

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
СОЛИТОННЫХ СТРУКТУР  
В ДИССИПАТИВНЫХ  
АТОМНО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие



Владимир 2015

УДК 517.958:535.14  
ББК 22.343 (22.193)  
М34

**Авторы:**

А. Ю. Лексин, А. В. Прохоров, М. Ю. Губин, С. И. Абрахин

**Рецензенты:**

Доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры математики и информатики  
Владимирского филиала Финансового университета  
при Правительстве Российской Федерации  
*О. Я. Бутковский*

Доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры общей и прикладной физики  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*Л. В. Фуров*

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

**Математическое** моделирование солитонных структур в  
М34 диссипативных атомно-оптических системах : учеб. пособие /  
А. Ю. Лексин [и др.] ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столето-  
вых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2015. – 111 с. – ISBN 978-5-  
9984-0552-5.

Рассматриваются вопросы моделирования диссипативных солитонов и устойчивых состояний электро-магнитного поля методами нелинейной динамики.

Предназначено для бакалавров и магистрантов направлений 28.03.01/28.04.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника», 12.03.05/12.04.05 «Лазерная техника и лазерные технологии», 12.04.02 «Опготехника» очной формы обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 42. Библиогр.: 53 назв.

УДК 517.958:535.14  
ББК 22.343 (22.193)

ISBN 987-5-9984-0552-5

© ВлГУ, 2015

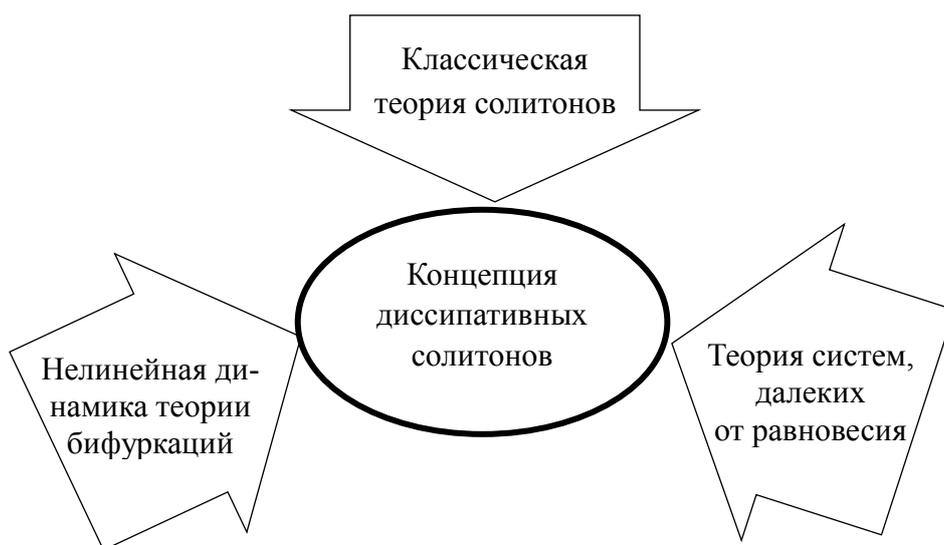
## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	5
<b>Глава 1. ДИССИПАТИВНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ</b> .....	10
1.1. Общие принципы моделирования диссипативных оптических солитонов.....	10
1.1.1. Уравнение Гинзбурга – Ландау пятого порядка.....	10
1.1.2. Область существования устойчивых импульсов.....	12
1.1.3. Редукция к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.....	17
1.2. Атомно-оптические взаимодействия в оптически-плотных средах .....	19
1.2.1. Модель и формализм описания .....	19
1.2.2. Основное управляющее уравнение .....	21
1.3. Моделирование распространения диссипативных солитонов в допированной среде.....	25
1.3.1. Анализ $\Lambda$ -схемы взаимодействия в допированной среде.....	25
1.3.2. Метод моментов .....	37
1.3.3. Солитонные решения и их стабильность .....	40
<b>Глава 2. ТРЁХМЕРНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ</b> .....	45
2.1. Основные сведения о вихревых оптических структурах.....	46
2.1.1. Распределение энергетических потоков.....	46
2.1.2. Определение условий стабильности вихрей.....	47
2.1.3. Консервативные трехмерные оптические солитоны – оптические пули .....	53
2.1.4. Диссипативные оптические пули.....	57
2.1.5. Вариационные методы исследования устойчивости оптических пуль .....	62
2.1.6. Применение трехмерных оптических солитонов .....	64

2.2. Взаимодействие оптического излучения с оптически-плотной трёхуровневой резонансной средой.....	70
2.2.1. Основные приближения для рамановского предела $\Lambda$ -схемы взаимодействия в плотной среде в различных пределах атомно-оптического взаимодействия.....	73
2.2.2. Анализ самосогласованной задачи нелинейного рассеяния света в трехуровневой среде .....	79
2.3. Анализ атомно-оптических взаимодействий в искусственных средах с резонансными двухуровневыми атомами.....	89
2.4. Исследование областей устойчивости оптических импульсов с использованием вариационного метода Эйлера – Лагранжа.....	95
2.4.1. Поиск стационарных решений .....	95
2.4.2. Исследование стационарных решений на стабильность по методу Ляпунова.....	98
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>105</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ .....</b>	<b>107</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Концепция диссипативных солитонов – фундаментальное расширение теорий солитонов в консервативных и интегрируемых системах. Она состоит из трех частей, то есть стандартная теория солитонов, развиваемая с 1960-х годов, следствия из нелинейной теории динамики и работы Пригожина относительно систем, далеких от равновесия и самоорганизации (рис. 1). Это основные три источника и три составляющих компоненты этой новой парадигмы. Физически говоря, главная часть стандартной теории солитонов связана с балансом между дисперсией и нелинейностью, которая позволяет существовать стационарным ограниченными решениями. Для диссипативных систем, нужно заметить, важный баланс между усилением и потерями – это условие, необходимое для того, чтобы солитоны были постоянными образованиями. Даже малейшая разбалансировка приведет к решению или бесконечно увеличивающемуся, если будет преобладать усиление, или полностью исчезающему из-за потерь. Таким образом, вместо одного баланса, мы должны рассмотреть сложный баланс между несколькими физическими явлениями.



*Рис. 1. Три источника и три составляющих концепции диссипативных солитонов*

Вторая часть концепции диссипативных солитонов – нелинейная динамика – говорит нам о том, что солитон надо рассматривать как неподвижную точку бесконечномерной динамической системы. Свойства стабильности неподвижных точек непосредственно определяют стабильность солитона. Неподвижные точки могут быть преобразованы в предельные циклы при определенных значениях параметров системы, и затем солитон становится пульсирующим образованием. Дальнейшие преобразования могут включать нерегулярное поведение траектории, таким образом создавая хаотические солитоны. Поэтому нелинейная динамика говорит нам о том, что возможны бифуркации солитона и хаотическая эволюция солитонов. Так как мы рассматриваем бесконечномерные динамические системы, есть огромное разнообразие типов солитонов и их бифуркаций.

Наконец, третья часть концепции – теория систем, далеких от равновесия, – говорит нам о том, что солитоны являются самоорганизованными формированиями, требующими непрерывной поставки энергии. Как только эта поставка заканчивается, диссипативный солитон прекращает существовать. Говоря простым языком, самоорганизация – конвергенция определенных начальных условий к локализованному решению системы, которое является устойчивым для данного набора внешних параметров. Таким образом, конечное состояние определяется согласно физическим законам, а не согласно начальному условию. Для бесконечномерных динамических систем устойчивое решение может быть очень сложным. Это не обязательно гладкая функция с единственным максимумом и экспоненциально убывающими хвостами. Кроме того, может быть несколько устойчивых решений, существующих для одного набора параметров. Возможно даже в случае относительно простого уравнения, например, как комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау пятого порядка. Большинство процессов в природе управляют намного более сложные динамические факторы. Таким образом, стационарные решения этих систем могут быть значительно более сложными.

С этой точки зрения идея относительно самоорганизации позволяет отнести диссипативные солитоны к сложным объектам, таким как животный и растительный мир. То, как далеко мы можем пойти в распространении этих принципов в этом направлении, зависит только от нашего воображения. Также система может сходиться к решению

не обязательно постоянному, а, например, к предельному циклу или странному аттрактору в бесконечномерном фазовом пространстве. Много биологических процессов типа сердечных ударов и распространения нервного импульса были описаны с помощью простого математического моделирования.

Есть существенное различие между солитонами в гамильтоновых системах и в диссипативных. В гамильтоновых системах решения для солитона появляются в результате баланса между дифракцией (или дисперсией) и нелинейностью. Дифракция расширяет луч, в то время как нелинейность фокусирует и делает его более узким. Баланс между этими двумя явлениями приводит к постоянным решениям. Они обычно образуют однопараметрическое семейство. В системах с усилением и потерями, чтобы иметь постоянные решения, усиление и потери должны быть уравновешены. Два баланса приводят к решениям, которые постоянны. Форма, амплитуда и ширина являются постоянными и зависят от параметров уравнения. Этот случай представлен качественно на рис. 2. Для телекоммуникационных приложений жесткость солитона может обеспечить эффективное подавление шума и остановить любое изменение параметров солитона.

Ясно, что стационарные диссипативные солитоны можно рассматривать как стационарные решения бесконечномерной динамической системы. Таким образом, их параметры зафиксированы. Эти формирования устойчивы при распространении, если параметры системы выбраны в соответствующих областях. Вообще, диссипативные солитоны не обязательно постоянны. Другими словами, стационарные решения не единственные объекты, которые могут существовать в таких системах.

Например, предельный цикл – другой более сложный объект, который может существовать в фазовом пространстве динамической

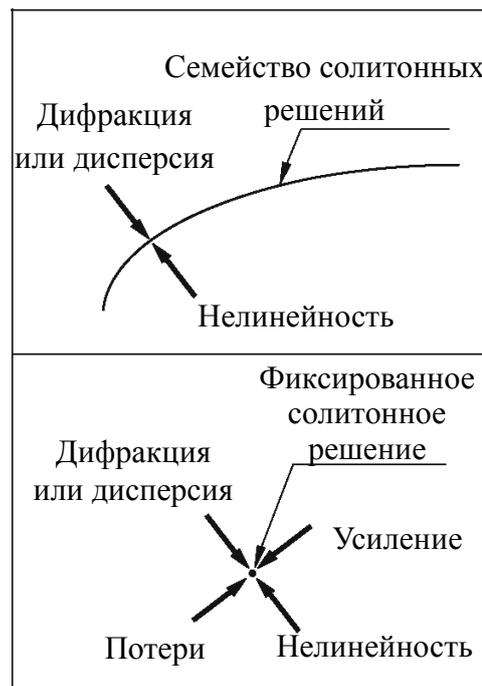


Рис. 2. Качественное различие между солитонными решениями в гамильтоновых и диссипативных системах

системы. Это соответствует пульсирующему солитону, где параметры изменяются периодически [13]. Эти солитоны обычно существуют в регионах пространства параметров, которые являются смежными с таковыми для стационарных солитонов. Однако даже в этом случае особенности солитона установлены, то есть период пульсаций и форм в специфических пунктах периода весь установлен, так как они – функции параметров системы. Возможен вариант, при котором диссипативный солитон может быть хаотический [13]. Если солитон является хаотическим, то характеристики этого хаотического поведения задаются параметрами системы.

Другая простая качественная картина представлена на рис. 3. Чтобы быть стационарными, солитоны в диссипативных системах должны иметь области, где они получают энергию из внешнего

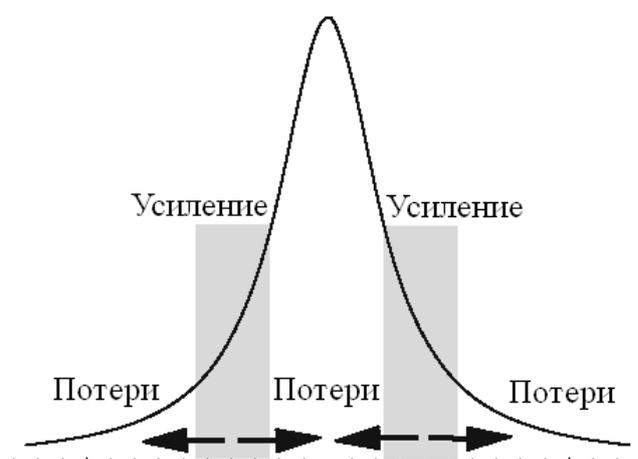


Рис. 3. Качественное описание солитонов в диссипативных системах

источника, так же как и области, где энергия рассеивается в окружающую среду. Стационарный солитон – результат динамического процесса непрерывного обмена энергией с окружающей средой и его перераспределения между различными частями солитона. Как только это перераспределение энергии заканчивается, солитон исче-

зает. В этом смысле диссипативный солитон больше походит на живое существо, чем объект неодушевленного мира. Это как вид в биологии, который является фиксированным (или изолированным) по своим свойствам.

Таким образом, мы только что описали кратко основные краеугольные камни мощного понятия диссипативного солитона и показали их схематично на рис. 1, 2 и 3. Наши наблюдения, главным образом, связаны с динамическими системами, развитие которых может быть описано дифференциальными уравнениями с частными производными. Такие динамические системы имеют бесконечное число степеней свободы и, конечно, могут иметь бесчисленное число решений для солитона с бесчисленным числом бифуркаций между ними.

Как правило, эти системы неинтегрируемые, а значит, что точные решения в их полной сложности могут быть изучены только численным образом. Описывая особенности бифуркаций солитона аналитически, мы нуждаемся в приближениях и небольшом количестве методов для уменьшения размерности динамической системы. Эти методы могут помочь, до некоторой степени, в описании постоянных или пульсирующих солитонов и их бифуркаций по ограниченному диапазону параметров системы. Однако они не могут быть использованы как полная замена для строгих исследований решений. Только самые характерные особенности солитонов наряду с отдельными бифуркациями могут быть определены таким образом. Для полной картины мы все еще нуждаемся в численном моделировании.

Особый интерес вызывает ранее мало исследованное как с теоретической, так и с практической точки зрения направление – изучение возникновения и распространения диссипативных солитонов в оптически плотных средах. Давно известно, что оптические свойства плотных атомных ансамблей или сложных материалов могут сильно отличаться от свойств, проявляемых независимыми атомами. Некоторые из таких систем производят два различных выходных сигнала для одной и той же входящей интенсивности управляющего лазера. Для всего диапазона интенсивностей приложенного поля выходной сигнал будет образовывать петлю гистерезиса. Если не требуется внешней обратной связи для возникновения этого явления, то его называют внутренней оптической бистабильностью (ВОБ). Экспериментально ВОБ наблюдалась в оптическом отклике от редкоземельных ионов и ионных пар в стеклах и кристаллических структурах [11]. Однако намного более богатая физика возникает в том случае, если изучать связанную систему атомно-оптических уравнений Максвелла – Шредингера в оптически-плотных средах. С учетом локального отклика среды в такой системе становится возможным получить уравнение Гинзбурга – Ландау пятого порядка и исследовать динамику диссипативных солитонов на ее основе. Вопросы моделирования возникающих при этом устойчивых состояний электромагнитного поля методами нелинейной динамики и являются основным предметом рассмотрения авторов данного учебного пособия.

## ГЛАВА 1

### ДИССИПАТИВНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ

#### 1.1. Общие принципы моделирования диссипативных оптических солитонов

##### 1.1.1. Уравнение Гинзбурга – Ландау пятого порядка

В той форме, как оно используется в нелинейной оптике, уравнение Гинзбурга – Ландау (УГЛ) пятого порядка имеет вид

$$i\psi_{\xi} + \frac{D}{2}\psi_{\tau\tau} + |\psi|^2\psi = i\delta\psi + i\varepsilon|\psi|^2\psi + i\beta\psi_{\tau\tau} + i\mu|\psi|^4\psi - \nu|\psi|^4\psi, \quad (1)$$

где  $\tau$  – "медленное" время,  $\xi$  – нормированная длина распространения,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $\nu$  – действительные постоянные (мы не требуем их малости),  $\psi$  – комплексное поле. В частном случае оптического волокна, который мы рассматривали выше, физический смысл этих величин следующий:  $\psi$  – комплексная огибающая электрического поля,  $\delta$  – постоянная дополнительной линейной накачки на несущей частоте,  $\beta$  – коэффициент спектральной фильтрации ( $\beta > 0$ ),  $\varepsilon$  описывает *нелинейные* процессы накачки, или абсорбции,  $\mu$  представляет собой постоянную при поправочном члене высшего порядка к нелинейному усилению/абсорбции,  $\nu$  – коэффициент при квадратичной поправке к нелинейному показателю преломления, то есть нелинейность представляет собой квадратичную зависимость от интенсивности. Параметр  $D$  определяет знак дисперсионного члена:  $D = +1$  соответствует аномальной дисперсии, а  $D = -1$  – нормальной. Первый случай не нуждается в пояснениях, последний может относиться, например, к случаю распространения солитона в волоконном лазере на основе неодимового усилителя. Уравнение (1) записано таким образом, что если в правой части стоит нуль, то мы получаем обычное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). С помощью этого уравнения можно описать и многие другие неравновесные процессы, как процессы в лазерах, конвекцию двухкомпонентной жидкости, процессы переноса фазы и др.

Если коэффициенты  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  в правой части малы, а  $\nu = 0$ , то можно строить солитоноподобные решения уравнения (1), применяя к солитонным решениям НУШ теорию возмущений. Однако такой подход не может отразить все свойства солитоноподобных импульсов и дать все области их существования в пространстве параметров. Важный шаг к полному пониманию свойств комплексного УГЛ – это построение точных решений. Они помогают предсказывать поведение решения при произвольных начальных условиях. Мы рассмотрим здесь УГЛ как третьего, так и пятого порядков, и для обоих случаев с помощью одной и той же процедуры построим солитонные решения.

Кубическое УГЛ хорошо изучено (например, Хокинг и Стюартсон, 1972; Перейра и Стенфло, 1977; Нозаки и Бекки, 1984). Его локализованное решение общего вида при заданном наборе параметров имеет фиксированную амплитуду. Аккуратное исследование решений с фиксированной амплитудой показывает, что при определенных значениях параметров, соответствующих некоторой особой линии на плоскости  $(\beta, \varepsilon)$ , эти решения становятся сингулярными (Афанасьев, 1995).

Однако, хотя решений с фиксированной амплитудой здесь не существует, но возникает новый класс решений – класс *солитонов с произвольной амплитудой*.

Уравнение пятого порядка также рассматривалось в ряде публикаций методами численного моделирования, теории возмущений и аналитически. В случае субкритических бифуркаций ( $\varepsilon > 0$ ) численно было показано существование солитоноподобных решений (Туал и Фаув, 1988; Бранд и Дейслер, 1989). Качественный анализ областей существования локализованных решений для всей области существования коэффициентов от нуля до бесконечности (Хаким и др., 1990). Аналитический подход, основанный на редукции уравнения (1) к динамической системе третьего порядка, был развит в работе Саарлоса и Хоенберга (1990, 1992). Он позволяет получить точные решения уравнения пятого порядка.

Наиболее полное математическое исследование точных решений УГЛ пятого порядка на основе Пенлеве-анализа и символьных вычислений выполнено в работе Марка и др. (1994). Общий подход, использованный авторами, состоит в сведении процедуры решения дифференциального уравнения к чисто алгебраической задаче. Мно-

жество решений, полученных на этом пути, включает в себя локализованные решения, источники, стоки и фронты. Широкое разнообразие возможных типов решений требует отдельного тщательного анализа решений каждого класса. Это одна из причин, по которой мы сосредоточились исключительно на локализованных решениях. Мы приводим здесь явный вид и классификацию всех решений этого ограниченного класса.

### ***1.1.2. Область существования устойчивых импульсов***

Устойчивые импульсы – наиболее интересные объекты оптики. Именно их генерируют лазерные системы, и именно они являются битами информации в оптических волоконных системах. Поэтому чрезвычайно важно знать, при каких физических характеристиках системы мы можем ожидать существования подобных устойчивых импульсов. Иными словами, необходимо знать те значения коэффициентов уравнения, при которых оно имеет устойчивые локализованные решения. Это должна быть такая область в пространстве параметров, где широкий класс начальных условий будет приводить к формированию стационарного импульса, представляющего собой устойчивое локализованное решение УГЛ пятого порядка.

О первом получении строго устойчивого локализованного решения впервые было сообщено в работе Туала и Фаува (1988). В пространстве параметров ими были найдены некоторые точки, где существуют устойчивые импульсы. Грубая оценка положения границы, разделяющей фронты и локализованные решения УГЛ, была сделана Хакимом с соавторами (1990). Однако, как мы видели, между этими классами нет четкой границы. Ван Саарлосом и Хоенбергом (1992) было найдено, что для некоторых значений параметров одновременно существует большое разнообразие фронтов и локализованных решений.

В этом разделе мы представляем численные результаты, полученные в работе Сото-Креспо и др. (1996), которые позволяют узнать значения коэффициентов ( $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ) УГЛ пятого порядка (то есть выделяют некоторую область в пространстве параметров), где существуют устойчивые импульсы.

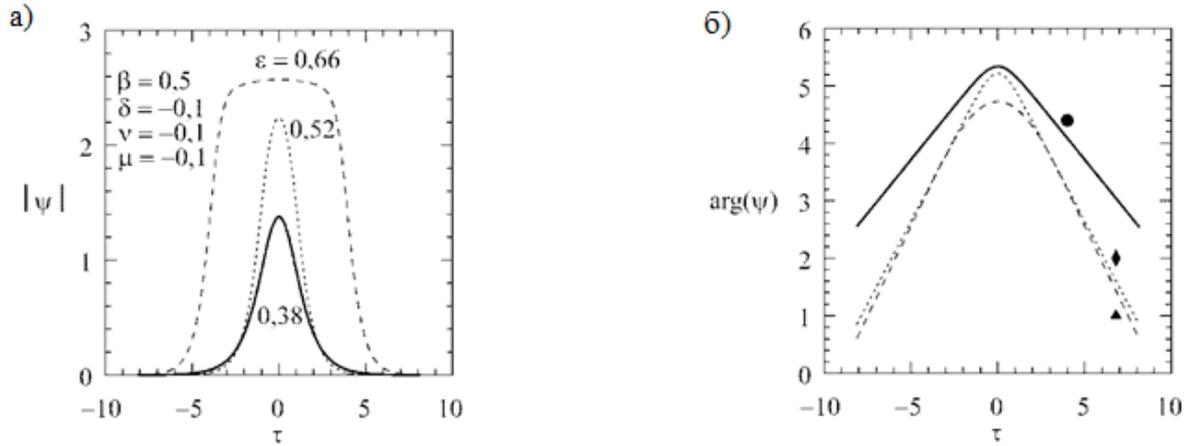


Рис. 4. Солитонные решения, найденные численно для  $\beta = 0,5$ ,  $\delta = \nu = \mu = -0,1$  при  $\varepsilon$ , равном  $0,38$  (сплошная кривая),  $0,52$  (точечная кривая) и  $0,66$  (пунктир); а – амплитуда  $|\psi|$ , б – фаза  $\arg(\psi)$ . Кружок, ромб и треугольник, с помощью которых соответственно помечены случаи  $\varepsilon = 0,38, 0,52, 0,66$ , будут использоваться на последующих рисунках для обозначения местоположения этих решений в пространстве параметров

Сформулируем сначала те ограничения, которые следует наложить на параметры при поиске устойчивых импульсов. Очевидно, что для стабилизации частоты солитона параметр  $\beta$  должен быть неотрицательным. Коэффициент линейной накачки  $\delta$  должен быть нулевым или отрицательным, чтобы обеспечить устойчивость фона. В этом случае для  $\mu = 0$  устойчивые импульсы могут существовать только при  $\varepsilon$ , лежащих выше кривой  $S$ . Чтобы предотвратить коллапс импульса, следует выбрать  $\mu < 0$ . Параметр  $\nu$  может иметь любой знак.

Численно выйти на устойчивый импульс при решении уравнения (1) можно, взяв в качестве начальных условий гауссиан произвольной амплитуды и ширины (Сото-Креспо и др., 1996). Форма начального импульса не так уж важна. Если решение сходится к какому-то стационарному, его можно рассматривать как устойчивое решение, а набор параметров, при которых проводился расчет, можно считать принадлежащим области существования такого солитонного решения.

На рис. 4 представлены три примера солитонных решений, найденных таким методом. Соответствующие значения коэффициентов следующие:  $\beta = 0,5$ ,  $\delta = \nu = \mu = -0,1$  при  $\varepsilon$ , равном  $0,38$  (сплошная кривая),  $0,52$  (точечная кривая) и  $0,66$  (пунктирная кривая). Система-

тически повторяя такие вычисления для других наборов параметров, в полном пространстве параметров можно построить области, где возможно устойчивое распространение импульсов.

Области  $(\beta, \varepsilon)$ -плоскости, где численно были найдены солитонные решения, представлены на рис. 5. Разная штриховка областей соответствует разным значениям параметра  $\mu$ . Нижняя кривая (нанесенная пунктиром) – это кривая  $S$ . Она показана для того, чтобы провести некоторые сравнения с выводами, сделанными на основе аналитических решений. Прежде всего, заметим, что области существования устойчивых импульсов расположены всегда выше кривой  $S$ , а нижняя граница области устойчивости (сплошная кривая) почти "параллельна" кривой  $S$ . Расстояние между кривой  $S$  и нижней границей области устойчивости зависит от параметров  $\delta$ ,  $\mu$  и  $\nu$ . Для малых  $\delta$ ,  $\mu$  и  $\nu$  это расстояние мало. При фиксированных  $\nu$  и  $\delta$  с ростом  $|\mu|$  заштрихованная область становится шире, но нижняя граница при этом поднимается выше. При  $\delta$ , стремящемся к нулю, и фиксированных  $\mu$  и  $\nu$  нижняя граница приближается к  $S$ . Мы будем считать далее, что при нулевом  $S$  область неустойчивости ограничена кривой  $S$ .

Рис. 5 представляет приблизительную схему того, как изменяется область существования устойчивых импульсов на плоскости  $(\beta, \varepsilon)$  с изменением  $\mu$  и  $\delta$ . В стационарных импульсах накачка и диссипация должны быть уравновешены. Для тех систем, параметры которых лежат ниже границы заштрихованных областей, импульсы при распространении затухают. Поток энергии, подпитывающий первоначальный импульс благодаря положительному  $\beta$ , меньше, чем обратный поток, вызванный линейными ( $\beta < 0$ ,  $\delta > 0$ ) и нелинейными ( $\mu < 0$ ) потерями. На верхней границе протекают другие процессы. В общем случае верхняя граница на  $(\beta, \varepsilon)$ -диаграмме совпадает с кривой, на которой фронты имеют нулевую скорость. Выше этой кривой два фронта широкого импульса расходятся, ниже – сходятся, образуя в итоге устойчивый импульс. Таким образом, устойчивые импульсы существуют лишь ниже этой линии.

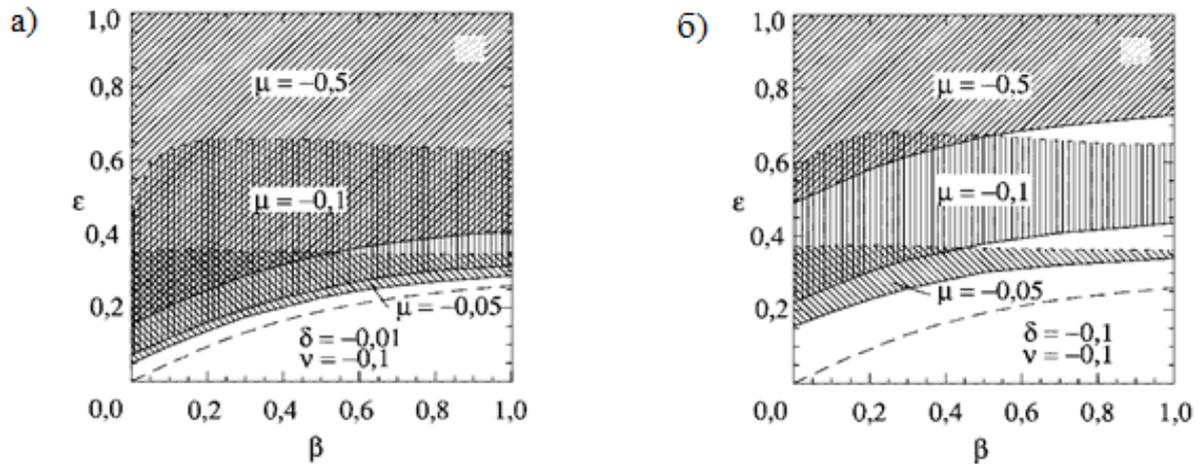


Рис. 5. Области устойчивых локализованных решений на плоскости  $(\beta, \epsilon)$ . Области с различным значением параметра  $\mu$  по-разному заштрихованы. Все области расположены выше кривой  $S$  (пунктирная кривая). При этом  $\nu = -0,1$  и  $\delta = -0,01$  (а),  $\delta = -0,1$  (б)

Теперь рассмотрим другие плоские сечения тех областей пространства параметров, где найдены устойчивые локализованные решения. На рис. 6, а показаны области существования устойчивых импульсов на плоскости  $(\nu, \epsilon)$  при фиксированных  $\mu, \delta$  и  $\beta$ , конкретные значения которых указаны на рис. 6. Видно, что ширина полосы устойчивости с ростом  $\nu$  быстро растет. Пунктиром на рис. 6 показана линия, на которой при тех же параметрах существуют точные аналитические решения. Довольно интересно, что эта линия тоже почти параллельна верхней границе области устойчивых импульсов, но смещена от нее на некоторое расстояние. Это означает, что при значении параметров между этими линиями аналитические решения неустойчивы.

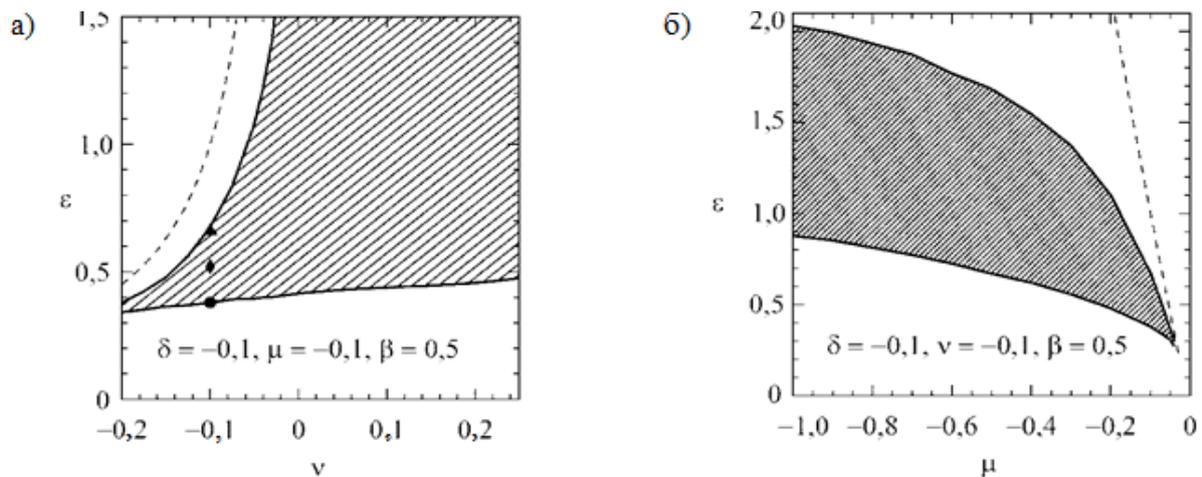


Рис. 6. Область устойчивых импульсов на плоскостях  $(\nu, \epsilon)$  (слева) и  $(\mu, \epsilon)$  (справа). Здесь  $\beta = 0,5$  и  $\delta = -0,1$ . Пунктиром нанесена линия, где существуют аналитические решения. Условными символами (кружок, ромб и треугольник) показано положение решений, изображенных на рис. 4

На рис. 6, б показана область устойчивых импульсов на плоскости  $(\mu, \varepsilon)$  при фиксированных значениях параметров  $\nu$ ,  $\delta$  и  $\beta$ . С ростом  $|\mu|$  интервал допустимых значений параметра  $\varepsilon$  расширяется, а значение  $\varepsilon$  в центре этого интервала возрастает. Это последнее наблюдение, кроме всего прочего, указывает на то, что возрастание нелинейных потерь пятого порядка должно компенсироваться ростом накачки третьего порядка. При  $\mu \approx -0,04$  ширина полосы становится исчезающе малой. Пунктиром нанесена линия, в каждой точке которой для данных значений  $(\delta, \nu, \beta) = (-0,1, -0,1, 0,5)$  существуют точные аналитические решения. Видно, что они тоже не попадают в область устойчивых импульсов. Однако в этом случае расстояние между областью устойчивых импульсов и пунктирной линией с ростом  $\mu$  возрастает, а при  $\mu \rightarrow -0,04$  устремляется к нулю. Инкремент нарастания неустойчивости соответствующих аналитических решений для этих значений  $\mu$  становится пренебрежимо малым.

А как зависит область существования устойчивых импульсов от величины  $\delta$ ? Эта зависимость для фиксированных  $\mu, \nu$  и  $\beta$  показана на рис. 7. Для расчета были взяты следующие значения параметров:  $\nu = \mu = -0,01$ ,  $\beta = -0,5$ .

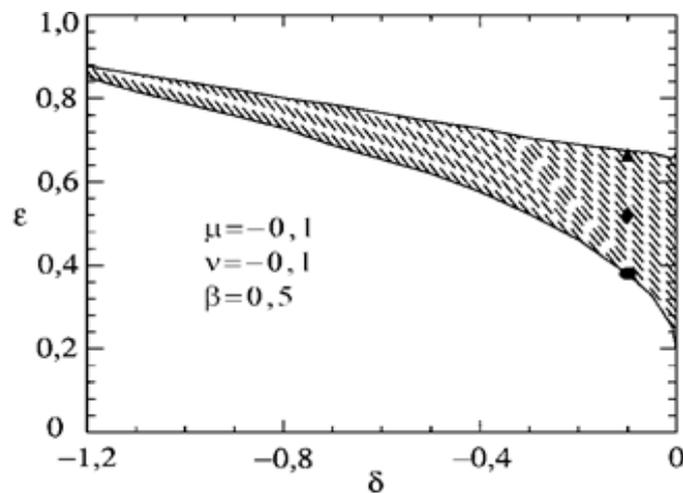


Рис. 7. Область устойчивых импульсов на плоскости  $(\delta, \varepsilon)$ . Здесь  $\beta = 0,5$  и  $\nu = \mu = -0,1$ . Аналитическое решение для этих параметров существует при  $\varepsilon = 1$ . Три значка – кружок, ромбик и треугольник – показывают положение решений, представленных на рис. 4

Видно, что с падением коэффициента линейной накачки интервал допустимых значений  $\varepsilon$  растет, причем с ростом  $|\delta|$  среднее значение  $\varepsilon$  увеличивается. Это значит, что большие линейные потери должны быть скомпенсированы ростом нелинейной накачки третьего порядка (если остальные параметры постоянны). При заданных выше значениях параметров  $\mu$ ,  $\nu$  и  $\beta$  значение для  $\varepsilon$  равно единице, которое лежит выше заштрихованной области.

