

Министерство образования Российской Федерации  
Владимирский государственный университет  
Кафедра технологии машиностроения

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАЧИ  
ПО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ  
МЕХАНИКЕ.  
ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Составитель  
А.В. БЕЛЕВИЧ

Владимир 2003

УДК 621.01: 531 : 621.73 : 621.771(075)8

Рецензент

Доктор технических наук, профессор Московского государственного  
института стали и сплавов (технологического университета)

*С.П. Галкин*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Владимирского государственного университета

**Методические** указания и задачи по технологической механике.  
Вычисление напряжений / Владим. гос. ун-т; Сост. А.В. Белевич. Влади-  
мир, 2003. 74 с.

Методические указания и задачи к практическим занятиям по технологической механике составлены в соответствии с требованиями Государственного общеобразовательного стандарта высшего профессионального образования по специальностям 120100 – технология машиностроения и 120700 – машины и технология высокоэффективных процессов обработки материалов. На современном научном уровне изложены методики вычисления напряжений в окрестности точек сплошной среды, на характерных площадках в декартовой и главной системах координат тензора напряжений и с помощью формул теории упругости. Приведены примеры решения задач, составлены задания к решению задач на практических занятиях и к контрольным работам.

Предназначены для студентов названных специальностей, а также для студентов специальности 120100 вечерней и заочной форм обучения.

Ил. 14. Табл. 7. Библиогр.: 16 назв.

УДК 621.01: 531 : 621.73 : 621.771(075)8

## СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$M$	– материальный объект, сплошное тело, сплошная среда
$\Omega$	– объем тела $M$
$m$	– материальная частица
$S$	– поверхность тела $M$
$\bar{n}$	– единичная внешняя нормаль к поверхности $S$
$\delta_{ij}$	– символ Кронекера
$x_i$	– общее обозначение координат (обобщенные координаты), текущие координаты в процессе деформирования
$\bar{\sigma}^n$	– вектор полного поверхностного напряжения в точке поверхности с нормалью $\bar{n}$
$\sigma_i^n$	– скалярная форма записи вектора $\bar{\sigma}^n$ ( $i = 1, 2, 3$ )
$\bar{\sigma}_n$	– нормальное поверхностное напряжение на наклонной площадке
$\bar{\tau}^n$	– вектор касательного поверхностного напряжения
$\sigma^{окт}$	– полное октаэдрическое напряжение
$\bar{\tau}^{окт}$	– касательное октаэдрическое напряжение на октаэдрической площадке
$n_k^{окт} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	– координаты внешних единичных нормалей к октаэдрическим площадкам
$T_\sigma, \ \sigma_{ij}\ $	– запись тензора напряжений
$\sigma I$	– шаровой тензор напряжений
$D_\sigma$	– девиатор напряжений
$I_1, I_2, I_3$	– первый, второй и третий инварианты тензора напряжений
$T_\epsilon$	– тензор малых деформаций
$\epsilon I$	– шаровой тензор деформаций
$D_\epsilon$	– девиатор деформаций
$\tau_n$	– касательное напряжение на площадке

$\sigma_i$	– интенсивность нормальных напряжений
$T$	– интенсивность касательных напряжений
$X_i$	– начальные координаты частицы
$\varepsilon_{ij}$	– компоненты эйлера тензора деформаций
$u_i$	– компоненты вектора перемещений
$\varepsilon_{ij}$	– компоненты лагранжева тензора деформаций
$e_{ij}$	– компоненты главных логарифмических деформаций
$\sigma_{ij}$	– напряжения О. Коши
$\rho$	– плотность
$X_i$	– объемные силы
$\lambda$	– коэффициент вязкости сплошной среды
$\bar{v}$	– вектор скорости в точке
$\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{33}$	– компоненты тензора скорости деформаций в направлении осей координат
$H$	– интенсивность скорости деформации сдвига
$\Gamma$	– интенсивность деформации сдвига
$\mu$	– коэффициент С. Пуассона
$G$	– модуль упругости II рода
$\psi$	– функция пластичности
$\theta$	– температура
$\sigma_s$	– предел текучести
$\Pi_0$	– ространство напряжений
$\Lambda$	– накопленная степень деформации
$\bar{q}$	– вектор потока тепла
$q_n$	– плотность потока тепла
$h$	– коэффициент теплообмена
$c$	– коэффициент удельной теплоемкости
$K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}$	– коэффициент теплопроводности в направлении осей координат

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания и задачи по технологической механике составлены для студентов очной формы обучения специальностей 120100 и 120700. При составлении программы курса и заданий для самостоятельной работы учтены требования Государственного общеобразовательного стандарта для машиностроительных специальностей. Курс базируется на положениях и методах классической теории упругости и пластичности.

Методическая направленность курса лекций и предложенных задач, их целевое назначение заключаются в следующем:

во-первых, дать возможность студентам приобрести теоретические знания, самостоятельно проверить их путем проработки материала и приобрести навыки применения этих знаний при решении конкретных задач на практике;

во-вторых, оказать помощь преподавателям в организации, проведении практических занятий и выборе задач для самостоятельного решения (в курсовых, расчетно-графических работах и дипломном проектировании).

Приведены методики вычисления напряжений в окрестности выделенных точек, на главных площадках в различных системах координат и в областях с различной формой границ с помощью формул теории упругости. Для закрепления знаний по каждому из рассмотренных разделов курса приводятся решение характерных задач с указанием расчетных формул и анализ результатов.

Для изучения материала курса выбраны задачи механики сплошных сред, решение которых было получено и проверено ранее С.П. Тимошенко, А.А. Ильюшиным, Н.И. Безуховым и Г.Э. Аркулисом. Все задачи однотипные, одинаковой сложности и приведены в количестве, достаточном для самостоятельной и аудиторной работы студентов. Содержание задач соответствует характеру технических задач в машиностроении.

Теоретической основой для решения задач служат труды ученых-механиков XVIII – XX веков (см. приложение).

В связи с возрастанием роли приближенных методов вычисления напряжений (см. п. 4.2 в программе курса) данный вопрос включен в методические указания как самостоятельная тема “Расчет напряжений в пластической области”. По данной теме предусмотрено проведение лабораторных работ с применением цифровой вычислительной техники.

## I. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Курс «Технологическая механика» читается для студентов специальностей 120100 и 120700 в 6-м семестре, для студентов ускоренной формы обучения – в 4-м.

Центральное место в дисциплине “Технологическая механика” отводится вопросу вычисления напряжений в окрестности точек сплошной среды в различных системах координат. Изучение материала настоящих методических указаний и решение задач преследует цель закрепить знания теории напряжений и основных уравнений механики сплошной среды (МСС), составляющих основу курса. Для достижения данной цели необходимо приобрести навыки:

- вычисления параметров, характеризующих напряженное состояние в окрестности выделенных точек твердого тела;

- постановки задачи теории упругости при статическом нагружении и вычисления напряжений с помощью существующих формул.

Для изучения материала курса необходимы знания интегрального, дифференциального исчисления, информатики и сопротивления материалов, знакомство с элементами векторной алгебры, матричного исчисления.

Для закрепления знаний по каждому из разделов рекомендуется изучить запись формул, повторить решение приведенных задач в соответствии с изложенной методикой и самостоятельно проверить знания путем ответа на контрольные вопросы. При изучении структуры формул рекомендуется руководствоваться приведенным списком обозначений переменных и такими понятиями, как *материальная частица, сплошная среда, окрестность точки, поля физических величин*.

При вычислении локальных параметров и построении полей скалярных, тензорных и векторных величин используются понятия математической физики, матричного исчисления, векторной и тензорной алгебры, тензорного анализа. С учетом названных особенностей необходимо соблюдать последовательность в изучении материала в соответствии с программой. К рассмотрению задач следует переходить после усвоения понятий, обозначенных курсивом.

Элементы тензорного исчисления и теории тензорного поля рассмотрены в соответствующих главах и приложениях рекомендованной литературы, посвященных математическим основам МСС.

Для закрепления знаний при изучении разделов курса проводятся практические занятия с решением задач.

В методические указания входят ознакомление с методикой решения задач и самостоятельное решение каждой из них в соответствии с вариантом задания. Важным элементом является самостоятельная работа с письменными ответами на 1 – 2 вопроса, приведенных в конце каждой темы.

Таким образом, по каждой практической работе студенты отчитываются решением одной задачи и письменным ответом на два контрольных вопроса.

Для изучения метода линий скольжения в конце методических указаний приведен список дополнительной литературы.

## **II. ПРОГРАММА КУРСА**

### **Тема 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

#### **Теория напряжений**

- 1.1. Механическое силовое воздействие. Напряжения в точке тела.
- 1.2. Напряжения на наклонной площадке. Формула О.Коши.
- 1.3. Тензор напряжений.
- 1.4. Напряжения на октаэдрических площадках.
- 1.5. Вычисление главных значений тензора напряжений.
- 1.6. Сравнение напряженных состояний.
- 1.7. Статические граничные условия.

#### **Теория деформаций (геометрические основы)**

- 1.8. Конечные деформации.
- 1.9. Теория бесконечно малых деформаций.

#### **Теория скоростей деформаций (кинематические основы)**

- 1.10. Поле скоростей.
- 1.11. Тензор скоростей деформаций.
- 1.12. Интенсивность скоростей деформаций.

#### **Законы сохранения**

- 1.13. Закон сохранения массы и уравнение неразрывности.
- 1.14. Закон сохранения импульса и уравнение движения.
- 1.15. Закон сохранения энергии и уравнение теплопроводности.

## Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

- 2.1. Краткие сведения из теории.
- 2.2. Замкнутая система уравнений и методы ее решения.
- 2.3. Плоское напряженное состояние.
- 2.4. Плоское деформированное состояние.

## Тема 3. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

- 3.1. Реологические модели.
- 3.2. Уравнения состояния.
- 3.3. Условия пластичности.

## Тема 4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

- 4.1. Система уравнений теории пластичности и краевые условия.
- 4.2. Методы решения краевых задач.
- 4.3. Расчетное моделирование напряжений.

## Тема 5. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

- 5.1. Метод линий скольжения.
- 5.2. Методика и алгоритм расчета напряжений.
- 5.3. Построение сетки по методу Л.М. Качанова.
- 5.4. Вычисление параметров по методике М.В. Сторожева и Е.А. Попова.

## **III. РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ**

### Тема 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

#### **1.1. Механическое силовое воздействие. Напряжения в точке тела**

В соответствии с методом идеализации, принятым в механике сплошных сред (МСС), будем пользоваться понятиями: «материальное тело», «материальная частица», «окрестность и малая окрестность» [4]. При изучении свойств сплошных сред опираются на понятия *граничной точки, границы внешнего воздействия, свободной границы.*



Будем рассматривать *внешние* и *внутренние* силы. Внешние силы, приложенные к поверхности  $S$  тела объемом  $\Omega$ , называются *поверхностными* силами. Для понимания подхода к изучению состояния всего тела  $M$  и взаимного перемещения материальных частиц  $m$  внутри тела в МСС рассмотрим некоторый объем  $\Omega$  сплошной среды с поверхностью  $S$ , характеризующейся единичной внешней нормалью  $n$ , помещенный в трехмерной декартовой системе координат  $x_i$  (рис.1).

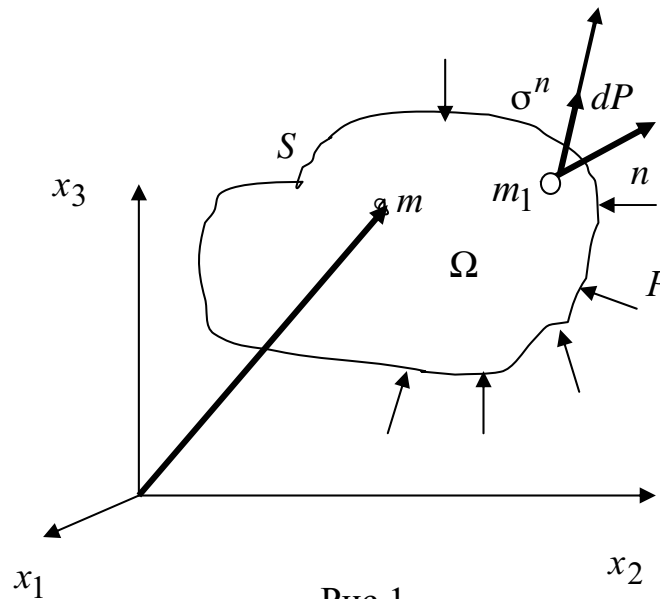


Рис.1

Рассматриваемое движение является результатом некоторого внешнего воздействия на это тело и внутреннего взаимодействия его материальных частиц между собой. Мера механического взаимодействия в МСС – непрерывное *силовое поле*, определяемое в [4] как соответствие между вектором силы  $P$  и радиусом-вектором  $x$  каждой материальной частицы тела  $M$ .

Предельное отношение поверхностной силы  $\Delta P^n$ , действующей на элемент поверхности  $\Delta S$  с внешней по отношению к  $M$  единичной нормалью  $n$ , к величине этой поверхности при стягивании последней в точку называется *полным поверхностным напряжением*, которое вычисляют по формуле

$$\sigma^n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P^n}{\Delta S}. \quad (1)$$

Здесь верхний индекс указывает на ориентацию элемента поверхности  $\Delta S$ .

## 1.2. Напряжения на наклонной площадке

Следуя подходу, принятому в механике сплошных сред, наряду с полным поверхностным напряжением  $\sigma^n$ , следует рассмотреть проекции  $\sigma_n$  и  $\tau^n$  этого напряжения на направление нормали  $n$  к площадке  $\Delta S$  и на саму площадку соответственно, приведенные на рис.2.

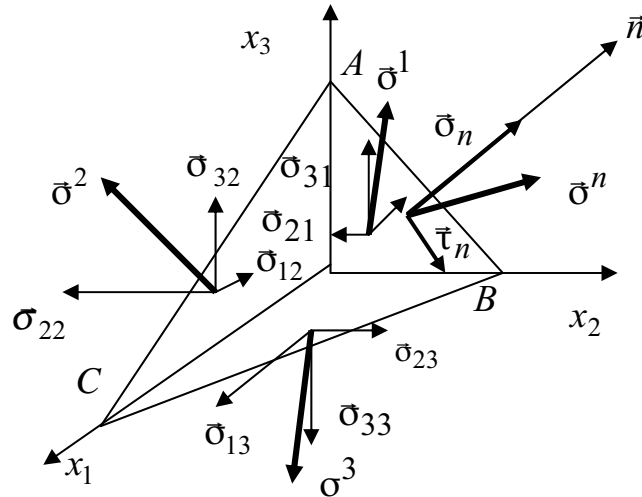


Рис. 2

Напряжение  $\sigma^n$  представляют в виде суммы

$$\vec{\sigma}^n = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}^n, \quad (2)$$

где  $\vec{\sigma}_n$  - нормальное поверхностное напряжение (проекция  $\vec{\sigma}^n$  на нормаль  $\vec{n}$ ),  $\vec{\tau}^n$  - касательное поверхностное напряжение (проекция  $\vec{\sigma}^n$  на площадку  $\Delta S$ ). Модули напряжений  $\sigma^n$ ,  $\sigma_n$ ,  $\tau^n$  связаны между собой

соотношением

$$\sigma^n = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau^{n2}}. \quad (3)$$

Модуль проекции  $\sigma_n$ , как известно из векторной алгебры, находится путем скалярного умножения  $\vec{\sigma}^n$  на  $\vec{n}$ :

$$\sigma_n = \sigma^n \vec{n}. \quad (4)$$

Сам вектор  $\bar{\sigma}_n$  получают умножением выражения (3) на  $\bar{n}$ . Касательное поверхностное напряжение можно найти векторным вычитанием

$$\bar{\tau}_n = \bar{\sigma}^n - \bar{\sigma}_n. \quad (5)$$

Раскладывая каждое из напряжений  $\bar{\sigma}^1, \bar{\sigma}^2, \bar{\sigma}^3$ , действующих на координатных площадках (см. рис.2), по направлениям осей  $x_1, x_2, x_3$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^1 &= \bar{\sigma}_{11}\bar{e}_1 + \bar{\sigma}_{21}\bar{e}_2 + \bar{\sigma}_{31}\bar{e}_3, \\ \bar{\sigma}^2 &= \bar{\sigma}_{12}\bar{e}_1 + \bar{\sigma}_{22}\bar{e}_2 + \bar{\sigma}_{32}\bar{e}_3, \\ \bar{\sigma}^3 &= \bar{\sigma}_{13}\bar{e}_1 + \bar{\sigma}_{23}\bar{e}_2 + \bar{\sigma}_{33}\bar{e}_3, \end{aligned} \quad (6)$$

получаем девять напряжений, записываемых в форме матрицы

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

В матрице (7) первый индекс означает координатную ось, в направлении которой действует напряжение, а второй индекс означает координатную площадку, на которой оно действует. На главной диагонали матрицы располагаются нормальные напряжения, остальные напряжения являются касательными.

