGO} - S_{\Delta CHO} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot FB + \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot BH - \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot AF - \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot AG - \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot CG -$$
$$- \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot p + \frac{1}{2} \cdot r_b \cdot p - \frac{1}{2} \cdot r_b (AF + AG + CG + CH) =$$
$$= r_b \cdot p - \tfrac{1}{2} \cdot r_b \cdot 2b = r_b (p - b).$$

Следовательно, справедливо равенство $r_b = \frac{S}{p-b}$, что и требовалось доказать.

Самостоятельно. Выразите радиусы других вневписанных в треугольник ABC окружностей.

Теорема. Для вписанной в треугольник окружности справедливо равенство: $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, выражающее зависимость между её радиусом и радиусами вневписанных в него окружностей.

Доказательство. Используя формулы $r_a = \frac{S}{p-a}$, $r_b = \frac{S}{p-b}$, $r_c = \frac{S}{p-c}$, где S – площадь треугольника ABC, получаем

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S}.$$

Зная, что радиус вписанной окружности вычисляется по формуле $r = \frac{S}{p}$, получаем $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$, что и требовалось доказать.

Теорема. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$, где r – радиус вписанной окружности; r_a – радиус вневписанной окружности, проведённый к стороне a; r_b – радиус вневписанной окружности, проведённый к стороне b; r_c – радиус вневписанной окружности, проведённый к стороне c.

Самостоятельно. Установите зависимость между радиусами окружностей: вневписанных, вписанной в треугольник ABC и описанной около треугольника ABC.

3.3. Формула Эйлера

Теорема. Квадрат расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей равен разности квадрата радиуса описанной окружности и удвоенного произведения радиусов этих окружностей

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Доказательство:

1. Рассмотрим треугольник ABC и построим биссектрису угла A. Она пересекает описанную окружность в точке D.

2. Построим новую окружность с центром в точке D, проходящую через вершину B (рис. 41). Оказывается, при этом она пройдёт и через вершину C. Это легко понять: дуги BD и DC равны, поэтому и расстояния от точки D до двух вершин равны.

Удивительнее другое: точка пересечения окружности с биссектрисой совпадает с центром O вписанной окружности!

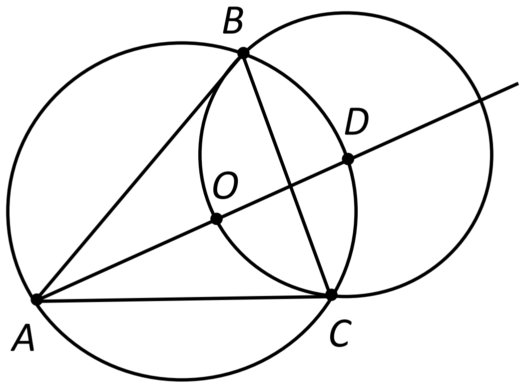


Рис. 41

3. *Дополнительная теорема.* Пусть в треугольнике ABC точка O – центр вписанной окружности, а точка D лежит на пересечении биссектрисы угла A с описанной окружностью. Тогда окружность с центром D, проходящая через вершину B, проходит и через точку O.

А. Чтобы доказать теорему, покажем, что $BD = OD$, т.е. что тругольник BDO является равнобедренным (рис. 42). Для этого вычислим его углы. Введём традиционные обозначения для углов треугольника ABC: α, β и γ соответственно. Заметим, что угол BDO опирается на дугу AB как и угол ACB. Поэтому $\angle BDO = \angle ACB = \gamma$.

Б. Осталось вычислить два других угла треугольника BDO. Найдём угол OBD, который состоит из двух углов. Один из них опирается на половину дуги, стягиваемой хордой AC, и поэтому равен $\frac{\beta}{2}$. Другой угол опирается на дугу DC, т.е. на половину дуги, стягиваемой хордой BC, и поэтому равен $\frac{\alpha}{2}$.

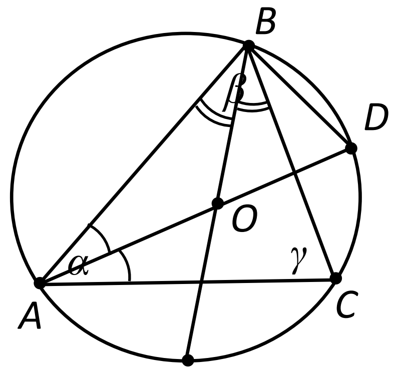


Рис. 42

В. Итак, $\angle OBD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

Г. Поскольку на все три угла треугольника BDO приходится 180°, то

$$\angle BOD = 180° - \gamma - (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \angle OBD.$$

Д. Поэтому треугольник OBD действительно равнобедренный.

Теорема доказана.

Формула Эйлера. Напомним, что центр описанной окружности треугольника лежит на пересечении его серединных перпендикуляров, а центр вписанной окружности – на пересечении его биссектрис. Для радиусов этих окружностей существуют стандартные обозначения: r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности. Расстояние между центрами окружностей традиционно обозначается буквой d.

Доказательство формулы Эйлера.

Найдём произведение отрезков AO и OD двумя способами. В первом способе используется один из «законов сохранения» геометрии: если вращать хорду вокруг какой-то точки внутри окружности, то произведение отрезков хорды остаётся постоянным.

Значит, мы можем провести через точку O хорду так, как нам удобно – произведение будет таким же.

1. Проведём хорду через центр описанной окружности O_1 – получится диаметр описанной окружности (рис. 43).

2. Точка O делит этот диаметр на два отрезка: один имеет длину $R + d$, а другой длину $R - d$ (напомним, что $d = OO_1$ – расстояние

между центрами окружностей). Поэтому произведение этих отрезков равно $R^2 - d^2$ (эта величина уже напоминает формулу Эйлера).

3. Теперь найдём произведение отрезков AO и OD непосредственно. Для этого вычислим длины отрезков AO и OD.

Посмотрим на треугольник AOE (рис. 44). Из определения синуса сразу получаем, что $AO = \frac{r}{sin\frac{\alpha}{2}}$. Длина другого отрезка вычисляется в два шага:

а) по дополнительной теореме (см. стр. 36) $OD = BD$;

б) по теореме синусов для треугольника ABD, вписанного в большую окружность, $OD = BD = 2R \cdot sin\frac{\alpha}{2}$.

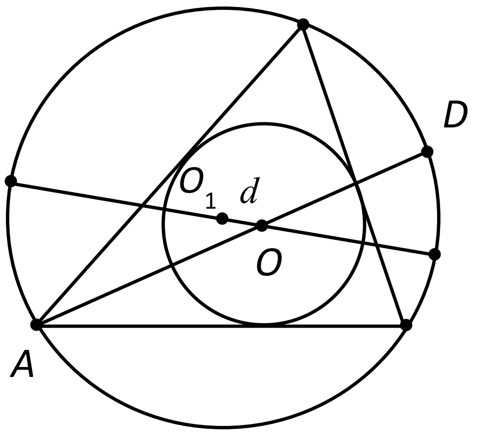


Рис. 43

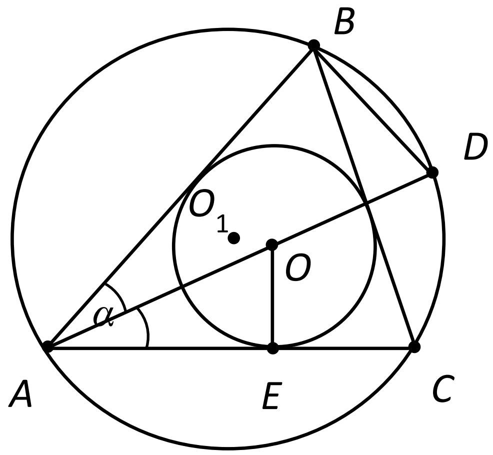


Рис. 44

4. Перемножив полученные выражения для AO и OD, получим, что $AO \cdot OD = 2Rr$.

5. Значит, $R^2 - d^2 = 2Rr$, и формула Эйлера доказана.

3.4. Окружность девяти точек. Прямая Эйлера

Теорема. Основания высот, основания медиан и точки, расположенные на серединах отрезков от ортоцентра до вершин треугольника, лежат на одной окружности – *окружности девяти точек* (так называемой *окружности Эйлера*).

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC (рис. 45) H – точка пересечения высот треугольника; точки A_1, B_1, C_1 обозначают основания высот; A_2, B_2, C_2 – середины соответствующих сторон; A_3, B_3,

C_3 – середины отрезков AH, BH и CH. Тогда точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности – окружности девяти точек.

Историческое замечание

Леонард Эйлер в 1765 г. доказал, что основания высот и середины сторон лежат на одной окружности. Первое полное доказательство общего результата было, по-видимому, опубликовано Карлом Фейербахом в 1821 г. (вместе с теоремой, носящей его имя), но есть указания на то, что оно было известно и ранее.

Так как A_3B_2 – средняя линия треугольника AHC, то $A_3B_2 \parallel CC_1$. B_2A_2 – средняя линия треугольника ABC, значит, $B_2A_2 \parallel AB$.

Поскольку $CC_1 \perp AB$, то $\angle A_3B_2A_2 = 90°$. Аналогично $\angle A_3C_2A_2 = 90°$. Поэтому точки A_2, B_2, C_2, A_3 лежат на одной окружности с диаметром A_2A_3. Так как $AA_1 \perp BC$, то точка A_1 также принадлежит этой окружности. Таким образом, точки A_1 и A_3 лежат на окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$. Аналогично доказывается, что точки B_1 и B_3, C_1 и C_3 лежат на этой окружности. Значит, все девять точек лежат на одной окружности.

Теорема доказана.

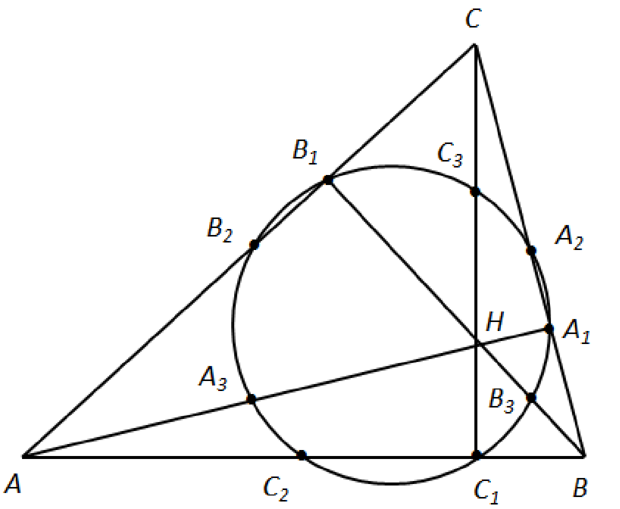


Рис. 45

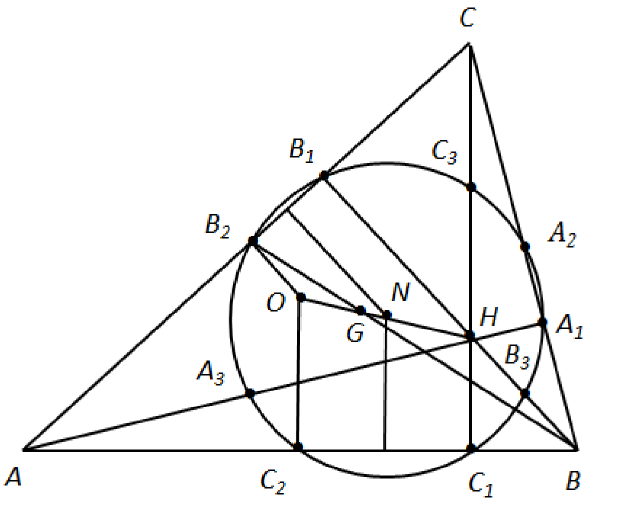


Рис. 46

Теорема. В треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр окружности девяти точек лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера. При этом центр окружности девяти точек лежит посередине между центром пересечения высот и центром описанной окружности.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности; G – точка пересечения медиан, H – точка пересечения высот (рис. 46).

Рассмотрим гомотетию с центром в точке G и коэффициентом 0,5. Она переводит вершины A, B, C треугольника ABC соответственно в точки A_2, B_2, C_2, высоты треугольника ABC – в серединные перпендикуляры к сторонам этого же треугольника, точку пересечения высот H – в точку пересечения серединных перпендикуляров O.

Значит, точки O, G, H лежат на одной прямой.

Покажем, что середина N отрезка OH является центром окружности девяти точек. C_1C_2 – хорда окружности девяти точек, поэтому серединный перпендикуляр к этой хорде является диаметром и пересекает OH в середине N. Аналогично, серединный перпендикуляр к хорде B_1B_2 является диаметром и пересекает OH в той же точке N.

Значит, N – центр окружности девяти точек.

Теорема доказана.

Задания

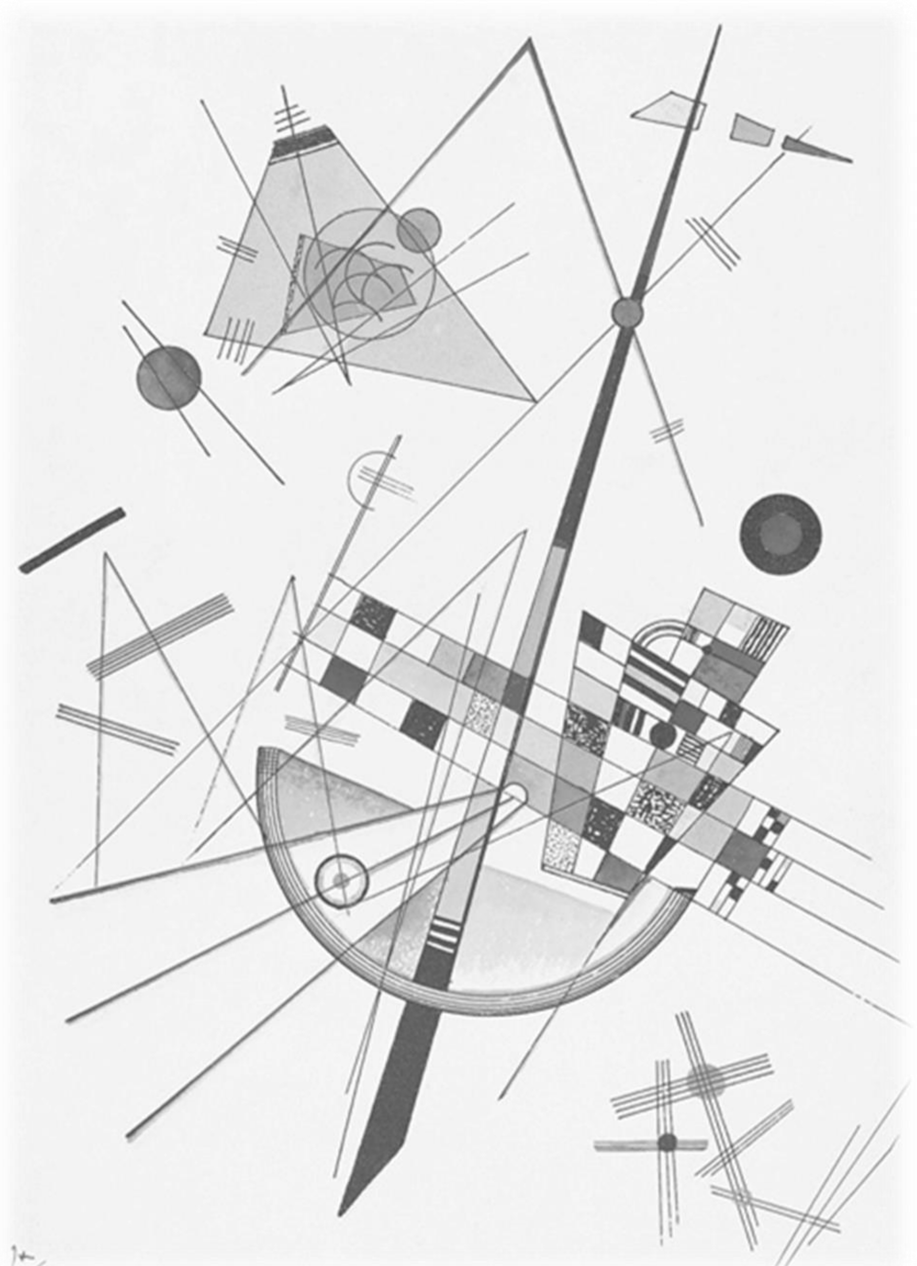
1. Постройте с помощью циркуля и линейки вневписанную окружность треугольника, окружность и прямую Эйлера.
2. Решите задачу на применение формулы Эйлера.
   Прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей треугольника, перпендикулярна одной из его биссектрис. Отношение расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей к радиусу описанной окружности равно h. Найдите углы треугольника.

Список рекомендуемой литературы

1. Билецкий, Ю. О пользе вневписанных окружностей / Ю. Билецкий, Г. Филипповский // Квант. – 2001. – № 2. – С. 28.
2. Биссектрисы, вписанная и вневписанные окружности треугольника // Квант. – 1989. – № 7. – С. 40 – 41.
3. Готман, Э. Прямая Эйлера / Э. Готман // Квант. – 1975 . – № 2. – С. 20 – 25.
4. Шарыгин, И. Окружность девяти точек и прямая Эйлера / И. Шарыгин, А. Ягубьянц // Квант. – 1981. – № 8. – С. 34 – 37.

Раздел II

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ СТЕРЕОМЕТРИИ



Глава 1
ТРЁХГРАННЫЕ УГЛЫ (ТРИЭДРЫ)

Лучший способ изучить что-либо –
это открыть самому.
Джордж Пойа

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: выполните из бумаги модель двугранного и трёхгранного углов.
Теоретическое задание: сформулируйте признаки равенства трёхгранных углов и сравните их с признаками равенства треугольников.
План:
1.1. Трёхгранный угол. Полярный трёхгранный угол.
1.2. Теоремы о трёхгранных углах.
1.3. Теорема косинусов для трёхгранного угла.
1.4. Теорема синусов для трёхгранного угла.

Двугранный угол является пространственным аналогом угла на плоскости. Напомним, что углом на плоскости называется фигура, образованная двумя лучами этой плоскости с общей вершиной и частью плоскости, ограниченной этими лучами. Будем считать аналогом точки на плоскости прямую в пространстве и аналогом луча на плоскости полуплоскость в пространстве. Тогда, по этой аналогии, двугранным углом в пространстве называют фигуру, образованную двумя полуплоскостями, с общей ограничивающей их прямой, и частью пространства, ограниченной этими полуплоскостями. Полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

Ключевые понятия

- **трёхгранный угол**
- **полярный трёхгранный угол**
- **теорема косинусов для трёхгранного угла**
- **теорема синусов для трёхгранного угла**

Используя метод аналогии, введём понятие трёхгранного угла и рассмотрим его свойства (чьим пространственным аналогом в этом случае будет трёхгранный угол?).

1.1. Трёхгранный угол. Полярный трёхгранный угол

Определение. **Трёхгранным углом** (**триэдром**) называется фигура, образованная тремя лучами, исходящими из одной точки и не лежащими в одной плоскости, тремя частями плоскостей, заключённых между этими лучами и частью пространства, ограниченной ими.

Указанная выше точка называется *вершиной* угла, лучи – его *рёбрами*, части плоскостей – *гранями* трёхгранного угла. Грани – суть плоские углы, называют *плоскими углами* данного трёхгранного угла. Углы между плоскими гранями называются *двугранными углами* данного трёхгранного угла.

На рис. 47 изображён трёхгранный угол $OABC$ *(или* $Oabc$*);* O *– его вершина;* OA, OB, OC *(или* a, b, c*) – его ребра;* OAB, OBC, OCA *(или* Oab, Obc, Oca*) – его грани;* $\angle BOC$, $\angle AOC$, $\angle AOB$ *(или* $\angle bc$, $\angle ac$, $\angle ab$*) – его плоские углы;* α, β, γ *– меры соответственных плоских углов;* $B\underline{OA}C$, $A\underline{OB}C$, $A\underline{OC}B$ *– его двугранные углы;* $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ *– меры двугранных углов, соответственно противолежащих плоским углам меры* α, β, γ.

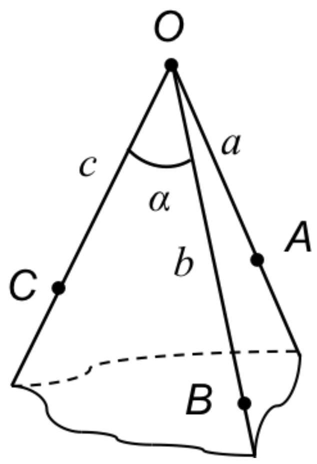


Рис. 47

Самостоятельно. Рассмотрите вертикальные триэдры и смежные триэдры, выполните их изображения. Сформулируйте и докажите их свойства.

Полярные триэдры. Построим три луча a, b, c, имеющие своё начало во внутренней точке O' данного трёхгранного угла $Oabc$ и перпендикулярные соответственно граням Obc, Oca, Oab этого трёхгранного угла (рис. 48).

Построенный трёхгранный угол $O'a'b'c'$ называется полярным данному трёхгранному углу $Oabc$. Вершина O трёхгранного угла $Oabc$ лежит внутри трёхгранного угла $O'a'b'c'$, а ребра a, b, c перпендикулярны соответственно граням $O'b'c'$, $O'c'a'$, $O'a'b'$.

Следовательно, трёхгранный угол $Oabc$ также поляρен углу $O'a'b'c'$. Эти трёхгранные углы (триэдры) *взаимно полярны.* Выбор точки O несуществен, поскольку два трёхгранных угла, полярных данному, совмещаются друг с другом параллельным переносом.

Итак, трёхгранный угол $O'A'B'C'$ называется *полярным* (дополнительным) углом по отношению к данному трёхгранному углу $OABC$, если его ребра OA', OB', OC' удовлетворяют условиям: $OA' \perp OBC$, $OB' \perp OAC$, $OC' \perp OAB$ и, кроме того, углы AOA', BOB', COC' – тупые. Трёхгранный угол $OABC$ – полярный по отношению к трёхгранному углу $O'A'B'C'$.

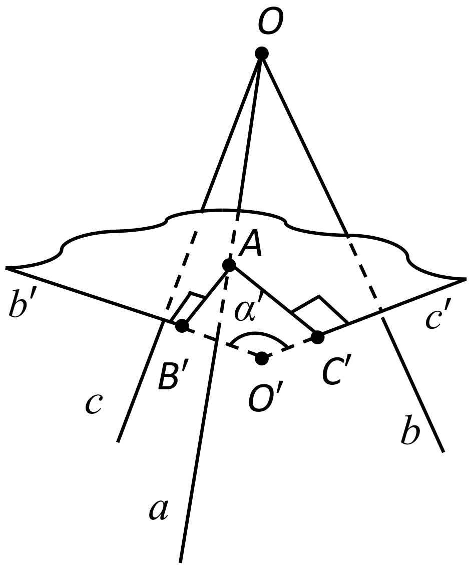


Рис. 48

Плоские и двугранные углы двух взаимно полярных трёхгранных углов находятся в определённой зависимости.

Принцип полярности. Сумма радианных мер плоского угла трёхгранного угла и соответствующего ему двугранного угла полярного трёхгранного угла равна π.

Доказательство:

Действительно, на рис. 48 $a \cap (O'b'c') = A$, $b' \cap (Oca) = B'$, $c' \cap (Oab) = C'$. Тогда в четырёхугольнике $O'B'AC'$ углы $AB'O'$ и $AC'O'$ – прямые и $\angle B'AC' = \angle A, \angle B'AO'C' = \alpha'$.

Поэтому $\angle A + \alpha' = \pi$ и аналогично $\angle B + \beta' = \pi, \angle C + \gamma' = \pi$. В силу взаимной полярности триэдров $\angle A' + \alpha = \pi$, $\angle B' + \beta = \pi$, $\angle C' + \gamma = \pi$.

1.2. Теоремы о трёхгранных углах

Признаки равенства трёхгранных углов.

Два трёхгранных угла равны, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) два плоских угла и двугранный угол, заключённый между ними, одного из них соответственно равны двум плоским углам и двугранному углу, заключённому между ними, другого;

2) один из плоских углов и прилежащие к нему двугранные углы одного из них соответственно равны одному из плоских углов и прилежащим к нему двугранным углам другого;

3) три плоских угла одного из них соответственно равны трём плоским углам другого;

4) три двугранных угла одного из них соответственно равны трём двугранным углам другого.

Самостоятельно. Докажите сформулированные выше признаки равенства двух трёхгранных углов.

Неравенства для трёхгранных углов

1. Сумма плоских углов трёхгранного угла.

Эта сумма, очевидно, непостоянна. Однако она меньше 2π:

$$\alpha + \beta + \gamma < 2\pi.$$

2. Аналог неравенства треугольника.

Сумма любых двух плоских углов трёхгранного угла больше третьего плоского угла:

$$\alpha + \beta > \gamma, \quad \beta + \gamma > \alpha, \quad \alpha + \gamma > \beta.$$

Следствие. Величина каждого плоского угла трёхгранного угла больше разности величин двух других его плоских углов:

$$\alpha > |\beta - \gamma|, \ \beta > |\alpha - \gamma|, \ \gamma > |\alpha - \beta|.$$

3. Сумма двугранных углов трёхгранного угла.

Сумма двугранных углов трёхгранного угла удовлетворяет неравенству:

$$\pi < \angle A + \angle B + \angle C < 3\pi.$$

Самостоятельно. Проведите доказательство свойств трёхгранных углов.

1.3. Теорема косинусов для трёхгранного угла

Первая теорема косинусов. Если α, β, γ – меры плоских углов трёхгранного угла, а $\angle A$ – мера двугранного угла, противолежащего плоскому углу с мерой α, то

$$\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos\angle A.$$

Доказательство:

1. Отложим на рёбрах трёхгранного угла отрезки OA, OB, OC длины 1 и рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ (рис. 49).

2. Проведём перпендикуляры BM и CN к прямой OA.

3. Тогда $NC = \sin\beta$, $MB = \sin\gamma$ и $\angle(MB, NC) = \angle A$.