### 1.1.3. Редукция к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Аналитические решения УГЛ можно найти лишь для определенных комбинаций параметров. Один из способов отыскания стационарных решений уравнения – сведение его к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Итак, ищем решения в виде

$$\psi = a(t)\text{Exp}[i\phi(t) - i\omega\xi], \quad (2)$$

где  $a$  и  $\phi$  – действительные функции аргумента  $t = \tau - \nu\xi$ ,  $\nu$  – скорость импульса, а  $\omega$  – нелинейный сдвиг постоянной распространения. Подставляя (2) в (1), мы получаем уравнение, связывающее функции  $a$  и  $\phi$ . Разделив в уравнении действительную и мнимую части, приходим к следующей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \left( \omega - \frac{1}{2}D\phi'^2 + \beta\phi'' + \nu\phi' \right) a + 2\beta\phi'a' + 2\beta\phi'a' + \frac{1}{2}Da'' + a^3 + \nu a^5 = 0, \\ \left( -\delta + \beta\phi' + \frac{1}{2}D\phi'' \right) a + (D\phi' - \nu)a' - \beta a'' - \varepsilon a^3 - \mu a^5 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где каждый штрих означает дифференцирование по  $t$ . Систему можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \omega a + \nu \frac{M}{a} - \frac{DM^2}{2a^3} + \frac{\beta M'}{a} + \frac{1}{2}Da'' + a^3 + \nu a^5 = 0, \\ -\delta a - \nu a' + \beta \frac{\beta M'}{a^3} + \frac{DM'}{2a} - \beta a'' - \varepsilon a^3 - \mu a^5 = 0, \end{cases}$$

где  $M = a^2\phi'$ .

Разделяя переменные, получим

$$\begin{aligned}
 M' &= \frac{2(D\delta - 2\beta\omega)}{1+4\beta^2} a^2 + \frac{2(D\varepsilon - 2\beta)}{1+4\beta^2} a^4 + \frac{2(D\mu - 2\beta\nu)}{1+4\beta^2} a^6 - \\
 &\quad - \frac{4\beta\nu}{1+4\beta^2} M + \frac{2D\nu}{1+4\beta^2} ay, \\
 y' &= \frac{M^2}{a^3} - \frac{2(D\omega + 2\beta\delta)}{1+4\beta^2} a - \frac{2(D + 2\beta\varepsilon)}{1+4\beta^2} a^3 - \\
 &\quad - \frac{2(D\nu + 2\beta\mu)}{1+4\beta^2} a^5 - \frac{4\beta\nu}{1+4\beta^2} y - \frac{2D\nu}{1+4\beta^2} \frac{M}{a}, \\
 a' &= y
 \end{aligned} \tag{4}$$

Эта система содержит все стационарные и трансляционные решения. Параметры  $\nu$  и  $\omega$  являются собственными значениями системы (4). На плоскости  $(M, a)$  локализованные решения имеют вид замкнутых кривых, начинающихся и заканчивающихся в начале координат.

Если нас интересуют только неподвижные решения ( $\nu = 0$ ), то систему (4) можно упростить:

$$\begin{aligned}
 M' &= \frac{2(D\delta - 2\beta\omega)}{1+4\beta^2} a + \frac{2(D\varepsilon - 2\beta)}{1+4\beta^2} a^4 + \frac{2(D\mu - 2\beta\nu)}{1+4\beta^2} a^6 + \frac{2D\nu}{1+4\beta^2} ay, \\
 y' &= \frac{M^2}{a^3} - \frac{2(D\omega + 2\beta\delta)}{1+4\beta^2} a - \frac{2(D + 2\beta\varepsilon)}{1+4\beta^2} a^3 - \frac{2(D\nu + 2\beta\mu)}{1+4\beta^2} a^5, \\
 a' &= y.
 \end{aligned}$$

Эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно решить численно. Для малых  $a$  асимптотическое поведение ее решений задается формулами:

$$M = \frac{D\delta - 2\beta\omega}{g(1+4\beta^2)} a_0^2 \text{Exp}(2g\tau), \quad a = a_0 \text{Exp}(g\tau),$$

где постоянная  $g$  может быть получена из следующего биквадратного уравнения:

$$g^4 + \frac{2(D\omega + 2\beta\delta)}{1+4\beta^2} g^2 - \frac{(D\delta - 2\beta\omega)^2}{(1+4\beta^2)^2} = 0.$$

$$\text{Именно } g^2 = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 + \delta^2}{1 + 4\beta^2}} g^2 - \frac{D\omega + 2\beta\delta}{1 + 4\beta^2} = 0.$$

Используя асимптотические выражения, центральную часть локализованного решения можно найти методом стрельбы.

## 1.2. Атомно-оптические взаимодействия в оптически-плотных средах

### 1.2.1. Модель и формализм описания

Рассмотрим ансамбль  $N$  материальных частиц-излучателей  $A$  и бесконечного набора мод квантованного электромагнитного поля  $F$ . При этом будем считать, что частицы  $A$  (далее двухуровневые атомы) неподвижны и взаимодействуют друг с другом только через поле  $F$ . Гамильтониан такой системы в общем виде запишется как

$$H = H_0 + V, \quad H_0 = \sum_A H_A + \sum_F H_F, \quad V = \sum_A \sum_F V_{AF},$$

где  $H_A$  и  $H_F$  – операторы Гамильтона свободных частиц и  $V_{AF}$  – оператор их взаимодействия. Эволюция и все свойства многочастичной системы описываются полным оператором плотности  $\rho(t)$ , который подчиняется уравнению фон Неймана:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho - [H, \rho] = 0. \quad (5)$$

Для определения характеристик атома и поля потребуется найти решение для редуцированных одночастичных матриц плотности  $\rho_A$  и  $\rho_F$ . Редуцирование определяется как взятие следа по неполному числу частиц системы. Такие укороченные матрицы плотности нормируются таким образом, что свертка по их частицам равна единице. В начальный момент времени  $t=0$  предполагается, что атомы и поле не взаимодействуют и полная матрица плотности системы  $\rho(0)$  может быть факторизована, что используется для задания начальных условий  $\rho_A(0)$  и  $\rho_F(0)$ . Уравнение фон Неймана идентично цепочке Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ) для редуцированных матриц плотности и корреляционных операторов [15]. Путем последовательного взятия частичных свертки и использования следующего общего определения корреляций:

$$\rho_{AF} = \rho_A \rho_F + g_{AF}, \quad \rho_{AFF}' = \rho_A \rho_F \rho_F' + g_{AF} \rho_F' + g_{FF}' \rho_A + g_{AFF}'$$

уравнение (5) заменяется бесконечной цепочкой кинетических уравнений. Первые два типа уравнений описывают эволюцию одночастичных матриц:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_A - [\bar{H}_A, \rho_A] = \sum_F Tr_F [V_{AF}, g_{AF}],$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_F - [\bar{H}_F, \rho_F] = \sum_A Tr_A [V_{AF}, g_{AF}].$$

Здесь введены эффективные операторы Гамильтона

$$\bar{H}_A = H_A + \sum_F \langle V_{AF} \rangle_F, \quad \bar{H}_F = H_F + \sum_A \langle V_{AF} \rangle_A,$$

в которых под суммами учитываются потенциалы «самосогласованных полей». Символом  $\langle \dots \rangle_S$  обозначается усреднение по частицам вида  $S$ , то есть  $\langle \hat{X} \rangle_S = Tr_S \langle \hat{X} \rho_S \rangle$ . Связь одной частицы с системой также выражена в правых частях уравнений через оператор корреляции атом-поле, который, в свою очередь, подчиняется уравнению

$$i\hbar \frac{d}{dt} g_{AF} - [\bar{H}_A + \bar{H}_F, g_{AF}] = I_{AF} + L_{AF} + \Pi_{AF} + C_{A'BF'}, \quad (6)$$

где  $I_{AF} = [\bar{V}_{AF}, \rho_A \rho_F]$ ,  $L_{AF} = [V_{AF}, g_{AF}] - \rho_A Tr_A [V_{AF}, g_{AF}]$ ,

$$\Pi_{AF} = \sum_{F \neq F'} Tr_{F'} [V_{AF'}, \rho_A g_{FF'}] + \sum_{A \neq A'} Tr_{A'} [V_{A'F}, g_{AA'F}],$$

$$C_{AS'F} = \sum_{F \neq F'} Tr_{F'} [V_{AF'}, g_{AFF'}] + \sum_{A \neq A'} Tr_{A'} [V_{A'F}, g_{AA'F}],$$

и введен эффективный оператор взаимодействия, учитывающий самосогласованные поля

$$\bar{V}_{AF} = V_{AF} - \langle V_{AF} \rangle_F - \langle V_{AF} \rangle_A.$$

Индексы со знаком «штрих» обозначают разные частицы одного сорта. Уже на этом этапе цепочка может быть оборвана с целью получения замкнутой системы уравнений, учитывающей коллективные эффекты. В рассматриваемом случае малым параметром, по которому эта операция может быть осуществлена, является константа связи атома с полевой модой в операторе  $V_{AF}$ . Приближение

$L_{AF} = \Pi_{AF} = C_{A'SF'} = 0$  обеспечивает замкнутость системы уравнений и позволяет получить независимое управляющее уравнение для матрицы плотности атома, учитывающее радиационное затухание и атомные переходы, индуцируемые некогерентным полем. Однако, как будет показано ниже, для решения спектроскопической задачи требуется вычисление корреляционного оператора также с учетом релаксации. Для этого приближение должно быть расширено частичным учетом корреляции  $g_{AFF'}$ , то есть  $C_{AS'F} = C_{AS'F} \neq 0$ . Тогда (6) запишется как

$$i\hbar \frac{d}{dt} g_{AF} - [\bar{H}_A + \bar{H}_F, g_{AF}] = [\bar{V}_{AF}, \rho_A \rho_F] + \sum_{F' \neq F} Tr_{F'} [V_{AF'}, g_{AFF'}].$$

Трехчастичная корреляция будет находиться из приближенного уравнения

$$i\hbar \frac{d}{dt} g_{AFF'} - [\bar{H}_A + \bar{H}_F + \bar{H}_{F'}, g_{AF}] = [\bar{V}_{AF'}, \rho_F g_{AF}].$$

Эта замкнутая система будет основой для построения теории на данном этапе. Следует отметить, что для корректного учета радиационных поправок для характерных констант необходимо полностью учитывать  $\Pi_{AF}$  и  $C_{AS'F}$ . При этом количество уравнений в системе увеличится за счет учета корреляций между частицами одного сорта. Система, используемая для решения текущей задачи, аналогична обобщенному борновскому приближению второго рода [15].

### 1.2.2. Основное управляющее уравнение

Для набора двухуровневых атомов и поля операторы Гамильтона свободных частиц запишем

$$H_A = \hbar\omega_A \sigma_z, \quad H_F = \hbar\omega_k \hat{a}_{k,s}^+ \hat{a}_{k,s},$$

где  $\omega_A$  – частота атомного перехода и  $\sigma_z$  – атомный оператор инверсии,  $\hat{a}_{k,s}^+$  и  $\hat{a}_{k,s}$  соответственно операторы рождения и уничтожения полевой моды частоты  $\omega_k$  с волновым вектором  $k = \omega_k / c$ . Взаимодействие будет рассматриваться в пределе электрического дипольного приближения

$V_{AF} = -d_A E_{k,s}(r_A)$ , где  $d_A = d(\sigma^- + \sigma^+) \delta(r - r_A)$  – есть оператор дипольного момента перехода атома в точке  $r_A$  с понижающим и повышающим  $\sigma^-$  и  $\beta\sigma^+$ . В операторе электрического поля

$$\hat{E}_{k,s}(r) = i \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \varepsilon_{k,s} \hat{a}_{k,s} e^{ikr} + H_c.$$

учтены две независимые поляризации  $\varepsilon_{k,s}$  и обозначен объем квантования  $V$ . Учет действия внешнего возбуждающего поля производится путем определения начальных условий для матрицы плотности  $\rho_F$ , а именно

$$\rho_F(0) = |\alpha_{k,s}\rangle \langle \alpha_{k,s}|, \text{ где } |\alpha_{k,s}\rangle - \text{когерентное состояние поля.}$$

Для модели бистабильности вследствие взаимодействия атома с выделенной локальной фононной модой [8, 9] гамильтониан приобретает следующие дополнительные слагаемые:

$$H_\chi = \hbar\omega_\chi b_\chi^+ b_\chi, \quad V_{A\chi} = \eta\sigma_z (b_\chi^+ + b_\chi).$$

Однако далее подробно приводится вывод уравнений для взаимодействия с эффективным локальным электрическим полем. В силу очевидного подобия выкладок для прочих моделей бистабильности приводится лишь окончательный результат.

С целью получения независимого управляющего уравнения для  $\rho_A$  здесь можно воспользоваться стандартными приемами квантовой оптики. Используя формальные решения для  $\rho_F$  и  $g_{AF}$  в представлении взаимодействия, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_A &= \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{d}_A^t E_{eff}^t, \tilde{\rho}_A \right] + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left\{ \left[ \hat{d}_A^t, G_{tt}^+, \hat{d}_A^{t'} \tilde{\rho}_A \right] + \left[ \hat{d}_A^t, \tilde{\rho}_A G_{tt}^-, \hat{d}_A^{t'} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left\{ \left[ \hat{d}_A^{t'}, W_{tt}, \left[ \hat{d}_A^{t'}, \tilde{\rho}_A \right] \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

где индексы  $t$  и  $t'$  обозначают явные временные зависимости в данном представлении. Здесь и далее опускаются все члены более старшего порядка, чем квадрат константы связи в  $V_{AF}$ . Первый коммута-

тор в правой части описывает взаимодействие атома с эффективным или локальным полем. Как показано в [16]:

$$E_{eff} = E_0(r_A) + \int_{\Sigma-\delta} dr_{A'} \int dr_{A'} \int_0^t dt' G_{AA',tt'} \zeta(r_A) \left\langle \hat{d}_{A'}^{t'} \right\rangle, \quad (7)$$

где  $E_0(r_A)$  – внешнее поле, следующее из начальных условий. Множитель в подынтегральном выражении  $G_{AA',tt'}$  обозначает гриновский тензор электромагнитного поля

$$G_{AA',tt'} \equiv G(r_A - r_{A'}, t - t') = \frac{1}{\hbar} \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk \left\langle \left[ \hat{E}_{k,s}(r_A, t), \hat{E}_{k,s}(r_{A'}, t') \right] \right\rangle,$$

а  $\zeta(r_A)$  определяет распределение плотности атомов в образце. Интегрирование по пространству производится в пределах объема образца  $\Sigma$  за вычетом малой области  $\delta$  вокруг рассматриваемого атома  $A$ . Необходимость такой процедуры отражает свойство цепочки ББГКИ, где в потенциале самосогласованного поля, действующего на атом, не учитывается влияние атома на самого себя. Далее первый интеграл в уравнении (7) описывает радиационное затухание. В коммутаторах присутствуют положительно- и отрицательно-частотные части функции Грина, взятые в пределе  $r_{A'} \rightarrow r_A$ , то есть  $G_{tt'} = G(r_A - r_A, t - t')$ . Последний член описывает переходы под действием некогерентного поля.

Выражение для локального поля (7) не учитывает особенность функции Грина в нуле [17, 18]. Однако если записать полный тензор с дельта-функциональной особенностью и разделить интегрирование по макро- и микрообъемам  $\Sigma$  и  $\delta$ , то выражение для локального поля для однородной и изотропной среды излучателей может быть существенно упрощено

$$E_{eff} = E_0 + \int_{\Sigma} dr_{A'} \int_0^t dt' G_{AA',tt'} P_{A,t} + \frac{4\pi}{3} P.$$

Здесь была введена плотность макроскопической поляризации  $P = \zeta \left\langle \hat{d}_{A'}^{t'} \right\rangle$ . Так как два первых выражения справа по определению дают среднее максвелловское поле, то получаем полное соответствие

эффективного поля, возбуждающего атом в уравнениях, локальному полю Лоренца:

$$E_{eff} = E_M + \frac{4\pi}{3} P.$$

Таким образом, использование ББГКИ позволяет последовательно и согласованно описывать взаимодействие плотных систем излучателей с внешним полем, исходя только из основных фундаментальных постановочных предположений.

Теперь для получения уравнений бистабильности основное управляющее уравнение может быть записано в шредингеровском представлении и без учета последнего слагаемого, то есть пренебрегая перерассеянием, что может быть справедливо для оптически тонких сред. Принимая приближение вращающейся волны, вводя обозначения для отстройки от резонанса  $\Delta = \omega_A - \omega_L$ , где  $\omega_L$  – частота излучения лазера, и эффективную частоту Раби

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \langle \sigma^+ \rangle, \quad \Omega_0 = \frac{dE}{\hbar}, \quad \varepsilon = \frac{\zeta 4\pi |d|^2}{3\hbar} = \pi \zeta k^{-3} \gamma,$$

а также вычисляя скорость спонтанного распада для атома в свободном пространстве

$$\gamma = \frac{2}{\hbar} \text{Im} \{ d G_{AA}^\omega d \} = \frac{4|d|^2 k^3}{3\hbar}$$

и пренебрегая величиной лэмбовского сдвига, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_A = & -i\Delta [\sigma_z, \rho_A] + i\Omega^* [\sigma^+, \rho_A] + i\Omega [\sigma^-, \rho_A] - \\ & - \frac{\gamma}{2} \left\{ [\sigma^+, \sigma^- \rho_A] - [\sigma^-, \rho_A \sigma^+] \right\}. \end{aligned}$$

Записывая систему уравнений для компонент  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$  и  $\rho_{21}$  матрицы плотности  $\rho_A$  и учитывая ее свойства при разрешении системы относительно  $R = \rho_{11} - \rho_{22}$  в стационарном пределе, получим уравнение для инверсии населенностей. Однако с целью общности

описания без приведения точного вывода обобщим уравнение бистабильности на случай тонких пленок или наличия поглощающей фоновой среды, когда

$\Omega = \Omega_0 + (\varepsilon - i\gamma_c) \langle \sigma^+ \rangle$ , где  $\gamma_c$  – скорость коллективной релаксации.

С учетом такой эффективной частоты Раби уравнение для инверсии запишем

$$\left( \varepsilon^2 + \frac{\gamma_c}{4} \right) R^3 - \left( 2\varepsilon\Delta - \frac{\gamma_c}{2} + \varepsilon^2 + \frac{\gamma_c^2}{4} \right) R^2 + \left( 2\varepsilon\Delta - \frac{\gamma_c}{2} + \Delta^2 + \frac{\gamma_c^2}{4} + 2\Omega_0^2 \right) R - \left( \Delta^2 + \frac{\gamma_c^2}{4} \right) = 0.$$

Анализ его решений хорошо известен. Таким образом, развитый формализм позволяет описывать атомную подсистему в случае, когда имеет место бистабильный отклик без использования феноменологических процедур и минимуме предположений при постановке задачи.

### 1.3. Моделирование распространения диссипативных солитонов в допированной среде

#### 1.3.1. Анализ $\Lambda$ -схемы взаимодействия в допированной среде

На рис. 8 представлена схема энергетических уровней атома  $Rb^{87}$ . Частоты разделения уровней  $|c\rangle$  и  $|b\rangle$  составляют  $\delta = 6,834$  ГГц, дипольный матричный элемент перехода  $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$  равен  $\mu_{ab} = 3,58 \cdot 10^{-29}$  см. Рассмотрим ансамбль одинаковых трехуровневых атомных систем с  $\Lambda$ -конфигурацией энергетических уровней и разрешенных переходов.

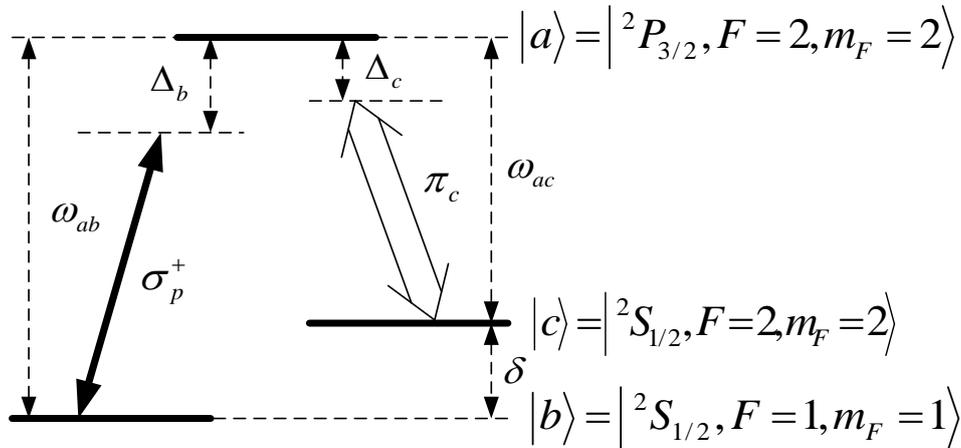


Рис. 8. Схема энергетических уровней атома  $Rb^{87}$

Полагаем, что атомы  $\text{Rb}^{87}$  внедрены (допированы) в оптическую матрицу на основе кварцевого стекла с характерной длиной 10 мкм, в которой методом фемтосекундной модификации гидроксильных групп записан оптический волновод с характерным диаметром световедущей жилы 10 мкм. Геометрия эксперимента предполагает, что пробное поле  $E_p$  распространяется вдоль волноводного канала, который одновременно подвергается воздействию поля оптической накачки  $E_c$ , как на рис. 9. Поскольку атомы  $\text{Rb}^{87}$  обладают большими значениями дипольных моментов на рассматриваемых оптических переходах и с учетом их концентрации в оптической матрице, величина

локального отклика среды  $\chi_{\alpha\beta} = \frac{N|d_{\alpha\beta}|^2}{3\hbar\epsilon_0}$  может принимать значения,

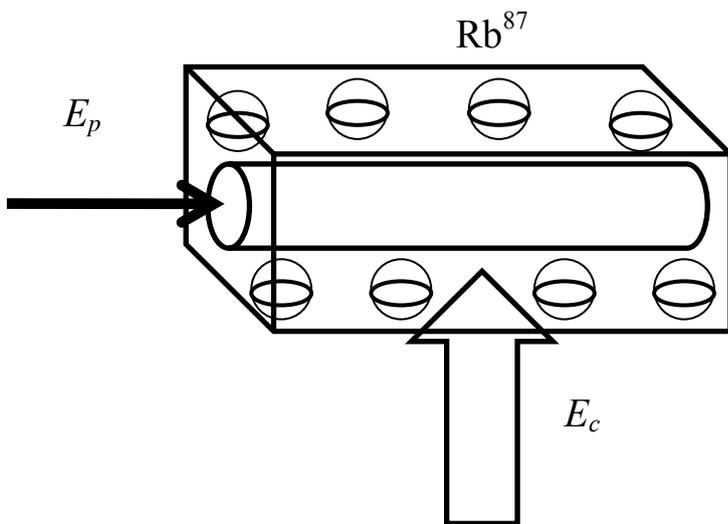


Рис. 9. Схематическое изображение допированного кристалла кварца

сравнимые с величиной частоты Раби пробного поля. Таким образом, возникающие в системе нелинейно-оптические и дисперсионные эффекты будут определяться, с одной стороны, настройками поля оптической накачки, а с другой – значениями концентрации допированных атомов в оптически-плотной системе на основе такого допированного волновода.

Оператор Гамильтона для нашей системы с учетом локального отклика среды запишем в следующем виде:

$$H = \sum_j H_A^j + \sum_{k,s} H_F^{k,s} + \sum_j \sum_{k,s} V_{AF}, \quad (8)$$

где  $H_A^j = E_a|a_j\rangle\langle a_j| + E_b|b_j\rangle\langle b_j| + E_c|c_j\rangle\langle c_j|$  – оператор Гамильтона для свободной частицы,  $j$  – номер частицы,

$H_F^{k,s} = \hbar\omega_k \left( \hat{a}_{k,s}^+ \hat{a}_{k,s} + \frac{1}{2} \right)$  – оператор Гамильтона для моды свободного поля,  $\hat{a}_{k,s}^+$  и  $\hat{a}_{k,s}$  – операторы рождения и уничтожения фотонов частоты  $\omega_k$  с волновым вектором  $k$ ,  $k = \omega_k / c$ ,  $c$  – скорость света в вакууме, и двумя независимыми поляризациями  $s = 1, 2$ ,  $V_{AF} = \hat{d}_j \hat{E}$  – взаимодействие между материальным и полевым ансамблями,  $\hat{d}_j = \left( |a_j\rangle\langle a_j| + |b_j\rangle\langle b_j| + |c_j\rangle\langle c_j| \right) \hat{d} \left( |a_j\rangle\langle a_j| + |b_j\rangle\langle b_j| + |c_j\rangle\langle c_j| \right)$  – оператор дипольного момента  $j$ -й частицы,  $\hat{d}$  – оператор дипольного момента атома,  $\hat{E}_{k,s}(r) = i\lambda_k \hat{e}_{k,s} \hat{a}_{k,s} e^{ik \cdot r} + \text{э.с.}$  – оператор моды электрического поля в точке  $r$ ,  $\lambda_k = \sqrt{\hbar\omega_k / 2\varepsilon_0 V}$ ,  $V$  – объем квантования,  $\hat{e}_{k,s}$  – единичный вектор поляризации.

Эволюция и все свойства рассматриваемой многочастичной системы могут быть найдены, если известна ее матрица плотности  $\sigma(t)$ , которая подчиняется уравнению фон Неймана:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho - [H, \rho] = 0, \quad (9)$$

с соответствующим гамильтонианом (8). Нахождение решения (9) при выбранной постановке задачи невозможно и, таким образом, формализм описания взаимодействия ансамбля излучателей и поля будет основан на нахождении редуцированных (неполных) матриц плотности:

$\rho_{\{s\}} = \text{Tr}_{\{s' \neq s\}} \rho$ , где  $\{s\}$  – набор индексов частиц неполной матрицы  $\rho_{\{s\}}$ . Также здесь  $\text{Tr}_{\{s' \neq s\}}$  – операция взятия следа, которая производится по всем частицам системы  $s'$ , не входящим во множество  $\{s\}$ .

Переходя к картине медленно меняющихся компонент матрицы плотности, то есть сделав замену переменных  $\sigma = e^{i(\omega_p|a\rangle\langle a| + (\omega_p - \omega_c)|c\rangle\langle c|)t} \rho_A e^{-i(\omega_p|a\rangle\langle a| + (\omega_p - \omega_c)|c\rangle\langle c|)t}$ , где  $\rho_A$  – матрица плотности одного произвольного атома, а  $\omega_p$  и  $\omega_c$  – частоты пробного

импульса и импульса накачки соответственно, получим систему дифференциальных уравнений элементов матрицы плотности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{ba} = i(\Delta_b - \chi_{ba}(\sigma_{bb} - \sigma_{aa}))\sigma_{ba} - ig\varepsilon(\sigma_{bb} - \sigma_{aa}) - i(\Omega + \chi_{ca}\sigma_{ca})\sigma_{bc} - \\ \quad - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{ca} = i(\Delta_c - \chi_{ca}(\sigma_{cc} - \sigma_{aa}))\sigma_{ca} - i\Omega(\sigma_{cc} - \sigma_{aa}) - i(g\varepsilon + \chi_{ba}\sigma_{ba})\sigma_{cb} - \\ \quad - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{ca}, \\ \dot{\sigma}_{bc} = i(\Delta_b - \Delta_c)\sigma_{bc} + ig\varepsilon\sigma_{ac} - i\Omega^* \sigma_{ba} + i\chi_{ba}\sigma_{ba}\sigma_{ac} - i\chi_{ac}\sigma_{ac}\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{aa} = ig\varepsilon^+ \sigma_{ba} + i\Omega^* \sigma_{ca} - ig\varepsilon\sigma_{ab} - i\Omega^* \sigma_{ac} - (\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{aa}, \\ \dot{\sigma}_{bb} = ig\varepsilon\sigma_{ab} - ig\varepsilon^+ \sigma_{ba} + \Gamma_{ab}\sigma_{aa}, \\ \dot{\sigma}_{cc} = i\Omega\sigma_{ac} - i\Omega^* \sigma_{ca} + \Gamma_{ac}\sigma_{aa}, \end{array} \right.$$

где  $\Omega$  и  $g\varepsilon$  – частоты Раби для импульса накачки и пробного импульса соответственно,  $\Delta_b$  и  $\Delta_c$  – отстройки от резонанса для проб-

ного импульса и импульса накачки соответственно,  $\chi_{\alpha\beta} = \frac{N|d_{\alpha\beta}|^2}{3\hbar\varepsilon_0}$  и

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{|d_{\alpha\beta}|^2 \omega_{\alpha\beta}^3}{3\pi\hbar c^3 \varepsilon_0}.$$

Для того чтобы найти решение для  $\sigma_{ba}$  из этой системы, сделаем следующие предположения:  $\sigma_{bb} = 1$ ,  $\sigma_{aa} = \sigma_{cc} = 0$ ,  $\dot{\sigma}_{aa} = \dot{\sigma}_{cc} = \dot{\sigma}_{bb} = 0$ . Тогда систему уравнений запишем в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{ba} = i(\Delta_b - \chi_{ba})\sigma_{ba} - ig\varepsilon - i(\Omega + \chi_{ca}\sigma_{ca})\sigma_{bc} - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{ca} = i\Delta_c\sigma_{ca} - i(g\varepsilon + \chi_{ba}\sigma_{ba})\sigma_{cb} - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{ca}, \\ \dot{\sigma}_{bc} = i(\Delta_b - \Delta_c)\sigma_{bc} + ig\varepsilon\sigma_{ac} - i\Omega^* \sigma_{ba} + i\chi_{ba}\sigma_{ba}\sigma_{ac} - i\chi_{ac}\sigma_{ac}\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{aa} = 0 = ig\varepsilon^+ \sigma_{ba} + i\Omega^* \sigma_{ca} - ig\varepsilon\sigma_{ab} - i\Omega^* \sigma_{ac}, \\ \dot{\sigma}_{bb} = 0 = ig\varepsilon\sigma_{ab} - ig\varepsilon^+ \sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{cc} = 0 = i\Omega\sigma_{ac} - i\Omega^* \sigma_{ca}. \end{array} \right.$$

Полагаем, что  $\Omega \gg \chi_{ca}\sigma_{ca}$ , то есть  $\sigma_{ca} \ll \frac{\Omega}{\chi_{ca}}$ , то есть

$g\varepsilon < \Omega < \chi_{ca}$  и  $\chi_{ca} \sim \chi_{ba}$ . Перепишем систему уравнений в следующем виде, считая, что  $\chi \equiv \chi_{ba}$ :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ba} = -\Gamma_1\sigma_{ba} - ig\varepsilon - i\Omega\sigma_{bc} - i\chi\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{ca} = -\Gamma_2\sigma_{ca} - ig\varepsilon\sigma_{cb} - i\chi_{ba}\sigma_{ba}\sigma_{cb}, \\ \dot{\sigma}_{bc} = i\Delta_3\sigma_{bc} + ig\varepsilon\sigma_{ac} - i\Omega^*\sigma_{ba}, \\ \dot{\sigma}_{bb} = 0 = ig\varepsilon\sigma_{ab} - ig\varepsilon^+\sigma_{ba}, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\Gamma_1 = -\left(i\Delta_b - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\right)$ ,  $\Gamma_2 = -\left(i\Delta_c - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\right)$  и  $\Delta_3 = \Delta_b - \Delta_c$ .