Выразим вектор напряжения  $\bar{\sigma}^n$  на наклонной площадке  $ABC$  (см. рис. 2), равный

$$\bar{\sigma}^n = \bar{\sigma}_1^n + \bar{\sigma}_2^n + \bar{\sigma}_3^n, \quad (8)$$

через  $\sigma_{ij}$ . Если площадь  $ABC$  принять равной единице, то площади координатных площадок на рис.2, перпендикулярных осям  $x_1, x_2, x_3$ , равны соответственно направляющим косинусам  $l, m, n$  внешней единичной нормали  $\bar{n}$  к наклонной площадке.

На следующем этапе проектируют на координатные оси все силы, приложенные к тетраэдру (см. рис. 2), пренебрегая бесконечно малыми

членами. В результате получают формулы О. Коши для напряжений на наклонной площадке

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1^n &= \bar{\sigma}_{11}l + \bar{\sigma}_{12}m + \bar{\sigma}_{13}n, \\ \bar{\sigma}_2^n &= \bar{\sigma}_{12}l + \bar{\sigma}_{22}m + \bar{\sigma}_{23}n, \\ \bar{\sigma}_3^n &= \bar{\sigma}_{13}l + \bar{\sigma}_{31}m + \bar{\sigma}_{33}n,\end{aligned}\tag{9}$$

где  $l, m, n$  – направляющие косинусы внешней единичной нормали к наклонной площадке. Векторная форма записи данных уравнений имеет вид

$$\bar{\sigma}^n = (\sigma_{ij}) \bar{n}.\tag{10}$$

Таким образом, матрица  $(\sigma_{ij})$  является матрицей линейного преобразования вектора нормали  $\bar{n}$  в вектор напряжения на наклонной площадке  $\bar{\sigma}^n$ . Уравнение связи полного поверхностного напряжения с компонентами внутренних напряжений называют *статической формулой О. Коши*. Записанное в скалярной форме, данное уравнение имеет вид:

$$\sigma_k^n = n_i \sigma_{ik}.\tag{11}$$

В соответствии с правилом записи скалярного произведения в векторной алгебре *нормальное поверхностное напряжение* на наклонной площадке равно  $\bar{\sigma}_n = \bar{\sigma}^n \bar{n} = \sigma_i^n n_i = \sigma_1^n l + \sigma_2^n m + \sigma_3^n n$ . Формула для вычисления нормального напряжения имеет вид

$$\sigma_n = \sigma^{ik} n_i n_k = \sigma_{11}l^2 + \sigma_{22}m^2 + \sigma_{33}n^2 + 2(\sigma_{12}lm + \sigma_{23}mn + \sigma_{31}nl).\tag{12}$$

Единица измерения напряжения в системе СИ равна  $1 \text{ Н/м}^2$  (Па). Однако ввиду малости ее величины на практике напряжения обычно измеряют в меганьютонах на квадратный метр ( $\text{МН/м}^2$ ). При этом  $1 \text{ кг/см}^2 = 9,8 \text{ МПа}$ . После изучения напряжений на наклонных площадках переходят к изучению тензора напряжений.

### 1.3. Тензор напряжений

Следует различать формы записи тензора напряжений в декартовой и главной системах координат. Главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в точке тела определяются как корни кубического уравнения

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \quad (13)$$

где  $I_1, I_2, I_3$  – первый, второй и третий инварианты тензора напряжений, вычисляемые по формулам:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \\ I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2, \end{aligned} \quad (14)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}.$$

Запись данных формул в главной системе координат тензора напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Необходимо обратить внимание на характеристики размерности в формулах (14) и (15).

При рассмотрении взаимно ортогональных площадок, на которых нормальные напряжения достигают экстремальных значений, следует воспользоваться схемами, приведенными на рис. 3.

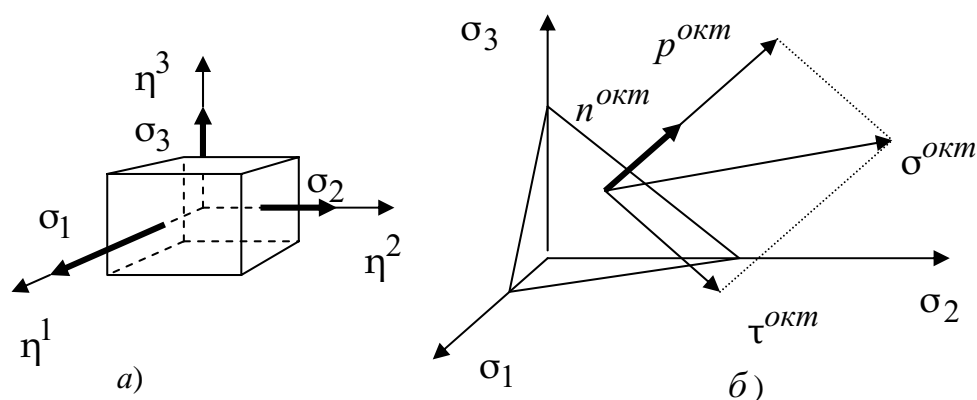


Рис. 3

*Главные* – это площадки, проведенные через данную точку перпендикулярно главным осям тензора напряжений, нормальные напряжения на которых достигают экстремального значения, а касательные напряжения отсутствуют. Элементарный объем, ограниченный главными площадками, перпендикулярными главным осям тензора напряжений, называется *главным кубом* (см. рис. 3,а).

Тензор напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (16)$$

в результате поворота системы координат  $T_{\sigma}$  преобразуется к диагональному виду

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Запись формулы (12) в главных осях принимает вид

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2, \quad (18)$$

а квадрат касательного напряжения на площадке  $ABC$  равен

$$\tau_n^2 = (\sigma^n)^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2). \quad (19)$$

Путем присоединения к выражению (18) и (19) уравнения  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  получают систему трех уравнений, решая которую находят квадраты направляющих косинусов площадок, на которых действуют

$\sigma_n$  и  $\tau_n$ . Соответствующие уравнения, заимствованные из работы [6], имеют вид:

$$l^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)},$$

$$m^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_1)}, \quad (20)$$

$$n^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}.$$

В точке можно также найти такие площадки, на которых экстремума достигают касательные напряжения. Для этого рассматривают площадку (рис. 4), параллельную одной из главных осей, например оси 3 с нормалью  $\vec{n}$ , наклоненной к главной оси 1 под углом  $\alpha$ .

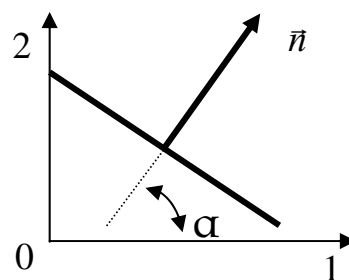


Рис. 4

Нормальное и касательное напряжения на этой площадке вычисляются по формулам

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (21)$$

$$\tau_n = - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (22)$$

В работах [3,6] рассмотрены условия экстремума  $\frac{\partial \tau_n}{\partial \alpha} = 0$ , которым соответствуют два случая:  $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$  или  $\cos 2\alpha = 0$  и  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . В первом

частном случае касательные напряжения равны нулю на любой площадке, параллельной главной оси 3. Все такие площадки являются главными. Во втором случае условие экстремума рассматривают при  $\alpha = \pm\pi/4$ . Данному случаю соответствует максимальное значение касательного напряжения, равное  $\pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ . Данное решение выполняется на площадках, наклоненных под углом  $45^\circ$  к главным площадкам.

В работе [3] путем проведения аналогичных выкладок относительно других координатных плоскостей показано, что имеется три пары площадок, наклоненных под углами  $45^\circ$  к главным площадкам, на которых касательные напряжения достигают экстремальных значений, равных

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \\ \tau_{23} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \\ \tau_{31} &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.\end{aligned}\tag{23}$$

С учетом принятых обозначений формула для вычисления максимальных по модулю касательных напряжений имеет вид

$$\tau_{ik} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_k).\tag{24}$$

В силу условия  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  среди всех экстремальных значений  $\tau^n$  наибольшим по абсолютной величине является  $\tau_{\max} = \tau_{31} \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$ .

Используя методы теории пластичности, рассмотренные в работах [1,2,3], можно увидеть, что максимальные касательные напряжения  $\tau_{ik} (i \neq k)$  и ориентация площадок в пространстве главной системы тензора напряжений, где действуют  $\tau_{ik}$ , имеют важное значение в теории обработки металлов давлением и резанием. При изучении процессов обработки, связанных с пластическим деформированием, с главными касательными напряжениями связывают плоскости и направления скольжения, по которым преимущественно осуществляется пластическая деформация металлов.



Формулы (21) и (22) приводят к простому способу определения главных направлений и главных напряжений. Предположим, что ось  $ox_3$  совпадает с одной из главных осей (например с осью 3), а ось  $ox_1$  образует угол  $\alpha$  с главной осью 1 (рис. 5).

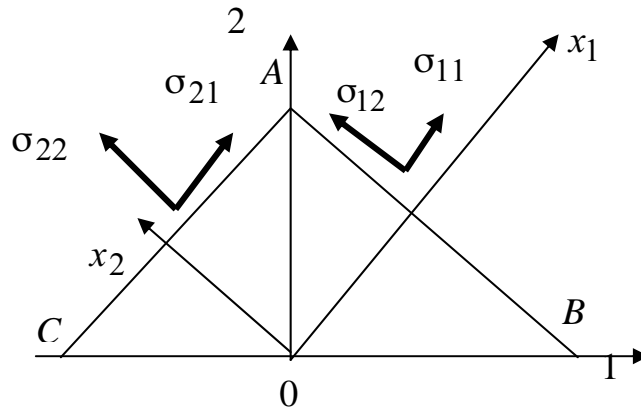


Рис. 5

Нормальное напряжение  $\sigma_{11}$  вычисляют по формуле (21), а касательное напряжение  $\tau_{12} = \sigma_{12}$  на площадке  $AB$ , перпендикулярной к оси  $ox_1$ , – по формуле (22). Нормальные и касательные напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\tau_{21} = \sigma_{21}$  на площадке  $AC$ , перпендикулярной к оси  $ox_2$ , вычисляют по тем же формулам с заменой  $\alpha$  на  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ .

Указанные формулы имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \sigma_{22} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{array} \right. \quad (25)$$

Систему уравнений (25) используют для определения главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и угла  $\alpha$ , характеризующего ориентацию главных осей при заданных компонентах напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  в декартовой сис-

теме координат. Например, для определения угла  $\alpha$  из формулы (25) путем вычитания первого уравнения из второго и делением на этот результат третьего получают

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{12}}{\sigma_{22} - \sigma_{11}}. \quad (26)$$

Максимальное касательное напряжение вычисляют

$$\tau_{12}^{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\tau_{12}^2 + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2}. \quad (27)$$

Для вычисления главных напряжений используют формулы

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\tau_{12}^2 + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\tau_{12}^2 + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

### Задача. Напряжения на наклонной площадке

Найти напряжения  $\sigma^n, \sigma_n, \tau^n$  на наклонной площадке, в точке  $M$  которой заданы компоненты тензора напряжений, записанные в прямоугольной декартовой системе координат:  $\sigma_{11} = 1$  МПа,  $\sigma_{22} = 3$  МПа,  $\sigma_{33} = 2$  МПа,  $\sigma_{12} = 2$  МПа,  $\sigma_{23} = 4$  МПа,  $\sigma_{13} = 1$  МПа. Нормаль  $\vec{n}$  к площадке задана углами  $\alpha = \angle(\vec{n}, x_1) = 45^\circ$ ;  $\beta = \angle(\vec{n}, x_2) = 60^\circ$ ;  $\gamma = \angle(\vec{n}, x_3) = 60^\circ$  согласно рис. 2.

### Методика решения

1. Используя форму записи  $T_\sigma = \|\sigma_{ij}\|$ , приведенную в работах [1,3], и исходные данные, записать тензор напряжений в развернутом виде.
2. Вычислить направляющие косинусы нормали  $\vec{n}$ :  $l = \cos \alpha = 0,707$ ;  $m = \cos \beta = 0,5$ ;  $n = \cos \gamma = 0,5$ .

3. Вычислить компоненты полного напряжения  $\bar{\sigma}^n$ . В результате расчетов, выполненных с помощью формул О.Коши (6), получены значения компонентов полного напряжения  $\sigma_i^n$ :  $\sigma_1^n = 2,207$ ;  $\sigma_2^n = 4,914$ ;  $\sigma_3^n = 3,707$ .

4. Вычислить полное напряжение на наклонной площадке по формуле  $\bar{\sigma}^n = \sqrt{\sigma_1^{n2} + \sigma_2^{n2} + \sigma_3^{n2}}$ . Для значений составляющих  $\sigma_i^n$ , полученных в п. 3, модуль полного напряжения равен  $\sigma^n = 6,54$  МПа.

5. Вычислить направляющие косинусы полного напряжения  $\bar{\sigma}^n$ :  
 $l_{\sigma^n} = \sigma_1^n / \sigma^n = 0,338$ ;  $m_{\sigma^n} = \sigma_2^n / \sigma^n = 0,751$ ;  $n_{\sigma^n} = \sigma_3^n / \sigma^n = 0,566$ .

6. Вычислить нормальное напряжение  $\bar{\sigma}_n$  с помощью формулы (12).  
 $\sigma_n = 1(0,707)^2 + 3(0,5)^2 \cdot 2(0,5)^2 + 2(2 \cdot 0,707 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 \cdot 0,707) = 5,87$  МПа. Направляющие косинусы  $\bar{\sigma}_n$  равны направляющим косинусам нормали  $\bar{n}$ :  $l_{\sigma} = l = 0,707$ ;  $m_{\sigma} = m = 0,5$ ;  $n_{\sigma} = n = 0,5$ . Компоненты нормального напряжения равны:  $\sigma_{n1} = \sigma_n l_{\sigma} = 5,87 \cdot 0,707 = 4,15$  МПа;  $\sigma_{n2} = \sigma_n m_{\sigma} = 5,87 \cdot 0,5 = 2,935$  МПа;  $\sigma_{n3} = \sigma_n n_{\sigma} = 5,87 \cdot 0,5 = 2,935$  МПа.

7. Вычислить касательное напряжение  $\bar{\tau}^n$  с помощью формул (2) и (3). Модуль касательного напряжения равен  $\tau_n = \sqrt{(\sigma^n)^2 - \sigma_n^2} = 2,88$  МПа. Компоненты  $\tau_n$  равны  $\tau_1^n = \sigma_1^n - \sigma_n^3 = 2,207 - 4,15 = -1,943$  МПа;  $\tau_2^n = \sigma_2^n - \sigma_n^2 = 4,914 - 2,935 = 1,979$  МПа;  $\tau_3^n = \sigma_3^n - \sigma_n^3 = 3,707 - 2,935 = 0,772$  МПа;

### Результат решения

#### 1. Запись тензора напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Результаты вычислений в виде косоугольной диметрической проекции приведены на рис. 6.

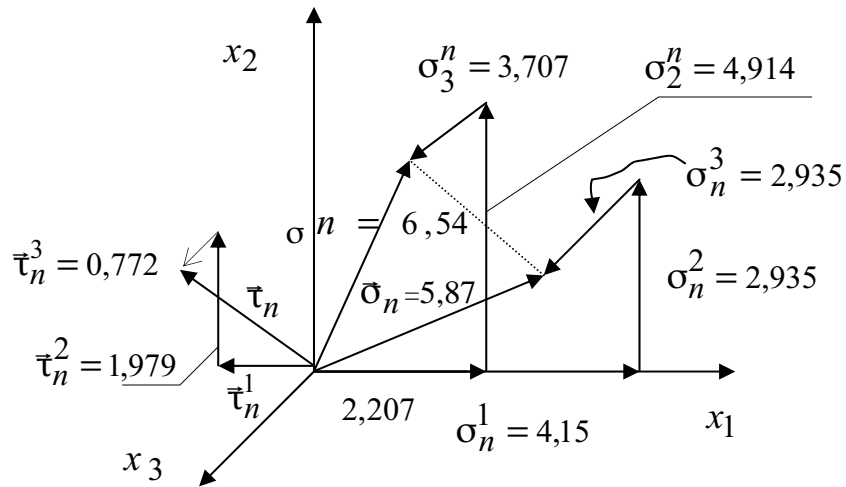


Рис. 6

#### 1.4. Напряжения на октаэдрических площадках

Другой характерной площадкой в главной системе координат тензора напряжений является площадка, равнонаклоненная ко всем его главным координатным осям (см. рис.3,б). В трехмерном пространстве таких площадок, окружающих выбранную точку, получается восемь, и они образуют правильный многогранник – *октаэдр*. Название таких площадок – “октаэдрические” – связано с их количеством.