4. Так как $\overrightarrow{OM} \parallel \overrightarrow{OA}$, то

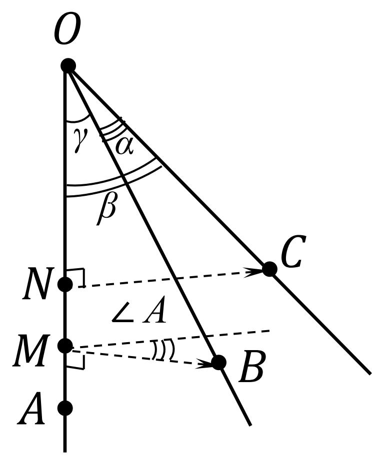


Рис. 49

$$\overrightarrow{OM} = \left(\pm\,\overrightarrow{OM}\right)\cdot\,\overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OB}\cdot cos\,\gamma\right)\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}\cdot cos\,\gamma,$$

здесь $\pm\,\overrightarrow{OM}$ означает, что $\overrightarrow{OM}$ либо сонаправлен с $\overrightarrow{OA}$, либо противоположно направлен $\overrightarrow{OA}$.

5. Аналогично $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA}\cdot cos\,\beta$.

6. Поэтому $\overrightarrow{OB} = \left(\,\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}\,\right) = \overrightarrow{OA}\cdot cos\,\gamma + \overrightarrow{MB}$,

$\overrightarrow{OC} = \left(\,\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}\,\right) = \overrightarrow{OA}\cdot cos\,\beta + \overrightarrow{NC}$.

7. Перемножим скалярно эти равенства. Учитывая, что $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{NC}\perp\overrightarrow{OA}$, получим $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = cos\,\beta\cdot cos\,\gamma\cdot\overrightarrow{OA}^2\ + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NC}$.

Итак, $cos\,\alpha = cos\,\beta\cdot cos\,\gamma + sin\,\beta\cdot sin\,\gamma\cdot cos\angle\,A$.

Лемма. Сумма мер соответствующих углов двух взаимно полярных трёхгранных углов равна $180°$.

Если $\beta\,'$– плоский угол полярного угла, $\angle\,B$ – соответствующий двугранный угол данного трёхгранного угла, то $\beta\,' = 180° - \angle\,B$ и $\angle\,B = 180° - \beta\,'$.

Вторая теорема косинусов. Если $\angle\,A$, $\angle\,B$, $\angle\,C$ – меры соответствующих двугранных углов трёхгранного угла $OABC$, то

$$cos\angle\,A = -\,cos\angle\,B\cdot cos\angle\,C + sin\angle\,B\cdot sin\angle\,C\cdot cos\,\alpha.$$

Доказательство:

1. Применим первую теорему косинусов к трёхгранному углу $O'A'B'C'$, полярному данному:

$$cos\,\alpha\,' = cos\,\beta'\cdot cos\,\gamma' + sin\,\beta'\cdot sin\,\gamma\,'\cdot cos\angle\,A'\,.$$

2. Используя лемму, выполним подстановки $\alpha\,' = \pi\,-\angle\,A$, $\beta\,' =\ \pi\ -\angle\,B, \gamma\,' =\ \pi\ -\angle\,C, \angle\,A'\ =\ \pi\ -\alpha$, получаем

$$-\,cos\angle\,A\ =\ cos\angle\,B\cdot cos\angle\,C\ -\ sin\angle\,B\cdot sin\angle\,C\ \cdot cos\,\alpha,$$

что эквивалентно

$$cos\angle\,A\ = -\,cos\angle\,B\cdot cos\angle\,C +\ sin\angle\,B\cdot sin\angle\,C\cdot cos\,\alpha.$$

1.4. Теорема синусов для трёхгранного угла

Теорема. Синусы двугранных углов трёхгранного угла пропорциональны синусам его противолежащих плоских углов.

Если $\alpha =\ \angle\,BOC, \beta = \angle\,COA, \gamma = \angle\,AOB$ – плоские углы, а $\angle\,A$, $\angle\,B$, $\angle\,C$ – меры соответствующих двугранных углов данного трёхгранного угла OAB, то

$$\frac{sin\angle\,A}{sin\,\alpha} = \frac{sin\angle\,B}{sin\,\beta} = \frac{sin\angle\,C}{sin\,\gamma}.$$

Доказательство:

1. Выразим из первой теоремы косинусов $cos\angle A$:

$$cos\angle A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

2. Тогда

$$1 - cos^2\angle A = \frac{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma - (\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma)^2}{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}.$$

3. Разделив это равенство на $sin^2\alpha$, после очевидных преобразований получим

$$\frac{\sin^2\angle A}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}.$$

4. Величины α, β, γ входят в правую часть этого равенства равноправно (симметрично). Поэтому оно останется истинным при круговой замене букв $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$ и соответственно $A \to B \to$ $\to C \to A$.

Следовательно, $\frac{\sin^2\angle A}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\angle B}{\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\gamma}$.

5. Поскольку каждый из углов принадлежит промежутку $(0;\ \pi)$, то справедливо равенство

$$\frac{\sin\angle A}{\sin\alpha} = \frac{\sin\angle B}{\sin\beta} = \frac{\sin\angle C}{\sin\gamma},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотренные выше теоремы косинусов и синусов для триэдров справедливы и для сферического треугольника (рис. 50).

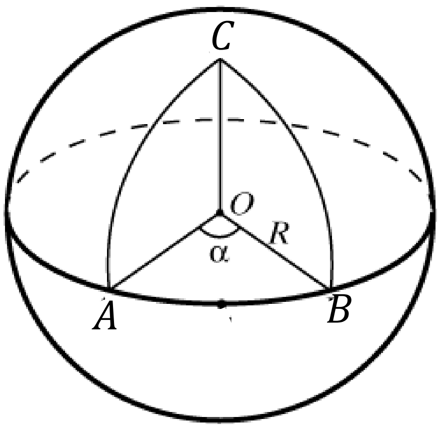


Рис. 50

Соотношения между величинами углов и длинами сторон сферического треугольника изучаются в сферической тригонометрии. Её основы были заложены греческим математиком и астрономом Гипархом во II в. до н. э. Важный вклад в её развитие внесли такие античные учёные, как Менелай Александрийский и Клавдий Птолемей. Как самостоятельная дисциплина сферическая тригонометрия сформировалась благодаря работам таких учёных, как Сабит ибн Корра, Ибн Ирак, Кушьяр ибн Лаббан, Абу-л-Вафа, ал-Бируни, Джабир ибн Афлах, ал-Джайяни, Насир ад-Дин ат-Туси.

История сферической тригонометрии в Европе связана с трудами таких учёных, как Региомонтан, Николай Коперник, Франческо Мавролико.

Весьма интересен прямоугольный сферический треугольник с прямым углом при одной из вершин.

Так, формула $cos\ c = cos\ a \cdot cos\ b$ – это «сферическая теорема Пифагора», выражающая гипотенузу через катеты. Другая интересная формула, не имеющая аналога в евклидовой геометрии, выражает гипотенузу через прилежащие к ней углы: $cos\ c = ctg\ a \cdot ctg\ b$.

Задания

1. Рассмотрите частные случаи второй теоремы косинусов для трёхгранного угла (аналоги теоремы Пифагора для триэдров соответственно с прямым двугранным углом и прямым плоским углом).
2. Докажите следствия из теоремы синусов для трёхгранного угла о постоянстве произведений: синуса двугранного угла и синусов заключающих его плоских углов; синуса плоского угла и синусов прилежащих к нему двугранных углов; синуса угла между двумя рёбрами триэдра и синуса угла наклона третьего ребра к плоскости первых двух.
3. Решите задачи:
   а) в правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ плоский угол при вершине имеет величину a. Найдите величины двугранных углов при боковом ребре и при основании;
   б) плоские углы трёхгранного угла $Oabc$ равны α, β, γ. Найдите угол между ребром a и биссектрисой l угла α.

Список рекомендуемой литературы

1. Ивлев, Б. Двугранные и трёхгранные углы / Б. Ивлев // Квант. – 1984. – № 12. – С. 23 – 26.
2. Рыжик, В. И. Опять об углах. Угол двугранный / В. И. Рыжик // Математика для школьников. – 2009. – № 2. – С. 43 – 54.
3. Рыжик, В. И. Опять об углах. Угол двугранный / В. И. Рыжик // Математика для школьников. – 2009. – № 3. – С. 35 – 41.
4. Рыжик, В. И. Опять об углах. Угол двугранный / В. И. Рыжик // Математика для школьников. – 2009. – № 4. – С. 35 – 45.

Глава 2
МНОГОГРАННИКИ

> Гениальные математики предлагают теорему,
> талантливые её доказывают.
> *Жак Адамар*

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: изготовьте из бумаги модели правильных многогранников, используя их развёртки.
Теоретическое задание: изучите два доказательства теоремы Эйлера.
План:
2.1. Многогранные поверхности.
2.2. Многогранники и их классификация.
2.3. Теорема о медианах и бимедианах тетраэдра.
2.4. Теорема Эйлера и её доказательство.

Математические теоремы опираются на такой логический процесс, что, доказанные однажды, они остаются истинными до скончания веков. Зададимся вопросом: «Что легче – открыть теорему или её доказать?».

В математике много примеров, что одну и ту же теорему открывают или (и) доказывают разные учёные. Но достаточно часто некоторые математики формулируют проблемы, ставят интересные задачи, высказывают только гипотезы, другие – уточняют и продолжают поиск их подтверждения, формулируя теоремы и оформляя их доказательства. Многие любят доказывать одну теорему разными способами. И лишь немногие выстраивают целые теории, обобщая и систематизируя, совершенствуя и развивая накопленный предшественниками опыт математической деятельности.

Ключевые понятия

- **многогранные поверхности**
- **призма**
- **пирамида**
- **медиана тетраэдра**
- **бимедиана тетраэдра**
- **теорема Эйлера**

Поэтому можно сказать, что открытие и доказательство теорем в математике – «коллективное творчество». Этим творчеством можете заняться и вы. «Молодые люди должны доказывать теоремы …», – заметил Г. Г. Харди в своей книге «Апология математика»[1]. Поверьте, это увлекательная деятельность может принести радость познания и удовольствие от самого процесса и достигнутого вами результата.

2.1. Многогранные поверхности

Определение. **Поверхностью** называют множество последовательных положений линий, перемещающихся в пространстве.

Эта линия может быть прямой или кривой и называется *образующей* поверхности. Если образующая – кривая, она может иметь постоянный или переменный вид.

Перемещается образующая по *направляющим*, представляющим собой линии иного направления, чем образующие. Направляющие линии задают закон перемещения образующих. При перемещении образующей по направляющим создаётся *каркас поверхности*, представляющий собой совокупность нескольких последовательных положений образующих и направляющих. Рассматривая каркас, можно убедиться, что образующие l и направляющие m можно поменять местами, но при этом поверхность получается одна и та же.

В зависимости от формы образующей все поверхности можно разделить на *линейчатые,* у которых образующая – прямая линия, и *нелинейчатые,* у которых образующая – кривая линия. В линейчатых поверхностях выделяют поверхности *развёртывающиеся*, совмещаемые всеми своими точками с плоскостью без разрывов и складок, и *неразвёртывающиеся,* которые нельзя совместить с плоскостью без разрывов и складок.

К развёртывающимся поверхностям относятся поверхности всех многогранников, цилиндрические, конические и торсовые поверхности. Все остальные поверхности – неразвёртывающиеся. Нелинейчатые поверхности могут быть с образующей постоянной формы (поверхности вращения и трубчатые поверхности) и с образующей переменной формы (каналовые и каркасные поверхности).

[1] Апология математика = A mathematician's apology / Г. Г. Харди ; пер. с англ. Ю. А. Данилова; с предисл. Ч. П. Сноу. Изд. 2-е. М. : Едиториал УРСС, 2005. 128 с. ISBN 5-354-00959-6.

К *гранным* относятся поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей l по ломаной направляющей m.

При этом, если одна точка S образующей неподвижна, создаётся пирамидальная поверхность (рис. 51), если образующая при перемещении параллельна заданному направлению S, то создаётся призматическая поверхность (рис. 52).

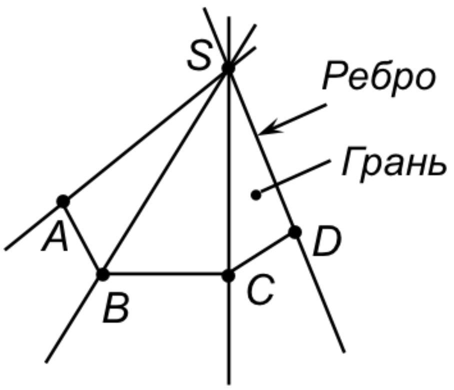


Рис. 51

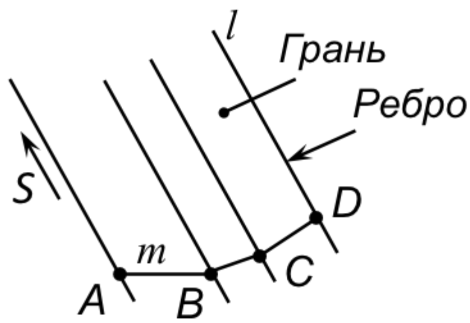


Рис. 52

Элементами гранных поверхностей являются: вершина S (для призматической поверхности она находится в бесконечности), грань (часть плоскости, ограниченная одним участком направляющей m и крайними относительно него положениями образующей l) и ребро (линия пересечения смежных граней).

2.2. Многогранники и их классификация

Определения. **Многогранником** называется тело, ограниченное со всех сторон плоскостями. Другое определение: замкнутая гранная поверхность, образованная некоторым числом (не менее четырёх) граней, называется многогранником.

Всякий отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не лежащие в одной грани, называется *диагональю многогранника*. Всякая плоскость, проходящая через три вершины, не лежащие в одной грани, называется *диагональной плоскостью*.

Многогранник называется **выпуклым**, если он весь расположен по одну сторону от плоскости любой его грани, продолженной неограниченно.

Элементы многогранника. Части плоскости, ограничивающие многогранник, называются его *гранями*. Каждая грань, будучи ограничена линиями пересечения с соседними гранями, представляет собой многоугольник; стороны этих многоугольников называются *рёбрами* многогранника; каждое ребро служит общей стороной для двух граней. Вершины тех же многоугольников называются *вершинами* многогранника; каждая из них служит общей вершиной нескольких граней (самое меньшее трёх) и в то же время вершиной многогранного угла, образованного этими гранями.

Выпуклый многогранник имеет своими гранями выпуклые многоугольники; многогранный угол, образованный гранями выпуклого многогранника, примыкающими к одной вершине, будет всегда выпуклым.

Классификация многогранников. В планиметрии многоугольники классифицируют по числу их сторон. Подобная классификация непригодна для многогранников, потому что в двух многогранниках с одним и тем же числом граней эти грани могут быть расположены совершенно по-разному: так будет, например, в случае многогранников, представленных на рис. 53 и имеющих по шесть граней каждый.

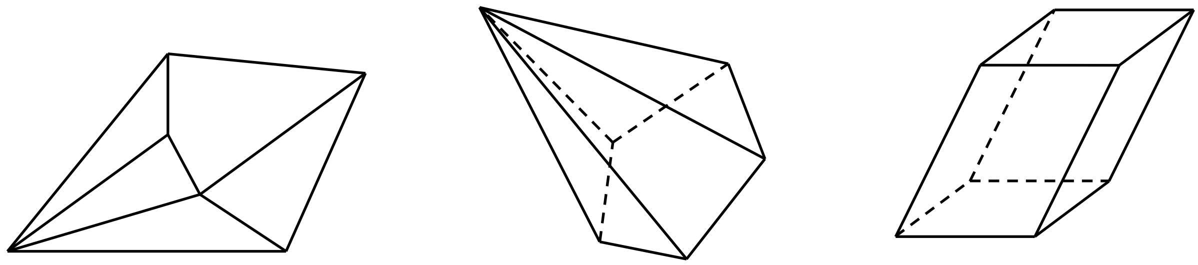


Рис. 53

Самостоятельно. Почему среди многогранников выделяют призмы и пирамиды?

Определения. **Призмой** называется многогранник, ограниченный призматической поверхностью и двумя плоскостями, параллельными между собой (но не параллельными рёбрам призматической поверхности). Другое определение: призмой называется многогранник, у которого основание – два одинаковых и взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани – параллелограммы. Грани, лежащие в этих последних плоскостях, называются *основаниями призмы*; грани, принадлежащие призматической поверхности, – *боковыми гранями*; рёбра призматической поверхности – боковыми рёбрами призмы.

Высотой призмы называется расстояние между плоскостями её оснований.

Виды призм. Призма называется *прямой*, если её основаниями служат перпендикулярные сечения призматической поверхности. В этом случае высотой призмы служит, конечно, её боковое ребро.

Призмы можно классифицировать по числу боковых граней, равному числу сторон многоугольника, служащего её основанием. Таким образом, призмы могут быть треугольные, четырёхугольные, пятиугольные и т. д.

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы.

У этого многогранника есть важное свойство: *каждый параллелепипед можно рассматривать как призму тремя различными способами, так как за основания можно принять каждые две противоположные грани (грани $ABCD$ и $A'B'C'D'$, или $ABA'B'$ и $CDC'D'$, или $BCB'C'$ и $ADA'D'$).*

Прямым параллелепипедом называется параллелепипед, являющийся одновременно и прямой призмой, т. е. параллелепипед, боковые рёбра которого перпендикулярны к плоскости основания.

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основаниями которого служат прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед представляет собой прямую призму, какую бы из его граней мы не приняли за основание, так как каждое его ребро перпендикулярно к рёбрам, выходящим с ним из одной вершины. Следовательно, оно же будет перпендикулярно и к плоскостям граней, определяемых этими рёбрами. Длины трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, из которых никакие два не параллельны между собой (например, трёх рёбер, выходящих из одной вершины), называются его *измерениями*.

Самостоятельно. Можно ли прямой, но не прямоугольный параллелепипед рассматривать как прямую призму только одним способом?

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, все три измерения которого равны между собой, так что все его грани – квадраты. Наклонный параллелепипед, у которого все рёбра равны между собой и углы всех граней равны или дополнительны, называется *ромбоэдром*.

Основные теоремы

- Основания призмы являются равными многоугольниками.
- Все боковые грани призмы – параллелограммы, а все боковые рёбра равны между собой.
- Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.
- Все грани параллелепипеда являются параллелограммами.
- Два прямоугольных параллелепипеда, имеющих соответственно равные измерения, равны между собой (два куба, рёбра которых равны между собой, равны).
- Все грани ромбоэдра – равные ромбы.

Особое место среди многогранников занимают пирамиды.

Определения. **Пирамидой** называется многогранник, ограниченный пирамидальной поверхностью и плоскостью, пересекающей её. Другие определения. Пирамидой называется многогранник, все грани которого, кроме одной, имеют общую вершину (называемую вершиной пирамиды). Это определение, очевидно, равносильно следующему: пирамида есть тело, получающееся от сечения многогранного угла, плоскостью, пересекающей все его рёбра. Пирамидой называется многогранник, в основании которого лежит произвольный многоугольник, а боковые грани – треугольники с общей вершиной S.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания (рис. 54).

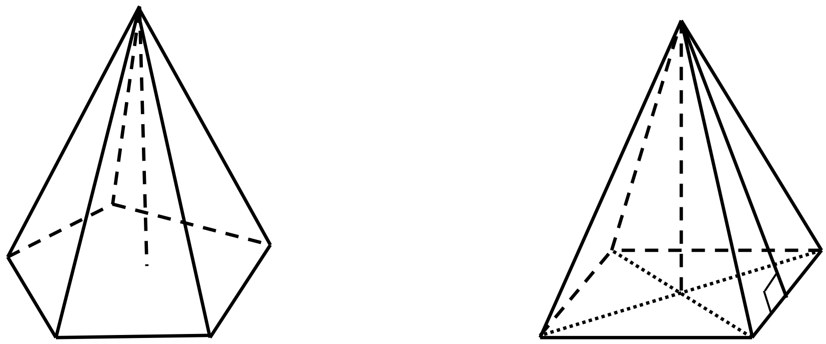


Рис. 54

Правильной пирамидой называется пирамида, у которой основанием служит правильный многоугольник, а высота проецируется в центр основания. Высота какого-либо из этих треугольников, опущенная из вершины пирамиды, называется *апофемой правильной пирамиды*. Очевидно, что пирамида вполне определяется своим основанием и своей вершиной: все её боковые грани суть треугольники, у которых вершины совпадают с вершиной пирамиды, а основаниями служат стороны основания пирамиды.

Виды пирамид. Пирамиды разделяются по числу боковых граней (или, что то же, по числу сторон основания) на треугольные, четырёхугольные, пятиугольные и т. д. Треугольная пирамида называется *тетраэдром*. Все четыре грани тетраэдра (наименьшее число граней, какое может иметь многогранник) – треугольники.

Правильная треугольная пирамида, основанием которой является правильный треугольник, называется *правильным тетраэдром*.

Всякий тетраэдр можно рассматривать как пирамиду четырьмя различными способами, так как каждую из его граней можно принять за основание.

Основные теоремы

- Все боковые рёбра правильной пирамиды равны (как наклонные, равноудалённые от основания перпендикуляра SO; все боковые грани – равные равнобедренные треугольники (как имеющие по три соответственно равные стороны).
- Всякий многогранник можно разложить на пирамиды.

В самом деле:

1) если данный многогранник выпуклый, то его можно разложить на пирамиды, выбирая за их общую вершину одну из вершин многогранника, а за их основания – грани, не прилежащие к этой вершине; или, иначе, принимая за основания пирамид последовательно все грани многогранника, а за их общую вершину – некоторую точку внутри многогранника;

2) невыпуклый многогранник может быть разложен на выпуклые многогранники (каждый из которых разлагается на пирамиды, как было сказано).

Для этого достаточно продолжить безгранично плоскости всех граней; таким образом, всё пространство разделится на части, и данный многогранник будет представлять собой совокупность некоторого числа частей, каждая из которых будет, очевидно, выпуклым многогранником.

Так как всякую пирамиду можно, очевидно, разложить на тетраэдры (для этого достаточно разложить основание на треугольники), то не всякий многогранник можно разложить на тетраэдры.

Правильные многогранники.

Определение. **Правильным многогранником** называется выпуклый многогранник, все грани которого правильные и равные между собой многоугольники, и все многогранные углы которого правильны и равны между собой (это последнее условие, очевидно, может быть заменено условием, что все двугранные углы многогранника равны между собой).

Признак равенства. Два правильных многогранника, у которых одна из граней первого многогранника (следовательно, и каждая его грань) равна одной из граней второго, и один из многогранных углов первого равен одному из многогранных углов второго, равны между собой.

Историческое замечание

Правильные многогранники с древних времён привлекали к себе внимание учёных, строителей, архитекторов, художников. Их поражала красота, совершенство, гармония этих фигур. Пифагорейцы считали их божественными и использовали в своих философских сочинениях о существе мира. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий учёный Платон (429 – 348 гг. до н.э.). Именно поэтому правильные многогранники называются также телами Платона.

2.3. Теорема о медианах и бимедианах тетраэдра

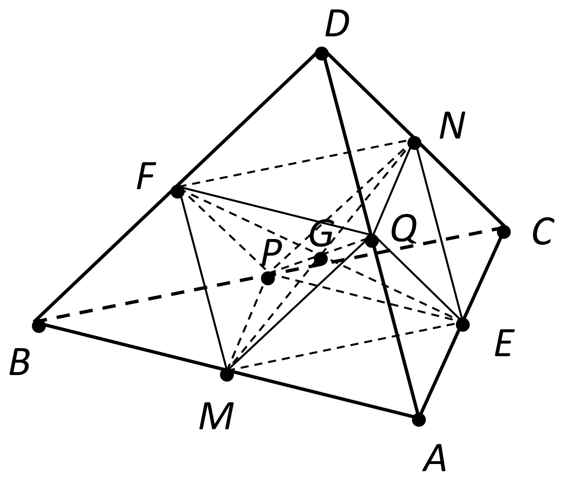


Рис. 55

Простейшим многогранником является *тетраэдр*. Он обладает многими замечательными свойствами, совокупность которых принято называть *геометрией тетраэдра*.

Определение. Отрезки, каждый из которых соединяет середины противоположных рёбер тетраэдра, называются его **бимедианами** (средними линиями).

Теорема. Бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке, которая делит пополам каждую из них.

Доказательство:

1. Пусть MN, EF и PQ – бимедианы тетраэдра $ABCD$, соответствующие парам рёбер AB и CD, AC и BD, BC и AD (рис. 55).

2. Так как отрезки ME и FN параллельны BC и равны половине BC, то четырехугольник $EMFN$ – параллелограмм.

3. Точка G пересечения его диагоналей MN и EF делит их пополам. Из параллелограмма $EPFQ$ следует, что середины бимедиан EF и PQ совпадают с точкой G.

Точка G пересечения бимедиан тетраэдра называется его *центроидом.*

Самостоятельно. Докажите следующее утверждение: для произвольной точки O вектор OG центроида тетраэдра имеет место равенство

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right). \quad (1)$$

Определение. Отрезки, каждый из которых соединяет вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, называются **медианами тетраэдра**.

Теорема. Медианы тетраэдра пересекаются в его центроиде и делятся им в отношении 3 : 1, считая от вершин.

Доказательство:

1. Пусть G_1 и G_2 – центроиды граней BCD и ACD тетраэдра $ABCD$ (рис. 56). Они принадлежат медианам BN и AN этих граней. По свойству центроида треугольника $AG_2 : G_2N = 2$ и $BG_1 : G_1N = 2$.

2. По теореме, обратной теореме Фалеса, $G_1G_2 \parallel$ AB. На основании свойства трапеции прямые AG_1, BG_2 и MN пересекаются в одной точке K.