Будем решать эту систему уравнений в два этапа. На первом этапе фиксируем всю оптическую систему, считая поля неизменными, то есть  $\dot{\varepsilon} = \dot{\Omega} = 0$  и соответственно  $\dot{\sigma}_{ac} = 0$ ,  $\ddot{\sigma}_{bc} = \dot{\sigma}_{bc} = 0$ . Получим выражение для поляризации на нижних уровнях  $\sigma_{bc}$ . Продифференцируем  $\dot{\sigma}_{bc}$  из (10) и получим

$$\ddot{\sigma}_{bc} = i\Delta_3\dot{\sigma}_{bc} + ig\varepsilon\dot{\sigma}_{ac} - i\Omega^*\dot{\sigma}_{ba}.$$

Тогда с учётом уравнения  $\dot{\sigma}_{ba}$  из системы (10) получим

$$0 = -i\Omega^*(-\Gamma_1\sigma_{ba} - ig\varepsilon - i\Omega\sigma_{bc} - i\chi\sigma_{ba}). \quad (11)$$

Выразим  $\sigma_{ba}$  из уравнения на  $\dot{\sigma}_{bc}$ , а  $\sigma_{ca}$  из уравнения на  $\dot{\sigma}_{ca}$ , используя сделанные приближения, и получим систему уравнений на  $\sigma_{ba}$  и  $\sigma_{ca}$ :

$$\begin{cases} \sigma_{ba} = \frac{i}{\Omega^*}(-i\Delta_3\sigma_{bc} - ig\varepsilon g_{ac}), \\ \sigma_{ca} = -i\frac{g\varepsilon + \chi\sigma_{ba}}{\Gamma_2}\sigma_{cb}. \end{cases} \quad (12)$$

Найдём из этой системы уравнений (12)  $\sigma_{ba}$ , учитывая, что  $\varepsilon\sigma_{ab} = \varepsilon^+\sigma_{ba}$  (см. уравнение на  $\dot{\sigma}_{bb}$  из (10)):

$$\sigma_{ba} = \frac{ig^2|\varepsilon|^2 + \Delta_3\Gamma_2^*}{\Omega^*\Gamma_2^* - i\chi g\varepsilon^+\sigma_{bc}}\sigma_{bc}.$$

Подставим  $\sigma_{ba}$  в уравнение (11) и получим квадратное уравнение на  $\sigma_{bc}$ :

$$0 = \Omega\chi g\varepsilon^+\sigma_{bc}^2 + \left(i\left(\Gamma_1g^2|\varepsilon|^2 + |\Omega|^2\Gamma_2^*\right) + \Delta_3\left(\Gamma_1\Gamma_2^* + i\chi\Gamma_2^*\right)\right)\sigma_{bc} + ig\varepsilon\Omega^*\Gamma_2^*.$$

Решив это уравнение, получим следующие корни:

$$\sigma_{bc} = \frac{-\left(i\left(\Gamma_1g^2|\varepsilon|^2 + |\Omega|^2\Gamma_2^*\right) + \Delta_3\left(\Gamma_1\Gamma_2^* + i\chi\Gamma_2^*\right)\right) \pm \sqrt{D}}{2\Omega\chi g\varepsilon^+},$$

$$\text{где } D = \left(i\left(\Gamma_1g^2|\varepsilon|^2 + |\Omega|^2\Gamma_2^*\right) + \Delta_3\left(\Gamma_1\Gamma_2^* + i\chi\Gamma_2^*\right)\right)^2 - 4i\chi g^2|\varepsilon|^2|\Omega|^2\Gamma_2^*.$$

Разложим решение со знаком «+» в ряд по  $\varepsilon$ :

$$\sigma_{bc} \approx -\frac{g\varepsilon\Omega^*}{A} + \frac{g^3\Omega^*}{\Gamma_2^*A^2}\left(\Gamma_1 + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A}\right)|\varepsilon|^2\varepsilon, \quad \text{где } A = |\Omega|^2 - i\Delta_3(\Gamma_1 + i\chi). \quad (13)$$

На втором этапе опускаем производную пробного поля по времени ( $\dot{\varepsilon} \neq 0 \Rightarrow \dot{\sigma}_{bc} \neq 0$ ) и находим поляризацию на пробном переходе, то есть  $\sigma_{ba}$ . Выразим  $\sigma_{ba}$  из уравнения на  $\dot{\sigma}_{bc}$  системы (10):

$$\sigma_{ba} = \frac{\dot{\sigma}_{bc} + \left(\frac{g^2|\varepsilon|^2}{\Gamma_2^*} - i\Delta_3\right)\sigma_{bc}}{-i\Omega^* - \frac{\chi g\varepsilon^+\sigma_{bc}}{\Gamma_2^*}}.$$

Подставим найденное  $\sigma_{bc}$  из выражения (13) в выражение для  $\sigma_{ba}$ :

$$\sigma_{ba} = \left[ -\frac{g\Omega^*\dot{\varepsilon}}{A} + \frac{g^3\Omega^*}{\Gamma_2^*A^2}\left(\Gamma_1 + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A}\right)\frac{\partial(|\varepsilon|^2\varepsilon)}{\partial t} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g^3\Omega^*}{\Gamma_2^*A} \left( 1 + i\frac{\Delta_3}{A} \left( \Gamma_1 + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A} \right) \right) |\varepsilon|^2 \varepsilon + \frac{g^5\Omega^*}{(\Gamma_2^*A)^2} \left( \Gamma_1 + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A} \right) |\varepsilon|^4 \varepsilon + \\
& + i\frac{g\Omega^*\Delta_3}{A} \varepsilon \Big/ \left[ \frac{g^2\Omega^*\chi}{\Gamma_2^*A} |\varepsilon|^2 - \frac{g^4\chi\Omega^*}{(\Gamma_2^*A)^2} \left( \Gamma_1 + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A} \right) |\varepsilon|^4 - i\Omega^* \right].
\end{aligned}$$

Для того чтобы определить вклад эффектов, которые действуют в рассматриваемой системе, необходимо разложить  $\sigma_{ba}$  в ряд по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{ba} = & -\left( i\frac{g}{A} \right) \dot{\varepsilon} + i\frac{g^3}{\Gamma_2^*A^2} \left( \Gamma_1 + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A} \right) \frac{\partial(|\varepsilon|^2\varepsilon)}{\partial t} - \frac{g\Delta_3}{A} \varepsilon - \\
& -i\frac{g^3}{A\Gamma_2^*} \left( 1 + i\frac{\Delta_3}{A} \left\{ \Gamma_1 + i\chi + i\frac{\chi|\Omega|^2}{A} \right\} \right) |\varepsilon|^2 \varepsilon + \\
& + i\frac{g^5}{(\Gamma_2^*A)^2} \left( \Gamma_1 + i\chi + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A} - 2\frac{\Gamma_1\Delta_3\chi}{A} - 2i\frac{\Delta_3|\Omega|^2\chi^2}{A^2} - i\frac{\Delta_3\chi^2}{A} \right) |\varepsilon|^4 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Эволюция пробного импульса в среде описывается уравнением распространения, которое записывается через соответствующий коэффициент матрицы плотности:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon = igN\sigma_{ba}, \\
& \left( \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon = -\left( -\frac{g^2N}{A} \right) \dot{\varepsilon} - \frac{g^4N}{\Gamma_2^*A^2} \left( \Gamma_1 + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A} \right) \frac{\partial(|\varepsilon|^2\varepsilon)}{\partial t} - i\frac{g^2N\Delta_3}{A} \varepsilon + \\
& + \frac{g^4N}{A\Gamma_2^*} \left( 1 + i\frac{\Delta_3}{A} \left\{ \Gamma_1 + i\chi + i\frac{\chi|\Omega|^2}{A} \right\} \right) |\varepsilon|^2 \varepsilon - \\
& - \frac{g^6N}{(\Gamma_2^*A)^2} \left( \Gamma_1 + i\chi + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A} - 2\frac{\Gamma_1\Delta_3\chi}{A} - 2i\frac{\Delta_3|\Omega|^2\chi^2}{A^2} - i\frac{\Delta_3\chi^2}{A} \right) |\varepsilon|^4 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$v_g = \frac{c}{1 - \operatorname{Re} \left\{ \frac{g^2 N}{A} \right\}} =$$

$$= \frac{c}{1 + \frac{4g^4 N (\Delta_b^2 + \Delta_c \chi - \Delta_b (\Delta_c + \chi) - |\Omega|^2)}{(\Delta_b - \Delta_c)^2 (\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})^2 + 4(\Delta_b - \chi)^2} - 8(\Delta_b - \Delta_c)(\Delta_b - \chi)|\Omega|^2 + 4|\Omega|^4}}$$

групповая скорость,

$$u_R = \operatorname{Re} \left\{ \frac{g^4 N}{\Gamma_2^* A^2 c} \left( \Gamma_1 + i \frac{|\Omega|^2 \chi}{A} \right) \right\} - \text{ударная волна,}$$

$$u_I = \operatorname{Im} \left\{ \frac{g^4 N}{\Gamma_2^* A^2 c} \left( \Gamma_1 + i \frac{|\Omega|^2 \chi}{A} \right) \right\},$$

$$\alpha_R = \operatorname{Re} \left\{ \frac{g^2 N \Delta_3}{Ac} \right\} - \text{фазовый сдвиг, } \alpha_I = \operatorname{Im} \left\{ \frac{g^2 N \Delta_3}{Ac} \right\} - \text{линейные}$$

потери,

$$\alpha_2 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{g^4 N}{A \Gamma_2^* c} \left( 1 + i \frac{\Delta_3}{A} \left\{ \Gamma_1 + i \chi + i \frac{\chi |\Omega|^2}{A} \right\} \right) \right\} - \text{потери } \chi^{(3)},$$

$$\gamma_2 = \operatorname{Im} \left\{ \frac{g^4 N}{A \Gamma_2^* c} \left( 1 + i \frac{\Delta_3}{A} \left\{ \Gamma_1 + i \chi + i \frac{\chi |\Omega|^2}{A} \right\} \right) \right\} - \text{нелинейность } \chi^{(3)},$$

$$\alpha_4 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{g^6 N}{(\Gamma_2^* A)^2} \left( \Gamma_1 + i \chi + i \frac{|\Omega|^2 \chi}{A} - 2 \frac{\Gamma_1 \Delta_3 \chi}{A} - 2i \frac{\Delta_3 |\Omega|^2 \chi^2}{A^2} - i \frac{\Delta_3 \chi^2}{A} \right) \right\} -$$

потери  $\chi^{(5)}$ ,

$$\gamma_4 = \text{Im} \left\{ \frac{g^6 N}{(\Gamma_2^* A)^2} \left( \Gamma_1 + i\chi + i \frac{|\Omega|^2 \chi}{A} - 2 \frac{\Gamma_1 \Delta_3 \chi}{A} - 2i \frac{\Delta_3 |\Omega|^2 \chi^2}{A^2} - i \frac{\Delta_3 \chi^2}{A} \right) \right\} -$$

нелинейность  $\chi^{(5)}$ ,

$$\beta_2 = \frac{d}{d\omega_p} \beta_1 = \frac{d}{d\omega_p} \frac{1}{v_g} = -\frac{1}{v_g^2} \frac{d}{d(\omega_{ab} - \Delta_b)} v_g = \frac{1}{v_g^2} \frac{d}{d\Delta_b} v_g - \text{дисперсия},$$

$$v_2 = \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\Delta_b} \left( \frac{c}{\text{Im} \left\{ 1 - \frac{g^2 N}{A} \right\}} \right) - \text{спектральная фильтрация.}$$

$$\frac{\text{Im} \left\{ 1 - \frac{g^2 N}{A} \right\}^2}{\text{Im} \left\{ 1 - \frac{g^2 N}{A} \right\}}$$

Окончательно получаем уравнение распространения, которое соответствует уравнению Гинзбурга – Ландау пятого порядка [2]:

$$\left( \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - i\gamma_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon + i\gamma_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon = -(u_R + iu_I) \frac{\partial}{\partial t} (|\varepsilon|^2 \varepsilon) +$$

$$+ (\alpha_I - i\alpha_R) \varepsilon + \alpha_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon - \alpha_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon - v_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Для дальнейшего моделирования уравнения (14) выберем следующие значения параметров взаимодействия:

- параметры матрицы –  $n_0 = 1,45$ ;
- параметры атома  $Rb^{87}$ :
  - $\mu_{ab} = 3,58 \cdot 10^{-29} \text{ с} \cdot \text{м}$  – дипольный момент перехода,
  - $\lambda = 780,241 \text{ нм}$  – длина волны рабочего перехода.
  - $n = 2,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  – концентрация допированных атомов,
  - $\Gamma_{ab} = \Gamma_{ac} = 9 \cdot 10^9$  – времена релаксации соответствующих переходов;
- параметры пробного импульса и импульса накачки:
  - $I_p = 4,49 \text{ Вт/см}^2$  – интенсивность пробного импульса,

- $T_0 = 11,15$  пс – длительность пробного импульса,
- $I_c = 0,9$  МВт/см<sup>2</sup> – интенсивность импульса накачки,
- $\Delta_b = 0$  Гц – отстройки по частоте пробного импульса и импульса накачки.

На рис. 10, *a* представлены графики зависимости приведённых коэффициентов нелинейности и дисперсии ( $\gamma_2$  и  $\beta_2$ ) от частоты отстройки поля накачки от резонанса (графики функций  $\gamma_2$  и  $\beta_2$  отмасштабированы таким образом, чтобы их значения были одного порядка).

В представленной области значений наблюдаются значительные изменения дисперсионных и нелинейных свойств среды допированного волновода, и, выбирая соответствующие значения управляющих параметров системы, можно добиться компенсации одновременного воздействия этих эффектов на форму распространяющегося в такой среде оптического импульса и добиться формирования устойчивого солитонного образования. Однако наличие правой диссипативной части в уравнении (14) может приводить к затягиванию или невозможности образования устойчивых оптических формирований, то есть речь идет фактически об изучении возможности получения устойчивых (стабильных) диссипативных солитонов [10, 14]. На рис. 10, *б* представлены частотные зависимости для линейных и нелинейных (на  $\chi^{(3)}$ ) потерь в системе. Видим, что в выбранном диапазоне значений частоты отстройки эти величины могут иметь различные знаки, следовательно, можно добиться компенсации линейных потерь нелинейным усилением (либо наоборот), однако для этого необходимо соблюдение паритета между соответствующими характерными длинами взаимодействия [1], к рассмотрению которых мы переходим. Конечно, важен вклад и иных эффектов, присутствующих в УГЛ (14), но в последующем мы будем выбирать такие значения моделирования, чтобы соответствующие им характерные длины принимали максимально большие значения и влияние данных эффектов можно было свести к минимуму.

Вначале перейдем в бегущую систему координат  $T = t - z/v_g$ .

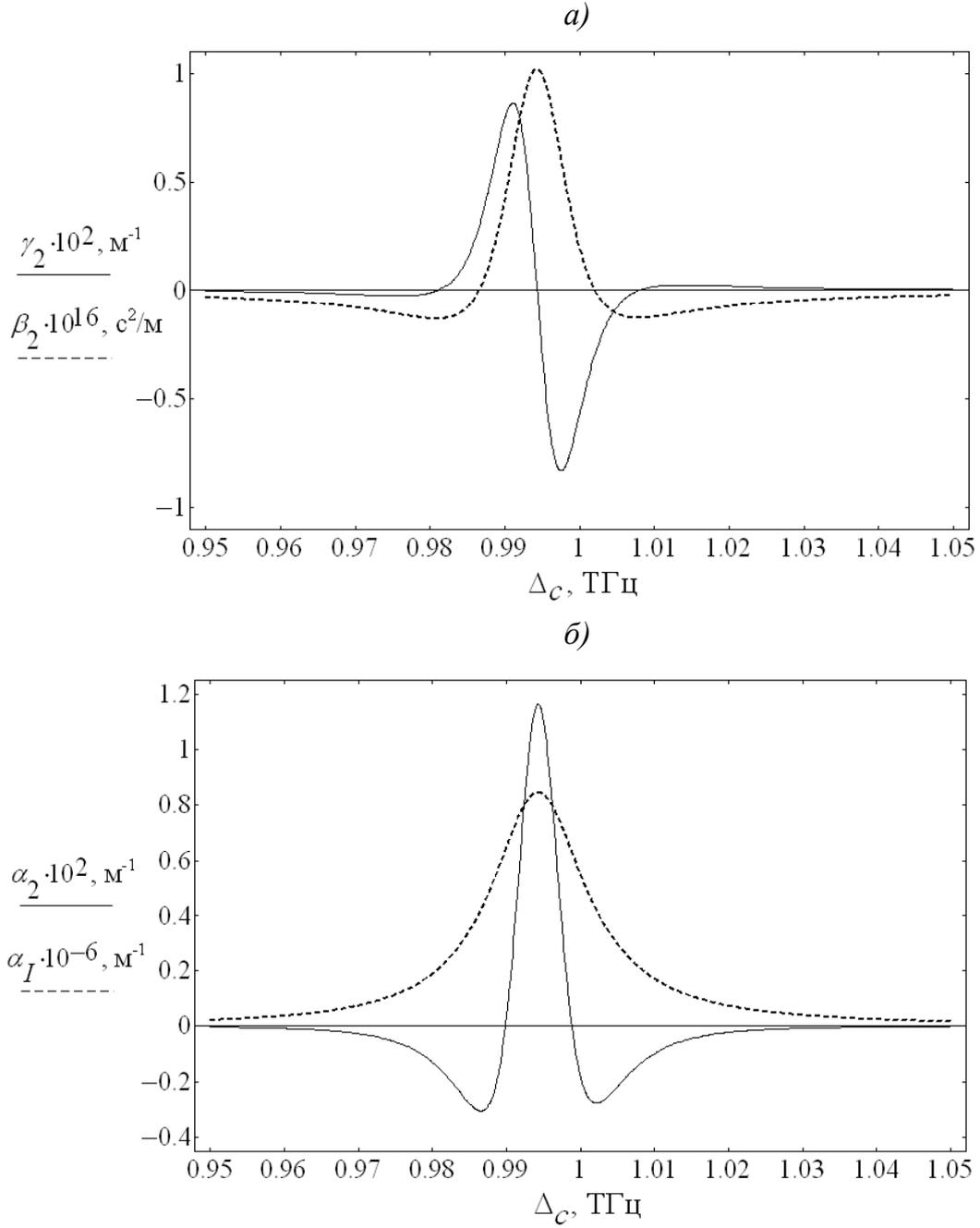


Рис. 10. Графики зависимости приведённых: а – коэффициентов нелинейности  $\gamma_2$  и дисперсии  $\beta_2$ ; б – коэффициентов линейных  $\alpha_1$  и нелинейных  $\alpha_2$  потерь в зависимости от отстройки частоты накачки  $\Delta_c$

$$\frac{\partial}{\partial z} \varepsilon + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial T^2} - i\gamma_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon = -i\gamma_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon - (u_R + iu_I) \frac{\partial}{\partial T} (|\varepsilon|^2 \varepsilon) +$$

$$+ (\alpha_I - i\alpha_R) \varepsilon + \alpha_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon - \alpha_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon - \nu_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial T^2}.$$

Сделаем замену переменных:  $U = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\varepsilon_H|^2}}$ ,  $\xi = \frac{z}{L_D}$ ,  $\tau = \frac{T}{T_0}$ ,

где  $L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$ .

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial}{\partial \xi} U - \frac{1}{2} \text{Sgn}(\beta_2) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{L_D}{L_{NL}} |U|^2 U = \\ & = \frac{L_D}{L_{NL}^{(5)}} |U|^4 U - \left( i \frac{L_D}{L_{sw}} - \frac{L_D}{L_{sw}^I} \right) \frac{\partial}{\partial T} (|U|^2 U) + \left( i \frac{L_D}{L_{am}} + \frac{L_D}{L_{ami}} \right) U + \\ & + i \frac{L_D}{L_{am3}} |U|^2 U - i \frac{L_D}{L_{am5}} |U|^4 U - i \frac{L_D}{L_{DG}} \text{Sgn}(v_2) \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}, \end{aligned}$$

где  $L_{sw} = \frac{T_0}{|\varepsilon_H|^2 u_R}$ ,  $L_{sw}^I = \frac{T_0}{|\varepsilon_H|^2 u_I}$ ,  $L_{am} = \frac{1}{\alpha_I}$ ,  $L_{ami} = \frac{1}{\alpha_R}$ ,  $L_{am3} = \frac{1}{\alpha_2 |\varepsilon_H|^2}$ ,

$$L_{am5} = \frac{1}{\alpha_4 |\varepsilon_H|^4}, \quad L_{DG} = \frac{T_0^2}{|v_2|}.$$

Сделаем замену  $u = NU$ , где  $N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}$ , получим

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial}{\partial \xi} u - \frac{1}{2} \text{Sgn}(\beta_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = \nu |u|^4 u - (i\gamma - \gamma_1) \frac{\partial}{\partial T} (|u|^2 u) + (i\delta + \delta_1) u + \\ & + i\varepsilon |u|^2 u - i\mu |u|^4 u - i\beta \text{Sgn}(v_2) \frac{\partial^2 u}{\partial T^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\nu = \frac{L_{NL}^2}{L_{NL}^{(5)} L_D}$ ,  $\gamma = \frac{L_{NL}}{L_{yD}}$ ,  $\gamma_1 = \frac{L_{NL}}{L_{yD}^I}$ ,  $\delta = \frac{L_D}{L_{\Pi}}$ ,  $\delta_1 = \frac{L_D}{L_{\Pi}^R}$ ,  $\varepsilon_1 = \frac{L_{NL}}{L_{\Pi H}}$ ,

$$\mu = \frac{L_{NL}^2}{L_{\Pi 5} L_D}, \quad \beta = \frac{L_D}{L_D^r}, \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma_2 |\varepsilon_H|^2}, \quad L_{NL}^{(5)} = \frac{1}{\gamma_4 |\varepsilon_H|^4}.$$

Для предварительного обеспечения стабильности рассматриваемых далее решений уравнения (15) мы выбрали такие значения параметров, чтобы при значении отстройки поля накачки  $\Delta_c = 1,02 \cdot 10^{12}$  Гц наблюдалась полная компенсация нелинейных и дисперсионных эффектов при равенстве соответствующих длин, то есть  $L_{NL} = L_D$  в точке А на рис. 11, а. Одновременно в данной точке будут совпадать и длина линейного поглощения и длина нелинейного усиления, то есть  $L_{\Pi} = L_{\Pi\Pi}$  в точке А на рис. 11, б, что является дополнительным фактором для устойчивости рассматриваемых решений.

### 1.3.2. Метод моментов

Для изучения (15) будем использовать Метод моментов, суть которого заключается в приведении полной задачи распространения с бесконечным числом степеней свободы к задаче распространения с конечным набором параметров импульса [19]. Для решения, имеющего единственный максимум и не имеющего топологической структуры в поперечном сечении, параметры импульса будут следующими: пиковая амплитуда, ширина импульса, положение центра-массы и параметры фазы [10]. Для произвольной ограниченной области можно ввести два интеграла, а именно, энергия  $Q$  и импульс  $M$  :

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 d\tau, \quad M = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (uu_{\tau}^* - u^* u_{\tau}) d\tau, \quad (16)$$

и моменты высших порядков:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau |u|^2 d\tau, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |u|^2 d\tau, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau (u^* u_{\tau} - uu_{\tau}^*) d\tau. \quad (17)$$

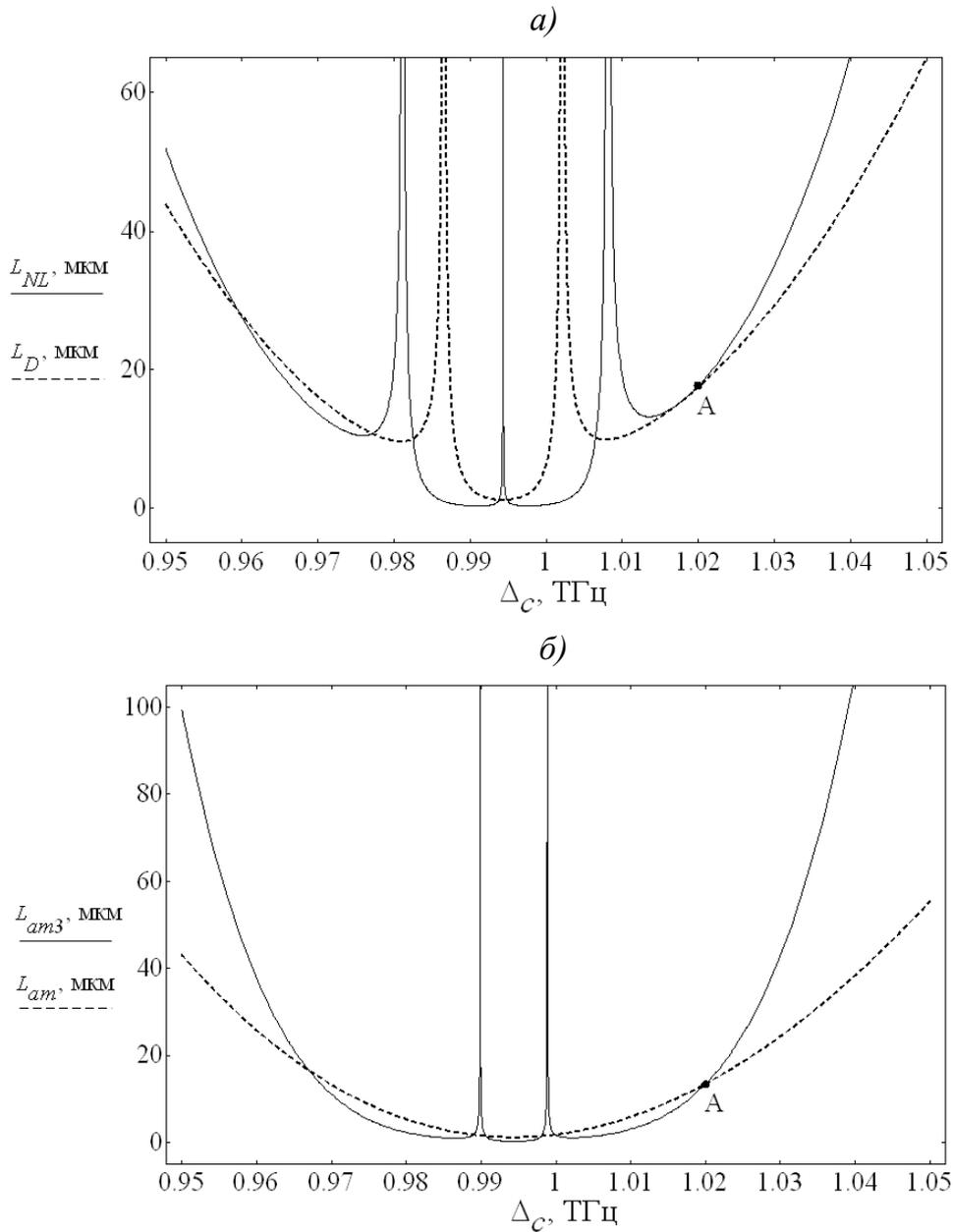


Рис. 11. Зависимости длин: а – нелинейности  $L_{NL}$  и дисперсии  $L_D$ ; б – нелинейных потерь  $L_{am3}$  и линейных потерь  $L_{am}$  от отстройки частоты накачки  $\Delta_c$

В общем случае число моментов высших порядков равно бесконечности. В зависимости от сложности уменьшенной модели их число будет ограничено. Используя уравнение (15), можно получить уравнения распространения для моментов:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{d\xi} &= i \int_{-\infty}^{\infty} (uR^* - u^*R) d\tau, \quad \frac{dM}{d\xi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} (u_{\tau}R^* + u_{\tau}^*R) d\tau, \\
\frac{dI_1}{d\xi} &= -i \operatorname{sgn}(\beta_2)M + i \int_{-\infty}^{\infty} \tau (uR^* - u^*R) d\tau, \\
\frac{dI_2}{d\xi} &= i \operatorname{sgn}(\beta_2)I_3 + i \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 (uR^* - u^*R) d\tau, \quad (18) \\
\frac{dI_3}{d\xi} &= i \int_{-\infty}^{\infty} \left( -2 \operatorname{sgn}(\beta_2) |u_{\tau}|^2 - |u|^4 \right) d\tau + 2i \int_{-\infty}^{\infty} \tau (u_{\tau}R^* + u_{\tau}^*R) d\tau + \\
&\quad + i \int_{-\infty}^{\infty} (uR^* + u^*R) d\tau.
\end{aligned}$$

Для того чтобы упростить анализ системы, будем рассматривать подстановки, имеющие только четыре параметра:  $A(\xi)$  – амплитуда импульса,  $\frac{1}{B(\xi)}$  – ширина импульса,  $\phi(\xi)$  – фаза импульса,  $D(\xi)$  или  $C(\xi)$  – линейный или нелинейный набег фазы соответственно. Положение центра-массы считаем равным нулю.

Выберем в качестве пробного солитонного решения уравнения (15) подстановку вида

$$u(\xi, \tau) = A(\xi) \operatorname{sech}(B(\xi) \tau) \exp \left( i(\phi(\xi) + C(\xi)\tau^2) \right), \quad (19)$$

где  $A(\xi)$  – нормированная амплитуда импульса,  $\frac{1}{B(\xi)}$  – ширина импульса,  $\phi(\xi)$  – фаза импульса,  $C(\xi)$  – нелинейный набег фазы импульса.

Используя (16) – (18), получим следующую систему дифференциальных уравнений на варьируемые переменные подстановки (19):

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{d\xi} = F_1 &= 2\delta Q + \frac{2}{3}\varepsilon_1 B Q^2 - \frac{4}{15}\mu B^2 Q^3 + \\
&+ \left( \frac{2}{3} Q B^2 \beta + \frac{2\pi^2 C^2 Q \beta}{3B^2} \right) \operatorname{sgn}(v_2), \\
\frac{dC}{d\xi} = F_2 &= \frac{8\nu B^4 Q^2}{15\pi^2} - \frac{B^3 Q}{\pi^2} + \left( \frac{4}{\pi^2} \beta B^2 C + \frac{4}{3} \beta B^2 C \right) \operatorname{sgn}(v_2) + \\
&+ \left( -\frac{2}{\pi^2} B^4 + 2C^2 \right) \operatorname{sgn}(\beta_2), \\
\frac{dB}{d\xi} = F_3 &= -\frac{\mu B^3 Q^2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \varepsilon_1 B^2 Q + 2BC \operatorname{sgn}(\beta_2) + \\
&+ \left( \frac{8\beta B^3}{\pi^2} - \frac{16}{15B} \beta \pi^2 C^2 \right) \operatorname{sgn}(v_2).
\end{aligned} \tag{20}$$

### 1.3.3. Солитонные решения и их стабильность

Стационарные решения системы уравнений (20) находятся из условия  $F_j = 0$ , где  $j = 1, 2, 3$ . Стабильность стационарных решений определяется из анализа собственных значений матрицы Якоби [5, 7]. Если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ , где  $j = 1, 2, 3$ , то в этом случае стационарное решение будет стабильным, если же хотя бы у одного собственного значения матрицы Якоби действительная часть положительна, то в этом случае стационарное решение будет нестабильным.

На рис. 12 показана параметрическая плоскость (плотность допирования  $n$ , частота отстройки поля накачки от резонанса  $\Delta_c$ ) с нанесенными областями стабильности и существования предельных циклов уравнения Гинзбурга – Ландау (15) с учетом подстановки (19). В данном случае область стабильности стационарных решений представлена на рис. 12, *a* (область 1). Таким образом, варьируя, с одной стороны, концентрацию допирования на стадии изготовления допированного волновода и, с другой – частоту отстройки поля накачки

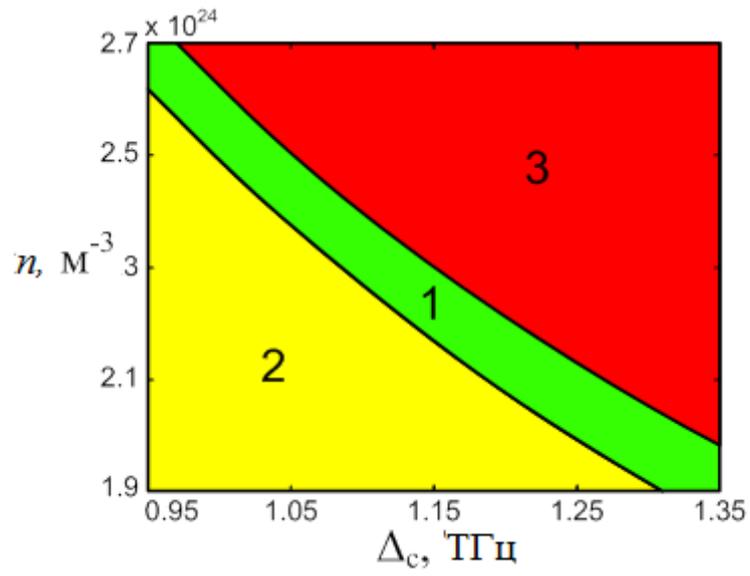
при осуществлении эксперимента, можно добиться существования стабильных солитонов с учетом линейного/нелинейного поглощения/усиления при осуществлении  $\Lambda$ -схемы взаимодействия в оптически-плотной среде. Чтобы сформировать экспериментально стабильный солитон, необходимо выбрать точку из области 1 со своей концентрацией и отстройкой и подать на вход такой среды солитоноподобный импульс с характеристиками, соответствующими той же точке, но уже на рис. 11.

Характер устойчивости полученных решений в области 1 соответствует устойчивому фокусу, так как  $\text{Re } \lambda_{1,2,3} < 0$  и  $\text{Im } \lambda_{1,2} \neq 0$  [7].

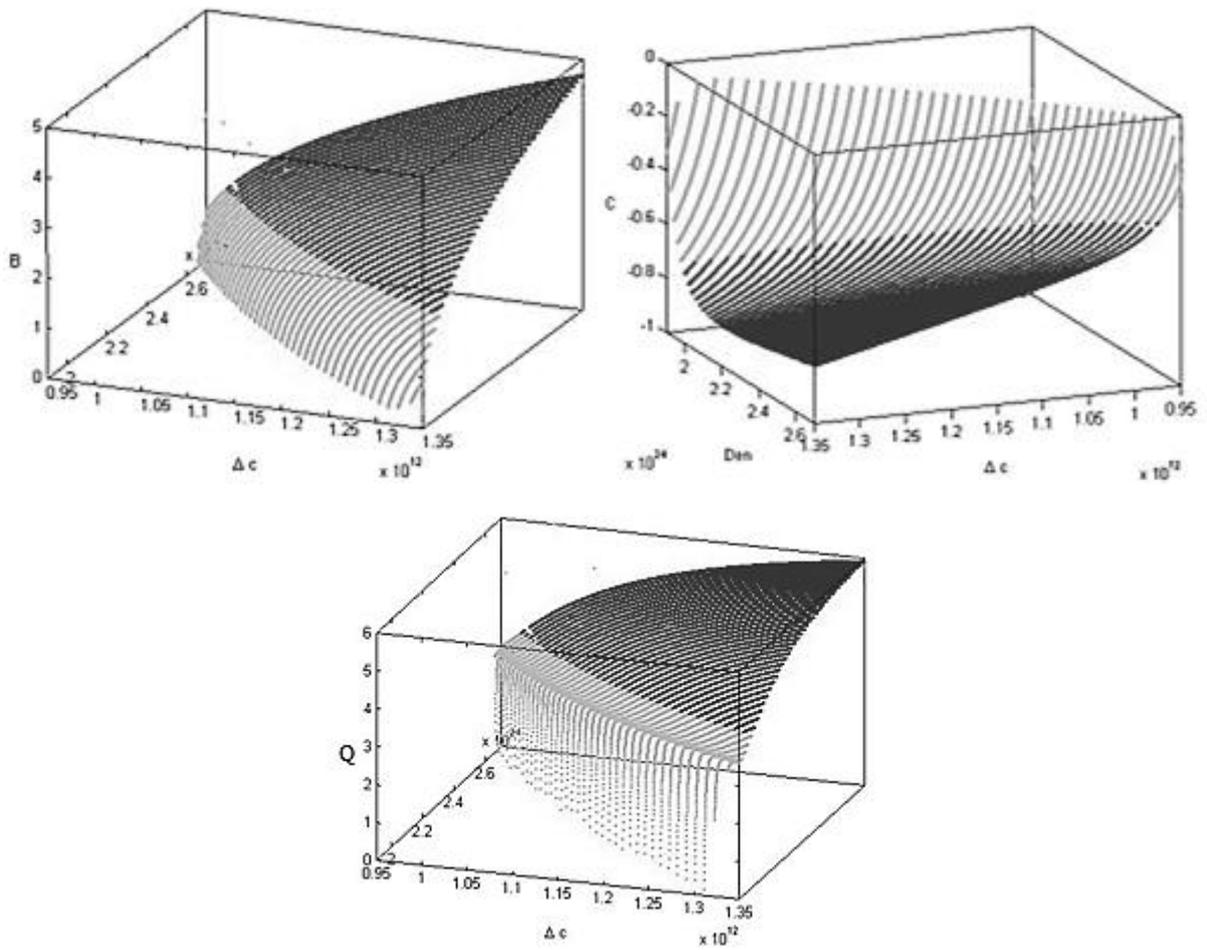
Вид параметрических кривых вблизи устойчивой точки с выбранными выше значениями параметров для приведённых варьируемых величин (зависимость энергии  $Q$ , ширины импульса  $\frac{1}{B}$  и нелинейного набега фазы  $C$  от приведенного расстояния) представлен на рис. 13.

На рис. 12, *a* в области 3 представлен диапазон существования устойчивых предельных циклов. Так как в системе уравнений (20) три неизвестных, следовательно, матрица Якоби будет размерами  $3 \times 3$ . Характеристическое уравнение матрицы Якоби – кубическое. Поэтому два собственных значения Якобиана комплексно-сопряжённые  $\lambda_1 = \lambda_2^*$ , а третье  $\lambda_3$  действительное или все три собственных значения действительные.