Напряжения  $\sigma^{окт}$ ,  $p^{окт}$  и  $\tau^{окт}$ , действующие на таких площадках, называются *полным октаэдрическим, нормальным октаэдрическим и касательным октаэдрическим напряжением* соответственно. Принимая во внимание диагональный вид тензора напряжений и используя нормаль  $n^{окт}$ , находят вектор полного октаэдрического напряжения (см. рис. 6).

$$\sigma^{окт} = \sigma_k n_k^{окт} e_k. \quad (29)$$

В работе [4] показано, что компоненты внешних единичных нормалей к таким площадкам в главных осях определяются по формуле

$$n_k^{окт} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (30)$$

С помощью формул (4), (18) и (30) находят, что нормальное октаэдрическое напряжение  $p^{окт}$  равно среднему напряжению

$$p^{окт} = \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (31)$$

С учетом принятых обозначений (см. также в работе [4]) векторная запись данного напряжения имеет вид

$$\vec{p}^{окт} = \sigma_0 n_k^{окт} \mathbf{e}_k. \quad (32)$$

С помощью формул (30) и (3) легко показать, что модуль касательного напряжения на октаэдрической площадке приводится к виду

$$\tau^{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (33)$$

Использование формул (37) и (2) приводит к иной форме записи вектора касательного октаэдрического напряжения

$$\tau^{окт} = (\sigma_k - \sigma_0) n_k^{окт} \mathbf{e}_k \quad (34)$$

и его модуля

$$\tau^{окт} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2}. \quad (35)$$

Из построения формул (34) и (35) видно, что на все грани октаэдра действуют одинаковые нормальные напряжения  $\sigma_0$  и одинаковые касательные напряжения  $\tau^{окт}$ . Первые, подвергая октаэдр всестороннему растяжению (сжатию), приводят к изменению объема в окрестности материальной частицы. При этом форма октаэдра не изменяется. Вторые являются ответственными за изменение формы в этой окрестности.

Таким образом, среднее напряжение тензора напряжений определяет его сферическую часть:

$$S_\sigma = \sigma_0 T_\delta, \quad (36)$$

где  $S_\sigma$  – шаровой тензор;  $T_\delta$  – единичный тензор.

Компоненты шарового тензора равны

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (37)$$

и называются *средним напряжением* или *гидростатическим давлением*.

Оставшуюся часть тензора напряжений, характеризующую изменение формы в окрестности, называют *девиатором напряжений*  $D_\sigma$ . Последний находят как разность заданного тензора  $T_\sigma$  и его сферической части:

$$D_\sigma = \|S_{ik}\| = T_\sigma - S_\sigma. \quad (38)$$

В [4] доказаны теоремы, устанавливающие, что касательное напряжение не зависит от среднего напряжения  $\sigma_0$  и полностью определяется девиаторной частью  $D_\sigma$  тензора напряжений.

Первый инвариант девиатора напряжений равен нулю. Формулы для второго и третьего инвариантов девиатора напряжений в произвольной системе координат, в прямоугольной декартовой системе и в главной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} S^{\text{II}} &= -\frac{1}{2} (\sigma_j^i \sigma_i^j - 3\sigma^2) = -\frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \\ &+ (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) = \\ &= -\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} S^{\text{III}} &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_0 \end{vmatrix} = \\ &= (\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0). \end{aligned} \quad (40)$$

Среди трех инвариантов девиатора напряжений в технологических задачах пластичности при описании процессов деформирования чаще все-

го используют второй. С помощью данного инварианта вычисляют *интенсивность касательных напряжений*.

$$T = \sqrt{\|S^{\text{II}}\|} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{km} s_{km}}. \quad (41)$$

Из сравнения формул (33) и (35) с формулой второго инварианта девиатора напряжений установлено [3,4], что

$$\tau^{\text{окт}} = \sqrt{\frac{2}{3} |S^{\text{II}}|}. \quad (42)$$

Сравнение выражений (41) и (42) с учетом формулы (38) показывает, что интенсивность касательных напряжений с точностью до постоянного множителя равна октаэдрическому касательному напряжению

$$T = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau^{\text{окт}}. \quad (43)$$

### 1.5. Вычисление главных значений тензора напряжений

Для нахождения корней уравнения (13) его решение представляют в тригонометрической форме. Для тензора напряжений, заданного в декартовой системе координат, главные значения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  находят с помощью методики, осуществляемой путем вычисления рассмотренных выше параметров в несколько последовательных этапов.

На первом этапе по формулам (14) вычисляют инварианты тензора напряжений и выполняют запись уравнения (13). На втором этапе вычисляют другую обобщенную характеристику напряженного состояния – *интенсивность напряжений*  $\sigma_u$ , величина которой в  $\sqrt{3}$  раз больше интенсивности касательных напряжений:

$$\sigma_u = \sqrt{3}T = \sqrt{3|S^{\text{II}}|}. \quad (44)$$

На третьем этапе по формуле (37) находят среднее напряжение  $\sigma_0$ . Приведение девиатора напряжений к диагональному виду выполняют на четвертом этапе. Поскольку первый инвариант девиатора напряжений равен нулю, кубическое уравнение для нахождения главных компонент девиатора  $D_\sigma$  имеет вид

$$\lambda^3 + S^{\text{II}}\lambda - S^{\text{III}} = 0. \quad (45)$$

Инвариант  $S^{\text{III}}$  девиатора, являющийся коэффициентом данного уравнения, вычисляют по формуле (40).

На пятом этапе в соответствии с методикой, рассмотренной в работе [5], вычисляют угол  $\psi_\sigma$  вида напряженного состояния. Значение  $\psi_\sigma$  находят из выражения

$$\cos 3\psi_\sigma = \frac{27}{2} S^{\text{III}} / \sigma_u^3, \quad (46)$$

где  $S^{\text{III}}$  – третий инвариант девиатора напряжений;  $\sigma_u$  - интенсивность напряжений.

На шестом этапе вычисляют главные нормальные напряжения, представляя их в тригонометрической форме:

$$\sigma_1 = \frac{2}{3} \sigma_u \cos \psi_\sigma + \sigma_0, \quad (47)$$

$$\sigma_2 = -\frac{2}{3} \sigma_u \cos \left( \frac{\pi}{3} + \psi_\sigma \right) + \sigma_0, \quad (48)$$

$$\sigma_3 = -\frac{2}{3} \sigma_u \cos \left( \frac{\pi}{3} - \psi_\sigma \right) + \sigma_0. \quad (49)$$

Формулы (47) – (49) являются решениями кубического уравнения (13).

**Задача.** Главные значения и главные оси тензора напряжений

В некоторой точке тела известны компоненты тензора напряжений:  $\sigma_{11} = 1$  МПа;  $\sigma_{22} = 3$  МПа;  $\sigma_{33} = 2$  МПа;  $\sigma_{12} = 2$  МПа;  $\sigma_{13} = 1$  МПа;  $\sigma_{32} = 4$  МПа. Найти значения главных напряжений в этой точке и их направления.



### Методика и алгоритм решения

1. По формулам (13) найти инварианты тензора напряжений:

$$I_1 = 6 \text{ МПа}; I_2 = -10 \text{ МПа}; I_3 = -5 \text{ МПа}.$$

Тогда кубическое уравнение (13) примет вид

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 - 10\lambda + 5 = 0.$$

2. Нахождение корней данного уравнения по формулам (47 – 49) выполняют в следующей последовательности:

2.1. По формуле (39) вычислить значение второго инварианта девиатора напряжений:  $S^{\text{II}} = 22 \text{ МПа}^2$ .

2.2. По формуле (41) вычислить интенсивность касательных напряжений;  $T = 4,695 \text{ МПа}$ .

2.3. По формуле (44) вычислить интенсивность напряжений;  $\sigma_u = 8,124 \text{ МПа}$ .

2.4. По формулам (37) вычислить среднее напряжение;  $\sigma_0 = 2 \text{ МПа}$ .

2.5. По формуле (40) вычислить третий инвариант девиатора напряжений;  $S^{\text{III}} = 31 \text{ МПа}^3$ .

2.6. По формуле (46) вычислить значение  $\cos 3\psi_\sigma$ , установить значение угла  $\psi_\sigma$ :

$$\cos 3\psi_\sigma = \frac{27}{2} 31 / (8,124)^3 = 0,7805, \text{ откуда } \psi_\sigma = \frac{1}{3} \arccos 0,7805 = 12^\circ 54'.$$

2.7. Вычислить значения главных нормальных напряжений по формулам (47 – 49);

3. Выполнить проверку решения: подставляя значения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в формулы (15), вычислить значения инвариантов тензора напряжений  $I_1, I_2, I_3$  и сравнить каждый из них с одноименными значениями, вычисленными в п.1. Убедиться в правильности вычисления  $\sigma_i$ .

4. Найти направления главных осей тензора напряжений.

4.1. Написать системы уравнений (18) для нахождения направляющих косинусов главных осей и вычислить значения  $l_i, m_i, n_i$ .

Например, для главной оси  $\eta_{\sigma}^1$  система уравнений имеет вид

$$(1 - \sigma_1)l_1 + 2m_1 + n_1 = 0,$$

$$2l_1 + (3 - \sigma_1)m_1 + 4n_1 = 0,$$

$$l_1 + 4m_1 + (2 - \sigma_1)n_1 = 0.$$

Подставляя значение  $\sigma_1 = 7,279$  МПа в данную систему уравнений и учитывая условие  $(l_1)^2 + (m_1)^2 + (n_1)^2 = 1$ , получают решение, которое для рассматриваемого случая имеет вид:  $l_1 = 0,327$ ;  $m_1 = 0,722$ ;  $n_1 = 0,609$ .

Следуя методике решения задач, приведенной в работе [4], направим по оси  $\eta_{\sigma}^1$  в точке  $M$  единичный вектор  $\vec{n}_1 = 0,327\vec{i} + 0,722\vec{j} + 0,609\vec{k}$ . Зная компоненты данного вектора и выбирая масштаб, обозначим  $\vec{n}_1$  и ось  $\vec{\eta}_{\sigma}^1$  на рис. 7.

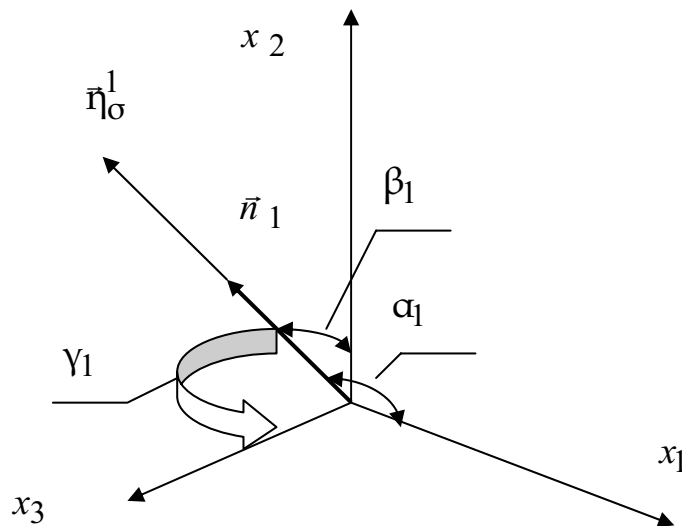


Рис. 7

В соответствии с круговой перестановкой индексов запись системы уравнений для вычисления направляющих косинусов углов наклона главной оси  $\eta_{\sigma}^2$  имеет вид:

$$(1 - \sigma_2)l_2 + 2m_2 + n_2 = 0,$$

$$2l_2 + (3 - \sigma_2)m_2 + 4n_2 = 0,$$

$$l_2 + 4m_2 + (2 - \sigma_2)n_2 = 0.$$

После подстановки  $\sigma_2 = 0,408$  МПа решением системы будут значения:  $l_2 = -0,908$ ;  $m_2 = 0,063$ ;  $n_2 = 0,413$ . Повторяя решение системы при  $\sigma_3 = -1,687$  МПа, получают  $l_3 = 0,260$ ,  $m_3 = -0,689$ ;  $n_3 = 0,677$ .

Углы между главной осью  $\eta_{\sigma}^1$  и осями  $x_i$ , обозначенные на рис. 7, равны:

$$\alpha_1 = \angle(\eta_{\sigma}^1, x_1) = 70^{\circ},91; \beta_1 = \angle(\eta_{\sigma}^1, x_2) = 43^{\circ},78; \gamma_1 = \angle(\eta_{\sigma}^1, x_3) = 52^{\circ},48.$$

Углы между главными осями  $\eta_{\sigma}^2, \eta_{\sigma}^3$  и осями  $x_i$  соответственно равны:

$$\alpha_2 = \angle(\eta_{\sigma}^2, x_1) = 155^{\circ},23; \beta_2 = \angle(\eta_{\sigma}^2, x_2) = 86^{\circ},39; \gamma_2 = \angle(\eta_{\sigma}^2, x_3) = 65^{\circ},61;$$

$$\alpha_3 = \angle(\eta_{\sigma}^3, x_1) = 74^{\circ},93; \beta_3 = \angle(\eta_{\sigma}^3, x_2) = 133^{\circ},55; \gamma_3 = \angle(\eta_{\sigma}^3, x_3) = 47^{\circ},39.$$

## 1.6. Статические граничные условия

Статические условия в напряжениях на границе  $S_{\sigma}$  с единичной внешней нормалью  $\vec{n}$  считаются заданными, если в каждой точке  $s$  этой границы известно полное поверхностное напряжение  $\sigma^n$ , которое по формуле О.Коши определяет вид тензора напряжений:

$$\vec{n} T_{\sigma} = \sigma^n \forall s \in S_{\sigma}. \quad (50)$$

## *Теория деформаций (геометрические основы)*

### **1.7. Конечные и малые деформации**

Деформация тела заключается в изменении расстояния между его точками. Если при движении тела расстояния между точками не изменяются, то оно не деформируется, а движется как абсолютно твердое тело.

Деформация тела известна, если известна деформация в каждой его точке. Для характеристики деформации в точке вычисляют деформацию выделенной вокруг нее бесконечно малой частицы. С этой целью в начальном состоянии выделяют вокруг точки  $M$  с лагранжевыми координатами бесконечно малую частицу в форме шара. За время деформирования эта частица деформируется, повернется в пространстве; изменятся ее форма и размеры. При этом рассматривают близкую к ней точку  $M_1$ .

Поскольку через точку можно провести бесконечное множество материальных волокон, основная задача теории деформаций формулируется следующим образом: зная в точке  $M$  ограниченное число величин, описывающих деформацию, необходимо найти  $\varepsilon_n$  в любом направлении. Другая важная задача – установление связи между упомянутыми величинами и перемещениями точек деформируемого тела.

В соответствии с представлениями теории конечных деформаций, изложенными в [5], при движении и деформации тела каждая его бесконечно малая частица в общем случае поступательно перемещается (вектор перемещения  $\vec{u}$ ), растягивается (сжимается) по трем взаимно перпендикулярным осям и поворачивается в пространстве как абсолютно твердое тело. Все эти преобразования частиц происходят одновременно.

В начальном состоянии (при  $t_0$ ) в любой точке тела выделяют три взаимно перпендикулярных волокна, которые за время деформации  $t_0 - t_1$  удлиняются либо укорачиваются, но все углы между ними не меняются. При  $t_0$  по этим волокнам направлены главные оси  $\dot{\eta}_\varepsilon^1, \dot{\eta}_\varepsilon^2, \dot{\eta}_\varepsilon^3$  тензора деформаций  $\dot{T}_\varepsilon$ , а в конечном состоянии (при  $t_1$ ) по ним направлены главные оси  $\bar{\eta}_\varepsilon^1, \bar{\eta}_\varepsilon^2, \bar{\eta}_\varepsilon^3$  тензора деформаций  $\bar{T}_\varepsilon$ .

Признаком бесконечно малой деформации в точке является бесконечно малое отличие начального и конечного состояния сопутствующей системы координат, при котором длины векторов базиса и углы между ними за время деформации изменились на бесконечно малые величины. Для характеристики деформированного состояния используют формулы

вычисления инвариантов тензора деформаций, связи деформаций с перемещениями, разложения тензора напряжений на шаровой и девиатор, а также формулы вычисления интенсивности деформаций сдвига, приведенные в [1, 5, 8].

Кинематика – это раздел МСС, изучающий движение материальных объектов без учета причин, вызывающих это движение. Основные задачи теории скоростей деформаций: установить значения компонентов скоростей движения частиц в точках области; установить связь между компонентами тензора скоростей деформаций и компонентами деформаций; установить связь между скоростями деформаций и скоростями перемещений точек деформируемого тела. При анализе процессов пластического течения использование данной теории позволяет вычислить значения компонентов тензора скорости деформаций, значения скорости деформаций сдвига и установить связь данных величин с накопленной степенью деформации в окрестности каждой точки.