3. По теореме Менелая для треугольника AMN и прямой BG_2 имеем

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BM}} \cdot \frac{\overrightarrow{MK}}{\overrightarrow{KN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NG_2}}{\overrightarrow{G_2A}} = -1, \text{ откуда } -2 \cdot \frac{\overrightarrow{MK}}{\overrightarrow{KN}} \cdot \frac{1}{2} = -1 \text{ и } MK : KN = 1,$$

т. е. точка K является серединой бимедианы MN и потому совпадает с центроидом G тетраэдра.

Итак, две медианы AG_1 и BG_2 пересекаются в центроиде G. Значит, все четыре медианы имеют общую точку G.

4. По теореме Менелая для треугольника ABG_1 и прямой MN

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{NG_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{G_1G}}{\overrightarrow{GA}} = -1,$$

или $1 \cdot (-3) \cdot \frac{\overrightarrow{G_1G}}{\overrightarrow{GA}} = -1$, откуда $G_1G : GA = \frac{1}{3}$.

Самостоятельно. Обоснуйте, что это отношение не зависит от выбора медианы.

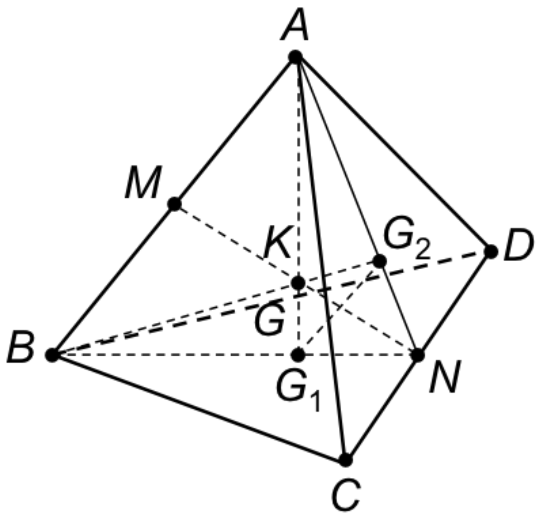


Рис. 56

Свойство центроида тетраэдра. Для того чтобы точка G была центроидом тетраэдра $ABCD$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}. \quad (2)$$

Доказательство:

1. Если G – центроид тетраэдра $ABCD$ (рис. 56), то имеет место равенство (1) для произвольной точки O. Когда точка O совпадает с G, то $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$, и равенство (1) принимает вид (2).

2. Обратно, пусть для некоторой точки G имеет место равенство (2), из которого следует $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = -(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$ или $\frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$. Значит, $\overrightarrow{GM} = -\overrightarrow{GN}$, где M и N – середины рёбер AB и CD.

3. Следовательно, точка G является серединой бимедианы MN, т. е. центроидом тетраэдра.

2.4. Теорема Эйлера и её доказательство

Основными элементами любого многогранника являются его вершины, рёбра и грани. Обозначим число вершин через В, число рёбер – через Р и число граней – через Г. Несмотря на различие свойств многогранников, есть и общее для всех выпуклых многогранников характерное свойство.

Теорема. Сумма числа вершин и числа граней каждого многогранника на два больше числа его рёбер, т. е. В + Г – Р = 2.

Впервые эту формулу доказал Леонард Эйлер в 1750 г. Правда, ещё около 1620 г. Рене Декарт доказал некоторые факты, из которых эта формула немедленно вытекает, а именно, он показал, что, во-первых, сумма всех углов всех граней многогранника равна 360º (Р – Г), а во-вторых, эта же сумма равна 360º (В – 2), но сам не сделал вывода о соотношении В, Г и Р, потому что его интересовали другие вещи. Рукопись Декарта была известна Готфриду Лейбницу, который сделал с неё копию, но затем была прочно забыта, пока её не обнаружили и не опубликовали в 1860 г.

Историческое замечание

Предложение, известное под названием «теорема Эйлера», справедливо не только для выпуклых многогранников, но и для любых многогранников, поверхности которых можно получить непрерывной деформацией сферы. Поэтому оно относится к тому разделу математики, который изучает свойства геометрических фигур, не изменяющихся при непрерывных деформациях, – топологии.

Эйлер доказал эту теорему в работе «Доказательство некоторых из замечательных свойств, которыми обладают тела, ограниченные плоскими гранями». Эйлер показал, что при удалении одной из вершин выпуклого многогранника и при замене его выпуклым многогранником, обладающим оставшимися вершинами (такой многогранник называют выпуклой оболочкой оставшихся вершин), число В + Г – Р не изменяется, а таким образом можно дойти до тетраэдра, для которого справедливость этой теоремы легко проверить. Величину (В + Г – Р) называют *эйлеровой характеристикой*.

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В – число вершин, Р – число рёбер, Г – число граней многогранника.

Название многогранника	**В**	**Р**	**Г**
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырёхугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырёхугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В – Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для рассмотренных многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника.

Известны различные подходы к доказательству теоремы Эйлера. Познакомимся с одним из них, в основе которого лежит нахождение суммы плоских углов выпуклого многогранника.

Доказательство. Обозначим сумму плоских углов выпуклого многогранника через Σ_α. Напомним, что плоскими углами многогранника являются внутренние плоские углы его граней.

Вначале найдём Σ_α, например, для таких многогранников:

а) тетраэдр имеет 4 грани – все треугольники. Таким образом, $\Sigma_\alpha = 4\pi$;

б) куб имеет 6 граней – все квадраты. Таким образом, $\Sigma_\alpha = 6 \cdot 2\pi = 12\pi$;

в) возьмём теперь произвольную пятиугольную призму. У неё две грани – пятиугольники и пять граней – параллелограммы. Сумма углов выпуклого пятиугольника равна 3π. (Напомним, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $\pi \cdot (n-2)$). Сумма углов параллелограмма равна 2π. Таким образом,

$$\Sigma_\alpha = 2 \cdot 3\pi + 5 \cdot 2\pi = 16\pi.$$

Итак, для нахождения Σ_α мы вычисляли сначала сумму углов, принадлежащих каждой грани. Воспользуемся этим приёмом и в общем случае.

Введём следующие обозначения: S_1, S_2, S_3, … , S_r – число сторон в 1, 2, 3-й и т. д. последней грани многогранника. Тогда

$$\Sigma_\alpha = \pi(S_1 - 2) + \pi(S_2 - 2) + \ldots + \pi(S_r - 2) =$$
$$= \pi(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_r - 2\text{Г}).$$

Далее найдём общее число сторон всех граней многогранника. Оно равно $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_r$. Так как каждое ребро многогранника принадлежит двум граням, имеем:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_r = 2\text{Р}.$$

Напомним, что через Р мы обозначили число рёбер данного многогранника. Таким образом, получаем

$$\Sigma_\alpha = 2\pi(\text{Р} - \text{Г}). \qquad (1)$$

Найдём теперь Σ_{α} другим способом. Для этого будем менять форму многогранника таким образом, чтобы у него не менялось число Г, В, и Р. При этом может измениться каждый плоский угол в отдельности, но число Σ_{α} останется прежним. Выберем такое преобразование многогранника: примем одну из его граней за основание, расположим его горизонтально и «растянем» для того, чтобы на него можно было спроектировать другие грани многогранника.

Самостоятельно. Покажите, к чему мы придём в случае тетраэдра и куба. Как будет выглядеть после указанного выше преобразования многогранник произвольного типа?

Заметим, что спроектированный многогранник представляет слившиеся две наложенные друг на друга многоугольные пластины с общим контуром, из которых верхняя разбита на (Г $-$ 1) многоугольник, а нижняя на грани не делится. Обозначим число сторон внешнего окаймляющего многоугольника через r. Теперь найдём Σ_{α} спроектированного многогранника. Σ_{α} состоит из следующих трёх сумм:

1) сумма углов нижней грани, у которой r сторон, равна $\pi\ (r-2)$;

2) сумма углов верхней пластины, вершинами которых являются вершины нижней грани, тоже равна $\pi\ (r-2)$.

3) сумма «внутренних» углов верхней пластины равна 2π (В $-$ Г), так как верхняя пластина имеет (В $- r$) внутренних вершин и все углы группируются около них.

Итак,

$$\Sigma_{\alpha} = \pi\ (r-2) + \pi(r-2) + 2\pi(\text{В} - r) = 2\pi\ \text{В} - 4\pi. \qquad (2)$$

Таким образом, сравнивая выражения (1) и (2), получаем

Г + В – Р = 2,

что и требовалось доказать.

Вопросы и задания

1. Почему центроид тетраэдра называют ещё центром тяжести этого тетраэдра?
2. Найдите другие доказательства теоремы Эйлера, сравните разные подходы к доказательству.
3. Приведите примеры многогранников, для которых соотношение Эйлера не выполняется. Изобразите или смоделируйте эти многогранники.

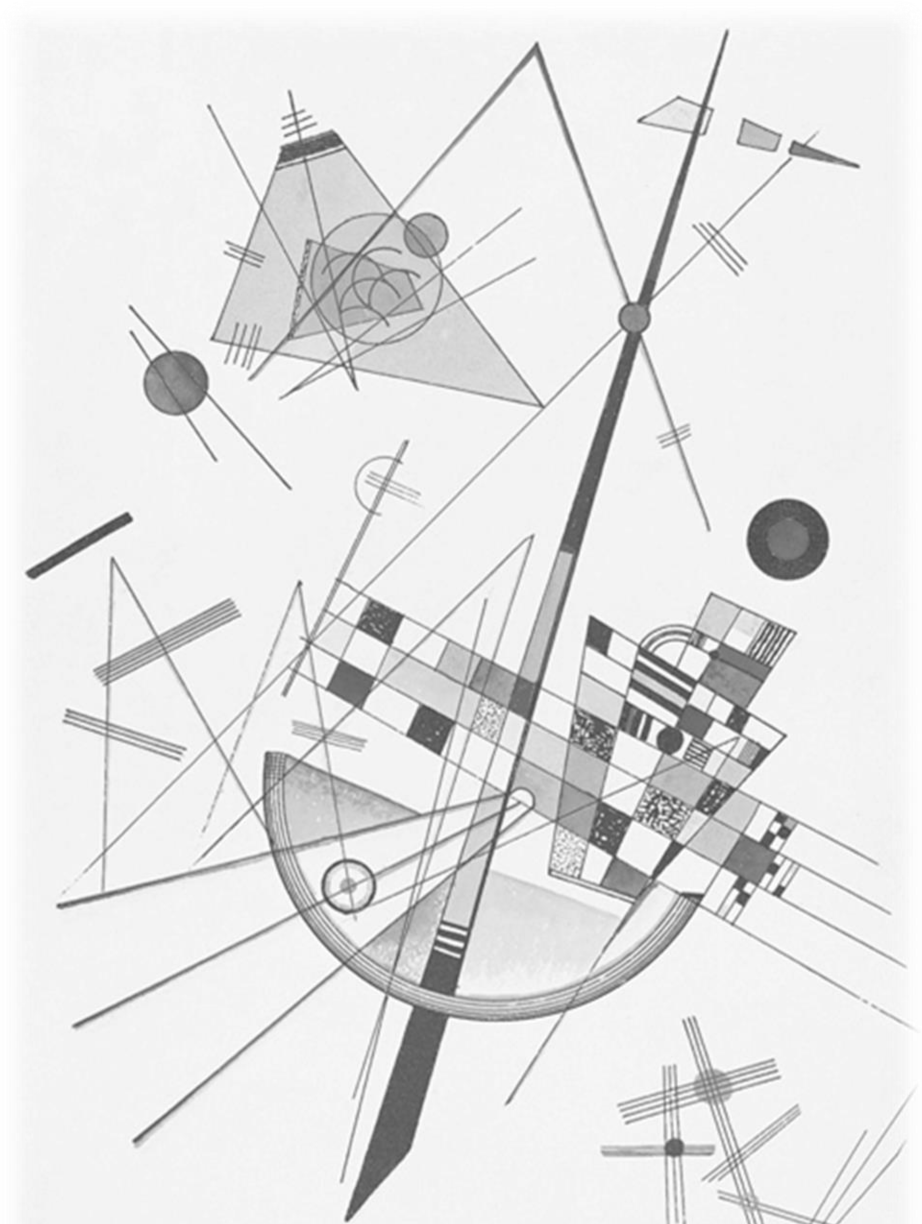
4. Примените теорему Эйлера к доказательству существования пяти видов правильных многогранников.
5. Решите задачи:
   - Выразите длину бимедианы тетраэдра через длины его рёбер.
   - Гранями некоторого выпуклого многогранника являются только четырёхугольники. Сколько он имеет вершин и граней, если Р = 12; Р = 15?
   - Из каждой вершины выпуклого многогранника выходят 4 ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если Р = 20?

Список рекомендуемой литературы

1. Березин, В. Правильные многогранники / В. Березин // Квант. – 1973. – № 5. – С. 26 – 27.
2. Болтянский, В. Пифагоровы тетраэдры / В. Болтянский // Квант. – 1986. – № 8. – С. 29 – 31.
3. Габович, И. Теорема Менелая для тетраэдра / И. Габович // Квант. – 1996. – № 6. – С. 34 – 36.
4. Готман, Э. Свойства правильной пирамиды, вписанной в сферу / Э. Готман // Квант. – 1998. – № 4. – С. 38 – 41.
5. Долбилин, Н. Три теоремы о выпуклых многогранниках / Н. Долбилин // Квант. – 2001. – № 5. – С. 7 – 12 ; № 6. – С. 3 – 10.
6. Матизен, В. Из геометрии тетраэдра / В. Матизен, В. Дубровский // Квант. – 1988. – № 9. – С. 66 – 71.
7. Матиясевич, Ю. Модели многогранников / Ю. Матиясевич // Квант. – 1978. – № 1. – С. 8 – 17.
8. Савченко, В. Полуправильные многогранники / В. Савченко // Квант. – 1976. – № 1. – С. 2 – 7.

Раздел III

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ АЛГЕБРЫ



Глава 1
МОДУЛЬ (ИЛИ АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА)

Алгебра щедра. Зачастую она даёт больше,
чем у неё спрашивают.
Жан Лерон Д'Аламбер

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: постройте графики функций:
а) $y = |x^2 - 4x + 3|$; б) $y = x^2 - 4|x| + 3$; в) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.
Теоретическое задание: изучите способы построения графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля.
План:
1.1. Модуль и его свойства. Геометрический смысл модуля.
1.2. Уравнения и неравенства с модулем.
1.3. Построение графиков функций, содержащих модуль.

Понятие «модуль» далеко неоднозначно и требует к себе особого подхода. Но для начала совершим краткий экскурс в историю, чтобы узнать о происхождении этого термина и понятия.

Считается, что данный термин впервые ввёл в пользование английский математик и философ Роджер Котс, ученик Исаака Ньютона. Великий немецкий физик, изобретатель, математик и философ Готфрид Лейбниц также в своих работах и трудах использовал функцию модуля, которую он обозначил $mol\ x$. Однако уже общепринятое и современное значение модуля как абсолютной величины было дано ещё в 1841 г. выдающимся немецким математиком Карлом Вейерштрассом. В начале девятнадцатого века математики Арган и Коши ввели данное понятие и для комплексных чисел. На сегодняшний день, так как функция модуля вычисляется очень просто, её ввели в список стандартных функций фактически всех языков программирования.

Ключевые понятия

- **модуль**
- **геометрический смысл модуля**
- **свойства модуля**
- **способы решения уравнений и неравенств с модулем**

1.1. Модуль и его свойства. Геометрический смысл модуля

Понятие модуля

По определению модуль действительного числа есть следующая величина:

$|a| = a$, если $a > 0$; $|a| = 0$, если $a = 0$; $|a| = -a$, если $a < 0$. Объединив первое и второе утверждения, получим

$$|a| = \begin{cases} a, & если\ a \geq 0; \\ -a, & если\ a < 0. \end{cases}$$

Итак, модуль неотрицательного числа равен самому числу, а модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному.

Используя определение модуля, найдём модули нескольких чисел: $|5| = 5$, так как $5 \geq 0$; $|0| = 0$, так как $0 \geq 0$; $|-9| = -(-9) = 9$, так как $-9 < 0$; $\left|\sqrt{3} - 1\right| = \sqrt{3} - 1$, так как $\sqrt{3} > 1$; $\left|\sqrt{3} - 2\right| = 2 - \sqrt{3}$, так как $\sqrt{3} < 2$.

Свойства модуля

1. Модуль числа (выражения) не может быть отрицательным:

$$|a| \geq 0.$$

2. Модули противоположных чисел (выражений) равны:

$$|-7| = |7|, |-a| = |a|, |x - y| = |y - x|.$$

3. Модуль произведения двух или нескольких чисел (выражений) равен произведению модулей этих чисел (выражений):

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

4. Квадрат модуля числа (выражения) равен квадрату этого числа (выражения): $|a|^2 = a^2$.

5. Модуль частного двух чисел (выражений) равен частному модулей этих чисел (выражений): $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$.

6. Модуль суммы двух чисел (выражений) не больше суммы модулей этих чисел (выражений): $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Самостоятельно. Дополните приведённый выше перечень свойств модуля. Проведите их доказательства.

Геометрический смысл модуля

Модуль действительного числа a, т. е. $|a|$ обозначает расстояние на координатной прямой от начала отсчёта до точки, изображающей число a.

Модуль разности чисел a и b, т. е. $|a - b|$ есть расстояние между точками, изображающими числа a и b, на числовой прямой.

Для решения уравнений и неравенств, содержащих выражение с переменной под знаком модуля, необходимо научиться раскрывать знак модуля.

Проиллюстрируем эту операцию на примерах.

Пример 1. $|x + 4| = \begin{cases} x + 4\,, \text{ если } x + 4 \geq 0; \\ -x - 4, \text{ если } x + 4 < 0, \end{cases}$

значит, $|x + 4| = \begin{cases} x + 4\,, \text{ если } x \geq -4; \\ -x - 4, \text{ если } x < -4. \end{cases}$

Изобразим на числовой прямой промежутки знакопостоянства выражения $x + 4$ (рис. 57):

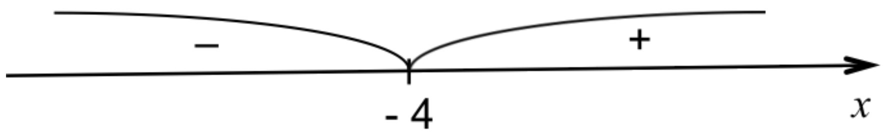


Рис. 57

Пример 2. $|x - 4| = \begin{cases} x - 4\,, \text{ если } x - 4 \geq 0; \\ 4 - x, \text{ если } x - 4 < 0, \end{cases}$

значит, $|x - 4| = \begin{cases} x - 4\,, \text{ если } x \geq 4; \\ 4 - x, \text{ если } x < 4. \end{cases}$

Изобразим на числовой прямой промежутки знакопостоянства выражения $x - 4$ (рис. 58):

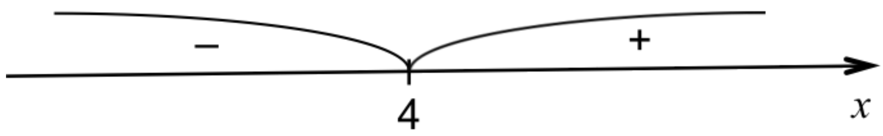


Рис. 58

Пример 3. $|2x - y| = \begin{cases} 2x - y\,, \text{ если } 2x - y \geq 0; \\ y - 2x, \text{ если } 2x - y < 0, \end{cases}$

значит, $|2x - y| = \begin{cases} 2x - y, \text{ если } x \geq \frac{y}{2}; \\ y - 2x, \text{ если } x < \frac{y}{2}. \end{cases}$

Самостоятельно. Изобразите на числовой прямой промежутки знакопостоянства выражения $2x - y$.

1.2. Уравнения и неравенства с модулем

При решении уравнения (неравенства) с модулем, как правило, следует разбить область допустимых значений (ОДЗ) уравнения на множества, на которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. На каждом таком множестве уравнение (неравенство) можно записать без знака модуля и решить на этом множестве.

Пример 1. Решить уравнение: $x^2 - 5\,|x| + 6 = 0.$

Решение. Числовая прямая точкой $x = 0$ разбивается на 2 интервала (рис. 59):

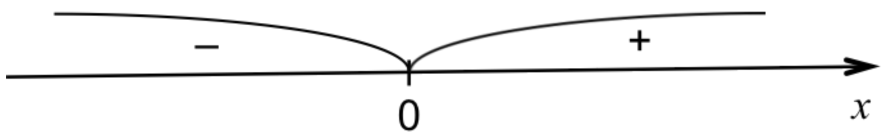


Рис. 59

Следовательно, при $x < 0$ исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 + 5x + 6 = 0$, а при $x \geq 0$ исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Решениями первого уравнения являются числа – 2 и – 3. Оба они удовлетворяют условию $x < 0$, следовательно, являются решениями исходного.

Решениями второго уравнения являются числа 2 и 3. Они удовлетворяют условию $x \geq 0$, значит, эти числа также входят во множество решений исходного уравнения.

Ответ: – 3; –2; 2; 3.

Пример 2. Решить неравенство $|x^2 - 2x| < x$.

Решение. Найдём промежутки знакопостоянства выражения $x^2 - 2x$. Для этого решим неравенства $x^2 - 2x \geq 0$ и $x^2 - 2x < 0$. Решением первого неравенства является $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$, а решением второго является $x \in (0; 2)$.

При $0 < x < 2$ исходное неравенство принимает вид:

$$2x - x^2 < x, \text{ т.е. } x^2 > x \text{ или } x(x-1) > 0.$$

Решением этого неравенства является множество $x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty)$. Учитывая условие $0 < x < 2$, получаем решение исходного неравенства $(1; 2)$.

При $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$ неравенство принимает вид:

$$x^2 - 2x < x, \text{ т.е. } x^2 - 3x < 0 \text{ или } x(x-3) < 0.$$

Решением данного неравенства является промежуток $(0; 3)$. Учитывая условие $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$, получаем решение исходного неравенства: $[2; 3)$. И наконец, ответ: $(1; 2) \cup [2; 3) = (1; 3)$.

Однако такой подход к решению уравнений и неравенств, содержащих знак абсолютной величины, не всегда приводит к ответу. Под знаком модуля могут оказаться выражения, для которых бывает довольно затруднительно найти промежутки знакопостоянства.

В этом случае бывает удобно воспользоваться *свойствами модуля*, заменяя данное уравнение или неравенство равносильными ему.

1. Уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно совокупности уравнений: $f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$. Решая оба эти уравнения и находя объединение решений, получим решение исходного уравнения.

2. Неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно совокупности неравенств: $f(x) > g(x)$ или $f(x) < -g(x)$. Решая оба эти неравенства и находя объединение решений, получим решение исходного неравенства.

3. Неравенство $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе неравенств: $f(x) < g(x)$и $f(x) > -g(x)$. Решая оба эти неравенства и находя пересечение решений, получим решение исходного неравенства.

Вышеперечисленные свойства помогают решить уравнение (неравенство) в том случае, если удаётся *уединить единственный модуль в одной части уравнения* (неравенства).

Пример 3. Решить уравнение $|x^2 + 5x| = 6$.

Решение. Воспользуемся свойством 1: исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $x^2 + 5x = 6$ или $x^2 + 5x = -6$, следовательно, получили квадратные уравнения: $x^2 + 5x - 6 = 0$ или $x^2 + 5x + 6 = 0$. Решая эти квадратные уравнения, получаем ответ: $\{-6; -3; -2; 1\}$.

Пример 4. Решите систему неравенств $\begin{cases} |3 + x| \leq 6, \\ |2x + 5| \geq 11. \end{cases}$

Решение. Решим первое неравенство системы:

$$-6 \leq 3 + x \leq 6,$$
$$-9 \leq x \leq 3.$$

Решим второе неравенство системы: $2x + 5 \leq -11$ или $2x +$ $+ 5 \geq 11$; $x \leq -8$ или $x \geq 3$.

Найдём решение системы на числовой прямой (рис. 60):

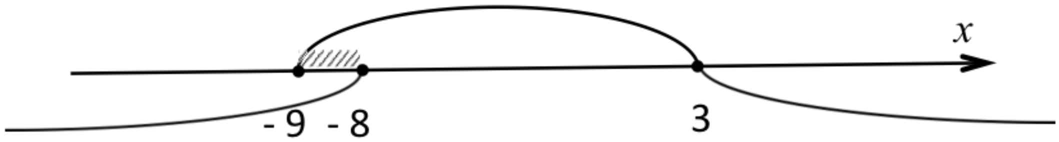


Рис. 60

Ответ: $[-9; -8] \cup \{3\}$.

При решении уравнений и неравенств с модулем можно использовать геометрический смысл модуля. Покажем на примерах применение геометрического способа решения уравнений и неравенств.

Пример 1. Решите уравнение: $|x + 5| = 2$.

Решение. Рассматривая $|x + 5|$ как $|x - (-5)|$, прочтём соотношение $|x + 5| = 2$ как «расстояние от точки x до точки -5 равно 2». Откладывая на числовой оси от точки -5 отрезок, длиной 2 (в обе стороны), получим ответ: -7 и -3.

Пример 2. Решите уравнение: $|x| + |x - 3| = 5$.

Решение. Сумма расстояний от точки x до точек 0 и 3 равна 5, расстояние между точками 0 и 3 равно 3, следовательно, точка x может находиться либо слева от точки 0, либо справа от точки 5 на одинаковом расстоянии d. Тогда $2d + 3 = 5 \Rightarrow d = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ (рис. 61).

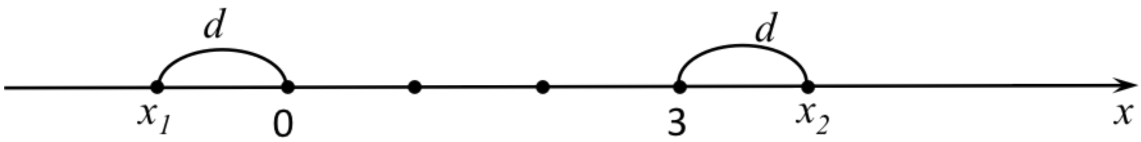


Рис. 61

Пример 3. Решите неравенство: $|x + 1| < |x - 3|$.