В том случае, когда при изменении управляющего параметра (или параметров) в системе происходит смена стабильности стационарного решения, то возможно появление предельного цикла. Если пара комплексно-сопряжённых значений переходит через мнимую ось, то есть  $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$ , с ненулевой скоростью и при ненулевых мнимых частях  $\text{Im}(\lambda_1) = \text{Im}(\lambda_2) \neq 0$ , а также  $\text{Re}(\lambda_3) \neq 0$ , то в системе происходит бифуркация Андронова – Хопфа [7]. В зависимости от того, какого типа бифуркация Андронова – Хопфа – суперкритическая или субкритическая, устойчивый предельный цикл будет существовать либо в устойчивой, либо в неустойчивой области [4].



a)



б)

Рис. 12. Регионы стабильности и нестабильности стационарных решений

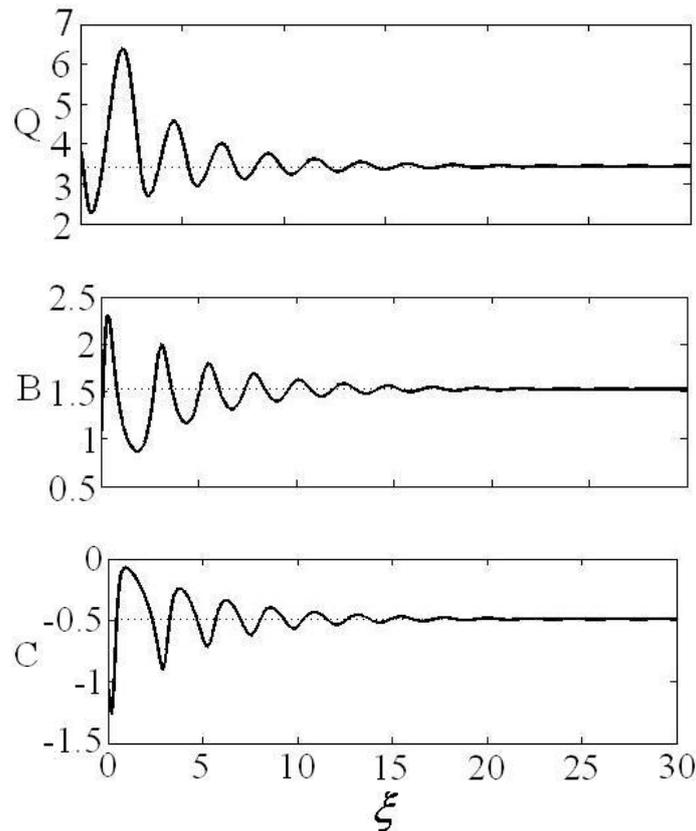


Рис. 13. Поведение параметров импульса

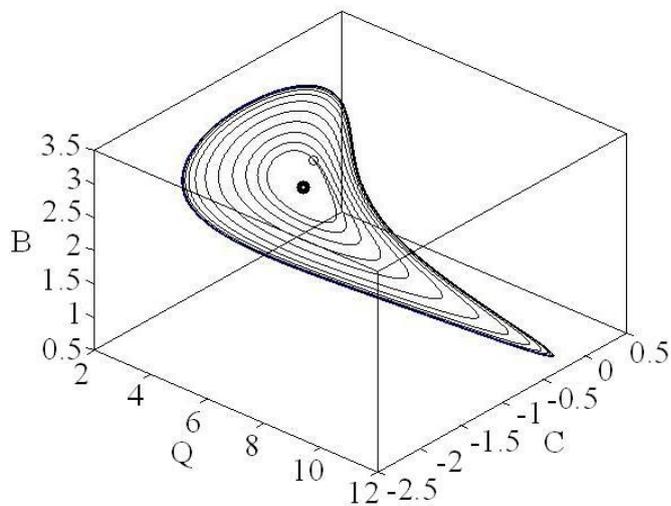
Период осцилляций предельного цикла обратно пропорционален  $\text{Im}(\lambda_1)$ , поэтому границы существования предельных циклов можно определить как  $\text{Im}(\lambda_1) = 0$ .

Устойчивость предельного цикла определяют с помощью анализа мультипликаторов периодического решения или собственных значений матрицы монодромии [3, 6]. Мультипликаторы определим из следующего уравнения:

$\text{Det}[M - \rho E] = 0$ , где  $M = e^{J(T)T}$  – матрица монодромии,  $J$  – Якобиан,  $T$  – период предельного цикла,  $\rho_i$  – мультипликаторы,  $E$  – единичная матрица.

На рис. 14 представлен трёхмерный график фазовых траекторий для пульсирующего солитона со следующими выбранными в задаче параметрами и при  $n = 2,31 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$  и  $\Delta_c = 1,16 \text{ ТГц}$ .

Несмотря на то что физической основой рассмотренных в данной главе динамических структур являются специфические атомно-



*Рис. 14. Эволюция параметров пульсирующего солитона*

оптические системы, использованные математические и методологические подходы могут быть распространены на целый ряд динамических систем в физике, экономике, теории управления. Общая их черта – наличие одной выделенной «пространственной» координаты, которую можно рассматривать как направление рас-

пространения сигнала. При этом влияние характеристик среды вдоль остальных двух координат считается пренебрежимо малым. Однако при наличии определённых условий такое приближение нельзя считать вполне корректным, а учёт анизотропности среды может приводить к целому ряду новых интересных эффектов. Их рассмотрению посвящена следующая глава.

## ГЛАВА 2

### ТРЕХМЕРНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ

Изучение процессов формирования и распространения оптических локализованных пространственных образований в различных средах [31] – одна из важных задач современной прикладной атомной оптики, которая связана с широким спектром их практического применения, в частности, в задачах передачи и обработки информации [42]. Наибольший интерес здесь вызывает особый класс оптических топологических структур – оптические вихри [41], центральный провал интенсивности которых надежно регистрируется в эксперименте даже при появлении сильного дифракционного расплывания оптического пучка [42].

Возможность наблюдения вихревых структур в оптике обусловлена возникновением точек особого вида на волновом фронте оптического пучка, которые называются винтовыми дислокациями. Интенсивность оптического поля в самой такой точке обнуляется, а фаза не определена [32]. Однако при обходе вокруг винтовой дислокации фаза меняется на  $2\pi$ , а топология волнового фронта представляет собой винтовую структуру, аналогичную изображенной на рис. 15.

Поскольку направление вектора Умова – Пойнтинга перпендикулярно в каждой точке к волновой поверхности, энергетические потоки будут испытывать завихрения непосредственно вблизи точки винтовой дислокации. Существует возможность получения винтовых дислокаций и более высокого порядка, отличающихся скоростью вращения фазы, которая при обходе вокруг особой точки может изменяться на  $2\pi S$ , где  $S$  принято называть топологическим зарядом.

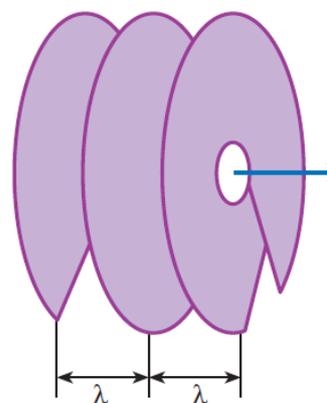


Рис. 15. Структура волновых фронтов при наличии винтовой дислокации

## 2.1. Основные сведения о вихревых оптических структурах

### 2.1.1. Распределение энергетических потоков

Математически амплитуда оптического вихря может быть описана с помощью следующего соотношения:

$$E = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{r}{R} \right)^S \exp \left[ -\frac{r^2}{2R^2} + i (Cr^2 + S\theta) \right], \quad (21)$$

где  $A$ ,  $R$ ,  $C$  – амплитуда, пространственная ширина и кривизна волнового фронта оптического пучка. Параметр  $S$  определяет топологический заряд вихревого солитона,  $r$  и  $\theta$  – цилиндрические координаты.

В зависимости от величины топологического заряда радиальное распределение энергетических потоков в вихревой оптической структуре будет сильно изменяться. При этом если речь идет о получении условий, при которых оптический вихрь сохраняет свою форму в процессе его распространения в среде, такое распределение энергетических потоков всецело подчиняется условиям баланса эффектов усиления и диссипации в системе [43]. В частности, устойчивость вихревого солитона с  $S = 0$  (фундаментальный солитон) определяется самосогласованностью потоков энергии, изображенных, как на рис. 16.

Так, для фундаментального солитона потоки направлены радиально (к центру во внутренней ячейке и от центра во внешней). Тогда как в случае вихревого солитона на плоскости энергетических потоков имеется три предельных цикла, энергетические потоки между которыми раскручиваются и скручиваются так, как показано на рис. 16, б. При этом положение соответствующих предельных циклов задается величинами радиусов, для которых наблюдаются экстремумы радиального распределения фазы соответствующих пучков (рис. 16, в, г).

Вихревые солитоны с большим топологическим зарядом характеризуются более сложным устройством энергетических потоков внутри оптической структуры. Кроме того, имеются и так называемые “возбужденные состояния” представленных оптических структур, которые в том числе могут быть сформированы и промоделированы при использовании бинарных дифракционных оптических элементов [30].

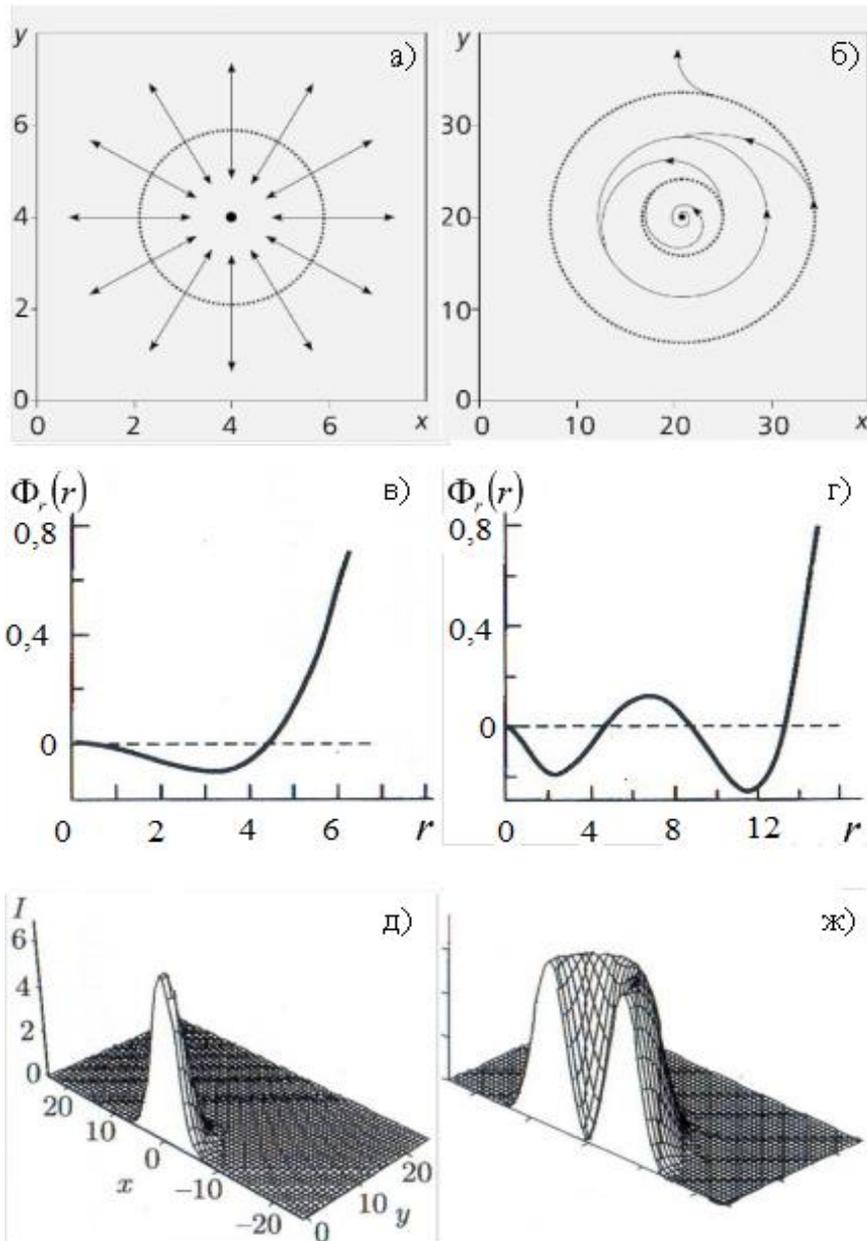


Рис. 16. Поперечное распределение потоков энергии для фундаментального (а) и вихревого (б) солитонов с  $S=1$  (направление потоков показано стрелками), и радиальные зависимости фазы для фундаментального (в) и вихревого (г) солитонов с  $S=1$ , а также соответствующие им пространственные распределения интенсивности (д, ж)

### 2.1.2. Определение условий стабильности вихрей

Эффекты распространения представленных оптических структур в лазерных средах могут быть описаны с помощью одного или нескольких связанных уравнений Гинзбурга – Ландау пятого порядка с учетом насыщающейся нелинейности [22].

Однако имеется ряд особенностей, которые должны быть учтены для получения солитонных решений в отношении сложных топологических структур. В частности, для самоподдержания в процессе распространения формы вихревых солитонов (21) помимо баланса нелинейно-дисперсионных и диссипативных эффектов [1] требуется также выполнение дополнительных условий, связанных, например, с присутствием оптической диффузии. В данном случае нелинейное уравнение распространения примет следующий вид:

$$i \frac{\partial}{\partial \xi} u - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) + |u|^2 u - \nu |u|^4 u =$$

$$= -i \delta u - i \phi |u|^2 u - i \mu |u|^4 u + i \nu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + i \beta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right), \quad (22)$$

где слагаемое с  $\beta$  описывает эффективную оптическую диффузию в плоскости, перпендикулярной направлению распространения оптической структуры. В частности, данное слагаемое появляется в модели лазера с большим аспектным соотношением, которая описывается с помощью комплексных уравнений Свифта – Хоэнберга [34]. Параметр оптической диффузии может быть представлен с помощью следующего соотношения:

$$\beta = -\tau_p \tau_c \Delta (\tau_p + \tau_c)^{-2}, \quad (23)$$

где  $\tau_p$  есть время затухания свободной поляризации,  $\tau_c$  – время жизни фотона и  $\Delta$  – частота отстройки от атомно-оптического резонанса. Таким образом, знак оптической диффузии определяется знаком параметра  $\Delta$ . При этом для стабилизации фундаментальных оптических солитонов наличие данного слагаемого в уравнении Гинзбурга – Ландау не требуется, если же речь идет о вихревых структурах, то необходимое условие –  $\beta > 0$  [36].

Однако центральной проблемой в случае использования уравнения (22) для описания распространения оптических вихрей является тот факт, что слагаемое с  $\beta$  не может быть получено при его выводе из первопринципов, а добавляется в уравнение искусственным путем. В таком случае возникают очевидные сложности с описанием схемы лазерного эксперимента, которая бы удовлетворяла всем условиям уравнения (22). Одним из решений данной проблемы может быть до-

бавление поперечного периодического потенциала в уравнение (22) при учете  $\beta = 0$  (модель без диффузии), что приводит к уравнению распространения в следующей форме:

$$i \frac{\partial}{\partial \xi} u + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) + |u|^2 u - \nu |u|^4 u = -i\delta u - i\phi |u|^2 u - i\mu |u|^4 u + V(x, y). \quad (24)$$

Периодический потенциал  $V$  представляет собой модуляцию показателя преломления среды и может быть реализован с помощью оптических решеток. В частности, данный параметр можно представить в форме

$$V(x, y) = p[\cos(2x) + \cos(2y)], \quad p > 0, \quad (25)$$

где  $p$  пропорционален амплитуде модуляции решетки [44].

Стабильные вихри в модели с периодическим потенциалом (25) были представлены в теоретической работе [33] как совокупность сложных оптических структур, построенных из нескольких отдельных локальных пиков оптического излучения. Топологический заряд в данных образованиях обеспечивается за счет сдвигов фаз на  $\pi/2$  между соседними локальными пиками, что соответствует общему изменению фазы на  $2\pi$  за полный обход, как это и должно быть в случае вихря с топологическим зарядом  $S = 1$ .

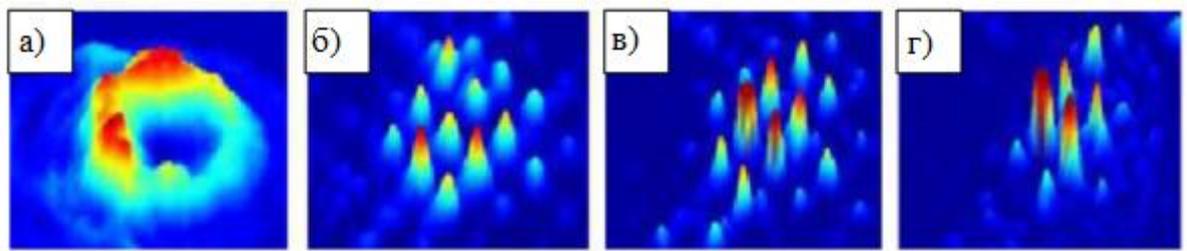
Экспериментально данные устойчивые вихри с  $S = 1$  были созданы при использовании фоторефрактивных кристаллов с фотоиндуцированной решеткой [38]. При этом разработанные в [38] технологии оптической записи решеток различного типа (различной периодичности) позволяют экспериментально наблюдать большое количество разнообразных картин распределения оптического поля. Дополнительная возможность управления топологией образующихся оптических структур связана с изменением величины амплитуды знакопеременных электрических синусоидальных полей (см. (25)), которые прикладываются к фоторефрактивной решетке и позволяют получать решетки оптических вихрей аналогично представленным на рис. 17.

Отдельного внимания заслуживает вопрос определения условий стабильности при распространении одиночных осесимметричных

вихрей "кратерообразной" формы, которые должны быть сформированы в единственной ячейке периодического потенциала. Как известно из работ [36], при отсутствии потенциала оптические вихри могут быть стабилизированы только с помощью оптической диффузии при условии  $\beta > 0$ . В противном случае азимутальные возмущения быстро разрушают устойчивое состояние оптического вихря и приводят его к совокупности отдельных (не стабилизированных во времени) фрагментов. Несмотря на ожидания, получить одиночные осесимметричные вихри при использовании периодических оптических решеток, экспериментально наблюдать их в подобных системах не удавалось. Альтернативным подходом может быть использование также осесимметричного параболического потенциала вида

$$V(x, y) = r^2 \Omega^2 / 2, \quad (26)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\Omega^2$  или  $p$  – параметр, пропорциональный амплитуде модуляции решетки при ее записи в оптической среде лазерными методами. Экспериментально эффективный потенциал вида (26) может быть реализован посредством простой оптической собирающей линзы, интегрированной в резонатор.



*Рис. 17. Экспериментальное наблюдение распространения оптического вихря в среде с фотоиндуцированной решеткой: а – вихревой пучок на выходе решетки при нулевом значении поля смещения и б – г – ансамбль вихревых пучков на выходе при значениях полей смещения 600, 1200 и 3000 В/см соответственно*

В общем случае вихревые пучки могут быть удобно выражены в виде линейных комбинаций мод Лаггера – Гаусса  $LG_{p,S}$ , которые имеют цилиндрическую симметрию и характеризуются двумя целыми индексами  $p$  и  $S$ , сохраняющимися в процессе распространения. В

данном случае распределение поля в поперечном сечении пучка пропорционально мультипликативной функции вида  $L_p^S(\xi)\exp(-\xi/2)$ , где

$$L_p^S(\xi) = e^\xi \frac{\xi^{-S} d^p}{p! d\xi^p} (e^{-\xi} \xi^{p+S})$$

является обобщенным полиномом Лаггера, а  $\xi$  – радиальная переменная. Здесь  $S$  снова соответствует топологическому заряду структуры, тогда как параметр  $p$  определяет количество радиальных узловых точек в структуре [23]. Одним из способов экспериментального получения вихревых пучков является метод непосредственного управления модами Лаггера – Гаусса в лазерном резонаторе, содержащем спиральную фазовую пластинку (СФП) [41]. На рис. 18 представлена схема такого лазерного резонатора, в котором заднее зеркало заменяется отражающей спиральной фазовой пластинкой. После отражения от этой пластинки фаза волнового фронта изменяется на  $\exp(2iS\theta)$ , где  $S$  является топологическим зарядом. Таким образом, винтовая мода с фазой  $\exp(-iS\theta)$  преобразуется в моду с фазой  $\exp(+iS\theta)$  после отражения от пластинки.

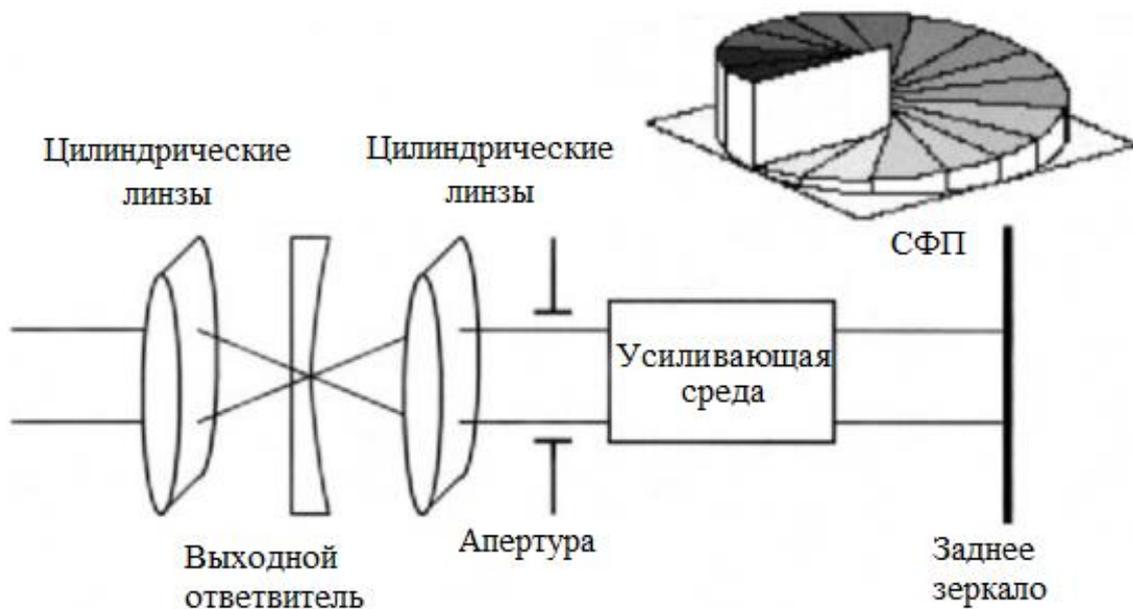


Рис. 18. Схема лазерного резонатора для формирования спиральных пучков

Расположенная внутри резонатора цилиндрическая линза фокусируется на обратном пучке и инвертирует фазу луча снова к значе-

нию  $\exp(-iS\theta)$  при повторном проходе, что необходимо для самосогласованности работы схемы. Пучок, выходящий из резонатора, проходит через другую внешнюю цилиндрическую линзу, после чего его фаза приобретает винтовую форму, а распределение поля имеет вид

$$E(r, \theta) = E_0 \zeta^{S/2} L_0^S(\zeta) \exp[-\zeta/2] \exp[-iS\theta],$$

где  $r$  и  $\theta$  – цилиндрические координаты,  $E_0$  – амплитуда поля,  $\zeta = 2r^2/w^2$ ,  $w$  – размер пятна гауссова пучка,  $L_0^S = 1$ . В случае  $S = 1$  распределение поля (27) редуцирует к виду (21). При этом параметрами вихревого пучка на выходе из лазерного резонатора можно управлять путем изменения параметров спиральной пластинки. В работе [41] для реализации представленного метода в качестве накачки был использован  $\text{CO}_2$  лазер, а спиральная фазовая пластинка изготавливалась на кремниевом основании, которое содержало 32 сегмента с разным уровнем изменения фазы, в совокупности формируя топологический заряд  $S = 1$  у выходящего пучка.

На рис. 19, а, б представлено распределение интенсивности сформированного таким образом вихревого пучка в дальней зоне, а также сравнение экспериментальной формы его поперечного сечения с расчетной соответственно. Получаемые искажения формы ассоциированы в основном с недостатками при изготовлении спиральных пластинок.

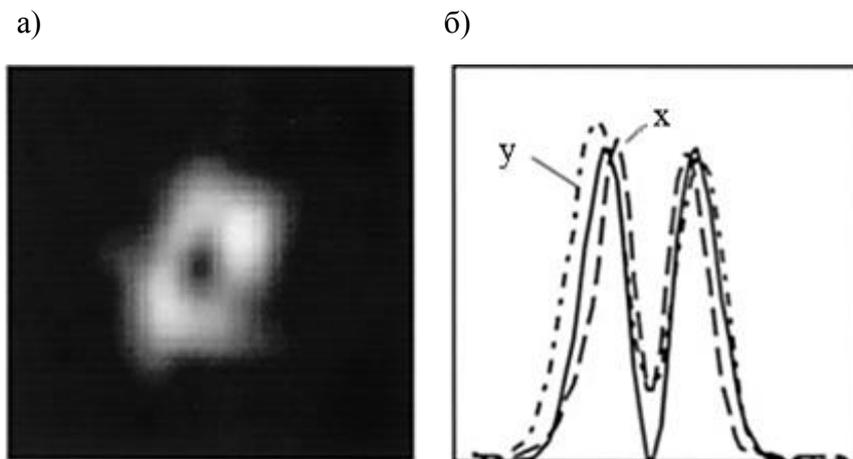


Рис. 19. Распределение интенсивности вихревого пучка в дальней зоне: а – экспериментальное распределение интенсивности; б – предсказанное (сплошная линия) и экспериментальное (по оси  $x$  – штриховая и по оси  $y$  – штрихпунктирная линии) распределения интенсивности в поперечных плоскостях

### 2.1.3. Консервативные трехмерные оптические солитоны – оптические пули

Одни из наиболее сложных объектов для наблюдения в эксперименте – так называемые оптические пули – полностью трехмерные солитоны, локализованные за счет нелинейности среды как в пространстве, так и во времени. Такие солитоны формируются, когда нелинейное самовоздействие в среде одновременно компенсирует дифракционное и дисперсионное расплывание локализованного волнового пакета. Предсказанные более двадцати лет назад оптические пули не наблюдались в эксперименте вплоть до недавнего времени в основном благодаря их неустойчивости в некоторых средах, включая кубичные, а также из-за трудностей в подборе материала с достаточно низкими оптическими потерями, где дифракционная и дисперсионная длины были бы сравнимы уже для субпикосекундных импульсов.

Один из важных вопросов – обобщение нелинейной теории волн на практически важный случай микроструктурированных сред с неоднородным профилем показателя преломления и/или нелинейности. В ней рассматриваются динамика формирования, свойства и устойчивость одномерных и двумерных пространственных солитонов, а также пространственно-временных пульс в периодических профилях показателя преломления и более сложных оптических решетках, индуцированных недифрагирующими пучками.

Для описания распространения волновых пакетов в среде с фокусирующей нелинейностью, аномальной дисперсией групповых скоростей и периодической модуляцией показателя преломления можно воспользоваться нелинейным уравнением Шредингера для безразмерной комплексной амплитуды поля  $q$ :

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - q|q|^2 - pR(\eta, \zeta)q. \quad (27)$$

Здесь нормировки амплитуды поля  $q$ , поперечных и продольной координат, а также глубины решетки  $p$ .

Среди интегралов уравнения, т.е. величин, сохраняющихся в процессе распространения, приводят полную энергию  $U$  волнового пакета и его гамильтониан  $H$ :

$$U = \iiint_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta d\zeta d\tau, \\ H = \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left( \left| \frac{\partial q}{\partial \eta} \right|^2 + \left| \frac{\partial q}{\partial \zeta} \right|^2 + \left| \frac{\partial q}{\partial \tau} \right|^2 - |q|^4 - 2pR|q|^2 \right) d\eta d\zeta d\tau. \quad (28)$$

Солитонные решения уравнения можно представить в виде

$$q = w(\eta, \zeta, \tau) \exp(ib\xi). \quad (29)$$

Численное моделирование (27) с подстановкой (29) приводит к эволюции, как на рис. 20.

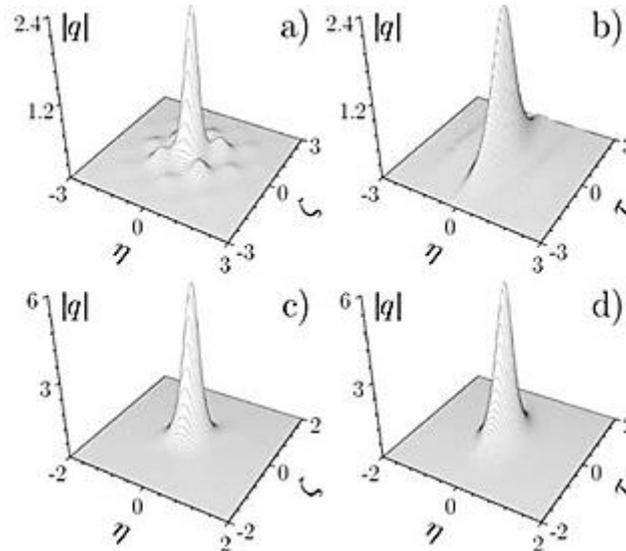


Рис. 20. Поперечные сечения профилей оптических пуль при  $\tau = 0$  (a), (c) и при  $\zeta = 0$  (b), (d). Панели (a), (b) соответствуют  $U = 1,60$ ,  $b = 5,965$ , в то время как панели (c), (d) –  $U = 2,17$ ,  $b = 10,702$ . Во всех случаях  $p = 20$

Изображения на рис. 20 соответствуют типичному профилю оптической пули с малой амплитудой, постоянная распространения которой близка к отсечке, как показано на рис. 20, a и b. Видно, что солитон занимает несколько каналов решетки и существенно более вытянут в направлении оси  $\tau$ , чем вдоль пространственной оси (например  $\zeta$ ). Типичный солитон с достаточно высокой амплитудой, который сосредоточен практически в одном канале решетки, показан на рис. 20, c и d. Постоянная распространения такого солитона находится внутри области устойчивости близко к ее правой границе. Пространственная и временная ширины для такого солитона достаточно близки. При наличии малых исходных возмущений оптические пули, принадлежащие к области устойчивости, испытывают лишь небольшие осцилляции, в то время как солитоны с неустойчивых ветвей либо коллапсируют, либо полностью расплываются.

Возможность существования устойчивых оптических пуль в периодических решетках, предсказанная в рамках простейшей модели, описанной выше, позволила провести экспериментальное наблюдение.

В эксперименте [23] использовался гексагональный массив, состоящий из слабосвязанного одномодового кварцевого волновода. Расстояние между соседними волноводами в массиве составляло  $d = 33,2$  мкм, радиус отдельных каналов с увеличенным показателем преломления составлял 9,8 мкм при глубине модуляции показателя преломления  $\delta n = 1,2 \cdot 10^{-3}$ . Для возбуждения центрального волновода в массиве использовался высокоинтенсивный волновой пакет с центральной длиной волны  $\lambda = 1,55$  мкм и длительностью 170 фс. Выходные распределения интенсивности регистрировались с помощью инфракрасной камеры, в то время как временной профиль и спектр выходного волнового пакета анализировались на основе результатов его взаимодействия с пробным импульсом с длительностью 60 фс на длине волны 800 нм в кристалле ВВО толщиной 25 мкм, расположенном за массивом волноводов. В эксперименте использовались массивы различной длины от 30 до 100 мм. Выходное распределение интенсивности на рис. 21, *b* иллюстрирует дискретную дифракцию волнового пакета в линейном случае в массиве длиной 50 мм. Регулярность этого распределения свидетельствует о практически идеальной периодичности модуляции показателя преломления и отсутствии дефектов в массиве, что необходимо для достоверного наблюдения оптических пульс.

В результате можно показать, что поперечная модуляция показателя преломления приводит к подавлению коллапса даже в кубичной нелинейной среде и формированию устойчивых световых пульс, которые наблюдались экспериментально.



Рис. 21. Фотография массива, использовавшегося в эксперименте, (а). Выходное распределение интенсивности в массиве в линейном режиме длиной 50 мм (b)

В последние годы в исследованиях нелинейных волновых процессов заметна тенденция к изучению трехмерных локализованных объектов. Так, в нелинейной оптике к настоящему времени известны квазимонохроматические «пули», «вихревые солитоны», локализованные «X-пучки» и др. В то же время еще одним важным направлением является изучение импульсов все более коротких длительностей вплоть до нескольких колебаний электромагнитного поля (до полупериода), называемых предельно короткими импульсами (ПКИ), и их поперечной динамики.

В качестве конкретной физической системы можно рассматривать два сходных процесса. Первый из них – стоксово саморассеяние оптического импульса в одноосном кристалле на порождаемом им же ПКИ необыкновенной волны. Другой процесс, мандельштамбриллюэновское саморассеяние оптического импульса на генерируемом им ПКИ акустической деформации, происходит в условиях замедленного света при эффекте электромагнитно-индуцированной прозрачности (ЭИП).

Оба предсказанных явления сопровождаются формированием двухкомпонентных солитонов, одни компоненты которых представляют собой квазимонохроматические солитоны (коротковолновые солитоны), а другие – ПКИ-солитоны без несущей частоты (длинноволновые солитоны). При этом коротковолновая составляющая испытывает сдвиг  $\Omega$  несущей частоты в красную область, величина которого пропорциональна интенсивности данной составляющей. Для эффективности указанных процессов саморассеяния необходимо выполнение условия резонанса Захарова – Бенни, которое заключается в том, что групповая скорость коротковолновой компоненты равна фазовой скорости длинноволновой составляющей.

Описанные выше процессы саморассеяния при распространении вдоль оси  $z$  подчиняются системе уравнений (30):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \xi}{\partial x} + k_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + au\xi &= \frac{c}{2n\omega} \Delta_{\perp} \xi, \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (|\xi|^2) &= v_{ph} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} u d\tau'. \end{aligned} \quad (30)$$

Несложно показать, что последние эквивалентны следующему безразмерному уравнению:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} - v_0^2 \Delta_{\perp} \psi + \frac{(v_0^2 - 1)\psi}{|\psi|} + \Delta_{\perp} \psi + |\psi|^2 \psi = 0. \quad (31)$$

Данное обстоятельство позволяет описывать эволюцию исходного импульса, пользуясь результатами, аналогичными таковым в теории квазимонохроматических пространственных пучков. При аномальной ДГС возможны решения типа «оптических пульс», а также «светлых» вихрей. В последнем случае распределение поля имеет вид тора или «пончика», а фаза коротковолновой составляющей описывает спираль. Однако, как показывает вариационный подход, эти структуры являются неустойчивыми и испытывают самофокусировку (коллапс) при превышении критической мощности.

Таким образом, предсказываются новые типы трехмерных двухкомпонентных длинно-коротковолновых солитонов. Тем не менее устойчивость структур, возникающих в области аномальной ДГС, в рамках использованных вариационных методов не полностью доказана.

#### ***2.1.4. Диссипативные оптические пули***

В сплошной среде с нелинейным усилением и поглощением и частотной дисперсией возможны структуры поля, ограниченные нелинейными механизмами по всем трем пространственным направлениям. Такие диссипативные трехмерные солитоны – «оптические пули» – могут быть не только одиночными, но и формировать многосолитонные комплексы.

Вследствие повышенной устойчивости диссипативные, оптические солитоны могут найти большое применение в различных областях. Одиночные трехмерные диссипативные оптические солитоны – «оптические пули» – были предсказаны давно и для однородных сред с частотной дисперсией и нелинейным усилением и поглощением. Позднее были более детально изучены, в частности, рассматривались столкновения лазерных пульс и демонстрировались вращающиеся и осциллирующие трехмерные структуры. Близки к этим объектам и трехмерные солитоноподобные структуры в резонаторных схемах, хотя в этом случае их только условно можно называть солитонами, поскольку в каждой точке схемы поле не имеет характер импульса, а меняется периодически или квазипериодически.

Интересным вопросом является возможность нахождения их устойчивых локализованных решений с любой размерностью геометрического пространства.