На первом этапе необходимо рассмотреть понятия *области* и *границы*. Под областью понимается совокупность точек пространства, характеризуемая двумя свойствами:

- если некоторая точка  $M$  принадлежит области, то все точки, достаточно близкие к точке  $M$ , принадлежат области;
- любые две точки можно соединить ломаной, целиком лежащей внутри области.

*Граница области* – это совокупность точек, не принадлежащих области, в любой окрестности которых имеются точки, принадлежащие области.

Схемы движения материальной частицы, необходимые при изучении данной темы, приведены в работах [4,2,5]. Необходимо выполнить анализ допущений, принятых в МСС, и изучить особенности подходов Эйлера и Ж.Лагранжа к описанию движения сплошной среды.

Понятия МСС «*линии тока*», «*стационарное и нестационарное поле скоростей*», «*траектории*», «*трубка тока*», «*поток вектора скорости*», «*дивергенция вектора скорости в точке и ротор*», «*потенциальное, безвихревое и гармоническое поле*» рассмотрены в [8]. На данном этапе рекомендуется также воспользоваться сведениями, приведенными в работе Л.И.Седова «Механика сплошных сред» (т.1 – 2). В соответствии с подходом, изложенным в [4, 5], движение малой окрестности условно раскладывают на две составляющие: поступательное движение и искажение (дисторция) ее окрестности.

## Законы сохранения

Как показывает опыт, четыре аддитивных интеграла движения – масса, импульс, момент импульса и энергия, характеризующие состояние замкнутой системы, – не изменяются со временем. В соответствии с данным положением в ньютоновской механике сформулированы законы сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии, которые обусловлены основными свойствами материи и движения, а также пространства и времени как основных форм существования материи.

Использование законов сохранения в механике сплошной среды приводит к существенным результатам. На основе закона сохранения массы выводят уравнение неразрывности. Из закона сохранения импульса следует дифференциальное уравнение движения сплошной среды. Из закона сохранения момента импульса следует симметрия тензора напряжений. На основе закона сохранения энергии выработаны экстремальные принципы сплошной среды и разработаны энергетические методы расчета напряженно-деформированного состояния.

Запись формулы  $\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{P}$  соответствует второму закону Ньютона для материальной точки массой  $m$ , движущейся со скоростью  $\bar{v}$  под действием силы  $\bar{P}$ . Здесь  $m\bar{v}$  – импульс, или количество движения точки.

Для системы из  $n$  материальных точек  $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$  <sup>(e)</sup>, где  $m_i$  – масса

<sup>(e)</sup>  $i$ -й материальной точки;  $\bar{P}_i$  – внешняя по отношению к системе сила, действующая на  $i$ -ю точку. Внутренние силы, т.е. силы действия точек системы друг на друга, в соответствии с третьим законом И.Ньютона уравновешиваются и не оказывают влияния на движение системы. Сплошная

среда движется под действием внешних поверхностных  $\iint_{\Sigma} \bar{P}_n d\Sigma$  и массо-

вых  $\iiint_V \rho \bar{F} dV$  сил. В соответствии со вторым законом Ньютона основное

постулируемое соотношение МСС, или уравнение количества движения конечного объема сплошной среды, имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \bar{v} dV = \iint_{\Sigma} \bar{P}_n d\Sigma + \iiint_V \rho \bar{F} dV. \quad (51)$$

Уравнение (51) справедливо для любой части конечного объема сплошной среды, в том числе для элементарного объема. Проектируя (51) на оси координат, получают три уравнения движения. Запись данных уравнений в векторной и скалярной форме приведена в [3,4,5].

Если  $\rho \frac{dv}{dt}$  мало, то имеем уравнение равновесия  $div T_{\sigma} + \rho \bar{F} = 0$ .

Если и массовые силы отсутствуют, то  $div T_{\sigma} = 0$ . Переходя к декартовой системе координат, получают уравнения равновесия, записанные в форме выражений (51).

### Контрольные вопросы

- 1.1. Под действием каких сил движется и деформируется тело?
- 1.2. Что такое напряжение? Чем характеризуется напряженное состояние точки, тела в целом?
- 1.3. Что такое область и граница?
- 1.4. Записать формулы О.Коши для напряжений на наклонных площадках. Что кладется в основу их вывода?
- 1.5. В чем отличие записи  $T_{\sigma}$  в декартовой и главной системе координат тензора напряжений?
- 1.6. В чем состоит правило А. Эйнштейна?
- 1.7. Какой физический смысл имеют шаровой тензор и девиатор напряжений?
- 1.8. Что общего между плоским напряженным и плоским деформированным состоянием и какая между ними разница?
- 1.9. Что такое шаровой тензор и девиатор напряжений?
- 1.10. Для расчета каких величин используется второй инвариант девиатора напряжений? Написать соответствующие формулы.
- 1.11. Что такое полное октаэдрическое напряжение?

- 1.12. Что такое нормальное октаэдрическое напряжение?
- 1.13. Что такое касательное октаэдрическое напряжение?
- 1.14. Какие виды движения совершает материальная частица в области пластического деформирования?
- 1.15. Назвать механизмы пластической деформации.
- 1.16. При каком давлении выполняется закон сохранения объема?
- 1.17. В чем состоит роль законов сохранения в теории пластичности?
- 1.18. В чем состоят особенности подходов Л. Эйлера и Ж. Лагранжа к изучению кинематики движения сплошной среды?
- 1.19. Что изучает кинематика?
- 1.20. В чем отличие точки от материальной частицы?

## Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### 2.1. Краткие сведения из теории

При изучении данной темы рассматривают задачи *линейной теории упругости*. Выводы данной теории базируются на следующих предположениях:

- рассматриваемое тело является однородным и изотропным;
- между компонентами деформаций и компонентами напряжений существует линейная связь (обобщенный закон Р. Гука);
- деформации предполагаются малыми (компоненты деформации пренебрежимо малы по сравнению с единицей).

Если названные предположения не выполняются, то обращаются к нелинейной теории упругости. В случае анизотропных тел, когда физические свойства в каждой точке существенно зависят от направления, проходящего через эту точку, рассматривают теорию упругости анизотропного тела.

Основные уравнения теории упругости складываются из уравнений механики сплошной среды: статических условий (50) с условиями на поверхности тела (9), геометрических уравнений О.Коши (см. формулу 6.9 в работе [6]) – и как следствие – уравнений совместности деформаций. Данные уравнения справедливы для любой сплошной среды независимо от ее физических особенностей.



Для элемента тела в виде бесконечно малого параллелепипеда дифференциальные уравнения равновесия (движения) в декартовых координатах записывают

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho X_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho X_2 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho X_3 &= 0.\end{aligned}\tag{52}$$

Дополнительные физические уравнения, устанавливающие связь между компонентами напряжений и компонентами деформаций для изотропного линейно-упругого тела (обобщенный закон Р. Гука), записывают в форме:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \mu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{G} \sigma_{12}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{33})], \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{G} \sigma_{23}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})], \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{G} \sigma_{31},\end{aligned}\tag{53}$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  – модуль сдвига;  $\mu$  – коэффициент С. Пуассона.

Выражая из уравнений (53) напряжения, получают:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2G\varepsilon_{11} + \lambda 3\varepsilon_{cp}, \quad \tau_{12} = G\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{22} &= 2G\varepsilon_{22} + \lambda \varepsilon_{cp}, \quad \tau_{23} = G\varepsilon_{23}, \\ \sigma_{33} &= 2G\varepsilon_{33} + 3\lambda \varepsilon_{cp}, \quad \tau_{31} = G\varepsilon_{31},\end{aligned}\tag{54}$$

где  $\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu}$ .

Для решения пространственных задач теория упругости располагает пятнадцатью основными уравнениями, а именно: тремя статическими (52), шестью геометрическими и шестью физическими уравнениями (54).

## 2.2. Замкнутая система уравнений теории упругости и методы ее решения

В теории упругости рассматривают два вида задач: статические и динамические. Для пространственных статических задач не рассчитывают скорости и ускорения.

Из изложенного выше видно, что задачей теории упругости является разыскание шести функций для компонентов тензора напряжений, шести функций для компонентов тензора деформации и трех функций для компонентов смещений, подстановка которых в перечисленные выше уравнения удовлетворяет их тождественно. Кроме того, на поверхности тела должны быть удовлетворены граничные условия по заданным нагрузкам (9) или по заданным смещениям.

При прямом решении задачи уравнения неразрывности сами по себе как вытекающие из геометрических соотношений не нужны и могут выполнять роль контрольных уравнений.

Путем последовательного исключения напряжений и деформаций, выражаемых через смещения, вместо записи упомянутой системы уравнений приходят к уравнению равновесия (движения) Г. Ламе:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + G \nabla^2 u_i + X_i \rho = 0, \quad (55)$$

где  $\theta = 3\varepsilon_{cp} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ;  $i = 1, 2, 3$ .

Метод решения задач с помощью уравнения (55) называют *методом перемещений*.

Путем последовательного исключения деформаций и перемещений при постоянстве объемных сил в теории упругости [1,2,7] получают также шесть уравнений Э. Бельтрами относительно напряжений.

При замене обозначения координат  $x$  и  $y$  в данных уравнениях на  $x_1, x_2, x_3$  сокращенная форма их записи имеет вид

$$(1 + \mu) \nabla^2 \sigma_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \partial x_k} = 0, \quad (i=1,2,3; k=1,2,3), \quad (56)$$

где  $\sigma = 3\sigma_0$ .

Метод решения задач с помощью уравнения (55) называют *методом сил*.

Поверхностные условия в данном случае должны быть выражены через смещения. С учетом изменения обозначений координат по сравнению с записью уравнений в работе [7] граничные условия будут иметь вид

$$p_i^n = \lambda \theta l_i + G \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_k} l_k \right) + G \left( \frac{\partial u_k}{\partial u_i} l_k \right), \quad (i=1,2,3; k=1,2,3). \quad (57)$$

### 2.3. Плоское напряженное состояние

Для плоского напряженного состояния объектом расчета является пластинка, и все внешние силы лежат в срединной плоскости (ее принимают за плоскость  $x_1 o x_2$ ). Считается, что силы отсутствуют в направлении, перпендикулярном к плоскости пластинки (в направлении оси  $o x_3$ ).

Предположим, что в некоторой точке тензор напряжений за счет поворота системы координат приведен к диагональному виду (17). Рассмотрим частный случай напряженного состояния сплошной среды, когда одно из главных напряжений, например  $\sigma_3$ , равно нулю. Тензор напряжений, соответствующий данному случаю, имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (58)$$

Запись  $T_\sigma$  с помощью выражения (58) указывает на то, что в этой точке имеется плоское напряженное состояние.

Если во всех точках тела имеет место плоское напряженное состояние, то тензор напряжений записывают в виде

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix}. \quad (59)$$

Для определения инвариантов рассмотрим каноническое уравнение (13), которое с учетом  $\sigma_3 = 0$  преобразуется к виду

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda = 0. \quad (60)$$

Инварианты тензора имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_1 + \sigma_2, \\ I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_1\sigma_2. \end{aligned} \quad (61)$$

Запись тензора деформаций в декартовой системе координат имеет вид

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}, \quad (62)$$

причем  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  не зависят от координаты  $x_3$ .

Система уравнений включает восемь уравнений: два уравнения равновесия, получаемые из формулы (51) при отсутствии массовых сил:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0; \quad (63)$$

три уравнения связи деформаций с перемещениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right); \quad (64)$$

три уравнения состояния, получаемые из выражения (53)

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \mu\sigma_{22}), \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \mu\sigma_{11}), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{12}}{G}. \quad (65)$$

Эти уравнения содержат восемь переменных:  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, u_1, u_2$ .

Относительное удлинение в направлении оси  $x_3$  находят по третьей формуле (53),  $\varepsilon_{33} = -\mu(\sigma_{11} + \sigma_{22})/E$ . Найденные функции для деформаций должны удовлетворять первое уравнение совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} . \quad (66)$$

### ***Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях***

Подставляя в уравнение совместности (66) выражения (64) для деформаций, получают уравнение, содержащее только напряжения. Дифференцируя первое уравнение равновесия (63) по  $x_1$ , а второе по  $x_2$ , складывая полученные выражения, после преобразований находят:

$$\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0, \quad (67)$$

где  $\nabla^2 ( ) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) ( )$ .

Уравнение (67) вместе с выражением (63) составляют систему трех уравнений с тремя переменными – напряжениями  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ . Система эта справедлива и для плоского деформированного состояния, если массовые силы отсутствуют.

Компоненты  $\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2)$  и  $\sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1, x_2)$  являются гармоническими функциями, удовлетворяющими уравнению П.Лапласа (67) и граничным условиям.

Для дальнейшего облегчения решения плоской задачи вместо определения трех функций  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  достаточно определить одну так называемую функцию напряжений, с помощью которой все искомые функции находят дифференцированием.

Компоненты  $T_\sigma$  в плоской задаче представляют через функцию  $\varphi(x, y)$  следующим образом:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (68)$$

где  $\varphi$  – функция напряжений Эри.

Распределение напряжений (68) удовлетворяет уравнениям равновесия (63), обращая их в тождества.

Таким образом, плоская задача теории упругости сводится к решению *бигармонического уравнения*

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = \Delta \Delta \varphi = 0. \quad (69)$$

Поскольку формулы (68) являются только следствием универсальных уравнений равновесия, они верны для решения плоских задач не только при упругой, но и при пластической деформации.

Часто функцию напряжений выбирают в виде полинома  $x, y$ , подбирая его коэффициенты так, чтобы удовлетворить бигармоническое уравнение (68) и граничные условия. Такое решение задачи называется *решением в полиномах*.

## 2.4. Плоское деформированное состояние

Уравнения (63) остаются без изменения и для случая плоской деформации, когда отсутствуют перемещения и деформации в направлении оси  $ox_3$ .

Различие между плоским напряженным состоянием и случаем плоской деформации заключается в наличии в первом случае компоненты смещения  $u_3$  при отсутствии напряжения  $\sigma_3$ , а во втором случае – в отсутствии компоненты смещения  $u_3$  и наличии компоненты  $\sigma_3$ .

В первом случае  $u_3^{\max} = \varepsilon_{33} \frac{t}{2} = - \frac{\mu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \frac{t}{2}$ ; ( $t$  – толщина пластины). Во втором случае  $\sigma_{33} = \mu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$ .

**Задача.** Рассчитать напряженно-деформированное состояние трубы (рис.8) в условиях плоского деформированного состояния. Вычислить

значения перемещений  $u_r$  и напряжений  $\sigma_{rr}, \sigma_{\alpha\alpha}$  и  $\sigma_{zz}$  при  $a = 100$  мм,  $b = 200$  мм;  $p_a = 200$  МПа;  $p_b = 100$  МПа;  $G = 8,1 \cdot 10^4$  МПа;  $\mu = 0,28$ . Схема, соответствующая постановке задачи, приведена на рис.8,а.

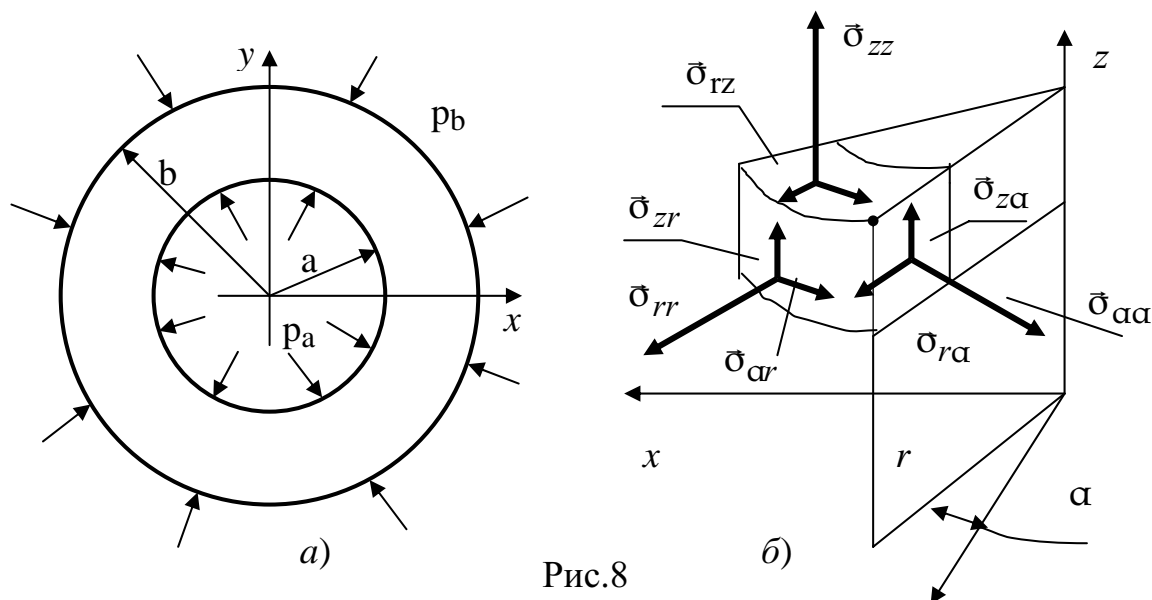


Рис.8

### Методика решения

Используем цилиндрическую систему координат (рис.9,б). Координатные линии  $r, \alpha, z$  направлены соответственно по радиусу трубы, в окружном направлении и вдоль трубы. Так как деформированное состояние плоское, а нагрузка распределена равномерно по контуру, то напряженно-деформированное состояние является осесимметричным. При этом напряжения не зависят от координаты  $\alpha$ , а меридиальные сечения тела  $\alpha = \text{const}$  не смещаются друг относительно друга.

