

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
Владимирский государственный университет

А. П. АВЕРИН

# ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД

*В двух частях*

*Часть I. Основы физики атомных столкновений*

*Курс лекций*

Владимир 2005

УДК 537.5  
ББК 22.333. I/3  
А19

Рецензенты:

Первый заместитель Генерального директора Государственного  
научно-исследовательского испытательного  
лазерного центра РФ «Радуга», кандидат технических наук  
*А.Н. Шевцов*

Доктор физико-математических наук  
зав. кафедрой «Радиофизика»  
Московского физико-технического института  
*В.К. Слока*

Кандидат физико-математических наук,  
Доцент Владимирского государственного университета  
*В.Г. Прокошев*

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Владимирского государственного университета

**Аверин, А. П.** Газовый разряд : курс лекций: в 2 ч. Ч. 1. Основы физики атомных столкновений / А. П. Аверин ; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2005. – 138 с. – ISBN 5-89368-599-7.

Расчитан на студентов, обучающихся по специальности 072300 «Лазерная техника и лазерные технологии». В первой части даются определения физических величин, описывающих многообразие процессов и явлений, происходящих как в ионизированном газе, так и в плазме.

Рассмотрены основные физические процессы, обуславливающие протекание электрического тока через газовый промежуток, включая катодные процессы. Материал, изложенный в первой части, является фундаментом для последующего изучения конкретных типов газового разряда, играющих основополагающую роль в работе подавляющего большинства газовых лазеров. Кроме того, этот материал окажется полезным при изучении таких дисциплин, как физические основы квантовой электроники, лазерная техника, лазерные технологии.

Ил. 32.

УДК 537.5  
ББК 22.333. I/3

ISBN 5-89368-599-7

© Владимирский государственный университет, 2005

## ОГЛАВЛЕНИЕ

- Лекция 1. **ВВОДНАЯ.** Предмет изучения физики плазмы и газового разряда. Краткая история предмета. Разряды в постоянном электрическом поле. Классификация разрядных процессов..... 5
- Лекция 2. **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИЗИКИ АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ.** Упругие и неупругие удары. Эффективное сечение. Частота столкновений. Длина свободного пробега. Вероятности различных пробегов. Числа столкновений при нормальных условиях. Сечения рассеяния электронов нейтральными атомами и молекулами..... 15
- Лекция 3. **ПОТЕРИ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ.** Дифференциальное сечение и угловое распределение рассеяния. Транспортное сечение и потери импульса. Упругие потери энергии. Приведенная масса. Система центра масс. Относительное движение. Максвелловское распределение по относительным скоростям ..... 26
- Лекция 4. **ОБЩИЙ СЛУЧАЙ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ.** Дифференциальное сечение. Расходимость полного сечения. Обмен импульсом и энергией в общем случае упругого рассеяния. Транспортное сечение для столкновения частиц сравнимой массы. Релаксация в поступательных степенях свободы газа..... 36
- Лекция 5. **СТОЛКНОВЕНИЯ ИОНОВ С НЕЙТРАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ.** Поляризационное сечение. Взаимодействие с дипольными молекулами. Резонансная перезарядка..... 43
- Лекция 6. **КУЛОНОВСКИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ.** Кулоновские столкновения заряженных частиц. Формула Резерфорда. Интеграл транспортного сечения. Потенциал вокруг заряда в плазме. Дебаевский радиус. Идеальность плазмы. Кулоновский логарифм. Частоты столкновений и длины пробега. Обмен энергией и релаксация..... 49

Лекция 7. <b>НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ.</b> Ионизация возбужденных атомов и ионов. Возбуждение и дезактивация электронных состояний. Принцип детального равновесия. Возбуждение молекулярных колебаний. Возбуждение вращений молекул. Диссоциация молекул. Возбуждение и ионизация ионами .....	60
Лекция 8. <b>ДРЕЙФ И ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ.</b> Скорость дрейфа. Подвижность. Подобие. Проводимость ионизированного газа. Энергия электронов.....	75
Лекция 9. <b>ДИФФУЗИЯ, ДРЕЙФ И ПРОТЕКАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ПЛАЗМЕ.</b> Диффузионный поток. Соотношение Эйнштейна. Амбиполярная диффузия. Определение понятия "плазма". Диффузионный ток и искажение поля градиентами. Критерий электронейтральности. Амбиполярный поток зарядов вдоль неоднородного поля .....	89
Лекция 10. <b>ОБРАЗОВАНИЕ И ГИБЕЛЬ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ГАЗЕ.</b> Различные механизмы и их роль в условиях газового разряда. Ионизация электронным ударом в электрическом поле. Первый таунсендовский коэффициент. Ионизационная способность. Уравнение Саха .....	98
Лекция 11. <b>ИСПУСКАНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ.</b> Электроны проводимости в металле. Температура вырождения. Распределение Ферми. Работа выхода. Термоэлектронная эмиссия. Влияние внешнего поля на работу выхода. Эмиссия электронов под действием частиц. Вырывание электронов из тела сильным электрическим полем. Влияние эмиссии на усиление тока первичных электронов .....	109
Лекция 12. <b>КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ.</b> Функция распределения. Формулировка кинетического уравнения. Приближение для угловой зависимости. Уравнение для энергетического спектра электронов.....	123
Приложение .....	133

## *Лекция 1. ВВОДНАЯ*

*Предмет изучения физики плазмы и газового разряда •  
Краткая история предмета • Разряды в постоянном  
электрическом поле • Классификация  
разрядных процессов*

Термин «газовый разряд» происходит от обозначения процесса разрядки заряженного конденсатора через цепь, включающую в себя газовый промежуток между электродами. При достаточно высоком напряжении в газе под действием электрического поля возникает ионизированное состояние. Как говорят, происходит электрический пробой газа или просто – пробой. Газовая среда, в исходном состоянии диэлектрическая, становится проводником электричества, цепь между обкладками замыкается, и конденсатор разряжается.

Со временем разрядом стали называть всякий процесс протекания электрического тока через ионизированный газ, а также любой процесс возникновения ионизации и приобретения газом свойства электропроводности под действием приложенного электрического поля. Поскольку ионизированный газ чаще всего светится, стали говорить: разряд зажигается, горит, гаснет.

Процесс протекания электрического тока обычно ассоциируется с представлением об электрической цепи, составленной из проводников. Но в быстропеременных электрических полях, а тем более в поле электромагнитных излучений для осуществления направленного движения зарядов, которое и представляет собой электрический ток, вовсе не требуется присутствия замкнутой цепи и электродов. Между тем многие эффекты, которые наблюдаются в объеме газа под действием переменных полей и электромагнитных волн, – и пробой, и поддержание состояния ионизации, и диссипация энергии поля, – в принципе не отличаются от тех, которые на-

блюдаются в случае постоянного поля, приложенного к газовому промежутку между электродами. Все подобные процессы теперь называют разрядными и естественным образом включают в физику газового разряда. И это несмотря на тот факт, что протекание электрических токов, к тому же не обязательно замкнутых, при этом не является столь значительным. Последнее в особенности касается полей очень больших частот – сверхвысокочастотного (СВЧ) и оптического диапазонов. Так, если в случае постоянного или низкочастотного электрических полей диссипацию энергии поля трактуют как выделение джоулева тепла электрическим током, то в случае электромагнитных волн понятие *ток* употребляют редко и о диссипации говорят как о поглощении излучения.

Таким образом, можно сказать, что физика газового разряда изучает следующие вопросы:

- процессы, связанные с протеканием электрического тока в газах;
- процессы, связанные с возникновением под действием поля способности проводить электричество и поглощать электромагнитное излучение.

В течение последних пятидесяти лет приобрела характер самостоятельной дисциплины физика плазмы. Ее содержание частично перекрывается с содержанием физики газового разряда. Вообще *плазмой* называют газ, ионизированный до такой степени, что электрические силы притяжения, действующие между электронами и положительными ионами, препятствуют заметному разделению зарядов. Плазма – это ионизированный газ, который электрически нейтрален в каждом малом объеме.

Исключительно быстрое и глубокое развитие науки о плазме обусловлено огромным научным и практическим интересом к проблеме управляемого термоядерного синтеза. Кроме того, это развитие поддерживалось астрофизическими исследованиями космической плазмы. Этим же и были обозначены характерные черты данной науки.

Физика плазмы изучает:

- ионизированный газ очень низкой плотности, когда столкновениями заряженных частиц с нейтральными можно пренебречь;
- самосогласованное поведение совокупности заряженных частиц в магнитном поле;
- всевозможные колебания, волны и неустойчивости, происходящие в совокупности заряженных частиц в магнитном поле.

Различают два вида плазмы – *низко-* и *высокотемпературную*. В первой температура достигает десятков тысяч градусов. Такие температуры встречаются в разрядах, и низкотемпературная плазма является объектом изучения физики и техники газового разряда. Высокотемпературная плазма – это плазма с температурами в миллионы градусов, как правило, чрезвычайно низкой плотности и в магнитном поле.

Если не считать молнии, разрядные явления были впервые обнаружены в начале XVII в., когда заметили, что заряженные трением проводники, будучи изолированными от земли и других проводников, постепенно теряют заряд. В 1785 г. Кулон экспериментально показал, что заряд уходит через воздух, а не в результате несовершенства изоляции. В течение XVIII в. проводили отдельные опыты с искрами, которые получали, заряжая тела при помощи электростатических машин, а также обращаясь к атмосферному электричеству. Опыты с молнией нередко заканчивались трагически.

В начале XIX в. появились достаточно мощные электрические батареи – источники постоянного тока – и был открыт *дуговой разряд*. В.В. Петров сообщил об этом в 1803 г. Дуга получалась при соприкосновении и последующем разведении угольных электродов, подсоединенных к батарее. Позднее дугу в воздухе получил и исследовал Дэви в Англии. Разряд был назван дуговым, потому что ярко светящийся плазменный шнур в воздухе изгибается, всплывая своей серединой под действием архимедовой силы. В 1831 – 1835 гг. Фарадей открыл и исследовал *тлеющий разряд*. Он установил слоистую структуру катодного пространства – чередующиеся темные и светлые области, одна из которых теперь называется *фарадеевым темным пространством*. Фарадей работал с трубками, откаченными до давлений в несколько тор, и источниками напряжения до 1000 В.

Исключительно богат открытиями был конец XIX в. Опыты Крукса с катодными лучами (пучком электронов, летящих от катода в трубке при давлениях  $p \leq 10^{-2}$  тор), установление Дж. Дж. Томсоном отношения заряда к массе  $e/m$  для основного носителя отрицательного заряда привели к пониманию того факта, что главным переносчиком тока в газе является электрон. Следует отметить, что вообще история физики газового разряда конца XIX – начала XX вв. неотделима от атомной физики. Изучение явлений в разрядных трубках дало много сведений по физике элементарных процессов с участием электронов, ионов, атомов, светового излучения.

Начиная с 1900 г. ученик Дж. Дж. Томсона Таунсенд, основатель школы в физике газового разряда, установил многие закономерности ионизации и однородного (его называют *таунсендовским*) пробоя газа в электрическом поле. С начала XX в. накапливались многие экспериментальные данные по элементарным процессам, сечениям различных электрон-атомных столкновений, скоростям дрейфа электронов и ионов, их диффузии, рекомбинации и т. д. Все это составило основу современного справочного материала, без которого немислима работа в области разрядов, вывело физику газового разряда из наблюдательной науки, открыв возможности для количественных расчетов многих разрядных процессов. Понятие плазмы было введено в 1928 г. Ленгмюром и Тонксом. Ленгмюр оставил большой след в физике разрядов. С его именем связан фундаментальный зондовый метод исследования плазмы и многое другое.

Относительно разрядов в различных частотных диапазонах поля можно сказать, то создание генераторов поля и изучение соответствующих разрядных процессов в основном шло в порядке следования диапазонов. Началось все с изучения разрядов в постоянном поле. Высокочастотный разряд известен с конца XIX в., его наблюдал Тесла в 1891 г. Разряд легко получить, если внутрь катушки-соленоида поместить откаченный сосуд и пропустить через катушку ток высокой частоты. Под действием вихревого электрического поля, которое индуцируется переменным магнитным потоком, в остаточном газе возникает пробой и зажигается разряд. Однако механизм зажигания разряда стал в достаточной степени понятным лишь значительно позже, фактически в результате работ Дж. Дж. Томсона 1926 – 1927 гг.

Следующий существенный шаг в сторону повышения частоты был сделан в конце 40-х годов XX столетия. Развитие радарной техники в годы второй мировой войны вызвало большой интерес к явлениям в СВЧ диапазоне, в том числе и к разрядам, которые зажигаются в волноводах и резонаторах. С того времени началось систематическое изучение этих эффектов. Следует отметить, что процесс СВЧ пробоя, который был хорошо изучен в течение достаточно короткого времени, неизмеримо проще эффекта *искрового пробоя* в постоянном поле, которым занимаются много десятков лет и где уровень понимания еще далек от желаемой полноты.

Разряды в оптическом диапазоне были освоены совсем недавно, только после изобретения лазеров. Пробой газа под действием сфокусированного лазерного излучения впервые наблюдался в 1963 г., после того как

были созданы рубиновые и неодимовые лазеры с модулированной добротностью. Они дают очень короткий, примерно  $3 \cdot 10^{-8}$  с, но чрезвычайно мощный импульс с пиковой мощностью в десятки мегаватт. Когда луч такого рубинового лазера сфокусировали линзой, в воздухе в районе фокуса вспыхнула искра. *Непрерывный оптический разряд*, в котором происходит стационарное поддержание плотной равновесной плазмы, поддерживаемой энергией излучения, был впервые создан в 1970 г. при помощи лазера непрерывного действия на углекислом газе. Оптические разряды, которые так были названы вследствие большой общности их эффектов с обычными разрядными процессами, начали активно исследовать. В течение 10 – 15 лет с момента открытия они, как и СВЧ разряды, были изучены не в меньшей степени, чем разряды в постоянном электрическом поле, которые детально изучаются уже более ста лет.

Тлеющий разряд получил широкое применение в газовых лазерах самых разных типов. В связи с этим физика тлеющего разряда, одного из самых старых и хорошо изученных разделов, испытала небывалый подъем, вскрывший массу новых сторон этого явления. В частности, был открыт новый тип этого разряда – *электроионизационный*, сочетающий в себе две ранее исключавшие друг друга формы разряда – *самостоятельного* и *несамостоятельного*. В дальнейшем мы остановимся на приложениях газового разряда применительно к созданию лазерной техники.

А сейчас мы познакомимся с несколькими важнейшими видами разрядов, рассмотрев классическую схему его наблюдения. Для этого требуется пара металлических электродов, например в форме параллельных дисков, помещенных в газовую среду и подключенных к источнику постоянного напряжения. Чтобы иметь возможность изменять давление и род газа, электроды вводят в стеклянную трубку, которую можно откачивать и наполнять требуемым газом. Обычно диаметр трубки один сантиметр, длина – от нескольких десятков сантиметров. При проведении исследований измеряют ток в цепи и напряжение на электродах (см. рисунок). Это устройство, которое уже на протяжении двух веков служит для изучения разрядных процессов, и поныне имеет большое значение.