В однородной среде с квадратичной частотной дисперсией и быстрыми нелинейностями усиления и поглощения уравнение для медленно меняющейся огибающей поля  $E$  с линейной поляризацией записывается в виде

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \left[ (i + d_{\perp})\Delta + (i + d_{\parallel}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] E + f(|E|^2)E. \quad (32)$$

Здесь  $z$  – продольная координата,  $\tau = t - z/v_g$  – время в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью света (все величины безразмерны).

Нелинейная функция  $f$  имеет вид

$$f(I) = -1 + \frac{1-i\Delta_g}{1+I} \bar{g}_0 - \frac{1-i\Delta_a}{1+\bar{b}I} \bar{a}_0. \quad (33)$$

При равных уширениях  $d$  и подстановки (31) в (32) получаем уравнение вида

$$\frac{\partial E}{\partial z} = (i + d)\Delta_3 E + f(|E|^2)E, \quad (34)$$

где  $\Delta_3$  – трехмерный оператор Лапласа (два пространственных и одно временное измерение). Тогда (в принятой нормировке координат и времени) допускаются сферические симметричные решения. При  $d_{\perp} \neq d_{\parallel}$  дифференциальный оператор в правой части (31) не сводится к лапласиану и трёхмерное пространство  $(x, y, \tau)$  анизотропно (ввиду малости  $d$ ).

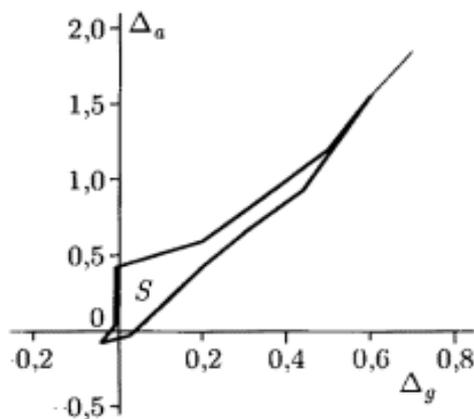


Рис. 22. Область устойчивости  $S$  фундаментальных оптических пучков на плоскости расстройек между несущей частотой и центральными частотами линий усиления и поглощения

Приближенный метод моментов с аппроксимацией поля трехмерным гауссовым распределением позволяет найти ориентировочные параметры, при которых могут существовать пули, однако надежные результаты получаются при прямом численном решении управляющего уравнения (32) или (34).

Процесс формирования пули, подтверждающий ее устойчивость, иллюстрируют рис. 22 и 23.

Динамика формирования определяется численным решением (32). В случае, изображенном на рис. 23, как начальные брались близкое к симметричному колоколообразное “супергауссовское” распределение

интенсивности и постоянное значение фазы. Переходный процесс включал стадию формирования волн переключения, движущихся в радиальном направлении, и резкое увеличение пиковой интенсивности после столкновения этих волн. Возбуждение пули, как и других диссипативных солитонов, жесткое (пороговое); начальные структуры излучения с малой энергией постепенно рассасываются, а при весьма больших энергиях начального пакета излучения обычно формируется расширяющаяся сферическая волна переключения, отвечающая постепенному увеличению объема переключенной в генерационное состояние области. Деформации волнового фронта связаны с нелинейной фокусировкой.

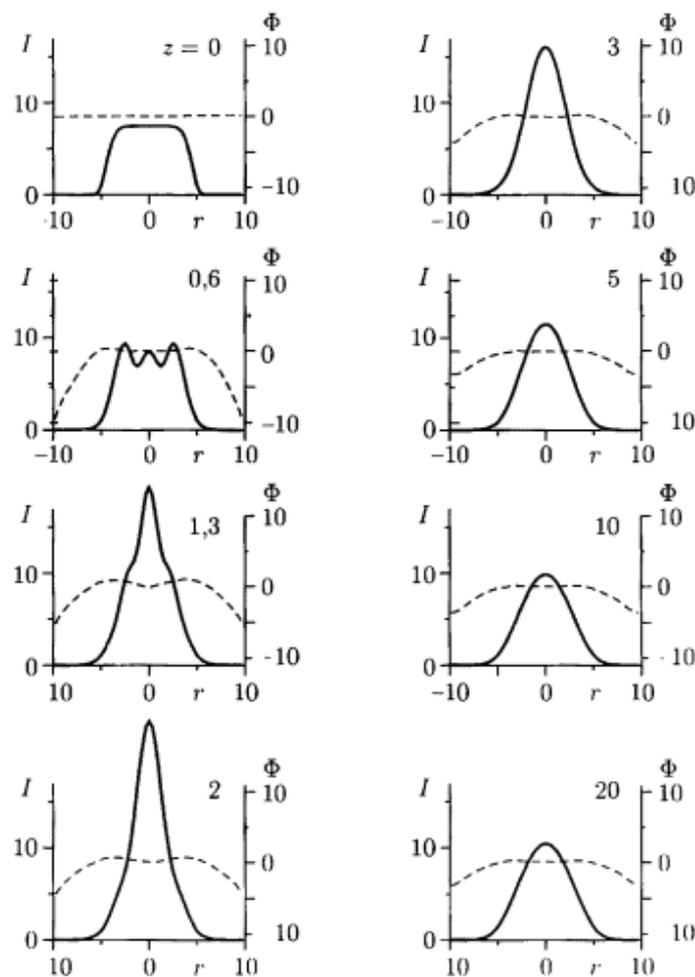


Рис. 23. Формирование сферически симметричной оптической пули: радиальные профили интенсивности  $I$  (сплошные линии, левая шкала) и фазы  $\Phi$  (пунктирные линии, правая шкала) при различных продольных координатах  $z$ .

Из рис. 24 видно, что переходный процесс включает осцилляции, экспоненциально затухающие при больших  $z$ . Это служит под-

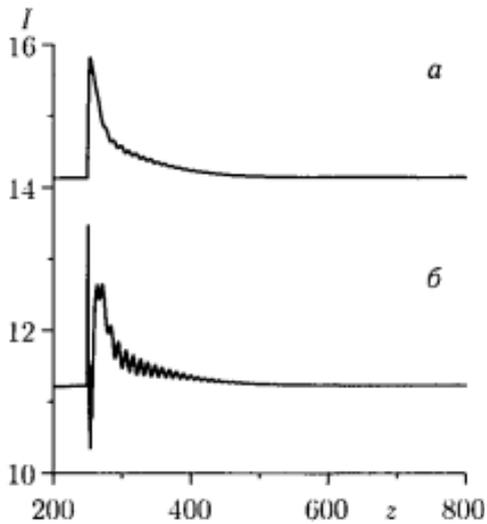


Рис. 24. Затухание осцилляций фундаментальной оптической пули: продольная зависимость пиковой интенсивности  $I$  (а) и средней ширины  $\omega$  (б); асимметричное начальное возмущение введено при  $z = 250$

тверждением устойчивости оптических пуль. В некотором диапазоне параметров имеются метастабильные (долгоживущие) асимметричные осцилляции локализованных структур излучения. Они могут быть стабилизированы слабой пространственной неоднородностью.

Если расстояние между центрами двух пуль существенно превышает их характерную ширину, взаимодействие пуль пренебрежимо мало, как и в одномерном и двумерном случаях. Результат столкновения пуль сильнее всего зависит от скорости их сближения, кроме того, имеется также существенная зависимость от прицельного расстояния и от разности фаз солитонов (при малых скоростях сближения). Численное моделирование лобовых столкновений выявило следующие типичные сценарии:

1. Прохождение пуль сквозь друг друга.
2. Отталкивание.
3. Рождение новой (третьей) пули.
4. Формирование после столкновения волны переключения, расширяющейся и последовательно переключающей все пространство в режим генерации.

Сценарии 1 – 3-й уже были получены ранее для одномерных и двумерных солитонов. Наиболее интересные сценарии 3-й и 4-й иллюстрирует рис. 25. Сценарий 4-й – формирование и распространение сферической волны переключения – был найден впервые для трехмерных лазерных солитонов. Его существование можно объяснить тем, что значение коэффициента усиления, при котором наблюдается этот сценарий, значительно превышает соответствующее максвелловское значение, для которого скорость волны переключения обращается в нуль. При таких усилениях и тех же самых остальных параметрах одномерные и двумерные солитоны не существуют.

Существование устойчивых движущихся солитонных комплексов позволяет рассматривать их столкновения. В зависимости от типа комплексов, угла между направлениями их движения, прицельного расстояния и начальной ориентации существует множество сценариев столкновений, включая частичную или полную дефрагментацию комплексов с изменением числа солитонов.

Ориентация комплексов и их движение зависят, во-первых, от симметрии пространственно-временных характеристик схемы, которые можно контролировать надлежащим выбором эффективных коэффициентов параметров диффузии искусственных сред и, во-вторых, от симметрии расположения солитонов в комплексе, то есть от согласования внутренней и внешней симметрии. Продемонстрирован пример неплоской (спиралевидной) траектории центра комплекса для 7-солитонного комплекса без элементов симметрии. Заметим, что такое движение не описывается низшим порядком теории слабого взаимодействия солитонов.

При столкновениях движущихся трехмерных солитонных комплексов, по сравнению со столкновениями молекул, имеется большее разнообразие сценариев столкновений, включая взрыв сталкивающихся комплексов, их полную или частичную дефрагментацию и формирование вращающихся комплексов.

Экспериментально трехмерные диссипативные оптические солитоны могут быть реализованы в усилителе с насылающимися усилением и поглощением или приближённо в протяженном резонаторе, заполненном средой с

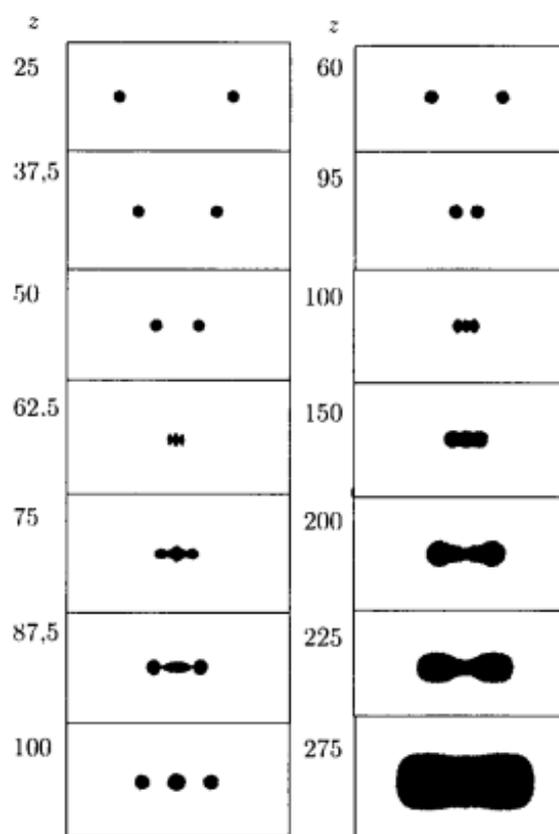


Рис. 25. Распределение интенсивности в сечении  $xxt$  ( $y = 0$ ) для различных значений продольной координаты  $z$  двух сценариев столкновений лазерных пуль: рождение третьей пули (слева) и генерация расширяющейся волны переключения (справа)

нелинейными усилением и поглощением. Выше отклик среды считался мгновенным (класс АА), что может быть оправдано для солитонных комплексов, временная длительность которых больше времени релаксации среды. Но и в этом случае, как мы видели в двух предыдущих главах, устойчивость солитона существенно зависит от соотношения времен релаксации для усиления и поглощения. Среда может быть непрерывной или слоистой с толщиной слоя меньшей, чем характерные длины дифракции, дисперсии и нелинейных искажений.

Однако для сигналов с большей интенсивностью потери компенсируются, и для таких сигналов среда становится прозрачной. Это свойство благоприятно при обработке информации и связи с высоким отношением сигнала к шуму.

### ***2.1.5. Вариационные методы исследования устойчивости оптических пучков***

Сложные нелинейные диссипативные системы в настоящее время являются предметом активных исследований. Обширный класс таких систем в нелинейной оптике, физике плазмы, динамике жидкостей, сверхтекучести, сверхпроводимости и бозе-эйнштейновской конденсации может быть смоделирован сложным многомерным уравнением Гинзбурга – Ландау. Стабильных точных аналитических решений этого уравнения не существует, поэтому их интегрирование возможно только численно. Тем не менее аналитический подход, даже приближительный, необходим для того, чтобы проводить моделирование, избегая утомительных численных расчетов при поиске областей устойчивости. Здесь возможно использование вариационного метода, позволяющего оценить область стабильности параметров для сферических симметричных координат. Действительно, аналитический критерий устойчивости по Ляпунову для диссипативных одно-, двух- и трехмерных солитонов подтверждается численным моделированием поведения системы с помощью фурье-метода расщепления по физическим факторам.

Выполнение критерия устойчивости вариационных решений обеспечивает аналитически широкие области параметров для генерации стабильных  $(3 + 1)$ -мерных солитонов, называемых диссипативными оптическими пучками.

Возможен также аналитико-численный подход к поиску решений уравнения Гинзбурга – Ландау, записанного в несферических координатах. В сферических координатах производные второго порядка по радиус-вектору оптической пули  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + t^2}$  накладывают ограничения на независимые поперечные пространства  $x$ ,  $y$  и время  $t$ . Такие условия сильно ограничивают класс рассматриваемых систем и их экспериментальную реализацию.

Рассмотрим  $(3 + 1)$ -мерное комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау для нормированного поля огибающей  $E$ , описывающее отдельно дифракцию вдоль координат  $x$  и  $y$  и аномальную дисперсию групповой скорости по времени  $T$  без указанных ограничений:

$$i \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + |E|^2 E - v |E|^2 E = Q, \quad (35)$$

где  $Q = i \left[ \delta E + \varepsilon |E|^2 + \mu |E|^4 E + \beta \left( \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right) \right]$ .

Поскольку уравнение включает линейные потери энергии, то для их компенсации параметр  $\delta$  должен быть отрицательным. Параметры  $\varepsilon$  и  $\mu$  связаны соответственно с квадратичной и кубической нелинейностью, которые могут служить источниками притока или потери энергии. Параболическое усиление ( $\beta > 0$ ) учитывается по каждой поперечной координате отдельно.

Необходимым условием для формирования диссипативных оптических пуль является баланс процессов дифракции и дисперсии с процессами самофокусировки, усиления и потерь.

Лагранжиан распространения для данной системы выглядит как полный лагранжиан

$$L = L_c + L_Q. \quad (36)$$

Он содержит не только консервативную часть

$$L_c = \frac{i}{2} \left( E \frac{\partial E^*}{\partial z} - E^* \frac{\partial E}{\partial z} \right) + G - \frac{|E|^4}{2} + \frac{v|E|^6}{3}, \quad (37)$$

но и диссипативную

$$L_Q = i\delta |E|^2 + i \frac{\varepsilon |E|^4}{2} + i \frac{\mu |E|^6}{3} - i\beta G, \quad (38)$$

$$\text{где } G = \left| \frac{\partial E}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial E}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right|^2. \quad (39)$$

Для пробного поля  $E = E(\eta)$  систему (36) можно свести к уравнению Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L_c}{\partial \eta'} \right) - \frac{\partial L_c}{\partial \eta} = 2 \operatorname{Re} \iiint dx dy dt Q \frac{\partial E^*}{\partial \eta}, \quad (40)$$

$$\text{где } L_c = \iiint L_c dx dy dt. \quad (41)$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа на самом деле представляет собой систему дифференциальных уравнений, с подстановкой параметров пробного поля  $E = E(\eta)$  в (40).

В зависимости от пробного поля, к примеру волны вида  $E = A \exp(i\varphi)$  было получено устойчивое солитонное решение, где при распространении уширения амплитуда и мощность стабилизировались и стремились к четким, определенным значениям.

### 2.1.6. Применение трехмерных оптических солитонов

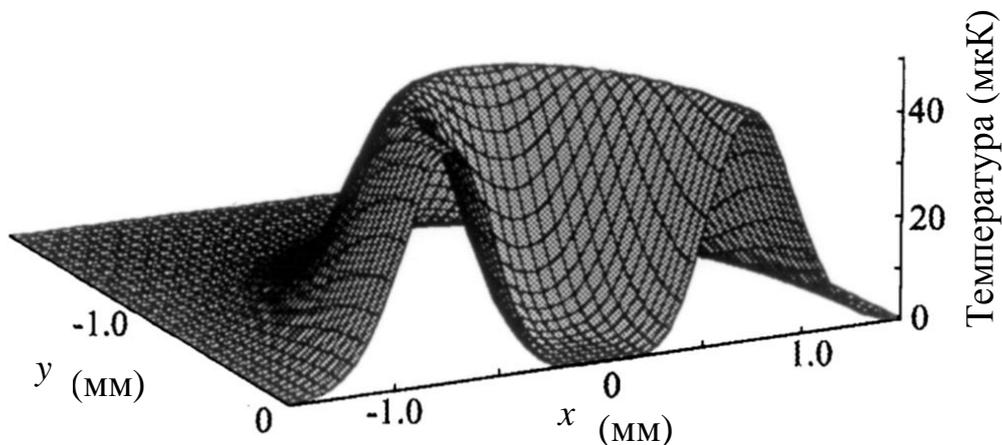
Существует несколько возможностей для практического использования рассмотренных оптических структур. Одна из таких возможностей – оптический захват и транспорт нейтральных атомов, которые могут эффективно удерживаться в центре оптического вихря за счет действия оптической дипольной силы в поле лазера. Подобная ловушка в состоянии сохранить порядка  $10^8$  атомов рубидия в узкоограниченной области 2 мм в отсутствие каких-либо магнитных полей [47]. Потенциальная энергия оптического барьера, сформированного в данном случае модами Лагерра – Гаусса, может быть описана следующим выражением:

$$U(r) = \frac{\hbar \delta_c}{2} \ln \left[ 1 + \frac{I(r)/I_0}{1 + (2\delta_c/\Gamma)^2} \right], \quad (42)$$

где  $I(r) = P \frac{2^{S+1} r^{2S}}{\pi S! r_0^{2(S+1)}} \exp[-2r^2/r_0^2]$  – распределение интенсивности

оптического излучения в моде Лагерра – Гаусса (при значении радиального индекса  $p = 0$ ),  $P$  и  $r_0$  – мощность и радиус пучка оптического излучения для данной моды соответственно,  $\delta_c$  является атомно-оптической отстройкой для перехода  $5S_{1/2}(F = 3) - 5P_{3/2}(F' = 4)$  атомов рубидия,  $I_0$  – интенсивность насыщения,  $\Gamma$  – естественная ширина линии излучения на соответствующем переходе. В представленной работе формируемый оптический потенциал (рис. 26) создавал барьер высотой 40 мкК, что позволяло удерживать атомы, предварительно охлажденные до соответствующих температур.

Другой возможностью использования оптических вихрей является перспектива их применения в телекоммуникационных системах.



*Рис. 26. Поперечное сечение расчетного удерживающего потенциала, образованного модой Лагерра – Гаусса  $LG_{0,3}$  в плоскости, перпендикулярной к оптической оси*

Важная особенность при использовании оптических вихрей в качестве носителей информации – использование дополнительной степени свободы в оптическом пучке (его орбитального момента) для увеличения объема кодируемой информации и как следствие – увеличения емкости информационного канала. В частности, в работе [29] представлены принципы такого кодирования, когда четыре оптических пучка с различными значениями орбитального углового момента  $S = -8, 10, 12, -14$  создавались после отражения от спиральных фазовых масок – на рис. 27, а1 – а4, после чего попарно смешивались с использованием трех светоделителей в суперпозиционное состояние – на рис. 27, б1 – б5. Обратный процесс разделения каналов сводился к повторному отражению сформированного пучка от спиральных фазовых пластинок. В частности, при отражении пучка  $LG_{0,-8}$  от пластинки с зарядом  $S = 8$  форма пучка восстанавливалась до гауссовой, тогда как при отражении от пластинки оставшихся пучков с  $S = 10, 12, -14$  на выходе наблюдались три новых пучка с зарядами  $S = -18, -20, +6$ , которые могут быть идентифицированы в ходе интерференционного эксперимента с пробным гауссовым пучком – рис. 27, в, г.

Представленный способ мультиплексирования нескольких информационных каналов позволяет добиться скорости передачи информации порядка 2 Тбит/с, что устанавливает новый предел плотности передачи данных в оптических каналах связи.

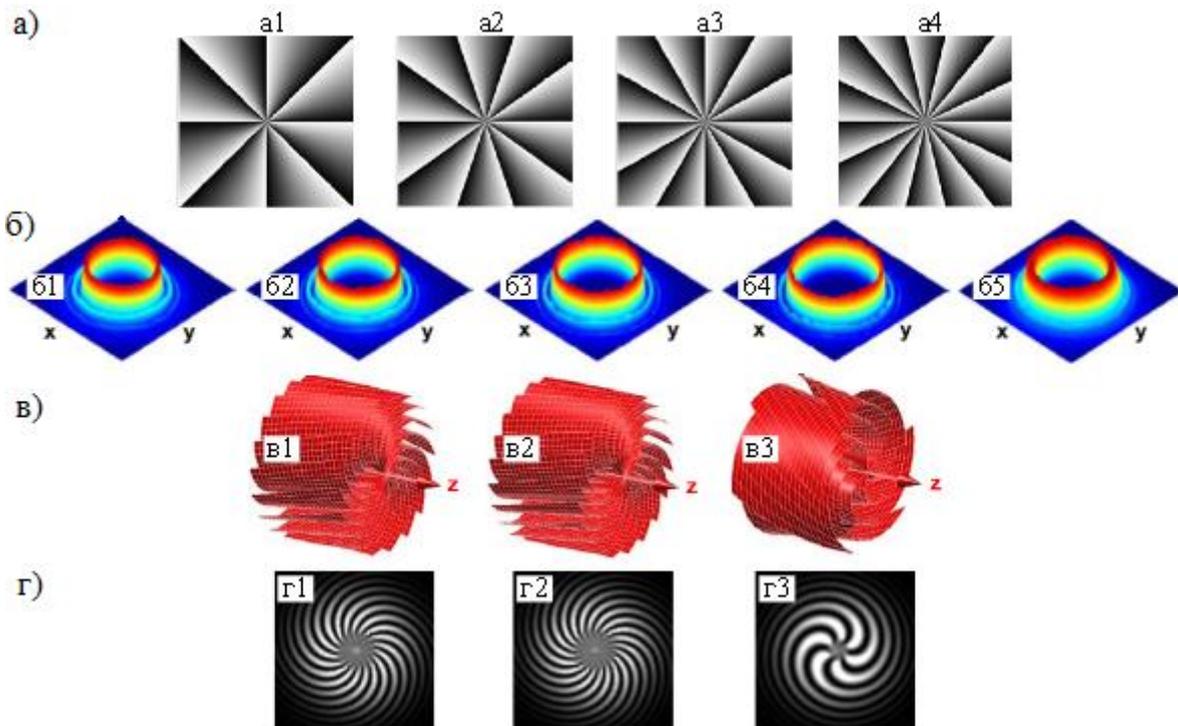


Рис. 27. *a1 – a4 – четыре спиральные фазовые маски с топологическими зарядами  $S = +8, +10, +12$  и  $+14$  соответственно; б1 – б5 – профили интенсивности четырёх LG пучков ( $LG_{0,-8} - б1, LG_{0,+10} - б2, LG_{0,+12} - б3, LG_{0,-14} - б4$ ) и их суперпозиционное состояние – б5; в1 – в3 и г1 – г3 – смоделированные фазовые фронты и интерферограммы трёх LG пучков с изменёнными значениями топологических зарядов после демultipлексирования пучка  $LG_{0,-8}$  (в1 и г1 –  $LG_{0,-18}$ , в2 и г2 –  $LG_{0,-20}$ , в3 и г3 –  $LG_{0,+6}$ )*

На рис. 28 показан принцип обмена данными между LG пучками. Суперпозиция двух LG пучков ( $LG_{S_1}, LG_{S_2}$ ), имеющих различные топологические заряды  $S_1$  и  $S_2$ , отражается от спиральной фазовой пластинки с топологическим зарядом  $S_R = -(S_1 + S_2)$ . После отражения фазовая пластинка добавляет азимутальный фазовый компонент  $\exp(iS_R\theta)$  к каждому из пучков и превращает  $LG_{S_1}$  в  $LG_{-S_2}$  и наоборот. Компенсация знака происходит за счет еще одного дополнительного отражения пучков от зеркала.

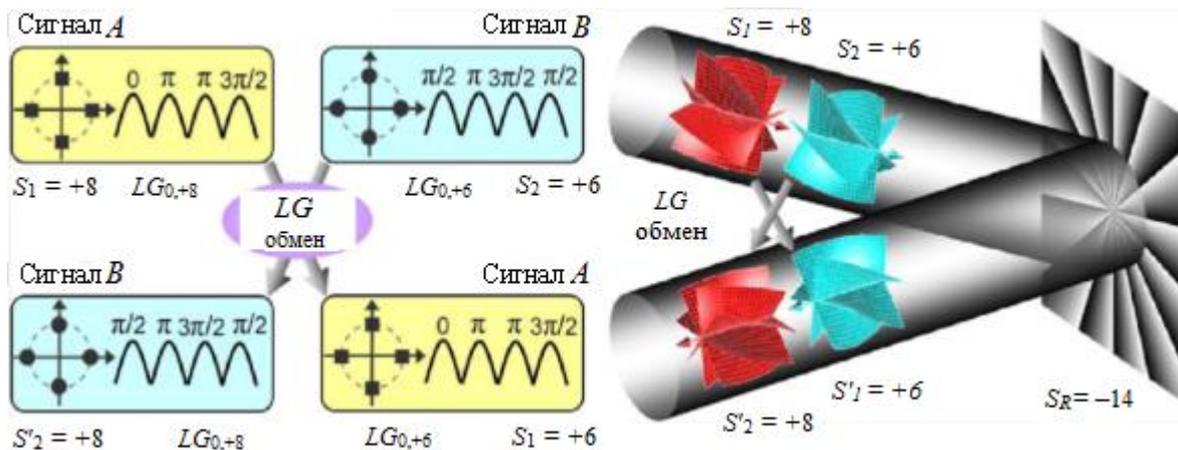


Рис. 28. Принцип обмена данными между вихревыми LG пучками

### Применение оптических солитонов

Солитоны нашли применение, по крайней мере, в трех областях:

- создание солитонных лазеров;
- сжатие оптических импульсов;
- создание солитонных линий связи.
- в оптических устройствах цифровой обработки информации.

### Солитонные лазеры

Основная идея солитонных лазеров – использование волоконно-го световода для синхронной подачи части энергии обратно в резонатор лазера, работающего в режиме синхронизации мод. Световод изменяет форму импульса, формируя солитон (фундаментальный или высшего порядка в зависимости от пиковой мощности). После нескольких циклов возникает стационарное состояние, в котором импульсы являются солитонами данного световода. Длительностью импульса можно управлять, изменяя длину световода. При этом и длительность может быть гораздо меньше, чем в случае с одним лазером без световода ( $\sim 50$  фс). В последнее время при использовании много-солитонных импульсов в световоде получены очень короткие импульсы до 6 фс.

### Солитонные линии связи

Самая простая схема солитонной линии связи на основе усилителей с вынужденным комбинационным рассеянием (ВКР) предложена в 1983 г. Хасегавой (рис. 29).

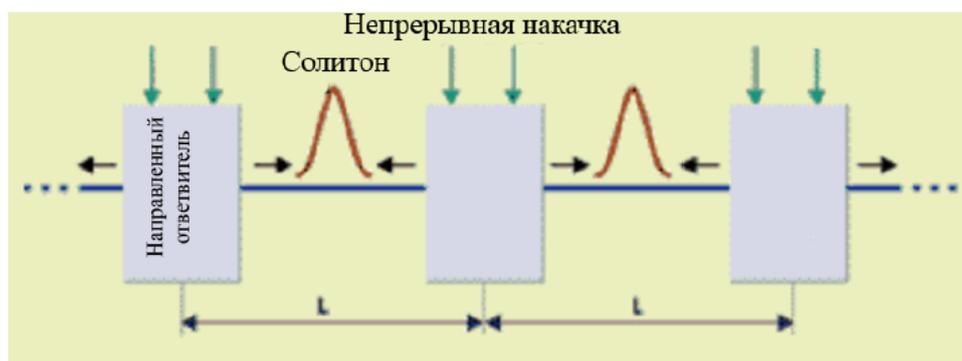


Рис. 29. Схема солитонной линии связи с ВКР усилителями

В ней реализована архитектура линейной последовательной цепи, состоящей из линейных сегментов световодов длиной  $L$  с ВКР усилителями. Усиление организовано так, что на концах каждого сегмента установлены направленные ответвители, через которые в линию связи (световод) в обоих направлениях вводится непрерывное излучение накачки от лазера, работающего на длине волны 1460 нм. В схеме может быть использовано одномодовое волокно – как обычное, так и со сдвигом дисперсии с эффективной площадью сердцевины  $25 \text{ мкм}^2$ , работающее на длине волны 1550 нм. Реализованные значения  $L$  составили 40 – 50 км, а общая длина линии – 600 км, она ограничивается в основном случайным шумом когерентного усиления, вызывающего флуктуацию времени прихода импульса на детектор (эффект Гордона – Хауса).

Серьезным стимулом к созданию новых экспериментальных солитонных линий связи стало появление в 1989 г. оптических усилителей с сосредоточенным (а не распределенным, как в усилителях на ВКР) усилением, с диодной накачкой на основе легированного эрбием волокна (EDFA), работающего на длине волны 980 или 1480 нм. С помощью таких усилителей была достигнута скорость 160 Гбит/с. Преимущество солитонных систем перед обычными методами оптической передачи – возможность повышения скорости передачи и увеличения длины регенерационного участка. Основными препятствиями к внедрению солитонных линий являются шум когерентного усиления (эффект Гордона – Хауса), аккумуляция усиленного спонтанного излучения и солитонные взаимодействия.

Преимущества оптических пульс перед солитонами более простой топологии здесь очевидны – наличие нелинейно-диссипативных

ограничений во всех пространственных измерениях позволяет избежать необходимости создания типовых линий связи (волокна, волноводы), ограничивающих направление передачи информации волноводным каналом.

### ***Обработка информации***

Последние исследования показывают возможность эффективного использования солитонов в оптических устройствах обработки цифровой информации. Было установлено, что волоконный интерферометр (Саньяка или Маха – Цендера) позволяет переключить солитонный сигнал, при этом контрастность достигает 93 %. С помощью таких переключателей возможно реализовать логические функции OR, AND и NOR.

Существуют варианты выполнения многоуровневых оптических цифровых вычислений. Способ хранения многоуровневых числовых данных предложен А. С. Щербаковым. В его работах отмечается, что оптические волны при определённых условиях могут быть преобразованы в оптические ансамбли частиц – солитонные последовательности.

Генерация солитонных последовательностей выполнялась на специальном генераторе, построенном на амплитудно-фазово-модулируемом полупроводниковом лазерном источнике, а также на оптических устройствах и акустооптических преобразователях света. В работе был предложен алгоритм параллельных N-битовых цифровых вычислений, однако этот алгоритм, хотя и является по своей сути систолическим алгоритмом, тем не менее он предусматривает преобразование аналого-цифрового многоуровневого сигнала в бинарную форму.

Задача построения полностью оптической динамической памяти с периодическим доступом и потенциальной возможностью сколь угодно долгого хранения цифровой информации решается с помощью схемы кварцевого свето-волоконного контура циркуляции солитонных импульсов. Однако представляется возможным построение более простого и компактного устройства памяти на элементах оптики цилиндрических групп, выполненных также из кварцевого сверхпроводящего материала с использованием принципов динамического обмена солитонными последовательностями.

Иным способом построения полностью оптической динамической памяти является создание синхрогенераторов на активных резонаторах. В этом случае используется принцип хранения и динамического восстановления информации, переносимой импульсными последовательностями световых солитонов. В качестве хранителя информации используется кольцевой интерферометр Фабри – Перро. Многомодовый интерферометр Фабри – Перро представляет собой тороидальный световод, выполненный из кварцевого материала с уменьшением дисперсии распространяющихся в нём солитонных последовательностей, введённых в него с помощью устройства нарушения полного внутреннего отражения (устройство ввода) по продольно-поперечным модовым и субмодовым траекториям. Динамическое обновление и поддержание информации в кольцевом интерферометре осуществляется с помощью импульсного источника света, помещённого в центре торического резонатора. Передний фронт импульса накачки (усиления солитонных последовательностей) необходимо синхронизовать с моментами пересечения траектории экваториальной плоскости тора. Съём хранимой в интерферометре информации необходимо осуществлять в плоскости экватора тора (по его большой окружности) в моменты, синхронизованные с моментами "замыкания" модовых и субмодовых траекторий хранителей информации на окружности большого круга тора.

Существенная проблема на пути использования обычных диссипативных солитонов в системах обработки информации – инерционность нелинейных свойств среды. Однако использование коротких оптических пульс, генерируемых в средах с быстрой электронной нелинейностью, снимает такие ограничения.

## **2.2. Взаимодействие оптического излучения с оптически-плотной трёхуровневой резонансной средой**

В рассматриваемой задаче предполагается, что пробный световой импульс  $E_p$  заданной формы с центральной частотой  $\omega_p$  распространяется вдоль оси  $z$  полого оптического волокна, заполненного газом холодных атомов  $\text{Rb}^{87}$  при температуре  $T$  вблизи критической температуры [35] фазового перехода  $T_{cr} = \left(\frac{\rho}{2,61}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m_a k_B}$ , где  $h$  – постоянная Планка,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $m_a$  – атомная масса,

в противоположном направлении с непрерывным излучением оптической накачки  $E_c$  (рис. 30, а). В рамановском пределе частота отстройки пробного поля  $\Delta_b$  существенно превосходит скорость релаксации  $\Gamma_{ab}$  ( $\Gamma_{ac}$ ) из возбужденного состояния  $|\Delta_c| > d_0\Gamma_{ac}$  (рис. 30, б). Применительно к рассматриваемой задаче параметр оптической толщины среды  $d_0$  может быть определен через характерный линейный размер  $a_0$  формируемых в плоскости  $(x, y)$  топологических структур в виде

$$d_0 = \frac{g^2 N a_0}{c \Gamma_{ac}} \quad (\text{сравните с [29]}). \quad \text{Здесь } g = \mu_{ba} \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar \epsilon_0 V}} - \text{ атомно-}$$

оптическая константа связи,  $\epsilon = A_p \left( \frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1/2}$ ,  $A_p$  – медленно меняющаяся амплитуда пробного поля,  $V$  – объем квантования,  $N = \rho V$  – количество атомов в области взаимодействия,  $c$  – скорость света в вакууме,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная. Частота разделения уровней  $|c\rangle$  и  $|b\rangle$  имеет значение  $\delta = 6,834$  ГГц, дипольный матричный элемент перехода  $|b\rangle \rightarrow |a\rangle$  составляет  $d_{ba} = 3,58 \cdot 10^{-29}$  К·м.