Решение. Расстояние от точки x до точки -1 меньше, чем расстояние от точки x до точки 3 , следовательно, либо x – произвольная точка левее -1, либо x лежит между -1 и 3 ближе к -1, т. е. x левее середины отрезка $[-1; 3]$.

Таким образом, получаем, что $x < \frac{-1+3}{2} \Rightarrow x < 1$.

1.3. Построение графиков функций, содержащих модуль

Рассмотрим примеры построения графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля.

Пример 1. Построить график функции $y = \left|\frac{3x-1}{x-1}\right|$.

Решение

Имеем функцию вида $y = |f(x)|$, где $f(x) = \left|\frac{3x-1}{x-1}\right|$.

1. Построим сначала график подмодульной функции, т. е. функции $f(x) = \left|\frac{3x-1}{x-1}\right|$. Для этого выделим целую часть дроби $\frac{3x-1}{x-1}$. Напомним, что это можно сделать двумя способами: разделив числитель на знаменатель «в столбик» или расписав числитель так, чтобы в нем появилось выражение, кратное знаменателю.

Выполним выделение целой части вторым способом:

$\frac{3x-1}{x-1} = \frac{3x-3+2}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{3(x-1)}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 3 + \frac{2}{x-1}$.

Значит, подмодульная функция имеет вид $f(x) = 3 + \frac{2}{x-1}$. А её графиком является гипербола вида $y = \frac{2}{x}$, смещённая на 1 единицу вправо и 3 единицы вверх.

Построим этот график (рис. 62).

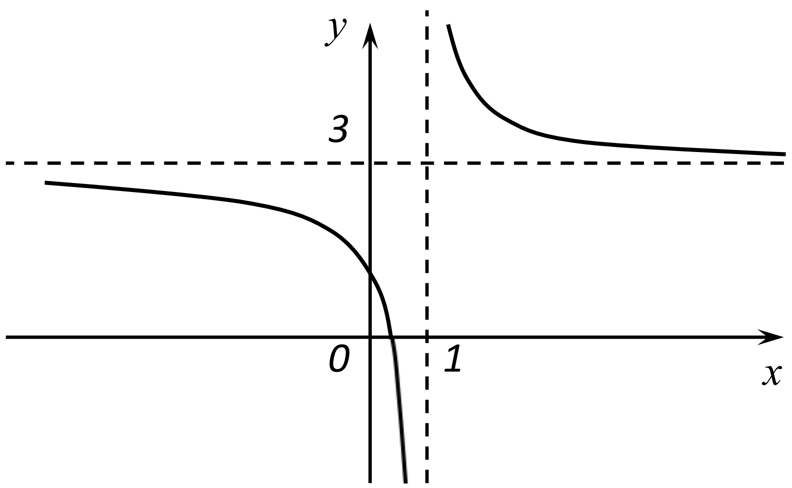


Рис. 62

2. Чтобы получить график искомой функции $y = \left|\frac{3x-1}{x-1}\right|$, необходимо часть построенного графика функции $f(x) = 3 + \frac{2}{x-1}$, лежащую выше оси Ox, оставить без изменений, а часть графика, лежащую ниже оси Ox, отобразить симметрично в верхнюю полуплоскость. Выполним эти преобразования.

График данной функции построен (рис. 63).

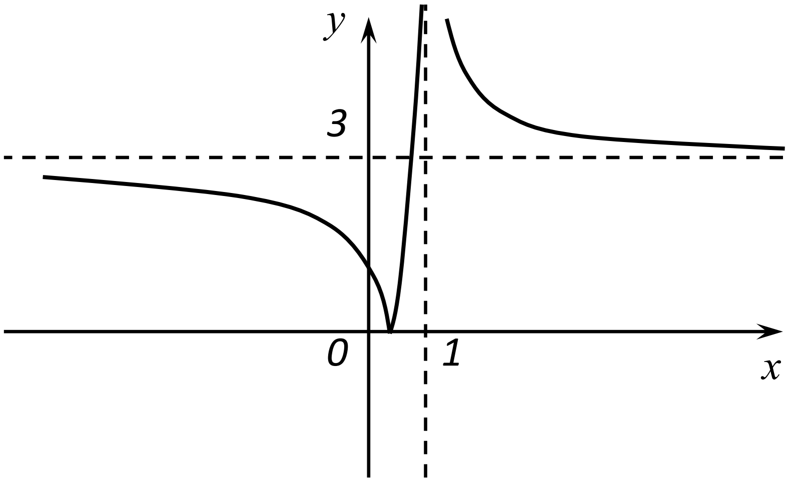


Рис. 63

Абсциссу точки пересечения графика с осью Ox можно вычислить, решив уравнение $y\ =\ 0$, т. е. $\left|\frac{3x-1}{x-1}\right| = 0$. Получаем, что $x = \frac{1}{3}$.

Пример 2. Построить график функции $y = \left|\frac{4|x|}{2-|x|}\right|$.

Решение. Это задача уже совсем непростая. Здесь присутствуют оба вида функций с модулем: и $y = |f(x)|$, и $y = f(|x|)$. Поэтому строить график этой функции удобнее поэтапно.

1. Сначала построим график функции без всех модулей: $y = \frac{4x}{2-x}$.

2. Затем добавим модуль у каждого аргумента. Получим функцию вида $y = f(|x|)$, т. е. $y = \frac{4|x|}{2-|x|}$. Для построения такого графика нужно применить симметрию относительно оси Oy.

3. Добавим ещё и внешний модуль. Получим, наконец, искомую функцию $y = \left|\frac{4|x|}{2-|x|}\right|$. Так как эта функция получена из предыдущей применением внешнего модуля, то мы имеем функцию вида $y = |f(x)|$, а значит, необходимо применить симметрию относительно Ox.

Самостоятельно. Постройте график функции $y = \left|\frac{4|x|}{2-|x|}\right|$ по предложенному выше плану.

Сформулируем некоторые выводы, которые полезно использовать при построении графиков функций, содержащих переменную под знаком модуля:

1) для построения графика функции $y = f(|x|)$ надо сохранить часть графика $y = f(x)$, для которой $x \geq 0$. Кроме того, эту часть надо симметрично отразить влево относительно оси ординат;

2) для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо сохранить часть графика $y = f(x)$, для которой $y \geq 0$. Ту часть графика функции $y = f(x)$, для которой $y < 0$, надо симметрично отразить вверх относительно оси абсцисс.

Задания

1. Познакомьтесь с различными приёмами построения графиков функций с модулем.
2. Решите уравнения:

   а) $|x^2 + 11x + 28| = |x^2 - 14|$; б) $2|x + 2| + |x - 3| = 7 - 2x$;

   в) $x^2 + 2x - 3|x + 1| + 3 = 0$; г) $\sqrt{1 - cos^2 x} = sinx + 2cosx$.
3. Решите неравенства:

   а) $\big||x^3 - x - 1| - 5\big| > x^3 + x + 8$;

   б) $|x^3 - x - 1| - \sqrt{x} > x^3 - x - \sqrt{x} - 1$;

   в) $|\log_8(x^2 - 4x + 3)| < 1$.
4. Решите уравнения и неравенства, используя геометрический смысл модуля:

   а) $|x - 1| + |x - 5| = 3$; б) $\big||x| - 1\big| = 2$; в) $|x| > 2|x - 2|$.

Список рекомендуемой литературы

1. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа : учеб. для 10 – 11 кл. сред. шк. / М. И. Башмаков. – СПб. : Свет, 1998. – С. 33 – 35, 70 – 72.
2. Севрюков, П. Ф. Такие разные задачи с модулями / П. Ф. Севрюков // Математика в школе. – 2014. – № 1. – С. 18 – 23.
3. Яковлев, И. В. Уравнения и неравенства с модулем / И. В. Яковлев. – URL : mathus.ru/math/modul.pdf (дата обращения: 12.06.2014).

Глава 2

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ

> Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть – и далее подтвердить это, – что, следуя этому методу, мы достигнем цели.
>
> *Готфрид Вильгельм Лейбниц*

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: решите уравнение $2x - 4y = 6a$ относительно каждой из входящих в него переменных.

Теоретическое задание: изучите решение одной задачи с параметрами и сформулируйте вопросы, на которые вы хотели бы получить ответ.

План:

2.1. Что такое параметр? Что значит «решить задачу с параметром»?
2.2. Основные типы задач с параметрами.
2.3. Основные способы решения задач с параметрами.
2.4. Примеры решения задач с параметрами.

Ключевые понятия

- **параметр**
- **решить задачу с параметром**
- **типы задач с параметрами**
- **способы решения задач с параметрами**

Параметр (от греч. *parametron* – отмеривающий) в математике – величина, числовые значения которой позволяют выделить определённый элемент из множества элементов того же рода. Например, величина r в уравнении $x^2 + y^2 = r^2$ является параметром окружности.

В математике используют понятия «переменная величина» и «параметр». Но в чём их принципиальная разница?

Например, в уравнении прямой $y = kx + b$ обычно считается, что x и y – переменные, а k и b – параметры. Попытаемся в этом разобраться.

2.1. Что такое параметр? Что значит «решить задачу с параметром»?

Если вы вспомните некоторые основные уравнения (например, $ax + b = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$), то обратите внимание, что при поиске их корней значения остальных переменных, входящих в уравнения, считаются фиксированными и заданными.

Например, в уравнениях $|x| = a - 1$ и $ax = 1$ при $a = 0$ равенства не выполняются при любых значениях переменной x, а в уравнениях $\frac{x}{a} = 2$ и $\sqrt{a-1} = x^2$ при $a = 0$ их левые части не определены. Есть авторы, допускающие рассмотрение значения $a = 0$ во всех приведённых случаях, и есть авторы, исключающие его в двух последних, вводя понятие допустимых значений переменной a.

Определение. **Параметром** называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговорённому множеству.

> ***Указание***
>
> Независимость параметра заключается в его «неподчинении» свойствам, вытекающим из условия задачи. Например, из неотрицательности левой части уравнения $|x| = a - 1$ не следует неотрицательность значений выражения $a - 1$, и если $a - 1 < 0$, то мы обязаны констатировать, что уравнение не имеет решений.

Значит, параметр – это величина, входящая в формулы и выражения, значение коей в рамках рассматриваемой задачи является постоянным.

Если требуется решить уравнение, неравенство, их систему или совокупность, то это означает предъявить обоснованный ответ либо для любого значения параметра, либо для значения параметра, принадлежащего заранее оговорённому множеству.

Если же требуется найти значения параметра, при которых множество решений уравнения, неравенства и т. д. удовлетворяет объявленному условию, то, очевидно, решение задачи и состоит в поиске указанных значений параметра.

2.2. Основные типы задач с параметрами

Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговорённому множеству.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Самостоятельно. Подберите примеры для каждого типа задач с параметрами.

2.3. Основные способы решения задач с параметрами

Первый способ – аналитический. Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ силового, в хорошем смысле «наглого» решения.

Такой способ решения задач с параметром считается самым трудным, требующим высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Второй способ – графический. В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости $(x; y)$, или в координатной плоскости $(x; a)$.

Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметрами настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметрами», что они начинают игнорировать другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом и с колоссальными трудностями остальными способами. Поэтому на начальной стадии изучения опасно начинать с графических приёмов решения задач с параметрами.

Третий способ – решение относительно параметра. При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

2.4. Примеры решения задач с параметрами

Перейдём теперь к демонстрации указанных способов решения задач с параметрами.

Задача 1. Для всех действительных значений параметра a решите уравнение $x^3 - (2-a)x^2 - ax - a(a-2) = 0$.

Решение

1. Исходное кубическое по x уравнение является квадратным относительно a. Поэтому, считая переменную x параметром, перепишем это уравнение в виде стандартного квадратного уравнения относительно a, опуская промежуточные шаги по раскрытию скобок и перегруппировке: $a^2 - (x^2 - x + 2)a - x^3 + 2x^2 = 0$.

2. Поскольку

$$x^2 - x + 2 = x^2 + (2-x) \text{ и } -x^3 + 2x^2 = x^2 \cdot (2-x),$$

то по обратной теореме Виета $a_1 = x^2$, $a_2 = 2-x$.

3. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $a = x^2$ и $a = 2-x$.

Первое уравнение преобразуется к виду $x^2 = a$, откуда

(1): при $a < 0$ решений нет;

(2): при $a = 0$ единственное решение $x = 0$;

(3) и (4): при $a > 0$ два решения: $x = -\sqrt{a}$; $x = \sqrt{a}$.

Второе уравнение совокупности имеет единственное решение:

(5): $x = 2-a$ для любого значения параметра a.

4. Изображаем ось параметра a и отмечаем на ней граничные значения параметра, которые фигурируют в ответах к каждому уравнению совокупности (рис. 64).

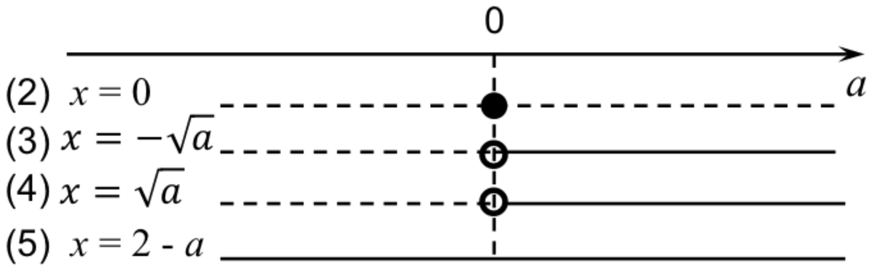


Рис. 64

Данная развёртка позволяет легко найти все решения исходного уравнения для любого действительного значения параметра: $x = 2 - a$ при $a < 0$; $x = 0$ или $x = 2$ при $a = 0$; $x = -\sqrt{a}$ или $x = \sqrt{a}$ или $x = 2 - a$ при $a > 0$.

5. Формирование ответа. Например, при $a = 1$ равенства $x = \sqrt{a}$ и $x = 2 - a$ определяют одно и то же значение переменной $x = 1$, а при $a = 4$ равенства $x = -\sqrt{a}$ и $x = 2 - a$ аналогично определяют одно значение $x = -2$.

Полученные равенства (2) – (5) могут при некоторых значениях параметра a определять одно и то же значение переменной x. Найдём указанные значения параметра. Поскольку значения $-\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}$ различны для всех $a > 0$, осталось выяснить, при каких значениях a выполняются равенства $\sqrt{a} = 2 - a$ и $-\sqrt{a} = 2 - a$. Пусть $\sqrt{a} = t$, тогда уравнение $\sqrt{a} = 2 - a$ приводится к виду $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t = 1$ и $t = -2$ (не подходит, так как $t = \sqrt{a} > 0$ при $a > 0$), т. е. $\sqrt{a} = 1$, $a = 1$. Аналогично решая уравнение $-\sqrt{a} = 2 - a$, находим $a = 4$.

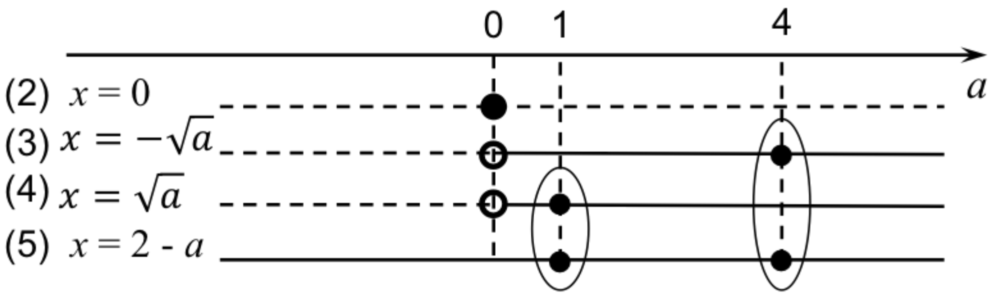


Рис. 65

Полученный результат проиллюстрирован на рис. 65 следующим образом: линии равенства (4) и (5) «сливаются» при $a = 1$, линии (3) и (5) «сливаются» при $a = 4$.

Теперь легко сформулировать окончательный ответ задачи.

Ответ: $x = 2 - a$ при $a < 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ при $a = 0$;

$x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$, $x_3 = 2 - a$ при $0 < a < 2$, $1 < a < 4$, $a > 4$;

$x_{1,2} = \pm 1$ при $a = 1$; $x_{1,2} = \pm 2$ при $a = 4$.

Задача 2. Для всех действительных значений параметра a найдите число различных корней уравнения $(a - x^2)(a + x - 2) = 0$.

Решение

1. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $a - x^2 = 0$ или $a + x - 2 = 0$.

2. Поэтому построение искомого множества точек – графика уравнения – сводится к построению графиков $a = x^2$ и $a = 2 - x$ (рис. 66).

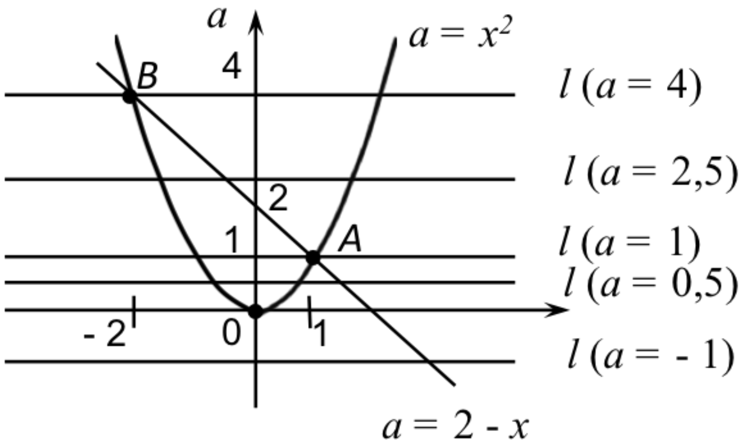


Рис. 66

Координаты точек пересечения графиков определяются как решение системы уравнений

$$\begin{cases} a - x^2 = 0, \\ a = 2 - x, \end{cases}$$

решив которую, находим координаты $(1;\ 1)$ точки A и $(-2;\ 4)$ – точки B.

3. Понятно, что все точки параболы и прямой (и только они) имеют координаты $(x;\ a)$, удовлетворяющие исходному уравнению. Поэтому количество различных корней уравнения по переменной x при каждом значении параметра $a = a_0$ совпадает с количеством точек пересечения прямой l, задаваемой равенством $a = a_0$, с построенным множеством точек.

Очевидно, что при $a < 0$ прямая l лежит в нижней полуплоскости и пересекает график исходного уравнения (объединение точек параболы и прямой) в одной точке, т. е. $N(a) = 1$ при $a < 0$. При $a = 0$ прямая l касается параболы $a = x^2$, т. е. имеет с ней одну общую точку и пересекает прямую $a = 2 - x$, поэтому $N(0) = 2$. При дальнейшем возрастании параметра a от 0 до 1 (не включая значения 1) прямая l пересекает график уравнения в трёх точках, откуда $N(a) = 3$ при $0 < a < 1$. Аналогично получаем $N(1) = N(4) = 2$ и $N(a) = 3$ при $1 < a < 4$, $a > 4$.

Ответ: $N(a) = 1$ при $a < 0$; $N(a) = 2$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = 4$; $N(a) = 3$ при $0 < a < 1$, $1 < a < 4$, $a > 4$.

Задача 3. При каких значениях параметра a уравнение $|x + 2| = = ax$ не имеет решений?

Решение. Для каждого значения параметра a решим данное уравнение, после чего отберём те значения параметра, при которых уравнение не имеет решений.

1. На основании определения модуля заключаем, что исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + 2 = ax, \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} -(x + 2) = ax, \\ x + 2 < 0, \end{cases}$$

$$\text{т.е.} \begin{cases} (a - 1)x = 2, \\ x \geq -2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} (a + 1)x = -2, \\ x < -2. \end{cases}$$

2. Первая система имеет одно решение $x = \frac{2}{a-1}$ при $\frac{2}{a-1} \geq -2$, т. е. при $a \leq 0$ или $a > 1$ и не имеет решений при остальных значениях параметра. Вторая система имеет одно решение $x = -\frac{2}{a+1}$, если $-\frac{2}{a+1} < -2$, т. е. при $-1 < a < 0$ и не имеет решений при остальных значениях параметра.

3. Объединяя решения систем, получаем: данное уравнение имеет одно решение $x = \frac{2}{a-1}$ при $a \leq -1$, два решения $x = \frac{2}{a-1}$ и $x = -\frac{2}{a+1}$ при $-1 < a < 0$.

4. Анализируя полученный результат, определяем значения параметра a, при которых уравнение не имеет решений.

Ответ: $0 < a \leq 1$.

Задания

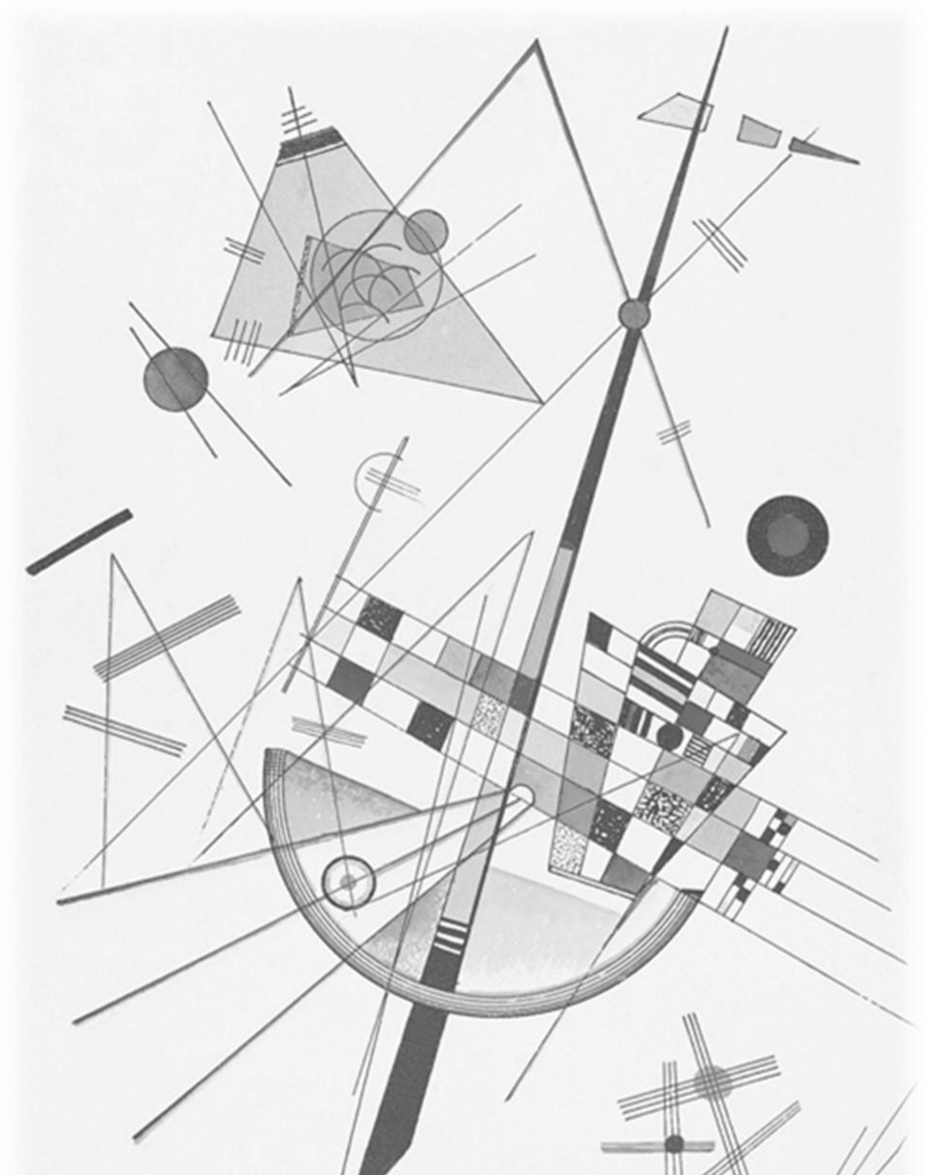
1. Подберите по пять задач на каждый тип заданий с параметрами и решите их.
2. Решите одно и то же уравнение с параметром различными способами.
3. Решите задачу 3 (с. 79) графическим способом.
4. Решите задачи:
   - При каких значениях параметра a уравнение $x - a = 2|2|x| - a^2|$ имеет ровно три различных корня?
   - Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $(a - x^2)(a + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

Список рекомендуемой литературы

1. Корянов, А. Г. Использование метода наглядной графической интерпретации при решении уравнений и неравенств с параметрами / А. Г. Корянов // Математика в школе. – 2011. – № 1. – С. 18 – 26.
2. Крамор, В. С. Задачи с параметрами и методы их решения / В. С. Крамор. – М. : Оникс, 2007. – 416 с. – ISBN 978-5-488-01066-6.
3. Шахмейстер, А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами : пособие для школьников, абитуриентов и учителей / А. Х. Шах-мейстер ; под ред. Б. Г. Зива. – СПб. : ЧеРо-на-Неве, 2004. – 304 с. – ISBN 5-79130-062-X.
4. Яковлев, И. В. Параметр как переменная / И. В. Яковлев. – URL: mathus.ru/math/parameter-var.pdf (дата обращения: 24.05.2014).

Раздел IV

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА



Глава 1
ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ

> Если бы Ньютон и Лейбниц знали,
> что непрерывные функции необязательно
> должны иметь производные,
> то дифференциальное исчисление
> никогда не было бы создано.
> *Эмиль Пикар*

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: выполните исследование функции $y = 3x^3 - 1{,}5x^2 + 2$ классическим способом; на какие вопросы вы не смогли ответить?

Теоретическое задание: повторите правила дифференцирования и нахождения первообразной; проиллюстрируйте их примерами.

План:

1.1. Понятие производной функции. Физический и геометрический смысл производной функции.

1.2. Понятие первообразной функции.

1.3. Применение производной и первообразной функции.