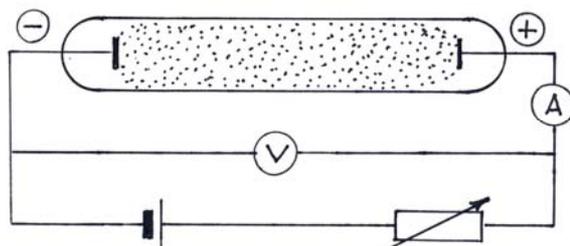


Схема изучения разрядных процессов

Если подать на электроды небольшое напряжение, порядка десятка вольт, никаких видимых изменений в трубке не произойдет, но сверхчувствительный прибор зарегистрировал бы протекание чрезвычайно слабого тока, на уровне значений около  $10^{-15}$  А. Ток течет, поскольку по случайным причинам (под действием космических лучей, вследствие радиоактивного фона земли) в газе образуются заряды. Например, в  $1 \text{ см}^3$  воздуха на уровне моря в 1 с рождается 1 – 10 электрон-ионных пар. В отсутствие поля в воздухе неизменно присутствует  $10^3$  пар ионов в  $1 \text{ см}^3$ . Приложенное поле вытягивает заряды к электродам противоположного знака, что и дает электрический ток. Можно получить гораздо более сильный ток, до  $10^{-6}$  А, если специально облучать газ радиоактивным или рентгеновским источниками. Энергичные частицы и кванты вырывают электроны из молекул, атомов газа, а также с поверхностей стекла и металла. Но все же такой ток и соответствующая ионизация слишком малы для того, чтобы газ светился. Разряд и электрический ток, которые возникают только благодаря действию внешнего ионизирующего агента или в результате эмиссии электронов или ионов с электродов под действием посторонних причин (например вследствие накаливания катода), называются *несамостоятельными*.

Если увеличивать напряжение, самостоятельный ток сначала возрастает, так как все большая часть зарядов вытягивается на электроды до того, как они прорекомбинируют. Но потом, когда поле успевает вытянуть все образующиеся заряды, ток перестает расти, несмотря на рост напряжения, ибо он ограничивается скоростью образования ионов – ток достигает насыщения. Далее при некотором определенном значении напряжения, которое зависит от рода и давления газа, расстояния между электродами, материала катода ток резко возрастает и появляется свечение. Так происходит *пробой* – один из важнейших разрядных процессов. При давлении  $p \sim 1$  тор и межэлектродном расстоянии  $L \sim 1$  см напряжение пробоя составляет несколько сотен вольт.

Пробой всегда начинается с некоторого количества затравочных электронов, которые появляются либо в результате случайных причин, либо под действием какого-либо постороннего источника, когда необходимо стимулировать процесс. Следовательно, его начальная стадия носит самостоятельный характер. Но при достаточной величине электрического поля разряд немедленно приобретает самостоятельность и не нуждается более в дополнительной поддержке.

В поле электрон ускоряется и приобретает энергию. Достигнув энергии, достаточной для ионизации атомов или молекул, он вырывает другой электрон, затрачивая на это набранную энергию. Появляются два медленных электрона, которые повторяют тот же цикл, затем четыре и т. д. Так развивается *электронная лавина* и происходит размножение электронов. Протекает этот процесс очень быстро: за  $10^{-7} - 10^{-3}$  с газ ионизируется заметным образом и электрический ток вырастает на несколько порядков.

Дальнейший ход разрядного процесса зависит от ряда условий. При небольших давлениях, порядка 1 – 10 тор, и большом сопротивлении внешней электрической цепи, которое не позволяет течь большому электрическому току при данной ЭДС источника питания, в результате пробоя зажигается так называемый *тлеющий разряд*. Он представляет собой один из наиболее распространенных и важных типов разряда. Для тлеющего разряда характерна небольшая сила тока ( $10^{-6} - 10^{-1}$  А в трубках с сечением порядка  $1 \text{ см}^2$ ) и довольно высокое напряжение (порядка пробойного – сотни и тысячи вольт). При не чрезмерно низком давлении и не слишком малом расстоянии между электродами (например  $p \sim 1$  тор,  $L \sim 10$  см) в трубке образуется однородный по длине красиво светящийся столб. Цвет его зависит от рода газа. Неон, например, светится красным светом. Картина эта хорошо известна – красочные рекламные трубки на улицах и вообще газосветные приборы являются одним из давних практических применений тлеющего разряда.

Область разряда, достаточно удаленную от электродов, чтобы на ней не сказывалось влияние приэлектродных процессов, называют *положительным столбом*. Положительный столб тлеющего разряда – это электронейтральный слабоионизированный газ со степенью ионизации порядка  $10^{-8} - 10^{-6}$ . Эта плазма существенно неравновесна в двух отношениях. Электроны, непосредственно приобретающие энергию от поля, обладают повышенной средней энергией и температурой, 1 эВ или  $10^4$  К, а газ тяжелых частиц (атомов, молекул, ионов) нагревается мало, его температура не намного превышает температуру окружающей среды 300 К. Такое состояние с сильным отрывом электронной и газовой температур поддерживается благодаря не слишком большой мощности выделения джоулева тепла и вследствие относительно большой теплоемкости газа тяжелых частиц и достаточно быстрого выноса тепла из разряда. Степень ионизации тоже неравновесна, она намного ниже термодинамически равновесной величины, соответствующей температуре электронов и плотности газа.

Если давление газа высоко, порядка атмосферному, а сопротивление внешней цепи мало, так что цепь может пропустить сильный ток, после пробоя обычно зажигается разряд другого типа, не менее распространенный и важный, чем тлеющий. Он называется *дуговым* или *дугой*. Для дуги характерны сильный ток (от ампера и выше), низкое напряжение (десятки вольт) и ярко светящийся столб. В дуге обычно выделяется большая мощность; без интенсивного охлаждения стеклянная трубка очень скоро разрушается от перегрева. Поэтому, когда хотят создать дугу не просто в свободном атмосферном воздухе, применяют специальные конструкции. Положительный столб дугового разряда – это плотная термодинамически равновесная низкотемпературная плазма с температурой порядка  $10^4$  К, одинаковой у электронов и тяжелых частиц, и соответствующей ей степени ионизации  $10^{-3} - 10^{-1}$ . Многим приходилось видеть электродную сварку или резку металлических конструкций. Ослепительно светящийся канал между электродом и обрабатываемым металлом – это и есть дуга в воздухе.

Тлеющий и дуговой разряды различаются не только по величинам тока, напряжения и характеру плазмы. В них существенно отличаются механизмы электронной эмиссии с катода, без которой не мог бы течь постоянный ток. В тлеющем разряде происходит *вторичная эмиссия*: электроны выбиваются с поверхности холодного металла ударами положительных ионов или световыми квантами. В дуговом разряде из-за сильного тока катод разогревается до высокой температуры, и электроны как бы «испаряются» с его поверхности – происходит *термоэлектронная эмиссия*. Тлеющий и дуговой разряды горят стационарно, если действует постоянный источник питания. Но даже многие не чрезмерно кратковременные импульсные разряды после пробоя приобретают характер тлеющего или дугового или включают переход от первого ко второму.

*Искровой разряд* возникает при давлениях порядка или выше атмосферного и не слишком малых расстояниях между электродами, более одного сантиметра. Пробой при этом осуществляется путем быстрого прорастания плазменного канала от одного электрода к другому. Потом происходит как бы короткое замыкание электродов искровым каналом. Грандиозной формой искрового разряда является молния, для которой «электродами» служат заряженное электричеством облако и Земля.

*Коронный разряд* возникает в сильно неоднородных полях. Светящаяся корона появляется около заостренных электродов или проводов, находящихся под напряжением, в частности около линий электропередач.

Установившиеся разряды в постоянном поле можно разделить на *несамостоятельные* и *самостоятельные*. К несамостоятельным относятся: *режим ионизационной камеры (томпсоновский разряд)* и *электроионизационный разряд*. Разряд в них контролируется внешним ионизатором и гаснет при его отсутствии. Тлеющий, дуговой, коронный и искровой разряды носят самостоятельный характер.

Многие черты плазменных процессов, характерных для пробоя в постоянном электрическом поле, свойственны и разрядам в быстропеременных полях. Но если в постоянном поле наличие электродов является необходимым условием для горения разряда, а процессы на катоде, который служит поставщиком электронов, и в прикатодной области играют важную, часто определяющую роль, то в переменных полях присутствие электродов вообще не является обязательным. В силу этого целесообразно провести классификацию разрядов по признаку частоты. По этому признаку разряды делятся:

- на разряды в постоянных, низкочастотных и в не слишком кратковременных импульсных электрических полях;
- высокочастотные;
- сверхвысокочастотные;
- оптические.

Деление электрических и электромагнитных полей по частотным диапазонам не имеет сколько-нибудь строгого обоснования и является довольно условным. Низкочастотные поля, которые целесообразно объединить с постоянным электрическим полем, не вызывают каких-либо серьезных эффектов, существенно отличающихся от того, что происходит в постоянном поле. Например, на частотах  $\nu \sim 10^2 - 10^3$  Гц или в импульсных полях более чем миллисекундной длительности это всегда так. Высокочастотный (ВЧ) диапазон охватывает частоты, исчисляемые мегагерцами ( $\nu \sim 10^5 - 10^8$  Гц); в западной литературе его называют *радиочастотным*. Ему соответствует интервал длин волн  $\lambda = 3$  км – 3 м. Сверхвысокочас-

тотный (СВЧ) диапазон занимает область  $\nu \sim 10^9 - 10^{11}$  Гц. Этому интервалу частот соответствует диапазон длин волн  $\lambda = 30$  см – 3 мм. В западной литературе его называют *микроволновым*. И, наконец, оптический диапазон охватывает электромагнитные излучения от среднего инфракрасного до жесткого ультрафиолетового.

Газовые разряды чрезвычайно насыщены всевозможными процессами, в них происходят различного рода столкновения частиц, и из всего этого складывается сложная общая картина. Со всеми этими составными элементами необходимо познакомиться прежде чем приступить к рассмотрению того или иного разрядного процесса. Чтобы убедиться в этом, достаточно окинуть беглым взглядом основные явления, присущие любому типу газового разряда. В разрядной области все время происходят акты *ионизации*. Ионизация восполняет потери электронов и ионов вследствие *рекомбинации*, *диффузии* их к стенкам, где они нейтрализуются, *прилипания* электронов к молекулами в электроотрицательных газах. При этом диффузия в достаточно сильно ионизированной плазме имеет *амбиполярный* характер.

Сам процесс протекания тока связан с *дрейфом* электронов и ионов в поле – их направленным движением вдоль поля. От скорости дрейфа зависит *проводимость* ионизированного газа. Скорость дрейфа, в свою очередь, определяется *подвижностью* зарядов, т. е. их способностью двигаться вдоль направления поля. Подвижность, проводимость ограничены *упругими столкновениями* электронов с атомами. *Отрыв температур* электронов и тяжелых частиц (в тлеющем разряде) определяется балансом между выделением джоулева тепла в электронном газе, с одной стороны, и передачей энергии от электронов атомам и молекулам – с другой. В передаче энергии наряду с упругими большую роль играют *неупругие* столкновения электронов, *возбуждение молекулярных колебаний* (в молекулярных газах). Благодаря *возбуждению электронных уровней* атомов и молекул плазма светится. Кроме этого возбуждение сказывается на скорости ионизации.

Вот далеко не полный перечень тех элементов, без знакомства с которыми невозможно изучение разрядных процессов.

С их рассмотрения мы и начнем наш курс и перейдем затем на этой основе к изучению целостных картин конкретных разрядов.

## Лекция 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИЗИКИ АТОМНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

*Упругие и неупругие удары • Эффективное сечение • Частота столкновений • Длина свободного пробега • Вероятности различных пробегов • Числа столкновений при нормальных условиях • Сечения рассеяния электронов нейтральными атомами и молекулами*

Столкновения *атомных частиц*, как и удары макроскопических тел, могут иметь упругий и неупругий характер. В подобного рода контексте слова «атомные частицы», «атомные столкновения» употребляются в широком смысле, подразумевая также молекулы, ионы, электроны и даже фотоны. При упругом соударении меняются направления движения партнеров, их скорости, происходит обмен импульсом и кинетической энергией, но внутренние энергии и состояния частиц остаются неизменными. При неупругом ударе внутренняя энергия и состояние одной из частиц, реже – обеих, изменяются.

Среди множества неупругих процессов различают *удары первого и второго рода*. Такие процессы, как возбуждение электронных состояний атомов и молекул, молекулярных вращений и колебаний за счет кинетической энергии ударяющей частицы, называются ударами первого рода. Если частица сталкивается с уже возбужденной и дезактивирует ее полностью или частично, а внутренняя энергия полностью или частично переходит в энергию поступательного движения, это – удар второго рода. В западной литературе удары второго рода называют *сверхупругими*. Этим стремятся подчеркнуть, что при неупругих столкновениях поступательная энергия сталкивающихся частиц уменьшается, при упругих – не изменяется, а при сверхупругих – возрастает. Формально к неупругим можно отнести и такие столкновения, которые помимо превращений энергии сопровождаются превращениями самих частиц, например ионизацией атома.

Для характеристики вероятности столкновений частиц в газе служат такие величины, как *длина свободного пробега*, *среднее время между соударениями*, *частота столкновений*. Все они помимо свойств частиц зависят еще и от плотности газа. Мерой вероятности индивидуального акта определенного рода, скажем упругого соударения двух частиц, ионизации и

т.д., является соответствующее *эффективное сечение*. Это понятие вводится следующим образом. Представим себе, что на одну частицу-мишень налетает однородный в пространстве поток ударяющих частиц со скоростью относительно мишени  $v'$ , см/с, и плотностью  $N_1$ , см<sup>-3</sup>.

Вообразим далее, что выбитая со своего места или претерпевшая какое-либо изменение частица-мишень немедленно заменяется новой. Число ударов определенного рода, которое испытывает такая «неуязвимая» мишень в 1 с,  $v_2$ , с<sup>-1</sup>, тем больше, чем больше проходит за это время частиц через 1 см<sup>2</sup>. Подчеркнем, что число соударений пропорционально именно плотности потока частиц  $N_1 v'$  в месте расположения мишени, а не полному потоку. В самом деле, если увеличить полный поток вдвое, но пропустить вторую партию частиц значительно дальше от мишени, чем первую, число ударов практически не изменится. Коэффициент пропорциональности  $\sigma$  между  $v_2$  и  $N_1 v'$ ,

$$v_2 = \sigma N_1 v', \quad \sigma = \frac{v_2}{N_1 v'} \text{ см}^2, \quad (2.1)$$

имеющий размерность площади, называется эффективным сечением данного процесса, или для краткости просто сечением. Сечение зависит от индивидуальных особенностей партнеров, законов их взаимодействия и начальной скорости относительного движения  $v'$ .

Физический смысл эффективного сечения выступает особенно явно, если столкновения атомных частиц рассматривать как соударения твердых шаров с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  (рис. 2.1). Чтобы налетающий шар 1 задел шар-мишень 2, линия движения его центра должна пройти от центра мишени на расстоянии, не превышающем  $r_1 + r_2$ . Значит, в 1 с произойдет  $v_2 = \pi(r_1 + r_2)^2 N_1 v'$  ударов и сечение столкновения есть  $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$ . Если налетающий шар очень маленький ( $r_1 \ll r_2$ ), он должен попасть в площадь диаметрального сечения мишени  $\sigma = \pi r_2^2$ . Таким образом, эффективное сече-

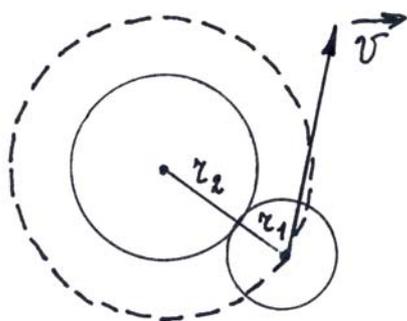


Рис. 2.1. Пояснение к понятию эффективного сечения

ние процесса численно совпадает с площадью диаметрального сечения, которой должна была бы обладать частица-мишень, чтобы попадания в этот кружок точечной ударяющей частицы привело к ожидаемому результату.