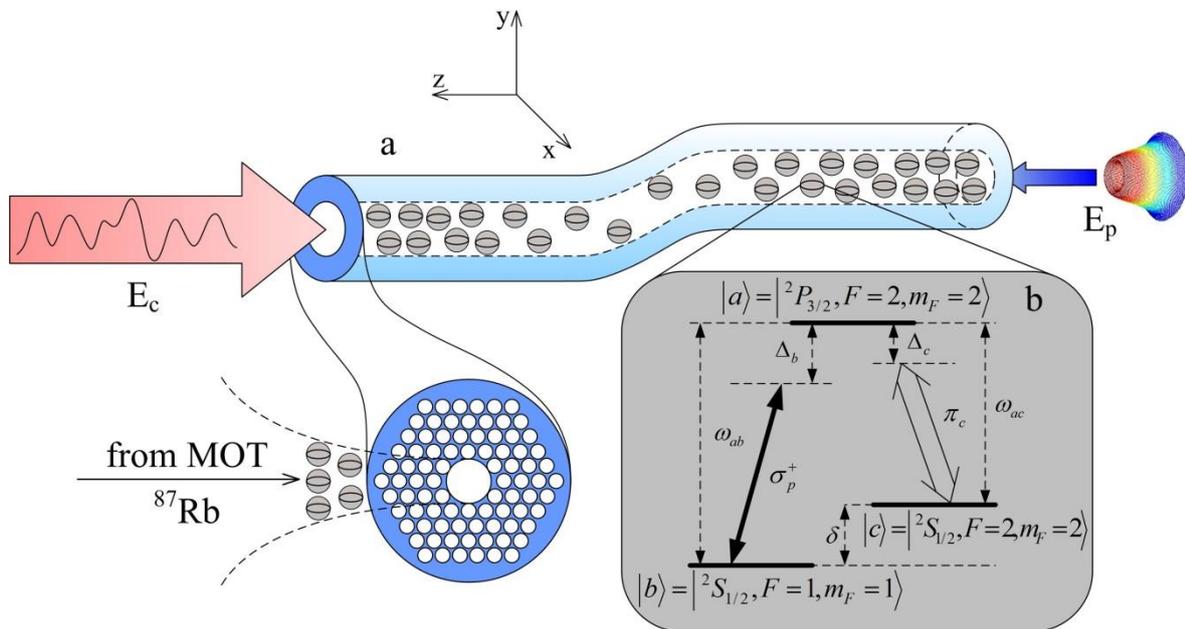


Рис. 30. Модель полого газозаполненного оптического волокна (а).  $\Lambda$ -схема атомно-оптического взаимодействия для атомов  $Rb^{87}$  (б), частота разделения уровней  $|c\rangle$  и  $|b\rangle$  составляет  $\delta = 6,834$  ГГц, дипольный матричный элемент перехода  $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$  на длине волны  $\lambda = 780,241$  нм составляет  $\mu_{ab} = 3,58 \cdot 10^{-29}$  Кл·м

Поскольку атомы  $\text{Rb}^{87}$  обладают большими значениями дипольных моментов на рассматриваемых оптических переходах и с учетом их концентрации в оптической матрице, величина близкого дипольного (БДД) взаимодействия  $\chi_{ba} = \frac{\rho_3 |d_{ba}|^2}{3\hbar\epsilon_0}$ , входящая в выражение для эффективной частоты Раби  $\Omega_{eff} = \Omega_{ba} + \chi_{ba}\sigma_{ba}$  [25], может принимать значения, близкие к величине частоты Раби пробного поля (здесь  $\sigma_{ba}$  – соответствующий элемент матрицы плотности). Таким образом, возникающие в системе нелинейно-оптические эффекты будут определяться, с одной стороны, настройками поля оптической накачки, а с другой – значениями концентрации загруженных атомов в оптически-плотной системе на основе такого газозаполненного волокна.

Система уравнений для медленно меняющихся компонент матрицы плотности примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{ba} &= i(\Delta_b - \chi_{ba}(\sigma_{bb} - \sigma_{aa}))\sigma_{ba} - ig\varepsilon(\sigma_{bb} - \sigma_{aa}) - \\
&\quad - i(\Omega + \chi_{ca}\sigma_{ca})\sigma_{bc} - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{ba}, \\
\dot{\sigma}_{ca} &= i(\Delta_c - \chi_{ca}(\sigma_{cc} - \sigma_{aa}))\sigma_{ca} - i\Omega(\sigma_{cc} - \sigma_{aa}) - \\
&\quad - i(g\varepsilon + \chi_{ba}\sigma_{ba})\sigma_{cb} - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{ca}, \\
\dot{\sigma}_{bc} &= i(\Delta_b - \Delta_c)\sigma_{bc} + ig\varepsilon\sigma_{ac} - i\Omega^* \sigma_{ba} + i\chi_{ba}\sigma_{ba}\sigma_{ac} - i\chi_{ac}\sigma_{ac}\sigma_{ba}, \\
\dot{\sigma}_{aa} &= ig\varepsilon^* \sigma_{ba} + i\Omega^* \sigma_{ca} - ig\varepsilon\sigma_{ab} - i\Omega^* \sigma_{ac} - (\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\sigma_{aa}, \\
\dot{\sigma}_{bb} &= ig\varepsilon\sigma_{ab} - ig\varepsilon^* \sigma_{ba} + \Gamma_{ab}\sigma_{aa}, \\
\dot{\sigma}_{cc} &= i\Omega\sigma_{ac} - i\Omega^* \sigma_{ca} + \Gamma_{ac}\sigma_{aa},
\end{aligned} \tag{43}$$

где  $\Omega \equiv \Omega_{ca}$  и  $g\varepsilon \equiv \Omega_{ba}$  – частоты Раби для поля накачки и пробного импульса соответственно,  $\Delta_b$  и  $\Delta_c$  – отстройки от резонанса для пробного импульса и импульса накачки соответственно;

$g = d_{ba} \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0 V}}$  – атомно-оптическая константа связи,

$\varepsilon = A_p \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1/2}$ ,  $A_p$  – медленно меняющаяся амплитуда пробного

поля,  $V$  – объем квантования. Таким образом, система уравнений (43) получена *ab initio* и содержит естественные поправки, учитывающие наличие ансамбля атомов, обуславливающего локальный характер взаимодействия индивидуальных частиц среды с электромагнитным полем.

### **2.2.1. Основные приближения для рамановского предела $\Lambda$ -схемы взаимодействия в плотной среде в различных пределах атомно-оптического взаимодействия**

В данном разделе рассмотрим вопрос применимости используемых в работе приближений для трехуровневой атомной среды в результате различных режимов ее взаимодействия с внешними оптическими полями. Особое требование к такой задаче в нашем случае – наличие значительных поляризаций среды на смежных переходах  $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$  и  $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$  для возможностей нелинейного управления пробными вортексами через волну оптической накачки. Кроме того, необходимо сделать ряд предположений, которые позволят существенно упростить систему (43) для ее дальнейшего анализа. При этом ключевым моментом становится выбор нужного соотношения между частотой Раби поля накачки, частотой его отстройки от резонанса и скоростью релаксации возбужденного состояния атомной среды.

В общем случае уравнение распространения для пробного поля в резонансной среде с учетом дифракции имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} - ic \frac{D}{2} \nabla_{\perp}^2 \right) \varepsilon = -igN\sigma_{ba}, \quad (44)$$

где  $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $N$  – количество атомов в области взаимодействия,  $D = \frac{\lambda}{\pi}$  – параметр дифракции в поперечном к оси  $z$  направлении.

Решение самосогласованной системы (43) – (44) будем основывать на следующих приближениях. Во-первых, полагаем, что все атомы находятся на уровне  $b$  изначально, т.е.  $\sigma_{bb} = 1$ ,  $\sigma_{aa} = \sigma_{cc} = 0$  и выполняется условие малой заселенности возбужденного состояния в

процессе работы схемы, т.е.  $\sigma_{bb} \cong 1$ ,  $\sigma_{aa(cc)} \cong 0$  (и  $\dot{\sigma}_{ii} \cong 0$ , где  $i = a, b, c$ ). Во-вторых, полагаем, что при учете  $\chi_{ca} = \chi_{ba} = \chi$  величина вклада локального поля сравнима с частотой Раби пробного перехода, но может не учитываться на накачивающем переходе, т.е.  $g\varepsilon \geq \sigma_{ba}\chi_{ba}$  и  $\Omega \gg \sigma_{ca}\chi_{ca}$ . В результате окончательная система (43) примет следующий (простой) вид:

$$\dot{\sigma}_{ba} = -\Gamma_1\sigma_{ba} - ig\varepsilon - i\Omega\sigma_{bc} - i\chi_{ba}\sigma_{ba}, \quad (45a)$$

$$\dot{\sigma}_{ca} = -\Gamma_2\sigma_{ca} - ig\varepsilon\sigma_{cb} - i\chi_{ba}\sigma_{ba}\sigma_{cb}, \quad (45б)$$

$$\dot{\sigma}_{bc} = i\Delta_3\sigma_{bc} + ig\varepsilon\sigma_{ac} - i\Omega^* \sigma_{ba}, \quad (45в)$$

$$\dot{\sigma}_{bb} = ig\varepsilon\sigma_{ab} - ig\varepsilon^* \sigma_{ba}, \quad (45г)$$

где  $\Gamma_1 = -\left(i\Delta_b - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\right)$ ,  $\Gamma_2 = -\left(i\Delta_c - \frac{1}{2}(\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac})\right)$  и  $\Delta_3 = \Delta_b - \Delta_c$ .

В системе (45) вклад локального поля представлен двояким образом: в уравнении (45а) его действие тривиально и приводит к частотному сдвигу, но в (45б) оно обеспечивает более существенный эффект – появление нелинейной связи между атомными возбуждениями (поляризациями) на пробном  $\sigma_{ba}$  и магнитном  $\sigma_{cb}$  переходах.

На рис. 31 представлены, в частности, результаты независимого решения точной системы (43) и приближенной (45) для различных режимов атомно-оптического взаимодействия при условии быстрого включения пробного поля за характерное время  $\tau_{sw} = 2 \cdot 10^{-10}$  с и при наличии постоянно действующего поля накачки. Параметры атомно-оптической системы были выбраны следующими: характерный размер оптического пучка  $a_0 = 20$  мкм, атомная концентрация  $\rho = 1,01 \cdot 10^{22}$  м<sup>-3</sup>, скорости релаксации  $\Gamma_{ab} = \Gamma_{ac} = 10^9$  с<sup>-1</sup>, интенсивность пробного поля  $I_p = 0,22$  Вт·см<sup>-2</sup>, накачки  $I_c = 146,5$  Вт·см<sup>-2</sup>, частота отстройки пробного поля  $\Delta_b = -5 \cdot 10^9$  с<sup>-1</sup>. Соответствующие частоты Раби могут быть рассчитаны как  $\Omega = \frac{\mu_{ac}E_c}{\hbar}$  и  $g\varepsilon = \frac{\mu_{ab}E_p}{\hbar}$

через напряженности полей  $E_{c(p)} = \sqrt{\frac{I_{c(p)}^2}{c\varepsilon_0}}$  и составят величины

$\Omega = 1,13 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$  и  $g\varepsilon = 4,4 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$  соответственно ( $g = 1,3 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$  и  $N = 27,7 \cdot 10^8$ ). При данных значениях параметров реализуется условие  $\Gamma_{ab} < \Omega$  для сильной атомно-оптической связи в системе.

Сплошная линия (1) для  $|\sigma_{ba}|^2$ , штриховая (2) для  $|\sigma_{bb}|^2$  и штрихпунктирная (3) для  $\sigma_{cc}$  соответствуют решению системы (43), пунктирная линия (4) для  $|\sigma_{ba}|^2$  соответствует решению системы (45). Сплошная линия (5) соответствует  $|\sigma_{ba}|^2$ , рассчитанному для приближенного стационарного решения (50).

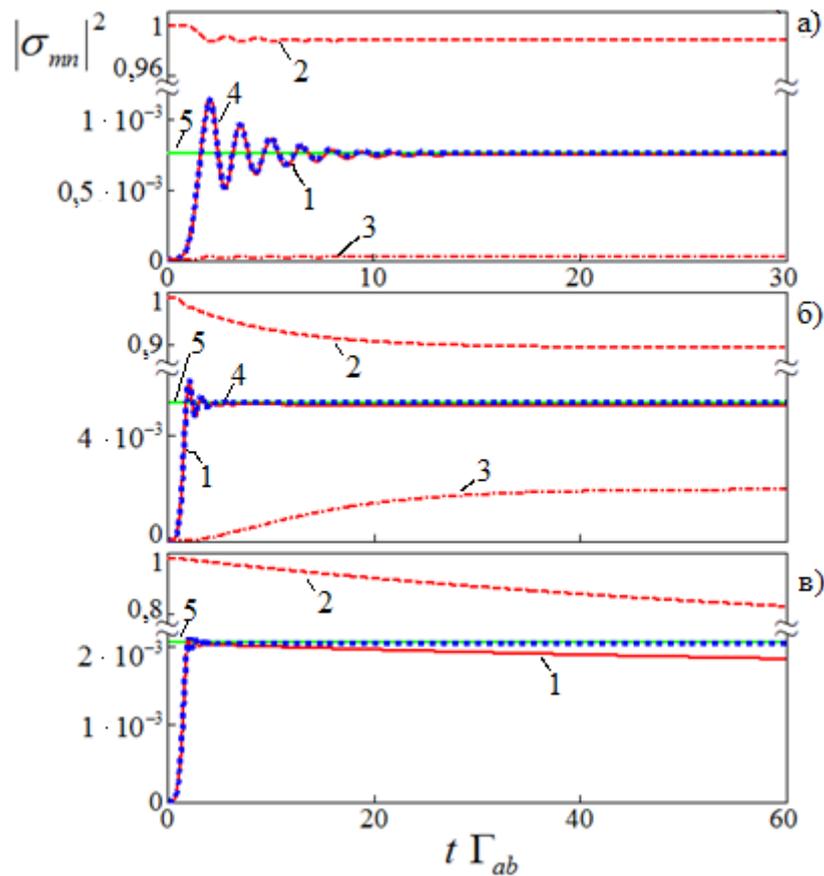


Рис. 31. Зависимости значений элементов матрицы плотности системы от нормированного на время жизни возбужденного состояния  $\Gamma_{ab}^{-1}$  времени (а) для близрезонансного (б) рамановского режимов  $\Lambda$ -схемы взаимодействия в условиях сильной связи и для близрезонансного режима слабой связи (пояснения см. в тексте)

В условиях близрезонансного взаимодействия, когда  $\frac{\Delta_c}{d_0\Gamma_{ac}} \approx 0,1$  при значении  $d_0 = 0,308$  и выборе частоты отстройки от резонанса  $\Delta_c = 3 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ , нелинейная связь между накачивающим и пробным полями в системе фактически отсутствует (см. рис. 31, *a*). Это связано с тем, что в процессе взаимодействия основное состояние  $b$  практически не расселяется ( $\sigma_{bb} \approx 1$ ), и в отсутствие атомов на уровнях  $a$  и  $c$  системы возникающая поляризация на переходе  $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$  мала при фактически полном ее отсутствии на переходе  $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$  (см. рис. 31, *a*). При этом решения систем (43) и (45) для матричного элемента  $\sigma_{ba}$  с достаточной точностью аппроксимируют друг друга как доказательство справедливости используемых при выводе укороченной системы (45) приближений. Представленный на рис. 31, *a* режим характерен для наблюдения в резонансной трехуровневой атомной среде линейного эффекта ЭИП [41] либо его нелинейного аналога [24] при значительном увеличении интенсивности поля накачки.

Совершенно иная связанная с нелинейным взаимодействием используемых полей динамика системы будет наблюдаться при выборе рамановского режима взаимодействия, когда  $\Delta_c > \Omega > d_0\Gamma_{ab}$ . Этот режим также давно известен [26] и достаточно хорошо изучен, но не получил столь сильного “научного резонанса” в связи с перспективами его практического использования в современных оптических технологиях, как это случилось с ЭИП. Данный режим характеризуется набором кривых для матричных элементов (см. рис. 31, *б*), выполненный для тех же параметров, что и на рис. 31, *a*, но при выборе большей частоты отстройки поля накачки от резонанса  $\Delta_c = 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  и условии  $\frac{\Delta_c}{d_0\Gamma_{ac}} \approx 100$ . В этом случае атомный уровень  $b$  эффективно расселяется – в основном на уровень  $c$ . Это предопределяет возникновение значительной поляризации на переходе  $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$  (сравните масштаб значений для  $\sigma_{ba}$  с рис. 31, *a* и 31, *б*, то же самое справедливо и для перехода  $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ ) и приводит к установлению нелинейного энергообмена между модами пробного и накачивающего полей. Данного режима в основном мы и будем придерживаться далее.

Случай  $\Gamma_{ab} > \Omega$  слабой связи в атомно-оптической системе для обоих режимов (рис. 31, *a* и 31, *б*) ведет к значительным расхождениям решений для систем (43) и (45) (см. рис. 31, *в* при  $\Delta_c = 3 \cdot 10^7 \text{ c}^{-1}$ ,  $\Omega = 1,13 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ ). В частности, это связано с нарушением условия  $\Omega \gg \sigma_{ca}\chi_{ca}$  и необходимостью учета эффектов локального поля на переходе  $|a\rangle \rightarrow |c\rangle$ . Данное обстоятельство существенно усложняет задачу и требует проведения прямого численного моделирования самосогласованной задачи (44) и (45) [28], а анализ возможностей получения оптических, в том числе пространственных солитонов, сильно затруднен в условиях значительных трансформаций всех матричных элементов системы.

Найдем стационарное решение для элемента матрицы плотности  $\sigma_{ba}$  на пробном переходе в форме, зависящей только от материальных параметров среды и характеристик оптических полей и с учетом различных случаев атомно-оптического взаимодействия. Для этого решим систему уравнений (45) в два этапа.

На первом этапе определим поляризацию системы на нижних уровнях  $\sigma_{cb}$ , исходя из приближения неизменных населенностей уровней и атомных поляризаций в стационарном режиме, т.е.  $\dot{\sigma}_{aa} = \dot{\sigma}_{bb} = \dot{\sigma}_{cc} = 0$  и  $\dot{\sigma}_{ba} = \dot{\sigma}_{ca} = \dot{\sigma}_{bc} = 0$ . С учетом данного приближения из (45) получим алгебраическое уравнение для поляризации  $\sigma_{bc}$ :

$$\Omega\chi g \varepsilon^* \sigma_{bc}^2 + i(\Gamma_1 g^2 |\varepsilon|^2 + \Gamma_2^* A) \sigma_{bc} + i g \varepsilon \Omega^* \Gamma_2^* = 0, \quad (46)$$

корни которого имеют следующий вид:

$$\sigma_{bc} = \frac{-i(\Gamma_1 g^2 |\varepsilon|^2 + \Gamma_2^* A) \pm \sqrt{D}}{2\Omega\chi g \varepsilon^*}, \quad (47)$$

где  $D = -(\Gamma_1 g^2 |\varepsilon|^2 + \Gamma_2^* A)^2 - 4i\chi g^2 |\Omega|^2 \Gamma_2^* |\varepsilon|^2$ ,  $A = |\Omega|^2 - i\Delta_3(\Gamma_1 + i\chi)$ ,  $\chi \equiv \chi_{ba}$ .

Решения (47) определяют фактически две ветви *спиновых* возбуждений, возникающих на переходе между уровнями  $|b\rangle$  и  $|c\rangle$  (см. рис. 30). Решение, содержащее знак минус в (47), приводит к задаче с насыщающей нелинейностью типа  $\sigma_{bc} \approx \frac{1}{\varepsilon}$  и в данной работе не рас-

смаатривается. Разложение другого, содержащего знак плюс, решения (47) в ряд по пробному полю  $\varepsilon$  приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \sigma_{bc} \approx & -\frac{g\Omega^*}{A}\varepsilon + \frac{g^3\Omega^*}{\Gamma_2^*A^2}\left(\Gamma_1 + i\frac{|\Omega|^2\chi}{A}\right)|\varepsilon|^2\varepsilon - \\ & -\frac{g^5\Omega^*}{(\Gamma_2^*)^2A^3}\left(\Gamma_1^2 + \frac{3i|\Omega|^2\chi\Gamma_1}{A} - \frac{2\chi^2|\Omega|^4}{A^2}\right)|\varepsilon|^4\varepsilon. \end{aligned} \quad (48)$$

Переходя ко второму этапу, выразим из уравнений для  $\dot{\sigma}_{ca}$  и  $\dot{\sigma}_{bc}$  системы (45) поляризацию атомной системы на пробном переходе:

$$\sigma_{ba} = \frac{\left(\Delta_3 + i\frac{g^2|\varepsilon|^2}{\Gamma_2^*}\right)\sigma_{bc} + i\frac{g\varepsilon\chi}{\Omega\Gamma_2^*}|\sigma_{bc}|^2\left(\Delta_3 - i\frac{g^2|\varepsilon|^2}{\Gamma_2}\right)}{\Omega^* - \frac{g^2|\varepsilon|^2\chi^2}{\Omega|\Gamma_2|^2}|\sigma_{bc}|^2}. \quad (49)$$

Подставив разложение (48) в (49) и выполнив вторичное разложение, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ba} \approx & \frac{g\Delta_3}{A}\varepsilon - i\frac{g^3}{\Gamma_2^*A}\left(1 + i\Delta_3\left(\frac{\Gamma_1}{A} + i\frac{\chi}{A^*} + i\frac{\chi|\Omega|^2}{A^2}\right)\right)|\varepsilon|^2\varepsilon + \\ & + g^5\left(\frac{1}{(A\Gamma_2^*)^2}\left[i\left(1 - \frac{\chi\Delta_3}{A^*}\right)\left(\Gamma_1 + i\frac{\chi|\Omega|^2}{A}\right) - \frac{\Delta_3}{A}\left(\Gamma_1^2 - 2\frac{\chi^2|\Omega|^4}{A^2} + 3i\frac{\chi\Gamma_1|\Omega|^2}{A}\right)\right] - \right. \\ & \left. - \frac{i\chi}{|A|^2|\Gamma_2|^2}\left(i + \frac{\Delta_3}{A^*}\left\{\Gamma_1^* - i\frac{\chi|\Omega|^2}{A^*}\right\} - i\frac{\chi\Delta_3}{A}\right)\right)|\varepsilon|^4\varepsilon. \end{aligned} \quad (50)$$

На рис. 31, *a* решение (50) представлено сплошной линией 5, которая с большой степенью точности совпадает с решениями систем (43) и (45) как явное доказательство правильности полученного выражения (50). Отметим, что при решении системы (45) в пределе электромагнитной индуцированной прозрачности (ЭМИП), когда можно полагать  $\sigma_{ac} = 0$ , выражение для  $\sigma_{bc}$  будет содержать только

первое слагаемое в правой части (48) (ср. с [41]). В свою очередь, выражение (49) принимает вид

$$\sigma_{ba} = \frac{\Delta_3 \sigma_{bc}}{\Omega^*} = \frac{g \Delta_3}{A} \varepsilon \quad (51)$$

и определяет появление фазовой модуляции и поглощения (усиления) пробного импульса в атомной среде. Соответствующая данному линейному режиму (51) толстая прямая для  $\sigma_{ba}$  также совпадает с решениями систем (43) и (45) (см. рис. 31, б), характеризуя справедливость теории для предельных случаев.

Для дальнейшего анализа мы остановимся на ситуации, представленной на рис. 31, б, перейдем к изучению пространственной динамики (в плоскости, перпендикулярной направлению распространения) оптических импульсов в среде заполненного резонансными атомами полого оптического волокна (см. рис. 31) и рассмотрим возможности получения специального вида устойчивых образований – вихревых солитонов [46] пробного поля.

### 2.2.2. Анализ самосогласованной задачи нелинейного рассеяния света в трехуровневой среде

В рамановском пределе для  $\Lambda$ -схемы взаимодействия (см. рис. 30, б) после подстановки выражения (50) в уравнение распространения (44) самосогласованная задача пространственной динамики (43) – (45) сводится к хорошо известной форме уравнения Гинзбурга – Ландау (см. в [46]):

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon - i \frac{D}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right) - i \gamma_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon + i \gamma_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon = \\ = -\alpha_1 \varepsilon - \alpha_2 |\varepsilon|^2 \varepsilon - \alpha_4 |\varepsilon|^4 \varepsilon, \end{aligned} \quad (52)$$

где соответствующие коэффициенты имеют вид

$$\gamma_2 = \text{Im} \left\{ -\frac{g^4 N}{A \Gamma_2^* c} \left( 1 + i \Delta_3 \left\{ \frac{\Gamma_1}{A} + \frac{i \chi}{A^*} + i \frac{\chi |\Omega|^2}{A^2} \right\} \right) \right\} - \text{коэффициент кубиче-}$$

ской нелинейности;

$$\gamma_4 = \text{Im} \left\{ \frac{ig^6 N}{c} \left( \frac{1}{(A\Gamma_2^*)^2} \left[ i \left( 1 - \frac{\chi\Delta_3}{A^*} \right) \left( \Gamma_1 + i \frac{\chi|\Omega|^2}{A} \right) - \frac{\Delta_3}{A} \left( \Gamma_1^2 - 2 \frac{\chi^2|\Omega|^4}{A^2} + 3i \frac{\chi\Gamma_1|\Omega|^2}{A} \right) \right] \right) - \frac{i\chi}{|A|^2|\Gamma_2|^2} \left( i + \frac{\Delta_3}{A^*} \left\{ \Gamma_1^* - i \frac{\chi|\Omega|^2}{A^*} \right\} - i \frac{\chi\Delta_3}{A} \right) \right\} - \text{коэффициент нелиней-}$$

ности пятого порядка;

$$\alpha_I = \text{Im} \left\{ \frac{g^2 N \Delta_3}{Ac} \right\} - \text{коэффициент линейных потерь};$$

$$\alpha_2 = \text{Re} \left\{ \frac{g^4 N}{A\Gamma_2^* c} \left( 1 + i\Delta_3 \left\{ \frac{\Gamma_1}{A} + \frac{i\chi}{A^*} + i \frac{\chi|\Omega|^2}{A^2} \right\} \right) \right\} - \text{коэффициент кубиче-}$$

ских нелинейных потерь;

$$\alpha_4 = \text{Re} \left\{ \frac{ig^6 N}{c} \left( \frac{1}{(A\Gamma_2^*)^2} \left[ i \left( 1 - \frac{\chi\Delta_3}{A^*} \right) \left( \Gamma_1 + i \frac{\chi|\Omega|^2}{A} \right) - \frac{\Delta_3}{A} \left( \Gamma_1^2 - 2 \frac{\chi^2|\Omega|^4}{A^2} + 3i \frac{\chi\Gamma_1|\Omega|^2}{A} \right) \right] \right) - \frac{i\chi}{|A|^2|\Gamma_2|^2} \left( i + \frac{\Delta_3}{A^*} \left\{ \Gamma_1^* - i \frac{\chi|\Omega|^2}{A^*} \right\} - i \frac{\chi\Delta_3}{A} \right) \right\} - \text{коэффициент нелиней-}$$

ных потерь пятого порядка.

Очевидно, что полученное уравнение (52) представляет результат сложного нелинейного взаимодействия между пробным полем и полем накачки, возникающим исключительно благодаря наличию существенных поляризаций на оптических переходах в рамановском пределе работы  $\Lambda$ -схемы [27]. Используемый в задаче учет локального отклика хоть и не вносит в уравнение (52) новых слагаемых, но уточняет картину нелинейных взаимодействий соответствующими поправками (слагаемые с  $\chi$ ) на случай оптически-плотной среды. Отметим, что в другом пределе работы  $\Lambda$ -схемы при околорезонансных условиях  $\Delta_b \ll \Gamma_{ab}$  уравнение (52) существенно упрощается потерей всех нелинейных членов, а учет локального отклика в такой задаче не существенен, поскольку может приводить лишь к появлению дополнительной фазовой модуляции в пробном поле [49].

Для анализа (52) перейдем в бегущую систему координат  $T = t - z/c$  и, сделав замену переменных  $u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\varepsilon_{in}|^2}}$ ,  $\xi = \frac{z}{L_{df}}$ ,  $X = \frac{x}{a_0}$ ,

$Y = \frac{y}{a_0}$ , выделим следующие основные характерные длины: нелиней-

ностей третьего  $L_{\gamma 2} = \frac{1}{\gamma_2 |\varepsilon_{in}|^2}$  и пятого  $L_{\gamma 4} = \frac{1}{\gamma_4 |\varepsilon_{in}|^4}$  порядков, ли-

нейных потерь  $L_{\alpha 1} = \frac{1}{\alpha_1}$ , нелинейных потерь третьего  $L_{\alpha 2} = \frac{1}{\alpha_2 |\varepsilon_{in}|^2}$

и пятого  $L_{\alpha 4} = \frac{1}{\alpha_4 |\varepsilon_{in}|^4}$  порядков, дифракции  $L_{df} = \frac{a_0^2}{D}$ , где  $\varepsilon_{in}$  –

начальная приведенная амплитуда пучка. После домножения обеих частей уравнения (52) на  $L_{df}$  окончательно получим:

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + |U|^2 U - \nu |U|^4 U = Q, \quad (53)$$

где  $Q = i \left[ -\delta U - \phi |U|^2 U - \mu |U|^4 U \right]$  – диссипативная часть,  $U = uN$ ,

$N^2 = \frac{L_{df}}{L_{\gamma 2}}$  и введены основные характерные параметры задачи

$\delta = \frac{L_{df}}{L_{\alpha 1}}$ ,  $\mu = \frac{L_{\gamma 2}^2}{L_{\alpha 4} L_{df}}$ ,  $\nu = \frac{L_{\gamma 2}^2}{L_{\gamma 4} L_{df}}$ . Поскольку при используемых в

задаче параметрах взаимодействия справедливо  $L_{df} \ll L_{\beta 2}$ , дисперсионное слагаемое в уравнении (53) исключено и далее речь идет только о пространственных эффектах.

Для формирования оптического солитона на минимальной длине параметры взаимодействия должны быть подобраны таким образом, чтобы характерные нелинейно-дисперсионные длины системы приблизительно соответствовали либо были кратны друг другу [1]. Этого можно добиться вблизи области сильных трансформаций нелинейных коэффициентов необходимым изменением величины частоты отстройки поля накачки  $\Delta_c$  (рис. 32). В частности, для точки

$\Delta_c^A$  дифракционная длина составит всего  $L_{df} = 1,61$  мм, и в условиях положительной нелинейности  $\gamma_2 > 0$  могут происходить фокусировка и формирование устойчивого пространственного солитона. Однако, следуя концепции диссипативных солитонов, для поддержания энергии светлых солитонов на неизменном уровне по мере их распространения в среде дополнительно требуется чередование эффектов поглощения/усиления в различных областях огибающей пробного импульса, в частности, при выполнении неравенств  $\delta > 0$ ,  $\phi < 0$ ,  $\mu > 0$  [21]. На рис. 33 представлены зависимости характерных диссипативных параметров от интенсивности поля накачки  $I_c$  при фиксированном значении отстройки  $\Delta_c^A$  с рис. 32 вблизи порога усиления. В условиях разнопланового характера изменения диссипативных коэффициентов при увеличении интенсивности накачки может быть подобрано такое значение  $I_c$  при фиксированном  $\Delta_c^A$  (или наоборот), чтобы удовлетворить дополнительному условию динамического равновесия диссипативных процессов как основы для формирования диссипативных солитонов, управляемых через волну оптической накачки.

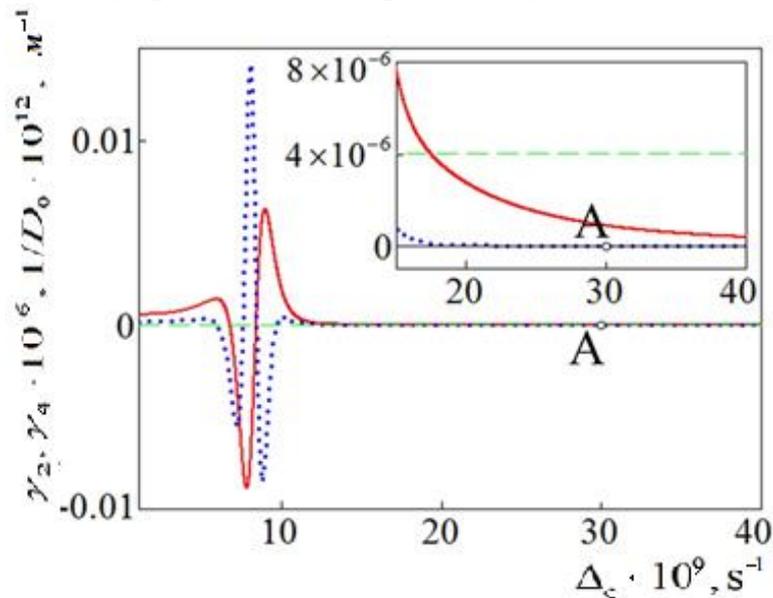


Рис. 32. Частотная зависимость коэффициентов нелинейности третьего  $\gamma_2$  (сплошная линия) и пятого  $\gamma_4$  порядков (пунктирная линия) и обратной дифракции  $1/D_0$  (штриховая линия). На вставке – увеличенный фрагмент области вблизи точки А. Параметры взаимодействия соответствуют рис. 31, б

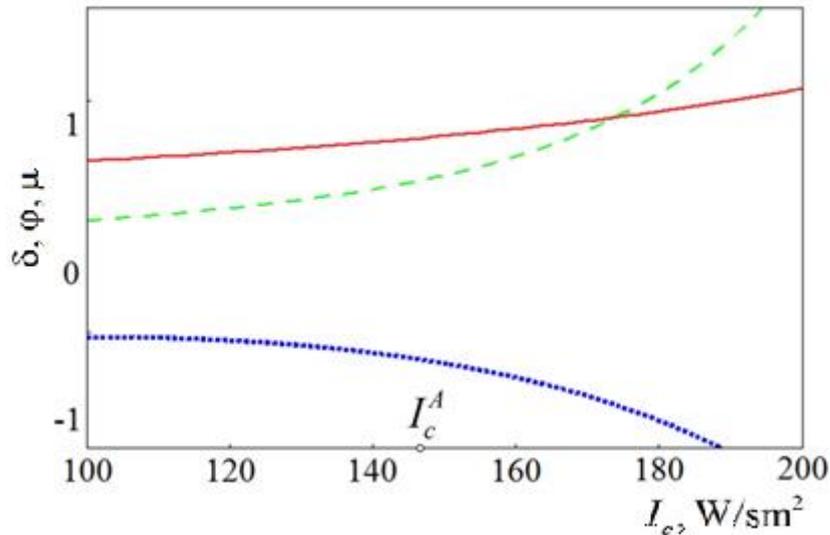


Рис. 33. Зависимости коэффициентов диссипативной части безразмерного уравнения Гинзбурга – Ландау  $\delta$  (сплошная линия),  $\phi$  (пунктирная линия) и  $\mu$  (штриховая линия) от интенсивности поля накачки. Параметры взаимодействия, как для точки А на рис. 32

Используя вариационные методы для анализа уравнения (53), определим области значений параметров, при которых в нашей задаче могут возникать устойчивые пространственные солитоны. При этом особый интерес вызывает важный класс диссипативных пространственных вихревых солитонов (vortex solitons) вида [46]:

$$U = A_0 A \left( \frac{r}{R_0 R} \right)^S \exp \left[ -\frac{r^2}{2(R_0 R)^2} + i \left( C \frac{r^2}{R_0^2} + S\theta + \Psi \right) \right], \quad (54)$$

где  $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ,  $\theta$  – угол в сферических координатах;  $A$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $\Psi$  – амплитуда, пространственная ширина, кривизна волнового фронта и фаза импульса соответственно. Параметр  $S$  определяет топологический заряд вихревого солитона. В частном случае  $S = 1$  нормировочные коэффициенты  $A_0$  и  $R_0$  могут быть выражены из условия нормировки

полной мощности  $P = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |U(r, \theta)|^2 r dr d\theta = (\pi S! A_0^2 R_0^2) A^2 R^2$  и в простей-

шем случае  $P = A^2 R^2$  связаны соотношением  $A_0 = \frac{1}{R_0 \sqrt{\pi}}$ ; далее полагаем  $R_0 = 1$  (мы выбрали несколько иную нормировку, чем в [46]).

