

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра информационных систем
и информационного менеджмента

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

*Методические указания
к практическим занятиям*

В 2 частях

Часть 1

Составитель
Р.И. МАКАРОВ

Владимир 2005

УДК 681.3
ББК 32.97
М74

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
Владимирского государственного университета
В.Н. Ланцов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

М74 Моделирование систем : метод. указания к практ. занятиям /
сост. Р. И. Макаров ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во ВлГУ,
2005. – 28с.

Содержат краткое описание методов теории моделирования и их использования для решения практических задач, связанных с моделированием информационных систем и их элементов. Включают варианты заданий по следующим темам: моделирование вычислительных систем с использованием марковских случайных процессов, моделирование систем массового обслуживания с использованием метода Монте-Карло.

Предназначены для студентов специальности 071900 – информационные системы в технике и технологиях. Предполагают использование в процессе выполнения практических занятий стандартных офисных программ.

Ил. 9. Табл. 3. Библиогр.: 2 назв.

УДК 681.3
ББК 32.97

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Марковские цепи

Случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время t , называется случайным процессом. Марковские процессы являются частным случаем случайных процессов. С помощью марковских процессов удастся точно или приближенно описать сложные вычислительные и др. системы.

Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе, называется марковским, если он обладает следующими свойствами: для любого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем при $t > t_0$ зависит только от ее состояния в настоящем при $t = t_0$ и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

Марковские процессы классифицируются в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функций $X(t)$ и аргумента t . Далее будем рассматривать марковские процессы с дискретным состоянием, которые удобно иллюстрировать с помощью графа состояний (рис.1.1).

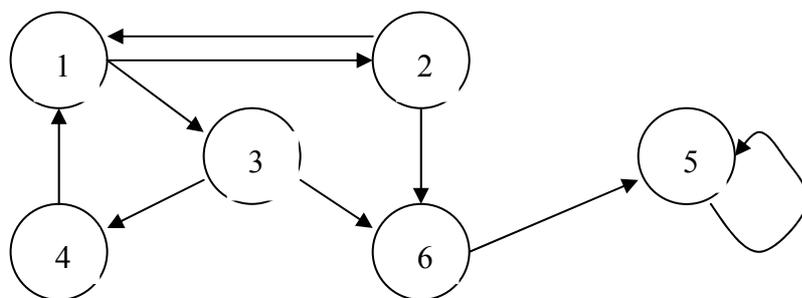


Рис. 1.1. Граф состояний системы

Кружками на рис. 1.1 показаны состояния системы, а стрелками – возможные переходы из состояния в состояние.

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называется марковскими цепями. Для такого процесса моменты времени t_1, t_2, t_3, \dots , когда система может менять свое состояние, рассматриваются как последовательные шаги процесса. Случайный про-

цесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний $S(0), S(1), S(2), S(3), \dots$, где $S(0)$ представляет начальное состояние системы перед первым шагом. Последовательность состояний можно рассматривать как последовательность случайных событий. Такая случайная последовательность событий называется марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из любого исходного состояния в другое не зависит от того, когда и как система пришла в исходное состояние. Начальное состояние системы задается или может быть случайным.

Вероятностными состояниями цепи Маркова называются вероятности $P_i(k)$ того, что после k -го шага система будет находиться в состоянии $S_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$. При этом для любого k выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n P_i(k) = 1.$$

Начальным распределением вероятностей марковской цепи называется распределение вероятностей состояний в начале процесса:

$$P_1(0), P_2(0), P_3(0), \dots, P_n(0).$$

Вычислительная система может пребывать в одном из n состояний для каждого момента времени, которое удобно задать матрицей переходных вероятностей $\|P_{ij}\|$ размерностью $(n \times n)$, где P_{ij} – вероятность перехода за один шаг из состояния S_i в состояние S_j , P_{ii} – вероятность задержки системы в состоянии S_i . Матрица $\|P_{ij}\|$ обладает следующими особенностями:

1. Каждая строка характеризует выбранное состояние системы, а элементы представляют вероятности переходов за один шаг из этого состояния в любое другое, в том числе в самое себя.

2. Элементы j -го столбца матрицы показывают вероятности всех возможных переходов системы за один шаг в заданное j -е состояние.

3. Сумма вероятностей элементов каждой строки равна единице, т.к. переходы образуют полную группу несовместимых событий.

4. На главной диагонали матрицы стоят вероятности P_{ii} того, что система не выйдет из текущего состояния, а остается в нем.

Если переходные вероятности не зависят от времени (номера шага), то такая цепь Маркова называется однородной. Если для однородной цепи заданы начальные распределения вероятностей, а также матрица переход-

ных вероятностей, то вероятности состояний системы можно вычислить по рекуррентной формуле

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1)P_{ji}, (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2 \dots n).$$

Пример 1.1 Рассмотрим пример функционирования вычислительной системы. Пусть принтер в течение одной смены может находиться в одном из двух состояний: исправном S_1 и неисправном S_2 . Граф состояния принтера представлен на рис.1.2.

