Владимирский государственный университет

СТАТИКА

Методические указания к курсовым работам по теоретической механике

Владимир 2002

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра теоретической и прикладной механики

СТАТИКА

Методические указания к курсовым работам
по теоретической механике

Составители:
Л.Ф. МЕТЛИНА
А.В. КРЫЛОВ
О.В. ФЕДОТОВ

Владимир 2002

УДК 531.3

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
Владимирского государственного университета
А.А. Кобзев

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Статика: Метод. указания к курсовым работам по теоретической механике / Владим. гос. ун-т; Сост.: Л.Ф. Метлина, А.В. Крылов, О.В. Федотов. Владимир, 2002. 40 с.

Предназначены для самостоятельного выполнения курсовой работы по теоретической механике, раздел “Статика”. Включают в себя краткий теоретический материал по разделу “Статика”, варианты заданий, примеры выполнения работы.

Предназначены для студентов очной и заочной форм обучения специальностей 072000, 072300, 101200, 120100, 120100уск, 120700, 150200, 210200, 230100, 290300, 231000, 340100, 290700.

Табл. 5. Ил. 6. Библиогр.: 3 назв.

УДК 531.3

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Курсовая работа включает в себя пояснительную записку, оформленную на одной стороне листа бумаги стандартного размера А4. Чертежи выполняются на ватмане формата А3.

Пояснительная записка должна содержать условие задачи, задание и решение с элементами теории по соответствующему разделу.

Работа подшивается под титульный лист, выполненный на ватмане. Надписи на титульном листе оформляют чертежным шрифтом или на компьютере. Образец оформления титульного листа (прил. 1).

Курсовая работа состоит из четырех заданий.

Задание 1. **Расчет плоской конструкции, состоящей из одного объекта.**

Задание 2. **Расчет плоской конструкции, состоящей из двух объектов.**

Задание 3. **Расчет стержневой конструкции. Пространственная система сил.**

Задание 4. **Расчет конструкции, состоящей из однородных прямоугольных плит, жестко соединенных между собой. Пространственная система сил.**

Цель работы

Помочь студенту приобрести навыки решения задач теоретической механики по разделу «Статика».

Задание 1.

Постановка задачи.

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости, закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена к невесомому стержню с шарнирами на концах или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом P = 20 кН.

На раму действует пара сил с моментом М = 200 кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в табл.1.

Требуется определить реакции связей в точках A и B. В расчетах принять a = 0,5 м.

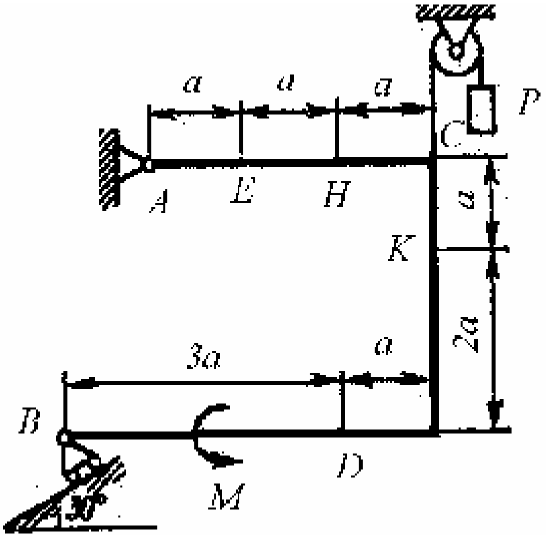
При выполнении работы учесть, что натяжение обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми.

Варианты заданий: рис. 1 (1.0 – 1.9), табл. 1. Варианты выдаются преподавателем.

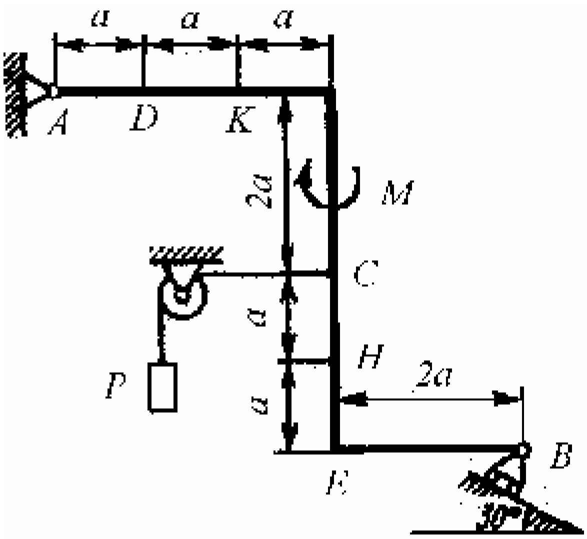
Задание 2.

<u>Постановка задачи.</u>

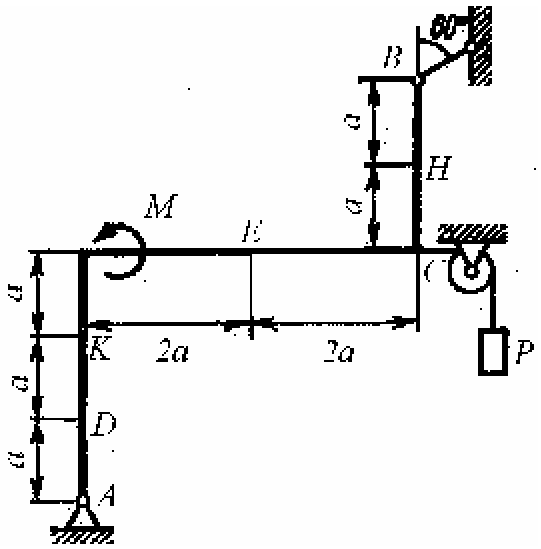
Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке *C* или соединены друг с другом шарнирно (рис. 2.0 – 2.5), или свободно опираются друг на друга (рис. 2.6 – 2.9).