Так как  $\sigma_{r\alpha} = \sigma_{\alpha r} = 0$ , отличны от нуля только нормальные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_2 = \sigma_{zz}, \sigma_3 = \sigma_{rr}$ . Из трех компонент вектора перемещений  $\bar{u}$  две ( $\bar{u}_\alpha$  и  $\bar{u}_z$ ) равны нулю, а  $\bar{u}_r$  зависит только от координаты  $r$ . Следовательно, точки трубы перемещаются в радиальных направлениях. Соотношение между внутренним  $p_a$  и наружным  $p_b$  давлениями полагаем таким, что внутренний  $a$  и наружный  $b$  радиусы трубы увеличиваются.

Система уравнений состоит из одного уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} = 0, \quad (70)$$

соотношений между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{u_r}{r}, \quad (71)$$

уравнений состояния (в главных осях тензора напряжений)

$$\sigma_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + \lambda\theta, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 2G\varepsilon_{\alpha\alpha} + \lambda\theta, \quad \sigma_{zz} = \lambda\theta, \quad (72)$$

где  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}$  - относительное изменение объема;  $\lambda = 2\mu G / (1 - 2\mu)$ .

Воспользуемся решением задачи в перемещениях, полученным в работе [5]. Формулы напряжений, соответствующие данному решению, имеют вид:

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (73)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (74)$$

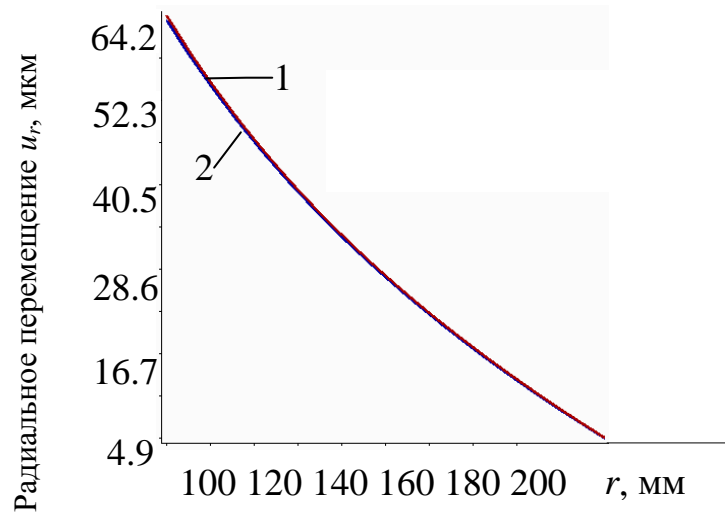
$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{(G + \lambda)} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}. \quad (75)$$

Упругие перемещения вычисляются по формуле

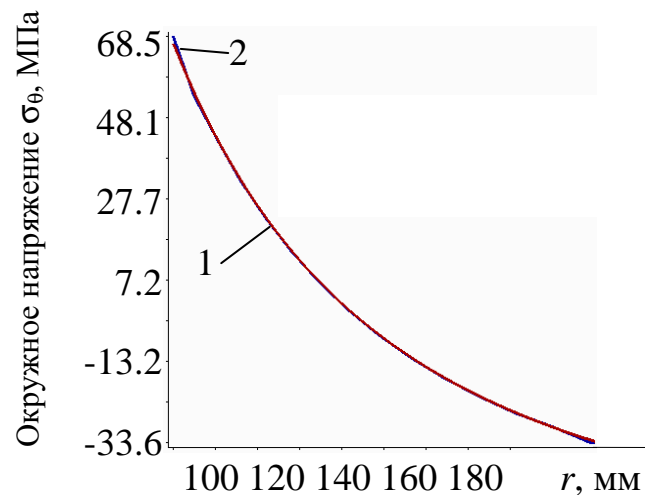
$$u_r = \frac{r}{2(G + \lambda)} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{1}{2Gr} \frac{a^2 b^2 (p_a - p_b)}{b^2 - a^2}. \quad (76)$$

Графики 1 компонентов напряжений и перемещений по сечению трубы, полученные в результате расчетов по формулам (73-76), и одноименные графики 2, полученные в результате расчетов *методом конечных элементов* (МКЭ) [5], приведены на рис.9,а,б,в. По внешнему виду и близкому взаимному расположению графиков 1 и 2 можно сделать вывод, что МКЭ обеспечивает точность вычислений параметров, близкую к точности аналитического решения данной задачи.

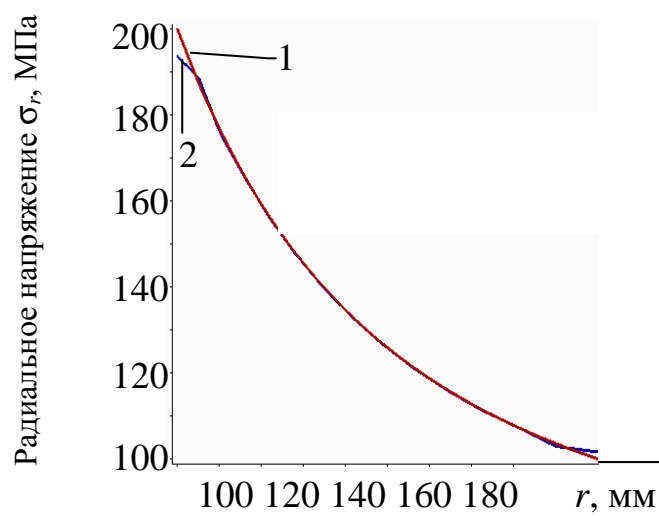




а)



б)



в)

Рис. 9

Расчеты показали уменьшение данных параметров в направлении к наружной стенке. В то же время окружные напряжения переходят в область отрицательных значений. Радиальные напряжения являются сжимающими во всей области.

Близкое расположение расчетных графиков 1 и 2 на каждом из рисунков показывает, что точность вычисления параметров методом конечных элементов является сопоставимой с точностью вычисления с помощью формул (73 – 76).

На основе анализа графиков на рис. 9 легко установить, что рассмотренные условия работы под нагрузкой являются приемлемыми при статических условиях нагружения, так как расчетные напряжения намного меньше предела прочности сталей. Анализ графиков перемещений на рис. 9,а показывает, что увеличение внутреннего диаметра составляет 0,128 мм, а наружного – 0,009 мм.

В работе [9] устанавливается, что материал труб переходит в пластическое состояние при  $\sigma_i = \sigma_s$ , где  $\sigma_s$  – предел текучести при растяжении. Равенство

$$\sigma_i = \sigma_s = \text{const} \quad (77)$$

называют *условием пластичности Г. Генки – Р. Мизеса*. Согласно этому условию при сложном напряженном состоянии материал ведет себя как упругий, если интенсивность напряжений не превышает предела упругости при простом растяжении [8]. В теории пластичности существует и другое условие пластичности, предложенное Ш. Кулоном, а затем А. Сен-Венаном. Согласно этому условию материал переходит в пластическое состояние, когда наибольшее касательное напряжение достигнет некоторой постоянной величины

$$\tau_{\max} = \tau_s \cdot \quad (78)$$

Согласно представлениям, изложенным в работе [9],  $\tau_s = \frac{1}{2} \sigma_s$ .

Анализ приведенных графиков позволяет сделать заключение, что  $\sigma_i$  принимает наибольшие значения при  $r = a$ . Пластическое состояние трубы наступит прежде всего на внутренней поверхности, причем это произойдет согласно условию пластичности (77).

Как показал А.А.Ильюшин [9], давление при этом достигнет значения

$$p'_a = \frac{(b^2 - a^2)\sigma_s}{\sqrt{3b^4 + (1 - 2\mu)^2 a^4}}. \quad (79)$$

При увеличении внутреннего давления граница между областями упругих и упруго-пластических деформаций будет продвигаться к внешней поверхности трубы. Наконец при некотором значении  $p_a = p$  вся труба перейдет в упруго-пластическое состояние. Формула, соответствующая указанному случаю, имеет вид:

$$p = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}. \quad (80)$$

### Контрольные вопросы

2.1. На каких допущениях основывается вывод уравнений линейной теории упругости?

2.2. Какой вид связи используется между компонентами напряжений и деформаций в линейной теории упругости?

2.3. Что понимается под изотропной средой и анизотропией свойств?

2.4. В чем состоит задача линейной теории упругости?

2.5. Какие уравнения входят в систему уравнений линейной теории упругости? Написать уравнения и объяснить их значение.

2.6. Что понимают под малыми деформациями?

2.7. Почему теория упругости называется линейной?

2.8. В чем заключается отличие постановки статической задачи теории упругости от динамической?

2.9. В чем заключается смысл понятия “замкнутая система уравнений теории упругости”?

2.10. В чем отличие понятий “плоское напряженное” и “плоское деформированное” состояние? Привести записи тензоров напряжений и деформаций для указанных случаев.

2.11. В чем отличия уравнений для плоского напряженного и плоского деформированного состояния изотропного тела?

2.12. Какая система уравнений теории упругости считается замкнутой? Записать уравнения данной системы.

2.13. Как записывают связь между напряжениями и деформациями в линейной теории упругости?

2.14. Как определяют сопротивление пластической деформации?

2.15. Какие три простые реологические модели используют в технологической механике?

2.16. Какая реологическая модель изображает свойство пластичности?

2.17. Что такое механическая модель и реологическая кривая? Привести примеры для линейно-упругой и жестко-пластической среды.

2.18. Что такое условие пластичности? Записать его для одноосного растяжения.

2.19. В чем отличие условия пластичности А. Треска – А. Сен-Венана от условия пластичности при одноосном растяжении?

2.20. Записать аналитическое выражение условия пластичности М. Хубера – Р. Мизеса.

### Тема 3. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Принято считать, что в интервале времени  $[t_0, t_1]$  задан процесс деформации тела, если задана непрерывно дифференцируемая по времени тензорная функция  $T_\varepsilon = T_\varepsilon(x_1, x_2, x_3, t)$ . Аналогично задан процесс нагружения тела, если задана непрерывно дифференцируемая по времени тензорная функция  $T_\sigma = T_\sigma(x_1, x_2, x_3, t)$ .

Процессы деформации и нагружения не могут быть заданы независимо друг от друга. Между ними есть связь, определяемая физическими свойствами среды (например законом Р. Гука). В основу теории уравнений состояния положен *принцип макроскопической определенности* А.А. Ильюшина, являющийся основным постулатом теории пластичности.

Вопросы нахождения феноменологических связей между напряжениями и деформациями при механических испытаниях, виды реологических моделей сплошной среды и их аналитические зависимости рассмотрены в работах [1 – 6, 8,9].

В основе уравнений состояния пластически деформируемого тела лежит соотношение, называемое *постулатом Друкера*.

Согласно постулату Друкера в цикле нагружение – разгрузка добавочные напряжения выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации.

Ассоциированный закон течения [2,5,8] отражает тот факт, являющийся следствием постулата Друкера, что вектор заданных приращений пластических деформаций  $de_{ij}^p$  направлен по нормали к поверхности нагружения  $\Sigma_s$ , уравнение которой имеет вид

$$f_s(\sigma_{ij}) = 0, \quad (81)$$

где  $\sigma_{ij}$  - действительные напряжения, удовлетворяющие условию пластичности.

### Контрольные вопросы

- 3.1. В какой математической форме задают процесс деформации?
- 3.2. В какой математической форме задают процесс нагружения?
- 3.3. В какой форме устанавливают связь процессов деформации и нагружения?
- 3.4. Что является основным постулатом теории пластичности?
- 3.5. Что входит в понятие «цикл нагружение – разгрузка»?
- 3.6. В чем состоит условие начала пластичности А. Сен-Венана?
- 3.7. Какие вопросы изучает реология?
- 3.8. Какие простейшие реологические модели вы знаете?
- 3.9. Что такое ползучесть и релаксация?
- 3.10. В чем состоит влияние скорости деформации на диаграмму напряжений?
- 3.11. В чем отличие уравнений, описывающих поведение сред в частном случае линейного напряженного состояния, от общих зависимостей?
- 3.12. Каким свойством обладает поверхность пластичности?
- 3.13. Что такое кривая пластичности?
- 3.14. В чем состоит графическое изображение поверхности пластичности А. Треска – А. Сен-Венана?

- 3.15. Что означает условие пластичности Губера – Р. Мизеса?
- 3.16. На какой гипотезе основывается переход от кривой  $\varepsilon - \sigma$  к кривой  $T - \Gamma$ ?
- 3.17. Какие допущения служат исходными положениями теории малых упруго-пластических деформаций?
- 3.18. Какое нагружение тела является простым?
- 3.19. Какая схема реализуется при кручении?

## Тема 4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

### 4.1. Система уравнений теории пластичности и краевые условия

Конечной целью теории пластичности применительно к обработке металлов давлением и резанием является разработка методов расчета напряженно-деформированного состояния, которое характеризуется тензорными полями напряжений  $T_\sigma$ , деформаций  $T_\varepsilon$ , скоростей деформаций  $T_\xi$ , векторными полями перемещений  $\bar{u}$ , скоростей  $\bar{v}$ , ускорений  $\bar{a}$ , плотности  $\rho$  и температуры  $\theta$ . В работе [5] получены 29 уравнений для нахождения в любой момент времени 29 локальных параметров: шести напряжений  $\sigma_{ij}$ , шести деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , шести скоростей деформаций  $\xi_{ij}$ , трех перемещений  $u_i$ , трех скоростей  $v_i$ , трех ускорений  $a_i$ , плотности  $\rho$ , температуры  $\theta$ .

Особенности математической постановки краевых задач на примере построения основной замкнутой системы уравнений теории пластичности и краевых условий применительно к обработке металлов давлением рассмотрены в работе [4]. Требования к краевой задаче и типичные упрощения в постановке краевых задач рассмотрены в работе [5]. Там же приведены варианты кинематической и статической постановки задач, виды и варианты записи механических краевых условий.

Целью упрощений при постановке краевых задач является уменьшение числа независимых переменных. Например, в соответствии с допущением об *установившемся пластическом течении* при решении в эйлеровой системе координат принимают, что все характеристики движения в любой точке пространства не изменяются во времени.

Тогда начальные условия не нужны, так как во всех уравнениях частные производные по времени равны нулю. Установившимися часто принимают процессы пластического деформирования при образовании сливной стружки, движения металла при прокатке и волочении, когда длины переднего и заднего концов намного больше длины очага деформации.

Примером другого характерного упрощения исходной системы служит плоская задача пластичности при наличии идеально пластического материала. К такой схеме прибегают при исследовании механики процессов сливного стружкообразования, листовой штамповки, прессования, прокатки и волочения. Во всех названных случаях принимают схему плоской деформации.

В связи с этим одно из дифференциальных уравнений удовлетворяется тождественно, а два других значительно упрощаются. Система уравнений (82) включает два уравнения равновесия и уравнение идеальной пластичности

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0, \\ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4 \tau_{12}^2 &= 4k^2, \end{aligned} \tag{82}$$

где  $k = \frac{1}{2} \sigma_s$ , если исходят из гипотезы начального скалывающего напряжения;  $k = (1/\sqrt{3}) \sigma_s$ , если исходят из гипотезы предельного состояния. Таким образом, в случае плоской деформации число уравнений уменьшается до трех, а сами уравнения сильно упрощаются. При этом имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными. Следовательно, плоская задача представляет задачу статически определимую.

В результате совместного решения уравнений (82) будут полностью определены напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ .

## 4.2. Методы решения краевых задач и расчет напряжений

Анализ литературы показывает, что среди методов решения краевых задач обработки металлов давлением к наиболее хорошо изученным относятся метод совместного решения уравнений равновесия и пластичности и

метод линий скольжения. Особенности данных методов, системы уравнений и методика решения краевых задач рассмотрены в работах [4, 5, 8]. Хорошо известны методы построения полей скоростей, основанные на сведении уравнений краевой задачи к вариационной задаче [1, 2, 3].

Объем данных, накопленных в литературе о моделировании напряжений в прирезцовой зоне, невелик. Однако из анализа рассмотренных работ видно, что при теоретическом изучении механики резания применяют метод линий скольжения и вариационные методы.