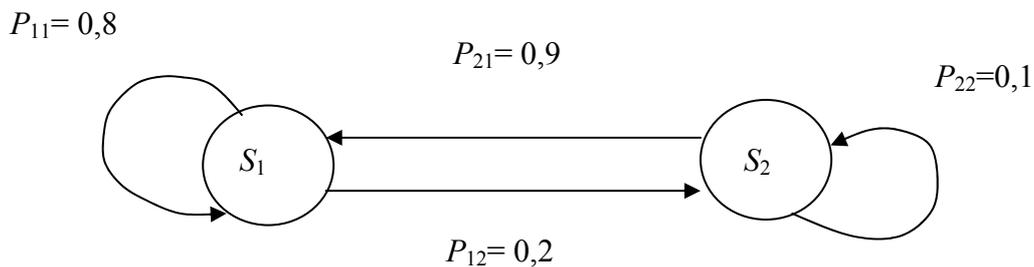


Рис. 1.2. Граф состояний принтера

В результате проведения массовых наблюдений за работой принтера составлена следующая матрица вероятностей перехода:

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

Вектор начальных вероятностей состояний принтера задан

$$P_1(0) = 0, P_2(0) = 1, \text{ т.е. принтер неисправен.}$$

Требуется определить вероятности состояний принтера через три смены.

Используя матрицу переходных вероятностей (1.1), определим вероятности состояний $P_i(k)$ после первого шага (после истечения первой смены):

$$P_1(1) = P_1(0) P_{11} + P_2(0) P_{21} = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,9 = 0,9;$$

$$P_2(1) = P_1(0) P_{12} + P_2(0) P_{22} = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 = 0,1.$$

Вероятности состояний после второго шага (после второй смены) будут следующими:

$$P_1(2) = P_1(1) P_{11} + P_2(1) P_{21} = 0,9 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,81;$$

$$P_2(2) = P_1(1) P_{12} + P_2(1) P_{22} = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,19.$$

Вероятности состояний после третьего шага (после третьей смены)

$$P_1(3) = P_1(2) P_{11} + P_2(2) P_{21} = 0,81 \cdot 0,8 + 0,19 \cdot 0,9 = 0,819;$$

$$P_2(3) = P_1(2) P_{12} + P_2(2) P_{22} = 0,81 \cdot 0,2 + 0,19 \cdot 0,1 = 0,181.$$

Таким образом, после третьей смены принтер будет находиться в исправном состоянии с вероятностью 0,819 и в неисправном состоянии с вероятностью 0,181.

1.2. Непрерывные цепи Маркова

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется непрерывной цепью Маркова при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени. Например, любое устройство вычислительной системы может выйти из строя в любой, заранее непредсказуемый момент времени. Для описания таких систем используется математический аппарат непрерывной цепи Маркова.

Для процесса с непрерывным временем вместо переходных вероятностей $\| P_{ij} \|$ рассматриваются плотности вероятностей перехода Λ_{ij} . Если $\Lambda_{ij} = \text{const}$, то процесс называется однородным, в противном случае он неоднородный.

При непрерывных марковских процессах переходы системы из состояния в состояние рассматриваются как происходящие под влиянием некоторых потоков событий. Поток событий представляет собой последовательность однородных событий, следующих одно за другим через случайные интервалы времени. При этом плотность вероятностей перехода интерпретируется как интенсивность Λ_{ij} соответствующих потоков событий. Если все эти потоки пуассоновские, то процесс, протекающий в системе, будет марковским [2].

При изучении марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем в графе состояний над стрелками проставляют интенсивности Λ_{ij} . Такой граф называют размеченным.

Пусть система S имеет конечное число состояний S_0, S_1, \dots, S_n . Случайный процесс, протекающий в этой системе, описывается вероятностями состояний $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$, где $P_j(t)$ вероятность того, что

система S в момент времени t находится в состоянии S_j . Для любого t имеет место $\sum P_j(t) = 1$.

Вероятности состояний $P_j(t)$ находят путем решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова, имеющих вид

$$dP_j(t)/dt = \sum_{j=1}^n A_{ji}P_j(t) - P_i(t) \sum_{j=1}^n A_{ij} . \quad (1.2)$$

где $i = 0, 1, \dots n$.

Производная вероятности каждого состояния равна сумме всех потоков вероятности, идущих из других состояний в данное состояние, минус сумма всех потоков вероятности, идущих из данного состояния в другое. Для решения системы дифференциальных уравнений (1.2) нужно знать начальное распределение вероятностей $P_0(0), P_1(0), \dots P_n(0)$. Уравнения решаются численными методами.

Если процесс, протекающий в системе, длится долго, то говорят о предельном (финальном) поведении вероятностей

$$P_i = \lim P_i(t) \text{ при } t \rightarrow \infty ,$$

где $i = 1, 2, \dots n$.

Финальные вероятности состояний не зависят от того, в каком состоянии находилась система в начальный момент. В системе устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности состояний P_i не меняются. Такие системы называются эргодическими, а случайный процесс – эргодическим. Финальные вероятности состояний, при их существовании, получаются решением алгебраических уравнений, получаемых из дифференциальных (1.2) путем приравнивания нулю производных. При этом вероятностные функции состояний $P_1(t), \dots P_n(t)$ в правых частях (1.2) заменяются на неизвестные финальные вероятности $P_1, \dots P_n$. Для нахождения точного значения $P_0, P_1, \dots P_n$ к уравнениям добавляют нормировочное условие $P_0 + P_1 + \dots P_n = 1$.

Пример 1.2. Имеется размеченный граф состояний системы рис. 1.3. Определить финальные вероятности системы, если в начальный момент система находится в состоянии S_1 .