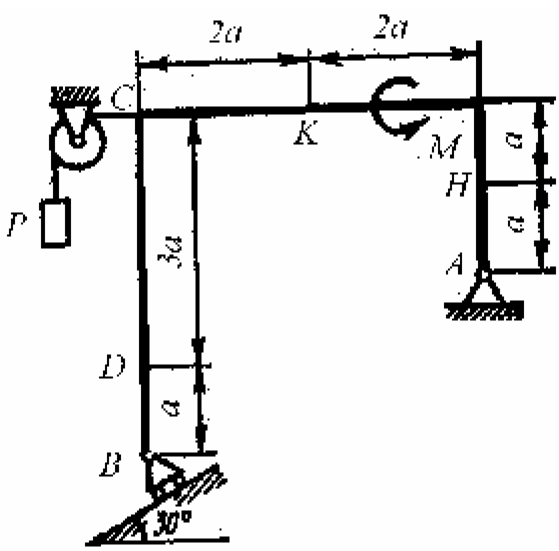
1.0



1.1

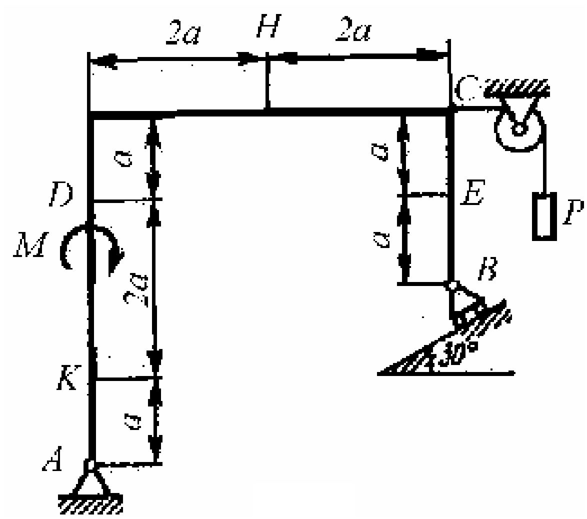


1.2

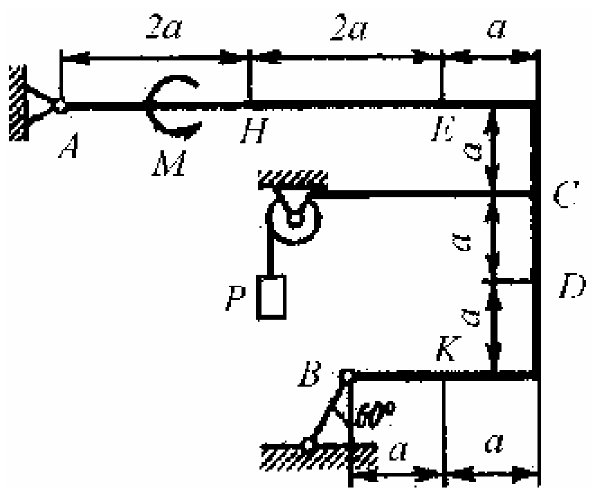


1.3

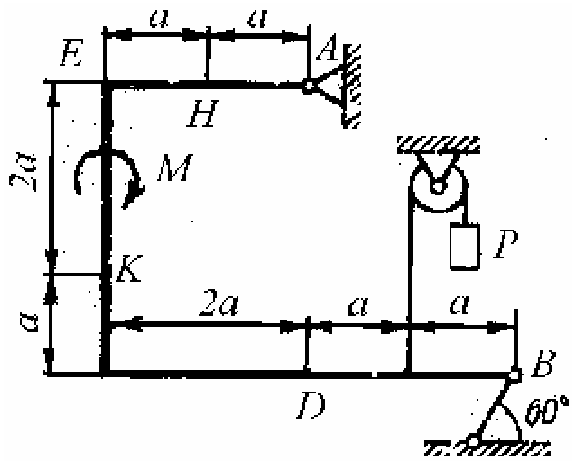
Рис. 1



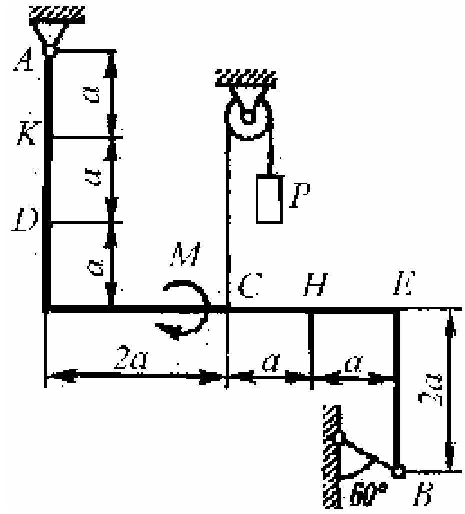
1.4



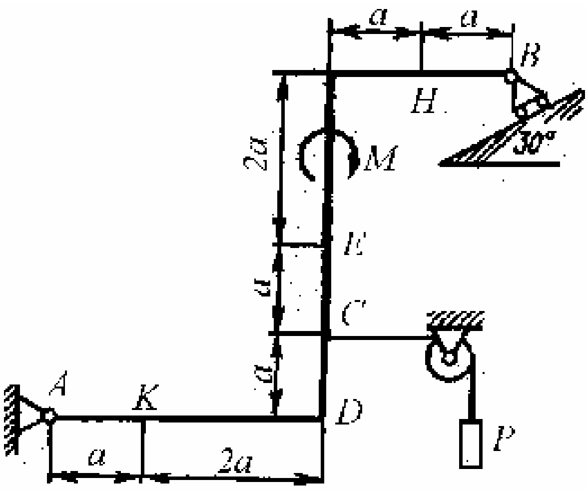
1.5



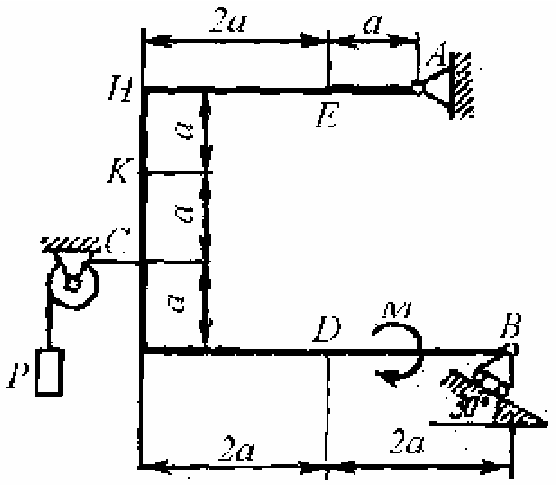
1.6



1.7



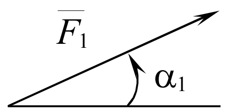
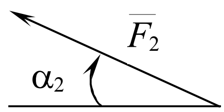
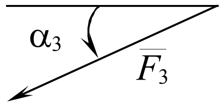
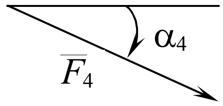
1.8



1.9

Рис. 1. Продолжение

Таблица 1

Силы								
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
Номер условия	Точка прило-жения	$\alpha_1°$	Точка прило-жения	$\alpha_2°$	Точка прило-жения	$\alpha_3°$	Точка прило-жения	$\alpha_4°$
1	*A*	30					*E*	30
2			*B*	30	*H*	60		
3	*C*	45	*K*	30				
4	*D*	90			*E*	60		
5			*A*	0			*B*	45
6	*C*	30			*D*	60		
7			*E*	45			*K*	0
8	*H*	45	*K*	60				
9	*B*	30			*C*	90		
10			*B*	0	*D*	45		
11	*B*	60					*E*	90
12					*B*	45	*K*	30
13	*C*	45			*E*	90		
14	*C*	0	*H*	30				
15	*A*	90			*C*	45		
16			*D*	30	*A*	45		
17					*A*	60	*K*	90
18	*A*	30	*H*	45				
19	*D*	60					*H*	90
20			*D*	30	*H*	45		
21	*E*	0					*K*	60
22			*E*	60			*H*	30
23			*A*	90	*H*	30		
24	*B*	30	*K*	60				
25			*C*	45	*E*	0		
26	*D*	60	*B*	90				
27	*A*	0	*K*	30				
28					*K*	45	*C*	60
29	*B*	90					*H*	30
30			*A*	45	*E*	60		

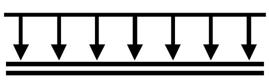
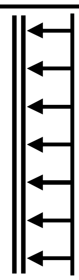
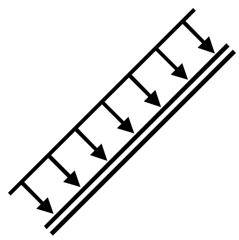
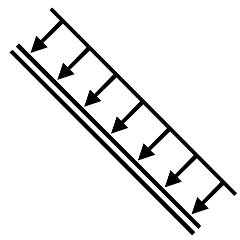
Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или шарнир, или жесткая заделка; в точке B или гладкая плоскость (рис. 2.2 – 2.3), или невесомый стержень BB' (рис. 2.0 – 2.1), или шарнир (рис. 2.4 – 2.9); в точке D или невесомый стержень DD' (рис. 2.1, 2.2, 2.7), или шарнирная опора на катках (рис. 2.9).

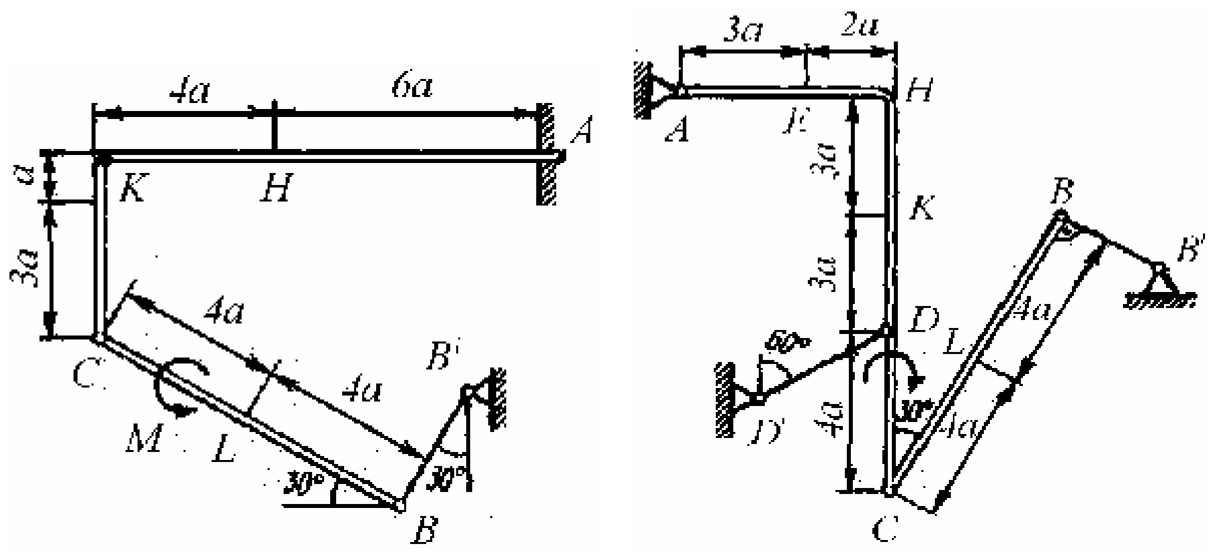
На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом М = 40 кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 10 кН/м и еще две силы. Численная величина их направления и точки приложения указанны в табл. 3, в табл. 2 указан участок действия распределенной нагрузки.

Требуется определить реакции связей в точках A, B, C (рис. 2.0, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8) и еще в точке D (рис. 2.1, 2.2, 2.7, 2.9), a = 0,4 м.

Варианты заданий: рис. 2 (2.0 – 2.9), табл. 2, 3.

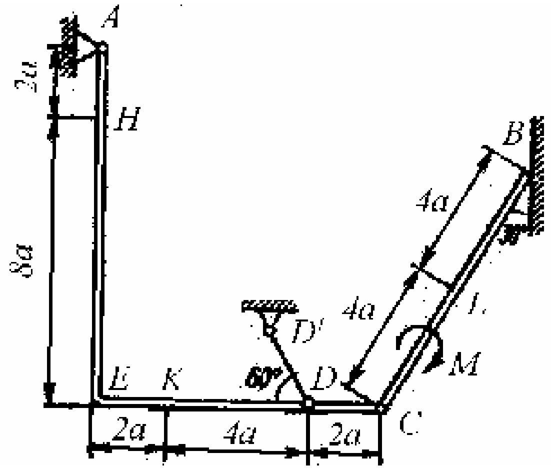
Таблица 2

Участок на угольнике		Участок на стержне	
Горизонтальный	Вертикальный	Рис. 1, 2, 4, 7, 9	Рис. 0, 3, 5, 6, 8
			