Развитие проекционных методов и средств вычислительной техники сделало одним из наиболее популярных *метод конечных элементов* (МКЭ) [3,4,6] при вычислении напряжений в упругих и пластических средах. Данный метод получил распространение благодаря универсальности, удобству численной реализации, развитию средств вычислительной техники и программирования.

Однако из-за трудоемкости разработки конечно-элементных систем применение МКЭ для решения сложных машиностроительных задач пока ограничено. Примеры разработки и применения одной из конечно-элементных программ, разработанных на кафедре ТМС, для решения различных машиностроительных задач приведены в работе [6].

### **Контрольные вопросы**

- 4.1. Что представляет собой краевая задача теории пластичности?
- 4.2. Что значит решить краевую задачу обработки давлением?
- 4.3. Каким требованиям должна отвечать корректно поставленная краевая задача теории обработки давлением и теории резания?
- 4.4. С какой целью вводят допущение об установившемся процессе пластического течения металла?
- 4.5. Что такое условие идеальной пластичности? Привести запись.
- 4.6. Какие упрощения реологических моделей деформируемых сред используют при теоретическом анализе процессов обработки, связанных с пластической деформацией?
- 4.7. Что такое идеальная пластичность?
- 4.8. Когда и с какой целью пренебрегают упругими деформациями?
- 4.9. Что означает пренебрежение массовыми силами? Как при этом записывают уравнения движения?
- 4.10. В чем сущность энергетического метода? Записать уравнение баланса мощностей.



## Тема 5. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

### 5.1. Общие сведения о методе линий скольжения

Исторический обзор развития данного метода, вклад российских ученых (А.А. Ильюшина, А.Ю. Ишлинского, С.Г. Михлина и других) и зарубежных (М. Леви, Г. Генки, Р. Хилла, Л. Прандтля, Х. Гейрингер и других) обширная справочная литература и примеры решения задач приведены в монографиях В.В. Соколовского, А.Д. Томленова, Р. Хилла, К.Н. Шевченко. Метод линий скольжения при изучении процессов пластического течения при прессовании применяли Р. Джонсон, Х. Кудо, Л.Г. Степанский, при объемной, листовой штамповке и волочении – Л.А. Шофман, Р.И. Непершин, И.П. Ренне, Э. Томсен, при обработке резанием – В.Ф. Безъязычный. Примеры решения задач теории обработки давлением с помощью данного метода приведены также в работах Г.Я. Гуна, В.Л. Колмогорова, В.А. Тюрина и др.

Изучение данного метода начинают с рассмотрения системы уравнений, содержащей формулы вычисления компонентов тензора напряжений и условие пластичности для плоской деформации (83).

Особенности данного метода, запись системы уравнений, уравнения линий скольжения, уравнения пластического равновесия, свойства линий скольжения и методика построения сетки линий скольжения при решении различных задач рассмотрены в работах [4, 5, 6], а также в работах [10, 11, 12]. В качестве первого шага необходимо ознакомиться с общими положениями метода линий скольжения и примерами решения задач, приведенными в [10].

Рекомендуется рассмотреть задачу о внедрении плоского штампа в полупространство, особенности решения Л. Прандтлем и Р. Хиллом данной задачи. Рекомендуется также сопоставить данные решения. Для построения сеток и вычисления напряжений следует воспользоваться свойствами линий скольжения.

Например, если в точке  $a$  (рис.10) линии скольжения гидростатическое давление  $\sigma = \sigma_0$ , то значение  $\sigma$  в точке  $b$  той же линии скольжения находят из соотношения

$$\sigma_\alpha - 2k\theta_\alpha = \sigma_\beta - 2k\theta_\beta, \quad (83)$$

где,  $\theta_\alpha$  и  $\theta_\beta$  – углы наклона линии семейства  $\alpha$  в точках  $a$  и  $b$  к оси  $ox$ ;  $k$  – максимальное касательное напряжение, вектор которого совпадает с касательной к линии скольжения в каждой точке.

Из уравнения (83) видно, что изменение среднего напряжения пропорционально углу поворота линий скольжения. Переходя от точки к точке, по значению  $\sigma_b$  в одной точке находят распределение  $\sigma$  в другой.

Аналогично по формулам теории пластичности находят  $\sigma_{ij}$  во всем поле линий скольжения.

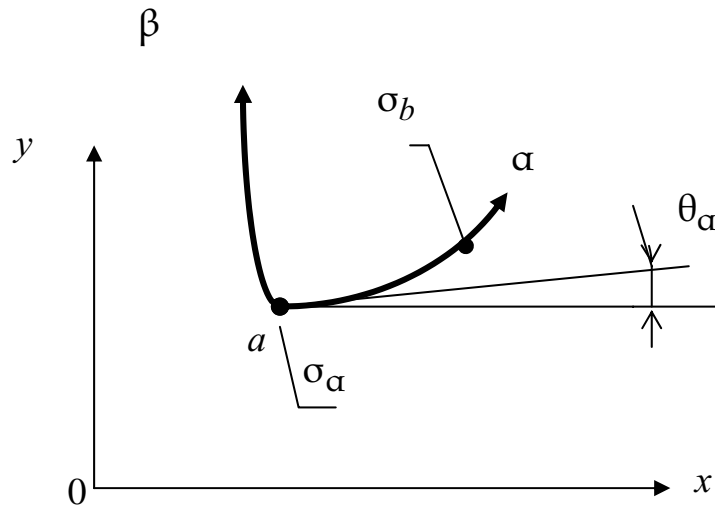


Рис. 10

Если сетка линий скольжения образована их прямыми отрезками, то гидростатическое давление  $\sigma$ , компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  в каждом узле сетки одинаковы. Такое поле напряжений называется *равномерным*.

Если линии скольжения одного семейства – пучок прямых, выходящий из одной точки, то по условию ортогональности пересекающие их линии второго семейства – концентрические окружности. В результате образуется центрированное поле линий скольжения (центрированный веер). В таком поле вдоль каждой прямой значения  $\theta$  постоянны, меняясь лишь при переходе от одной прямой к другой. Такое поле принято называть *простым*. Такое поле всегда граничит с полем равномерных напряжений.

#### **Задача.** Сжатие пластического слоя между жесткими плитами

Существуют различные подходы к решению данной задачи. Один из них, известный как решение Л. Прандтля (см., например, [10]), основывается на допущении, что толщина слоя  $2h$  значительно меньше протяжен-

ности слоя  $2L$ . Тогда уравновешивающие нагрузки в концевых сечениях слоя не могут заметно влиять на состояние слоя в некотором удалении от концов. Как отмечал Л.М. Качанов, решение Л. Прандтля является хорошим приближением лишь для тонкого слоя.

Для слоя конечной толщины нельзя пренебрегать влиянием условий на концах и в его центральной части; решение должно удовлетворять всем краевым условиям для напряжений и скоростей.

Схема к построению сетки линий скольжения для данной задачи приведена на рис. 11. Ось  $ox$  проведена через середину высоты полосы. В силу симметрии области для построения сетки рассмотрим ее часть, лежащую выше оси  $ox$  слева от оси симметрии  $O''O''$ . Граничное условие задается в виде  $\tau_k = k = \sigma_s / \sqrt{3}$ .

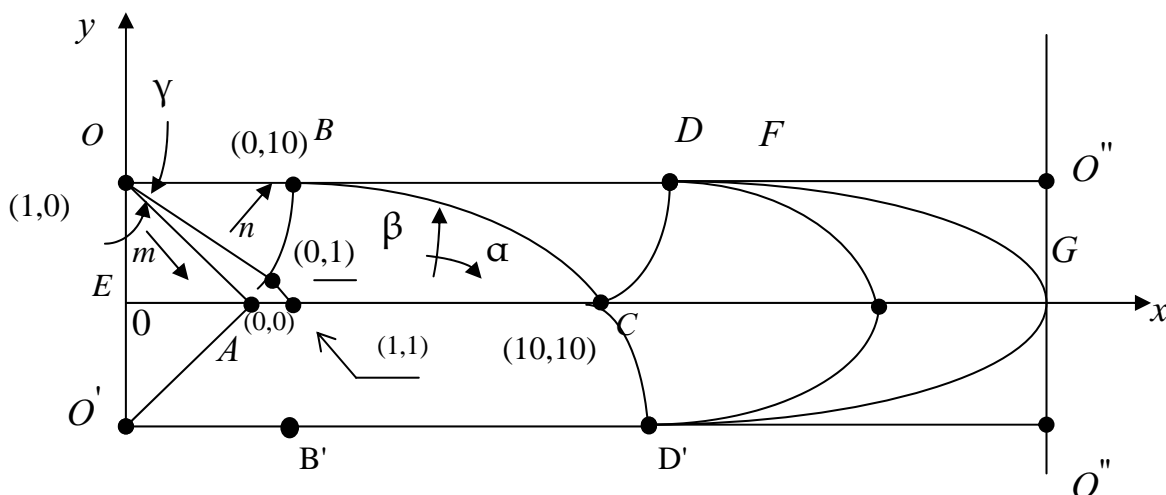


Рис. 11

На рис. 11  $OO''$  совпадает с границей жесткой плиты. Ось  $oy$  совпадает с боковой границей  $O'O$  слоя. Примем, что  $\alpha$  – линия скольжения, разделяющая пластическую и жесткую области, – прямая  $OA$ . Вследствие симметрии касательные напряжения на оси слоя отсутствуют. Поэтому линия  $OA$  наклонена под углом  $\pi/4$  к оси  $ox$ . Решение в области  $OAB$  представлено центрированным полем.

Данное поле ограничено  $\alpha$  – линией скольжения, совпадающей с границей.

## 5.2. Методика и алгоритм расчета напряжений

На первом этапе анализируют силы, действующие на жесткую часть  $OAO'$ . На гранях  $OA$  и  $O'A$  равномерно распределены касательные напряжения величины  $k$ , направленные к вершине  $A$ ; нормальное напряжение равно среднему давлению. Из условий равновесия жесткой части  $OAO'$  среднее давление вдоль отрезка  $OA$   $\alpha$ -линии должно быть равно  $-k$ . По теореме Г. Генки вдоль круговой  $\beta$ -линии  $\sigma = -2k\theta + \text{const}$ . Постоянную находят по значениям  $\sigma$  и  $\theta$  на  $OA$  и, переходя далее к контактной линии  $OB$ , для которой  $\theta=0$ , получают, что вдоль  $OB$  давление постоянно и равно  $-k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$ . В результате на отрезках  $AB, AB'$  характеристик  $\beta, \alpha$  известны значения  $\xi, \eta$  и напряженное состояние в области  $ABCB'$  определяется решением характеристической задачи.

В области  $B CD$  имеем смешанную задачу (вдоль  $BD$  задан угол  $\theta=0$ , так как на линии контакта  $\tau_{xy} = k$  и площадки скольжения совпадают с границей).

Построение продолжают до тех пор, пока не достигнут оси  $O''O''$ . По симметрии на линии  $O''O''$  касательные напряжения равны нулю, следовательно, условие  $\tau_{xy} = \text{const} = k$  на линии контакта не может выполняться вблизи середины слоя. Здесь возникает жесткая зона, ограниченная линией контакта и линией скольжения  $FG$ , проходящей в точку  $G$ . Распределение давления на участке  $FO''$  остается неопределенным, и можно вычислить лишь среднее давление по напряжениям, действующим вдоль линии раздела  $FG'$ . Справа от  $AB$  решение осуществляют численным методом. Рассмотрим пример построения сетки и вычисления параметров при  $h=1, n=10, m=10$ .

## 5.3. Построение сетки по методу Л.М. Качанова

Решение задачи выполняют в несколько этапов. На первом этапе, считая решение известным, в секторе  $OAB$  делят дугу  $AB$  на  $n$  равных частей точками  $(0,0), (0,1), \dots, (0,n)$ . В полученных точках устанавливают значения  $\theta$  и  $\sigma$ . Значение  $\theta$  в каждом из этих узлов равно углу наклона соответствующего  $\alpha$ -луча.

Данные, относящиеся к точкам дуги  $AB$ , и координаты точек  $x_{0n}, y_{0n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ ) заносят в первую строку табл. 1. Например, при  $n = 10$  в точке  $(0, 0)$   $\theta = -\pi/4$ , в точке  $(0, 5)$   $\theta = -\pi/8$  и аналогично для всех остальных точек на дуге  $AB$ .

Таблица 1

*Результаты расчета параметров по методу Л.М. Качанова*

Параметр	Значение											
	$m$	$n$										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\theta_{0,k}$	0	0,78	0,706	0,628	0,550	0,471	0,392	0,314	0,235	0,157	0,078	0,00
$-\sigma_{0,k}/k$		5	1,16	1,31	1,47	1,63	1,78	1,94	2,10	2,26	2,41	2,57
$x_{0,k}$		1,0	1,07	1,14	1,21	1,26	1,31	1,34	1,37	1,40	1,41	1,41
$y_{0,k}$		1,0	0,08	0,17	0,26	0,36	0,46	0,56	0,67	0,78	0,89	1,00
$-\theta_{1,k}$	1		0,785	0,785	0,628	0,550	0,471	0,392	0,314	0,235	1,57	0,078
$-\sigma_{1,k}/k$			1,31	1,47	1,63	1,78	1,94	2,10	2,26	2,41	2,57	2,73
$x_{1,k}$			1,16	1,24	1,32	1,39	1,45	1,37	1,54	1,57	1,6	1,61
$y_{1,k}$			0,00	0,09	0,18	0,29	0,39	1,67	0,62	0,74	0,86	0,99
$-\theta_{9,k}$	9										0,785	0,706
$-\sigma_{9,k}/k$											3,83	3,98
$x_{9,k}$											3,22	3,41
$y_{9,k}$											0,00	0,20
$-\theta_{10,k}$	10											0,785
$-\sigma_{10,k}/k$												4,14
$x_{10,k}$												3,62
$y_{10,k}$												0,00

*Примечание.* Строки со значением  $m$  от 2 до 8 см. в [10].

На втором этапе выполняют построение сетки в области  $ABC$ . При численном построении вычисляют координаты узлов  $(m, n)$ ,  $\sigma$  и  $\theta$ , которые также заносят в табл. 1, начиная со второй строки. Расчет и построение сетки выполняют в направлении увеличения параметров  $m, n$  (см. стрелки на рис. 11). Заметим, что значения параметров в каждой строке табл. 1 соответствуют  $\beta$ -линиям сетки на рис. 11. Исходными данными для вычисления параметров в точках каждой  $\beta$ -линии служат координаты точек и параметры предыдущей линии.

Следуя рекомендациям, приведенным в литературе (см. [10 – 16]), введем в области сетку узлов с номерами  $(m, n)$ . Узлы соответствуют точкам пересечения линий скольжения. Значения неизвестных функций  $\theta_{m,n}$ ,  $\sigma_{m,n}$  в узле  $(m, n)$  вычисляют шаг за шагом по формулам

$$\theta_{m,n} = \theta_{m,n-1} + \theta_{m-1,n} - \theta_{m-1,n-1}, \quad (84)$$

$$\sigma_{m,n} = \sigma_{m,n-1} + \sigma_{m-1,n} - \sigma_{m-1,n-1}. \quad (85)$$

Координаты узловых точек  $(m, n)$  при известных координатах узлов  $(m-1, n), (m, n-1)$  вычисляют при замене дуг хордами. Тогда вместо дифференциальных уравнений линий скольжения  $dy/dx = \operatorname{tg}\theta$  и  $dy/dx = \operatorname{ctg}\theta$  используют запись разностных уравнений

$$y_{m,n} - y_{m-1,n} = (x_{m,n} - x_{m-1,n}) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta_{m,n} + \theta_{m-1,n}), \quad (86)$$

$$y_{m,n} - y_{m,n-1} = -(x_{m,n} - x_{m,n-1}) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\theta_{m,n} + \theta_{m,n-1}). \quad (87)$$

С помощью формул (86) и (87) вычисляют координаты узла  $(m, n)$ , которые вместе со значениями функций в нем  $\theta_{mn}, \sigma_{mn}$  заносят в табл.1. Расчет начинают всегда с точки  $(1,1)$ .

Вследствие симметрии поле вычисляют выше  $AC$ . Поскольку на  $AC$   $\theta = -\pi/4$ , в области  $ABC$  можно решать смешанную задачу.

В области  $BCD$  поле определяется также по схеме решения смешанной задачи.

Третий этап заключается в графическом построении сетки линий скольжения. Как и в первом случае, заменяют дугу  $AB$  (рис.11) ломаной линией, состоящей из равных отрезков – хорд. Концы данных отрезков обозначены  $(0,0), (0,1), (0,2), \dots, (0,10)$  (рис.12).