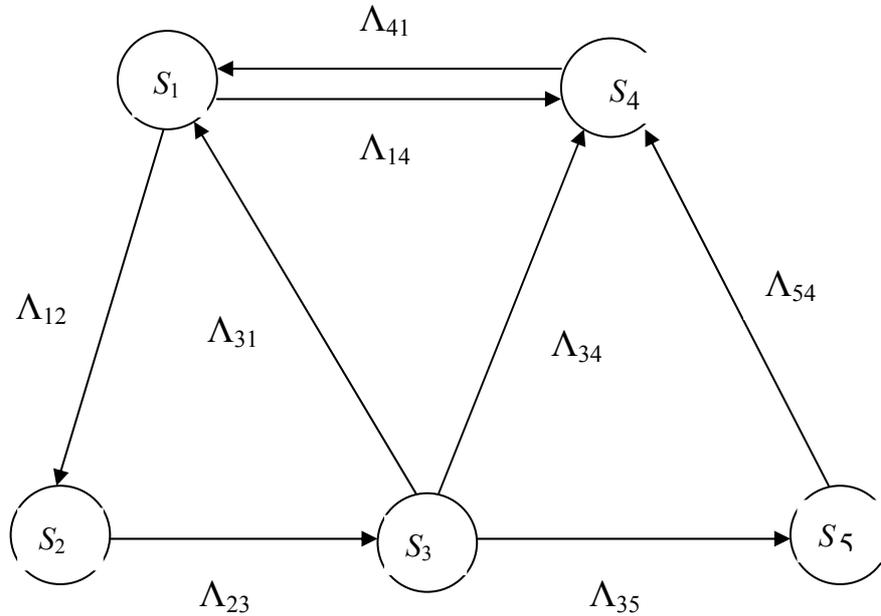


Рис.1.3. Граф состояний системы

Составим систему линейных алгебраических уравнений, которая принимает вид

$$\begin{aligned}
 0 &= \lambda_{31} P + \lambda_{41} P_4 - (\lambda_{12} P_1 - \lambda_{14} P_1); \\
 0 &= \lambda_{12} P_1 - \lambda_{23} P_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 0 &= \lambda_{35} P_3 - \lambda_{54} P_5
 \end{aligned}$$

Решая систему уравнений с учетом условия $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$, получаем все предельные вероятности. Эти вероятности представляют среднее относительное время пребывания системы в данном состоянии.

При исследовании непрерывных марковских цепей удобно бывает представить переход системы из одного состояния в другое как воздействие какого-то потока событий, например, потока заявок на обслуживание, потока документов и др.

Случайные потоки событий могут обладать следующими свойствами: стационарностью, ординарностью, отсутствием последействия. Стационарность означает неизменность вероятностного режима потока событий во времени. Реальные потоки событий являются в действительности стационарными на ограниченных участках времени. Свойство ординарности означает, что за малый промежуток времени невозможно появление более одного события. Реальные потоки событий достаточно просто могут быть приведены к ординарным. Отсутствие последействия означает, что для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени.

Поток событий, одновременно обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется простейшим потоком событий.

В пуассоновском потоке событий число событий потока, попадающих на любой участок, распределен по закону Пуассона:

$$P_m = (a_m / m!) \cdot e^{-a}, m = 0, 1, \dots,$$

где P_m – вероятность попадания на участок m событий;

a – среднее число событий, приходящееся на участок.

Для простейшего потока

$$a = \lambda \tau,$$

где λ – интенсивность потока;

τ – длина участка времени.

Промежуток времени t между соседними событиями в простейшем потоке распределен по показательному закону. Среднее арифметическое значение и среднеквадратичное отклонение этого времени $t_{cp} = \sigma = 1/\lambda$.

Таким образом, для системы с дискретными состояниями и непрерывным временем переходы из состояния в состояние происходят под действием пуассоновских потоков событий с определенной интенсивностью λ_{ij} .

Одной из разновидностей непрерывных марковских цепей является схема гибели и размножения (рис. 1.4).

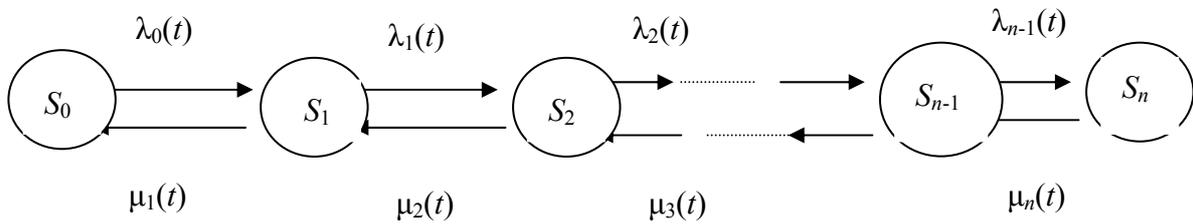


Рис. 1.4. Граф состояний для процесса гибели и размножения

Переход вправо связывают с размножением единиц, а влево – с их гибелью. Название заимствовано из биологических задач: λ_i – интенсивность размножения, μ_j – интенсивность гибели. С состоянием S_k связана неслучайная величина X_k . Если система в момент времени t находится в состоянии S_k , то дискретная случайная величина принимает значение $X_k = k$. Таким образом, получается случайный процесс $X(t)$, который в случайные моменты времени скачком изменяет свое состояние и принимает целые неотрицательные значения. В практике встречаются процессы чистого размножения ($\mu_j = 0$) и чистой гибели ($\lambda_i = 0$).