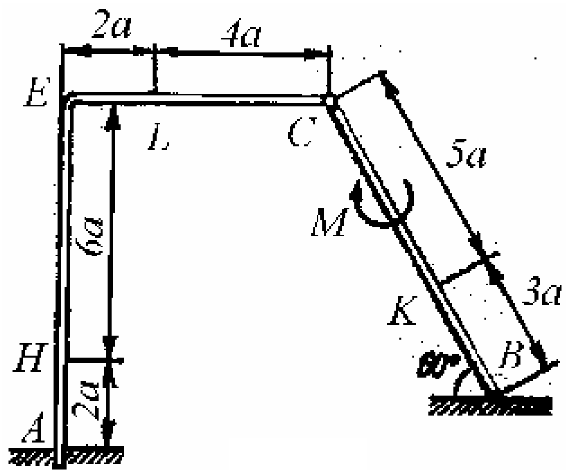


2.0 *2.1*

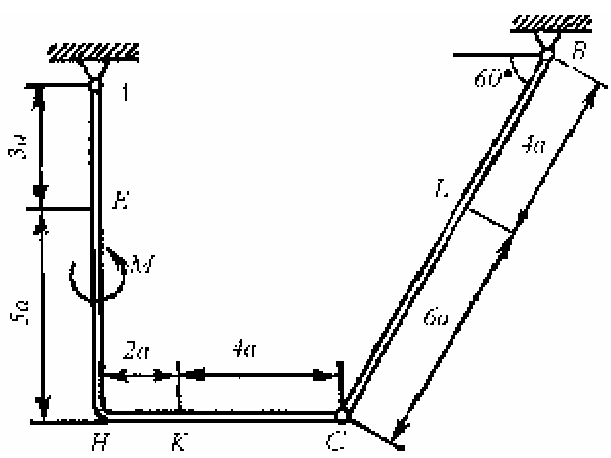
Рис. 2



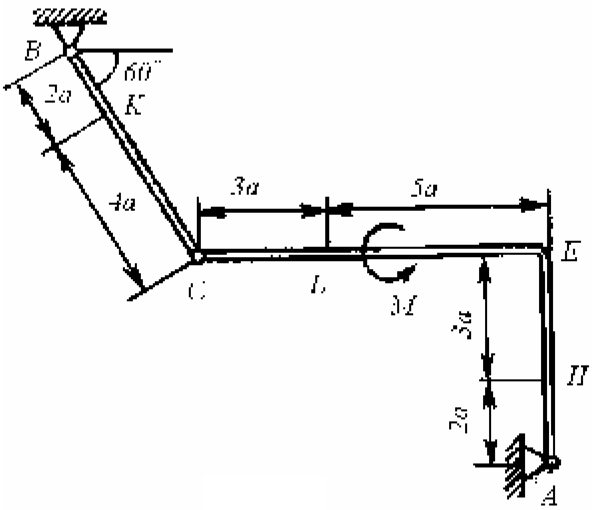
2.2



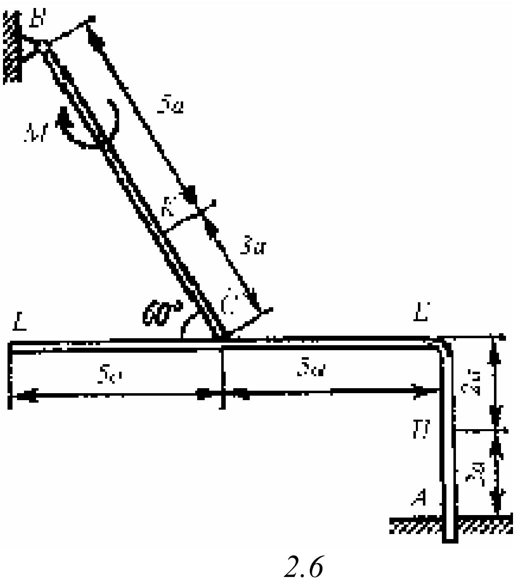
2.3



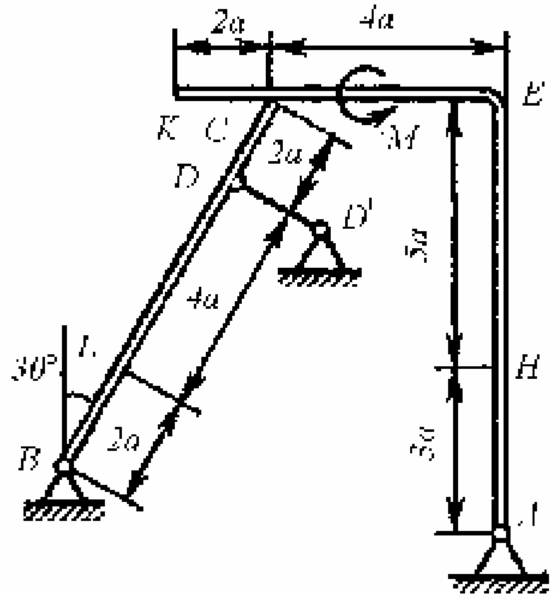
2.4



2.5

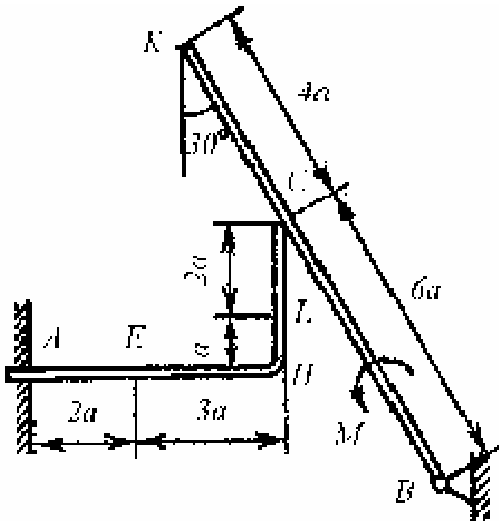


2.6

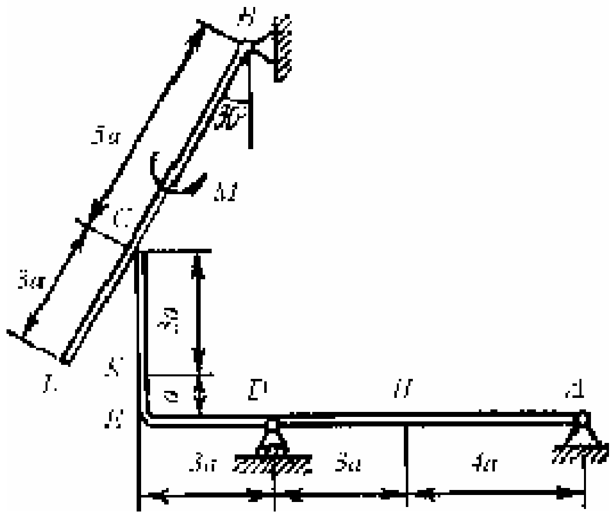


2.7

Рис. 2. Продолжение



2.8



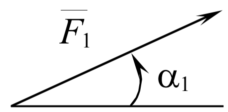
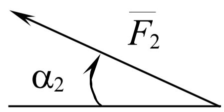
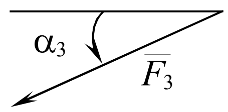
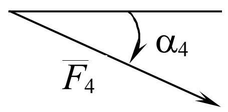
2.9

Рис. 2. Окончание

Таблица 3

Силы	$\overline{F}_1$, α_1		$\overline{F}_2$, α_2		$\overline{F}_3$, α_3		$\overline{F}_4$, α_4		Нагруженный участок
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН		
Номер усло-вия	Точка прило-жения	α_1°	Точка прило-жения	α_2°	Точка прило-жения	α_3°	Точка прило-жения	α_4°	
1	*A*	30					*E*	30	*CL*
2			*B*	30	*H*	60			*CK*
3	*C*	45	*K*	30					*AE*
4	*L*	90			*E*	60			*CL*
5			*A*	0			*B*	45	*CK*
6	*C*	30			*L*	60			*AE*
7			*E*	45			*K*	0	*CL*
8	*H*	45	*K*	60					*CK*
9	*B*	30			*C*	90			*CL*
10			*B*	0	*L*	45			*CK*
11	*B*	60					*E*	90	*AE*
12					*B*	45	*K*	30	*CL*
13	*C*	45			*E*	90			*CK*
14	*C*	0	*H*	30					*AE*
15	*A*	90			*C*	45			*CL*
16			*L*	30	*A*	45			*CK*
17					*A*	60	*K*	90	*AE*
18	*A*	30	*H*	45					*CL*
19	*L*	60					*K*	90	*CK*
20			*L*	30	*H*	45			*AE*

Окончание табл. 3

Силы									Нагруженный участок
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН		
Номер условия	Точка приложения	α_1°	Точка приложения	α_2°	Точка приложения	α_3°	Точка приложения	α_4°	
21	*E*	0					*K*	60	*CL*
22			*E*	60			*H*	30	*CK*
23			*A*	90	*H*	30			*AE*
24	*B*	30	*K*	60					*CL*
25			*C*	45	*E*	0			*CK*
26	*L*	60	*B*	90					*AE*
27	*A*	0	*K*	30					*CL*
28					*K*	45	*C*	60	*CK*
29	*B*	90			*H*	30			*AE*
30			*A*	45	*E*	60			*CK*

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ К ЗАДАНИЯМ 1, 2

Плоская система сил

Основные задачи статики.

1. Задача приведения системы сил: замена данной системы сил другой, более простой, ей эквивалентной.

2. Задача о равновесии: изучаются условия равновесия тел под действием различных систем сил и определяются неизвестные реакции.

Основной количественной мерой механического взаимодействия тел является сила.

Действие силы на любое тело определяется:

а) точкой приложения;

б) численной величиной или модулем силы;

в) линией действия;

г) направлением силы вдоль линии действия.

Основной единицей измерения является 1 Н.

Если $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ единичные векторы осей *X*, *Y*, *Z*, то сила определяется выражением:

$$\overline{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k},$$

где F_x, F_y, F_z – проекции сил на оси координат.

Основные системы сил

1. Система сходящихся сил на плоскости и в пространстве.
2. Произвольная плоская система сил.
3. Произвольная пространственная система сил.

Аксиомы статики

Аксиома 1. Если на твердое тело не действуют никакие силы, то оно находится в покое или совершает равномерное прямолинейное движение. Прямолинейным равномерным движением называется движение по инерции. Под равновесием тела понимается не только состояние покоя, но и движение его по инерции.

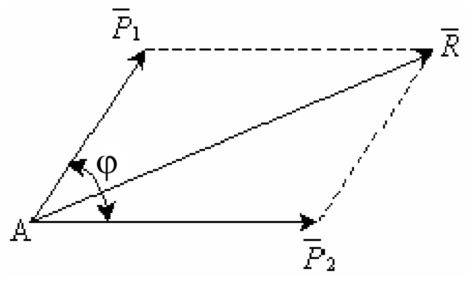
Вращение тела вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью есть частный случай его равновесия.

Аксиома 2. Две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если их модули равны и они направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Аксиома 3. Действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней присоединить или из нее исключить систему взаимно уравновешивающихся сил.

Аксиома 4. Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах:

$$\overline{R} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 .$$



Модуль равнодействующей силы определяется по формуле

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\varphi},$$

где φ – угол между направлениями сил $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$.

Аксиома 5. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Эта аксиома утверждает, что силы действия друг на друга двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Аксиома 6. Равновесие деформируемого тела не нарушается, если жестко связать его точки и представлять тело как абсолютно твердое.

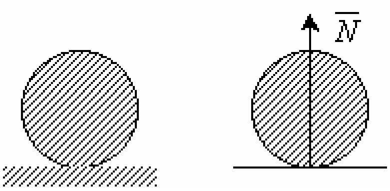
***Аксиома** 7*. Несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив действие связей соответствующими реакциями связей.

Связи и реакции

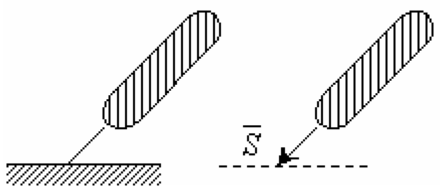
Если твердое тело соприкасается с другими телами, которые тем или иным образом ограничивают свободу его перемещения, то такие тела по отношению к рассматриваемому называются связями, а само рассматриваемое тело называется несвободным. Действие связей на несвободные тела выражается силами, которые называются реакциями связей.