> ***Ключевые понятия***
>
> - **производная функции**
> - **первообразная функции**
> - **дифференцирование**
> - **интегрирование**
> - **правила дифференцирования и интегрирования**

Основное понятие дифференциального исчисления – понятие производной – возникло в XVII в. в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики. Дифференциальное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем на основе двух задач: 1) о разыскании касательной к произвольной линии; 2) о нахождении скорости при произвольном законе движения.

Производную функции можно использовать в математике при решении различных заданий – от сравнения чисел и упрощения выражений до решения уравнений и неравенств и построения графиков функций.

1.1. Понятие производной функции. Физический и геометрический смысл производной функции

Понятие производной. Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x, определённая в промежутке $(a;\ b)$, и пусть x_0 – произвольная точка этого промежутка

Придадим аргументу x_0 приращение Δx, тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ называется **производной функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$:**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 67). Видно, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PN}{MN} = tg\varphi$, т.е. это отношение равно угловому коэффициенту секущей MN. Если $\Delta x \to 0$, то секущая, поворачиваясь вокруг точки M, в пределе переходит в касательную MT, так как касательная является предельным положением секущей, когда точки пересечения сливаются.

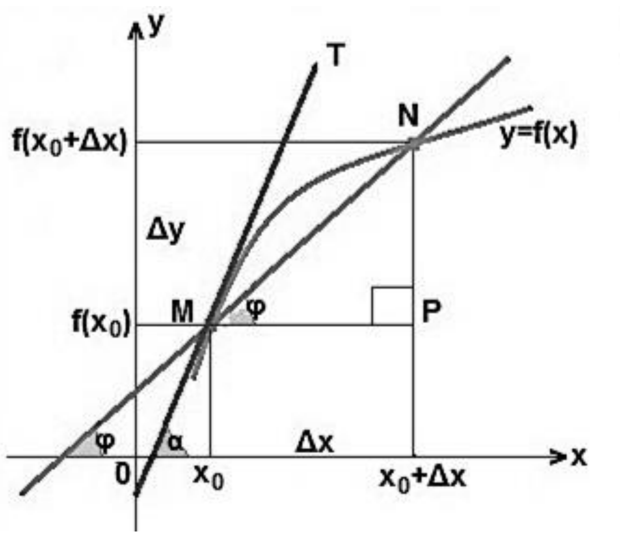


Рис. 67

Таким образом,

$$y'_0 = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha.$$

Уравнение касательной $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, где x_0, y_0 – координаты точки касания, а x, y – текущие координаты точки касательной прямой.

Физический смысл производной заключается в скорости изменения функции. Пусть $s = s(t)$ – закон прямолинейного движения. Тогда $v(t_0) = s'(t_0)$ выражает мгновенную скорость движения в момент времени t_0. Вторая производная $a(t_0) = s''(t_0)$ выражает мгновенное ускорение в момент времени t_0. Вообще производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 выражает скорость изменения функции в точке x_0, то есть скорость протекания процесса, описанного зависимостью $y = f(x)$.

> ***Историческое замечание***
>
> Ряд задач дифференциального исчисления был решён ещё в древности (Евклид, Архимед). Основное понятие – понятие производной – возникло в XVII в., однако раньше понятие производной встречалось в работах итальянского математика Тартальи (около 1500 – 1557 гг.). В XVII в. на основе учения Г. Галилея о движении активно развивалась кинематическая концепция производной. Различные изложения стали встречаться в работах Декарта, французского математика Роберваля, английского учёного Л. Грегори. Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс.

Самостоятельно. Повторите правила дифференцирования и их доказательства, таблицу производных различных функций.

1.2. Понятие первообразной функции

Понятие первообразной функции. Первообразной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Основное свойство первообразных. Любая первообразная для функции $f(x)$ на промежутке L может быть задана в виде $G(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке L, а C – произвольная постоянная.

Доказательство. Найдём производную функции $G(x)$:

$$G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x).$$

По условию $F\ (x)$ – первообразная для функции $f(x)$ и справедливо равенство $F'(x) = f(x)$. Но тогда выполнено и равенство $G'(x) = (F(x) + C)' = f(x)$. Поэтому функция $F(x) + C$ также первообразная для функции $f\ (x)$.

И обратно: пусть $G(x)$ и $F(x)$ – две различные первообразные для функции $f\ (x)$ на промежутке L. Тогда справедливы равенства

$G'(x) = f(x)$ и $F'(x) = f(x)$ на этом промежутке. Найдём производную разности функций $G\ (x)$ и $F\ (x)$:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Итак, получили, что для всех $x \in L$ верно равенство $(G\ (x) - F(x))' = 0$. Поэтому на основании признака постоянства функции имеем, что разность $G(x) - F(x)$ есть функция, принимающая некоторое постоянное значение C на промежутке L, т. е. $G(x) - F(x) = C$. Отсюда следует, что $G'(x) = (F(x) + C)'$ для всех $x\ \in L$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл основного свойства первообразной. Графики любых двух первообразных для функции получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси ординат.

Самостоятельно. Проиллюстрируйте геометрический смысл основного свойства первообразной.

1.3. Применение производной и первообразной функции

Непосредственно производная используется при построении графиков функций. Для этого данную функцию исследуют по плану.

Пример. Постройте график функции $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$.

Решение

1. Функция существует для всех $x \neq 0$.
2. Функция не является ни чётной, ни нечётной, так как $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$, $f(-\,x) = -\frac{1}{x} + 4(-x)^2$, то есть $f(-\,x) \neq f(x)$ и $f(-\,x) \neq -f(x)$.
3. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв.

При этом $lim_{x\to -0}(\frac{1}{x} + 4x^2) = -\infty$.

4. Находим производную: $f'\ (x) = \frac{8x^3-1}{x^2}$ и приравниваем её к нулю: $\frac{8x^3-1}{x^2} = 0$. Точка $x = \frac{1}{2}$ будет критической.

Проверим достаточные условия экстремума в точке $x = \frac{1}{2}$. Так как знаменатель производной всегда положителен, то достаточно проследить за знаком числителя. Получаем: $f'\ (x) < 0$ при $x < \frac{1}{2}$ и

$f'\,(x) > 0$ при $x > \frac{1}{2}$. Следовательно, в точке $x = \frac{1}{2}$ функция имеет минимум, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

5. Точек пересечения с осью Oy нет, так как данная функция не определена при $x = 0$. Чтобы найти точки пересечения кривой с осью Ox, нужно решить уравнение $\frac{1}{x} + 4x^2 = 0$. Тогда $4x^3 = -1$ или $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

Получаем, что функция убывает при $x \in (-\infty; -\frac{\sqrt[3]{2}}{2})$, $y = 0$ при $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$; при $x \in (-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}; 0)$ функция убывает; при $x \in (0; \frac{1}{2})$ функция убывает; при $x = \frac{1}{2}$ функция имеет минимум $y = 3$; при $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$ функция возрастает.

Самостоятельно. Постройте на координатной плоскости график рассмотренной функции.

Рассмотрим применение производной функции для выяснения периодичности функции.

Пример. Является ли периодической функция

$$f(x) = cosx \cdot sin\big(x\sqrt{2}\big)?$$

Решение. Воспользуемся следующим утверждением: если дифференцируемая в каждой точке числовой прямой функция имеет период Т, то её производная также имеет период Т.

Предположим, что данная функция $f(x)$ является периодической с периодом Т.

Применяя формулу $cos\,a \cdot sin\,b = \frac{1}{2}(sin(a+b) + sin(b-a))$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(sinx\big(\sqrt{2}+1\big) + sin\,x\big(\sqrt{2}-1\big)\big) = \frac{1}{2}(sin\alpha x + sin\beta x),$$

где $\alpha = \sqrt{2} + 1$, $\beta = \sqrt{2} - 1$.

Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\alpha\,cos\,\alpha x + \beta\,cos\,\beta x),\; f''(x) = -\frac{\alpha^2}{2}sin\,\alpha x - \frac{\beta^2}{2}sin\,\beta x.$$

Поскольку по предположению функции $f(x)$ и $f'(x)$ имеют период Т, следовательно, и функции $g(x) = f''(x) = -\frac{\alpha^2}{2}sin\,\alpha x - \frac{\beta^2}{2}sin\,\beta x$ и $g(x) + \beta^2 f(x) = \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}sin\,\alpha x$ также имеют период Т.

Отсюда следует, что существует число $k \neq 0,\ k \in Z$, такое, что $\mathrm{T} = \frac{2\pi k}{\alpha}$. Аналогично показывается, что существует число $n \neq 0$, $n \in Z$, такое, что $\mathrm{T} = \frac{2\pi k}{\beta}$. Но тогда $\frac{k}{n} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, т. е. число $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ является рациональным, что неверно.

Значит, данная функция не является периодической.

Теперь рассмотрим типичные задачи на применение основного свойства первообразной.

Пример 1. Найдите общий вид первообразных для функции $f\,(x) = x - 3x^2$.

Решение. Одной из первообразных для данной функции будет $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3$. Так как $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x^3\right)' = x - 3x^2 = f(x)$.

По доказанной теореме общий вид первообразной имеет вид: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + C$.

Пример 2. Найдите общий вид первообразных для функции $f\,(x) = 3cos\,x$.

Решение. Общий вид первообразной: $F\,(x) = 3\,sin\,x + C$, так как $F'\,(x) = (3\,sin\,x + C)' = 3\,cos\,x = f\,(\,x)$.

Пример 3. Найдите первообразную для функции $f(x) = 3x^2$, которая проходит через точку $A\ (0;\ 7)$.

Решение. $F(x) = x^3 + C$, так как $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(\,x)$. Подставим в уравнение первообразной координаты точки A: $7 = 0^{\,3} + C, C = 7.$ Значит, искомая первообразная имеет вид:

$$F(x) = x^3 + 7.$$

Задания

1. Сформулируйте и докажите правила дифференцирования. Приведите примеры применения каждого из рассмотренных правил.
2. Исследовать функцию $y = x - 2arctg\ x$ и построить её график.
3. Сформулируйте и докажите правила нахождения первообразной функции.
4. Анализируя предложенные ниже задачи, выявите, как применяется понятие первообразной при их решении:

- Тело движется прямолинейно, и его скорость изменяется по закону $v(t) = (2t - 3)$ м/с. В момент времени $t = 5$ с тело находится на расстоянии $s = 10$ м от начала отсчёта. Укажите формулу, которой задаётся зависимость расстояния от времени:
  1) $s(t) = t^2 - 3t$; 2) $s(t) = t^2 - 3t - 20$;
  3) $s(t) = t^2 - 3t + 10$; 4) $s(t) = t^2 + 3t - 10$.
- Найдите значение выражения $3S$, если S – площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 2x - 2$ и графиком её первообразной $F(x)$, зная, что $F(0) = 1$.
- Найдите объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной заданными линиями: $y = \frac{1}{x^2}$; $x = \frac{1}{2}$; $y = x$.

Список рекомендуемой литературы

1. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с.
2. Виленкин, Н. Я. Производная и задачи на экстремумы / Н. Я. Виленкин // Квант. – 1978. – № 6. – С. 60 – 64.
3. Могильницкий, В. А. Производная и её применение : учеб. пособие / В. А. Могильницкий, С. А. Шунайлова. – Челябинск : Издат. центр ЮУрГУ, 2011. – 107 с. – URL : http://www.lib.susu.ac.ru/ftd?base=SUSU_METHOD&key=000461864&dtype=F&etype=.pdf (дата обращения: 16.05.2014).
4. Парно, И. К. Производная и её применение к исследованию функций : пособие для учителей / И. К. Парно. – М. : Просвещение, 1968. – 120 с.

Глава 2
ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ (ЗАДАЧИ НА ОПТИМУМ)

> Рано или поздно всякая правильная
> математическая идея находит
> применение в том или ином деле.
> *Алексей Николаевич Крылов*

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: найдите точки экстремума и экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$.

Теоретическое задание: рассмотрите классификацию прикладных задач, выделите среди них задачи на оптимизацию; сформулируйте алгоритм их решения.

План:

2.1. Понятие точки экстремума и экстремума функции.
2.2. Наибольшее и наименьшее значение функции.
2.3. Примеры решения прикладных задач.

Экстремальной задачей в математике называют задачу на максимум или минимум (экстремум) функции по переменным, удовлетворяющим некоторым ограничениям.

Уже в Древней Греции знали об экстремальных свойствах круга и шара: среди плоских фигур с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет круг; шар имеет максимальный объём среди пространственных фигур с одинаковой площадью поверхности. Экстремальными задачами занимались многие античные учёные (Евклид, Архимед, Аристотель и др.). Известна следующая задача Евклида (IV в. до н.э.): в заданный треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади. После гибели античной цивилизации научная жизнь в Европе стала возрождаться только в XV в.

Ключевые понятия

- **точки экстремума**
- **экстремум функции**
- **наибольшее и наименьшее значения функции**
- **задачи на оптимум**

Экстремальные задачи оказались среди тех, которыми интересовались лучшие умы того времени. Если в античные времена экстремальные задачи исследовались только геометрическими методами и каждая задача для своего решения требовала специфического приёма, то в XVII в. появились общие методы изучения задач этого вида.

С конца XVII до середины XX в. теория экстремальных задач прошла огромный путь. В её развитии приняли участие почти все великие математики прошлого. Среди них Х. Гюйгенс, К. Ф. Гаусс, А. М. Лежандр, П. Г. Дирихле, Б. Риман, У.Р. Гамильтон, К. Г. Якоби, К. Т. Вейерштрасс, Д. Гильберт и др. К середине XX в. создалось впечатление, что теория экстремальных задач достигла такого уровня, который позволяет решить любую экстремальную задачу, возникающую в науке и практике.

Историческое замечание

История сохранила легенду о самой древней экстремальной задаче, известной как **задача Дидоны**. Финикийская царевна решила организовать поселение на берегу понравившегося ей залива в Северной Африке. Она уговорила вождя местного племени отдать ей клочок земли, который можно охватить воловьей шкурой. Воины Дидоны разрезали шкуру на тонкие полоски, и она охватила ремнём, составленным из этих полосок, участок земли на берегу залива. Так возник город Карфаген. Задача Дидоны состоит в указании формы границы участка, имеющей заданную длину, при которой площадь участка максимальна.

2.1. Понятие точки экстремума и экстремума функции

Точки экстремума – это внутренние точки области определения, в которых функция принимает самое большое (точка локального максимума) или самое малое значение (точка локального минимума) по сравнению со значениями функции в близких точках.

Определение 1. Точка x_0 называется **точкой максимума [точкой минимума]** функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех значений $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$.

Определение 2. Значение функции в точке максимума (точке минимума) называется **максимумом (минимумом)** функции $y = f(x)$.

Определение 3. Точки минимума и точки максимума называются **точками экстремума** функции $y = f(x)$, а значения функции в этих точках – **экстремумами функции** $y = f(x)$.

Функция может иметь на промежутке несколько точек максимума и/или минимума (рис. 68).

Самостоятельно. Сколько экстремумов может иметь функция на промежутке?

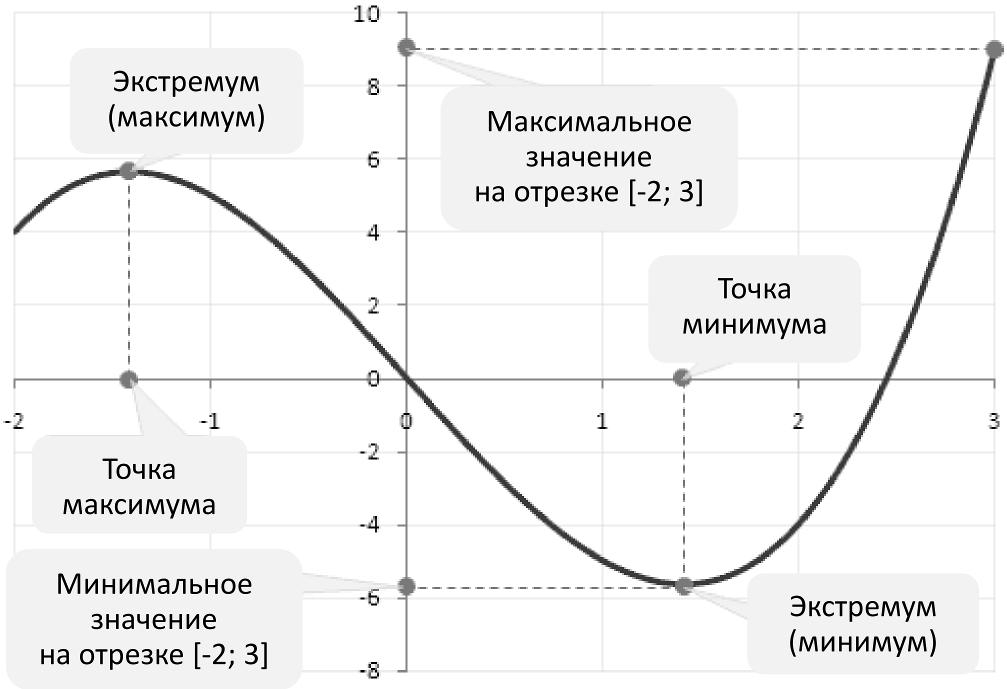


Рис. 68

Необходимое условие экстремума. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то её производная $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых производная равна нулю: $f'(x) = 0$, называются **стационарными точками функции**.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для непрерывной функции, называются **критическими точками** этой функции. То есть **критические точки** – это либо стационарные точки (решения уравнения $f'(x_0) = 0$), либо это точки, в которых производная $f'(x)$ не существует.

Достаточное условие существования экстремума. Пусть для функции $y = f(x)$ выполнены следующие условия:

1) функция непрерывна в окрестности точки x_0;
2) $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует;
3) производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет свой знак.

Тогда в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет экстремум, причём это минимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с минуса на плюс; максимум, если при переходе через точку x_0 производная меняет свой знак с плюса на минус.

Пример. Исследовать функцию $f(x) = x^4 - 1$ на экстремум.

Решение. Находим производную заданной функции: $f'(x) = (x^4 - 1)' = 4x^3$. Производная определена во всех точках.

Далее ищем критические точки функции, для этого решаем уравнение $f'(x) = 0$; $4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Таким образом, функция имеет одну критическую точку $x = 0$. Наносим эту точку на числовую прямую (рис. 69) и исследуем знак производной слева и справа от этой точки (для этого из каждого промежутка берём произвольное значение и находим значение производной в выбранной точке, определяем знак полученной величины).

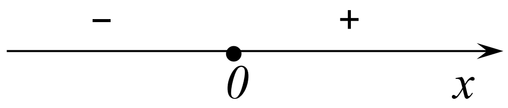


Рис. 69

Так как при переходе через точку $x = 0$ производная сменила свой знак с «минуса» на «плюс», то в этой точке функция достигает минимума, причём $y_{min} = y(0) = 0^4 - 1 = -1$.

Самостоятельно. Составьте алгоритм нахождения точек экстремума и экстремумов функции.

2.2. Наибольшее и наименьшее значение функции

Определение. **Наибольшим [наименьшим] значением функции $f(x)$ на отрезке от a до b** называется такое число M $[m]$, что существует $x_0 \in [a;\, b]$, для которого $f(x_0) = M$ $[f(x_0) = m]$, причём $M \geq f(x)$ $[m \leq f(x)]$ для всех x данного отрезка. Наибольшее и наименьшее значения на отрезке функция может принимать либо на концах промежутка, либо в критических точках (рис. 70).

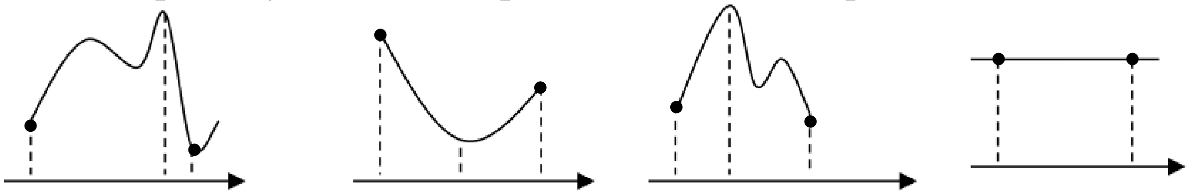


Рис. 70

Самостоятельно. Есть ли на рис. 70 случай, где отсутствует наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке?

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего на $[a; b]$ *значений функции, непрерывной на* $[a; b]$.

1. Найдите $f(a)$ и $f(b)$ – значения функции на концах промежутка.
2. Найдите критические точки функции внутри промежутка $(a; b)$.
3. Найдите значения функции в критических точках.
4. Из всех найденных значений выберите наибольшее и наименьшее числа; они и будут наибольшим и наименьшим значениями функции на $[a; b]$.

Пример. $f(x) = 8x^2 - x^4$ при $x \in [-1; 3]$.

Решение. Найдём значение функции на концах промежутка:

$$f(-1) = 7, f(3) = -9.$$

Найдём критические точки функции внутри промежутка $(-1; 3)$:

$$f'(x) = 16x - 4x^3, f'(x) = 0, x = 0, x = 2, x = -2, -2 \notin [-1; 3].$$

Найдём значение функции в критических точках:

$$f(0) = 0, f(2) = 16.$$

Выберем наибольшее и наименьшее:

$$max\,\{7; -9; 0; 16\} = 16 \Rightarrow max_{[-1;3]}\, f(2) = 16,$$

$$min\,\{7; -9; 0; 16\} = -9 \Rightarrow min_{[-1;3]}\, f(3) = -9.$$

Если непрерывная функция имеет на промежутке единственную точку экстремума и она является точкой максимума (минимума), то в этой точке функция и достигает наибольшее (наименьшее) значение.

Пример 1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |x - a| + |x - b| + |x - c|, \text{ где } a < b < c.$$

Решение. Воспользуемся графическим способом, для этого есть смысл задать функцию так, чтобы не было знаков модулей. Рассмотрим аналитическое выражение функции в каждом из следующих четырёх возможных случаев:

1. Если $x < a$, то $x - a < 0$, $x - b < 0$, $x - c < 0$, значит,

$$|x - a| = a - x, |x - b| = b - x, |x - c| = c - x,$$

и получаем, что $y = -3x + a + b + c$.

2. Если $a \leq x < b$, то $x - a \geq 0$, $x - b < 0$, $x - c < 0$, значит,

$$y = -x + b + c - a.$$

3. Если $b \leq x < c$, то $x - a > 0$, $x - b \geq 0$, $x - c < 0$, значит,

$$y = x - a - b + c.$$

4. Если $x \geq c$, то $x - a > 0$, $x - b > 0$, $x - c \geq 0$, значит,

$$y = 3x - a - b - c.$$

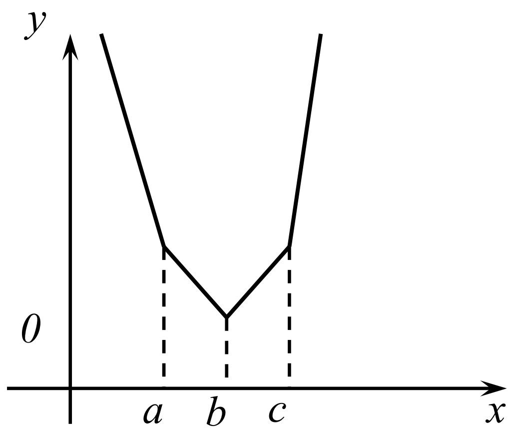


Рис. 71

Заданную функцию можно переписать в следующем виде:

$$y = \begin{cases} -3x + (a + b + c), x < a, \\ -x + (b + c - a), a \leq x < b, \\ x + (c - a - b), b \leq x < c, \\ 3x - (a + b + c), x \geq c. \end{cases}$$

Изобразив график этой функции (рис. 71), делаем вполне очевидный вывод: наименьшее значение функции достигается при $x = b$ и равняется $y_{наим} = c - a$.

2.3. Примеры решения прикладных задач

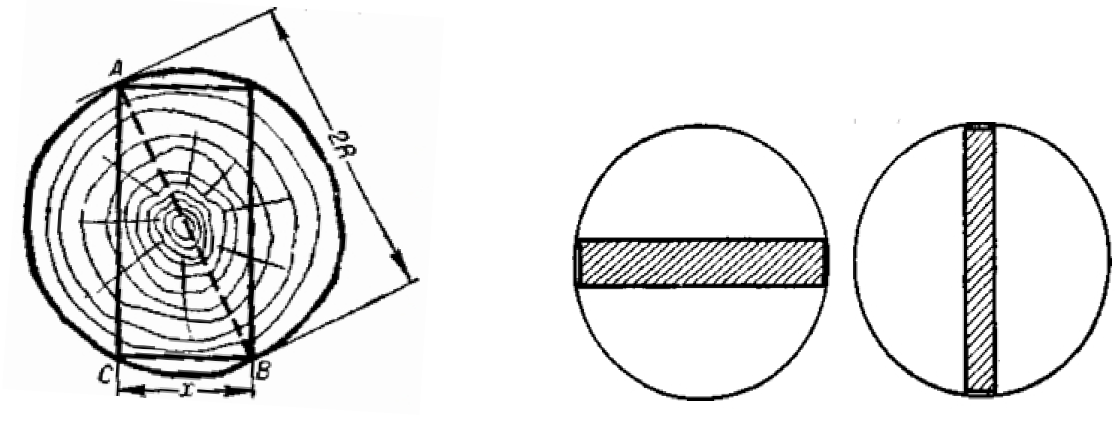
Среди многообразия задач встречаются такие, в которых определяются **экстремальные значения** искомых величин. Нередко в таких случаях на результат одновременно влияют *несколько конкурирующих факторов*, одни из которых способствуют его увеличению, а другие – уменьшению. Такие задачи называют задачами на нахождение максимума или минимума, или задачи на оптимум.

Рассмотрим примеры решения прикладных задач.