Модель твердых шаров очень удобна для описания *газокинетических столкновений*, т.е. упругих соударений молекул в газе, неплохо имитируя этот процесс. В газе частиц одного сорта  $r_1 = r_2$  и  $\sigma = \pi d_2^2$ , где  $d$  – эффективный диаметр молекулы. Теоретическое вычисление эффективных сечений на основе законов взаимодействия сталкивающихся частиц составляет задачу механики, классической или квантовой в зависимости от конкретного процесса, рода частиц, их скорости. Отметим, что эти расчеты часто сложны и несовершенны. Поэтому, когда требуются конкретные численные данные по сечениям, прибегают, как правило, к результатам измерений.

Помимо прямых экспериментов часто для определения сечений используют косвенные пути. Сечения извлекают из измерения величин, которые зависят от сечений известным образом. Например, газокинетические сечения находят из измерений вязкости газов. В табл. П1 приложения представлены значения эффективных диаметров, газокинетических сечений и некоторых других величин для нескольких газов, с которыми часто приходится иметь дело при исследовании разрядов. Эти цифры полезны тем, что служат ориентиром для суждений о вероятностях различных процессов. Когда говорят, что сечение такого-то процесса мало, то мысленно его сравнивают с газокинетическим. «Большое сечение» – сечение порядка газокинетического. Хотя в дальнейшем мы увидим, что сечения для заряженных частиц бывают и гораздо больше газокинетических.

*Частотой столкновений* называется число соударений определенного рода, которые данная частица (назовем ее 1) в среднем совершает в секунду, двигаясь в газе из частиц-мишеней 2. Чтобы найти это число, представим себе подобно предыдущему, что пучок частиц 1 с плотностью  $N_1$  налетает со скоростью  $v'$  на газ из неподвижных частиц-мишеней со средней плотностью  $N_2$ . В соответствии с формулой (2.1) в  $1 \text{ см}^3$  в 1 с происходит  $N_2 v_2 = N_1 N_2 v' \sigma(v')$  актов соударений. Каждая из налетающих частиц совершает в 1 с

$$v_1 = N_2 v' \sigma(v') \quad (2.2)$$

ударов. Выражения (2.1) и (2.2) симметричны, поскольку частоты столкновений, испытываемых соударяющимися частицами, пропорциональны плотностям партнеров, а в остальном зависят от взаимной величины – скорости относительного движения.

В общем случае формула (2.2) еще не решает поставленной задачи. Говоря о частоте столкновений, которые испытывает данная частица, подразумевают, что это частица с определенной энергией или скоростью движения в системе отсчета, где покоятся не отдельные молекулы, а газ в целом. Поэтому выражение (2.2) необходимо усреднить по скоростям частиц-мишеней, которые на самом деле совершают тепловое движение. Дело обстоит на редкость просто, если скорость ударяющей частицы гораздо больше скоростей частиц-мишеней. Именно такова ситуация в очень важном для физики разряда случае столкновений электронов с атомами, молекулами, ионами. Даже при одинаковых энергиях скорость электрона в  $\sqrt{M/m} = 43\sqrt{A}$  раз больше скорости тяжелой частицы, где  $M$  – ее масса,  $A$  – относительная атомная масса,  $m$  – масса электрона. Тем более это справедливо, когда, как это часто бывает, энергия (температура) электронов значительно выше чем у молекул. Формула (2.2) тогда не нуждается в усреднении, и относительную скорость  $v'$  достаточно просто заменить на скорость быстрой частицы  $v$ . Частота столкновений электрона или быстрой частицы

$$v = Nv\sigma(v), \quad (2.3)$$

где для общности опущены все индексы.

Рассмотрим еще важный случай газокINETических столкновений молекул друг с другом. Произведение  $v'\sigma(v')$  в формуле (2.2) необходимо усреднить по скоростям относительного движения сталкивающихся молекул. Распределение молекул по абсолютным скоростям, т.е. в системе координат, где газ покоится, описывается *максвелловской функцией*. Число молекул в  $1 \text{ см}^3$ , обладающих скоростями в интервале от  $v$  до  $v + dv$ ,

$$dN = N4\pi\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right)v^2 dv, \quad (2.4)$$

где  $T$  – термодинамическая температура,  $k$  – постоянная Больцмана.

Средняя тепловая скорость молекулы

$$\bar{v} = \left( \frac{8kT}{\pi M} \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Как мы покажем в дальнейшем, распределение молекул по скоростям движения  $v'$  относительно какой-то одной произвольно выбранной молекулы описывается той же максвелловской функцией (2.4), но только в ней нужно заменить массу молекулы  $M$  на так называемую *приведенную массу*  $m'$ . Соответственно средняя скорость относительного движения  $\bar{v}' = \left( \frac{8kT}{\pi m'} \right)^{1/2}$ . В случае одинаковых молекул  $m' = M/2$ , т.е.  $\bar{v}' = \sqrt{2} \cdot \bar{v}$ . Для молекул – твердых шаров  $\sigma(v') = \text{const} = \pi d^2$  и среднее от  $v'\sigma(v')$  сводится просто к  $\bar{v}'\sigma$ . Следовательно, средняя частота газокинетических столкновений в газе молекул одного сорта

$$\nu = N\bar{v}'\pi d^2 = \sqrt{2}N\bar{v}\pi d^2 = \sqrt{2}N\bar{v}\sigma. \quad (2.6)$$

Множитель  $\sqrt{2}$  уточняет часто применяемую для оценок простую формулу  $\nu = N\bar{v}\sigma$ . Он возникает из-за отличия средней скорости относительного движения от средней тепловой. Тепловые скорости молекул и их частоты столкновений также представлены в табл. П1 приложения.

Величина  $\tau = \nu^{-1}$  представляет собой среднее время между столкновениями, которые испытывает данная частица. Если газ состоит из частиц разных сортов или представляет интерес частота нескольких видов столкновений, например, частота возбуждения нескольких молекулярных уровней, следует суммировать парциальные частоты

$$\nu = \sum_i N_i \bar{v} \sigma_i. \quad (2.7)$$

Если частица движется в газе со скоростью  $v$  и совершает в среднем  $\nu$  столкновений в 1 с, то на 1 см она испытывает  $\frac{v}{v}$  столкновений. Между столкновениями она проходит расстояние, которое называется *средней длиной свободного пробега* (по отношению к какому-то процессу).

$$l = \frac{v}{\nu} = v\tau = \frac{1}{N\sigma}, \quad (2.8)$$

Соотношение (2.8) между длиной пробега и сечением строго справедливо лишь для быстрых частиц, в частности электронов, когда не возникает во-

прос об усреднении по скоростям частиц-мишеней. В газокинетической теории длина пробега определяется применительно к молекуле, движущейся со средней тепловой скоростью  $\bar{v}$ . Для молекул – твердых шаров согласно (2.6)

$$l = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{1}{\sqrt{2N\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2N\pi d^2}}. \quad (2.9)$$

Газокинетические пробеги также даны в табл. П1 приложения. Длина пробега легкой частицы (электрона) в смеси газов в соответствии с формулой (2.7) определяется как

$$\frac{1}{l} = \sum_i \frac{1}{l_i} \approx \sum_i N_i \sigma_i.$$

Вследствие хаотического характера теплового движения молекул столкновения частиц являются процессом случайным. Часто бывает недостаточно знания лишь средней длины свободного пробега частицы, нужно знать еще и закон распределения вероятности различных пробегов, который мы сейчас установим. Вероятность частице пройти путь  $x$ , не испытав столкновения,  $w(x)$ , эквивалентна вероятности того, что в объеме цилиндра длиной  $x$  и площадью поперечного сечения  $\sigma$ ,  $V = \sigma x$ , не окажется ни одной молекулы. Это следует из самого определения эффективного сечения. Пусть в макроскопическом объеме  $V_0 \gg V$  содержится  $\aleph$  молекул; средняя плотность газа  $N = \aleph/V_0$ . Вероятность обнаружить определенную молекулу в объеме  $V$  равна  $V/V_0$ . Вероятность, что ее не окажется там, равна  $1 - V/V_0$ . Вероятность того, что в объеме  $V$  не окажется вообще ни

одной молекулы, равна  $\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{\aleph}$ . Имея в виду, что  $\aleph$  – колоссальное чис-

ло, и вспоминая математическое определение экспоненциальной функции, найдем вероятность частице пройти путь  $x$  без столкновения:

$$w(x) = \left(1 - \frac{V}{V_0}\right)^{\aleph} = \left(1 - \frac{N\sigma x}{\aleph}\right)^{\aleph} \xrightarrow{\aleph \rightarrow \infty} e^{-N\sigma x} = e^{-x/l}. \quad (2.10)$$

Вероятность свободного пробега от  $x$  до  $x + dx$  есть  $e^{-x/l} \frac{dx}{l}$ . Очевидно, что  $l$  – действительно средний пробег:  $l = \bar{x}$ .

В литературе по разрядам сечения столкновений часто заменяют однозначно связанными с ними *числами столкновений*  $P$ , которые частица испытывает на 1 см своего пути, если плотность газа соответствует давлению  $p = 1$  мм рт. ст.  $\equiv 1$  тор и температуре  $0^\circ\text{C}$ ,  $N_0 = 3,54 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ :

$$P = 3,54 \cdot 10^{16} \sigma \text{ см}^{-1} \cdot \text{тор}^{-1}, \quad \sigma = 2,83 \cdot 10^{-17} P \text{ см}^2 \quad (2.11)$$

Величину  $P$  иногда называют *вероятностью столкновений*. Плотность, которая выражается большими числами, очень удобно характеризовать давлением в торах. В этом и состоит целесообразность введения величины  $P$ ; длина пробега, см, тогда равна просто

$$l = \frac{1}{P \cdot p[\text{тор}]}. \quad (2.12)$$

Но необходимо помнить о том, что однозначное соответствие  $N$  и  $p$  и буквальное выполнение формулы (2.12) требует однозначности температуры. Фигурирующее в формуле давление, которое отнесено к  $0^\circ\text{C}$ , называют приведенным. Иногда происходит небольшая путаница. Нередко указывают реальное давление, которое скорее соответствует комнатной температуре  $20^\circ\text{C}$ , чем  $0^\circ\text{C}$ . Тогда давлению 1 тор отвечает немного меньшая плотность:  $N_{20} = 3,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Вообще,

$$p(\text{приведенное}) = p(\text{истинное}) \cdot \frac{273}{\text{ТК}}. \quad (2.13)$$

Такие важнейшие свойства плазмы, как электропроводность и способность поглощать энергию электрического и электромагнитного полей, определяются поведением свободных электронов. Когда в газе имеется достаточно электронов, роль ионов в этом отношении уходит на второй план, ибо под действием одной и той же силы со стороны электрического

поля массивный ион движется гораздо медленнее, чем легкий электрон. Определяющее влияние на указанные свойства плазмы оказывают, в свою очередь, столкновения электронов с атомами и молекулами, а при сильной ионизации – с ионами. При столкновении электрон резко меняет направление своего движения и частично, а то и полностью теряет ту скорость в направлении поля, которую он приобрел в результате ускоряющего действия электрической силы. Та же причина, изменение направления движения, решающим образом влияет на скорость беспорядочного растекания электронов в газе, т.е. на их диффузию. Как правило, упругие столкновения электрон испытывает намного чаще, чем неупругие. Поэтому для проводимости и поглощательной способности ионизированного газа, а также для диффузии электронов важнейшую роль играют именно упругие столкновения.

Эффективные сечения упругих столкновений  $\sigma_c$  зависят от скорости  $v$  или энергии  $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$  электрона и определяются действием на электрон сложного силового поля атома, молекулы. Рассмотрение этого эффекта и вычисление сечений составляет предмет квантовомеханической теории столкновений. Классическая механика правильно описывает движение частицы, если ее длина волны де Бройля  $\lambda = \frac{h}{mv}$  мала по сравнению с характерными размерами, на которых меняются силы, действующие на частицу. Если  $\lambda$  сравнима с этим размером или больше его, частица проявляет волновые свойства и законы классической механики уступают законам квантовым. У электронов с типичной для разрядов энергией  $\varepsilon = 1 \text{ эВ}$   $v = 5,93 \cdot 10^7 \text{ см/с}$  и  $\lambda = 1,96 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ , что сравнимо с диаметрами атомов и молекул, которые как раз и характеризуют пространственный масштаб действия силового поля. Представления о молекулах как о твердых шарах допустимы лишь для качественной трактовки явлений. Количественной трактовки они не дают, поскольку радиус «шара» подлежит определению, теоретическому или экспериментальному. В практической работе пользуются сечениями для электронов, которые найдены опытным путем, ибо, как уже отмечалось, квантовомеханические расчеты сложны и их далеко не всегда удается выполнить с желаемой точностью.

На рис. 2.2 и 2.3 представлены данные для ряда газов, с которыми чаще экспериментируют и которые чаще встречаются в приложениях. Это атомы инертных газов и паров некоторых металлов, молекулы кислорода и азота, из которых состоит воздух, водорода, углекислого газа, который входит в состав лазерных смесей. Для удобства пересчета к энергии скорость электрона на графиках условно выражена в  $B^{1/2}$ : численно  $\nu [B^{1/2}] = \sqrt{\epsilon \text{ эВ}}$ ;  $1 B^{1/2}$  соответствует скорости  $\nu = 5,93 \cdot 10^7$  см/с. С помощью графиков  $P_c(\nu)$  легко найти частоты упругих столкновений электрона:

$$\nu_c = 5,93 \cdot 10^7 \sqrt{\epsilon \text{ эВ}} P_c p \text{ тор } \text{с}^{-1}. \quad (2.14)$$

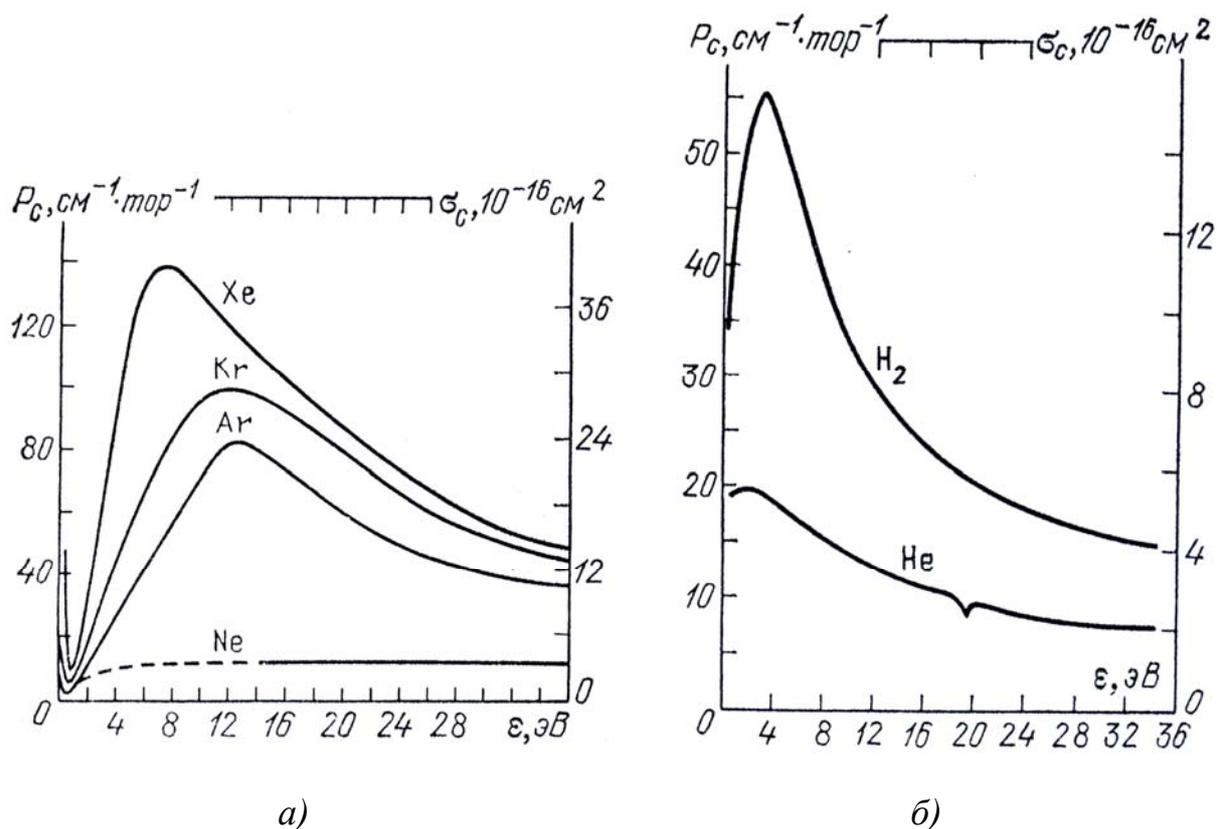


Рис. 2.2. Вероятности и сечения упругих столкновений электронов:  
а – с атомами инертных газов; б – с молекулами водорода и атома гелия