Основные виды связей

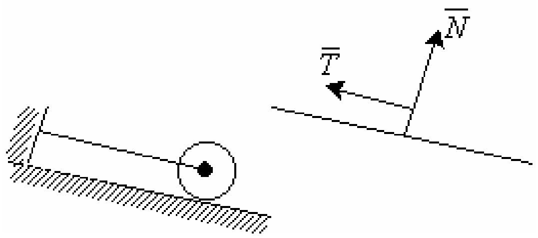
Гладкая поверхность



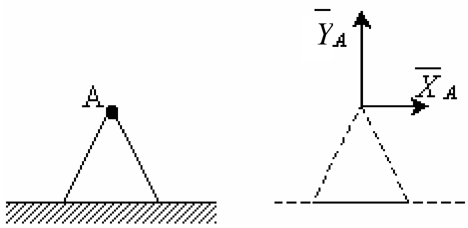
Невесомый стержень



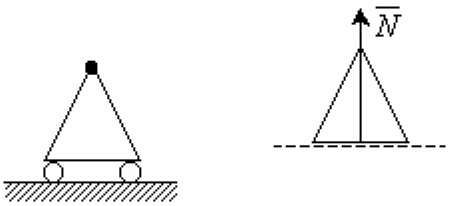
Нить, трос



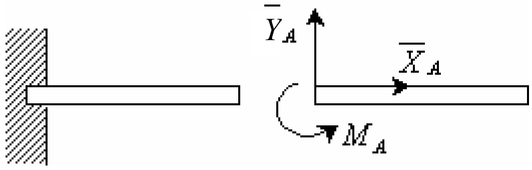
Неподвижный шарнир



Подвижный шарнир

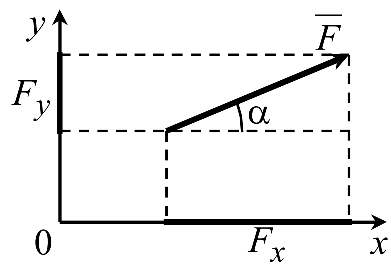


Жесткая заделка



Проекция сил на ось

Проекция вектора силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла, образованного положительным направлением оси проекций и направлением проектируемой силы.

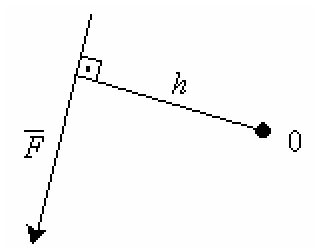


$$F_x = F\cos\alpha;\ F_y = F\sin\alpha.$$

1. Проекция положительна, если α < 90 °.
2. Проекция равна нулю, если α = 90 °.
3. Проекция отрицательна, если α > 90 °.

Момент силы относительно точки

Момент силы $\overline{F}$ относительно точки 0 для плоской системы сил равен по абсолютной величине произведению модуля силы $\overline{F}$ на кратчайшее расстояние h от точки 0 до линии действия силы $\overline{F}$, которое называется плечом силы. Плечо h является отрезком перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия сил.



Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку.

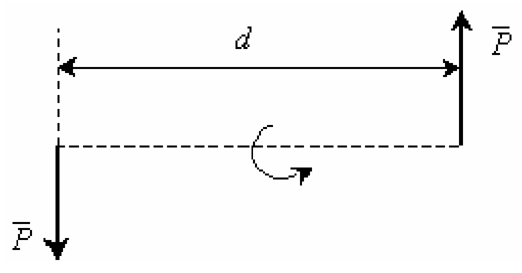
Если сила $\overline{F}$ стремится повернуть тело вокруг точки 0 против часовой стрелки, то момент силы положителен, если же в направлении часовой стрелки, то момент силы отрицателен.

Пара сил

Система двух равных по модулю параллельных и противоположно направленных сил $\overline{P}$ и $\overline{P}^{/}$ называется парой сил.

Момент пары сил равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо.

$M = \pm Pd$, где d – плечо пары.



1. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару относительно произвольной точки плоскости, не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.
2. Не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно переносить в плоскости ее действия.
3. Сумма проекций пары сил на любую ось равна нулю.

Распределенные силы

В статике рассматривают силы, приложенные к твердому телу в какой-либо его точке, такие силы называют сосредоточенными.

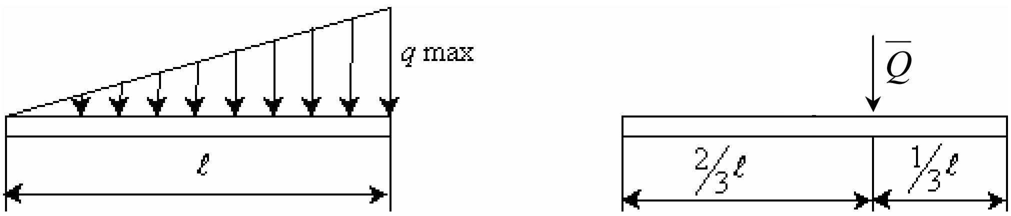
В действительности обычно силы бывают приложены к какой-либо части объема тела или его поверхности, а иногда к некоторой части линии. Такую нагрузку называют распределенной. Она характеризуется интенсивностью q.

При решении задач распределенную нагрузку заменяют сосредоточенной силой, равнодействующей Q.

а) Равномерно распределенная нагрузка.

$$Q = q\ell$$

б) Распределенная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону.



$$Q = \frac{1}{2} q \max \ell$$

Приведение к одному центру сил, произвольно расположенных на плоскости

В результате приведения сил, произвольно расположенных на плоскости, к одному центру 0 система сил преобразуется к приложенной в этом центре силе, равной главному вектору $\overline{R}^{/}$ и паре сил, момент которой равен главному моменту $\overline{M}$.

Используя метод проекций, можно вычислить модуль главного вектора:

$$R^{/} = \sqrt{\left(R_x^{/}\right)^2 + \left(R_y^{/}\right)^2}\text{, где } R_x^{/} = \sum_{i=1}^{n} F_{i\,x}\text{, } R_y^{/} = \sum_{i=1}^{n} F_{i\,y}\text{,}$$

тогда $R^{/} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{i\,x}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{i\,y}\right)^2}$ и определить его направление по направляющим косинусам $\cos(X \wedge R^{/}) = \dfrac{R_x^{/}}{R^{/}}$, $\cos(Y \wedge R^{/}) = \dfrac{R_y^{/}}{R^{/}}$.

Главный момент системы сил относительно центра приведения равен алгебраической сумме моментов сил относительно центра приведения.

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_{i0}.$$

Уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости

Условиями равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости, являются равенства нулю главного вектора и главного момента:

$$\overline{R}^{/} = 0;\; M_0 = 0.$$

В скалярной форме эти условия запишутся в виде $\sum_{i=1}^{n} F_{i\,x} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} F_{i\,y} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} M_{io} = 0$. Эти условия называются основными уравнениями равновесия произвольной плоской системы сил.

Пример выполнения заданий 1 и 2

Задание 1.

Жесткая рама *АВ* имеет в точке *А* неподвижный шарнир, а в точке *В* шарнирно-подвижную опору. На раму действуют распределенная нагрузка интенсивности $q = 0{,}6\dfrac{\text{кН}}{\text{М}}$, пара сил с моментом М = 200 кН·М, сосредоточенные силы P_1 = 4 кН, P_2 = 5 кН, a = 5 м, α = 45°, β = 30°, γ = 60°, *ДЕ* = *ВД*, *МС* = *СЕ*.

Требуется определить реакции в опорах *А* и *В* (прил. 2, задание 1, рис. 1).

Решение.

1. Определяем объект равновесия.

Применяя принцип освобождаемости от связей, убираем связи, заменяем их действие силами, реакциями связей.

2. Строим расчетную схему.

При построении расчетной схемы отброшенные связи заменяем силами, реакциями связи. В точке A (неподвижный шарнир) реакцию задаём двумя составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, направленными вдоль осей Ox и Oy, в точке B (подвижный шарнир) реакция R_B направлена перпендикулярно опорной плоскости $\overline{R}_B$. Распределенную нагрузку на участке AM заменяем сосредоточенной силой $Q = q \cdot 3a = 0{,}6 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 2{,}7$ кН.

Вектор силы $\overline{Q}$ приложен в точке, отстоящей от опоры A на расстоянии $1{,}5a$. Дополняем схему заданными силами $\overline{P_1}$ и $\overline{P_2}$ (прил. 2, задание 1, рис. 2).

3. Определяем систему сил.

В расчетной схеме вектора сил расположены в одной плоскости и не пересекаются в одной точке. Получили произвольную плоскую систему сил. Условие равновесия такой системы – есть равенство нулю главного вектора и главного момента. Следовательно, уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{i_x} = 0, \ \sum F_{i_y} = 0, \ \sum M_A(\overline{F}_i) = 0.$$

4. Задача статически определена, так как имея три уравнения, можно определить три неизвестные величины. В нашей задаче три неизвестные величины.

5. Показав направление осей координат, составляем уравнения равновесия.

$$\sum F_{i_x} = 0; \qquad X_A + Q - P_1\cos 45 - P_2 - R_B\cos 30 = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{i_y} = 0; \qquad Y_A - P_1\cos 45 + R_B\cos 60 = 0; \qquad (2)$$

$$\sum M_A(\overline{F}_i) = 0; \quad -Q\cdot 1{,}5a + P_1\cos 45\cdot 3a - P_1\cos 45a + P_2 h_1 +$$

$$+ R_B\cos 60 h_2 = 0. \qquad (3)$$

При определении момента сил P_1 и R_B применяем теорему Вариньона. Раскладываем вектор силы на составляющие и определяем момент как алгебраическую сумму моментов этих составляющих.

6. Решаем систему уравнений.

Из третьего уравнения находим $R_B = 1{,}68$ кН, где $h_1 = ДВ\sin 30$, $h_2 = ME + BE\cos 30$.

Из первого уравнения определим $X_A = 6{,}78$ кН.

Из второго уравнения – $Y_A = 1{,}96$ кН.

Ответ: $R_B = 1{,}68$ кН, $X_A = 6{,}78$ кН, $Y_A = 1{,}96$ кН.

Задание 2.

На угольник *ABC*, конец *A* которого жестко заделан, в точке *C* опирается стержень *DE*. Стержень в точке *D* имеет шарнирную опору. На угольник действует пара сил с моментом М. К стержню приложена горизонтальная сила *F*, на участке *CE* действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью *q* (прил. 2, задание 2, рис. 3).

Дано: $F = 10$ кН; М = 2 кН·м; $q = 10$ кН/м; $a = 0{,}2$ м.

Определить реакции в точках *A*, *D*, *C*. Весом угольника и стержня пренебречь.

Решение.

Данная конструкция является составной. Она состоит из двух тел. Поэтому для решения задачи следует выделить два объекта равновесия: балка *DE* и угольник *ABC*.

Строим расчетные схемы (прил. 2, задание 2, рис. 4, 5).

Рассмотрим стержень *DE*. Покажем направление осей координат. Изобразим действующие на стержень силы: силу $\overline{F}$, реакцию $\overline{N}$, направленную перпендикулярно стержню, силу $\overline{Q}$, которой заменили равномерно распределенную нагрузку ($Q = q \cdot 3a = 6$ кН), приложенную в середине участка *CE*, составляющие $\overline{X_D}$ и $\overline{Y_D}$ – реакции шарнира *D*.

Получим произвольную плоскую систему сил, для которой составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{iX} = 0;\ \sum F_{iY} = 0;\ \sum M_D(\overline{F_i}) = 0.$$

$$\sum F_{iX} = 0;\ F + X_D - N\cos 30 + Q\cos 30 = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iY} = 0;\ Y_D + N\cos 60 - Q\cos 60 = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_D(\overline{F_i}) = 0;\ N \cdot 3\alpha - Q \cdot 4{,}5 - F \cdot 6\cos 30 = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим равновесие угольника *ABC* (прил. 2, задание 2, рис. 5).