Задача 1. Балка является основным элементом любой строительной конструкции, прочность которой зависит от формы её поперечного сечения. Прочность балки с прямоугольным сечением равна kah^2, где k – коэффициент, зависящий от длины балки, материала, из которого она сделана, и т. д. Деревянные балки приходится обычно вытёсывать из круглых брёвен. В связи с этим возникает задача, как *из бревна, имеющего радиус R, сделать балку наибольшей прочности***.**

Решение. На рис. 72, a изображено поперечное сечение бревна. Прочность вырезанной балки будет функцией от ширины этой балки. Но если взять ширину слишком большой (почти равной диаметру бревна), то получится балка очень маленькой высоты и прочность её будет мала (рис. 72, *б*). Мала будет прочность балки, если сделать её слишком узкой.

Составим функцию по условиям задачи. Высота балки, представляющей собой прямоугольник, вписанный в окружность радиусом R и шириной x, равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$. Поэтому прочность такой балки равна $y = kx(4R^2 - x^2)$. При этом x изменяется от 0 до $2R$.



а) *б*)

Рис. 72

Функция $y = kx(4R^2 - x^2)$ обращается в нуль при $x = 0$ и $x = 2R$ и положительна между этими значениями. Значит, она имеет максимум на отрезке $[0; 2R]$. Но производная этой функции $y' = k(4R^2 - 3x^2)$ обращается в нуль на этом отрезке лишь при $x = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$. Это и есть оптимальное значение ширины b балки. Высота h балки такой ширины равна $\frac{2}{3}R\sqrt{6}$ и отношение $\frac{h}{b}$ равно$\sqrt{2} \approx 1{,}4 = \frac{7}{5}$.

Именно такое отношение высоты балки к ширине и предписано правилами производства строительных работ.

Ответ: отношение высоты балки к её ширине равно $\frac{7}{5}$, что обеспечивает наибольшую прочность балки.

Задача 2. Требуется построить открытый цилиндрический резервуар вместимостью V_0. Материал имеет толщину d. Какими должны быть размеры резервуара (радиус основания и высота), чтобы расход материала был наименьшим?

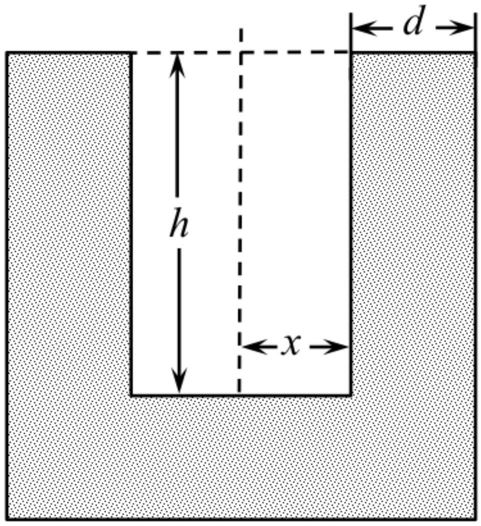


Рис. 73

Решение. На рис. 73 изображён разрез резервуара. Обозначим радиус основания внутреннего цилиндра – x, а высоту – h.

Выразим объём дна и стенки резервуара:

$$V = \pi(x+d)^2 d + \pi[(x+d)^2 - x^2]h = \pi d(x+d)^2 + \pi h(2xd + d^2).$$

С другой стороны, по условию $V_0 = \pi x^2 h$, откуда $h = \frac{V_0}{\pi x^2}$.

Теперь найдём объём:

$$V = \pi d(x+d)^2 + \frac{\pi V_0}{\pi x^2}(2xd + d^2) = \pi d(x+d)^2 + \frac{2V_0 d}{x} + \frac{V_0 d^2}{x^2}.$$

Полученную функцию $V(x)$ нужно исследовать на экстремум при $x > 0$:

$$V'(x) = 2\pi d(x+d) - \frac{2V_0 d}{x^2} - \frac{2V_0 d^2}{x^3} = \frac{2d(x+d)(\pi x^3 - V_0)}{x^3}.$$

Единственный положительный корень производной $x = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$. При этом $h = \frac{V_0 \sqrt[3]{\pi^2}}{\pi \sqrt[3]{V_0{}^2}} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}} = x$.

Ответ: высота и радиус резервуара должны быть равны $\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$.

Вопросы и задания

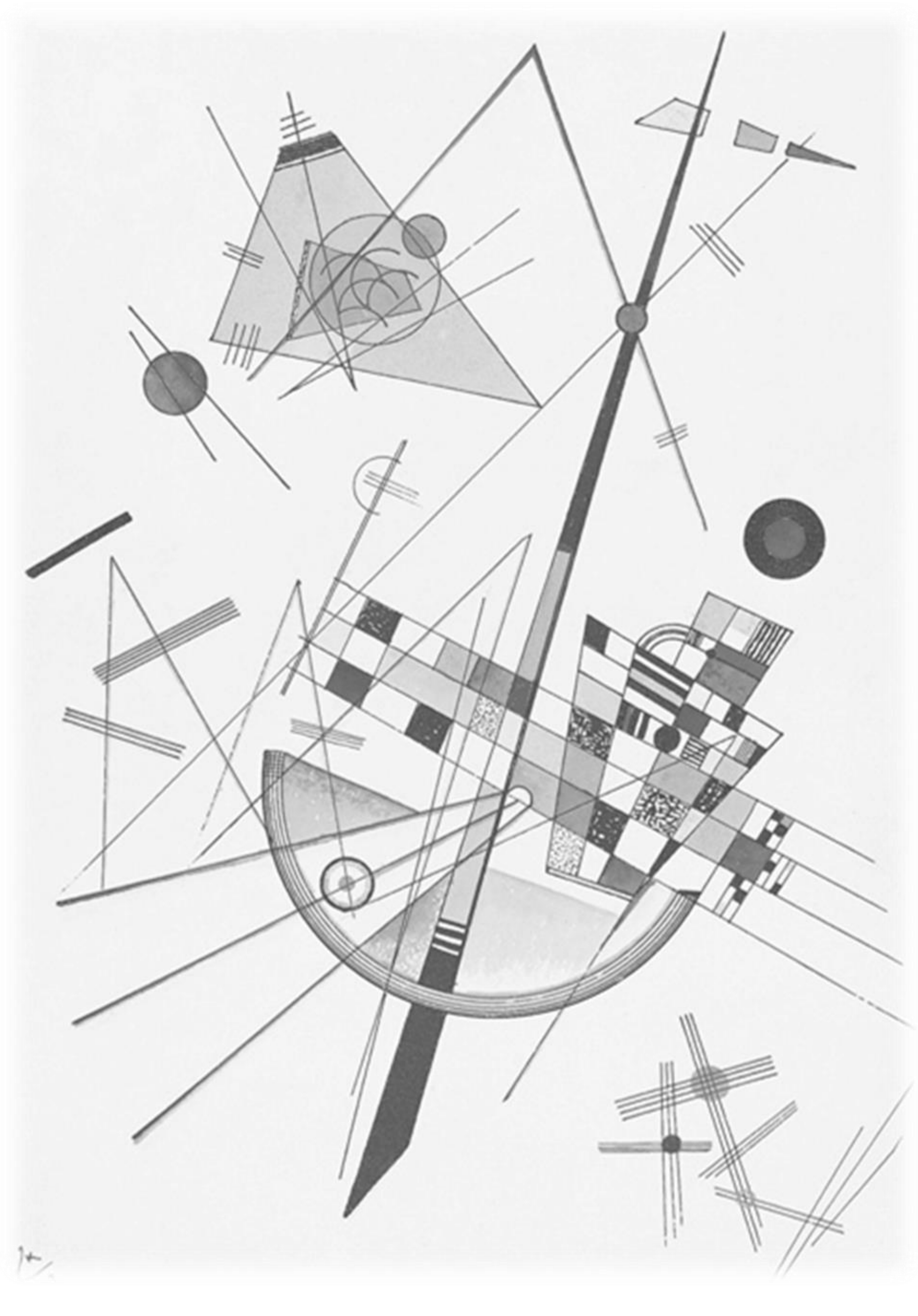
1. Всегда ли применим алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции?
2. Подберите примеры применения производной при решении задач.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x,\ x \in [0; \pi]$.

Список рекомендуемой литературы

1. Виленкин, Н. Я. Производная и задачи на экстремумы / Н. Я. Виленкин // Квант. – 1978. – № 6. – С. 60 – 64.
2. Габасов, Р. Ф. Экстремальные задачи в современной науке и приложениях / Р. Ф. Габасов // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 6. – С. 115 – 120.
3. Савин, А. Максимум, минимум и теорема о средних / А. Савин // Квант. – 1970. – № 11. – С. 24 – 26.
4. Шклярский, Д. О. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. – М. : Наука, 1970. – 336 с.

Раздел V

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТРИГОНОМЕТРИИ



Глава 1
АРКФУНКЦИИ (ИЛИ АРКУС-ФУНКЦИИ)

> Функции, как и живые существа,
> характеризуются своими особенностями.
> *Поль Монтель*

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: постройте графики аркфункций.
Теоретическое задание: повторите определения, свойства и графики тригонометрических функций; найдите особые свойства аркфункций.
План:
1.1. Понятие обратной функции.
1.2. Обратные тригонометрические функции.
1.3. Тригонометрические операции над аркфункциями.
1.4. Преобразования выражений, содержащих аркфункции.

Обратные тригонометрические функции (другое название аркфункции, или аркус-функции) – самые малоизученные вами функции. Однако они представляют важную часть тригонометрии и помогают решать богатый спектр заданий.

Название обратной тригонометрической функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавлением приставки «арк-» (от лат. *arcus* – дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку.

Иногда их называют круговыми функциями, поскольку смысл этих функций раскрывается через геометрическую интерпретацию на единичном круге (однако правильнее говорить на единичной окружности).

Ключевые понятия

- **обратная функция**
- **определение аркфункций**
- **геометрический смысл аркфункций**
- **свойства и графики**
- **основные тождества для аркфункций**

1.1. Понятие обратной функции

Из аналитического вида функции $y = \frac{3x+1}{4x-2}$ выразим переменную x и получим: $4xy - 2y = 3x + 1$ или $x(4y - 3) = 2y + 1$, откуда $x = \frac{2y+1}{4y-3}$. Функцию $x = \frac{2y+1}{4y-3}$ называют обратной по отношению к функции $y = \frac{3x+1}{4x-2}$. Так как принято аргумент функции обозначать буквой x, а значение функции буквой y, то обратную функцию записывают в виде $y = \frac{2x+1}{4x-3}$.

Определение. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют обратимой, если любое своё значение она принимает только в одной точке x множества X (т. е. разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции). В противном случае функцию называют необратимой.

Теорема. Если функция $y = f(x)$, $x \in X$ монотонна на множестве X, то она обратима.

Самостоятельно. Приведите примеры обратимых и необратимых функций.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$, где $x \in X$ – обратимая функция и $E(f) = Y$. Поставим в соответствие каждому y то единственное значение x, при котором $f(x) = y$. Тогда получим функцию, которая определена на множестве Y, а множество X – её область значений. Эту функцию обозначают $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ и называют **обратной** по отношению к функции $y = f(x)$, $x \in X$.

На рис. 74 показаны функция $y = f(x)$ и обратная функция $x = f^{-1}(y)$.

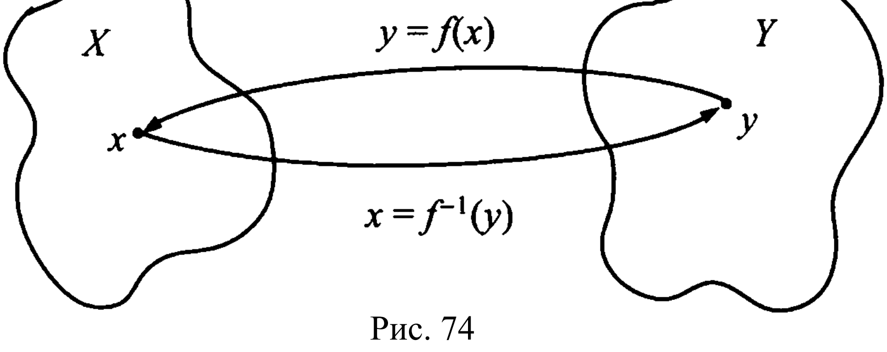


Рис. 74

Прямая и обратная функции имеют одинаковую монотонность.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на множестве X, а Y – её область значений, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ возрастает (убывает) на множестве Y.

Для нас привычно, если аргумент обозначают буквой x, а значение функции – буквой y, поэтому обратную функцию будем записывать в виде $y = f^{-1}(x)$.

Теорема. Графики функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Пример. Для функции $y = 2x - 4$ найдём обратную функцию. Для этого выразим переменную x через y: $2x = y + 4$; $x = \frac{1}{2}y + 2$. Введём переобозначения $x \rightleftarrows y$ и запишем обратную функцию в виде $y = \frac{1}{2}x + 2$. Таким образом, для данной функции обратная функция $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Построим графики этих функций (рис. 75). Легко убедиться, что графики симметричны относительно прямой $y = x$.

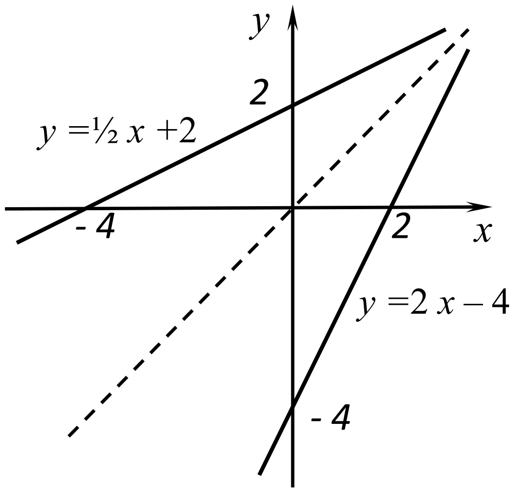


Рис. 75

Функция $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$ обратна по отношению к функции $y = 2x - 4$. Но и функция $y = 2x - 4$ обратна по отношению к функции $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Поэтому функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ называют взаимно обратными. При этом выполняются равенства:

$f^{-1}(f(x)) = x$ и $f(f^{-1}(x)) = x$.

1.2. Обратные тригонометрические функции

Вспомним, какие существуют обратные тригонометрические функции и какими свойствами они обладают.

Арксинус. Для тригонометрической функции $y = \sin x$, рассматриваемой при всевозможных действительных значениях x, переход к обратной функции невозможен. Так, например, значение $y = 0$ функция принимает при бесконечно многих значениях аргумента $x = \pi k$ и по данному значению y не представляется возможным найти единственное значение x. Однако переход к обратной функции станет возможным, если рассматривать $y = sin\, x$ не при произвольных значениях x, а лишь в каком-либо промежутке, в котором функция синуса является монотонной.

Рассмотрим отрезок $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. На этом отрезке $\sin x$ возрастает от -1 до 1 и, следовательно, значения x и y связаны взаимно-однозначным соответствием. Как показано на рис. 76, отрезок $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ и отрезок $-1 \le y \le 1$ взаимно однозначно отображаются друг на друга.

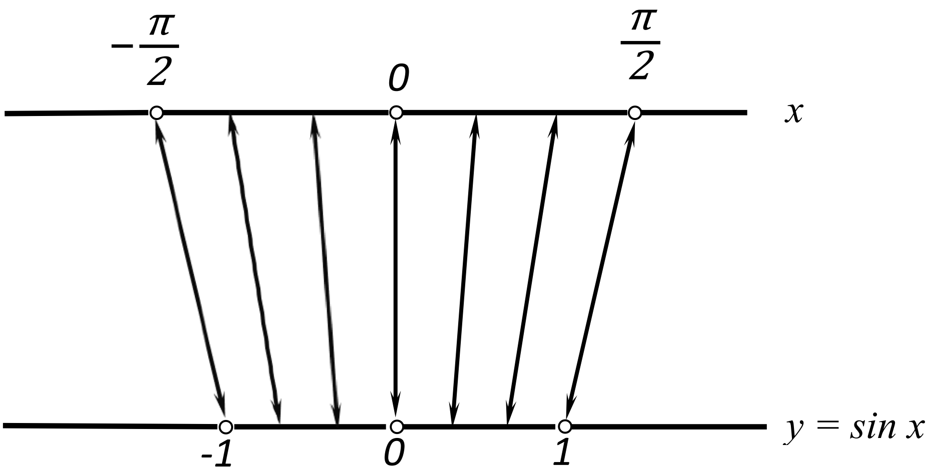


Рис. 76

Итак, какая же функция называется арксинусом?

Определение. Функция, обратная функции $y = sinx$, на отрезке $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, называется **арксинусом** и обозначается так:

$$x = arc\,sin\, y.$$

В геометрической терминологии определение арксинуса можно сформулировать следующим образом: $arc\,sin\, x$ есть дуга, взятая в пределах *от* $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} \le arc\,sin\, x \le \frac{\pi}{2},$$

синус которой равен числу x, где $-1 \le x \le 1$:

$$sin(arc\,sin\, x) = x.$$

В силу определения, при любом значении $|x| \le 1$ имеет место неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \le arc\,sin\, x \le \frac{\pi}{2}.$$

На основании этого же определения имеем: $sin(arc\,sin\, x) = x$ (синус дуги, синус которой равен x).

Рассмотрим эту функцию на примерах:

1) $arc\,sin\,\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$; 2) $arc\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$; 3) $arc\,sin\,(-\frac{1}{2})=-\frac{\pi}{6}$;

4) $arc\,sin\,1=\frac{\pi}{2}$; 5) $arc\,sin\,(-1)=-\frac{\pi}{2}$; 6) $arc\,sin\,(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{\pi}{3}$;

7) $arc\,sin\,0=0$; 8) $arc\,sin\,3$ не имеет смысла.

Обозначим основные свойства арксинуса

1. *Функция* $y=arc\,sin\,x$ *на отрезке* $-1\le x\le 1$ *возрастает от* $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$.

Это следует из монотонности синуса и взаимной однозначности отображения друг на друга отрезков:

$$-1\le x\le 1 \text{ и } -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}.$$

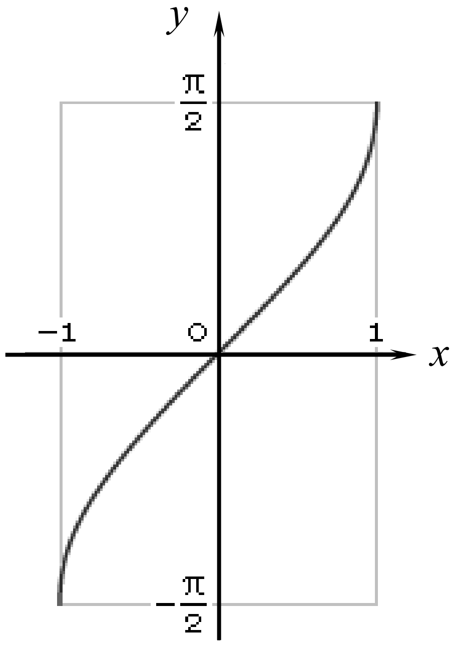


Рис. 77

2. *При изменении знака аргумента функция* $arc\,sin\,x$ *изменяет знак, не изменяя абсолютной величины:*

$$arc\,sin\,(-x)=-arc\,sin\,x.$$

Покажем данные свойства арксинуса на примерах:

1) $arc\,sin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\,arc\,sin\frac{1}{6}=-\frac{\pi}{6}$;

2) $arc\,sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\,arc\,sin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}$.

График арксинуса показан на рис. 77.

Рассмотрим примеры нахождения дуги с помощью арксинуса

1. На отрезке $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ найти дугу γ, имеющую синус, равный $\frac{1}{2}$. Эту дугу можно найти так: $\gamma=\pi-$ $-\,arc\,sin\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

2. На отрезке $[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}]$ найти дугу, синус которой равен $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как $\frac{3\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\pi$ и $\frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi$, то искомой дугой является дуга $arc\,sin\,\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\pi=\frac{7\pi}{4}$.

3. На отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$ найти дугу, синус которой равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-2\pi$ и $-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}-2\pi$, то искомой дугой будет дуга

$$\pi-arc\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}-2\pi=-\pi-arc\,sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{4\pi}{3}.$$

Самостоятельно. Рассмотрите определение и свойства арккосинуса. Приведите примеры нахождения арккосинуса. Постройте график этой функции.

Арктангенс. Теперь вспомним арктангенс и обозначим его особенности.

Точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ (k – любое целое число) разделяют всю числовую прямую на интервалы, в каждом из которых тангенс возрастает и может иметь любое заданное действительное значение, или, как говорят условно, в каждом из рассматриваемых интервалов тангенс возрастает от – ∞ до ∞. Следовательно, в каждом из интервалов $(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k)$ возможен переход к обратной функции.

Определение. Функция, обратная функции $y = tg\ x$ в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, называется **арктангенсом**:

$$x = arc\ tg\ y.$$

В геометрической терминологии это определение формулируется так (меняем местами x и y): $arc\ tg\ x$ есть дуга, взятая в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} < arc\ tg\ x < \frac{\pi}{2},$$

тангенс которой равен x:

$$tg\ (arc\ tg\ x) = x.$$

Примеры нахождения арктангенса:

1) $arc\ tg\ 1 = \frac{\pi}{4}$; 2) $arc\ tg\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$;

3) $arc\ tg\ (-1) = -\frac{\pi}{4}$; 4) $arc\ tg \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Перечислим основные свойства арктангенса.

1. Функция $y = arc\ tg\ x$ в интервале $-\infty < x < \infty$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (сами граничные значения $\pm\frac{\pi}{2}$ исключаются). Это следует из монотонности и взаимной однозначности отображения друг на друга интервалов:

$$-\infty < x < \infty \text{ и } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

2. При изменении знака аргумента имеет место равенство:

$$arc\ tg\ (-x) = -\ arc\ tg\ x.$$

График арктангенса показан на рис. 78.

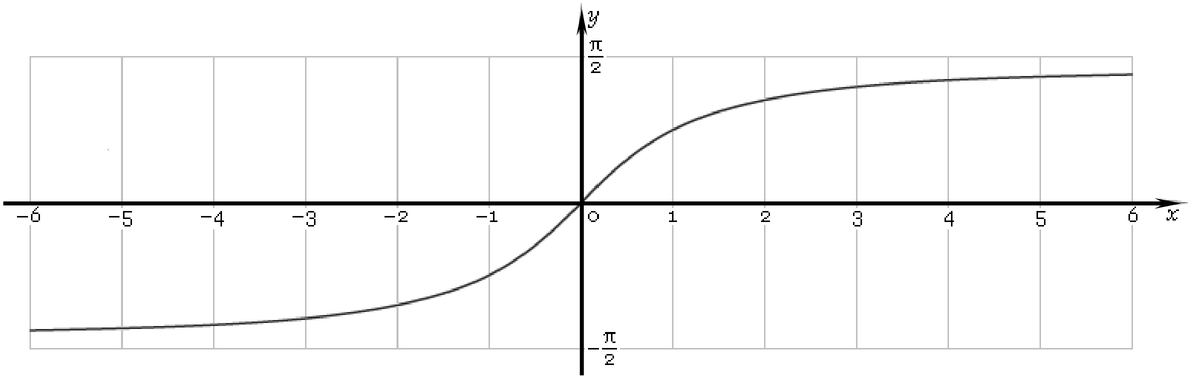


Рис. 78

Рассмотрим примеры нахождения дуги с помощью арктангенса

1. Найдите дугу в интервале $\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которой равен $-\sqrt{3}$. Имеем $-\frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} - \pi$ и $-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi$. Поэтому искомая дуга есть

$$arc\ tg\left(-\sqrt{3}\right) - \pi = -\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3}.$$

2. Найдите дугу в интервале $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$, тангенс которой равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$; имеем $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \pi$ и $\frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + \pi$. Искомая дуга есть

$$arc\ tg\ \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}.$$

Самостоятельно. Рассмотрите определение и свойства арккотангенса. Приведите примеры нахождения арккотангенса. Постройте график этой функции.

1.3. Тригонометрические операции над аркфункциями

Тригонометрические функции от одного и того же аргумента выражаются алгебраически одна через другую, поэтому в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над любой из аркфункций получается алгебраическое выражение.

В силу определений аркфункций:

$$sin(arc\ sin\, x) = x,\ \ cos(arc\ cos\, x) = x \tag{1}$$

на отрезке $-1 \le x \le 1$ и

$$tg(arc\ tg\, x) = x,\ \ ctg(arc\ ctg\, x) = x \tag{2}$$

в интервале $-\infty < x < +\infty$.

Равенства (1) не являются тождествами, справедливыми при всех действительных значениях x. Так, например, при $|x| > 1$ выражение $arc\ sin\, x$, следовательно, и $sin(arc\ sin\, x)$ теряет смысл. Итак, при $|x| > 1$ левая часть равенства $sin(arc\ sin\ x) = x$ не имеет смысла, а правая смысла не теряет, а потому говорить о выполнении равенств (1) не представляется возможным. Равенства (1) суть тождества лишь на отрезке $-1 \leq x \leq 1$.

Самостоятельно. Покажите графически различие между функциями, заданными формулами $y = x$ и $y = sin(arc\ sin\ x)$.

Равенства (2) являются тождествами, справедливыми при всех действительных значениях x.

Перейдём к более сложным преобразованиям.

1. Преобразуем выражение $cos(arc\ sin\ x)$. Мы знаем, что косинус может быть выражен через синус по формуле

$$cos\,\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha}.$$

Полагая в этой формуле $\alpha = arc\ sin\ x$, будем иметь $sin\,\alpha = x$, следовательно, получим

$$cos(arc\ sin\ x) = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Выясним, какой из знаков должен быть взят перед радикалом. Из тригонометрии известно, что косинус дуги, заключённой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, положителен или равен нулю, а так как

$$-\frac{\pi}{2} \leq arc\ sin\ x \leq \frac{\pi}{2},$$

то перед радикалом следует взять знак «+».

Итак, $cos(arc\ sin\ x) = \sqrt{1 - x^2}, (-1 \leq x \leq 1)$.

Полученному соотношению легко дать геометрическую интерпретацию. Рассмотрим тригонометрическую окружность (рис. 79), радиус которой, как всегда, считаем равным 1. Число x есть величина линии синуса BB_1 угла AOB, равного $arcsin\,x$. Величина отрезка OB_1 есть значение косинуса угла AOB:

$$cos\angle AOB = OB_1.$$

По теореме Пифагора получаем

$$OB_1 = \sqrt{1 - BB_1^2} = \sqrt{1 - x^2},$$

откуда: $cos\angle AOB = cos(arc\ sin\ x) = \sqrt{1 - x^2}$.