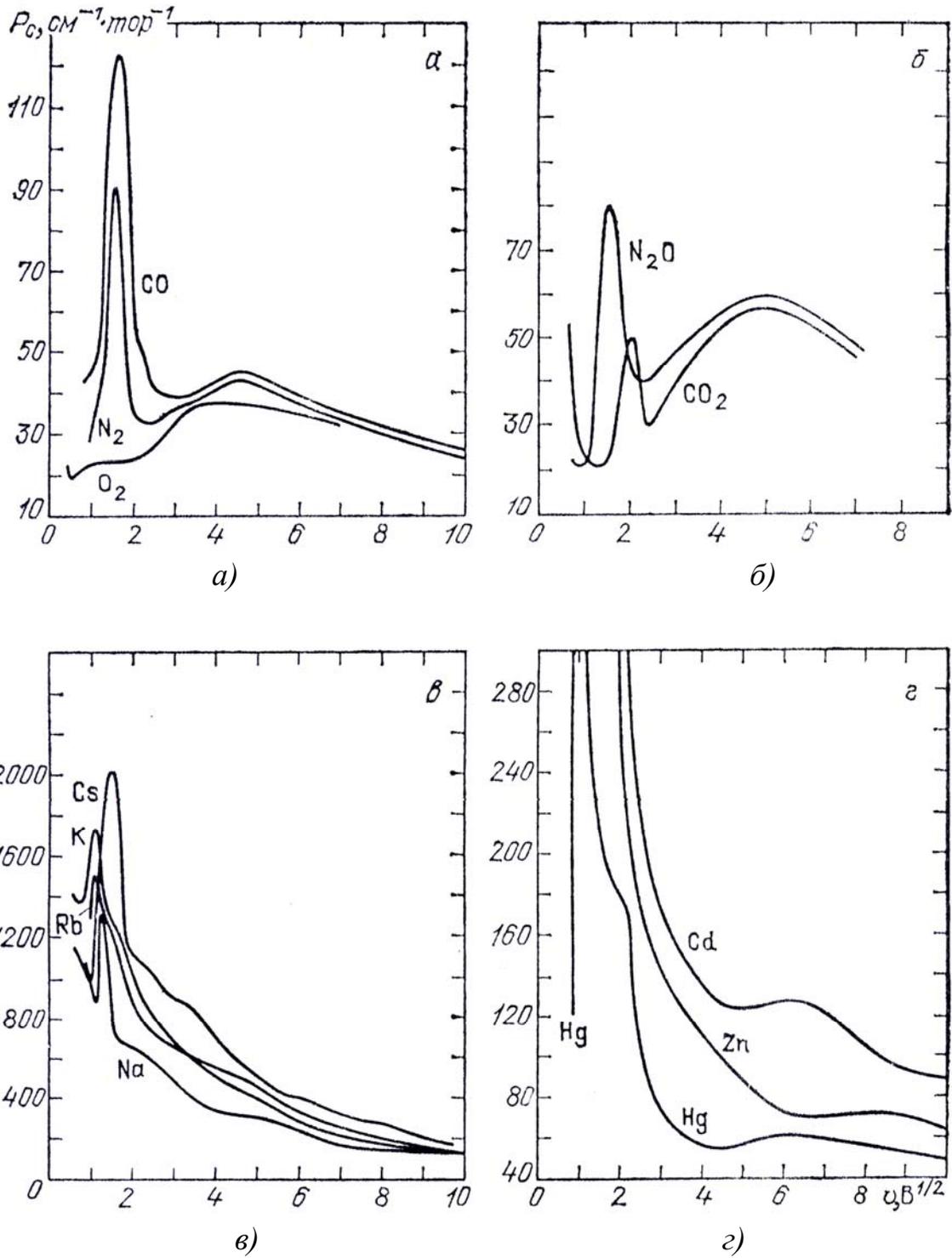


Рис. 2.3. Вероятности столкновений: а – в  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$  и  $\text{CO}$ ; б – в  $\text{CO}_2$  и  $\text{N}_2\text{O}$ ; в – в парах щелочных металлов; г – в парах  $\text{Hg}$ ,  $\text{Zn}$  и  $\text{Cd}$

Графики  $\nu_c(\varepsilon)$  для некоторых газов даны на рис. 2.4. Примечательно, что в гелии и водороде частота столкновений в широком интервале энергий почти не зависит от  $\varepsilon$ ; в гелии, например,

$$\nu_c \approx 2,4 \cdot 10^9 p [\text{тор}] \text{ с}^{-1} \text{ при } \varepsilon > 4 \text{ эВ}.$$

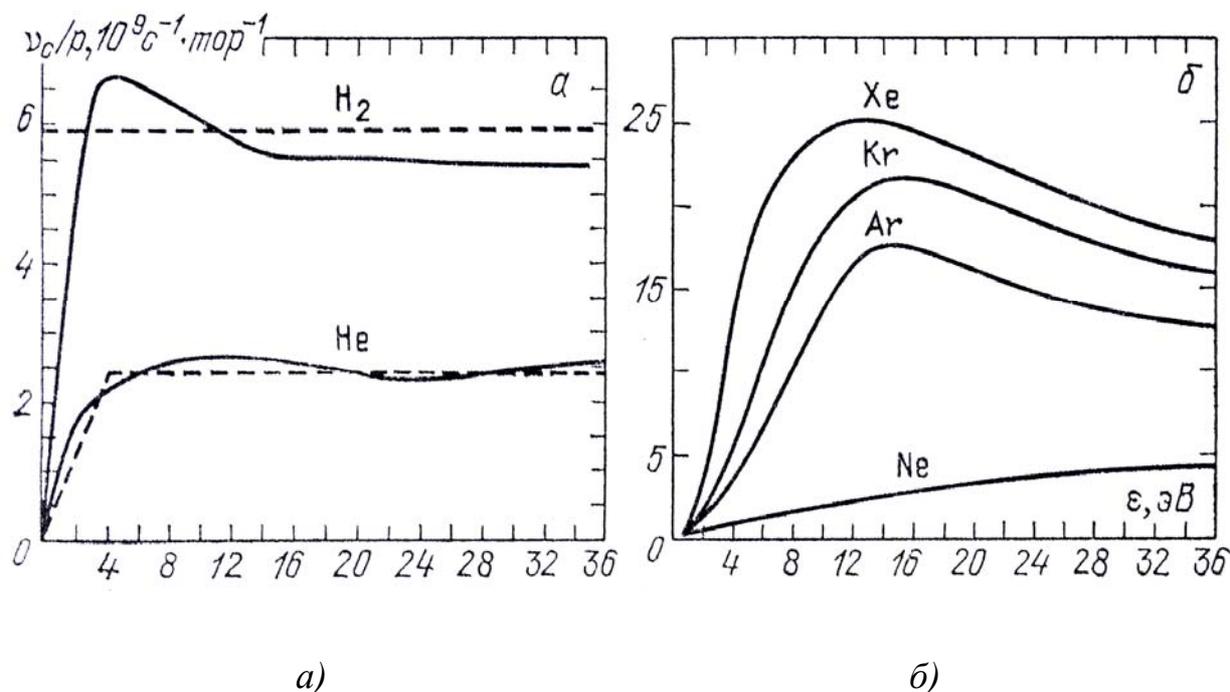


Рис. 2.4. Частоты упругих столкновений электронов,  $p=1$  тор: а – в  $\text{H}_2$  и  $\text{He}$ ; б – в инертных газах; штриховые линии – удобная аппроксимация при расчетах

Упругие сечения всегда уменьшаются с ростом  $\nu$  и  $\varepsilon$  в области десятков электрон-вольт – более энергичный электрон труднее «сбить с пути», укорачивается и длительность действия молекулярного поля. У некоторых атомов и молекул наблюдаются глубокие минимумы сечений в области энергий  $\varepsilon \sim 0,1-1$  эВ; это явление называют *эффектом Рамзауэра*. В их существовании проявляются волновые свойства электрона. При некоторых энергиях волны, которые описывают движение электрона и которые рассеиваются потенциальным полем молекулы, интерферируют и гасят друг друга. Интенсивность рассеянной волны, которой и определяется вероятность и сечение рассеяния, в итоге оказывается очень малой.

### Лекция 3. ПОТЕРИ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ

*Дифференциальное сечение и угловое распределение  
рассеяния • Транспортное сечение и потери импульса •  
Упругие потери энергии • Приведенная масса •  
Система центра масс • Относительное  
движение • Максвелловское распределение  
по относительным скоростям*

Столкновения, которые отличаются друг от друга углом рассеяния электрона, по производимому ими эффекту далеко не равноценны. Если, например, электрон отклоняется на малый угол, то результат таков, как будто бы столкновения и не было вовсе. Если электрон рассеивается на  $90^\circ$ , то он полностью теряет свою направленную скорость, если на  $180^\circ$  – приобретает обратную, т.е. начинает двигаться против силы поля или назад в ходе диффузии. Закон углового распределения вероятности рассеяния может, следовательно, повлиять и на скорость дрейфа частицы в поле, и на скорость ее передвижения в определенном направлении в ходе случайных блужданий (диффузии). Вероятность рассеяния на определенный угол, вернее, в определенный интервал углов, характеризуется *дифференциальным сечением рассеяния*. Оно определяется аналогично полному по формуле (2.1), так что

$$d\sigma = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \quad (3.1)$$

отвечает рассеянию частиц на неподвижной мишени в интервал телесного угла  $d\Omega$  около направления  $\Omega$ . Полное сечение рассеяния  $\sigma_c$  получается интегрированием  $d\sigma$  по всему телесному углу. Дифференциальным называют и сечение  $d\sigma$ , и величину  $d\sigma/d\Omega$ , отнесенную к единичному телесному углу. Путаницы здесь, обычно, не возникает.

Поскольку электрон – частица «быстрая», тепловым движением молекул можно пренебречь и считать их неподвижными. Даже сильно анизотропные молекулы обычно ориентированы по отношению к вектору скорости налетающей частицы совершенно случайным образом, поэтому дифференциальное сечение не зависит от азимутального угла, оно зависит только от полярного – угла  $\theta$  между направлениями скоростей до и после

рассеяния. Угловое распределение упругого рассеяния электронов, как правило, оказывается довольно сложным (рис. 3.1). Здесь, как и в эффекте Рамзауэра, проявляются волновые свойства электрона. При интерференции рассеянные волны в одних направлениях складываются и усиливаются, в других – частично гасят друг друга как при дифракции света.

Чтобы выяснить, как сказывается угловое распределение на результирующий эффект многих столкновений, решим главный вопрос, за который несут ответственность упругие столкновения: как быстро электрон растрчивает свою направленную скорость, свой импульс. Имея в виду, что электроны гораздо легче и движутся много быстрее, чем молекулы, будем считать последние абсолютно неподвижными. Общий случай столкновений частиц сравнимой массы (и энергии) будет рассмотрен позднее.

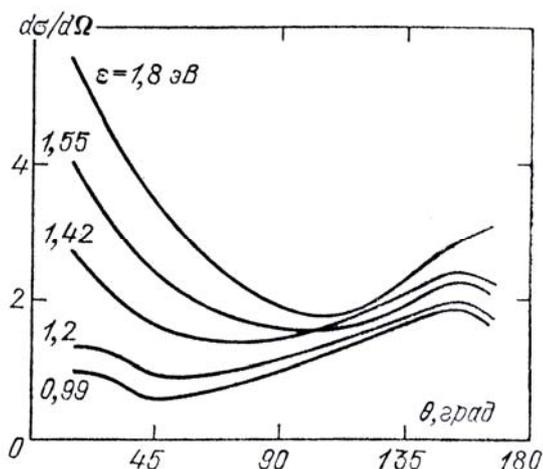


Рис. 3.1. Дифференциальное сечение упругого рассеяния электронов на разные углы в  $\text{CO}_2$  в (отн. ед.)

Обозначим:  $\vec{v}$  – вектор скорости электрона перед столкновением, а  $\vec{v}'$  – после него. В результате рассеяния импульс электрона меняется на

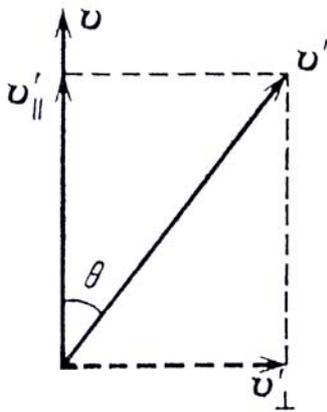
$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} = m(\vec{v}' - \vec{v}).$$

Скорость изменения импульса  $\frac{d\vec{p}}{dt}$ , возникновения при столкновениях, равняется векторной сумме  $\Delta \vec{p}$  по всем столкновениям, которые электрон совершает в единицу времени. Проводить такое суммирование точно было бы слишком сложно, поэтому подойдем к вопросу статистически. Усредним  $\Delta \vec{p}$  по всем столкновениям или, что то же самое, по всем возможным углам рассеяния в одном акте и умножим результат на число актов в единицу времени

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \overline{(\vec{v}' - \vec{v})} v_c.$$

Здесь  $v_c$  – частота столкновений, чертой обозначена процедура усреднения.

Чтобы произвести усреднение, разложим вектор  $\vec{v}'$  на составляющие, параллельную и перпендикулярную направлению начальной скорости  $\vec{v}$ , которая фиксирована и усреднению не подлежит:  $\vec{v}' = \vec{v}'_{\parallel} + \vec{v}'_{\perp}$  (рис. 3.2). Отклонения вправо и влево на один и тот же угол  $\theta$  равновероятны, т.е.  $\overline{v'_{\perp}} = 0$ . Как мы увидим в дальнейшем, вследствие большого различия масс электрона и молекулы электрон теряет при упругом соударении ничтожную долю своей энергии. Поэтому величина его скорости при рассеянии остается практически неизменной и  $\overline{v'_{\parallel}} = \overline{v} \cos \theta$ . Средний косинус угла рассеяния находится путем усреднения  $\cos \theta$  по телесному углу с учетом углового распределения рассеяния



$$\overline{\cos \theta} = \frac{\int \cos \theta \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega}{\int \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega}. \quad (3.2)$$

Вводя определения

$$\sigma_{tr} = \sigma_c (1 - \overline{\cos \theta}), \quad v_m = v_c (1 - \overline{\cos \theta}). \quad (3.3)$$

представим искомый результат в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -m\vec{v} (1 - \overline{\cos \theta}) v_c = -m\vec{v} v_m = -\vec{p} v_m. \quad (3.4)$$

Рис. 3.2. Разложение вектора скорости при рассеянии

Величину  $\sigma_{tr}$  называют *транспортным сечением*, а  $v_m = N v \sigma_{tr}$  — *эффективной частотой столкновений*. О сечении  $\sigma_{tr}$  и соответствующей длине пробега  $l_m = 1/N\sigma_{tr}$  иногда говорят как о *диффузионных* или «для передачи импульса». Все влияние неравномерности углового распределения рассеяния учитывается одним параметром  $\overline{\cos \theta}$ . Если рассеяние изотропно или симметрично относительно плоскости  $\theta = 90^\circ$ , то  $\overline{\cos \theta} = 0$ ,  $\sigma_{tr} = \sigma_c$ ,  $v_m = v_c$ . В этих случаях электрон в среднем каждый раз отклоняется на  $90^\circ$  и за один акт полностью теряет свой направленный импульс:  $\overline{\Delta \vec{p}} = -\vec{p}$ . Если электрон преимущественно рассеивается вперед,  $0 < \overline{\cos \theta} < 1$ , транспортное сечение и эффективная частота столкновений

меньше истинных и требуется несколько столкновений, чтобы электрон растратил свой начальный импульс. Если электрон рассеивается строго назад,  $\overline{\cos\theta} = -1$ , скорость потери импульса максимальна, она вдвое больше, чем при изотропном рассеянии.