При постоянных интенсивностях потоков гибели и размножения и конечном числе состояний будет существовать стационарный режим. Так, для системы с конечным числом состояний $(n+1)$ предельные вероятности состояний гибели и размножения, находящегося в стационарном режиме, вычисляются по формулам:

$$P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_k} P_0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right)^{-1}$$

Пример 1.3. В состав ЭВМ входят четыре накопителя на магнитных дисках. Бригада в составе четырех человек проводит профилактические ремонты дисков. Суммарный поток моментов окончания ремонтов для всей бригады пуассоновский с интенсивностью $\lambda(t)$. После окончания ремонта диск проверяется: с вероятностью P он оказывается работоспособ-

ным (временем проверки можно пренебречь). Если диск окажется неработоспособным, то вновь проводится его профилактика с той же продолжительностью времени, что и начальная профилактика и т.д. В начальный момент все диски нуждаются в профилактике.

Требуется:

- построить график состояния системы из четырех дисков;
- составить дифференциальные уравнения для вероятностей состояний;
- определить математическое ожидание числа дисков, успешно прошедших профилактику к моменту τ .

Граф состояния системы, состоящий из четырех накопителей на магнитных дисках, имеет вид, приведенный на рис. 1.5 (процесс чистого размножения с ограниченным числом состояний).

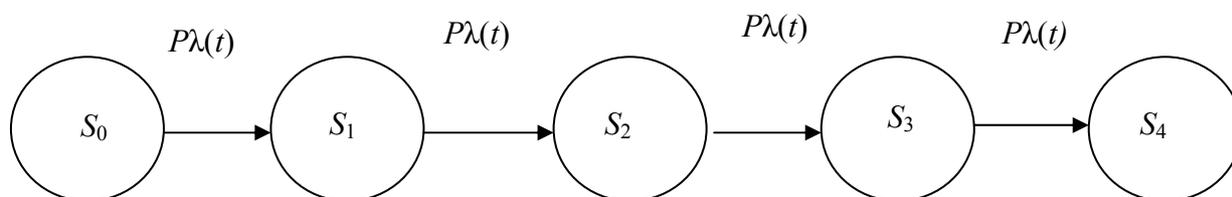


Рис. 1.5. Граф состояния системы

Состояние S_0 – все четыре накопителя нуждаются в профилактическом ремонте, S_1 – один накопитель успешно прошел профилактику, а три – нуждаются в ремонте, S_2 – два накопителя успешно прошли профилактику, а другие два нуждаются в ремонте, S_3 – три накопителя успешно прошли профилактику, а один нуждается в ремонте, S_4 – все четыре накопителя успешно прошли профилактику и в ремонте не нуждаются.

Каждый профилактический ремонт успешно заканчивается с вероятностью p , что эквивалентно p -преобразованию потока окончаний ремонта, после которого он остается пуассоновским с интенсивностью $p\lambda(t)$.

Для рассматриваемой системы уравнение Колмогорова принимает вид

$$\begin{aligned}
 dP_0(t)/dt &= -p\lambda(t)P_0(t); \\
 dP_1(t)/dt &= p\lambda(t)(P_0(t) - P_1(t)); \\
 dP_2(t)/dt &= p\lambda(t)(P_1(t) - P_2(t)); \\
 dP_3(t)/dt &= p\lambda(t)(P_2(t) - P_3(t)); \\
 dP_4(t)/dt &= p\lambda(t)P_3(t).
 \end{aligned}$$

Начальные условия равны: $P_0(0) = 1; P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$. При постоянной интенсивности $\lambda(t) = \lambda$ вероятности состояний определяются по формулам

$$P_0(t) = e^{-\lambda pt}, \quad P_1(t) = \lambda pt e^{-\lambda pt}, \quad P_2(t) = ((\lambda pt)^2/2!)e^{-\lambda pt},$$

$$P_3(t) = ((\lambda pt)^3/3!)e^{-\lambda pt},$$

$$P_4(t) = 1 - \sum_{i=0}^3 P_i(t).$$

Математическое ожидание числа магнитных дисков, успешно прошедших профилактический ремонт к моменту τ , $M_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} iP_i(t) + P_n(t)$.

Пример 1.4. Рассмотрим обработку заявок центральным сервером корпорации. Поток обрабатываемых заявок представляет нестационарный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t)$. Найти одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ – числа обработанных заявок к моменту времени t , если в момент времени $t = 0$ начата обработка заявок.

В рассматриваемом случае имеет место процесс чистого размножения без ограничения на число состояний, при этом $\lambda_i(t) = \lambda(t)$, так как интенсивность обслуживания заявок не зависит от того, сколько уже обслужено заявок. Граф состояний процесса изображен на рис. 1.6.

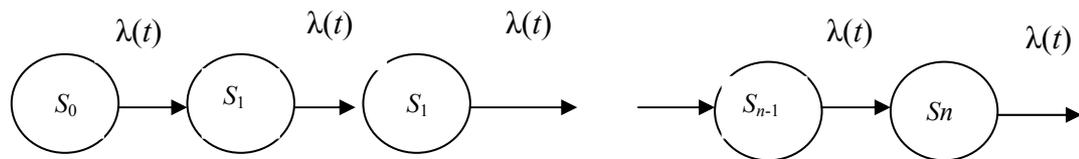


Рис. 1.6. Граф состояний

Одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ для графа, изображенного на рис. 1.6, определяется следующей системой уравнений Колмогорова:

$$dP_0(t)/dt = \lambda(t)P_0(t);$$

$$\dots$$

$$dP_i(t)/dt = -\lambda(t)P_i(t) + \lambda(t)P_{i-1}(t), \quad i=1, 2, 3, \dots$$

Число обработанных заявок $X(t)$ на любой фиксированный момент времени t распределено по закону Пуассона с параметром

$$a(t) = \lambda(t)dt;$$

то

$$P\{X(t) = I\} = P_i(t) = (a(t)^i / i!) e^{-a(t)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$M\{X(t)\} = D\{X(t)\} = a(t).$$

Рассмотренный в примере процесс $X(t)$ относится к числу неоднородных процессов Пуассона. Если интенсивность не будет зависеть от времени $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, то в таком случае получаем однородный процесс Пуассона.