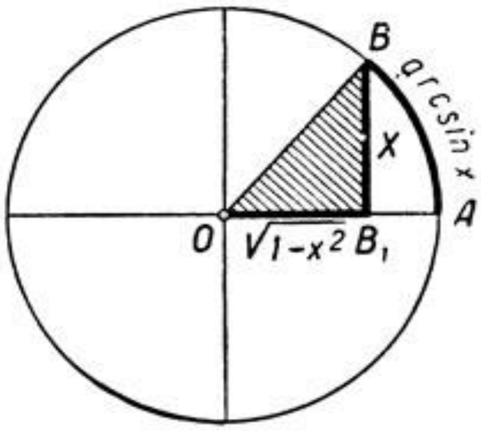


Рис. 79

2. Подобным образом найдём $sin(arc\ cos\ x)$: $sin(arc\ cos\ x) = \sqrt{1 - cos^2(arc\ cos\ x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

В силу неравенства $0 \leq arc\cos x \leq \pi$ имеем $sin(arc\cos x) \geq 0$, а поэтому перед радикалом необходимо взять знак «+».

3. Из соотношения $tg\,\alpha = \frac{1}{ctg\,\alpha}$ следует:

$$tg(arc\,ctg\,x) = \frac{1}{ctg(arc\,ctg\,x)} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

4. В качестве дальнейшего примера рассмотрим функцию $tg(arcsin\,x)$, имеем

$$tg(arc\sin x) = \frac{sin(arc\sin x)}{cos(arc\sin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. На основании формулы тригонометрии, выражающей синус через тангенс $sin\,\alpha = \pm\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$, получим

$$sin(arc\,tg\,x) = \pm\frac{tg(arc\,tg\,x)}{\sqrt{1+tg^2(arc\,tg\,x)}} = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Если $x < 0$, то $sin(arc\,tg\,x) < 0$ и если $x > 0$, то $sin(arc\,tg\,x) > 0$. В правой части мы должны выбрать знак «+», так как только при таком выборе знака дробь $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ будет иметь тот же знак, что и знак x. Итак,

$$sin(arc\,tg\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Приведём перечень формул, получающихся в результате выполнения простейших тригонометрических операций над аркфункциями.

$sin(arc\sin x) = x$	$cos(arc\sin x) = \sqrt{1-x^2}$
$sin(arc\cos x) = \sqrt{1-x^2}$	$cos(arc\cos x) = x$
$sin(arc\,tg\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$cos(arc\,tg\,x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$sin(arc\,ctg\,x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$cos(arc\,ctg\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$tg(arc\sin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$ctg(arc\sin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$tg(arc\cos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$ctg(arc\cos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$tg(arc\,tg\,x) = x$	$ctg(arc\,tg\,x) = \frac{1}{x}$
$tg(arc\,ctg\,x) = \frac{1}{x}$	$ctg(arc\,ctg\,x) = x$

Выражения, находящиеся в правых частях каждого из написанных в таблице равенств, – *алгебраические.* Эти формулы являются не чем иным, как только иначе написанными, но известными из тригонометрии формулами, при помощи которых тригонометрические функции выражаются одна через другую.

1.4. Преобразования выражений, содержащих аркфункции

Переходим к рассмотрению основных преобразований, которые могут быть получены на основе выведенных формул.

1. Преобразуем выражение: $sin(2\ arc\,sin\,x)$. Применяя формулу $sin\,2\alpha = 2\,cos\,\alpha\,sin\,\alpha$, имеем:

$$sin(2\ arc\,sin\,x) = 2\,sin(arc\,sin\,x) \cdot cos(arc\,sin\,x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

2. Подобным же образом устанавливается справедливость равенств:

$$cos(2\ arc\,cos\,x) = cos^2(arc\,cos\,x) - sin^2(arc\,cos\,x) = 2x^2 - 1;$$

$$tg(2\ arc\ tg\ x) = \frac{2\,tg(arc\,tg\,x)}{1-tg^2(arc\,tg\,x)} = \frac{2x}{1-x^2},\ (x \neq \pm 1).$$

3. Пользуясь теоремой сложения и ранее рассмотренными формулами, получим

$$sin(arc\,sin\,x + arc\,sin\,y) = \ sin(arc\,sin\,x) \cdot cos(arc\,sin\,y) +$$
$$+\ cos(arc\,sin\,x) \cdot sin(arc\,sin\,y) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}.$$

4. Следуя приёму, указанному в предыдущем примере, можно доказать следующие равенства:

$$cos(arc\,cos\,x + arc\,cos\,y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2};$$
$$sin(arc\,cos\,x + arc\,sin\,y) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} + xy;$$
$$sin(arc\,sin\,x - arc\,sin\,y) = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2};$$
$$tg(arc\ tg\ x + arc\ tg\ y) = \frac{x+y}{1-xy};$$
$$tg(arc\ tg\ x - arc\ tg\ y) = \frac{x-y}{1+xy};$$
$$tg(arc\ sin\ x + arc\ sin\ y) = \frac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy}.$$

5. Из тригонометрии известно, что $sin\,2\alpha$ и $cos\,2\alpha$ рационально выражаются через $tg\ \alpha$ по следующим формулам:

$$sin\,2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1+tg^2\alpha};\ cos\,2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha},$$

полагая в этих формулах $\alpha = arc\ tg\ x$, получим:

$$sin\ (2arc\ tg\ x) = \frac{2x}{1+x^2};\ cos\ (2arc\ tg\ x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Как и следовало ожидать, мы получили рациональные функции.

6. Преобразуем $sin\left(\frac{1}{2}arc\ sin\ x\right)$.

Полагая в формуле $sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}$, $\alpha = arc\ sin\ x$, получим

$$sin\left(\frac{1}{2}arc\ sin\ x\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(arc\ sin\ x)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = \pm\frac{x}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}}.$$

Знак выражения $sin\left(\frac{1}{2}arc\ sin\ x\right)$ совпадает со знаком x, следовательно, перед радикалом должен быть взят знак «+», так как только тогда знак правой части будет совпадать со знаком x.

Итак, имеем $sin\left(\frac{1}{2}arc\ sin\ x\right) = \frac{x}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}}$.

Самостоятельно. Используя тот же метод, докажите равенства:

$$cos\left(\frac{1}{2}arc\ cos\ x\right) = \sqrt{\frac{1+x}{2}};\ tg\left(\frac{1}{2}arc\ tg\ x\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

Выведем формулы преобразования выражений вида $sin(m\ arc\ sin\ x)$, $cos(m\ arc\ cos\ x)$ и т. д., где $m > 0$ – целое число.

Воспользуемся формулами: $cos\,m\varphi =$

$$= cos^m\varphi - \binom{m}{2}cos^{m-2}\varphi\,sin^2\varphi + \binom{m}{4}cos^{m-4}\varphi\,sin^4\varphi - \cdots \quad (1)$$

(последний член равен $(-1)^{\frac{m-1}{2}}m\,cos\,\varphi\,sin^{m-1}\varphi$ при нечётном m и $(-1)^{\frac{m}{2}}sin^m\varphi$ при m чётном) и $sin\,m\varphi = \binom{m}{1}cos^{m-1}\varphi\,sin\,\varphi -$

$$-\binom{m}{3}cos^{m-3}\varphi\,sin^3\varphi + \binom{m}{5}cos^{m-5}\varphi\,sin^5\varphi - \cdots \quad (2)$$

(последний член равен $(-1)^{\frac{m-1}{2}}sin^m\varphi$ при нечётном m и $(-1)^{\frac{m-2}{2}}m\,sin^{m-1}\varphi\,cos\,\varphi$ при чётном m). В написанных формулах символ $\binom{m}{k}$ означает число сочетаний из m элементов по k.

Формулы (1) и (2) могут быть получены, если воспользоваться известной из теории комплексных чисел формулой Муавра:

$$cos\,m\varphi + i\,sin\,m\varphi = (cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)^m.$$

Разлагая правую часть равенства по формуле бинома Ньютона, получим $cos\,m\varphi + i\,sin\,m\varphi =$

$$= cos^m\varphi + i\binom{m}{1}cos^{m-1}\varphi\,sin\,\varphi - \binom{m}{2}cos^{m-2}\varphi\,sin^2\varphi - \cdots.$$

Приравнивая в этом равенстве действительную часть действительной и мнимую мнимой, получим формулы (1) и (2).

Полагая в формуле (2) $\varphi = arc\ sin\ x$ и пользуясь равенством

$$cos(arc\ sin\, x) = \sqrt{1-x^2},$$

получим

$$sin(m\ \ arc\ sin\, x) = \binom{m}{1}(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}x - \binom{m}{3}(1-x^2)^{\frac{m-3}{2}}x^3 + \cdots.$$

Подобным же образом, полагая в формуле (1) $\varphi = arc\ cos\ x$, будем иметь

$$cos(m\ \ arc\ cos\, x) = x^m - \binom{m}{2}(1-x^2)x^{m-2} + \binom{m}{4}(1-x^2)^2x^{m-4} - \cdots.$$

Приведённые примеры не исчерпывают всех возможных этого рода преобразований, однако методы их выполнения выяснены достаточно подробно.

Разберём некоторые примеры преобразований аркфункций.

> ***Историческое замечание***
>
> Последнее равенство показывает, что функция $cos(m\ \ arc\ cos\, x)$, определенная на отрезке $[-1, 1]$ (так как только на этом отрезке $arc\ cos\, x$ имеет смысл), совпадает на этом отрезке с некоторым многочленом -й степени. Эти многочлены носят название полиномов Чебышёва, по имени великого русского учёного Пафнутия Львовича Чебышёва.

1. Доказать, что $x + y + z = xyz$ при условии

$$arc\ tg\ x + arc\ tg\ y + arc\ tg\ z = \pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$tg(\alpha+\gamma+\beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta \cdot tg\ \gamma}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta - tg\ \beta \cdot tg\ \gamma - tg\ \alpha \cdot tg\ \gamma}.$$

Согласно условию, имеем

$$tg(arc\ tg\ x + arc\ tg\ y + arc\ tg\ z) = 0,$$

откуда $\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz} = 0$, следовательно, $x + y + z = xyz$.

2. Показать, что:

$$cos\left(\frac{1}{2} arc\ sin\ x\right) = \frac{|x|}{\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}}.$$

Решение. Полагая в формуле

$$cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}},\ \alpha = arc\ sin\ x,$$

после преобразований получим

$$cos\left(\frac{1}{2}arc\ sin\ x\right) = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}} = \frac{|x|}{\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}};$$

так как $cos\left(\frac{1}{2}arc\ sin\ x\right) > 0$, то в числителе следует взять x по абсолютной величине.

Задания

1. Рассмотрите свойства арккосинуса и арккотангенса по аналогии с предложенными в п. 1.2 свойствами арксинуса и арктангенса.
2. Познакомьтесь с соотношениями между аркфункциями первого и второго рода.
3. Докажите, что $tg(m\ arc\ tg\ x) = \frac{\binom{m}{1}x-\binom{m}{3}x^3+\cdots}{1-\binom{m}{2}x^4+\binom{m}{4}x^2-\cdots}$, если при всяком целом m эта функция является рациональной.

Список рекомендуемой литературы

1. Истер, А. С. Аркфункция от А до Я / А. С. Истер. – Киев : Факт, 1998. – 160 с. – ISBN 966-7274-11-X.
2. Крамор, В. С. Тригонометрические функции. Система упражнений для самостоятельного изучения : пособие для учащихся / В. С. Крамор, П. А. Михайлов. – М. : Просвещение, 1983. – 159 с.
3. Литвиненко, В. Н. Практикум по решению математических задач. Алгебра. Тригонометрия : учеб. пособие для студентов физ-мат. специальностей пед. ин-тов и учителей / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М., 1991. – 352 с. – ISBN 5-09-003393-5.
4. Новосёлов, С. И. Обратные тригонометрические функции / С. И. Новосёлов. – М. : Просвещение, 1960. – 127 с.
5. Рурукин, А. Н. Алгебра и начала анализа. 10 класс. Поурочные разработки к УМК А. Г. Мордковича и др. / А. Н. Рурукин, Л. Ю. Хомутова, О. Ю. Чеканова. – М. : Вако, 2015. – 352 с.
6. Самаров К., Шабунин М. Обратные тригонометрические функции / К. Самаров, М. Шабунин // Квант. – 1983. – № 4. – С. 30 – 34.
7. Фалин, Г. И. Обратные тригонометрические функции. 10 – 11 классы / Г. И. Фалин, А. И. Фалин.– М. : Экзамен, 2012. – 221 с. – ISBN 978-5-377-04300-3.

Глава 2

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ АРКФУНКЦИИ

> Уравнения для меня важнее,
> потому что политика – для настоящего,
> а уравнения – для вечности.
> *Альберт Эйнштейн*

Опережающая самостоятельная работа

Практическое задание: решите уравнение и неравенство:
$arc\ tg\frac{x}{x-1} = 2\ arc\ tg\ (x-1)$, $arc\ tg\ (x+1) + arc\ tg\ (1-x) \geq \frac{\pi}{4}$.

Теоретическое задание: изучите простейшие уравнения и неравенства, содержащие аркфункции; сравните способы их решения с простейшими тригонометрическими уравнениями и неравенствами.

План:

2.4. Простейшие уравнения, содержащие аркфункции.
2.5. Простейшие неравенства, содержащие аркфункции.
2.6. Уравнения, приводимые к алгебраическим.

При решении тригонометрических уравнений и неравенств используются не только свойства тригонометрических функций, но и разнообразие формул – тригонометрические тождества, среди которых особое место занимает так называемая «тригонометрическая единица» ($sin^2x + cos^2x = 1$, $tg\ x \cdot ctg\ x = 1$).

> ***Ключевые понятия***
>
> - **простейшие уравнения и неравенства, содержащие аркфункции**
> - **уравнения, приводимые к алгебраическим, и способы их решения**

Кроме вышеназванных в тригонометрии существуют уравнения и неравенства, содержащие аркфункции, которые требуют определения. Далее, как обычно, начинают с решения простейших уравнений и неравенств, постепенно переходя к более сложным, содержащим разные аркфункции и различные аргументы.

2.1. Простейшие уравнения, содержащие аркфункции

Начнём с рассмотрения простейших уравнений.

Определение. **Простейшими уравнениями, содержащими аркфункции,** называют уравнения вида

$arc\,sin\,x = m,\ arc\,cos\,x = m,\ arc\,tg\,x = m,\ arc\,ctg\,x = m,$

в которых требуется найти неизвестное по заданному значению одной из аркфункций. Рассмотрим подробнее одно из этих уравнений.

Возьмём, например, первое уравнение

$$arc\,sin\,x = m.$$

Это уравнение не всегда имеет решение. В самом деле, значения функции $arc\,sin\,x$ заключены на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а поэтому данное уравнение может иметь решение только в том случае, если выполнено неравенство $|m| \leq \frac{\pi}{2}$. При соблюдении этого условия получаем единственное решение уравнения: $x = sin\,m$.

Аналогично рассматриваются прочие простейшие уравнения. Уравнение $arc\,cos\,x = m$ имеет единственное решение: $x = cos\,m$ при условии $0 \leq m \leq \pi$ и не имеет решений, если m не принадлежит отрезку $[0;\ \pi]$.

Уравнение $arc\,tg\,x = m$ имеет единственное решение: $x = tg\,m$ при условии, если m принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Уравнение $arc\,ctg\,x = m$ имеет единственное решение: $x = ctg$ m, если m принадлежит интервалу $(0; \pi)$.

Непосредственно приводятся к простейшим уравнения линейные относительно аркфункции, под знаком которой содержится неизвестное. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$A\,arc\,sin\,x + B = 0.$$

Решая это уравнение относительно $arc\,sin\,x$, получим

$$arc\,sin\,x = -\frac{B}{A},$$

или, полагая $-\frac{B}{A} = m$, придём к простейшему уравнению

$$arc\,sin\,x = m.$$

Не представляет затруднений рассмотрение уравнений, в которых под знаком аркфункции содержится какая-либо функция от неизвестного. Так, например, уравнение

$$arc\,sin\,f(x) = m, \text{ где } -\frac{\pi}{2} \leq m \leq \frac{\pi}{2},$$

равносильно уравнению $f(x) = sin\,m$, не содержащему аркфункции.

Примеры.

1. Решите уравнение $6\, arc\ sin\, x - \pi = 0$.

Решение: $arc\ sin\, x = \frac{\pi}{6},\ x = sin\frac{\pi}{6},\ x = \frac{1}{2}$.

2. Решите уравнение $2\, arc\ sin\, x - 8 = 0$.

Решение: $arc\ sin\, x = 4$, так как $4 > \frac{\pi}{2}$, то уравнение не имеет решений.

3. Решите уравнение $3\, arc\ sin\sqrt{x} - \pi = 0$.

Решение: $arc\ sin\sqrt{x} = \frac{\pi}{3}, \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{3}{4}$.

4. Решите уравнение $4\, arc\ tg(x^2 - 3x + 3) - \pi = 0$.

Решение: $arc\ tg(x^2 - 3x + 3) = \frac{\pi}{4};\ \ x^2 - 3x + 3 = 1$, откуда $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Рассмотрим уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком лишь одной аркфункции. Возьмём, например, уравнение

$$f(arc\, sin\, x) = 0.$$

Введём новое неизвестное $y = arc\, sin\, x$, тогда получим

$$f(y) = 0.$$

Пусть $y_1;\ y_2;\ \dots\ y_n$ – корни уравнения $f(y) = 0$, тогда корни уравнения $f(arc\, sin\, x) = 0$ находятся путем решения простейших уравнений: $arc\ sin\, x = y_1$; $arc\ sin\, x = y_2$; … ; $arc\ sin\, x = y_n$.

Решим, например, уравнение

$$2\, arc\, sin^2\, x - 5\, arc\, sin\, x + 2 = 0.$$

Находя корни квадратного уравнения $2y^2 - 5y + 2 = 0$, получаем $y_1 = 2$ и $y_2 = \frac{1}{2}$.

Из двух простейших уравнений $arc\, sin\, x = 2$ и $arc\, sin\, x = \frac{1}{2}$ только второе даёт решение данного уравнения: $x = sin\frac{1}{2}$.

Первое не имеет решений, потому что $2 > \frac{\pi}{2}$.

Уравнение $f(arc\ sin\, x\, , arc\ cos\, x) = 0$, содержащее неизвестное под знаками арксинуса и арккосинуса, приводится к уравнению рассмотренного типа. В самом деле, воспользовавшись тождеством

$$arc\ sin\, x + arc\ cos\, x = \frac{\pi}{2},$$

можно выразить одну из аркфункций через другую и, подставив в данное уравнение, получить уравнение, содержащее лишь одну аркфункцию. Это же замечание относится к уравнениям вида

$$f(arc\ tg\, x\, , arc\ ctg\, x) = 0.$$

Рассмотрим уравнение

$$m \cdot arc\ sin\, x + n \cdot arc\ cos\, x = p, \text{ где } m \neq n.$$

Заменяя в этом уравнении $arc\ cos\, x$ через $\frac{\pi}{2} - arc\ sin\, x$, получим

$$m \cdot arc\ sin\, x + n\left(\frac{\pi}{2} - arc\ sin\, x\right) = p, \text{ или}$$

$$(m-n)\, arc\ sin\, x = p - n\frac{\pi}{2}, \text{ откуда } arc\ sin\, x = \frac{2p - n\pi}{2(m-n)}.$$

Уравнение имеет решение только при выполнении условия

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{2p - n\pi}{2(m-n)} \leq \frac{\pi}{2}, \text{ при котором получим } x = sin\frac{2p - n\pi}{2(m-n)}.$$

2.2. Простейшие неравенства, содержащие аркфункции

По аналогии с уравнениями определим простейшие неравенства, содержащие аркфункции.

Определение. **Простейшими неравенствами, содержащими аркфункции,** называют неравенства вида

$arc\ sin\, x \lesseqgtr m,\ arc\ cos\, x \lesseqgtr m,\ arc\ tg\, x \lesseqgtr m,\ arc\ ctg\, x \lesseqgtr m,$

в которых требуется найти неизвестное по заданному значению одной из аркфункций.

Замечание. Знаки неравенства могут быть и такими: $\leq$; $\geq$.

Рассмотрим решение некоторых неравенств.

Пример 1. Решите неравенство: $arc\ sin\, x \leq -\frac{\pi}{4}$.

Решение. По определению $-\frac{\pi}{2} \leq arc\ sin\, x \leq \frac{\pi}{2}$ для $-1 \leq x \leq 1$, поэтому решением данного неравенства является отрезок $\left[-1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Пример 2. Решите неравенство: $arc\ tg\, x \leq -\frac{\pi}{3}$.

Решение. По определению $-\infty \leq arc\ tg\, x \leq \infty$ для $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, поэтому решением данного неравенства является промежуток $(-\infty;\ -\sqrt{3}]$.

Пример 3. Решите неравенство: $arc\ sin(x^2 - 2x + 1) > 0$.

Решение. Имеем $sin\, 0 < x^2 - 2x + 1 \leq 1$, т.е. $\begin{cases}(x-1)^2 > 0,\\ x^2 - 2x \leq 0.\end{cases}$

Откуда $\begin{cases}x \neq 1,\\ 0 \leq x \leq 2.\end{cases}$

Решением неравенства являются $x \in [0; 1) \cup (1; 2]$.

Самостоятельно. Решите неравенство:

$$-\frac{\pi}{3} \le arc\,sin(x^2 - 3x) \le \frac{\pi}{6}.$$

Пример 4. Решите неравенство: $arc\,sin\;(x+1) < arc\,sin\,2x$.

Решение. Имеем $-1 \le 1 + x < 2x \le 1$, отсюда $\begin{cases} 1 + x \ge -1, \\ 1 + x < 2x, \\ \quad 2x \le 1. \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge -2, \\ x > 1, \\ x \le \frac{1}{2}. \end{cases}$ Полученная система неравенств не имеет решений, значит, и у исходного неравенства нет решений.

Самостоятельно. Решите неравенство:

$$arc\,cos\;(1 - x) < arc\,cos\,0{,}5x.$$

2.3. Уравнения, приводимые к алгебраическим

Основной приём решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, заключается в том, что над обеими частями уравнения производится некоторая тригонометрическая операция. Следует иметь в виду, что выполнение тригонометрической операции над обеими частями уравнения может привести к уравнению, неравносильному данному.

Возьмём, например, синус от обеих частей уравнения

$$f(x) \;=\; \varphi(x), \tag{1}$$

тогда получим уравнение

$$sin\,f(x) \;=\; sin\,\varphi(x). \tag{2}$$

К тому же уравнению мы придём, если возьмём синус обеих частей уравнения:

$$f(x) = (-1)^n \cdot \varphi(x) + n \cdot \pi \tag{3}$$

при любом целом значении n. Поэтому среди решений уравнения (2), кроме корней уравнения (1), содержатся все корни уравнений вида (3) при любом целом n.

Во многих случаях в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над обеими частями уравнения, содержащего аркфункции, получается алгебраическое уравнение. В каждом таком случае корни данного уравнения содержатся среди корней алгебраического уравнения. Следовательно, для решения данного уравнения достаточно найти все решения алгебраического уравнения в поле действительных чисел и подвергнуть их проверке посредством подстановки в исходное уравнение. Проверка корней необходима, так как выполнение тригонометрической операции может внести «посторонние» решения.

Алгебраические функции, получающиеся в результате выполнения тригонометрических операций над аркфункциями, вообще говоря, являются *иррациональными*. Следовательно, алгебраические уравнения, получающиеся после выполнения тригонометрических операций над обеими частями данного уравнения, в общем случае будут также *иррациональными*. Освобождение иррационального уравнения от радикалов также может привести к появлению посторонних решений.

Рассмотрим на примерах различные приёмы решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

1. Решить уравнение

$$\pi - arc\,sin\,x = arc\,cos\,x. \qquad (4)$$

Возьмем синус от обеих частей

$$sin\,(\pi - arc\,sin\,x) = sin\,(arc\,cos\,x),$$

откуда

$$sin\,(arc\,sin\,x) = sin\,(arc\,cos\,x) \text{ или } x = \sqrt{1-x^2}. \qquad (5)$$

Возводя в квадрат обе части, получим $2x^2 = 1$, значит,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значение $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ не является корнем иррационального уравнения (5). Это «посторонний» корень, появившийся в результате возведения в квадрат обеих частей уравнения (4).

Значение $\frac{1}{\sqrt{2}}$ является корнем иррационального уравнения, но не является корнем уравнения (4), так как данное уравнение не имеет решений.

В самом деле, предположив противное, мы придём к противоречию с тождеством

$$arc\,sin\,x + arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2}.$$

Значение $\frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяет другому уравнению

$$arc\,sin\,x = arc\,cos\,x.$$

Если взять синус от обеих частей этого последнего уравнения, то получится то же самое иррациональное уравнение.

2. Решим уравнение

$$arc\,sin\,mx = arc\,cos\,nx. \qquad (6)$$

Для получения алгебраического уравнения, которому должно удовлетворять неизвестное, произведём над обеими частями данного уравнения какую-нибудь тригонометрическую операцию. Поступим, например, так:

$$sin\ (arc\,sin\ mx)\ = sin\ (arc\,cos\,nx).$$

Откуда получим иррациональное уравнение $mx = \sqrt{1-n^2x^2}$.