У большинства газов при энергиях электронов  $\varepsilon \sim 1-10$  эВ, характерных для разрядов, транспортные сечения немного, на 1 – 10 %, меньше истинных. В области высоких энергий  $\sigma_{tr}$  иногда раза в полтора меньше  $\sigma_c$ . На рис. 3.3 сопоставлены  $\sigma_{tr}$  и  $\sigma_c$  для нескольких инертных газов.

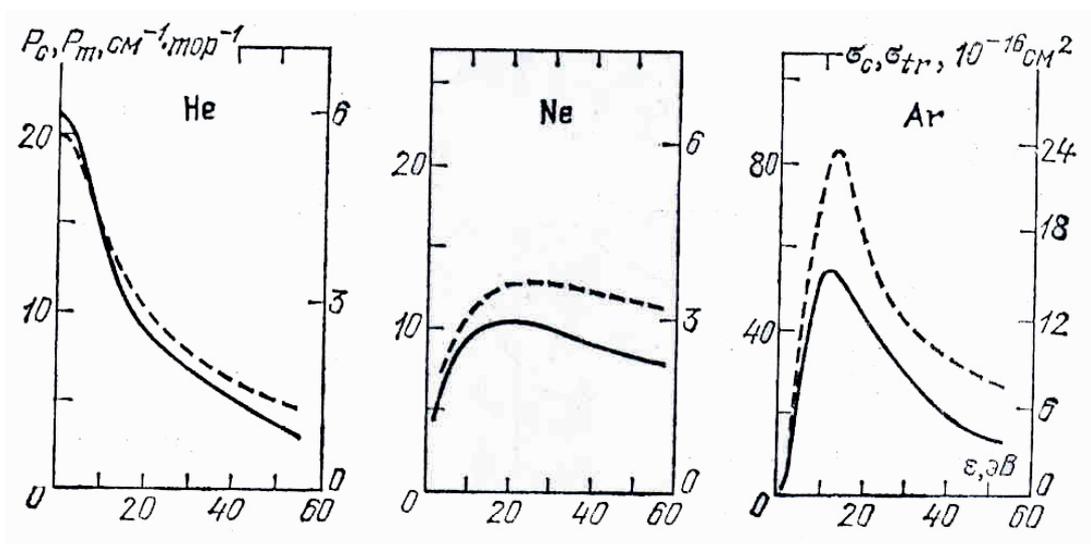


Рис. 3.3. Вероятности столкновений (штриховые линии) и вероятности, соответствующие транспортным сечениям (сплошные кривые) в He, Ne и Ar

От углового распределения, вернее, от его интегральной характеристики  $\overline{\cos\theta}$  зависит и энергия, которую электрон в среднем передает молекуле при рассеянии. Вопрос об упругих потерях энергии электронов очень важен – в одноатомном газе это, по существу, единственный механизм передачи энергии от электронов, которые непосредственно воспринимают джоулево тепло токов и энергию поглощающихся излучений, газу тяжелых частиц. Скорость упругих потерь определяет отрыв температуры электронов от температуры газа, а соответствующая скорость обмена энергией между электронами и атомами – время выравнивания температур и установление термодинамического равновесия.

Рассмотрим процесс передачи энергии от электронов к молекулам, считая последние, как и прежде, «неподвижными», т.е. кинетической энер-

гией не обладающие. Когда при рассеянии электрон теряет импульс  $\Delta\vec{p}$ , молекула такой же импульс приобретает. Если молекула вначале покоилась, вместе с импульсом она приобретает энергию  $\Delta\varepsilon = \frac{(\Delta\vec{p})^2}{2M}$ . Ровно такую же энергию электрон теряет. Поступая как и при вычислении  $\frac{d\vec{p}}{dt}$ , запишем скорость изменения энергии электрона за счет упругих потерь в виде

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{2M} \overline{(\Delta\vec{p})^2} v_c = -\frac{m^2}{2M} \overline{(\Delta\vec{v})^2} v_c.$$

Проведем усреднение с учетом того, что электрон теряет в одном акте только очень малую долю своей энергии

$$\overline{(\Delta v)^2} = \overline{(\vec{v}' - \vec{v})^2} = v'^2 - 2v'v\overline{\cos\theta} + v^2 = 2v^2(1 - \overline{\cos\theta}).$$

Таким образом,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2m}{M} (1 - \overline{\cos\theta}) \varepsilon v_c = -\frac{2m}{M} \varepsilon v_m. \quad (3.5)$$

В каждом соударении электрон теряет в среднем долю  $\frac{2m}{M}(1 - \overline{\cos\theta})$  от величины своей энергии  $\varepsilon$ , а в каждом «эффективном» – долю  $\frac{2m}{M}$ . Величина эта очень мала. В этом и кроется причина того, что температуры электронов и газа часто сильно различаются, а выравниваются довольно медленно. Например, в аргоне, чтобы отдать значительную часть своей энергии атому, электрон должен сделать примерно  $\frac{M}{2m}(1 - \overline{\cos\theta})^{-1} \approx 4 \cdot 10^4$  столкновений.

За исключением рассеяния электронов атомами и молекулами другие упругие столкновения, которые происходят в разрезах, описываются законами обычной, а не квантовой механики. Сюда относятся и рассеяние ионов атомами и молекулами, которое существенно отличается от столкновений нейтральных частиц друг с другом, и столкновения между заряженными частицами, включая и электроны. У иона аргона, например, при  $\varepsilon = 1 \text{ эВ}$   $v = 2,16 \cdot 10^5 \text{ см/с}$  и длина волны де Бройля  $\lambda = \frac{h}{Mv} = 8,76 \cdot 10^{-11} \text{ см}$  очень мала по сравнению с размерами молекул. Что же касается электрон-

электронных и электрон-ионных столкновений, то здесь сказываются особые свойства кулоновского закона взаимодействия, благодаря которым результаты квантовой и классической механики совпадают. Классическая теория обладает большей простотой и наглядностью по сравнению с квантовой, а в отношении кулоновских столкновений дает результаты, которые вообще не поддаются непосредственному экспериментальному наблюдению. Мы часто будем прибегать к классическому анализу, поэтому рассмотрим его основные элементы.

Силы, действующие между атомными частицами, обычно имеют потенциальный характер. Потенциальная энергия взаимодействия  $U(r)$  является функцией расстояния  $r$  между частицами. Движение каждой из взаимодействующих частиц описывается вторым законом Ньютона:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}(r), \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}(r), \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (3.6)$$

Здесь  $m_1, m_2$  – массы частиц;  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  – их радиус-векторы; точками обозначено дифференцирование по времени. Вторая частица действует на первую с силой  $\vec{F} = -\nabla U$ . Она направлена вдоль линии, соединяющей центры частиц. В соответствии с третьим законом Ньютона на вторую частицу действует сила, равная по величине и противоположная по направлению.

Междучастичные силы убывают с расстоянием, т.е. до столкновения частицы движутся по прямолинейным траекториям с постоянной скоростью. При сближении траектории искривляются, а затем, когда частицы удаляются друг от друга, силы снова исчезают и частицы расходятся с новыми постоянными скоростями вдоль новых прямых. Траектории частиц схематично показаны на рис. 3.4. Они не обязательно лежат в одной плоскости, так что изображены проекции траекторий на плоскость рисунка.

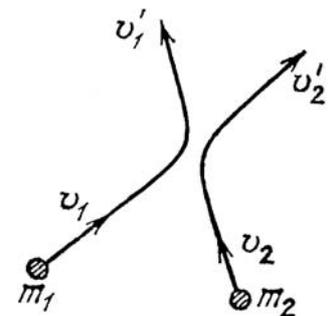


Рис. 3.4. Схема траекторий частиц, испытывающих упругое соударение

Задача двух тел сводится к интегрированию уравнения их относительного движения. Действительно, поделив уравнения (3.6) на массы, а затем, вычитая их друг из друга, найдем

$$m' \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(r), \quad \vec{F}(r) = -\frac{dU}{d\vec{r}} = -\frac{dU}{dr} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.7)$$

где

$$m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.8)$$

Эта величина называется *приведенной массой*. Вектор  $\vec{r}$  проведен из центра второй частицы в центр первой. Таким образом, уравнение (3.7) описывает движение первой частицы относительно второй, как если бы последняя была неподвижной, а первая обладала приведенной массой. Разумеется, их можно поменять местами.

Интегрирование уравнения (3.7) не дает полного решения задачи, т.е. траектории частиц в системе координат, где газ покоится, а вторая частица-мишень движется (лабораторная или Л-система), так как траектория второй частицы, которая в данном рассмотрении считается неподвижной, остается неизвестной. Полное решение легко получить, если ввести в рассмотрение координатную *систему центра масс* (Ц-систему). Центром масс системы тел называется точка, которая движется так, как если бы она обладала полными массой и импульсом всей системы. Центр масс взаимодействующих частиц, на которые не действуют другие силы, движется с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Это следует из уравнений (3.6), если их сложить и один раз проинтегрировать по времени

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V} = \text{const}, \quad \vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1, \quad \vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2. \quad (3.9)$$

Положение центра масс характеризуется его радиус-вектором  $\vec{R}$ , который связан с радиус-векторами частиц соотношением

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{R}, \quad \dot{\vec{R}} = \vec{V} + \text{const}. \quad (3.10)$$

Скорость центра масс и его положение в каждый момент времени известны благодаря начальным условиям к системе (3.6), которые состоят в задании скоростей и положений частиц в какой-то момент времени до столкновения. Поэтому достаточно рассмотреть движение частиц в системе координат, где центр масс покоится. Для перехода к Л-системе достаточно будет добавить к найденным скоростям частиц постоянный вектор  $\vec{V}$ , а к радиус-векторам – вектор  $\vec{R}$ .

Для рассмотрения движения в Ц-системе будем отсчитывать радиус-векторы частиц от точки центра масс, т.е. положим в (3.10)  $\vec{R} = 0$ , а в (3.9)  $\vec{V} = 0$ . Из получающихся равенств следует, что в любой момент времени частицы располагаются на одной прямой, проходящей через центр масс, а их скорости в Ц-системе всегда параллельны. До столкновения частицы

движутся строго навстречу, после – в противоположных направлениях, только в результате соударения скорости и траектории поворачиваются на определенный угол  $\chi$ .

Расстояния частиц от центра масс, т.е. радиус-векторы  $\vec{r}_{1C}$ ,  $\vec{r}_{2C}$  в Ц-системе, и их скорости  $\vec{v}_{1C}$ ,  $\vec{v}_{2C}$  в течение всего времени составляют неизменные доли от расстояния между частицами  $\vec{r}$  и их относительной скорости  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{1C} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, & \vec{v}_{1C} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}, \\ \vec{r}_{2C} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, & \vec{v}_{2C} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Эти формулы вместе с соотношениями

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{1C} + \vec{R}, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_{1C} + \vec{V}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_{2C} + \vec{R}, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_{2C} + \vec{V} \quad (3.12)$$

окончательно решают задачу после того, как найдено решение уравнения (3.7) для относительного движения  $\vec{r}(t)$ . На рис. 3.5 схематически изображены траектории частиц в Ц-системе. Как мы сейчас увидим, они лежат строго в одной плоскости.

Если рассматривать процесс, в котором сталкивающиеся частицы не равноправны, например рассеяние ионов молекулами газа, то при рассмотрении относительного движения естественно считать неподвижной (второй) частицу-мишень. Начальные условия к уравнению (3.7) состоят в задании относительной скорости  $v_\infty$  в стадии, когда частицы находятся далеко друг от друга и не взаимодействуют. Кроме нее, задается *прицельное расстояние*  $\rho$ , выполняющее функцию координатного параметра. Это минимальное расстояние, на котором пролетели бы друг мимо друга частицы, если бы между ними вообще не действовали силы. В Ц-системе или в системе, где мишень неподвижна, что все равно, поскольку  $\vec{v}_{1C}$ ,  $\vec{v}_{2C}$  и  $\vec{v}$  параллельны,  $\rho$  есть длина перпендикуляра, опущенного из точки второй частицы на прямую начального движения первой (см. рис. 3.4, 3.5).

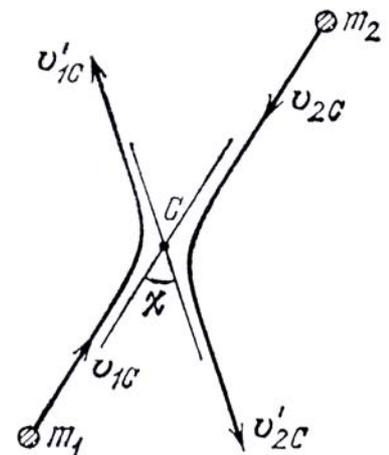


Рис. 3.5. Траектория упруго сталкивающихся частиц в системе центра масс

Умножим уравнение относительного движения (3.7) скалярно на  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  и проинтегрируем. В результате получим соотношение, которое выражает закон сохранения энергии относительного движения

$$W = \frac{m'v^2}{2} + U(r) = \text{const} = \frac{m'v_\infty^2}{2}. \quad (3.13)$$

Кинетическая энергия относительного движения характеризуется приведенной массой. Энергия  $W$  выражается через  $v_\infty$ , так как потенциальная энергия исчезает, когда частицы находятся далеко друг от друга. Из

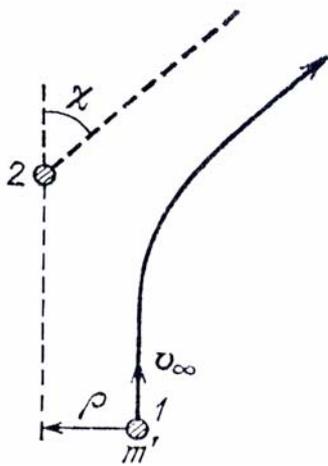


Рис. 3.6. Движение упруго сталкивающихся частиц в системе координат, связанной с частицей-мишенью

уравнения (3.13) следует, что величина относительной скорости после упругого столкновения, когда частицы расходятся далеко, остается той же, что и до столкновения. В результате столкновения векторы  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_{1C}$ ,  $\vec{v}_{2C}$  в Ц-системе только поворачиваются, но не изменяются по величине. Угол поворота  $\vec{v}$  одинаков в Ц-системе и в системе, где одна из частиц (вторая) покоится. Этот угол ( $\chi$ ) одинаков на рис. 3.5 и 3.6. Если частицы отталкиваются,  $U > 0$  и в ходе взаимодействия скорости  $v$ ,  $v_{1C}$ ,  $v_{2C}$  уменьшаются по величине по сравнению с начальными и конечными. Если частицы притягиваются, то они вначале ускоряются.