Для однородного процесса Пуассона при $P_0(0) = 1, P_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots$ получаем следующие соотношения:

$$P_i(t) = ((\lambda t)^i / (i!)) e^{-\lambda t}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$M\{X(t)\} = D\{X(t)\} = \lambda t.$$

1.3. Задачи

1. В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: S_1 – ЭВМ полностью исправна, S_2 – ЭВМ имеет неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи, S_3 – ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач, S_4 – ЭВМ полностью вышла из строя.

В начальный момент времени ЭВМ полностью исправна – состояние S_1 . Проверка ЭВМ проводится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3 . Процессы, протекающие в ЭВМ, рассматриваются как однородная марковская цепь с тремя шагами (проверками). Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\| P_{ij} \| = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{vmatrix}$$

Определите вероятности состояний ЭВМ после трех проверок.

2. В моменты времени t_1, t_2, t_3 производится осмотр ЭВМ. Возможны следующие состояния ЭВМ: S_0 – полностью исправна; S_1 – незначительные неисправности, которые позволяют эксплуатировать ЭВМ, S_2 – существенные неисправности, дающие возможность решать ограниченное число задач; S_3 – ЭВМ полностью вышла из строя.

Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Постройте граф состояний. Найдите вероятности состояний ЭВМ после одного, двух и трех осмотров, если вначале при $t = 0$ ЭВМ была полностью исправна.

3. Информационная система, назовем ее S , состоит из m -устройств и время от времени ($t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$) подвергается тестированию и ремонту. После каждого шага (момента тестирования и ремонта) система может оказываться в одном из состояний: S_0 – все устройства исправны; S_1 – одно устройство заменено новым, остальные исправны; S_2 – два устройства заменены новыми, остальные исправны; S_i – i -устройств ($i < m$) заменены новыми, остальные исправны; S_m – все m -устройств заменены новыми. Суммарный поток моментов окончания тестирования для всех устройств – пуассоновский с интенсивностью $\lambda = 4$. Вероятность того, что в момент тестирования устройство придется заменить новым, равна $P = 0,4$.

Рассматривая процесс тестирования и ремонта (замены) как марковский процесс размножения, вычислите вероятность состояния системы S в стационарном режиме (для $m = 3$), если в начальный момент времени все устройства были исправными.

4. Информационная система S имеет возможные состояния S_1, S_2, S_3, S_4 . Размеченный граф состояний системы с указанием численных значений интенсивностей перехода показан на рис. 1.7.

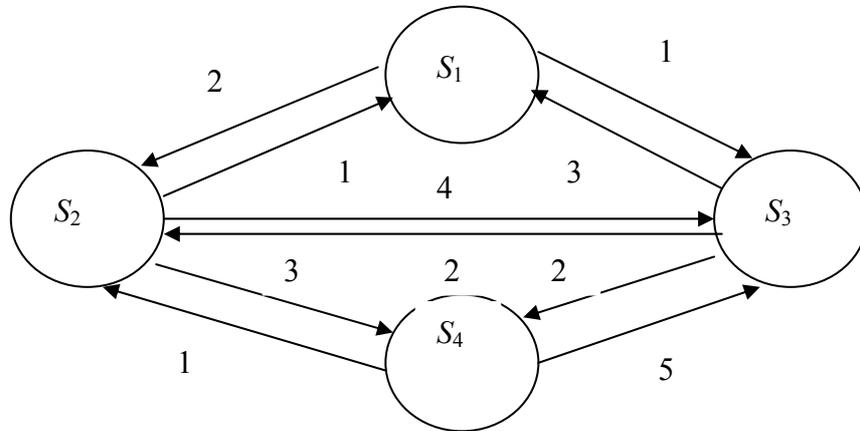


Рис 1.7. Граф состояний системы

Напишите алгебраическое уравнение для вероятностей состояний в установившемся режиме. Определите финальные вероятности состояний системы.

5. Напишите вероятности состояний в стационарном режиме для процесса гибели и размножения, граф которого показан на рис. 1.8.

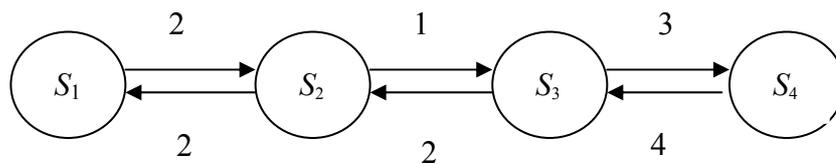


Рис. 1.8. Граф состояний системы

6. Система учета на предприятии использует компьютерную сеть, в состав которой входят шесть ПК ($n = 6$). Ежегодно обслуживающий персонал проводит профилактический осмотр каждого ПК. Суммарный поток моментов окончания профилактических осмотров для всего участвующего персонала – пуассоновский с интенсивностью $\lambda = 0,5$ 1/ч (число событий в

единицу времени). После окончания осмотра с вероятностью $P = 0,86$ устанавливается, что ПК – работоспособный. Если ПК оказался неработоспособным, то вновь проводится профилактика. В начальный момент все ПК компьютерной сети нуждаются в профилактическом осмотре.