На него действует сила давления стержня $\overline{N}$, направленная противоположно реакции $\overline{N}$, приложенной к стержню *DE*, пара сил с моментом *M*, реакция жесткой заделки, равная силе, которую представим суммой составляющих $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и пары сил с моментом M_A.

Для этой плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum F_{iX} = 0;\ \sum F_{iY} = 0;\ \sum M_D\left(\overline{F}_i\right) = 0.$$

$$\sum F_{iX} = 0;\ X_A + N\cos 30 = 0; \qquad (4)$$

$$\sum F_{iY} = 0;\ Y_A - N\cos 60 = 0; \qquad (5)$$

$$\sum M_A(\overline{F_i}) = 0;\ M_A + M + N\cos 30 \cdot 6a + N\cos 60 \cdot 6a = 0\,. \qquad (6)$$

При вычислении момента силы N разлагаем ее на составляющие $\overline{\mathrm{N}}\cos 30$, $\overline{\mathrm{N}}\cos 60$ и применяем теорему Вариньона.

Решая систему шести уравнений, находим:

N = 26,3 кН; X_D = 7,66 кН; Y_D = –3,6 кН, X_A= –22,8 кН; Y_A = 13,5 кН; M_A= –45,3 кН·м.

Знаки указывают, что силы $\overline{Y}_D$ и $\overline{X}_A$ и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

Контрольные вопросы к защите заданий 1 и 2.

1. Аксиомы статики.
2. Условия равновесия произвольной системы сил.
3. Связи и реакции.
4. Момент силы относительно точки.
5. Пара сил. Свойства пары сил.

Задание 3.

Постановка задачи.

Система состоит из шести стержней, соединенных своими концами между собой и с опорами шарнирно. Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах *H*, *K*, *L*, *M* прямоугольного параллелепипеда) на рисунках не показаны и должны быть изображены решающим задачу по данным таблиц (табл. 4, 5). В узле, который в каждом столбце указан первым, приложена сила P = 100 Н; во втором узле приложена сила Q = 50 Н.

Сила $\overline{P}$ образует с положительными направлениями координатных осей *X*, *Y*, *Z* углы $\alpha_1 = 30°$; $\beta_1 = 60°$; $\gamma_1 = 30°$, а сила $\overline{Q}$ – $\alpha_2 = 60°$; $\beta_2 = 30°$; $\gamma_2 = 60°$. Направление осей *X*, *Y*, *Z* для всех рисунков, показанных на рис. 3.0. Грани параллелепипеда, параллельные плоскости *XY*, – квадраты. Диагонали других боковых граней образуют с плоскостью XY угол $\varphi = 60°$, а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол $\theta = 51°$.

Требуется определить усилие в стержнях. Рис. 3.10 показан в качестве примера.

Варианты заданий даны на рис. 3.0 – 3.9 и в табл. 4, 5.

Задание 4.

Постановка задачи.

Конструкция состоит из двух прямоугольных плит, жестко соединенных между собой под прямым углом.

Плиты закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A, цилиндрическим шарниром (подпятником) в точке B и невесомым стержнем 1 (рис. 4.0 – 4.7) или же двумя подпятниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. 4.8 – 4.9). Все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты $P_1 = 6$ кН, вес меньшей – $P_2 = 4$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость XY – горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом М = 2 кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы.

Значение этих сил, направление точки приложения и плоскость, в которой расположен вектор силы, указаны в табл. 5.

Требуется определить реакции связи в точках A и B и реакции стержня (стержней). При подсчете $a = 0{,}8$ м.

Варианты заданий даны на рис. 4.0 – 4.9 и в табл. 5.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ К ЗАДАНИЯМ 3 И 4

Система сходящихся сил в пространстве

Пространственная система сходящихся сил приводится к равнодействующей $\overline{R}$, которая равна $\overline{R} = \sum \overline{F}_i$. Модуль равнодействующей $\overline{R}$ равен $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$. Направляющие косинусы определяется по формулам:

$$\cos\left(x, \overline{R}\right) = \frac{R_x}{R};\ \cos\left(y, \overline{R}\right) = \frac{R_y}{R};\ \cos\left(z, \overline{R}\right) = \frac{R_z}{R}.$$

Для равновесия твердого тела, к которому приложена пространственная система сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая равнялась нулю: $\overline{R}=0$. При этом уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{ix}=0;\ \sum F_{iy}=0;\ \sum F_{iz}=0.$$

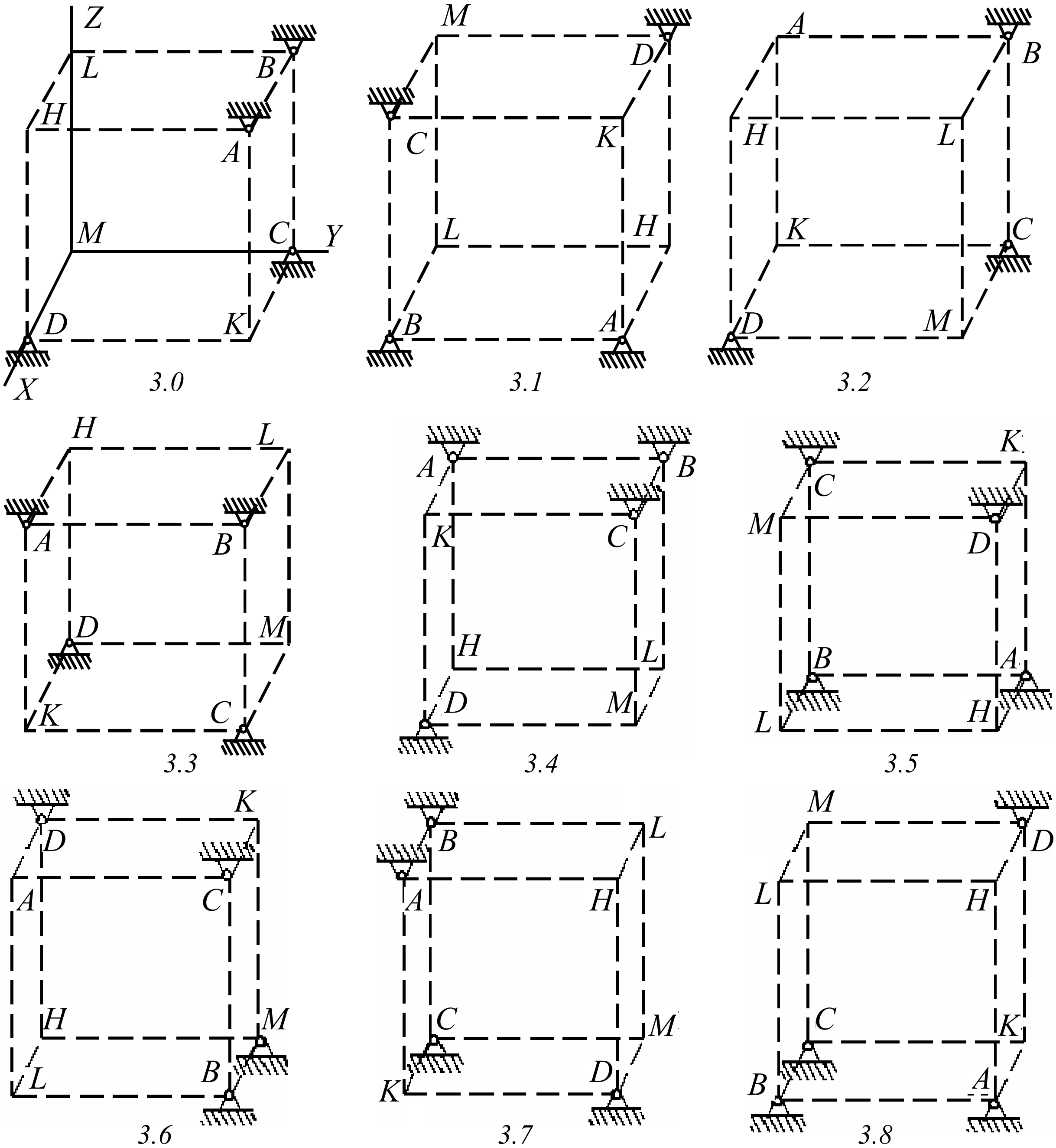
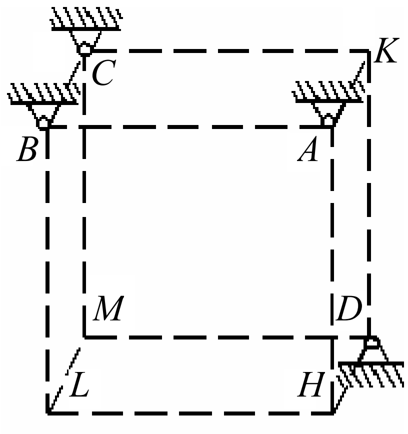
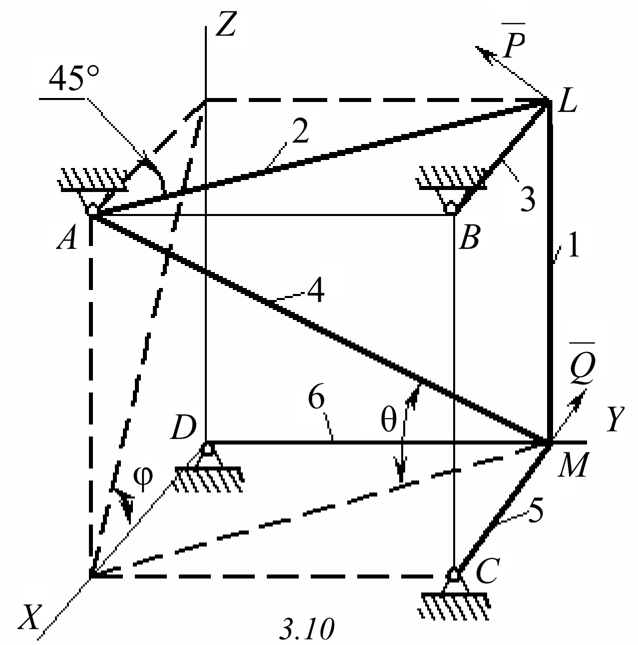