Умножим теперь уравнение (3.7) на  $\vec{r}$  векторно. После интегрирования найдем:

$$\vec{M} = m'[\vec{r} \times \vec{v}] = \text{const}, \quad M = m'v_\infty \rho. \quad (3.14)$$

Это равенство выражает закон сохранения момента импульса. Постоянная величина момента выражается через относительную скорость удаленных частиц и прицельное расстояние. Из равенства (3.14) следует, что все траектории — относительного движения и движения частиц в Ц-системе — лежат в одной плоскости. После столкновения длина перпендикуляра между конечными прямыми траекториями равна прицельному расстоянию  $\rho$ .

Задание интегралов движения  $W$  и  $M$  или, что то же самое,  $v_\infty$  и  $\rho$  позволяет при известном законе взаимодействия  $U(r)$  проинтегрировать уравнение (3.7) до конца, т.е. фактически решить всю задачу. Мы этого делать не будем, поскольку точные выражения нам не понадобятся, а приближенные, позволяющие понять физический смысл, мы получим элементарным путем, рассматривая конкретные процессы. Ограничимся качественными выводами, которые кажутся достаточно очевидными и без детального решения:

- траектория относительного движения симметрична относительно «неподвижной» частицы;
- траектории обеих частиц в Ц-системе симметричны относительно центра масс (см. рис. 3.5, 3.6);
- каждому прицельному расстоянию  $\rho$  при данной скорости  $v_\infty$  соответствует своя траектория и свой конечный угол отклонения частицы  $\chi(\rho) \gg$  от первоначального направления  $\vec{v}_\infty$ ;
- углы отклонения обеих частиц в Л-системе можно связать с  $\chi$  при помощи формул (3.12) для перехода из одной координатной системы в другую.

И в заключение определим вид максвелловского распределения по относительным скоростям. Суммарная кинетическая энергия двух частиц в Л-системе складывается из кинетической энергии относительного движения  $m'v^2/2$  и энергии движения центра масс  $(m_1 + m_2)V^2/2$ , что легко проверить путем непосредственного вычисления. Это позволяет легко найти функцию распределения по скоростям относительного движения произвольных частиц  $dN(v)$ , если смесь газов 1 и 2 термодинамически равновесна. Функция  $dN(v)$  эквивалентна интегралу по  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  от произведения функций максвелловского распределения частиц 1 и 2, взятому при условии, что  $v = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \text{const}$ . Интегрирование можно провести и непосредственно, но удобнее перейти от  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  к новым переменным  $\vec{V}, \vec{v}$  по формулам (3.11), (3.12). Как нетрудно вычислить, элемент площади в пространстве скоростей при этом  $d v_{1x} d v_{2x} = d v_x d V_x$ , так что элемент объема  $d \vec{v}_1 d \vec{v}_2 = d \vec{v} d \vec{V}$ . С помощью (2.4) найдем

$$\begin{aligned}
\frac{dN(\mathbf{v})}{N} &= \iint_{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \text{const}} \left(\frac{m_1}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_1 v_1^2}{2kT}\right) d\vec{v}_1 \left(\frac{m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_2 v_2^2}{2kT}\right) d\vec{v}_2 = \\
&= \int_{|\vec{v}| = \text{const}} \left(\frac{m'}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m' v^2}{2kT}\right) d\vec{v} \int \left(\frac{m_1 + m_2}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{(m_1 + m_2) V^2}{2kT}\right) d\vec{V} = \\
&= 4\pi \left(\frac{m'}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m' v^2}{2kT}\right) v^2 dv,
\end{aligned}$$

о чем и говорилось на прошлой лекции. Отсюда  $\bar{v} = \left(8kT/\pi m'\right)^{1/2}$ , а средняя кинетическая энергия относительного движения двух частиц  $m'v^2/2 = (3/2)kT$ , как и средняя энергия частиц того и другого вида.

#### Лекция 4. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ

*Дифференциальное сечение • Расходимость полного сечения • Обмен импульсом и энергией в общем случае упругого рассеяния • Транспортное сечение для столкновения частиц сравнимой массы • Релаксация в поступательных степенях свободы газа*

Понятие эффективного сечения вводится так же, как и ранее. Пусть на одну неподвижную частицу-мишень налетает равномерный поток частиц со скоростью  $v_\infty$  и плотностью  $N_1$ . В интервал углов от  $\chi$  до  $\chi + d\chi$  отклонятся все те частицы, которые налетают с прицельным расстоянием от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$ . Это те частицы, которые попадают в кольцо площадью  $2\pi\rho d\rho$  около мишени. Число актов рассеяния в интервал углов  $d\chi$  в 1 с равно  $N_1 v_\infty 2\pi\rho d\rho = N_1 v_\infty d\sigma$ , и дифференциальное сечение есть

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{2\pi\rho d\rho}{2\pi\sin\chi d\chi} \right| = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right|, \quad (4.1)$$

где  $d\Omega = 2\pi \cdot \sin\chi \cdot d\chi$  – элемент телесного угла около направления  $\vec{v}_\infty$ . Знак модуля поставлен потому, что  $\rho(\chi)$  обычно функция падающая и  $d\rho/d\chi$  меньше нуля. Действительно, силы взаимодействия ослабевают с расстоянием, и чем дальше пролетает частица от мишени, тем на меньший угол она рассеивается.

Полное сечение упругого рассеяния получается путем интегрирования дифференциального

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int 2\pi\rho d\rho.$$

Интеграл по  $\rho$  простирается до того расстояния, на котором еще действуют силы. Но если потенциал взаимодействия при бесконечном удалении частиц стремится к нулю асимптотически, например, по степенному закону  $U \sim r^{-n}$ , то формально по  $\rho$  следует интегрировать до бесконечности и полное сечение оказывается бесконечным. Физически это связано с тем, что мы включили в понятие рассеяния отклонение на любой сколь угодно малый угол, а на бесконечно малый угол частица отклонится, пролетая на бесконечно большом расстоянии. Исключение составляют только такие взаимодействия, при которых потенциал  $U$  считается строго равным нулю дальше некоторого расстояния  $d$ , как в модели твердых шаров. Заметим, что в квантовой механике полное сечение оказывается конечным, если потенциал взаимодействия убывает быстрее чем  $U \sim r^{-2}$ .

Расходимости для большинства взаимодействий устраняются, если интересоваться не полным, а транспортным сечением. Упругое рассеяние важно только своим результатом: изменением импульса и кинетической энергии частицы. Но это как раз и характеризуется не полным, а транспортным сечением, как было сказано в предыдущей лекции на примере рассеяния быстрой легкой частицы – электрона «неподвижным» тяжелым атомом.

В этом случае вычислить потерю импульса и ввести понятие транспортного сечения можно прямо в Л-системе, так как рассеивающий атом предполагается «бесконечно тяжелым» (неподвижным), из-за чего Л- и Ц-системы, как и углы рассеяния  $\theta$  и  $\chi$  в них, совпадают. В общем же случае это не так и приходится принимать во внимание, что интерес представляют потери импульса и энергии в Л-системе, а сечение задается как функция угла рассеяния в Ц-системе.

Найдем потерю импульса или скорости направленного движения частицы относительно массы газа, в котором она диффундирует или дрейфует. При этом не будем делать никаких допущений по поводу соотношения масс и скоростей сталкивающихся частиц. Пусть  $\vec{v}_1$  – скорость рассеивающейся частицы в Л-системе до столкновения,  $\vec{v}'_1$  – после. Вектор скорости изменяется при столкновении на  $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 - \vec{v}_1$ , импульс на  $\Delta\vec{p}_1 = m\Delta\vec{v}_1$ . В 1 с импульс частицы изменяется на

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \langle \int \Delta\vec{p}_1 N_2 v d\sigma(\Delta\vec{p}_1) \rangle, \quad (4.2)$$

где  $N_2$  – плотность частиц-рассеивателей,  $v \equiv v_\infty$  – относительная скорость частиц,  $d\sigma(\Delta\vec{p}_1)$  – сечение, соответствующее изменению импульса  $\vec{p}_1$  в малом интервале около  $\Delta\vec{p}_1$ . Знаком  $\langle \rangle$  обозначена процедура усреднения по скоростям рассеивающих частиц  $\vec{v}_2$  при фиксированной скорости  $\vec{v}_1$  рассеиваемой.

Перейдем от изменения импульса  $\Delta\vec{p}_1$  в Л-системе к изменению относительной скорости  $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$

$$\Delta\vec{p}_1 = m_1\Delta\vec{v}_1 = m_1\Delta\vec{v}_{1C} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\Delta\vec{v} = m'\Delta\vec{v}.$$

Но при упругом рассеянии модуль относительной скорости остается неизменным, вектор  $\vec{v}$  лишь поворачивается на угол  $\chi$ . Раскладывая как и ранее вектор  $\vec{v}'$  на составляющие, параллельную и перпендикулярную начальному вектору  $\vec{v}$ , замечаем, что в силу симметрии рассеяния относительно начального направления скорости слагаемое с перпендикулярной составляющей при интегрировании по углам исчезает.

Параллельная составляющая дает

$$\Delta\vec{v}_{\parallel} = \vec{v}'_{\parallel} - \vec{v} = \vec{v}(\cos\chi - 1),$$

поскольку  $|\vec{v}'| = |\vec{v}|$ . Таким образом,  $d\sigma(\Delta\vec{p}_1)$  эквивалентно сечению рассеяния в интервал углов от  $\chi$  до  $\chi + d\chi$  в Ц-системе, и в итоге мы получаем

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = - \langle N_2 m' \vec{v} v \int (1 - \cos\chi) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \rangle. \quad (4.3)$$

Выражение

$$\sigma_{TR}(\nu) = \int (1 - \cos \chi) \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad (4.4)$$

в котором интегрирование производится по углам рассеяния в Ц-системе и которое является функцией относительной скорости частиц, представляет собой транспортное сечение в общем случае. Хотя интеграл полного сечения расходится со стороны малых углов рассеяния, транспортное сечение, как правило, сходится, так как при  $\chi \rightarrow 0$   $1 - \cos \chi \approx \chi^2/2$ , и под знаком интеграла появляется быстро стремящийся к нулю множитель. Тем самым учитывается тот факт, что отклонения на малые углы дают малый вклад в изменение импульса частицы. Особого рассмотрения требует лишь случай частиц, взаимодействующих по кулоновскому закону.

Воспользовавшись понятиями транспортного сечения и эффективной частоты столкновений, запишем изменение импульса частицы за 1 с в виде

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -N_2 m' \langle \vec{v} \nu \sigma_{TR}(\nu) \rangle = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \langle m_1 \vec{v} \nu_m(\nu) \rangle. \quad (4.5)$$

Если налетающая частица быстрая ( $\vec{v} \approx \vec{v}_1$ ), необходимость в усреднении по  $\vec{v}_2$  пропадает и

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} \approx -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \langle \vec{p}_1 \nu_m(\nu_1) \rangle. \quad (4.6)$$

Легкая частица в среде тяжелых ( $m_1 \ll m_2$ ) быстро растрчивает свой импульс за одно «эффективное» столкновение. Это случай рассеяния электрона в газе тяжелых частиц, который мы рассматривали на предыдущей лекции. Быстрая тяжелая частица в газе из легких ( $m_1 \gg m_2$ ) растрчивает свой импульс медленно, она долго летит прямо, «расталкивая» легкие частицы.

В акте столкновения энергия рассеивающейся частицы изменяется на

$$\Delta \varepsilon_1 = \varepsilon'_1 - \varepsilon_1 = \frac{m_1 v_1'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Переходя к относительным и скоростям центра масс:

$$\Delta \varepsilon_1 = \frac{m_1}{2} \left[ \left( \vec{V} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}' \right)^2 - \left( \vec{V} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \right)^2 \right] = m' \vec{V} (\vec{v}' - \vec{v}),$$

можно выразить  $\Delta\varepsilon_1$  через углы отклонения частицы в Ц-системе. Это облегчает операцию усреднения  $\Delta\varepsilon_1$  по углам отклонения, поскольку дифференциальное сечение задается как функция углов именно в Ц-системе. Обозначая углы так, как это показано на рисунке, и пользуясь известной формулой сферической тригонометрии

$$\cos\theta' = \cos\theta \cdot \cos\chi + \sin\theta \cdot \sin\chi \cdot \cos\varphi,$$

найдем

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_1 &= m'Vv[\cos\theta(\cos\chi - 1) + \sin\theta \cdot \sin\chi \cdot \cos\varphi] = \\ &= -m'\vec{V}\vec{v}[(1 - \cos\chi) - \text{tg}\theta \cdot \sin\chi \cdot \cos\varphi]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Скорость изменения энергии частицы 1, когда она испытывает столкновения в газе из частиц 2, равна

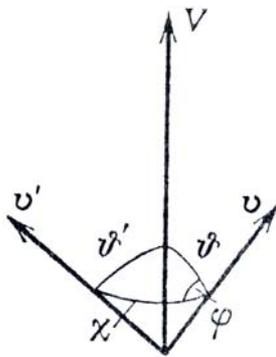


Схема направлений и углов рассеяния

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \left\langle \int \Delta\varepsilon_1 N_2 v \frac{d\sigma}{dt} d\Omega \right\rangle, \quad (4.8)$$

где скобки, как и прежде, означают усреднение по скоростям  $\vec{v}_2$ . Рассеяние симметрично относительно  $\vec{v}$  и дифференциальное сечение не зависит от азимутального угла  $\varphi$ . Поэтому при интегрировании по  $d\Omega = \sin\chi \cdot d\chi \cdot d\varphi$  слагаемое в  $\Delta\varepsilon_1$ , пропорциональное  $\cos\varphi$ , исчезает.

Скорость изменения энергии можно представить в виде

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = - \left\langle m'\vec{V}\vec{v} N_2 v \sigma_{tr} \right\rangle = \left\langle \Delta\varepsilon_{1\text{эф}} \nu_m(v) \right\rangle, \quad (4.9)$$

$$\Delta\varepsilon_{1\text{эф}} = -m'\vec{V}\vec{v} = -\frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{m_2 - m_1}{2} \vec{v}_1 \vec{v}_2 \right), \quad (4.10)$$

где  $\nu_m = N_2 v \sigma_{tr}(v)$  – эффективная частота столкновений частицы 1, а  $\Delta\varepsilon_{1\text{эф}}$  – среднее изменение ее энергии в одном «эффективном» столкновении. В последнем преобразовании оно выражено через скорости частиц перед столкновением:  $\varepsilon_2 = m_2 v_2^2 / 2$ .

В формулах (4.1) – (4.4) не содержится никаких сведений по поводу самого процесса взаимодействия частиц, использовались только связь на-

чальных и конечных скоростей законами сохранения импульса и энергии и феноменологическое выражение вероятности рассеяния через эффективное сечение. Поэтому они справедливы как в классической, так и в квантовой механиках.

В предельном случае достаточно быстрых частиц, когда рассеиватели можно считать неподвижными ( $\vec{v}_2 = 0, \varepsilon_2 = 0$ ), необходимость в усреднении по  $\vec{v}_2$  отпадает, и формулы (4.9), (4.10) определяют закон торможения частиц за счет упругих потерь. Если к тому же  $m_1 \ll m_2$ , то они превращаются в выражение для упругих потерь электронов при рассеянии неподвижными атомами; в этом случае  $|\Delta\varepsilon_{1\text{эф}}| = 2(m_1/m_2)\varepsilon_1 \ll \varepsilon_1$ . Напротив, если массы одного порядка, то  $\Delta\varepsilon_{1\text{эф}}$  порядка  $\varepsilon_1$ , то есть частицы обмениваются порциями энергии, которые порядка самих энергий. При рассеянии неподвижной частицей равной массой строго назад налетающая частица полностью отдает свою энергию мишени. Действительно, согласно (4.10) множитель перед квадратными скобками в (4.7) равен в этом случае  $\varepsilon_1/2$ , а выражение в квадратных скобках равно двум.