При возведении обеих частей в квадрат, получим

$$(m^2+n^2)\cdot x^2 = 1,\text{ значит, } x = \pm\ \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}\,.$$

3. Решим уравнение

$$arc\,sin\,2x + arc\,sin\,x = \frac{\pi}{3}. \qquad (7)$$

Приравнивая косинусы обеих частей, получим алгебраическое уравнение: $cos\ (arc\,sin\,2x + arc\,sin\,x) = \frac{1}{2}$, откуда

$$\sqrt{1-4x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} - 2x^2 = \frac{1}{2}.$$

Освобождаясь от иррациональности, получаем

$$1 - 5x^2 = \frac{1}{4} + 2x^2.$$

Среди корней этого квадратного уравнения находятся решения уравнения (7). Решая квадратное уравнение, получим $x = \pm\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Самостоятельно. Убедитесь в том, что только одно из полученных выше значений является корнем уравнений (6) и (7).

4. Решить уравнение

$$arc\ tg\ (x+2) - arc\ tg\ (x+1)\ = \frac{\pi}{4}.$$

Если взять тангенс от обеих частей, то получим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$, которое имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = -1$.

Оба найденные значения удовлетворяют данному уравнению.

5. Решить уравнение

$$arc\,sin\,x\ +\ arc\,cos\,(1-x)\ =\ arc\,sin\,(-x). \qquad (8)$$

Данное уравнение равносильно следующему уравнению

$$2\,arc\,sin\,x\ +\ arc\,cos\,(1-x)\ =\ 0,\text{ откуда}$$

$$2\,arc\,sin\,x\ =\ -\,arc\,cos\,(1-x).$$

Приравнивая косинусы обеих частей, получим

$$cos\,(2\,arc\,sin\,x)\ =\ 1-x,\text{ следовательно, } 2x^2\ -\ x\ =\ 0.$$

Корни полученного уравнения: $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$.

Производя подстановку в данное уравнение, можно заметить, что ему удовлетворяет только первый корень $x = 0$. Второе же значение $x = \frac{1}{2}$ является решением другого уравнения

$$arc\,sin\,x - arc\,cos\,(1 - x) = arc\,sin\,(-x). \tag{9}$$

Самостоятельно. Как уравнение (9) получается из уравнения (8)?

6. Решить уравнение

$$arc\,sin\,mx = arc\,tg\,nx. \tag{10}$$

Взяв тангенс от обеих частей, получим

$$tg\,(arc\,sin\,mx) = tg\,(arc\,tg\,nx),$$

откуда

$$\frac{mx}{\sqrt{1 - m^2x^2}} = nx.$$

Это уравнение имеет очевидное решение $x = 0$. Для отыскания других решений имеем уравнение $m^2n^2x^2 = n^2 - m^2$, откуда при $m \neq 0$ и $n \neq 0$ получим

$$x = \pm\,\frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{mn}.$$

Уравнение (10) не имеет других решений, кроме $x = 0$ в случаях $|m| \geq |n|$, а также, если знаки чисел противоположны. Если числа m и n противоположных знаков и $|m| < |n|$, то найденные значения служат корнями уравнения

$$-arc\,sin\,mx = arc\,tg\,nx.$$

Последнему уравнению соответствует иррациональное уравнение $-\frac{mx}{\sqrt{1-m^2x^2}} = nx$, которое после освобождения от иррациональности приведёт к тому же квадратному уравнению $m^2n^2x^2 = n^2 - m^2$.

Если $m = 0$, но $n \neq 0$, то уравнение (10) примет вид: $arc\,tg\,nx = 0$, которое имеет единственное решение $x = 0$.

Если $n = 0$, но $m \neq 0$, то получим единственное решение $x = 0$.

Если $m = n = 0$, то уравнение удовлетворяется тождественно всеми значениями x.

7. Решить уравнение

$$arc\,sin\,\frac{2}{3\sqrt{x}} - arc\,sin\,\sqrt{1 - x} = arc\,sin\,\frac{1}{3}. \tag{11}$$

Приравнивая синусы обеих частей, получим

$$\frac{2}{3} - \sqrt{1 - \frac{4}{9x}} \cdot \sqrt{1-x} = \frac{1}{3}.$$

После освобождения от иррациональности и элементарных преобразований будем иметь квадратное уравнение

$$9x^2 - 12x + 4 = 0.$$

Это уравнение имеет корень $x = \frac{2}{3}$. Подстановкой легко убедиться, что найденное значение удовлетворяет уравнению (11).

Отметим следующие простейшие случаи, когда можно получить *квадратное уравнение*, среди корней которого содержатся корни уравнения, содержащего аркфункции:

1) $arc\,sin(mx+p) + arc\,sin(nx+q) = a.$

Приравнивая косинусы обеих частей и освобождаясь от иррациональности, получаем квадратное уравнение

$$1 - [(nx+q)^2 + (mx+p)^2] = cos^2 a + 2\,cos\,a\,(mx+p)(nx+q);$$

2) $arc\,cos\,(mx+p) + arc\,cos\,(nx+q) = a.$

Поступая подобным же образом, придём к квадратному уравнению

$$1 - (nx+q)^2 - (mx+p)^2 = cos^2 a - 2\cos a\,(mx+p)(nx+q);$$

3) $arc\,tg(mx+p) + arc\,tg(nx+q) = a.$

Взяв тангенс от обеих частей, получим

$$\frac{(mx+p)+(nx+q)}{1-(mx+p)(nx+q)} = tg\alpha,$$

откуда получим квадратное уравнение:

$$(mx+p) + (nx+q) = tg\,a[1-(mx+p)(nx+q)].$$

Пользуясь формулами

$arc\,sin\,x + arc\,cos\,x = \frac{\pi}{2}$ и $arc\,tg\,x + arc\,ctg\,x = \frac{\pi}{2}$,

мы можем привести к уравнениям рассмотренного вида следующие уравнения

$$arc\,sin\,(mx+p) + arc\,cos\,(nx+q) = a;$$

$$arc\,tg\,(mx+p) + arc\,ctg\,(nx+q) = a.$$

Укажем ряд простейших уравнений, решение которых может быть приведено к решению уравнений высших степеней:

$$n\,arc\,sin\,(ax+b) + m\,arc\,sin\,(cx+d) = e;$$

$$n\,arc\,sin\,(ax+b) + m\,arc\,cos\,(cx+d) = e;$$

…

$$n\ arc\ sin\ (ax+b)+m\ arc\ sin\ (cx+d)+n_1 arc\ cos\ (a_1x+b_1)+$$
$$+m_1\ arc\ cos\ (c_1x+d_1)=e \text{ и т. д.,}$$
где m и n – *целые числа*, а a; b; c; ... – некоторые данные действительные числа.

Рассмотрим более подробно первое из простейших уравнений (с. 119). Приравнивая синусы обеих частей, получим
$$sin\ [n\ arc\ sin\ (ax+b)\ +\ m\ arc\ sin\ (cx\ +\ d)]\ =\ sin\ e, \qquad (12)$$
откуда
$$sin\ [n\ arc\ sin\ (ax+b)]\cdot cos\ [m\ arc\ sin\ (cx+d)]\ +$$
$$+\ cos\ [n\ arc\ sin\ (ax+b)]\cdot sin\ [m\ arc\ sin\ (\text{c}x+d)]=sin\ e.$$
Каждая из функций
$$sin\ [n\ arc\ sin\ (ax+b)];\ cos\ [m\ arc\ sin\ (cx+d)];$$
$$cos\ [n\ arc\ sin\ (ax+b);\ sin\ [m\ arc\ sin\ (\text{c}x+d)$$
является алгебраической, а поэтому уравнение (12) является алгебраическим.

Ясно, что указанным путём можно свести к решению алгебраического уравнения решение любого из уравнений этого же вида, в котором под знаком аркфункций содержатся не обязательно линейные, а какие-либо другие алгебраические функции.

Задания

1. Решите уравнения:
   а) $arc\ sin(x^2-3x+2)=\frac{\pi}{6}$;
   б) $arc\ cos(\ 2x^3+3x^2+0{,}1)=arc\ cos(\ x+2x^2+0{,}1)$;
   в) $arc\ tg\ 6x-arc\ tg\ x=\frac{\pi}{4}$;
   г) $arc\ tg\ x+arc\ tg\ 2x+arc\ tg\ 3x=\pi$;
   д) $arc\ sin(x^2-2x+2)=\frac{\pi x}{2}$.
2. Решите неравенства:
   а) $arc\ sin\ x>\frac{\pi}{6}$; б) $arc\ sin\frac{4}{x^2}+arc\ cos\frac{4}{x^2}>\frac{1}{2}$;
   в) $3arc\ tg^2\ x-2\pi arc\ tg\ x\le\pi^2$; г) $arc\ tg\ z>arc\ tgz^2$.
3. Исследуйте, являются ли найденные значения x решениями уравнения 2 из 2.3., рассмотрев следующие случаи: а) $m\ \ge\ 0$; $n\ \ge\ 0$; б) $m\ \le\ 0$; $n\ \le\ 0$; в) $m\ <0$; $n\ >0$; г) $m\ =n=0$.

4. Решите уравнения:

   а) $arc\,sin\frac{x}{2} + arc\,cos\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

   б) $2\ arc\,sin\,x\ =\ arc\,cos\,2x$;

   в) $2arc\,cos\,x = arc\,sin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$;

   г) $arc\,cos\,x\ =\ arc\,tg\,x$.

Список рекомендуемой литературы

1. Истер, А. С. Аркфункция от А до Я / А. С. Истер. – Киев: Факт, 1998. – 160 с. – ISBN 966-7274-11-X.
2. Крамор, В. С. Тригонометрические функции. Система упражнений для самостоятельного изучения : пособие для учащихся / В. С. Крамор, П. А. Михайлов. – М. : Просвещение, 1983. – 159 с.
3. Литвиненко, В. Н. Практикум по решению математических задач. Алгебра. Тригонометрия : учеб. пособие для студентов физ-мат. специальностей пед. ин-тов и учителей / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М., 1991. – 352 с. – ISBN 5-09-003393-5.
4. Новосёлов, С. И. Обратные тригонометрические функции / С. И. Новосёлов. – М. : Просвещение, 1960. – 127 с.
5. Самаров К. Обратные тригонометрические функции / К. Самаров, М. Шабунин // Квант. – 1983. – № 4. – С. 30 – 34.
6. Фалин, Г. И. Обратные тригонометрические функции. 10 – 11 классы / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. – М. : Экзамен, 2012. – 221 с. – ISBN 978-5-377-04300-3.

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Вопросы и задания для самостоятельной работы

1. Центры вневписанных окружностей образуют равносторонний треугольник. Укажите вид исходного треугольника или взаимосвязь сторон треугольников.
2. Прямая Эйлера перпендикулярна стороне треугольника. Укажите вид этого треугольника.
3. Расстояние между педальной точкой и центром описанной окружности около исходного треугольника в 5 раз превышает радиус описанной окружности. Определите коэффициент отношения площадей педального и исходного треугольников.
4. Центр вписанной окружности совпадает с центром окружности девяти точек для произвольного треугольника. Укажите особенности данного треугольника.
5. Вписанная окружность совпадает с окружностью девяти точек для произвольного треугольника. Укажите особенности данного треугольника.
6. В равнобедренном треугольнике длина основания относится к длине боковой стороны как 2 : 3. Определите длины биссектрис, высот и медиан этого треугольника.
7. Справедливо ли равенство Чевы для точек A_1, B_1, C_1, образующих прямую Симсона?
8. Сформулируйте не менее четырёх определений медиан треугольника.
9. Известно, что отношения радиусов вписанных и вневписанных окружностей двух произвольных треугольников соответственно равны 2, 3, 0,25, 18. Определите отношение площадей этих треугольников.
10. Справедливо ли утверждение, что треугольник MNK подобен треугольнику ABC, где M, N, K – точки пересечения смежных триссектрис?
11. Отношение углов ортотреугольника 1 : 2 : 3. Укажите отношение углов исходного треугольника.
12. H – ортоцентр для произвольного треугольника ABC; O_1, O_2, O_3, O_4, O – центры описанных окружностей около соответствующих

треугольников ABC, HBC, AHC, ABH, окружности девяти точек. Укажите соответствующую пару симметричного четырёхугольника для $HBCA$, $CAHB$, O_1O_3AC, $OBHC$.

13. Под каким углом видна сторона AB треугольника ABC из центра вписанной окружности, центров вневписанных окружностей и центра окружности девяти точек?
14. Определите результат суммы квадратов длин медиан произвольного треугольника.
15. В каких случаях расположения точек X, Y, Z выполняется равенство $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CX}{XA} = 1$?
16. Наклонная образует равные углы с тремя попарно непараллельными прямыми, лежащими в одной плоскости. Докажите, что наклонная перпендикулярна плоскости.
17. Одна из сторон равностороннего треугольника образует с данной плоскостью угол α, а другая – с той же плоскостью β. Найдите угол между плоскостью треугольника и данной плоскостью.
18. Существует ли трёхгранный угол, имеющий: а) плоские углы в 120°; б) двугранные углы в 120°?
19. Имея изображение трёхгранного угла, постройте соответствующий полярный трёхгранный угол (построение описать).
20. Докажите, что если двугранные углы трёхгранного угла равны, то равны его плоские углы. Верно ли обратное утверждение?
21. Какие виды сечений можно получить различными плоскостями в следующих многогранниках и телах вращения: а) конус; б) усечённая наклонная пирамида; в) наклонный параллелепипед?
22. Какие виды сечений можно получить плоскостями, перпендикулярными диагонали куба?
23. Найдите величины следующих углов в правильной четырёхугольной пирамиде с равными рёбрами: а) между боковой гранью и плоскостью основания; б) между боковыми рёбрами, не лежащими в одной грани; в) между боковыми гранями.
24. Выразите длину диагонали прямоугольного параллелепипеда через длины диагоналей граней параллелепипеда, имеющих одну общую точку.
25. Докажите, что сумма двугранных углов n-гранного угла больше $(n-2) \cdot 180°$.

26. Как соотносятся два тетраэдра, один из которых правильный тетраэдр, а вершины второго совпадают с центрами граней первого?
27. Диагональ осевого сечения цилиндра равна d. Найдите радиус основания и высоту цилиндра с наибольшей площадью: а) боковой поверхности; б) полной поверхности.

Задания для индивидуальной работы

1. Подберите и решите по пять задач по следующим темам:
   - применение теорем Чевы, Менелая, Стюарта, Морлея;
   - центральные и вписанные углы, хорды, секущие и касательные. Обобщённая теорема синусов. Вписанная и вневписанная окружности;
   - нахождение расстояний и углов в пространстве;
   - теорема косинусов и синусов для трёхгранного угла;
   - комбинация многогранников, тел вращения со сферой или шаром;
   - текстовые задачи (на движение, совместную работу, концентрацию и т. д.);
   - иррациональные, показательные и логарифмические уравнения и неравенства и их системы;
   - уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля;
   - решение параметрических уравнений, неравенств и задач.
2. Познакомьтесь с вариативными доказательствами основных теорем курса, содержащихся в статьях журнала «Квант».
3. Сформируйте подборку тематических статей «Решение задач» из журнала «Математика в школе» по разделам элементарной математики.
4. Подберите задачи, решаемые несколькими способами, из разных разделов элементарной математики.
5. Составьте перечень цифровых и электронных образовательных ресурсов по темам курса.
6. Решите задания повышенного уровня сложности из основного государственного экзамена (ОГЭ) и единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Темы расчётно-графических работ

1. Построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки.
2. Построение правильных многоугольников и нахождение их линейных и угловых величин, площадей.
3. Построение сечений многогранников и вычисление их площадей.
4. Построение правильных многогранников, нахождение их линейных и угловых величин, площадей поверхности и объёмов.
5. Исследование функций и построение их графиков.
6. Графическое решение уравнений, неравенств и их систем.
7. Построение графиков взаимно-обратных функций.

Вопросы к экзамену

1. Замечательные линии и точки треугольника. Основные определения, свойства и теоремы.
2. Теорема Чевы. Следствия. Обобщённая теорема Чевы.
3. Теорема Менелая. Теорема Стюарта. Следствия.
4. Теорема Пифагора и теорема косинусов для треугольника (не менее двух способов доказательства).
5. Обобщённая теорема синусов для треугольника (не менее двух способов доказательства).
6. Окружность, вписанная в треугольник и описанная около него. Свойства.
7. Окружность, вписанная в четырёхугольник и описанная около него. Свойства.
8. Вневписанная окружность относительно треугольника. Свойства.
9. Педальный треугольник. Свойства.
10. Ортотреугольник. Свойства.
11. Серединный треугольник. Свойства.
12. Теорема Нейберга. Обобщение теоремы.
13. Прямая Симсона (не менее двух способов доказательства).
14. Окружность девяти точек. Прямая Эйлера. Свойства.
15. Теорема Эйлера для треугольника.
16. Теорема Морлея.
17. Формула Герона для вычисления площади треугольника и четырёхугольника.

18. Проекции, теоремы о проекциях. Сечения многогранников и тел вращения. Методы построения сечений многогранников.
19. Многогранные углы. Основные определения и свойства. Соотношения между углами многогранного угла.
20. Трёхгранный угол. Полярный угол. Признаки равенства трёхгранных углов.
21. Теоремы косинусов, синусов для трёхгранного угла. Теорема Чевы. Теорема Менелая.
22. Прямой трёхгранный угол. Теорема Пифагора в пространстве (не менее двух способов доказательства).
23. Многогранники. Свойства многогранников. Теорема Эйлера.
24. Правильные многогранники. Теорема о существовании пяти видов правильных многогранников.
25. Тетраэдр. Свойства тетраэдра. Площадь поверхности и объем тетраэдра.
26. Тела вращения. Вычисление площадей поверхности и объёмов тел вращения.
27. Сфера и шар. Основные определения и понятия. Касательные прямые и плоскости для сферы.
28. Комбинация многогранников, тел вращения со сферой или шаром. Доказательство существования и единственности вписанной и описанной сферы около многогранников и тел вращения.
29. Текстовые задачи (на движение, смеси, работу и т. д.) и способы их решения.
30. Способы решения иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств.
31. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.
32. Решение параметрических уравнений, неравенств и задач.
33. Преобразование тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений и неравенств.
34. Различные способы решения заданий повышенного уровня из основного государственного экзамена (ОГЭ) и единого государственного экзамена (ЕГЭ).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математика учит точности мысли,
подчинению логике доказательства,
понятию строго обоснованной истины,
а всё это формирует личность,
пожалуй, больше, чем музыка.

Александр Данилович Александров

Итак, изучение избранных вопросов элементарной математики подходит к завершению. Но мы надеемся, что это не последнее ваше обращение к элементарной математике.

Элементарная математика – уникальный раздел, присущий только математике. В других науках элементарных разделов, как правило, не существует.

Если обратиться к этимологии слова «элементарный», можно выяснить, что термин *elementarius* латинского происхождения и означает «начальный, элементарный». Скорее всего, именно поэтому часто считают, что вопросы, относящиеся к элементарной математике, касаются только основ и изучаются в средней школе. Однако, по мнению многих студентов, погружавшихся в глубины учебной дисциплины «Элементарная математика», *элементарная математика совсем неэлементарная*!

Второй период истории развития математики называют *эпохой элементарной математики,* продолжался он около двух тысяч лет и закончился в XVII в. с возникновением «высшей» математики.

Сколько неизведанного таит в себе элементарная математика! Это кладезь не только для организации внеклассной работы по учебному предмету в средней школе, но и неисчерпаемое богатство для самообразования в области математической науки. При этом одной из задач обращения к новым для школьников и студентов вопросам элементарной математики является её популяризация.

Поэтому важная составляющая изучения элементарной математики – знакомство с научно-популярной литературой. Среди литературы, посвящённой этим вопросам, необходимо выделить серии книг «Популярные лекции по математике» государственного издательства физико-математической литературы (Физматлит), «Математическое просвещение» издательства Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО), журналы «Квант», «Математика в школе», «Математическое образование» и др.

В элементарной математике выделяется раздел с условным названием «Занимательная математика», содержание которого может быть использовано как учителем математики на отдельных этапах урока, при организации кружковой и факультативной работы с учащимися, так и преподавателем вуза при чтении различных математических курсов. Значит, целесообразно студентов, будущих бакалавров педагогического образования по профилю физико-математического образования, знакомить с литературой по «занимательной математике». Сколько прекрасных имён связано с занимательной математикой: С. Барр, М. Гарднер, А. П. Доморяд, Е. И. Игнатьев, Г. С. М. Коксетер, Б. А. Кордемский, Я. И. Перельман, Ч. Тригг, Г. Штейнгауз и др. Книги этих авторов бережно хранятся в российских семьях и передаются из поколения в поколение, переиздаются, оцифровываются и размещаются на различных Интернет-сайтах. Изучение истинных шедевров известных авторов занимательной математики с использованием электронных образовательных ресурсов, а, может быть, и их пополнение – это ли не путь развития познавательного интереса!

Неоспоримо положение, что процесс изучения элементарной математики обогатится включением вопросов истории её развития. На современном этапе развития математического образования необходима многоуровневая историко-математическая подготовка будущего учителя математики. Чтение и обсуждение историко-математических текстов позволит студентам выразить личностное отношение к ним и к процессу обучения математике на основе принципа историзма. И это будет весомым вкладом в подготовку к реализации новой содержательной линии «Математика в историческом развитии» в условиях школьного образования с учётом требований федеральных государственных образовательных стандартов.

Завершим изложение сего изречением Сенеки[2]: «Истина открыта для всех, ею никто не завладел. Немалая доля её останется и потомкам».

---

[2] Сенека Л.-А. Нравственные письма к Луцилию. Трагедии / пер. С. Ошерова. М. : Худож. лит., 1986. (Б-ка античной литературы). С. 85 (письмо 33, 10).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Адамар, Ж.* Элементарная геометрия. В 2 ч. Ч. 1. Планиметрия : пособие для высш. пед. учеб. заведений и преподавателей сред. шк. / Ж. Адамар. – М. : Учпедгиз, 1957. – 608 с.
2. *Адамар, Ж.* Элементарная геометрия. В 2 ч. Ч. 2. Стереометрия : пособие для учителей сред. шк. / Ж. Адамар. – М. : Учпедгиз, 1958. – 760 с.
3. *Атанасян, Л. С.* Курс элементарной геометрии : учеб. пособие для студентов пед. ун-тов и ин-тов и учащихся шк. и кл. с углубл. изучением математики. В 2 ч. Ч. 1. Планиметрия / Л. С. Атанасян, Н. С. Денисова, Е. В. Силаев. – М. : Сантакс-Пресс, 1997. – 303 с. – ISBN 5-88970-051-0.
4. *Атанасян, Л. С.* Курс элементарной геометрии : учеб. пособие для студентов пед. ун-тов и ин-тов и учащихся шк. и кл. с углубл. изучением математики. В 2 ч. Ч. 2. Стереометрия / Л. С. Атанасян, Н. С. Денисова, Е. В. Силаев. – М. : Сантакс-Пресс, 1997. – 287 с. – ISBN 5-88970-052-9.
5. *Болтянский, В. Г.* Лекции и задачи по элементарной математике / В. Г. Болтянский. – М. : Наука, 1974. – 576 с.
6. *Ваховский, Е. Б.* Задачи по элементарной математике повышенной трудности / Е. Б. Ваховский, А. А. Рыбкин. – М. : Наука, 1971. – 360 с.
7. *Виленкин, Н. Я.* Элементарная математика : учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Н. Я. Виленкин, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – Наро-Фоминск : Академия, 2004. – 222 с.
8. *Гусев, В. А.* Практикум по элементарной математике. Геометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей пед. ин-тов / В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М. : Просвещение, 1992. – 352 с. – ISBN 5-09-003840-6.
9. Задачи по элементарной математике / В. Б. Лидский [и др.]. – М. : Наука, 1973. – 416 с.
10. *Зайцев, В. В.* Элементарная математика : повторительный курс / В. В. Зайцев, В. В. Рыжков, М. И. Сканави ; под ред. В. В. Рыжкова. – М. : Наука : Гл. редакция физ.-мат. лит., 1974. – 592 с.

11. *Крамор, В. С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. – М. : Мир и Образование, 2011. – 416 с. – ISBN 978-5-94666-645-9.
12. *Крамор, В. С.* Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии / В. С. Крамор. – М. : Мир и Образование, 2011. – 336 с. – ISBN 978-5-94666-646-6.
13. *Литвиненко, В. Н.* Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия : учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей пед. ин-тов и учителей / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М. : Просвещение, 1991. – 352 с. – ISBN 5-09-003393-5.
14. *Лурье М. В.* Алгебра. Техника решения задач : учеб. пособие / М. В. Лурье. – М. : Изд-во УНЦ ДО, 2005. – 190 с. – ISBN 5-88800-241-0.
15. *Мякишев, А. Г.* Элементы геометрии треугольника / А. Г. Мякишев. – М. : МЦНМО, 2002. – 32 с. – ISBN 5-94057-048-8.
16. *Олехник, С. Н.* Нестандартные методы решения уравнений и неравенств / С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 144 с. – ISBN 5-211-01572-X.
17. *Понарин, Я. П.* Элементарная геометрия. В 2 т. Т. 1. Планиметрия, преобразования плоскости / Я. П. Понарин. – М. : МЦНМО, 2008. – 312 с. – ISBN 978-5-94057-398-2.
18. *Понарин, Я. П.* Элементарная геометрия. В 2 т. Т. 2. Стереометрия, преобразования пространства / Я. П. Понарин. – М. : МЦНМО, 2008. – 256 с. – ISBN 978-5-94057-399-9.
19. *Прасолов, В. В.* Задачи по планиметрии : учеб. пособие / В. В. Прасолов. – М. : МЦНМО, 2007. – 640 с. – ISBN 978-5-94057-304-3.
20. *Прасолов, В. В.* Задачи по стереометрии : учеб. пособие / В. В. Прасолов. – М. : МЦНМО, 2010. – 352 с. – ISBN 978-5-94057-605-1.
21. *Прасолов, В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу : учеб. пособие / В. В. Прасолов. – М. : МЦНМО, 2011. – 608 с. – ISBN 978-5-94057-810-9.
22. *Шклярский, Д. О.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. 1 – 3 / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. – М. : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1950, 1952, 1954.

Учебное издание

ЛОПАТКИНА Елена Вячеславовна

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор Е. В. Невская
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева
Корректор В. С. Теверовский
Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Подписано в печать 15.12.15.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 7,67. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.