Рис. 3

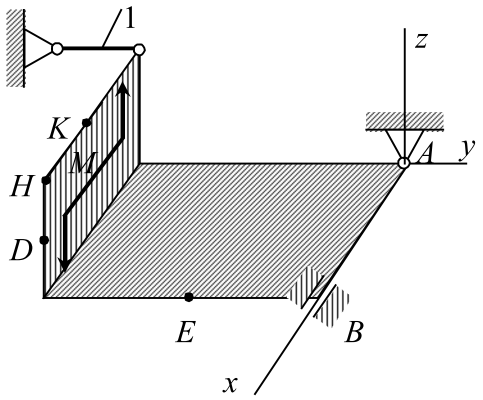


3.9

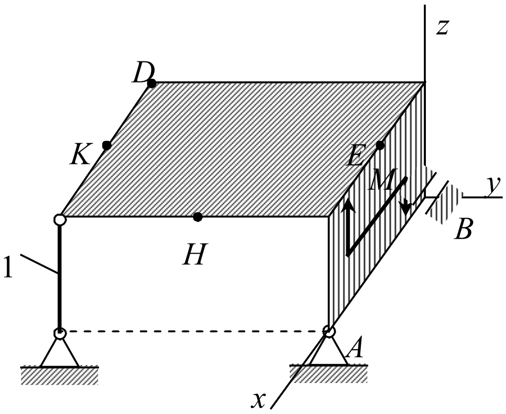


3.10

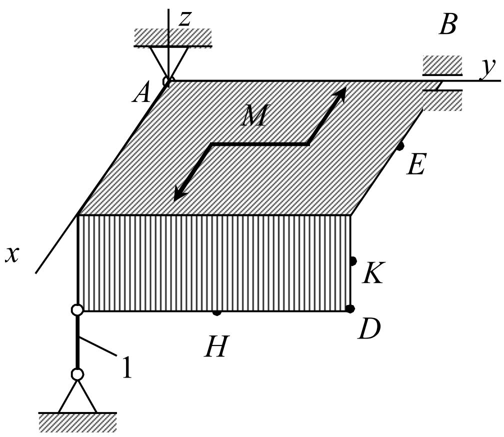
Рис. 3. Окончание



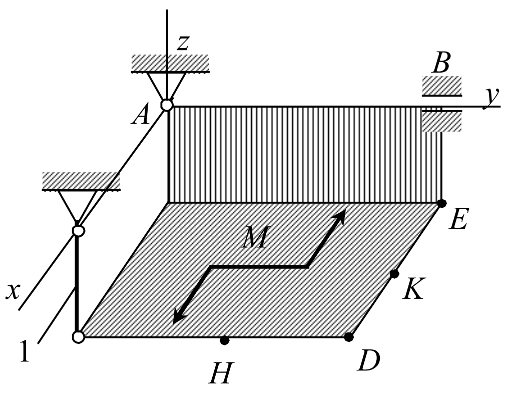
4.0



4.1

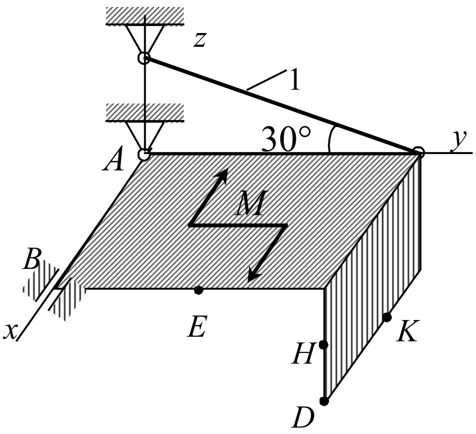


4.2

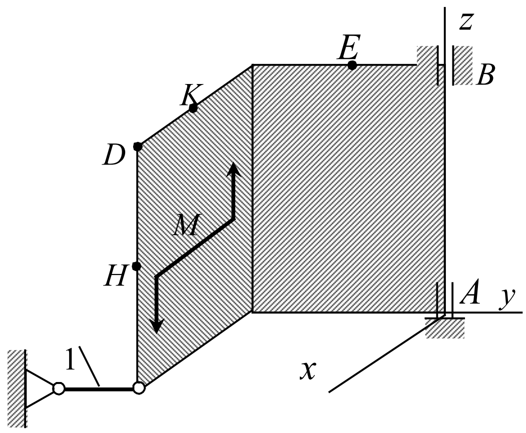


4.3

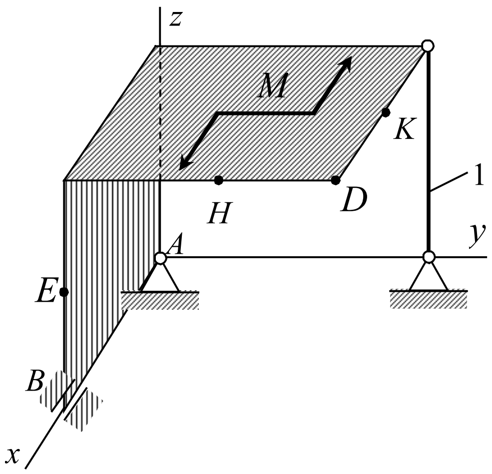
Рис. 4



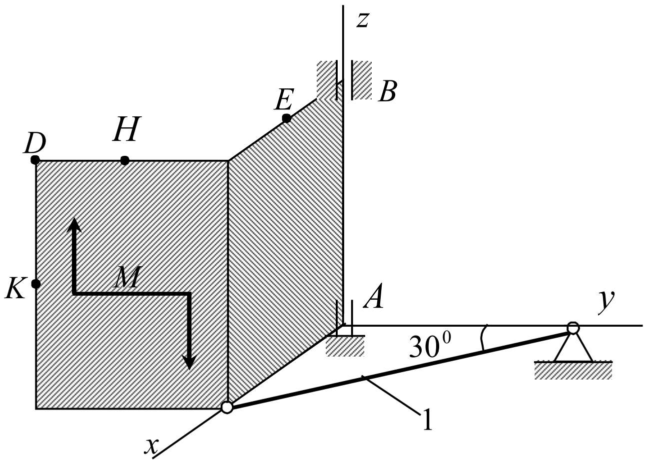
4.4



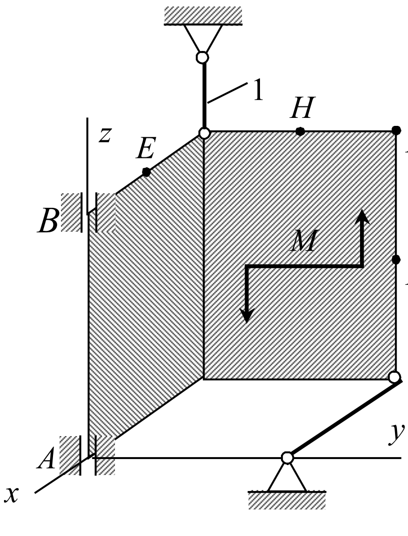
4.5



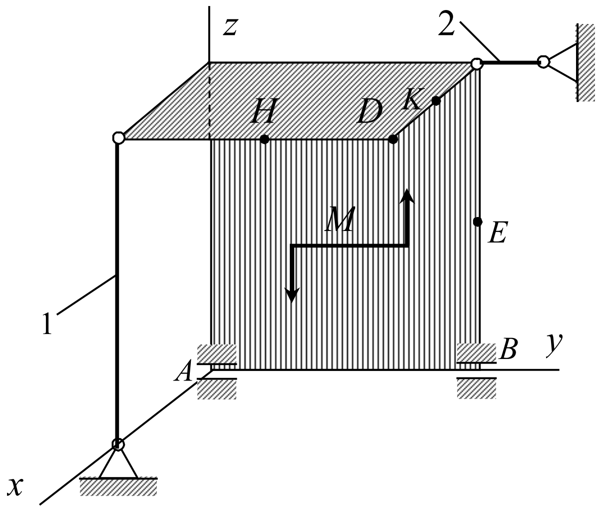
4.6



4.7



4.8



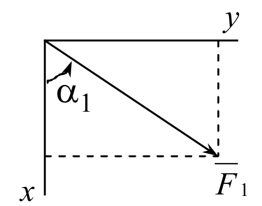
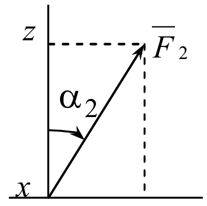
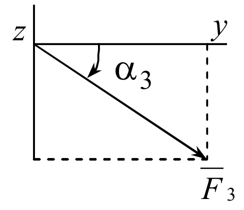
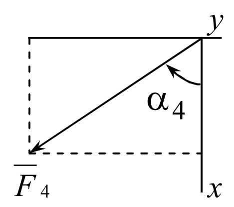
4.9

Рис. 4. Окончание

Таблица 4

Номер условия	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Узлы	H, M	L, M	K, M	L, H	K, H	M, H	L, H	K, H	L, M	K, M
Стержни	HM, HA	LM, LA	KM, KA	LH, LC	KH, KB	MH, MB	LH, LB	KH, KC	LM, LB	KM, KA
	HB, MA	LD, MA	KB, MA	LD, HA	KC, HA	MC, HA	LD, HA	KD, HA	LD, MA	KD, MA
	MC, MD	MB, MC	MC, MD	HB, HC	HC, HD	HC, HD	HB, HC	HB, HC	MB, MC	MB, MC

Таблица 5

Силы								
	$F_1 = 6$ кН		$F_2 = 8$ кН		$F_3 = 10$ кН		$F_4 = 12$ кН	
Номер условия	Точка прило-жения	α_1^0	Точка прило-жения	α_2^0	Точка прило-жения	α_3^0	Точка прило-жения	α_4^0
0			*Д*	90			*Н*	30
1	*Д*	45			*К*	60		
2					*Н*	30	*К*	45
3			*Н*	30	*Д*	90		
4	*Н*	60	*К*	60				
5			*Е*	30			*Д*	90
6	*К*	45			*Д*	60		
7					*К*	60	*Е*	30
8			*Д*	90	*Е*	30		
9	*Е*	60	*Н*	45				

Проекции силы на координатные оси

При определении проекции силы на координатную ось, когда неизвестен угол между осью и линией действия силы, используют метод двойного проектирования. Вначале находят проекцию F_{xy} силы F (рис. 5) на координатную плоскость xy, а затем вычисляют проекцию вектора F_{xy} на ось x или y. $F_x = F\cos\alpha\cos\beta$; $F_y = F\cos\alpha\sin\beta$; $F_z = F\sin\alpha$.

Нужно помнить, что проекция силы на ось является алгебраической величиной, проекция силы на плоскость – есть вектор.