Полученные результаты позволяют наглядно продемонстрировать общую тенденцию к установлению термодинамического равновесия (этот процесс называется релаксацией) в смеси газов. Рассмотрим поведение средней энергии частиц 1, для чего усредним равенство (4.9) по скоростям  $\vec{v}_1$ . Нас будут интересовать простые частные случаи, которые дают качественное представление о поведении газа при любых реальных законах взаимодействия частиц.

Если частицы 1 и 2 обладают максвелловскими распределениями и одинаковыми температурами, то независимо от закона взаимодействия, т.е. вида функции  $v_m(v)$ , состояние стационарно:  $d\varepsilon_1/dt = 0$ . Действительно, в этом случае усреднение по  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  эквивалентно усреднению по  $\vec{v}$  и  $\vec{V}$  с соответствующими максвелловскими функциями, но при одинаковых температурах  $\langle \vec{V}\vec{v} \rangle = 0$ .

Когда массы частиц одинаковы или различаются ничтожным образом, как в случае ионов и атомов того же сорта, член с  $\vec{v}_1\vec{v}_2$  в (4.10) пропадает и

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_1}{dt} = -\frac{1}{2} \langle (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) v_m \rangle.$$

Явственно проступает тенденция к уравниванию средних энергий или температур частиц: энергия в среднем переходит от более энергичных к менее энергичным частицам. Скорость выравнивания температур очень велика. Характерное время обмена энергией, время релаксации, порядка среднего времени между «эффективными» столкновениями частиц:  $\tau_m = v_m^{-1}$ .

Если эффективная частота столкновений не зависит от скорости и является константой, член с  $\vec{v}_1 \vec{v}_2$  при усреднении исчезает вследствие хаотичности направлений скоростей даже при различных массах. При этом

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_1}{dt} = -\frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2)v_m = -\frac{\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2}{\tau}. \quad (4.11)$$

Скорость выравнивания температур пропорциональна их разности. Время релаксации

$$\tau = \frac{(m_1 + m_2)^2}{2m_1m_2v_m}. \quad (4.12)$$

тем меньше, чем меньше различие масс. С учетом сделанных предположений соотношения (4.5) и (4.6) носят общий характер и оказываются справедливыми при различных взаимодействиях атомных частиц.

Несмотря на общую тенденцию к уравниванию энергий частиц при столкновениях, которая сильнее всего проявляется, если их массы одинаковы, в индивидуальных актах более энергичная частица может и отбирать энергию у менее энергичной. Это следует из (4.1) и (4.4). Отклонения на разные азимутальные углы  $\varphi$  равновероятны, но их энергетические эффекты не равноценны. При некоторых комбинациях векторов  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  и углов  $\chi$  и  $\varphi$   $\Delta\varepsilon_1$  может быть величиной положительной, даже если  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  и  $\Delta\varepsilon_{1\text{эф}} < 0$ . Именно это обстоятельство позволяет отдельным частицам накапливать очень большую энергию за счет изъятия ее от более медленных. Тем самым открывается путь к установлению максвелловского распределения, в котором присутствуют частицы с энергиями, намного превышающими среднюю.

## Лекция 5. СТОЛКНОВЕНИЯ ИОНОВ С НЕЙТРАЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

*Поляризационное сечение • Взаимодействие с дипольными молекулами • Резонансная перезарядка*

Упругие столкновения ионов с атомами и молекулами описываются законами классической механики. Однако их даже в грубом приближении нельзя уподоблять соударениям твердых шаров, как в случае столкновений молекул друг с другом, что связано с наличием у иона электрического заряда. Когда ион приближается к молекуле, он поляризует ее своим кулоновским полем, а сам испытывает действие наведенного в молекуле дипольного момента. Силы поляризационной природы спадают с расстоянием гораздо медленнее, чем силы, действующие между нейтральными частицами. Дальнодействие оказывает существенное влияние на характер рассеяния и сечение упругих столкновений. Оценим это сечение.

Находясь на расстоянии  $r$  от молекулы, однозарядный ион своим электрическим полем  $e/r^2$  индуцирует в молекуле дипольный момент  $d = \alpha e/r^2$ , где  $\alpha$  – поляризуемость молекулы. Вектор  $\vec{d}$  направлен вдоль линии, соединяющей центры иона и молекулы. Положительный ион подтягивает молекулярные электроны ближе к себе, отрицательный их отодвигает от себя. Дальше от иона всегда оказывается заряд одноименного знака, ближе – противоположный. Поэтому взаимодействие поляризационной природы имеет характер притяжения. Напряженность электрического поля наведенного диполя в точке, где находится ион, равна  $2d/r^3 = 2\alpha e/r^5$ , его потенциал –  $\alpha e/2r^4$ . На ион действует сила  $F = 2\alpha e^2/r^5$ ; энергия взаимодействия иона с молекулой  $U = -\alpha e^2/r^4$ , причем энергия отрицательна независимо от знака иона.

Вначале оценим угол рассеяния  $\chi$  при пролете иона на достаточно большом прицельном расстоянии  $\rho$ , когда угол  $\chi$  в Ц-системе мал. Эта оценка позволит убедиться в том, что транспортное сечение рассеяния иона конечно. Сила  $F$  имеет составляющую  $F_{\perp}$ , перпендикулярную начальной скорости иона. Эта составляющая сообщает иону поперечную к его

начальной траектории скорость  $v_{\perp}$ . Наибольшей величины  $F_{\perp}$  достигает в стадии тесного сближения частиц. Расстояние между ними при этом порядка  $\rho$ , а сила  $F_{\perp} \approx 2\alpha e^2/\rho^5$ . Стадия эта имеет длительность  $\tau \approx \rho/v$ , где  $v$  – относительная скорость частиц перед столкновением.

Приравнивая импульс силы  $F_{\perp}\tau$  приращению импульса  $m'v_{\perp}$ , найдем  $v_{\perp}$ , а затем и угол отклонения иона от начальной траектории в зависимости от прицельного расстояния:

$$\chi \approx \frac{v_{\perp}}{v} \approx \frac{F_{\perp}\tau}{m'v} \approx \frac{2\alpha e^2}{m'v^2\rho^4} = \frac{\alpha e^2}{\varepsilon'\rho^4}.$$

Здесь  $\varepsilon' = m'v^2/2$  – энергия относительного движения частиц, когда они находятся далеко друг от друга. Дифференциальное сечение для рассеяния на малые углы примерно равно

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \approx \frac{\pi}{2} \left( \frac{\alpha e^2}{\varepsilon'} \right)^{1/2} \frac{d\chi}{\chi^{3/2}}, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha e^2}{\varepsilon'} \right)^{1/2} \frac{1}{\chi^{5/2}}.$$

Полное сечение, т.е. интеграл от  $d\sigma$ , естественно, расходится при интегрировании до  $\rho \rightarrow \infty$  или  $\chi \rightarrow 0$ , но интеграл транспортного сечения сходится. Более того, при  $\chi \rightarrow 0$  подынтегральная функция

$$(1 - \cos\chi) d\sigma \approx \frac{\chi}{2} d\sigma \approx \chi^{1/2} d\chi$$

стремится к нулю.

Удостоверившись в том, что рассеяние на малые углы не дает решающего вклада в интеграл, оценим транспортное сечение путем следующего рассуждения. Подлетая к молекуле с кинетической энергией  $\varepsilon'$  (относительно молекулы) на прицельном расстоянии  $\rho$ , ион подвергается сильному притяжению, существенно искажающему его траекторию, если наибольшая энергия взаимодействия его с молекулой  $|U_{\max}| \approx |U(\rho)|$  равна или больше его кинетической энергии  $\varepsilon'$ . Если  $|U_{\max}| \ll \varepsilon'$ , траектория иона искривляется лишь немного и соответствующие прицельные расстояния дают малый вклад в транспортное сечение. Чтобы заметно отклониться и потерять импульс, ион должен пролететь на таких расстояниях  $\rho$ , что

$|U_{\max}| > \varepsilon'$ , т.е. попасть в кружок радиусом  $\rho_0$ , при котором  $|U(\rho_0)| \approx \varepsilon'$ . Отсюда транспортное сечение по порядку величины равно

$$\sigma_{tr} \approx \pi \rho_0^2 \approx \pi \sqrt{\alpha e^2 / 2\varepsilon'}.$$

Точное вычисление дает результат в  $2\sqrt{2}$  раз больше:

$$\sigma_{tr} = 2\pi \sqrt{\alpha e^2 / \varepsilon'} = 2\sqrt{2}\pi a_0^2 \sqrt{\left(\frac{\alpha}{a_0^3}\right) \frac{I_H}{\varepsilon'}}. \quad (5.1)$$

В последнем преобразовании мы ввели борковский радиус  $a_0 = \hbar^2 / me^2 = 0,529 \cdot 10^{-8}$  см и потенциал ионизации атома водорода  $I_H = e^2 / 2a_0 = me^4 / 2\hbar^2 = 13,6$  эВ, чтобы выделить характерный масштаб сечений атомных столкновений – площадь первой борвской орбиты  $\pi a_0^2 = 0,880 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup>.

Для поляризационного сечения (5.1) характерен закон  $\sigma_{tr} \propto 1/v$ , где в случае достаточно быстрых ионов относительная скорость  $v$  практически совпадает со скоростью иона в лабораторной системе отсчета. Закон  $1/v$  хорошо подтверждается опытом. Для медленных ионов сечения велики, они значительно превышают обычные газокINETические сечения. Численные оценки можно сделать, воспользовавшись данными о поляризуемостях, которые приведены в табл. 2 приложения.

При повышении скорости поляризационное сечение падает ниже того, которое отвечает близкодействующим силам («соприкосновению» иона с молекулой) и которое, как и газокINETическое, от  $v$  зависит слабо. Значит, выше некоторой энергии  $\varepsilon'_K$  закон  $\sigma_{tr} \propto 1/v$  сменяется на  $\sigma_{tr} \approx \text{const}$ . Приравнивая поляризационное и газокINETическое сечения, с помощью табл. П1 и П2 можно оценить эту энергию.

Несимметричные молекулы обладают постоянным дипольным моментом  $d_0$ ; некоторые значения  $d_0$  приведены в табл. П2. На ион со стороны молекулы действуют поля постоянного и индуцированного моментов. То из них, которое окажется более сильным, и определяет сечение

рассеяния. Энергия взаимодействия иона с постоянным диполем зависит от ориентации вектора  $\vec{d}_0$  по отношению к линии, связывающей центры частиц, но по порядку величины она равна  $U \approx ed_0/r^2$ , а соответствующая сила  $F \approx ed_0/r^3$ . Угол рассеяния в Ц-системе, оцененный так же, как и для поляризационной силы, имеет порядок  $\chi \approx e^2 d_0 / \varepsilon' \rho^2$ . Дифференциальное сечение рассеяния на малые углы

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho \approx \frac{\pi e^2 d_0}{\varepsilon' \chi^2} d\chi,$$

т.е. транспортное сечение конечно (под интегралом стоит  $\chi^2 d\sigma \propto d\chi$ ). Прицельное расстояние  $\rho_0$ , соответствующее равенству,  $|U_{\max}| \approx |U(\rho_0)| \approx \varepsilon'$  есть  $\rho_0 \approx \sqrt{ed_0/\varepsilon'}$ , так что транспортное сечение

$$\sigma'_{tr} \approx \pi\rho_0^2 \approx \frac{\pi ed_0}{\varepsilon'} = 2\pi a_0^2 \left( \frac{d_0}{ea_0} \right) \frac{I_H}{\varepsilon'}. \quad (5.2)$$

Из сопоставления зависимостей  $\sigma_{tr} \propto 1/v$  и  $\sigma'_{tr} \propto 1/v^2$  следует, что на достаточно медленные ионы сильнее действует собственный дипольный момент молекулы, если таковой у нее имеется, и сечение рассеяния определяется формулой (5.2). На достаточно быстрые ионы, которые должны пролететь близко около молекулы, чтобы подвергнуться заметному воздействию, сильнее действует большой наведенный момент, и сечение определяется формулой (5.1), как и в случае недипольных молекул. Переход от одного закона рассеяния к другому происходит при энергии  $\varepsilon'_0$ , которая определяется условием  $\sigma_{tr}(\varepsilon'_0) \approx \sigma'_{tr}(\varepsilon'_0)$ . Она равна примерно

$$\varepsilon'_0 \approx I_H \left( \frac{d_0}{ea_0} \right) \left( \frac{2\alpha}{a_0^3} \right)^{-1}.$$

Воспользовавшись данными табл. П2, найдем, что в СО и NO, например, величина  $\varepsilon'_0 \approx 10^{-2}$  эВ, что даже меньше тепловой энергии частицы при комнатной температуре 300 К – 0,026 эВ. Значит, в этих газах практически всегда преобладают поляризационные силы и роль собственного

момента молекул несущественна. С другой стороны, в парах воды, молекулы которой обладают большими дипольными моментами, энергия  $\epsilon'_0 \approx 2,3$  эВ довольно велика. При энергии ионов, меньших этой величины, что вполне типично для разрядных процессов, преобладает действие собственного момента молекулы, и упругое сечение следует закону (5.2).

Когда ионы движутся в собственном газе, например ионы  $\text{He}^+$  в гелии, помимо упругих соударений существует еще один процесс, в результате которого происходит потеря импульса и направленной скорости иона. Это процесс резонансной перезарядки. Он обладает большой вероятностью и очень сильно влияет на подвижность ионов в поле и коэффициент их диффузии. Можно сказать, в собственном газе этот процесс является определяющим.

Акт перезарядки состоит в следующем. Положительный ион, разогнанный между двумя столкновениями электрическим полем или просто блуждающий в газе, пролетая мимо нейтрального атома, на лету «отбирает» у атома наружный электрон и продолжает путь в виде нейтрального атома. Перезарядка происходит даже при пролете частиц на больших прицельных расстояниях, что случается чаще. Взаимодействие между ними при этом невелико, и упругого рассеяния, т.е. обмена импульсом и энергией, почти не происходит. При пролете очень энергичного иона, когда время взаимодействия относительно мало, атом, у которого отнимается электрон, вообще не успевает «шевелинуться». Между тем для перехода электрона этого времени вполне достаточно, так как электрон переходит с места на место со скоростью, масштабом которой служит его скорость в атоме ( $10^8$  см/с), а она гораздо больше скорости ионов.

Таким образом, вновь образованный ион начинает свое движение с той самой скоростью, которой он обладал, будучи нейтральным атомом. Если процесс идет в поле, то ион начинает ускоряться в направлении поля, обладая в среднем нулевой направленной скоростью. Следовательно, в акте перезарядки происходит полная потеря направленного импульса иона. Непрерывно повторяющаяся перезарядка происходит и в случае отрицательных ионов, если таковые существуют в газе из собственных атомов или молекул, например  $\text{O}_2^-$  в молекулярном кислороде. В этом случае буквально применима аналогия с эстафетой: подлетающая частица вручает «эстафетную палочку» – электрон стартующей.

Перезарядка возможна и в случае разнородных частиц, но такого типа акты чаще всего носят разовый характер. Действительно, если потенциал ионизации атома А  $I_A$  больше, чем у атома В, то перезарядка  $A^+ + B \rightarrow A + B^+$  энергетически позволена, а следующий акт  $B^+ + A \rightarrow B + A^+$  потребовал бы затраты энергии  $I_A - I_B$ , что накладывает определенные и не всегда выполнимые требования на энергетические состояния частиц  $B^+$ . Перезарядка ионов в собственном газе тем и замечательна, что не сопровождается потерями энергии, как и упругие столкновения. По своему результату она вполне эквивалентна упругому удару, хотя и сопровождается превращениями частиц, что, казалось бы, является атрибутом неупругого столкновения. Перезарядка разнородных частиц, сопровождающаяся изменениями внутренней энергии, является чисто неупругим процессом.