Проводят отрезок  $(0,1) - (1,1)$  перпендикулярно отрезку  $(0,0) - (0,1)$ , отрезок  $(0,2) - (1,2)$  перпендикулярно отрезку  $(0,1) - (0,2)$  и отрезок  $(1,1) - (1,2)$  параллельно отрезку  $(0,0) - (0,1)$ . В результате их пересечения получают узловую точку  $(1,2)$ .

Аналогично находят положение узлов  $(1,3), (1,4), \dots, (1,10)$  и получают линию скольжения 1 семейства  $\alpha$ . Продолжая построение, определяют другие линии семейства  $\alpha$  и одновременно с ними линии семейства  $\beta$ . Заметим, что линии скольжения семейства  $\alpha$  при принятом граничном

условии пересекают линию контакта  $OO''$  под углом  $\pi/2$ . В результате получают поле линий скольжения, состоящее из четырехугольных ячеек, у которых каждый из двух углов равен  $\pi/2$ , а каждый из двух других –  $\pi/2 \pm \gamma$ .

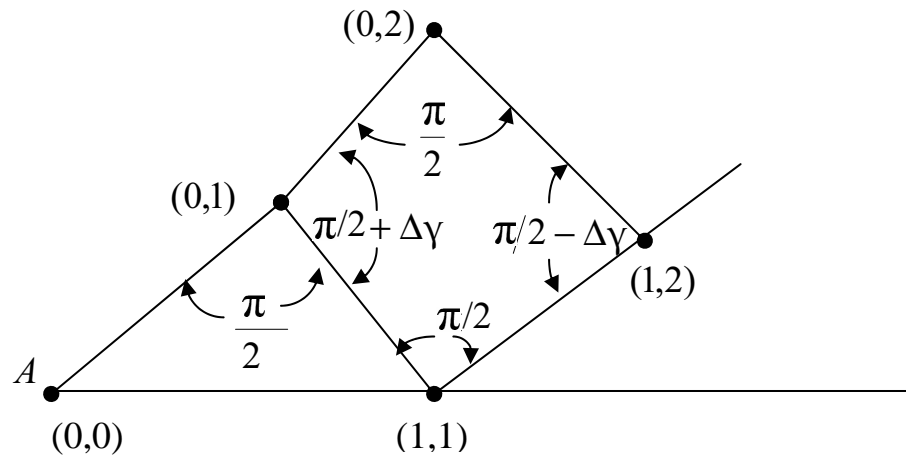


Рис.12

Угол  $\gamma$  образован двумя соседними лучами веерной сетки в области  $OAB$  на рис.11. Для рассматриваемого примера  $\gamma = \pi/40$ .

Расчетные параметры сжатия пластического слоя (по Л.М. Качанову) на линиях скольжения с номерами  $0,1,\dots,9,10$  приведены в табл.1. Заполнена лишь верхняя треугольная часть таблицы, соответствующая сетке линий скольжения в области  $ABC$  на рис. 11.

Из табл.1 видно, что углы  $\theta$  наклона линий семейства  $\alpha$  к оси  $ox$  в точках  $(1,1), (1,2), \dots, (1,10)$  равны  $45^\circ$ .

#### 5.4. Вычисление параметров по методике М.В. Сторожева и Е.А. Попова

В треугольнике  $OEA$  (см. рис.11) линия  $OA$  представляет в данном примере свободную поверхность деформируемого слоя. Следовательно, на этой линии  $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$  и линии скольжения обоих семейств наклонены к ней под углом  $\pi/4$ . Они образуют сетку ортогональных прямых.

Напряженное состояние однородное. Напряжение  $\sigma_y$  здесь главное, сжимающее, и по условию пластичности  $|\sigma_y| = 2k$ . Касательные напряжения на оси  $ox$  равны нулю.

В круговом секторе  $ABC$  поле центрированное и состоит из дуг окружностей (семейство  $\beta$ ) и ортогональных к ним линий семейства  $\alpha$ .

Вдоль каждого из радиусов напряженное состояние остается постоянным, но изменяется при переходе от одного радиуса к другому (при движении по линиям  $\beta$ ). Поэтому для характеристики напряженного состояния в секторе  $ABC$  достаточно определить напряжения в узловых точках  $(0,1), (0,2), (0,3), \dots, (0,10)$ . В точке  $(0,0)$   $\theta_{0,0} = 45^\circ$ .

В других точках, расположенных на линиях скольжения,

$$\theta = \theta_{0,0} + \gamma n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{40},$$

где  $n$  – порядковый номер линии скольжения семейства  $\beta$ .

Для построения сеток в работах [7,8] предложены вспомогательные таблицы и выражения, позволяющие определять компоненты напряжения в угловых точках поля линий скольжения по их индексам.

### Контрольные вопросы

- 5.1. Что такое линии Д.К.Чернова – Л. Людерса?
- 5.2. Как распределяются контактные напряжения при сжатии полосы?  
Начертить эпюры.
- 5.3. Как отсчитывают угол  $\theta$  по методу линий скольжения?
- 5.4. Какие напряжения можно определить методом линий скольжения?
- 5.5. Как отсчитывают угол  $\theta$  по методу линий скольжения?
- 5.6. Как записывают уравнения пластического равновесия в локальной системе координат?
- 5.7. Назвать основные свойства линий скольжения. Как изменяется среднее напряжение вдоль линии скольжения?
- 5.8. Почему метод линий скольжения можно назвать методом характеристик?
- 5.9. Какие задачи можно решить методом характеристик?
- 5.10. Под какими углами выходят линии скольжения на поверхность деформируемого тела?



## IV. ЗАДАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

### Практическое занятие № 1

1. Ответить на контрольные вопросы к теме 1.
2. Решить задачу № 1.

**Задача № 1.** В прямоугольной декартовой системе координат задана матрица тензора напряжений в точке  $M$ . Найти напряжения  $\sigma^n$ ,  $\bar{\sigma}_n$ ,  $\tau_n$  на площадке, нормаль  $\vec{n}$  к которой согласно рис.2 задана углами  $\alpha = \angle(\vec{n}, x_1)$ ,  $\beta = \angle(\vec{n}, x_2)$ ,  $\gamma = \angle(\vec{n}, x_3)$ . Данные для расчетов приведены в табл. 2.

#### *Методические рекомендации к решению задачи № 1*

1. Выбрать вариант задачи (в соответствии с индивидуальным номером студента в журнале), номера двух контрольных вопросов темы 1 по табл. 7.

2. Изучить материал по теме 1, изложенный в пп.1.1 – 1.3 и в соответствующих разделах рекомендованной литературы. Изучить методику решения задачи, рассмотренной в п.1.3. Решение задачи выполнить с учетом данных, приведенных в табл.2.

3. Уяснить понятия точки и материальной частицы, физический смысл разложения тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор. Повторить записи тензора и девиатора после приведения к диагональному виду.

Таблица 2

## Исходные данные для решения задачи № 1

Номер варианта	Составляющие тензора напряжений, МПа						Углы наклона нормали, град		
	$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{33}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{23}$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	1	3	2	2	2	4	45	45	60
2	3	1	2	1	2	3	45	60	60
3	1	2	4	2	1	3	45	45	60
4	2	1	3	2	1	5	45	60	45
5	1	2	3	3	1	1	45	60	60
6	2	1	3	2	2	4	45	45	60
7	3	2	1	2	3	3	45	60	60
8	1	3	1	1	1	3	45	45	45
9	2	1	2	4	2	3	60	60	60
10	4	1	1	2	3	1	60	60	45
11	3	4	1	1	2	2	60	45	45
12	1	2	3	3	1	1	60	60	60
13	1	1	1	2	4	3	60	45	45
14	2	2	2	3	1	1	45	60	60
15	1	2	3	3	1	3	45	45	60
16	2	1	1	1	2	2	45	60	60
17	2	3	4	3	2	1	60	60	45
18	4	3	3	1	1	1	45	45	45
19	3	2	1	1	2	3	45	60	60
20	4	3	2	1	1	2	45	45	45
21	3	4	1	2	3	4	60	45	60
22	2	1	3	3	3	1	45	60	60
23	3	3	3	2	2	2	45	45	45
24	3	3	2	2	3	3	45	60	45
25	3	2	2	2	2	3	60	60	60
26	4	3	2	2	3	4	60	45	45
27	4	2	2	2	3	4	45	45	60
28	3	4	3	4	3	4	45	60	45
29	4	3	4	3	2	2	45	60	45

30	1	3	2	2	3	1	45	60	45
----	---	---	---	---	---	---	----	----	----

4. При подготовке письменных ответов на контрольные вопросы рекомендуется приводить схемы и формулы (см. п.1.1) с обозначением переменных. При использовании рекомендованной литературы приводить ссылки на источники.

5. Представить в отчете запись алгоритма задачи с описанием формул и обозначением переменных. Результаты расчетов представить в форме таблицы и в виде графика, аналогичного графику на рис.6.

### Практическое занятие № 2

1. Ответить на контрольные вопросы к теме 1.

2. Решить задачу № 2.

**Задача № 2.** В точке тела в прямоугольной декартовой системе координат известны компоненты тензора напряжений, имеющие характеристику размерности  $\text{кгс}/\text{мм}^2$ . Перевести размерности напряжений в МПа. Найти главные напряжения в этой точке и их направления. Исходные данные приведены в табл. 3.

Таблица 3

*Варианты исходных данных к задаче № 2*

Номер варианта	Компоненты тензора напряжений, $\text{кгс}/\text{мм}^2$					
	$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{33}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{23}$
1	10	20	0	0	15	-15
2	5	0	11	3	-8	-3
3	10	5	-1	4	-2	3
4	5	0	-3	5	8	-7
5	5	4	-10	0	0	10
6	3	6	2	2	4	0
7	4	5	-8	4	2	-3
8	20	10	1	0	-15	0
9	6	-10	4	15	4	10
10	-10	0	-20	10	0	2
11	-20	11	5	-15	-3	-15
12	0	10	20	-8	3	7
13	3	20	0	3	0	-6
14	7	-9	2	3	-10	0
15	20	7	18	0	10	-10
16	-15	10	10	4	-5	-2

17	1	2	4	3	2	1
----	---	---	---	---	---	---

Окончание табл. 3

№ варианта	Компоненты тензора напряжений, кгс/мм <sup>2</sup>					
	$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{33}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{13}$	$\sigma_{23}$
18	2	2	2	3	1	1
19	3	2	4	1	1	3
20	1	3	1	3	1	3
21	2	2	1	2	1	2
22	10	2	3	2	3	10
23	4	3	2	1	1	4
24	1	1	2	2	2	1
25	2	2	2	2	2	5
26	1	1	1	1	1	3
27	4	4	4	3	3	3
28	2	2	2	3	3	3
29	3	3	3	2	2	2
30	3	2	1	2	2	3

Номер варианта соответствует индивидуальному номеру студента.

### *Методические рекомендации к решению задачи № 2*

1. С помощью табл. 7 выбрать варианты контрольных вопросов темы 2 и вариант задания (в соответствии с индивидуальным номером студента в журнале). При подготовке письменных ответов воспользоваться сведениями, приведенными в рекомендованной литературе.

2. Изучить материал по теме 1, изложенный в пп.1.1 – 2.4, и методику решения задачи из п.1.5.

3. Представить в отчете алгоритм данной задачи с формулами, обозначением переменных. Результаты решения представить в виде таблицы и графика (см. рис.7). Отчет представить в виде пояснительной записки в формате А4.

### **Практическое занятие № 3**

1. Ответить на контрольные вопросы к теме 2.
2. Решить задачу № 3.

**Задача № 3.** Рассчитать напряженно-деформированное состояние трубы (рис.13) в условиях плоского деформированного состояния. Расчет

выполнить при  $E = 207360$  МПа;  $\sigma_s = 6000$  кгс/мм<sup>2</sup>;  $\mu = 0,28$ . Варианты задания приведены в табл. 1. Принимая  $p_b = 0$ , вычислить предельное давление  $p'_a$ , при котором металл на внутренней поверхности переходит в пластическое состояние. Вычислить давление  $p$ , при котором труба целиком переходит в пластическое состояние.

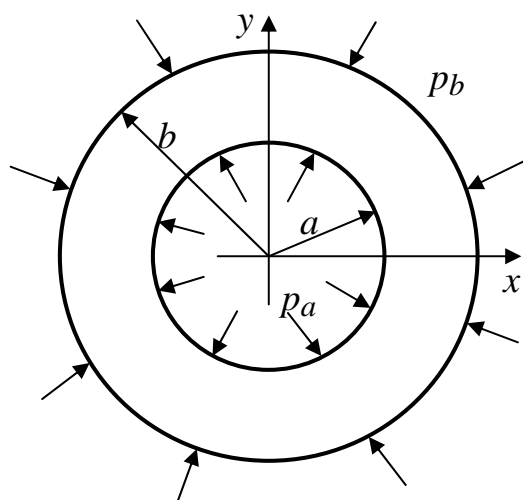


Рис.13

Таблица 4

Варианты исходных данных к задаче № 3

Номер варианта	$b$ , мм	$a$ , мм	$p_b$ , МПа	$p_a$ , Мпа
1	200	100	200	100
2	220	100	200	100
3	230	100	200	100
4	240	100	200	100
5	250	100	200	100
6	260	100	200	100
7	280	100	200	100
8	120	100	200	100
9	140	100	200	100
10	160	100	200	100
11	180	100	200	100
12	100	50	200	100
13	120	50	200	100
14	160	50	200	100
15	180	50	200	100

16	200	50	200	100
----	-----	----	-----	-----

Окончание табл. 4

Номер варианта	$b$ , мм	$a$ , мм	$p_b$ , МПа	$p_a$ , МПа
17	120	100	0	100
18	140	100	0	100
19	160	100	0	100
20	180	100	0	100
21	200	100	0	100
22	120	100	100	0
23	140	100	100	0
24	160	100	100	0
25	180	100	100	0
26	200	100	100	0
27	100	60	100	0
28	100	80	100	0
29	120	100	100	0
30	180	120	100	0

*Методические рекомендации к решению задачи № 3*

1. Расчеты параметров  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{zz}$  и  $u_{rr}$  выполнить с помощью формул (72) – (76).

2. Изучить пример решения задачи в п. 2.4.

3. В отчете представить условие задачи, схему (см. рис. 13), формулы и результаты расчетов. Результаты представить в виде табл. 5 и графиков (см. рис. 9). Графики построить по пяти расчетным значениям каждого параметра (при изменении  $r$  с равным шагом на интервале  $b - a$ ). По приведенной методике (см. рис. 9) выполнить анализ расчетных графиков

Таблица 5

*Образец оформления результатов расчетов*

Параметр	$r_1 = r_a$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5 = r_b$
$\sigma_{rr}$ , МПа					
$\sigma_{\alpha\alpha}$ , МПа					
$u_{rr}$ , мм					

## Практическое занятие № 4

1. Ответить на контрольные вопросы к теме 5.
2. Решить задачу № 4.

**Задача № 4.** В соответствии со схемой и обозначениями параметров на рис.14 графическим методом построить сетку линий скольжения для задачи о сжатии между жесткими плитами. Исходные данные приведены в табл. 6.

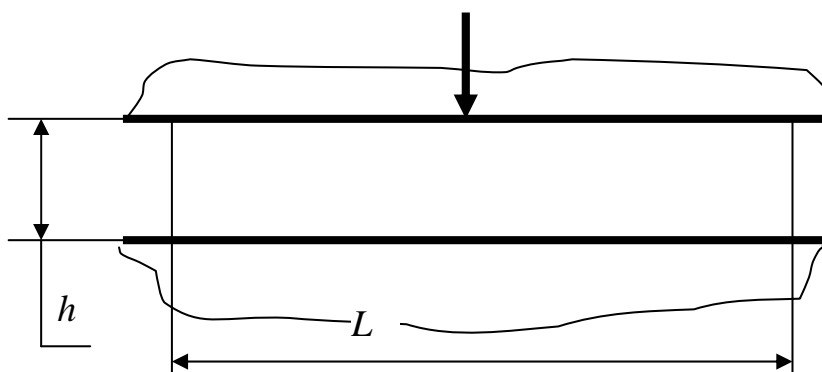


Рис.14

Таблица 6

*Варианты исходных данных к задаче № 4*

Номер варианта	Размеры полосы, мм		Материал	Число секторов $n$ в верной области	Число точек $m$ вдоль лучей
	$h$	$b$			
1	0,8	10	Сталь углеродистая	8	8
2	0,8	12	То же	8	8
3	0,8	14	"	8	8
4	0,8	16	"	8	8
5	0,8	18	"	8	8
6	0,8	20	"	8	8
7	0,8	24	"	8	8
8	1	10	Латунь	5	5
9	1	12	То же	5	5
10	1	14	Латунь	5	5
11	1	16	То же	5	5
12	1	26	Свинец	5	5
13	1.2	20	То же	10	10
14	1.2	24	"	10	10
15	1.2	26	Свинец	10	10
16	1,2	28	Медь	10	10
17	1.2	30	То же	10	10
18	2	30	Сталь углер	15	15
19	2	36	То же	15	15
20	2	40	"	15	15

#### Методические рекомендации к решению задачи № 4

1. Воспользоваться схемой, приведенной на рис.11, сохраняя все обозначения. Изучить методику графического построения сетки согласно рис.12.