Постройте граф состояний для системы из шести ПК, напишите дифференциальные уравнения для вероятностей состояний. Найдите вероятности состояний $P_i(3)$ и математическое ожидание числа ПК (M_3), успешно прошедших профилактику после трех часов с начала обслуживания ($t = 3$).

7. Рассматривается производство персональных компьютеров на заводе. Поток производимых компьютеров простейший пуассоновский с интенсивностью $\lambda(t) = \lambda = 1200 \text{ год}^{-1}$. Определите вероятность выпуска 5000 компьютеров. За четыре года работы завода вычислите характеристики процесса производства ПК: $M[X(t)]$ и $D[X(t)]$ при $t = 4$ года. Постройте граф состояний процесса производства ПК.

1.4. Контрольные вопросы

1. Какой случайный процесс называется марковским? Назовите его характерные свойства.
2. Приведите классификацию марковских случайных процессов.
3. Приведите характеристику марковских цепей.
4. Граф состояний вычислительной системы, его построение.
5. Непрерывные марковские процессы, их использование для моделирования вычислительных систем.
6. Что понимается под предельным (финальным) поведением вероятностей системы и от чего оно зависит?
7. Какими свойствами могут обладать случайные потоки событий?
8. Что понимается под простейшим потоком событий?
9. Охарактеризуйте пуассоновский поток событий.
10. Непрерывная марковская цепь – схема гибели и размножения. Для моделирования каких систем она применяется?

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

Системы массового обслуживания (СМО) – это такие системы, в которых в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью каналов (аппаратов) обслуживания [1].

В СМО входят следующие основные компоненты:

– входной поток поступающих заявок (требований) на обслуживание. Для описания входного потока необходимо задавать вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления заявок на обслуживание и указывающий количество таких требований в каждом очередном поступлении;

– дисциплина обслуживания очереди – определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы заявки обрабатываются процедурой обслуживания. Чаще дисциплины обслуживания очереди определяются следующими алгоритмами:

- 1) первый пришел – первый обслуживаешься (*FIFO*);
- 2) пришел последним – обслуживаешься первым (*LIFO*);
- 3) случайный отбор заявок;
- 4) отбор заявок по критерию приоритетности;
- 5) ограничение времени ожидания момента наступления обслуживания;

– механизм обслуживания – определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы. Такими характеристики могут быть:

- 1) продолжительность процедуры обслуживания;
- 2) количество заявок, удовлетворяемых в результате выполнения каждой процедуры.

Отметим, что время обслуживания заявок зависит от характера заявок (требований клиента) и от состояния и возможностей обслуживающей системы.

Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимным расположением каналов обслуживания. В системе обслуживания может быть один или несколько каналов обслуживания. Система, со-

держущая несколько каналов обслуживания, способна обслуживать одновременно несколько заявок. В случае, когда все каналы обслуживаний предлагают одни и те же услуги, имеет место параллельное обслуживание.

Система обслуживания может состоять из нескольких разнотипных каналов обслуживаний, через которые должно пройти каждое обслуживаемое требование. В этом случае процедуры обслуживания заявок реализуются последовательно.

Примерами СМО могут быть: сервер базы данных, обслуживающий поступающие требования на решение тех или иных задач; многопроцессорная вычислительная система; пакетный режим обработки заявок на вычислительном центре коллективного пользования; сервисная служба по ремонту средств вычислительной техники и др.

2.1. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)

Существуют аналитические методы для анализа СМО, где входящие и исходящие потоки заявок являются простейшими (например, экспоненциальный закон распределения). Зависимости, которые используются в этих методах для определения показателей качества обслуживания, справедливы лишь для установившегося режима функционирования СМО.

В реальных условиях функционирования СМО имеют место переходные режимы, где входящие и исходящие потоки заявок являются не простейшими. В этих условиях для оценки качества функционирования системы обслуживания используют метод Монте-Карло.

Метод Монте-Карло – это способ исследования поведения вероятностных систем (технических, экономических и др.) в условиях, когда не известны внутренние взаимосвязи в этих системах [2]. Различают два основных вида СМО:

- системы с отказами, в которых заявка, поступившая в систему в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и сразу покидает очередь;
- системы с ожиданием (очередью), в которых заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь и ждет, пока не освободится один из каналов.

Методику решения задачи рассмотрим на примере моделирования СМО с отказами.

Пусть система имеет два однотипных канала, работающих с отказами, причем моменты времени окончания обслуживания на первом канале обозначим через t_{1i} , на втором канале – через t_{2i} . Закон распределения ин-

тервала времени между смежными поступающими требованиями задан плотностью распределения $f_1(t_T)$. Продолжительность обслуживания также является случайной величиной с плотностью распределения $f_2(t_0)$.

Алгоритм решения задачи будет выглядеть следующим образом:

1. Вырабатывают равномерно распределенное случайное число ξ_i .
2. Равномерно распределенное случайное число преобразуют в величины с заданным законом распределения, используя формулы табл.1.