На практике эффекты диффузионного расплывания в атомных ансамблях, как правило, приводят к заполнению светом центрального провала интенсивности вихрекса (54) даже при наличии долговременного сохранения внешнего профиля в виде светлого солитона при его распространении в таких средах [40]. Для самоподдержания особого вида вулканообразной формы вихревых солитонов (54) помимо баланса нелинейно-дисперсионных и диссипативных эффектов [21] в системе требуется, как правило, дополнительное присутствие оптической диффузии [36] либо сложного вида модуляции показателя преломления [37], либо коэффициента поглощения [46]. В последнем случае статичный параметр линейного поглощения может быть заменен новым пространственно-зависящим эффективным параметром  $\delta_{\text{eff}} = \delta - Vr^2$ , что соответствует внедрению в газозаполненное волокно дополнительного насыщающегося поглотителя; этот случай мы и рассматриваем далее, полагая везде  $V = -0,03$ . Подробный анализ устойчивости вихревых солитонов при линеаризации управляющего уравнения более общего по сравнению с (52) вида (которое, по всей видимости, может быть получено при решении самосогласованной задачи серией последовательных приближений и без разложения нелинейных по полю функций для матрицы плотности в степенные ряды) и при учете оптической диффузии приведен в работе [48].

Используя уравнение Эйлера – Лагранжа  $\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial \overline{L_C}}{\partial \eta'} \right) - \frac{\partial \overline{L_C}}{\partial \eta} =$   
 $= 2Re \left[ \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} Qr \frac{\partial U^*}{\partial \eta} dr d\theta \right]$ , где  $\overline{L_C} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} L_C dr d\theta$  – усредненный консервативный лагранжиан уравнения (53), а  $\eta = \{A(\xi), R(\xi), C(\xi), \Psi(\xi)\}$  – набор варьируемых параметров функций пространственной координаты  $\xi$  подстановки (54), для осесимметричного вихревого солитона получим:

$$\frac{dA}{d\xi} = -\frac{5\phi A^3}{16\pi} - \frac{8\mu A^5}{81\pi^2} + A(-\delta - C + VR^2), \quad (55a)$$

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{\phi A^2 R}{16\pi} + \frac{2\mu A^4 R}{81\pi^2} + CR + VR^3, \quad (55b)$$

$$\frac{dC}{d\xi} = -C^2 + \frac{1}{8R^4} - \frac{A^2}{16\pi R^2} + \frac{2\nu A^4}{81\pi^2 R^2}, \quad (55\text{в})$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{3A^2}{8\pi} - \frac{10\nu A^4}{81\pi^2} - \frac{1}{2R^2}. \quad (55\text{г})$$

В приближении малой частотной модуляции ( $C^2 \cong 0$ ) аналогично [46] справедлива следующая система уравнений, упрощающая поиск стационарных точек для (55):

$$C = \frac{A^2(-81\pi\phi - 32A^2\mu)}{1296\pi^2} - \frac{162\pi^2 V}{A^2(81\pi - 32A^2\nu)}, \quad (56\text{а})$$

$$R^2 = \frac{162\pi^2}{A^2(81\pi - 32A^2\nu)}, \quad (56\text{б})$$

$$-\frac{5\phi A^3}{16\pi} - \frac{8\mu A^5}{81\pi^2} + A(-\delta - C + VR^2) = 0. \quad (56\text{в})$$

Система (56) имеет набор из 16 решений, только два из которых отвечают физическим ограничениям по энергии и ширине вихревого солитона ( $A > 0, R > 0$  и  $A, R \in \Re$ ), при этом лишь одно из них, обладающее большим значением  $A$  и отрицательной частотной модуляцией ( $C < 0$ ), будет являться устойчивым [46].

На рис. 34 приведена параметрическая плоскость, образованная следующими параметрами: плотностью резонансных атомов в системе  $\rho$  и интенсивностью поля накачки  $I_c$ . Ограниченная пунктирной линией область стабильности осесимметричного вихревого солитона возникает для выбранного физического решения системы уравнений (55) [46]. Данная область определялась из анализа собственных значений матрицы Якоби системы уравнений (55), т.е. из условия  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$ , где  $j = 1, 2, 3$  [39], и соответствует точке устойчивого фокуса.

Прямое численное моделирование уравнения (53) с перебором параметров  $\eta$  для функции вида (54) и при учете начальных ангулярных возмущений для  $R$  и  $C$  [45] показывает, что набор полученных устойчивых решений упрощенной системы (56) оказывается весьма приближенным, а истинная область стабильности  $I$  имеет значительно меньшие размеры. Внутри полученной вариационным путем области

устойчивости проявляется “тонкая” структура в виде отдельных зон стабильности для солитонов с модифицированными формами, а также зона IV, где оптические вихри затухают.

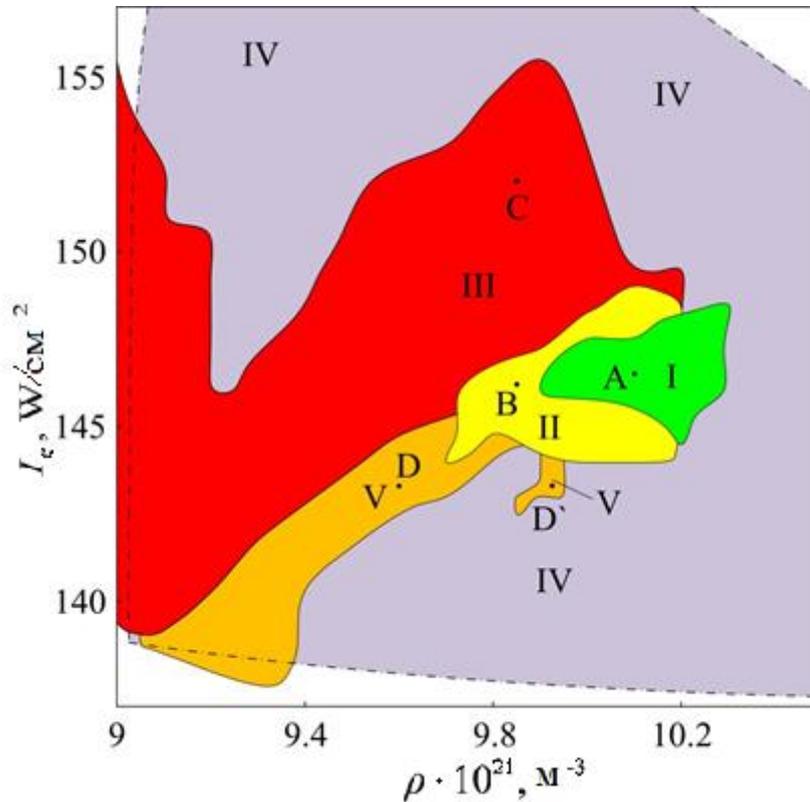


Рис. 34. Параметрическая плоскость (интенсивность поля накачки  $I_c$ , плотность допирования  $\rho$ ). Пунктирной линией ограничена область стабильности осесимметричного вихревого солитона, полученная вариационным путем. Выделенные области получены прямым численным моделированием и соответствуют: I – осесимметричным вихревым солитонам, II – одnogорбым вихревым солитонам, III – безвихревым солитонам, VI – затухающим оптическим вихрям, V – нестационарным локализованным структурам. Параметры взаимодействия соответствуют параметрам на рис. 33

В частности, в области II на рис. 34 (параметры уравнения (53):  $\nu = 0,1653$ ,  $\delta = 0,6819$ ,  $\varphi = -1,1998$ ,  $\mu = 0,2432$  при  $\rho = 9,85 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ ,  $I_c = 146,2 \text{ Вт/см}^2$ , для точки B) осуществляется спонтанный переход осесимметричного вихря в одnogорбый несимметричный устойчивый вихревой солитон, представленный на фрагменте B рис. 35. Бифурка-

ции подобного типа описаны в [46]. Область III на рис. 34 (параметры уравнения (53):  $\nu = 0,2519$ ,  $\delta = 0,7158$ ,  $\varphi = -1,2576$ ,  $\mu = 0,3169$  при  $\rho = 9,85 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ ,  $I_c = 152 \text{ Вт/см}^2$ ) для точки C характеризуется высокой чувствительностью системы к начальным возмущениям, в процессе развития которых вихревой солитон *спонтанно* теряет топологический заряд и переходит в новое устойчивое состояние с  $S = 0$  (см. фрагмент C на рис. 35).

В области V учет ангулярных возмущений для (54) приводит к разрушению вихревых солитонов и появлению на их месте отдельных нестационарных локализованных структур, которые, однако, не затухают, а поддерживают постоянную эволюцию [43]. В точке D данной области параметры уравнения (53) принимают значения  $\nu = 0,1043$ ,  $\delta = 0,674$ ,  $\varphi = -1,14$ ,  $\mu = 0,1551$  при  $\rho = 9,6 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$  и  $I_c = 143,3 \text{ Вт/см}^2$  и происходит преобразование осесимметричного вихревого солитона во вращающуюся при распространении в газозаполненном волокне многогорбую структуру на фрагменте D (рис. 35). Также возможен частный случай двугорбого солитона [48] на фрагменте D (рис. 35), возникающий при значениях параметров  $\nu = 0,1297$ ,  $\delta = 0,6633$ ,  $\varphi = -1,1848$ ,  $\mu = 0,228$  при выборе  $\rho = 9,925 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$  и  $I_c = 143,3 \text{ Вт/см}^2$ . В области IV имеем потерю стабильности и полное затухание вихревых солитонов.

Отметим, что точка A (с тем же набором параметров, как на рис. 32) действительно попадает в область стабильности, рассчитанную на основе обоих – вариационного и численного – методов, что соответствует приведенному выше качественному анализу уравнения (53). При этом для формирования вихревого солитона в представленной среде начальные пространственная ширина и линейная частотная модуляция светового импульса вида (54) должны составлять  $r_R = 19 \text{ мкм}$  и  $C_R = -3,7 \cdot 10^6 \text{ м}^{-2}$  соответственно (безразмерные параметры принимают значения  $A = 5,75$ ,  $R = 0,95$ ,  $C = -0,0015$ ). Расчетные значения параметров уравнения (53) для точки A на рис. 34 составят:  $\nu = 0,1899$ ,  $\delta = 0,675$ ,  $\varphi = -1,2375$ ,  $\mu = 0,3075$ . Выход на солитонный режим такой структуры осуществляется на характерной длине  $L_{ST} = 4 \text{ см}$ , период вращения волнового фронта вортикса в установившемся режиме составляет  $T_V = 1,45 \text{ см}$  (см. фрагмент A на рис. 35).

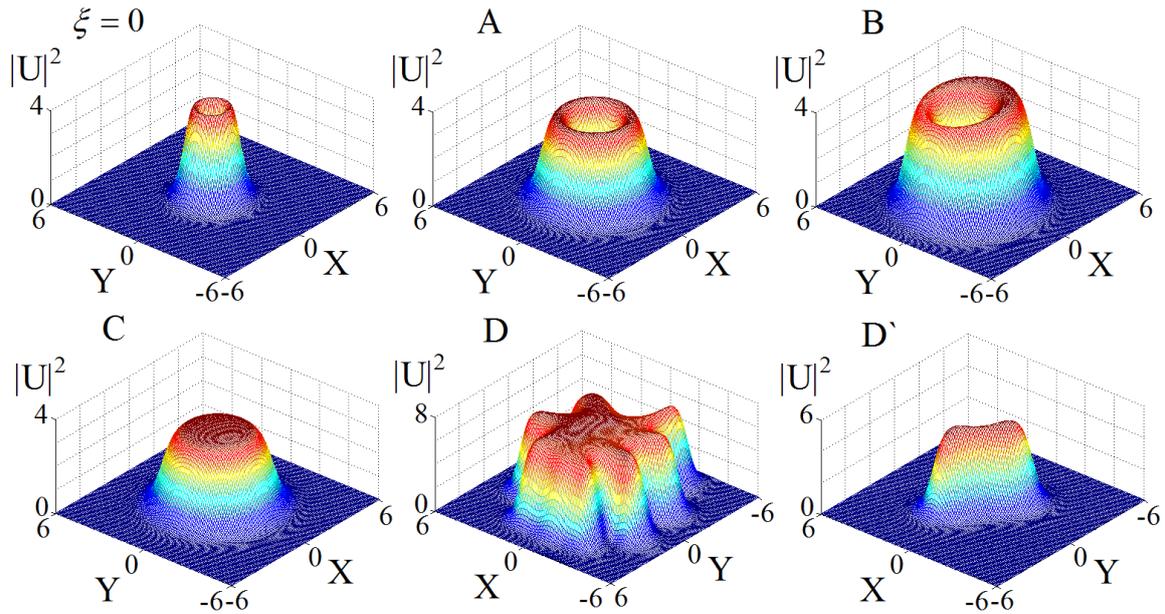


Рис. 35. Полученные прямым численным моделированием (53) пространственные профили (в плоскости  $X, Y$ ) оптических пучков на входе  $\xi = 0$  и после прохождения расстояния  $\xi = 100000$  в газонаполненном волокне при наличии азимутальных возмущений. Буква в левом верхнем углу каждого фрагмента соответствует точке на параметрической плоскости (рис. 34), координаты которой использовались для расчета параметров уравнения (53)

На рис. 36 представлена область стабильности вихревых солитонов на плоскости  $(I_c, V)$  при выборе  $\rho = 1,015 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ . Полученный вариационными методами регион стабильности простирается в обе – положительную и отрицательную – области значений параметра  $V$ . Численное моделирование значительно сужает этот регион и демонстрирует, что устойчивые диссипативные вихреки могут существовать только при отрицательных значениях  $V$ , что согласуется с результатами [46].

Принципиальным моментом в рассматриваемой задаче оказывается учет эффектов локального поля. Действительно, в случае  $\chi = 0$ , т.е. без их учета, область стабильности не только трансформируется, но и полностью выходит за пределы представленных на рис. 34 параметрических плоскостей. При этом все полученные решения для вихревых солитонов становятся неустойчивыми. Таким образом, стратегия возможного эксперимента должна кардинально меняться с учетом локального отклика среды.

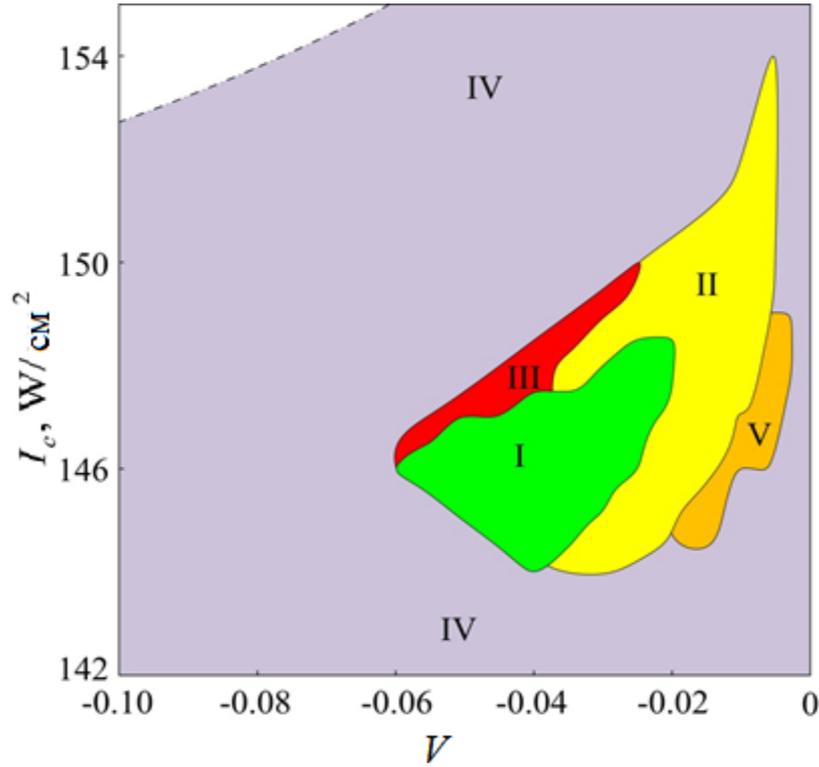


Рис. 36. Параметрическая плоскость (интенсивность поля накачки  $I_c$ , параметр оптического траппинга  $V$ ). Параметры взаимодействия и нумерация областей аналогичны, как на рис. 34

Дальнейший анализ и получение других, отличных от найденной, областей стабильности вихревого солитона требует решения полной нелинейной системы (55), а также проведения расширенного численного многомерного эксперимента в пространстве параметров задачи.

### 2.3. Анализ атомно-оптических взаимодействий в искусственных средах с резонансными двухуровневыми атомами

Рассмотрим взаимодействие двухуровневых ( $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ ) атомов с комбинацией оптических полей частот  $\omega_c$  (рис. 37).

Используя полуклассический подход (квантовая динамика атомов в классическом поле), оптические поля могут быть описаны следующим образом:

$$\vec{E}_c(z, t) = \vec{e}_c A_c(\vec{z}, t) e^{i\vec{\beta}_c \vec{z} - i\omega_c t} + \text{к.с.} \equiv \vec{e}_c A_c(\vec{z}, t) u + \text{к.с.},$$

где  $A_c(\vec{z}, t)$  соответствует амплитуде поля накачки,  $\beta_c = \frac{\omega_c}{c}$  – модуль волнового вектора для поля накачки;  $u$  – гармонический сомножитель.

В обычном для такого типа задач приближении гамильтониан атомно-оптического взаимодействия с использованием  $\Lambda$ -схемы имеет вид

$$H_{int} = -\hbar(g|1\rangle\langle 2|u + g^*|2\rangle\langle 1|v^*). \quad (57)$$

Коэффициент  $g$  определяется дипольным моментом  $\mu$  и задает значения однофотонных частот Раби для соответствующих индуцированных переходов:

$$g = \frac{|\mu|A_c}{\hbar}. \quad (58)$$

Для невозмущенной системы гамильтониан задается в виде

$$H_{free} = \hbar(\omega|1\rangle\langle 1|). \quad (59)$$

Полный набор возможных межуровневых переходов и соответствующих им амплитуд для одиночного атома может быть записан с использованием матрицы плотности  $\rho$ :

$$\rho = \sum_{\{m|n\}=1}^2 \rho_{mn} |m\rangle\langle n|. \quad (60)$$

В рассматриваемом случае двухуровневой схемы временная эволюция элементов матрицы плотности задается уравнением Лиувилля, учитывающим возможности как индуцированных, так и спонтанных переходов:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_{free} + H_{int}, \rho] - \gamma_{12}(|1\rangle\langle 1|\rho - 2|2\rangle\langle 1|\rho|1\rangle\langle 2| + \rho|1\rangle\langle 1|) \quad (61)$$

Временные и пространственные изменения элементов  $\rho_{mn}$  могут быть сведены к изучению их усредненных значений  $\bar{\rho}_{mn}$ :

$$\rho_{mm} = \bar{\rho}_{mm}, \quad \rho_{12} = \bar{\rho}_{12}u, \quad \rho_{21} = \bar{\rho}_{21}u^*. \quad (62)$$

При подстановке (62) в (61) получаем систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику изменения параметров  $\bar{\rho}_{mn}$ :

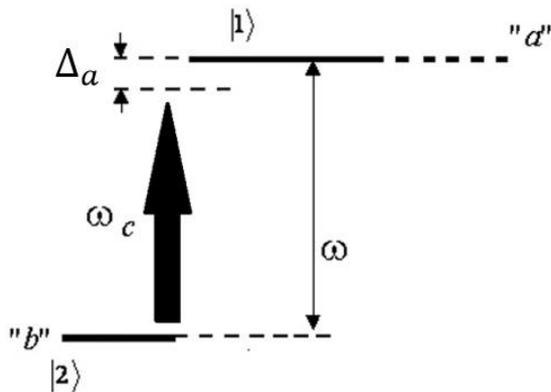


Рис. 37. Схема атомно-оптического взаимодействия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\rho}_{11}}{\partial t} &= -i(g^* u^* \bar{\rho}_{21} - gu \bar{\rho}_{12}) - 2\gamma \bar{\rho}_{11}, \\
\frac{\partial \bar{\rho}_{12}}{\partial t} &= -i(g^* u^* (\bar{\rho}_{22} - \bar{\rho}_{11}) - \omega \bar{\rho}_{12}) - \gamma \bar{\rho}_{12}, \\
\frac{\partial \bar{\rho}_{21}}{\partial t} &= -i(gu (\bar{\rho}_{11} - \bar{\rho}_{22}) - \omega \bar{\rho}_{21}) - \gamma \bar{\rho}_{21}, \\
\frac{\partial \bar{\rho}_{22}}{\partial t} &= -i(gu \bar{\rho}_{12} - g^* u^* \bar{\rho}_{21}) + 2\gamma \bar{\rho}_{11}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Для моделирования реальной плотной среды уравнения (63) должны быть дополнены слагаемыми, ответственными за проявление эффектов локального поля, что приведет нас к системе следующего вида:

$$\dot{\rho}_{11} = -i\Omega_0(\rho_{12} - \rho_{21}) + \Gamma_a \rho_{22}, \tag{64a}$$

$$\dot{\rho}_{12} = i(\Omega_0 + \xi_0 \rho_{12})(\rho_{22} - \rho_{11}) - i\Delta_a \rho_{12} - \frac{\Gamma_a}{2} \rho_{12}, \tag{64б}$$

$$\dot{\rho}_{21} = -i(\Omega_0 + \xi_0 \rho_{21})(\rho_{22} - \rho_{11}) + i\Delta_a \rho_{21} - \frac{\Gamma_a}{2} \rho_{21}, \tag{64в}$$

$$\dot{\rho}_{22} = i\Omega_0(\rho_{12} - \rho_{21}) - \Gamma_a \rho_{22}, \tag{64г}$$

где  $\xi_0 = \frac{N_a |\mu_{12}|^2}{3\hbar \epsilon_0}$  – величина поправки БДД,  $N_a$  и  $\mu_{12}$  – плотность и дипольный момент перехода излучателей.

Начальные условия для режима электромагнитной индуцированной прозрачности (почти все атомы сконцентрированы на уровне  $|2\rangle$ ) имеют вид

$$\bar{\rho}_{11} = 0, \quad \bar{\rho}_{22} = 1. \tag{65}$$

После некоторых соображений подставим параметр  $\bar{\rho}_{12}$  в уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z}\right) \varepsilon = igN \bar{\rho}_{12}. \tag{66}$$

В результате получаем уравнение распространения, которое соответствует уравнению Гинзбурга – Ландау пятого порядка:

$$\left( \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - i \frac{D_0}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right) - i \gamma_2 \varepsilon^3 + i \gamma_4 \varepsilon^5 =$$

$$= -(\alpha_I - i \alpha_R) \varepsilon - \alpha_2 \varepsilon^3 - \alpha_4 \varepsilon^5 + v_2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \phi_2 \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \right), \quad (67)$$

запишем в следующей форме:

$$v_g = \frac{c}{1 + \operatorname{Re} \left[ \frac{g^2 E_0 N}{E^2} \right]} - \text{групповая скорость,}$$

$$\beta_2 = \frac{d}{d\omega_p} \beta_1 = \frac{1}{v_g^2} \frac{d}{d\Delta_b} v_g - \text{коэффициент дисперсии,}$$

$$v_2 = \frac{1}{\frac{c^2}{\operatorname{Im} \left\{ 1 + \frac{g^2 E_0 N}{E} \right\}^2}} \frac{d}{d\Delta_b} \left( \frac{c}{\operatorname{Im} \left\{ 1 + \frac{g^2 E_0 N}{E} \right\}} \right) - \text{коэффициент спек-$$

тральной фильтрации,

$$E_0 = \left( -1 - \frac{2^{2/3} C_1^{1/3} + 2C + \frac{2^{4/3}}{C_1^{1/3}} (C^2 - 3BD)}{6D} \right),$$

$$\gamma_2 = \operatorname{Im} \left[ \frac{-ig^4 N}{c} G_3 \right] - \text{коэффициент нелинейности на } \chi^{(3)},$$

$$\gamma_4 = \operatorname{Im} \left[ \frac{ig^6 N}{c} G_5 \right] - \text{коэффициент нелинейности на } \chi^{(5)},$$

$$\alpha_R = \operatorname{Re} \left[ -\frac{g^2 N}{c} G_1 \right] - \text{коэффициент фазового сдвига,}$$

$$\alpha_I = \operatorname{Im} \left[ -\frac{g^2 N}{c} G_1 \right] - \text{коэффициент линейного поглощения/усиления,}$$

$\alpha_2 = \text{Re} \left[ \frac{ig^4 N}{c} G_3 \right]$  – коэффициент поглощения/усиления третьего порядка,

$\alpha_4 = \text{Re} \left[ \frac{ig^6 N}{c} G_5 \right]$  – коэффициент поглощения/усиления пятого порядка, где  $G_1 = -\frac{iA_1}{E}$ ,

$$G_3 = i \frac{\frac{2^{2/3} B_1}{3C_1^{2/3}} - 2^{4/3} \left( \frac{6D}{C_1^{1/3}} + \frac{B_1}{3C_1^{4/3}} (C^2 - 3BD) \right)}{3DE} \left( 1 - i \frac{A_1 \xi_0}{E} \right),$$

$$G_5 = i \frac{1 - i \frac{A_1 \xi_0}{E}}{3DE} \left[ i \frac{\left( \frac{2^{2/3} B_1}{3C_1^{2/3}} - 2^{4/3} \left( \frac{6D}{C_1^{1/3}} + \frac{B_1}{3C_1^{4/3}} (C^2 - 3BD) \right) \right)^2 \xi_0}{3DE} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1^{1/3}}{2^{4/3}} \left( D_1 - \frac{4B_1^2}{9C_1^2} \right) + 2^{4/3} \left( \frac{2B_1 D}{C_1^{4/3}} + \frac{1}{4C_1^{1/3}} \left( \frac{8B_1^2}{9C_1^2} - D_1 \right) (C^2 - 3BD) \right) \right],$$

$$E = i(A_1 \xi_0 - \Delta_a) - \Gamma_a / 2,$$

$$A_1 = \frac{1}{3D} \left( -2^{2/3} C_1^{1/3} - 2C - 2^{4/3} (C^2 - 3BD) / C_1^{1/3} \right) - 1,$$

$$B_1 = 3D \left( \frac{\sqrt{3D} (3B(4B + 3C)D - 2C^2(B + C))}{\sqrt{B^2 D^2 (4BD - C^2)}} \right),$$

$$C_1 = C(2C^2 - 9BD) + \sqrt{27B^2 D^2 (4BD - C^2)},$$

$$D_1 = -\frac{8\sqrt{3}(C^2 - 3BD) \sqrt{B^2 D^2 (4BD - C^2)}}{B^4 C_1 (C^2 - 4BD)^2} \times$$

$$\times (C^4 + 2BC^2(C - 3D) + 3B^2 D(3D - 2C) + 4B^3 D),$$

где  $B = \Gamma_a^2 / 4 + (\Delta_a + \xi_0)^2$ ,  $C = -4\xi_0(\Delta_a + \xi_0)$ ,  $D = 4\xi_0^2$ ,  $N$  – количество излучателей типа  $a$  в области взаимодействия,  $\Delta_a$  – частота от-

стройки пробного поля от резонанса, и  $\Gamma_a$  – скорость релаксации возбужденного состояния для квантовых точек типа  $a$ . Атомно-оптическая константа связи представлена как  $g_a = \mu_{12} \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0 V}}$ , пробное поле

определяется через  $\epsilon = A_p \left( \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{-1/2}$ , где  $A_p$  – его медленно меняющаяся амплитуда,  $V$  – объем квантования,  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_{qd}}$  ( $\lambda_{qd} = 844$  нм) –

частоты атомно-оптического перехода для пассивных квантовых точек.

Для дальнейшего анализа уравнения (67) выберем следующие значения параметров взаимодействия:

параметры матрицы –  $n_0 = 1,45$ ;

параметры атома:

$\mu_{ab} = 242 \cdot 10^{-30}$  с·м – дипольный момент перехода,

$\lambda = 884 \cdot 10^{-9}$  нм – длина волны рабочего перехода,

$n = 2,5 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup> – концентрация допированных атомов,

$\Gamma_{ba} = 3 \cdot 10^{12}$  – времена релаксации соответствующих переходов;

параметры пробного импульса и импульса накачки:

$I_p = 10^6$  Вт/см<sup>2</sup> – интенсивность пробного импульса,

$T_0 = 10^{-10}$  пс – длительность пробного импульса,

$I_c = 0,9$  МВт/см<sup>2</sup> – интенсивность импульса накачки.

Перейдем в бегущую систему координат для (67)  $T = t - z/v_g$ ,

также сделаем замену  $U = \frac{\epsilon}{\sqrt{|\epsilon_H|^2}} \xi = \frac{z}{L_D}$ ,  $\tau = \frac{T}{T_0}$ , где  $L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$ :

$$\begin{aligned}
 & i \frac{\partial}{\partial \xi} U - \frac{1}{2} \text{Sgn}(\beta_2) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \frac{L_D}{L_{NL}} |U|^2 U = \frac{L_D}{L_{NL}^{(5)}} |U|^4 U - \\
 & - \left( i \frac{L_D}{L_{sw}} - \frac{L_D}{L_{sw}^I} \right) \frac{\partial}{\partial T} (|U|^2 U) + \left( i \frac{L_D}{L_{am}} + \frac{L_D}{L_{ami}} \right) U + \\
 & + i \frac{L_D}{L_{am3}} |U|^2 U - i \frac{L_D}{L_{am5}} |U|^4 U - i \frac{L_D}{L_{DG}} \text{Sgn}(v_2) \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}, \quad (68)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } L_{sw} = \frac{T_0}{|\varepsilon_H|^2 u_R}, \quad L_{sw}^I = \frac{T_0}{|\varepsilon_H|^2 u_I}, \quad L_{am} = \frac{1}{\alpha_I}, \quad L_{ami} = \frac{1}{\alpha_R}, \quad L_{am3} = \frac{1}{\alpha_2 |\varepsilon_H|^2},$$

$$L_{am5} = \frac{1}{\alpha_4 |\varepsilon_H|^4}, \quad L_{DG} = \frac{T_0^2}{|v_2|}.$$

Сделаем замену  $u = NU$ , где  $N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}$ , получим

$$i \frac{\partial}{\partial \xi} u - \frac{1}{2} \text{Sgn}(\beta_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = v |u|^4 u - (i\gamma - \gamma_1) \frac{\partial}{\partial T} (|u|^2 u) + (i\delta + \delta_1) u +$$

$$+ i\varepsilon |u|^2 u - i\mu |u|^4 u - i\beta \text{Sgn}(v_2) \frac{\partial^2 u}{\partial T^2}, \quad (69)$$

$$\text{где } v = \frac{L_{NL}^2}{L_{NL}^{(5)} L_D}, \quad \gamma = \frac{L_{NL}}{L_{\gamma D}}, \quad \gamma_1 = \frac{L_{NL}}{L_{\gamma D}^I}, \quad \delta = \frac{L_D}{L_{\Pi}}, \quad \delta_1 = \frac{L_D}{L_{\Pi}^R}, \quad \varepsilon_1 = \frac{L_{NL}}{L_{\Pi H}},$$

$$\mu = \frac{L_{NL}^2}{L_{\Pi 5} L_D}, \quad \beta = \frac{L_D}{L_D^I}, \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma_2 |\varepsilon_H|^2}, \quad L_{NL}^{(5)} = \frac{1}{\gamma_4 |\varepsilon_H|^4}.$$

## 2.4. Исследование областей устойчивости оптических импульсов с использованием вариационного метода Эйлера – Лагранжа

### 2.4.1. Поиск стационарных решений

Рассмотри УГЛ в виде (70), то есть

$$i \frac{\partial}{\partial \xi} u + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + |u|^2 u - v |u|^4 u = Q,$$

$$\text{где } Q = -i\delta u - i\phi |u|^2 u - i\mu |u|^4 u + i\beta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right). \quad (70)$$

Выберем в качестве пробной подстановки поле в виде

$$u = A_0 \exp \left[ i \left( C_0 X^2 + D_0 Y^2 + F_0 \tau^2 + \Psi_0 \right) - \frac{X^2}{2X_0^2} - \frac{Y^2}{2Y_0^2} - \frac{\tau^2}{2\tau_0^2} \right], \quad (71)$$

где  $A_0$  – нормированная амплитуда;  $\tau_0$  – длительность импульса;  $X_0$  и  $Y_0$  – пространственная ширина импульса по соответствующим

координатам  $X$  и  $Y$ ;  $F_0$  – нелинейный набег фазы волнового пакета;  $C_0$  и  $D_0$  – кривизна волнового фронта по соответствующим координатам  $X$  и  $Y$ ;  $\Psi_0$  – фаза импульса.

Пусть данные параметры зависят от независимой переменной  $\xi$ , тогда каждая из этих функций дает одно из восьми уравнений Эйлера – Лагранжа в среднем для поперечных координат  $X$ ,  $Y$  и  $\tau$ .