2. В соответствии со схемой рис.11 установить значения угла  $\gamma$  с учетом заданных параметров  $m$  и  $n$ , по справочной литературе определить  $\sigma_s$ , граничные условия задать как в примере на рис.12.

3. Для повышения точности графических построений на каждом шаге сетки (см. рис. 12), точности измерения углов и точности вычисления координат точек рекомендуется построить увеличенную модель области на миллиметровой бумаге. Измеренные координаты узловых точек  $x_{i,k}$ ,  $y_{i,k}$  и значения угла  $\theta_{i,k}$  занести в табл.1 с учетом точности их измерения.

4. В соответствии со схемой на рис.11 при заданных размерах  $h$  и  $L$  построить сечение полосы с изображением сетки в области  $AEO$ ,  $AOB$  и  $ABC$ . Обратит внимание на точность построения сетки в области  $ABC$ .

#### Варианты заданий

Таблица 7

Номера контрольных вопросов

Номер, закрепленный за студентом	Номера контрольных вопросов	
	к темам 1 и 2	к темам 4 и 5
1, 11, 21	1, 20	1
2, 12, 22	2, 19	2
3, 13, 23	3, 18	3
4, 14, 24	4, 17	4
5, 15, 25	5, 16	5
6, 16, 26	6, 15	6
7, 17, 27	7, 14	7
8, 18, 28	8, 13	8
9, 19, 29	9, 12	9
10, 20, 30	10, 11	10



## ПРИЛОЖЕНИЕ

### *Именной указатель и биографические данные*

#### **Огюстен Луи Коши (21.08.1789 – 23.08.1857)**

Механик и инженер О. Коши родился в Париже в семье адвоката. Рано проявил склонность к математике. Обучался в Политехнической школе. В 1810 г. закончил Школу мостов и дорог. Работая на постройке канала, сооружении моста, в Шербургском порту свободное время посвящал математическим исследованиям. Внес вклад в развитие математики, математической физики. Был введен в состав членов Парижской академии наук. Определил понятия напряжений и деформации. Разработал теории напряжений и деформаций, сформулировал зависимости между напряжениями и деформациями. Поставил важнейшую задачу теории дифференциальных уравнений (задача Коши).

#### **Симеон Дени Пуассон (21.06.1781 – 25.04.1840)**

Математик и механик С. Пуассон родился в городке Питивье близ Парижа в бедной семье. Учился на отлично и поступил в Политехническую школу. Обладал выдающимися математическими способностями и был оставлен для проведения занятий по математике. В 1806 г. получил звание профессора, в 1812 г. был избран членом Парижской академии наук, в 1826 г. – почетным членом Петербургской академии наук. Написал свыше 300 работ по различным разделам математики, гидромеханики, теории планет, теории притяжения, электростатике. В теории упругости вывел общие уравнения равновесия и граничные условия на основе гипотезы о молекулярном строении тела, исследовал колебания пластин и распространение волн.

#### **Леонард Эйлер (15.04.1707 – 18.09.1783)**

Математик и механик Л. Эйлер родился в семье небогатого пастора в г. Базеле (Швейцария). В 13 лет поступил в Базельский университет. В 1724 г. в возрасте 16 лет получил ученую степень магистра искусств. Работал в Петербурге с 1727 по 1741 гг. и с 1766. Эйлер, будучи математиком, развил математический аппарат применительно к задачам механики, сопротивления материалов, астрономии, физики, морскому делу, теории механизмов. Л. Эйлеру принадлежит современное определение модуля упругости. Он впервые поставил и решил задачу устойчивости стержня.

Полное собрание сочинений Л. Эйлера, содержащее 850 названий, издано в Швейцарии и составило 72 тома.

### **Жозеф Луи Лагранж (25.01.1736 – 10.04.1813)**

Математик и механик Ж. Лагранж родился в г. Турине (Италия), проявил исключительные математические способности в школе и в 17 лет стал преподавателем, а в 18 лет – профессором математики в школе. Основал Туринскую академию наук, был избран членом Берлинской, Петербургской, Парижской академий наук. Выполнил важные исследования по вариационному исчислению, математическому анализу, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям, астрономии и математической картографии. Полное собрание сочинений Ж. Лагранжа было издано в 1867-1894 гг. и состояло из 14 томов.

### **Роберт Гук (18.07.1635 – 03.03.1703)**

Физик и механик Р. Гук родился в семье священника на острове Уайт (Англия). Окончил Оксфордский университет. Работал в Лондонском королевском обществе в должности куратора по проведению экспериментов. Обладал искусством экспериментатора и технической изобретательностью, выполнил важные исследования в области сопротивления материалов, развил идею волновой природы света, разработал конструкцию сложного телескопа, в биологии открыл клеточное строение растений, построил “пневматическую машину”.

### **Рихард Мизес (19.04.1883 – 14.07.1953)**

Математик и механик Р. Мизес родился в г. Лемберге (Австро-Венгрия, ныне г. Львов). Окончил Венский университет. Работал профессором Венского, Страсбургского, Берлинского университетов, с 1933 – 1939 гг. – профессором Стамбульского университета, с 1939 г. до конца жизни профессором Гарвардского университета. Работы посвящены теории упругой устойчивости цилиндрической оболочки под воздействием наружного давления и сжимающей силы. В 1913 г. Р. Мизес ввел критерий пластичности потенциальной энергии изменения формы, заменив шестиугольник Треска – Сен-Венана.

### **Эудженио Бельтрами (16.11.1835 – 18.02.1900)**

Математик Эудженио Бельтрами родился в г. Кремоне (Ломбардия, Италия). Окончил Павийский университет. Работал профессором Болонского, Римского, Павийского университетов. Работы Бельтрами относятся к разным разделам математики. Изучал кинематику жидкостей, теорию потенциалов, теорию теплопроводности. Принял за критерий возникновения пластических деформаций при неоднородном напряженном состоянии потенциальную энергию деформации.

### **Габриель Ламе (22.07.1795 – 01.05.1870)**

Механик и инженер Г. Ламе родился в г. Туре (Франция), окончил Лицей Людовика Великого, Политехническую школу, Горную школу. С 1820 по 1831 гг. по приглашению работал в России. В должности профессора Института корпуса инженеров путей сообщения Ламе преподавал высшую математику, физику и аналитическую механику. В работах изложил общие уравнения теории упругости, дал геометрическую интерпретацию напряженного состояния в виде эллипсоида напряжений, получил решение задачи определения напряжений в толстостенном полой цилиндре, нагруженном внутренним и внешним давлением (задача Ламе).

### **Адемар Жан Клод Сен-Венан (23.08.1797 – 06.01.1886)**

Механик и инженер Сен-Венан родился во Франции. Поступил в Политехническую школу. Работал техником на пороховом заводе. Окончил школу мостов и дорог. Работал на строительстве каналов. В научных работах методами теории упругости решил задачи изгиба и кручения стержней, занимался практическими приложениями гидромеханики. Заложил основы современной теории пластичности. Был избран действительным членом Парижской академии наук.

### **Шарль Огюстен Кулон (14.06.1736 – 23.08.1806)**

Физик, механик, инженер Ш. Кулон родился в г. Ангулеме (Франция). Получил образование военного инженера. Занимался механическими испытаниями хрупких материалов, исследовал крутильные колебания, поперечный изгиб. Дал правильное решение задачи об изгибе консольной балки прямоугольного поперечного сечения. Исследовал трение скольжения различных тел. В 1781 г. работал в Парижской академии наук.

### **Людвиг Прандтль (04.02.1875 – 15.08.1953)**

Механик и инженер Л. Прандтль родился в Германии. Окончил Высшую техническую школу в Мюнхене. Под руководством профессора А. Феппля выполнил исследование изгиба кривого бруса большой кривизны. Дал точное решение задачи чистого изгиба стержня с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника. Опубликовал решение плоской задачи о вдавливании жесткого штампа в жесткопластическое тело, ограниченное плоскостью.

В 1924 г. на Первом международном съезде по теоретической и прикладной механике Л. Прандтль сделал доклад, в котором сформулировал основы теории пластичности – теории течения для частного случая плоской деформации. Разработал теорию пограничного слоя, а также методы проектирования самолетов по данным испытаний моделей в трубах.

### **Анри Эдуард Треска (1814 – 1885)**

Механик и инженер А. Треска родился в г. Дюнкерке (Франция). Окончил политехническую школу, работал в Высшем ремесленном училище инженером, помощником директора училища, старшим физиком-экспериментатором. Провел большое экспериментальное исследование прессования и пробивания металлов. Установил, что пластические деформации в общем случае неоднососного напряженного состояния возникают тогда, когда наибольшее касательное напряжение достигает половины предела текучести при одноосном растяжении.

### **Пьер Симон Лаплас (1749 – 1827)**

Французский астроном, математик, физик П. Лаплас в 1802 г. был избран почетным членом Петербургской академии наук. Опубликовал многочисленные труды по дифференциальным уравнениям, математической физике, теплоте, теории капиллярности, акустике, геодезии и др.

### **Исаак Ньютон (1643 – 1727)**

Английский математик, механик, астроном, физик, основатель классической физики, с 1703 г. президент Лондонского королевского общества. Фундаментальные труды “Математические начала натуральной философии” и “Оптика”. Разработал независимо от Г. Лейбница дифференциальное и интегральное исчисление. Открыл дисперсию света, исследовал интерференцию и дифракцию, заложил основы классической механики. Открыл закон всемирного тяготения, дал теорию движения небесных тел, создал основы небесной механики.

### **Александр Юрьевич Ишлинский (1913)**

Выдающийся российский ученый в области механики академик А.Ю. Ишлинский внес вклад в развитие общей и прикладной механики, механики деформируемых сред, автоматики. Решил осесимметричную задачу теории пластичности. Опубликовал фундаментальные труды по теории гироскопов, навигационным приборам, системам навигации.

### **Дмитрий Константинович Чернов (1839 – 1921)**

Российский ученый Д.К. Чернов – один из основоположников металлостроения, теории термической обработки стали и теории обработки металлов давлением (ОМД). После работы в молотовом цехе Обуховского завода опубликовал статью “О выделке стальных осей для подвижного состава железных дорог”, сформулировал идеи, которые до настоящего времени лежат в основе правильного подхода к рациональному выполнению процессов ОМД. Открыл критические точки фазовых превращений стали. Создал теорию кристаллизации стального слитка, установил влияние термической обработки стали на ее структуру и свойства.

### **Степан Прокофьевич Тимошенко (22.12.1878 – 29.05.1972)**

В Институте инженеров путей сообщения слушал лекции и выполнял проекты мостов у Н.А. Белелюбского, Л.Ф. Николаи. После окончания института посетил Германию и Швейцарию, служил в армии. Работая в институте под руководством Н.А. Белелюбского, а затем в Петербургском политехническом институте под руководством профессора С.И. Дружинина, изучал курсы математики, теории упругости, посещал кружок В.Л. Кирпичева, принимал участие в монтаже испытательных машин. В Германии слушал лекции Л. Прандтля.

С 1906 г. работал заведующим кафедрой сопротивления материалов Киевского политехнического института. Занимался задачами устойчивости упругих систем. Решение задач устойчивости выполнял энергетическим методом из условия минимума энергии. В 1911 г. С.П. Тимошенко удостоен премии Д.И. Журавского. Опубликовал работы по динамике и прочности рельсов. В 1913 – 1915 гг. закончил работу над первым и вторым томами теории упругости.

С 1920 г. работал в Югославии, а затем в США. В г. Питсбурге организовал лабораторию оптических методов исследования напряжений. Возглавлял кафедры, работая в Мичиганском, Стенфордском университетах, состоял членом АН ряда стран. Написал крупные монографии по статике сооружений, теории устойчивости, пластинам и оболочкам, которые неоднократно переиздавались и переведены на русский язык.

**Максимилин Тытус Хубер (04.01.1872 – 09.12.1950)**

Механик и инженер М. Хубер родился в г. Кросьненки (Австро-Венгрия, ныне Польша). Будучи студентом Лембергской политехнической школы (г. Львов) изучал математику, механику, выполнил ряд научных работ. Работал в Высшей промышленной школе Кракова, в 1914 г. стал ректором Лембергской политехнической школы, в 1928 г. работал заведующим кафедрой в Варшавском политехническом институте, с 1934 г. – действительный член польской Академии искусств, с 1948 г. заведовал кафедрой проблем механики в Краковском горно-металлургическом институте. М. Хубер в 1904 г. предложил критерий пластичности потенциальной энергии изменения формы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### *Основная литература*

1. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести: Учеб. для вузов. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
2. **Дель Г.Д.** Технологическая механика. – М.: Машиностроение, 1978.– 174 с.
3. **Гун Г.Я.** Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением. – М.: Metallurgia, 1983. – 351 с.
4. **Кучеряев Б. В.** Механика сплошных сред (теоретические основы обработки давлением композитных металлов): Учеб. для вузов. – М.: МИСиС, 1999. – 320 с.
5. **Аркулис Г.Э., Дорогобид В. Г.** Теория пластичности: Учеб.пособие. – М.: Metallurgia, 1987. – 352 с.
6. **Белевич А.В.** Основы технологической механики: Текст лекций / Владим. гос. ун-т. – Владимир, 1999. – 96 с.
7. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости: 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
8. **Гун Г.Я.** Теоретические основы обработки металлов давлением (теория пластичности). – М.: Metallurgia, 1980. – 456 с.
9. **Ильюшин А.А., Ленский В.С.** Соппротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1956. – 371 с.

### *Дополнительная литература*

10. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
11. **Соколовский В.В.** Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.
12. **Томленов А.Д.** Теория пластического деформирования металлов. – М.: Metallurgia, 1972. – 408 с.
13. **Колмогоров В.Л.** Механика обработки металлов давлением. Учеб. для вузов. – М.: Metallurgia, 1986. – 688 с.
14. **Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш.** Механика пластических деформаций при обработке материалов. – М.: Машиностроение, 1969. – 405 с.
15. **Бэкофен В.** Процессы деформации: Пер. с англ. – М.: Metallurgia, 1978. – 288 с.
16. **Сторожев М.В., Попов Е.А.** Теория обработки металлов давлением: Учеб.: 3-е. Изд. – М.: Машиностроение, 1971. – 424 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	5
<b>I. Общие методические указания</b> .....	6
<b>II. Программа курса</b> .....	7
<b>III. Расчетные зависимости и алгоритмы вычисления напряжений</b> ....	8
Тема 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ .....	
1.1. Механическое силовое воздействие. Напряжения в точке тела .....	8
1.2. Напряжения на наклонной площадке .....	10
1.3. Тензор напряжений .....	13
1.4. Напряжения на октаэдрических площадках .....	20
1.5. Вычисление главных значений тензора напряжений .....	23
1.6. Статические граничные условия .....	27
1.7. Конечные и малые деформации .....	28
Контрольные вопросы .....	31
Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ .....	
2.1. Краткие сведения из теории .....	32
2.2. Замкнутая система уравнений теории упругости и методы ее решения .....	34
2.3. Плоское напряженное состояние .....	35
2.4. Плоское деформированное состояние .....	38
Контрольные вопросы .....	43
Тема 3. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ .....	
Контрольные вопросы .....	45
Тема 4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ .....	
4.1. Система уравнений теории пластичности и краевые условия .....	46
4.2. Методы решения краевых задач и расчет напряжений .....	47
Контрольные вопросы .....	48



Тема 5. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ .....	49
5.1. Общие сведения о методе линий скольжения .....	49
5.2. Методика и алгоритм расчета напряжений.....	52
5.3. Построение сетки по методу Л.М. Качанова .....	52
5.4. Вычисление параметров по методике М.В. Сторожева, Е.А. Попова .....	55
Контрольные вопросы .....	56
<b>IV. Задания к практическим занятиям .....</b>	<b>57</b>
Практическое занятие № 1 .....	57
Практическое занятие № 2 .....	59
Практическое занятие № 3 .....	60
Практическое занятие № 4.....	63
Варианты заданий .....	64
<b>Приложение.....</b>	<b>65</b>
<b>Библиографический список.....</b>	<b>71</b>

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАЧИ  
ПО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.  
ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Составитель  
БЕЛЕВИЧ Александр Викторович

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор В.В.Морозов

Редактор Р.С. Кузина  
Корректор В.В. Гурова  
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко  
Дизайн обложки Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 04.02.03.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,42. Уч.-изд. л.4,62. Тираж 200 экз.

Заказ

Редакционно-издательский комплекс  
Владимирского государственного университета.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.