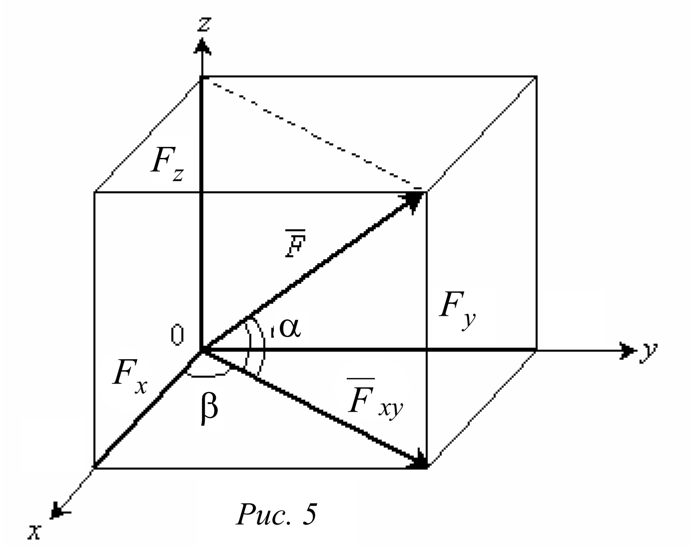


Рис. 5

Произвольная пространственная система сил

Произвольная пространственная система сил приводится к главному вектору $\overline{R}^{/}$ и главному моменту $\overline{M}_0$. Модуль главного вектора определяется по формуле $R^{/} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$, где $R_y = \sum F_{ix}$; $R_y = \sum F_{iy}$; $R_z = F_{iz}$.

Модуль главного момента $M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$, где $M_x = \sum M_x\left(\overline{F}_i\right)$; $M_y = \sum M_y\left(\overline{F}_i\right)$; $M_z = \sum M_z\left(\overline{F}_i\right)$.

Момент силы относительно оси

Момент силы относительно оси $M_z\left(\overline{F}\right)$ (рис. 6) определяется как алгебраическая величина, абсолютное значение которой равно произведению модуля проекции силы $\overline{F}_p$ на плоскость P, перпендикулярную к оси z, на кратчайшее расстояние h_p от точки 0 пересечения оси с этой плоскостью до линии действия проекции силы на плоскость $\overline{F}_p$, то есть $M_z\left(\overline{F}\right) = F_p h_p$.

Если с конца оси z видно, что сила $\overline{F}_p$ стремится повернуть тело вокруг точки 0 против часовой стрелки, то момент положителен, если по часовой стрелке, то отрицателен, то есть $M_z\left(\overline{F}\right) = \pm F_p h_p$.

Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы параллельна оси или ее пересекает.

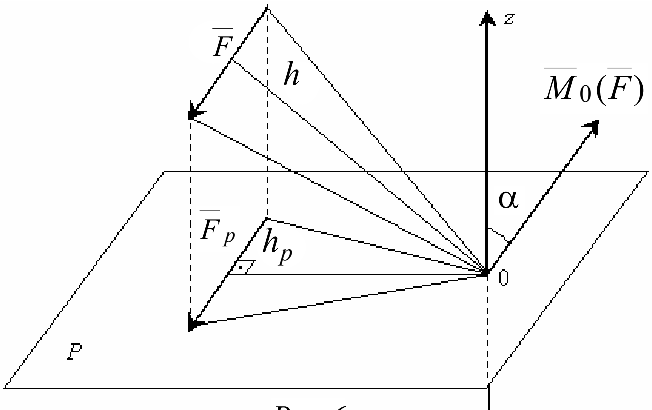


Рис. 6

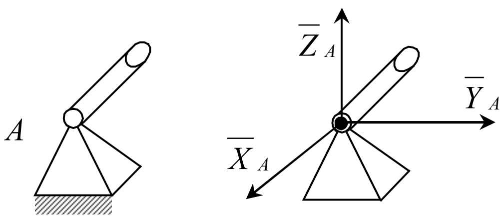
Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Для равновесия твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент равнялись нулю.

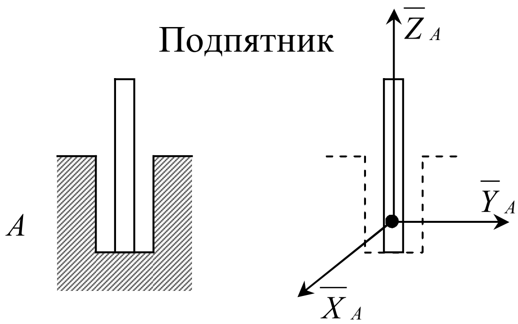
Получаем уравнения равновесия: $\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$; $\sum F_{iz} = 0$; $\sum M_x(\overline{F}_i) = 0$; $\sum M_y(\overline{F}_i) = 0$; $\sum M_z(\overline{F}_i) = 0$.

Связи и реакции в пространстве

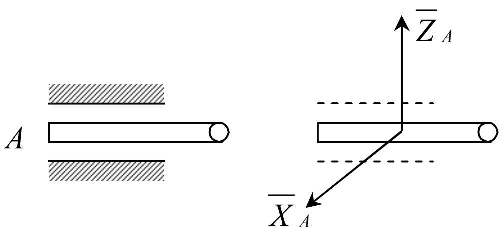
Шаровой (сферический) шарнир



Подпятник



Цилиндрический шарнир



Пример выполнения заданий 3 и 4

Задание 3.

Конструкция состоит из невесомых стержней 1, 2…6, соединенных друг с другом (в узлах H и L) и с неподвижными опорами *A*, *B*, *C*, *Д* шарнирами (прил. 2, задание 3, рис. 1). В узлах H и L приложены силы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$.

Дано: $P = 200\,\text{Н}$; $Q = 100\,\text{Н}$; $\gamma_1 = 30°$; $\beta_1 = 60°$; $\alpha_2 = 45°$;

$\gamma_2 = 45°$; $\psi = 45°$; $\delta = 60°$; $\varphi = 45°$.

Требуется определить усилия в стержнях 1 – 6.

<u>Решение.</u>

Нарушив связи (стержни), получим два объекта равновесия: узлы *H* и *L*. Сначала рассмотрим равновесие узла *H*. Строим расчетные схемы (прил. 2, задание 3, рис. 2). На узел *H* действуют активная сила $\overline{P}$ и реакции в стержнях 1, 2, 3 соответственно $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$, они направлены по стержням от узла. Получили сходящуюся систему сил в пространстве, для которой составим три уравнения равновесия: $\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$; $\sum F_{iz} = 0$.

$$\sum F_{ix} = 0;\ S_3 \cos 45 + S_2 \cos 45 = 0; \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0;\ -S_1 - S_2 \cos 45 + P \cos 60 = 0; \tag{2}$$

$$\sum F_{iz} = 0;\ -S_3 \cos 45 + P \cos 30 = 0. \tag{3}$$

Решив уравнения (1), (2), (3), получим: $S_1 = 273\,\text{Н}$; $S_2 = -245\,\text{Н}$; $S_3 = 245\,\text{Н}$.

Затем рассмотрим равновесие узла *L*. На узел действуют активная сила $\overline{Q}$ и реакции стержней $\overline{S}_2$, $\overline{S}_5$, $\overline{S}_6$. При этом по аксиоме о равенстве действия и противодействия реакцию $\overline{S}_2$ направляем в противоположную сторону. (Равенство действия и противодействия). Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0;\ \sum F_{iy} = 0;\ \sum F_{iz} = 0.$$

$$\sum F_{ix} = 0;\ Q \cos 45 - S_4 - S_2 \cos 45 - S_5 \cos 30 \cos 45 = 0; \tag{4}$$

$$\sum F_{iy} = 0;\ S_2 \cos 45 + S_5 \cos 30 \cos 45 = 0; \tag{5}$$

$$\sum F_{iz} = 0;\ Q \cos 45 - S_6 - S_5 \cos 60 = 0. \tag{6}$$

Решив уравнения (4), (5), (6) и учитывая, что $S_2 = -245\,\text{Н}$, найдем $S_4 = 71{,}05\,\text{Н}$, $S_5 = 281{,}6\,\text{Н}$, $S_6 = -40{,}8\,\text{Н}$. Знаки показывают, что стержень 6 сжат, а остальные растянуты.

Ответ: $S_1 = 273$ Н; $S_2 = -245$ Н; $S_3 = 245$ Н

$S_4 = 71{,}05$ Н; $S_5 = 281{,}6$ Н; $S_6 = -40{,}8$ Н.

Задание 4.

Две однородные прямоугольные плиты жестко соединены под прямым углом и закреплены в точке *A* сферическим шарниром, в точке *B* цилиндрическим шарниром и невесомым стержнем 1. Стержень соединен с плитой и опорой шарниром. Вес большей плиты $\overline{P}_1$, меньшей – $\overline{P}_2$. На плиту действует сила $\overline{F}$ и пара сил с моментом *M* (прил. 2, задание 4, рис. 3).

Дано: $P_1 = 2$ кН; $P_2 = 1$ кН; $M = 2$ кН $\cdot$ м; $F = 4$ кН; $\alpha = 60°$; $a = 0{,}4$ м; $CH = НД$.

Вектор силы *F* находится в плоскости, параллельной плоскости *ZBX*.

Требуется определить реакции в точках *A*, *B* и усилие в стержне 1.

Решение.

За объект равновесия примем конструкцию жестко соединенных плит. Строим расчетную схему (прил. 2, задание 4, рис. 4). На конструкцию действуют заданные силы P_1, P_2, F и пара с моментом *M*, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира задаем тремя составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{Z}_A$, цилиндрического – двумя составляющими $\overline{Z}_B$, $\overline{Y}_B$, реакцию стержня $\overline{S}_1$ направляем по стержню от объекта равновесия. Получим произвольную пространственную систему, для которой можем составить шесть уравнений равновесия. $\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$; $\sum F_{iz} = 0$; $\sum M_x(\overline{F}_i) = 0$; $\sum M_y(\overline{F}_i) = 0$; $\sum M_z(\overline{F}_i) = 0$.

Задача статически определимая, так как число неизвестных не превышает шести.

Составим уравнения.

$\sum F_{ix} = 0$; $X_A + F\cos\alpha = 0$; (1)

$\sum F_{iy} = 0$; $Y_A + Y_B = 0$; (2)

$\sum F_{iz} = 0$; $Z_A - P_1 - P_2 - S_1 - F\sin\alpha + Z_B = 0$; (3)

$\sum M_x(\overline{F}_i) = 0$; $-P_1 a - S_1 \cdot 2a - F\sin\alpha \cdot 2a = 0$; (4)

$\sum M_y(\overline{F}_i) = 0$; $P_1 a + P_2 a + S_1 \cdot 2a + F\sin\alpha \cdot a - F_1\cos\alpha \cdot a - Z_A \cdot 2a = 0$; (5)

$\sum M_z(\overline{F}_i) = 0$; $Y_A \cdot 2a + M - F\cos\alpha \cdot 2a = 0$. (6)

Для определения момента силы $\overline{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\overline{F}\cos\alpha$ и $\overline{F}\sin\alpha$ и применяем теорему Вариньона.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех данных величин и решив эти уравнения, найдем искомые величины.