Таблица 1

Закон распределения случайной величины	Плотность распределения	Формула для моделирования случайной величины
Экспоненциальный	$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$	$x_i = -(1/\lambda) \ln \xi_i$
Вейбула	$f(x) = (a/b)(x/a)^{a-1} \exp[-(x/b)^a]$	$x_i = -b(\ln \xi_i)^{1/a}$
Гамма-распределение (η – целые числа)	$f(x) = [\lambda^\eta / \Gamma(\eta)] \exp(-\lambda x) x^{\eta-1}$, где $\lambda = x_{cp} / \sigma^2$; $\eta = (x_{cp})^2 / \sigma^2$; $\Gamma(\eta) = \eta!$	$x_i = -(1/\lambda) \sum_{j=1}^{\eta} \ln(1 - \xi_j)$
Нормальный	$f(x) = [1/\sigma(2\pi)^{1/2}] \exp[-(x - x_{cp})^2 / 2\sigma^2]$	$x_i = x_{cp} + \sigma \left(\sum_{i=1}^{\eta} \xi_i - 6 \right)$

Определяют реализацию случайного интервала времени (Δt_{Ti}) между поступлениями требований в систему.

3. Вычисляют момент поступления заявки на обслуживание: $t_i = t_{i-1} + \Delta t_{Ti}$.

4. Сравнивают моменты окончания обслуживания предшествующих заявок на первом $t_{1(i-1)}$ и втором $t_{2(i-1)}$ каналах.

5. Сравнивают момент поступления заявки t_i с минимальным моментом окончания обслуживания (допустим, что $t_{1(i-1)} < t_{2(i-1)}$):

а) если $[t_i - t_{1(i-1)}] < 0$, то заявка получает отказ и вырабатывают новый момент поступления заявки описанным способом;

б) если $[t_i - t_{1(i-1)}] \geq 0$, то происходит обслуживание.

6. При выполнении условия п. 5 б определяют время обслуживания i -й заявки на первом канале Δt_{1i} путем преобразования случайной величины ξ_i в величину (время обслуживания i -й заявки) с заданным законом распределения.

7. Вычисляют момент окончания обслуживания i -й заявки на первом канале $t_{1i} = [t_{1(i-1)} + \Delta t_{1i}]$.

8. Устанавливают новый момент времени поступления заявки, и вычислительная процедура повторяется в соответствии с изложенным.

9. В ходе моделирования СМО накапливаются статистические данные о процессе обслуживания.

10. Определяют показатели качества функционирования системы путем обработки накопленных результатов моделирования методами математической статистики.

2.2. Моделирование потоков отказов элементов сложных технических систем

Под сложной технической системой будем понимать вычислительную систему, состоящую из двух и более элементов. Отказ одного из элементов системы приводит к отказу системы в целом.

Рассмотрим последовательность замен некоторого определенного элемента Z . Эксплуатация каждого нового элемента начинается с момента окончания срока службы предыдущего. Первый элемент отработывает время Δt_1 , второй – Δt_2 , третий – Δt_3 и т. д.

Случайная ситуация, сложившаяся в k -м опыте (ситуации) для элемента Z , показана на рис. 2.1.

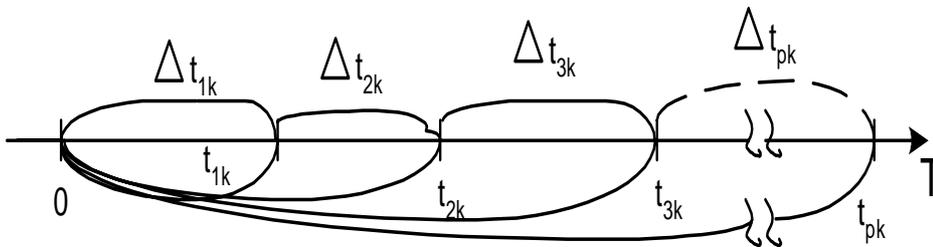


Рис. 2.1. Временная эюра случайной ситуации при k -м опыте в случае мгновенного восстановления отказавшей системы путем замены элемента

На рис. 2.1. видно, что система начинает свою работу в момент времени $t = 0$ и, отработав случайное время Δt_{1k} , выходит из строя в момент $t_{1k} = \Delta t_{1k}$. В этот момент система мгновенно восстанавливается (элемент заменяется), и снова работает случайное время Δt_{2k} . По истечении некоторого времени система (элемент) вновь выходит из строя в момент $t_{2k} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} = t_{1k} + \Delta t_{2k}$ и вновь мгновенно восстанавливается.

$$t_{1k} = \Delta t_{1k},$$

где i – номер отказа, $i = 1, 2, \dots, p$;

k – номер реализации при моделировании, $k = 1, 2, \dots, N$;

p – максимальное число отказов элемента, получаемое в k -й реализации случайного процесса.

Затем полученные случайные величины наработок t_{ik} группируются по интервалам времени.

Номера интервалов, в которые попадают моменты возникновения отказов $t_{1k}, t_{2k}, \dots, t_{ik}, \dots, t_{pk}$, определяются по формуле

$$\gamma = CEIL(t_{ik}/\Delta t),$$

где $CEIL(t_{ik}/\Delta t)$ – наименьшее целое число, не меньшее $(t_{ik}/\Delta t)$;

Δt – величина интервала времени.

Параметр и ведущая функция потока отказов в j -м интервале времени определяется по формулам

$$\omega_j(t) = \sum_{i=1}^p (n_{ij} / \Delta t N) = n_{ij} / \Delta t N; \quad \Omega_j(t) = \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^p n_{ij} = S_j / N,$$

где n_{ij} – число попаданий случайной наработки до i -го отказа t_{ik} в j -й интервал времени ($j = 1, 2, \dots, h$) за N реализаций.

$$n_j = \sum_{i=1}^p n_{ij}, \quad S_1 = n_1, \quad S_2 = n_1 + n_2,$$

$$\sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^p n_{ij} = \dots, \quad S_h = n_1 + n_2 + \dots + n_j + \dots + n_h,$$

где h – максимальное число интервалов времени.