Все параметры подстановки являются функциями от пройденного в среде расстояния  $\xi$ , то есть  $A_0 \equiv A_0(\xi)$ ,  $\tau_0 \equiv \tau_0(\xi)$ ,  $X_0 \equiv X_0(\xi)$ ,  $Y_0 \equiv Y_0(\xi)$ ,  $F_0 \equiv F_0(\xi)$ ,  $C_0 \equiv C_0(\xi)$ ,  $D_0 \equiv D_0(\xi)$ ,  $\Psi_0 \equiv \Psi_0(\xi)$ . Используя уравнение Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial \overline{L_C}}{\partial \eta'} \right) - \frac{\partial \overline{L_C}}{\partial \eta} = 2 \operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial U^*}{\partial \eta} dXdYd\tau \right],$$

где  $\overline{L_C} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_C dXdYd\tau$  – усредненный консервативный лагранжиан уравнения (70), а  $\eta = \{A(\xi), X_0(\xi), Y_0(\xi), \tau_0(\xi), C_0(\xi), D_0(\xi), F_0(\xi), \Psi_0(\xi)\}$  – набор варьируемых параметров функций пространственной координаты  $\xi$  подстановки (72), для пространственно-временного солитона

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику параметров подстановочного поля  $u$ :

$$\frac{dA_0}{d\xi} = -\delta A_0 - \frac{7\phi A_0^2}{8\sqrt{2}} - \frac{2\mu A_0^5}{3\sqrt{3}} - \frac{\beta A_0}{W^2} - 2SA_0, \quad (72a)$$

$$\frac{dX_0}{d\xi} = 4C_0 X_0 + \frac{\phi X_0 A_0^2}{4\sqrt{2}} + \frac{2\mu X_0 A_0^4}{9\sqrt{3}} + \frac{\beta}{X_0} - 4\beta C_0^2 X_0^3, \quad (72б)$$

$$\frac{dY_0}{d\xi} = 4D_0 Y_0 + \frac{\phi Y_0 A_0^2}{4\sqrt{2}} + \frac{2\mu Y_0 A_0^4}{9\sqrt{3}} + \frac{\beta}{Y_0} - 4\beta D_0^2 Y_0^3, \quad (72в)$$

$$\frac{d\tau_0}{d\xi} = 4F_0 \tau_0 + \frac{\phi \tau_0 A_0^2}{4\sqrt{2}} + \frac{2\mu \tau_0 A_0^4}{9\sqrt{3}} + \frac{\beta}{\tau_0} - 4\beta F_0^2 \tau_0^3, \quad (72г)$$

$$\frac{dC_0}{d\xi} = \frac{1}{X_0^4} - \frac{A_0^2}{4\sqrt{2}X_0^2} + \frac{2\nu A_0^4}{9\sqrt{3}X_0^2} - 4C_0^2 - \frac{4\beta C_0}{X_0^2}, \quad (72д)$$

$$\frac{dD_0}{d\xi} = \frac{1}{Y_0^4} - \frac{A_0^2}{4\sqrt{2}Y_0^2} + \frac{2\nu A_0^4}{9\sqrt{3}Y_0^2} - 4D_0^2 - \frac{4\beta D_0}{Y_0^2}, \quad (72e)$$

$$\frac{dF_0}{d\xi} = \frac{1}{\tau_0^4} - \frac{A_0^2}{4\sqrt{2}\tau_0^2} + \frac{2\nu A_0^4}{9\sqrt{3}\tau_0^2} - 4F_0^2 - \frac{4\beta F_0}{\tau_0^2}, \quad (72ж)$$

$$\frac{d\Psi_0}{d\xi} = 2\beta S - \frac{1}{W^2} + \frac{7A_0^2}{8\sqrt{2}} - \frac{2\nu A_0^4}{3\sqrt{3}}, \quad (72з)$$

где  $W^{-2} = X_0^{-2} + Y_0^{-2} + \tau_0^{-2}$  и  $S = C_0 + D_0 + F_0$ .

Точные стационарные решения получаются из системы уравнений для производных по  $\xi$  амплитуды, ширины, фазы и кривизны, равных нулю.

Единственные возможные стационарные решения нелинейной системы (72) симметричны с равной шириной  $X_0 = Y_0 = \tau_0$  и кривизной  $C_0 = D_0 = F_0$ .

Для удобства все диссипативные параметры нормированы на число  $\delta_0 = |\delta|$ :  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\delta_0}$ ,  $\mu_0 = \frac{\mu}{\delta_0}$  и  $\beta_0 = \frac{\beta}{\delta_0}$ .

В результате получаем систему из четырех дифференциальных уравнений:

$$\frac{dA_0}{d\xi} = -\delta A_0 - \frac{7\phi A_0^2}{8\sqrt{2}} - \frac{2\mu A_0^5}{3\sqrt{3}} - \frac{\beta A_0}{W^2} - 2SA_0, \quad (73a)$$

$$\frac{dX_0}{d\xi} = 4C_0X_0 + \frac{\phi X_0 A_0^2}{4\sqrt{2}} + \frac{2\mu X_0 A_0^4}{9\sqrt{3}} + \frac{\beta}{X_0} - 4\beta C_0^2 X_0^3, \quad (73б)$$

$$\frac{dC_0}{d\xi} = \frac{1}{X_0^4} - \frac{A_0^2}{4\sqrt{2}X_0^2} + \frac{2\nu A_0^4}{9\sqrt{3}X_0^2} - 4C_0^2 - \frac{4\beta C_0}{X_0^2}, \quad (73в)$$

$$\frac{d\Psi_0}{d\xi} = 2\beta S - \frac{1}{W^2} + \frac{7A_0^2}{8\sqrt{2}} - \frac{2\nu A_0^4}{3\sqrt{3}}, \quad (73г)$$

где  $W^2 = 3X_0^{-2}$  и  $S = 3C_0$ .

В результате симметричности ширины и кривизны, введенной нами, получаем вместо восьми уравнений четыре и сводим систему (72) к более простой (74).

Предположим, что  $\psi'_0 = 0,09A_0^2$ , то есть правая часть (73г) равна  $0,09A_0^2$ , тогда отсюда можно получить

$$X_0 = 2,79^{-1}(1,38 - vA_0^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (74)$$

Остальные значения параметров найдем с помощью проведения элементарных операций с системой алгебраических уравнений.

Разделим (73б) на  $X_0$  и вычтем из полученного результата (73в) умноженное на  $X_0^2\beta$ . В результате чего получим уравнение, из которого можно выразить  $C_0$ :

$$C_0 = 0,032A_0^2[1,38(\varepsilon_0 - \beta_0) + A_0^2(\mu_0 + v\beta_0)]\delta_0. \quad (75)$$

Разделим (73а) на  $A$  и умножим на  $\frac{2}{3}$ , прибавим к этому (73б), поделенное на  $X_0$ , и еще прибавим к полученной сумме (73в), умноженное на  $X_0^2\beta$ . В итоге получим уравнение, из которого можно выразить  $A_0$ :

$$A_0 = 1,17 \sqrt{\frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma + 98,53(\mu_0 + \beta_0 v)}}{6(\mu + \beta_0 v)}}, \quad (76)$$

где  $\gamma = 3\beta_0 - 4\varepsilon_0$ .

В результате получили стационарные решения системы (73) с симметричными шириной и кривизной, и теперь возможно исследование стационарного решения на устойчивость.

#### ***2.4.2. Исследование стационарных решений на стабильность по методу Ляпунова***

Для того чтобы подстановочное поле (71) было оптической пучкой, необходимо чтобы стационарное решение было устойчивым. Для проверки устойчивости решения воспользуемся критерием устойчивости Ляпунова. Для этого необходимо построить матрицу Якоби от производных правых частей уравнений (72) по отношению к неизвестным величинам. Стационарные решения устойчивы, только если вещественные части собственных чисел матрицы Якоби  $J$  системы (72) будут отрицательны.

Приравняв  $\det[J - \lambda] = 0$ , получим произведение вида

$$(\lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3)(\lambda^2 + \alpha_4\lambda + \alpha_5) = 0. \quad (77)$$

Для устойчивости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы действительные части собственных чисел характеристического уравнения (77) были отрицательны. При определении знака собственных чисел воспользуемся критерием Рауса – Гурвица. Для этого разобьем (77) на систему из двух уравнений:

$$(\lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3) = 0, \quad (78a)$$

$$(\lambda^2 + \alpha_4\lambda + \alpha_5) = 0. \quad (78b)$$

Воспользуемся теперь критерием Рауса – Гурвица для определения устойчивости системы (72), построим матрицы Гурвица для уравнений (78):

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_4 & 1 \\ 0 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

По критерию для того чтобы собственные числа имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы Гурвица были положительны, откуда получаем неравенства:

$$\alpha_i > 0, i = 1 \dots 5, \quad (79a)$$

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 > 0, \text{ где} \quad (79b)$$

$$\alpha_1 = \delta_0(1,0 + A_0^2(0,968\beta_0 - 1,23\varepsilon_0) + A_0^4(-1,47\mu_0 - 0,706\beta_0\nu)), \quad (80a)$$

$$\alpha_2 = A_0^4(-0,126 + A_0^2\nu(0,453 - 0,263A_0^2\nu)), \quad (80b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & A_0^4\delta_0((0,247 + A_0^2(0,328\beta_0 - 0,394\varepsilon_0 - 0,361\nu) + \\ & + A_0^8\nu^2(-0,177\mu_0 - 0,177\beta_0\nu)) + A_0^6\nu(0,487\mu_0 + 0,661\beta_0\nu - 0,209\varepsilon_0\nu) + \\ & + A_0^4(-0,334\mu_0 + ((-0,813)\beta_0 + 0,575\varepsilon_0 + 0,131\nu)\nu), \quad (80b) \end{aligned}$$

$$\alpha_3 = A_0^2\delta_0(0,353\varepsilon_0 + 0,256A_0^2\mu_0 + \beta_0(0,704 - 0,513A_0^2\nu)), \quad (80г)$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & A_0^4\delta_0 - (0,374 + A_0^2(-0,451\beta_0 + 0,551\varepsilon_0 + 0,815\nu) + \\ & + A_0^8V^2(0,566\mu_0 + 0,363\beta_0\nu) + A_0^6\nu(-1,15\mu_0 - 1,23\beta_0\nu + 0,535\varepsilon_0\nu) + \\ & + A_0^4(0,52\mu_0 + (1,34\beta_0 - 1,13\varepsilon_0 - 0,395\nu)\nu)), \quad (80д) \end{aligned}$$

$$\alpha_5 = A_0^4(0,247 + A_0^2\nu(-0,361 + 0,131A_0^2\nu)). \quad (80e)$$

В результате при значениях, равных  $\beta_0 = 5$ ,  $\nu = 1$  и  $\delta_0 = 0,01$  построим сепаратрисы системы (79) и получим область устойчивости, то есть область, где выполняются все неравенства.

В области I (рис. 38) решения (74), (75) и (76) системы (72) являются устойчивыми, так для любого значения из этой области главные миноры матрицы Гурвица положительны. Это влечет за собой отрицательность действительных частей собственных чисел характеристического уравнения  $\det[J - \lambda] = 0$ , где  $J$  – матрица Якоби системы (72).

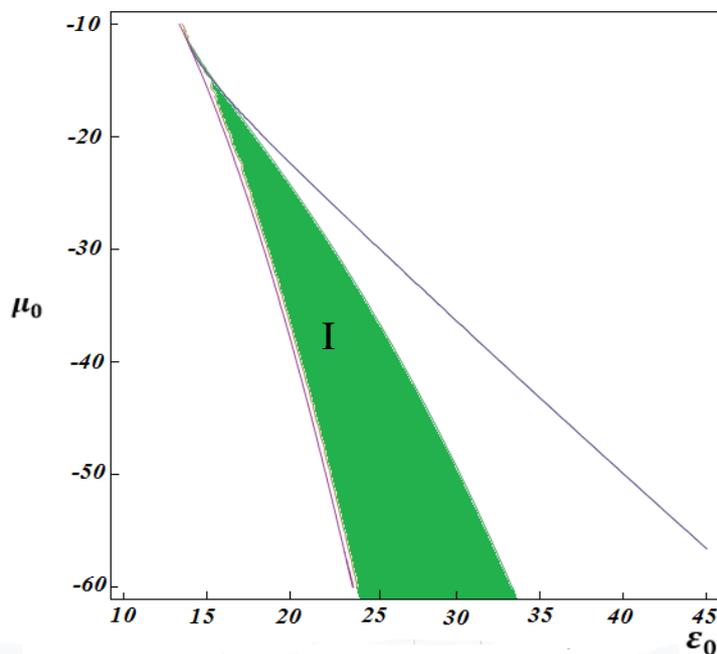


Рис. 38. Выделенная область I – область устойчивости оптической пули в зависимости от параметров  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$

В этой области решение уравнения Гинзбурга – Ландау в виде (71) устойчиво, т. е. данное решение является оптической пулей.

Так как диссипативные параметры  $\delta$ ,  $\mu$ ,  $\varphi$  и  $\beta$  в (70) зависят от параметров оптической среды, то найдем области стабильности оптической пули в зависимости от концентрации атомов  $n$  в среде и отстройки пробного импульса от квантовой точки типа “A”  $\Delta_a$  (рис. 39). В качестве начальных значений параметров среды выберем:

$S_{dif} = 1$  – знак дифракции,  $S_{disp}=1$  – знак дисперсии,  $\mu_{ab} = 1,94 \cdot 10^{-28}$  – дипольный момент квантовых точек типа  $a$  (рис. 39),  $\Gamma_a = 10^{11}$  – скорость релаксации квантовых точек типа “ $a$ ” (рис. 39),  $\beta_0 = 4$ ,  $\Gamma_2 = 5,5 \cdot 10^9$  – скорость релаксации квантовых точек типа “ $b$ ” (рис. 39),  $I_p = 10^6$  – начальная интенсивность пробного поля.

Используя (73) и условия устойчивости (76) оптической пули, численно смоделируем области устойчивости и получим результат, отраженный на рис. 39.

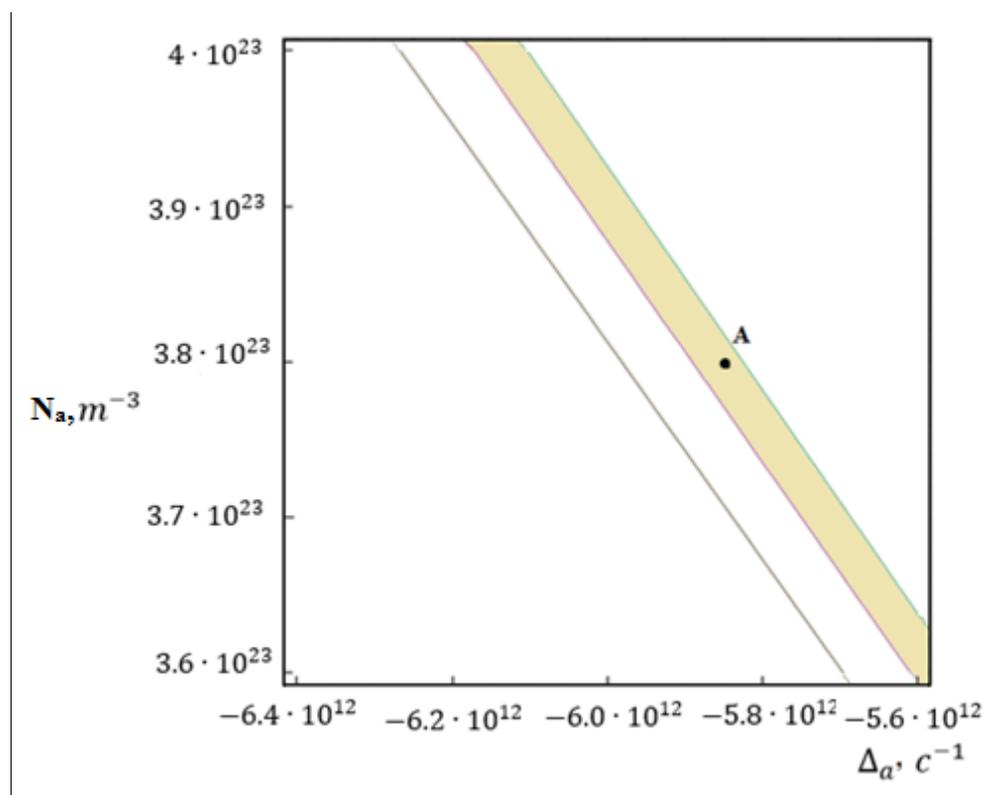


Рис. 39. Выделенная область на графике – область устойчивости параметров оптической пули в зависимости от концентрации атомов и отстройки верхнего квантового уровня. Точка  $A$  со значениями  $n = 38 \cdot 10^{22}$  и  $\Delta_a = -5,85 \cdot 10^{12}$

Прямое численное моделирование системы уравнений (72) со значениями из области стабильности точки  $A$  на рис. 39 позволяет увидеть стабилизацию параметров импульса как на рис. 40 и 41.

Так же можно построить трехмерный контур импульса (32), представленный на рис. 42.

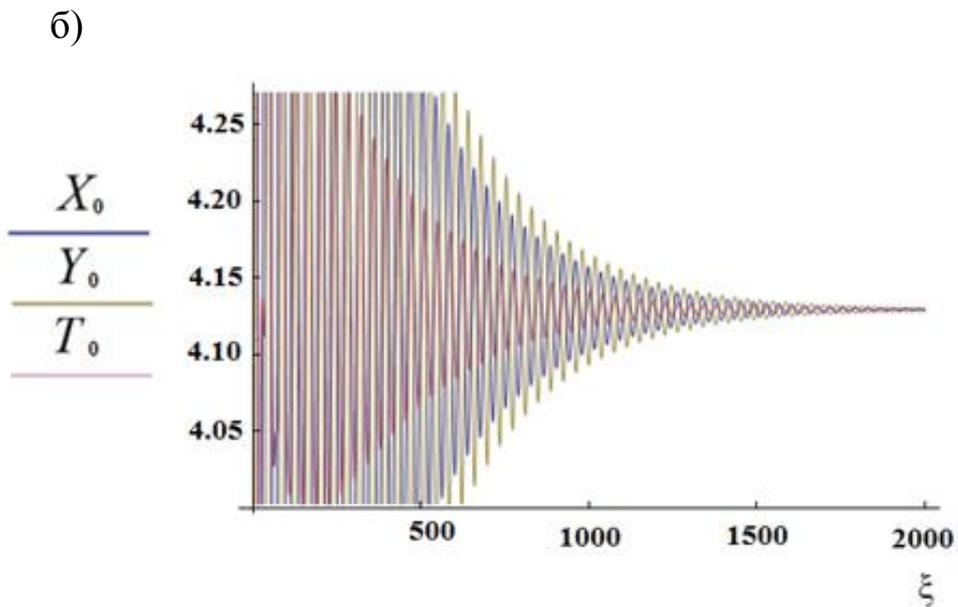
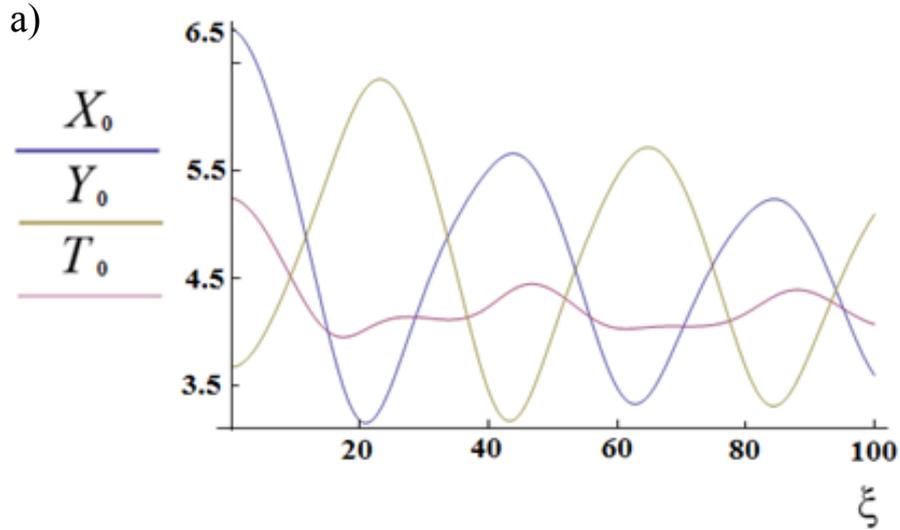
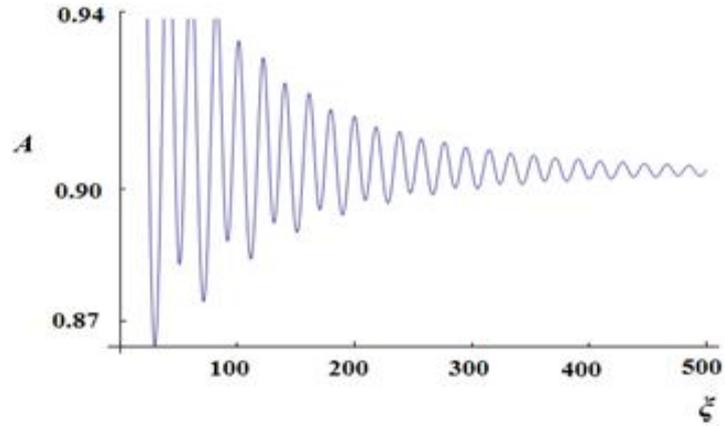


Рис. 40. На рисунках изображены кривые ширины импульса  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $T_0$ . Ширина соответствует разным начальным значениям в соотношении  $1,3 : 1 : 0,7$  соответственно  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $T_0$ : а – изображены кривые при малых значениях пройденного расстояния; б – при больших расстояниях. В результате чего мы видим стабилизацию формы волнового пакета

а)



б)

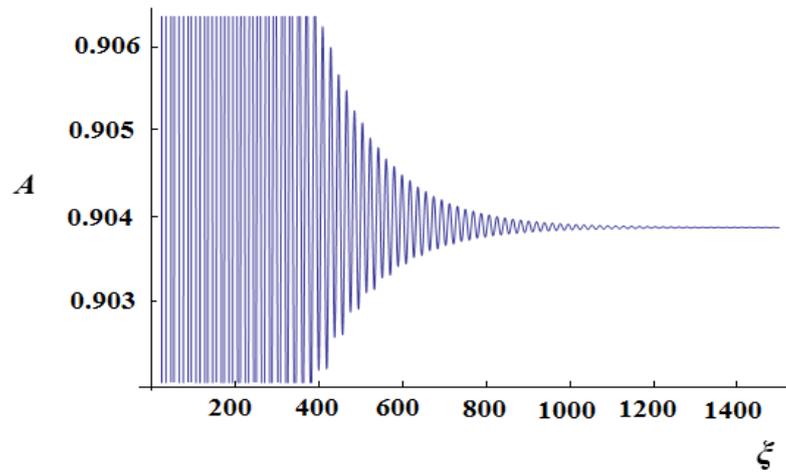
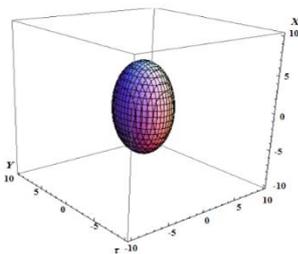
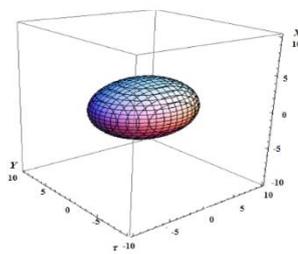


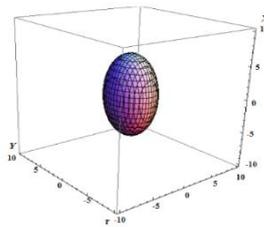
Рис. 41. На рисунках изображены кривые изменения амплитуд в зависимости от пройденного расстояния импульса: а – изображена кривая при малых значениях пройденного расстояния; б – при больших расстояниях. На графиках видно, что амплитуда импульса стабилизируется и принимает постоянное значение



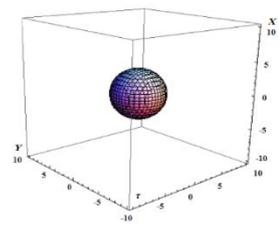
а)  $\xi = 0$



б)  $\xi = 10$



в)  $\xi = 50$



г)  $\xi = 2000$

Рис. 42. На рисунке изображен контур квадрата модуля импульса (71): а – импульс имеет стационарный вид  $\xi = 0$ ; б –  $\xi = 10$ ; в –  $\xi = 50$ ; г –  $\xi = 2000$ , где  $\xi$  – пройденный путь импульса. Из рисунка видно, что контур импульса вначале начинает осциллировать ширину в различных направлениях, а затем параметры импульса стабилизируются и контур превращается в сферу

Таким образом, в проведенном исследовании продемонстрирована возможность управления формированием трехмерных диссипативных оптических солитонов – лазерных пульс – в процессе распространения оптических импульсов в резонансных средах двухуровневых атомов двух типов – пассивных, находящихся в основном состоянии, и активных, переведенных в возбужденное состояние предварительным воздействием мощного импульса оптической накачки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интерес к оптическим свойствам плотных систем излучателей и многокомпонентным средам с оптически активными частицами, к которым относятся примесные кристаллы и стекла, не ослабевает несколько последних десятилетий. Современные успехи в развитии измерительной техники и систем накопления и обработки информации лишь усиливают тенденции к изучению таких систем с целью их последующего полезного использования и уточнения фундаментальных законов природы.

Наблюдаемые отличия в характеристиках излучения ансамблей квантовых объектов и одиночных источников вместе с изменением оптических свойств излучателей в зависимости от их локального окружения на масштабах как порядка длин волн, так и субатомных ставят сложнейшие задачи построения новых теорий. Понимание основополагающих взаимодействий, которые определяют обнаруженные свойства оптических материалов, дает возможность развития методов количественного описания и последующего построения новых технологических схем. Изучение и использование свойств активных или резонансных возбуждающему излучению частиц и систем в различных средах определяют развитие самых современных направлений физики – фотоники и нанооптики. Наличие примесей редкоземельных элементов в оптических волокнах, дефекты типа азот-вакансия в алмазных пленках представляют основу для разработки элементов оптической и квантовой логики, систем регистрации и генерации коротких оптических импульсов и одиночных фотонов.

Существующие на сегодняшний день методы регистрации и анализа спектров излучения отдельных атомов и молекул в упорядоченных и неупорядоченных средах имеют четкие перспективы стать новыми, более точными, способами диагностики микро- и макрохарактеристик сред. Успех последнего, однако, в большой степени зависит от развития теории. Примечательно, что несмотря на значительные усилия и успехи в теоретическом описании некоторых наблюдавшихся явлений, на многих направлениях остаются нерешенными

целые комплексы проблем и задач. Нередко в решении задач атомно-оптического взаимодействия превалирует феноменологический подход, что также определяет обширную область для построения более строгих теорий и развития новых формализмов описания. К одному из нерешенных вопросов можно отнести явление внутренней или безрезонаторной оптической бистабильности, наблюдаемой при регистрации оптического отклика ионов или ионных пар редкоземельных металлов в различных кристаллах и стеклах при низкой температуре при возбуждении внешним лазерным полем. Здесь возможны ситуации, когда система возбуждается одинаковыми лазерными импульсами, а интенсивность люминесценции принимает одно из двух существенно различающихся значений. При минимальной температуре и плотности мощности лазера, близкой к  $1 \text{ кВт} \cdot \text{см}^{-2}$ , возможно реализовать как почти максимально яркий отклик, так и свечение лишь незначительно интенсивнее того, что получается при слабом возбуждении. Вся же зависимость имеет ярко выраженный характер гистерезиса. При этом в подобных экспериментах отсутствуют системы искусственной обратной связи для создания бистабильности. Процессы, которые в подобных условиях заставляют примеси люминесцировать с различной интенсивностью при одинаковой накачке, до сих пор в точности не определены. Несмотря на то что надежды на скорое создание приборов, которые могли использовать такой способ светоиндуцированного переключения, в значительной степени не оправдались, современный интерес к этой проблеме обусловлен необходимостью понимания фундаментальной составляющей во взаимодействии резонансного излучения с ансамблями атомов и как следствие возможностью развития новых способов диагностики состояния материалов.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика : пер. с англ. М. : Мир, 1996. 323 с.
2. Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. 304 с.
3. Говорухин В. Н. Численный анализ динамических систем : учеб. пособие. Ростов н/Д. : Наука, 2009. 81 с.
4. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
5. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения. М. : Мир, 1980. 366 с.
6. Задорожный В. Н. Высшая математика для технических университетов. Ч. V. Дифференциальные уравнения : учеб. пособие. Томск : Изд-во Томс. политехн. ун-та, 2007. 396 с.
7. Постнов Д. Э., Павлов А. Н., Астахов С. В. Методы нелинейной динамики : учеб. пособие. Саратов, 2008. 120 с.
8. Цытович В. Н., Морфилл Г. Е., Томас В. Х. Теория комплексной плазмы. Приложения // Физика плазмы. 2004. Т. 30. № 10. С. 877 – 929.
9. Фортов В. Е., Храпак С. А., Храпак А. Г., Молотков В. И., Петров О. Ф. Пылевая плазма // УФН. 2004. Т. 174. № 5. С. 495 – 544.
10. Akhmediev N., Ankiewicz A. (eds.): *Dissipative Solitons*. Lect. Notes Phys. V. 661. Springer, Heidelberg. 2005.
11. Akhmediev N. and Ankiewicz A. Solitons around us: Integrable, Hamiltonian and dissipative systems, in *Optical Solitons: Theoretical and Experimental Challenges*, Edited by K. Porsezian and V.C. Kurakose. Springer, Berlin-Heidelberg. 2003.
12. Akhmediev N. and Ankiewicz A. Solitons of the complex Ginzburg – Landau equation, in *Spatial Solitons 1*, Edited by S. Trillo and W. E. Toruellas. Springer, Berlin-Heidelberg. 2001.
13. Akhmediev N. and Ankiewicz A. Dissipative Solitons in the Complex Ginzburg – Landau and Swift-Hohenberg Equations.
14. Chang W., Ankiewicz A., Soto-Crespo J. M. and Akhmediev N. Dissipative soliton resonances, *Phys. Rev. E* 76, 016607. 2007.

15. Ciccarello F., Napoli A., Messina A. [et al.] *J. of Opt. B* 6 S118 (2004).
16. Fortov V. E., Ivlev A. V., Khrapak S. A., Khrapak A. G., Morfill G. E. Complex (dusty) plasmas. Current status, open issues, perspectives. *Physics Reports*. V. 421. 2005.
17. Ishihara O. Complex plasma: dusts in plasma. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2007. V. 40.
18. Kortshagen U. Nonthermal plasma synthesis of semiconductor nanocrystals. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2009. V. 42. 113001.
19. Maimistov A. I. Evolution of solitary waves which are approximately solitons of a nonlinear Schrodinger equation, *J. Exp. Theor. Phys.* 1993. 77, 727.
20. Vladimirov S. V., Ostrikov K. Dynamic self-organization phenomena in complex ionized gas systems: new paradigms and technological aspects. *Physics Reports*. 2004. V. 393.
21. Ахмедиев Н., Анкьюиц А. Three Sources and Three Component Parts of the Concept of Dissipative Solitons, in *Lect. Notes Phys.* 751. 2008. Springer, Berlin Heidelberg.
22. Ахмедиев Н., Анкьюиц А. Десипативные солитоны. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 661. Springer, Berlin, 2005.
23. Арли В. Смит, Дарл Д. Армстронг, *OPTICS EXPRESS*, 2003. V. 11(8). 868.
24. Вадейко И., Прохоров А. В., Рубин А. В., Аракелян С. М. *Phys. Rev. A* 72, 013804, 2005.
25. Власов Р. А. и Лемеза А. М., *Phys. Rev. A* 84, 023828, 2011.
26. Горбач А. В., Скрябин Д. В., Харвей К. Н. // *Phys. Rev. A.*, V. 77. P. 063810 (2008) ; Herman B. J., Eberly J. H., Raymer M. G. *Phys. Rev. A* 39, №7, 3447. 1989.
27. Горшков А. В., Андрэ А., Люкин М. Б., Соренсен А. С. *Phys. Rev. A*, 76, 033805. 2007.
28. Деметр Д., Дзотьян Д., Дзотьян Г. П., *Phys. Rev. A* 76, 023827. 2007.
29. Джен ВЭНГ Алан И. Вилнер (2013). *Optical Signal Processing: Data Exchange, Design and Architectures for Digital Signal Processing*, Dr. Gustavo Ruiz (Ed.), ISBN 978-953-51-0874-0, InTech, DOI: 10.5772/52205.

30. Качалов Д. Г., Гамазков К. А., Павельев В. С., Хонина С. Н., Оптимизация бинарного ДОЭ для формирования «световой бутылки» // Компьютерная оптика. 2011. Т. 35. № 1. С. 70 – 76.
31. Кившарь Ю. С., Агравал Г. П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. М. : Физматлит, 2005. 648 с.
32. Короленко П. В. Оптические вихри // Соросовский образовательный журнал, 1998. № 6. С. 94 – 99.
33. Леблонд Х., Маломед Б. А., Михалач Д. Phys. Rev. A 80, 033835. 2009.
34. Лега Д., Молоней Д. В., Ньюэл А. К., PHYS. REV. LETT., V. 73(22), 2978. 1994.
35. Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. М. : Наука, 1976. 583 с.
36. Михалач Д., Мазила Д., Ледерер Ф., Леблонд Х., Маломед Б. А. Phys. Rev. A, 76, 045803. 2007.
37. Михалач Д., Мазила Д., Скарка В., Маломед Б. А., Леблонд Х., Алексис Н. Б., Ледерер Ф. Phys. Rev. A, 82, 023813. 2010.
38. Нешев Д. Н., Александр Т. Ж., Островская И. А., Кившар Ю. С., Мартин Х., Макарик И., Чен З., Phys. Rev. Lett. 92, 123903. 2004.
39. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Наука, 1974. 331 с.
40. Пугач Р., Шукер М., Фирстенберг О., Рон А., Девидсон Н. Phys. Rev. Lett., 98, 203601. 2007.
41. Рам Орон, Нир Дэвидсон, Ашер А. Фризем, Эрез Хасман, Optics Communications. V. 182, 205. 2000.
42. Розанов Н. Н. Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-. М. : Физматлит, 2011. 536 с.
43. Розанов Н. Н., Федоров С. В., Шацев А. Н. Нестационарные многовихревые и делящиеся солитоноподобные структуры лазерного излучения // Оптика и спектроскопия. 2003. Т. 95, № 6. С. 902 – 907.
44. Сзамейт А., Баркхоф Д., Пертч Т., Нолт С., Танерман А., Opt. Exp. 14, 6055. 2006.
45. Скарка В., Алексис Н. Б., Дербази М., Бережани В. И. Phys. Rev. B., 81, 035202. 2010.
46. Скарка В., Алексик Н. Б., Леблонд Х., Маломед Б. А. и Михалач Д. Phys. Rev. Lett., 105, 213901. 2010.

47. Тахакиро Куга, Йоши Тори, Норитсугу Шиокаша, Такуя Хирана. *Phys. Rev. Lett.* V. 78(25). 4713. 1997.
48. Fedorov S. V., Rosanov N. N., Shatsev A. N., Veretenov N. A., Vladimirov A. G. Topologically multicharged and multihumped rotating solitons in wide-aperture lasers with a saturable absorber // *IEEE J. Quantum Electron.* 2003. V. 39. № 2. P. 197 – 205.
49. Флейсчакер Р., Дей Т. Н., Эверс Д. // *Phys. Rev. A.* 2010. V. 82. P. 013815.
50. Карташов Я. В. Уединенные нелинейные волны в микроструктурированных средах: формирование, стабилизация и контроль : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Троицк, 2012. 324.
51. Киселев А. С., Киселев А. С., Высотина Н. В., Розанов Н. Н., Семенов В. Е., Смирнов В. А. О предельно коротких диссипативных солитонах // *Квантовая электроника.* 2008. № 137. С. 38.
52. Бугай А. Н., Сазонов С. В. Длинно-коротковолновые оптические пули и вихри // *Ученые записки Казанского государственного университета.* 2007. Т. 149. Кн. 1. С. 13 – 19.
53. Булгакова С. А., Дмитриев А. Л. Нелинейно-оптические устройства обработки информации : учеб. пособие. СПб., 2009. 56 с.

*Учебное издание*

ЛЕКСИН Андрей Юрьевич  
ПРОХОРОВ Алексей Валерьевич  
ГУБИН Михаил Юрьевич  
и др.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ СТРУКТУР  
В ДИССИПАТИВНЫХ АТОМНО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Учебное пособие

Редактор А. А. Амирсейидова  
Технический редактор Н. В. Тупицына  
Корректор Е. П. Викулова  
Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Подписано в печать 07.09.15.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6,51. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.