Ответ: $X_A = 2$ кН; $Y_A = 0,6$ кН; $Y_B = –0,6$ кН; $Z_A = –2,24$ кН; $Z_B = 4,24$ кН; $S_1 = –4,48$ кН.

Знак минус указывает на то, что реакции $\overline{Z}_A$ и $\overline{S}_1$ направлены противоположно показанным на рисунке.

Контрольные вопросы к защите заданий 3 и 4.

1. Условия равновесия сходящейся системы сил в пространстве.
2. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
3. Момент силы относительно точки и оси.

Приложение 1. **Образец оформления титульного листа**

Министерство образования РФ
Владимирский государственный университет

Кафедра теоретической механики

Курсовая работа
Определение реакций связей
Задания: 1, 2, 3, 4

Выполнил студент
гр. ЗТ-2002
И.И. Иванов

Принял преподаватель
И.П. Сидоров

Владимир 2002

Задание 1

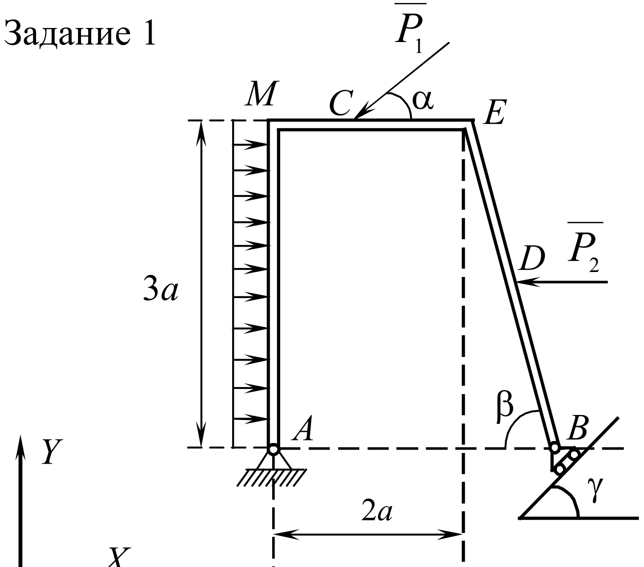


Рис. 1

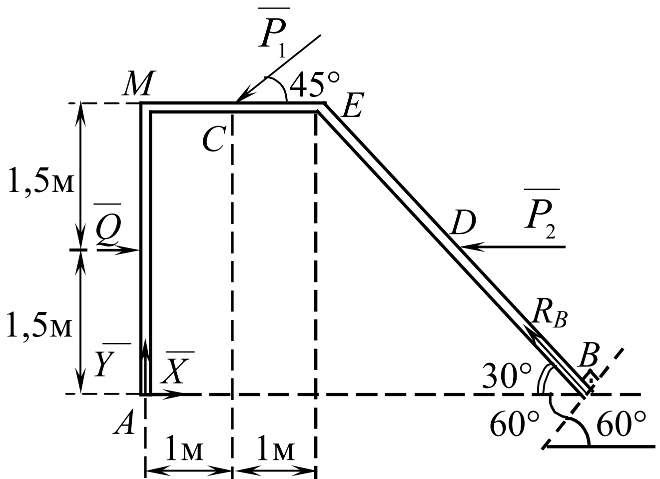


Рис. 2

Задание 2

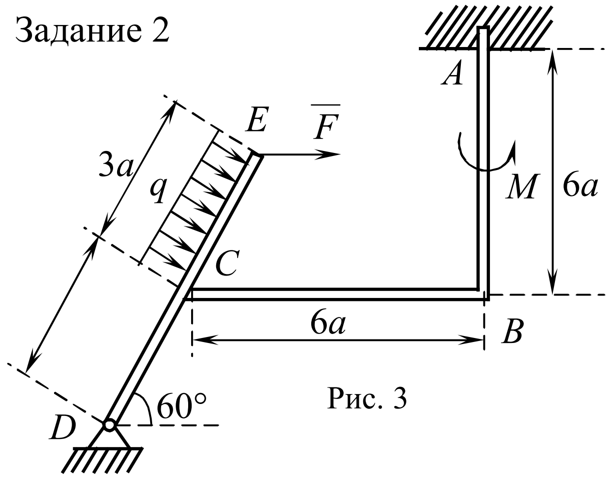


Рис. 3

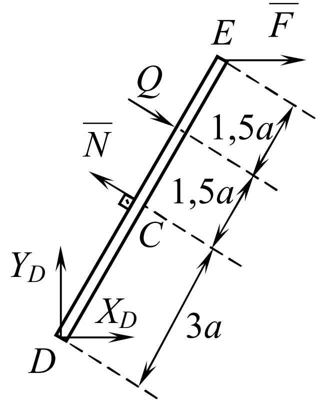


Рис. 4

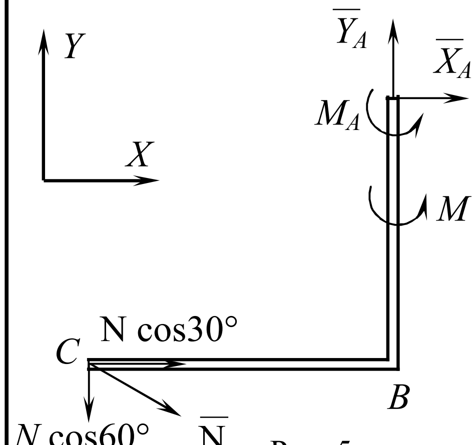


Рис. 5

Задание 1, 2		Группа №
Выполнил	Иванов И.И.	Формат А4
Принял	Сидоров И.П.	

Задание 3

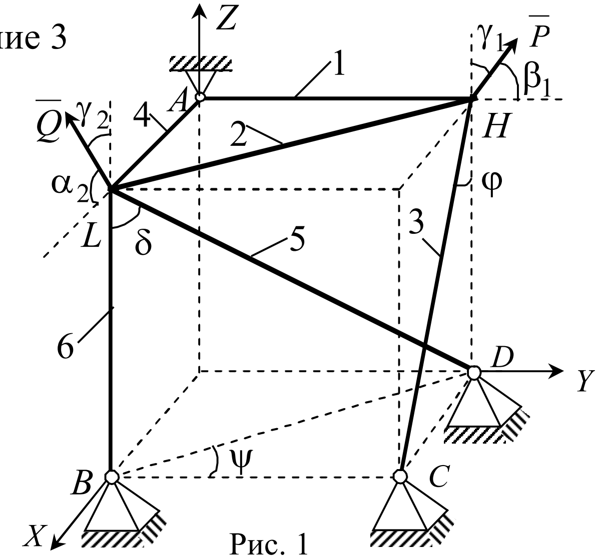


Рис. 1

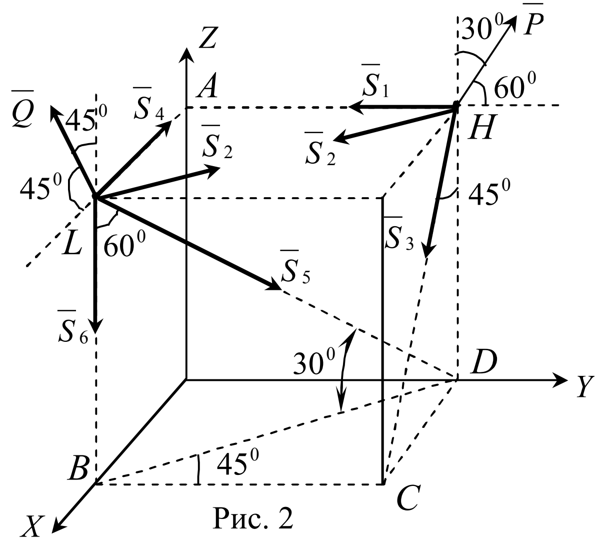


Рис. 2

Задание 4

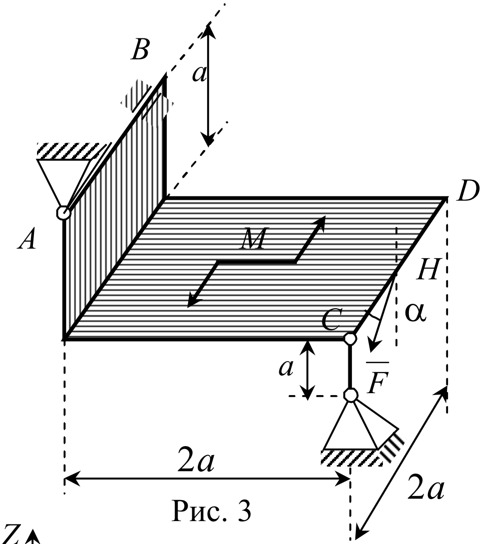


Рис. 3

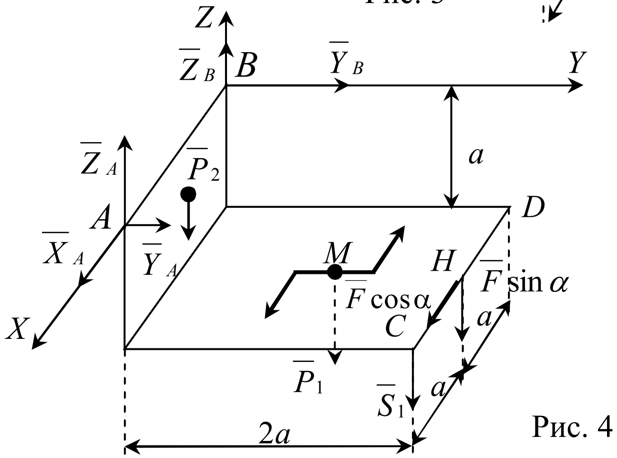


Рис. 4

Задание 3, 4		Группа №
Выполнил	Иванов И.И.	Формат А4
Принял	Сидоров И.П.	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики. Ч.1. – М.: Высш. шк., 1971. – 63 с.
2. *Бать М.И., Джамелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.* Теоретическая механика в примерах и задачах. – М., 1971. – 147 с.
3. Теоретическая механика: Метод. указания и контрольные задания / Сост.: Л.И. Котова, Р.И. Надеева, С.М. Тарг и др. – М.: Высш. шк., 1989. – 26 с.

Оглавление

СТАТИКА
Методические указания к курсовым работам
по теоретической механике

СОСТАВИТЕЛИ
МЕТЛИНА Лина Федоровна
КРЫЛОВ Александр Васильевич
ФЕДОТОВ Олег Владимирович

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор В.В. Козырев

Редактор Е.А. Амирсейидова
Корректор И.А. Арефьева
Компьютерная верстка К.Г. Солнцев

ЛР № 020275. Подписано в печать 00.09.02.
Формат 60×84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,00. Уч.-изд. л. 2,22. Тираж 200 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.