Пример 2.1. Законы распределения наработок элемента вычислительной системы до первого и второго отказов и соответствующие параметры этих законов приведены в табл. 2.

Таблица 2

№ отказа	Закон распределения	Параметры закона	
		$a(\lambda)$	B
1	Вейбула	1,4	45,8
2	Экспоненциальный	0,30	–

Определите номера временных интервалов, на которых произойдут первый и второй отказы в ходе первого опыта (испытания) ($\Delta t = 1$ ч).

1. Выберем равномерно распределенное случайное число. Допустим $\xi_1 = 0,725$.

2. Вычислим случайные значения наработок на отказ элемента, используя формулы табл. 1.

$$t_{11} = \Delta t_{11} = -b(\ln \xi_1)^{1/a} = -45,8(\ln 0,725)^{1/1.4} = 20,37 \text{ ч.};$$

$$t_{21} = t_{11} + \Delta t_{12};$$

$$\Delta t_{21} = -1/\lambda \ln \xi_1 = -1/0,3 \ln(0,725) = 1,07 \text{ ч.};$$

$$t_{21} = t_{11} + \Delta t_{21} = 20,37 + 1,07 = 21,44 \text{ ч.}$$

3. Определим номер временного интервала, на котором произойдут отказы $\gamma = CEIL(t_{ik}/\Delta t)$;

первый отказ

$$\gamma = CEIL(t_{11}/\Delta t) = CEIL(20,37/1) = 21;$$

второй отказ

$$\gamma = CEIL(t_{21}/\Delta t) = CEIL(21,44/1) = 22.$$

В ходе первой реализации элемент системы первый раз откажет на 21-м временном интервале, а второй отказ произойдет на 22-м временном интервале.

2.3. Задачи

1. Известны законы распределения наработок элемента вычислительной системы до первого и второго отказов. Средние значения и средние квадратичные отклонения наработок приведены в табл. 3.

Таблица 3

№ отказа	Закон распределения	Среднее значение наработки (x_{cp}), ч	Среднее квадратичное отклонение наработки (σ), ч
1	Вейбула	50	28
2	Гамма-распределение	40	15

Определите параметр и ведущую функцию потока отказов элемента по интервалам времени ($\Delta t = 10$ ч). Число реализаций $N = 10$.

2. Используя условия задачи 1, определите номер интервала, в который попадет максимальное количество отказов.

3. Время обслуживания работника информационной системы кассой бухгалтерии является случайной величиной, распределенной в соответствии с законом Вейбула. Среднее время обслуживания $t_{cp} = 3$ мин., среднее

квадратичное отклонение $\sigma = 2$ мин. Требуется смоделировать случайную величину, отвечающую этим условиям. Число реализаций принять равным 10.

4. Среднее число исправных компьютеров в локальной сети фирмы равно $x_{\text{ср}} = 60$. Среднее квадратичное отклонение $\sigma_x = 1$. Требуется смоделировать число исправных компьютеров в сети (число реализаций равно 5) при условии, что случайная величина X имеет гамма-распределение.

5. Среднее число работающих ЭВМ в фирме $x_{\text{ср}} = 25$. Коэффициент вариации числа работающих машин $v = 0,6$. Требуется смоделировать число работающих ЭВМ в фирме (число реализаций равно 10). Случайная величина X имеет распределение Вейбула.

6. Вычислительная система имеет два устройства. Средняя периодичность отказов первого устройства $t_{1\text{ср}} = 60$ дней, второго устройства $t_{2\text{ср}} = 85$. Периодичность отказов представляет случайные величины, подчиненные экспоненциальному закону распределения. Определите параметр и функцию распределения потока отказов системы на интервале времени $\Delta t = 8$ месяцев. Число реализаций $N = 10$.

2.4. Контрольные вопросы

1. Система массового обслуживания (СМО). Назовите ее основные компоненты.

2. Структура обслуживающей системы, чем она определяется?

3. Назовите известные виды СМО.

4. Расскажите методику решения задачи на примере моделирования СМО с отказами.

5. Как моделируются случайные величины с неравномерным законом распределения плотности вероятностей?

6. Расскажите, как с помощью метода Монте-Карло моделируются потоки отказов элементов сложных технических систем.

Рекомендуемая литература

1. *Советов, Б. Я.* Моделирование систем : учеб. для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – 3-е изд. – М. : Высш. шк., 2001. – 343 с. – ISBN 5-

2. *Бережная, Е. В.* Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М. : Финансы и статистика, 2002. – 368 с. – ISBN 5

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАРКОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	3
1.1. Марковские цепи.....	3
1.2. Непрерывные цепи Маркова.....	6
1.3. Задачи.....	13
1.4. Контрольные вопросы.....	16
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО.....	17
2.1. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)..	17
2.2. Моделирование потоков отказов элементов сложных технических систем.....	20
2.3. Задачи.....	23
2.4. Контрольные вопросы.....	24
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	24

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

Методические указания к практическим занятиям

В 2 частях

Часть 1

Составитель

МАКАРОВ Руслан Ильич

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор А.В. Костров

Редактор Е.В. Невская

Корректор Е.В. Афанасьева

Компьютерная верстка С.В. Павлухиной

ЛР № 020275. Подписано в печать 15.09.05.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.

Печать на ризографе. Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,46. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

600000, Владимир, ул. Горького, 87.