Процессы перезарядки в собственном газе имеют резонансный (в квантовомеханическом смысле) характер, поэтому сечения их велики, даже больше, чем сечения упругого рассеяния. Некоторые результаты измерений в одноатомных инертных газах показаны на рисунке в приложении; графики удобны тем, что на них нанесены сечения перезарядки и упругого рассеяния.

Теоретическое рассмотрение показывает, что сечение резонансной перезарядки слабо зависит от скорости иона, оно растет при уменьшении скорости по логарифмическому закону, тогда как поляризационное сечение растет как  $1/v$ . Это значит, что при каких-то достаточно малых скоростях сечение упругого рассеяния должно превзойти сечение перезарядки. Однако практически это случается, по-видимому, при чрезвычайно малых скоростях. Даже для ионов, обладающих тепловой скоростью, при комнатной температуре перезарядка во многих случаях происходит чаще, чем упругое рассеяние.

Экспериментально исследовать перезарядку очень медленных ионов крайне трудно, как правило, сечения измеряют при энергиях ионов, превышающих один или несколько электрон-вольт. Поэтому представляет значительный интерес теоретическая формула, которая справедлива с точностью примерно в 50 %. Сечение резонансной перезарядки положительного иона, имеющего скорость  $v$ , равно приближенно

$$\sigma_{\text{пер}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\hbar^2}{2mI} \ln^2 \left( \frac{100}{v} \sqrt{\frac{2I}{m}} \right) = \pi a_0^2 \frac{I_H}{I} \ln^2 \left( \frac{100v_0}{v} \sqrt{\frac{I}{I_H}} \right), \quad (5.3)$$

где  $v_0 = 2,19 \cdot 10^8$  см/с – скорость электрона на первой боровской орбите в атоме водорода,  $I$  – потенциал ионизации атома (молекулы), из которого получился ион. По этой формуле можно экстраполировать измеренные сечения в область недоступных для прямых измерений (но представляющих большой интерес для физики разрядов) малых скоростей.

## *Лекция 6. КУЛОНОВСКИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ*

*Кулоновские столкновения заряженных частиц • Формула Резерфорда • Интеграл транспортного сечения • Потенциал вокруг заряда в плазме • Дебаевский радиус • Идеальность плазмы • Кулоновский логарифм • Частоты столкновений и длины пробега • Обмен энергией и релаксация*

Из всех сил взаимодействия между атомными частицами медленнее всего спадают с расстоянием (как  $1/r^2$ ) кулоновские силы; энергия взаимодействия  $U \sim 1/r$ . Кулоновские силы обладают наибольшим дальним действием. Это практически единственный вид взаимодействия, при котором далекие столкновения, т.е. столкновения, происходящие при больших прицельных расстояниях, вносят главный вклад в потерю импульса частицы. Транспортные сечения во многих практических случаях оказываются гораздо больше газокинетических. Это значит, что только при слабой ионизации определяющую роль для дрейфа, диффузии и обмена энергией играют столкновения зарядов с нейтральными атомами и молекулами. Стоит степени ионизации превысить величину до  $10^{-4} - 10^{-2}$  (в зависимости от температуры и других условий), как на первый план выступают столкновения заряженных частиц друг с другом.

Оценим дифференциальное сечение рассеяния точно так же, как и при рассмотрении поляризационного взаимодействия. Когда две частицы, обладающие единичными зарядами и приведенной массой  $m'$ , сближаются на прицельном расстоянии  $\rho$  с относительной скоростью  $v$ , угол рассеяния в Ц-системе определяется величиной поперечной скорости  $v_{\perp}$ , которую налетающая частица приобретает в течение времени сильного взаимодействия  $\tau \sim \rho/v$  под действием силы  $F \sim e^2/\rho^2$ . Скорость  $v_{\perp}$  может быть направлена как в сторону рассеивающей частицы, если заряды разноименные и частицы притягиваются, так и в сторону от нее, если заряды одноименные. В обоих случаях по порядку величины угол отклонения, если он мал, равен

$$\chi \approx \frac{v_{\perp}}{v} \sim \frac{F\tau}{m'v} \sim \frac{e^2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho}{v} \cdot \frac{1}{m'v} \sim \frac{e^2}{m'v^2\rho} \sim \frac{e^2}{\varepsilon'\rho}. \quad (6.1)$$

Дифференциальное сечение в этом случае равно примерно

$$d\sigma \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi\rho d\rho \sim 2\pi \left( \frac{e^2}{m'v^2} \right)^2 \frac{d\chi}{\chi^3} \sim \left( \frac{e^2}{m'v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\chi^4}.$$

Точное вычисление приводит к формуле

$$d\sigma \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \left( \frac{e^2}{2m'v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\chi/2)} = \left( \frac{e^2}{4\varepsilon'} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\chi/2)}, \quad (6.2)$$

которая была выведена Резерфордом и носит его имя. При малых углах рассеяния, когда  $\sin(\chi/2) \approx \chi/2$ , она дает величину в 4 раза большую, чем простая оценка для этого случая, которая только что была сделана.

Для кулоновского рассеяния характерны очень быстрый рост дифференциального сечения при уменьшении угла рассеяния (закон Резерфорда  $\frac{1}{\chi^4}$ ) и обратная пропорциональность квадрату энергии относительного

движения  $\varepsilon' = m'v^2/2$ . Формула (6.2) непосредственно применима к рассеянию легких частиц тяжелыми – электронов ионами. В этом случае приведенная масса  $m'$  совпадает с массой электрона  $m$ , а  $\varepsilon'$  – с энергией электрона в лабораторной системе. Углы рассеяния в Л- и Ц-системах также

совпадают. Если массы частиц одинаковы (рассеяние электронов электронами или ионов ионами того же сорта),  $m'$  равняется половине массы, а угол рассеяния в Л-системе равен  $\chi/2$ , причем частицы разлетаются под прямым углом, что следует из элементарных соотношений, которые связывают их начальные и конечные скорости законами сохранения энергии и импульса.

В результате квантовомеханического рассмотрения кулоновского столкновения заряженных частиц получается тот же самый результат – формула (6.2). Вообще же классическая механика в случае кулоновского взаимодействия применима при условии

$$\frac{\hbar v}{e^2} \ll 1, \quad (6.3)$$

которое выражает малость дебройлевской длины волны  $\lambda = \hbar/m'v$  по сравнению с характерным масштабом действия силового поля. У кулоновского поля нет масштаба длины, поэтому таковым является расстояние между частицами  $r_0$ , при котором потенциальная энергия их кулоновского взаимодействия  $e^2/r_0$  сравнима с кинетической энергией относительного движения  $m'v^2/2$ . Величину  $r_0 = e^2/m'v^2$  называют *кулоновским радиусом*. Неравенство  $\lambda \ll r_0$  эквивалентно условию (6.3).

Это неравенство накладывает ограничение на кинетическую энергию взаимодействующих частиц

$$\varepsilon' = \frac{m'v^2}{2} \ll \frac{m'e^4}{2\hbar^2}. \quad (6.4)$$

Для электронов в поле ионов  $m' = m$  и правая часть соотношения (6.4) превращается в потенциал ионизации атома водорода. Это означает, что на энергию электрона накладываемое условие  $\varepsilon \ll I_H = 13,6$  эВ. В большинстве случаев, представляющих интерес для физики разрядов,  $\varepsilon \leq I_H$ , так что электроны в поле других зарядов можно рассматривать по классической механике. Для ионов классика справедлива до энергий в десятки килоэлектрон-вольт.

Подставляя формулу Резерфорда (6.2) в интеграл транспортного сечения (4.1) и учитывая, что  $1 - \cos \chi = 2 \sin^2(\chi/2)$ , получим выражение для транспортного сечения кулоновского взаимодействия

$$\sigma_{tr} = \pi \frac{e^4}{\varepsilon_0'^2} \int_0^\pi \frac{\sin \chi d\chi}{4 \sin^2(\chi/2)}. \quad (6.5)$$

Поскольку синус малого угла равен самому углу, подинтегральное выражение при этом сводится к  $d\chi/\chi$ . Интеграл (6.5) логарифмически расходуется со стороны малых углов или же больших прицельных расстояний, ибо согласно (6.1)  $\chi \sim 1/\rho$  и  $d\chi/\chi = -d\rho/\rho$ . Хотя в каждом отдельном акте рассеяния на малый угол потеря импульса невелика, такие акты из-за легкости попадания частицы в круг большого радиуса совершаются столь часто, что накопление малых порций дает огромный суммарный эффект.

Транспортное сечение кулоновского рассеяния, безусловно, велико, но бесконечность его является следствием той идеализации, которая лежит в основе самой теории парных столкновений. Ведь столкновение двух зарядов рассматривается так, как будто они находятся одни во всем бесконечном пространстве и кулоновское поле рассеивающего заряда простирается до бесконечности. На самом деле заряженные частицы всегда находятся в окружении других зарядов. Под действием электрического поля данного рассеивателя среда поляризуется, и это приводит к уничтожению кулоновского поля рассеивателя на достаточно больших расстояниях. Пролетая далеко от рассеивателя, рассеиваемый заряд подвергается действию поля, спадающего по иному, гораздо более быстрому закону, чем кулоновский, и соотношение (6.1) теряет силу – заряд отклоняется на гораздо меньший угол.

С учетом вышесказанного ограничим пока интеграл (6.5) чисто формальным образом. Заменим нулевой нижний предел некоторым отличным от нуля углом рассеяния  $\chi_{\min}$ , который соответствует максимальному действительному прицельному расстоянию  $\rho_{\max}$ . Значение  $\rho_{\max}$  свяжем с  $\chi_{\min}$  еще формулой (6.1). Несмотря на ограничение интеграла, основной вклад в него, как правило, все равно дают рассеяния на малые углы или пролеты на больших прицельных расстояниях. Поэтому можно заменить в интеграле синусы самими углами, а в качестве верхнего по углу предела взять какую-

нибудь величину,  $\chi_{\max} \leq 1$ , до которой еще допустима экстраполяция закономерности (6.1). Рассеянию на значительные углы  $\chi \approx 1$ , как следует из (6.1) и из физических соображений, соответствуют пролеты на прицельных расстояниях порядка кулоновского радиуса  $r_0 = e^2 / \varepsilon'$ .

В результате этих упрощений получим из (6.5) приближенное выражение

$$\sigma_{tr} \approx \pi \frac{e^4}{\varepsilon'^2} \int_{\chi_{\min}}^{\chi \approx 1} \frac{d\chi}{\chi} \approx \pi \frac{e^4}{\varepsilon'^2} \int_{r_0}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\rho} = \pi \frac{e^4}{\varepsilon'^2} \ln \Lambda, \quad \Lambda = \frac{\rho_{\max}}{r_0}. \quad (6.6)$$

Из него видно, что по своим масштабам кулоновское транспортное сечение имеет площадь кружка с радиусом равным кулоновскому  $\pi e^4 / \varepsilon'^2 = \pi (2r_0)^2$ . Попадание в такой кружок приводит к рассеянию на значительные углы. Эффект же далеких столкновений, отвечающих малым углам рассеяния, но дающих существенный интегральный эффект, учитывается логарифмическим множителем  $\ln \left( \frac{\rho_{\max}}{r_0} \right) = \ln \Lambda$ , который называется *кулоновским логарифмом*.

Для определения значения величины  $\rho_{\max}$  рассмотрим потенциал поля вокруг заряда в плазме. Поместим начало координат в точку, где находится заряженная частица, та, рассеяние на которой представляет для нас интерес, и найдем, какое вокруг нее создается поле, если учесть поляризацию окружающей среды. Центральный заряд отталкивает от себя заряды того же знака и притягивает заряды противоположного. Вследствие этого происходит некоторое перераспределение заряженных частиц и вокруг центра возникает пространственный (объемный) заряд (см. рисунок). Потенциал  $\varphi$  результирующего поля удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = -4\pi e (n_+ - n_e), \quad (6.7)$$

где  $n_+$  и  $n_e$  – плотности положительных ионов и электронов. Ионы мы считаем однозарядными. Это связано с двумя причинами. Во-первых, в газовых разрядах многозарядные ионы встречаются редко, во-вторых, обобщение на случай многозарядных ионов не составляет труда.

Предположим, что плотности  $n_+$  и  $n_e$  распределяются в пространстве в соответствии с законами термодинамического равновесия, т.е. статистической формулой Больцмана

$$n_e = n_\infty e^{\frac{e\varphi}{kT_e}}, \quad n_+ = n_\infty e^{-\frac{e\varphi}{kT_+}},$$

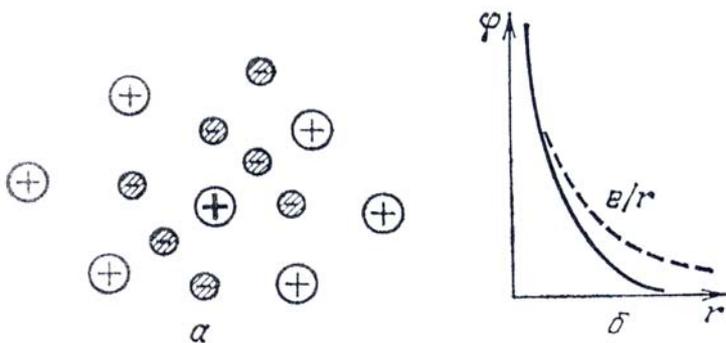
где  $T_e, T_+$  – температуры электронов и ионов, которые в общем случае могут различаться, а  $n_\infty$  – плотность тех и других вдали от центра, где поляризация исчезает и плазма электронейтральна. Ограничим наше рассмотрение типичным для газовых разрядов случаем, когда энергия кулоновского взаимодействия зарядов, которая характеризуется величиной  $e\varphi$ , мала по сравнению с тепловой  $kT$ . Тогда в первом приближении с учетом сферической симметрии поля получим уравнение

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\varphi}{dr} = \frac{4\pi e^2 n_\infty}{k} \left( \frac{1}{T_+} + \frac{1}{T_e} \right) \varphi.$$

Решение его имеет вид

$$\varphi = \frac{e}{r} e^{-\frac{r}{d}}, \quad \frac{1}{d^2} = \frac{4\pi e^2 n_\infty}{k} \left( \frac{1}{T_+} + \frac{1}{T_e} \right), \quad (6.8)$$

где произвольный множитель у  $\varphi$  выбран так, чтобы вблизи центра поле



К понятию дебаевского радиуса экранирования:

*a* – поляризация плазмы вокруг заряженной частицы; *b* – потенциал результирующего поля

превращалось в кулоновское,  $e/r$ , образуемое центральным зарядом. Из формулы (6.8) видно, что кулоновское поле заряда начинает существенно искажаться на расстояниях  $r \sim d$  от него, как показано на рисунке. Вдали от него, т.е. при  $r > d$ , поле быстро спадает по экспоненциальному закону. Это спадание является результатом гашения поля центральной частицы противоположно направленным полем пространственного заряда.

В равновесной плазме, где температуры одинаковы ( $T_+ = T_e = T$ ), характерный радиус экранирования заряда  $d$  равен

$$d = \sqrt{\frac{kT}{8\pi e^2 n_e}} = 4,86 \left( \frac{T[K]}{n_e} \right)^{1/2} = 525 \left( \frac{T[\text{эВ}]}{n_e} \right)^{1/2} \text{ см.} \quad (6.9)$$

Средняя плотность зарядов  $n_\infty$  здесь обозначена через  $n_e$ , дабы подчеркнуть, что это плотность зарядов одного знака, а не суммарная. Величина  $d$  называется *дебаевским радиусом*. Он возрастает с увеличением температуры, так как тепловое движение стремится выровнять плотности частиц и, следовательно, препятствует поляризации. Увеличение плотности заряженных частиц, напротив, облегчает создание пространственного заряда и поэтому способствует экранированию и уменьшению  $d$ .

Если температуры  $T_e$  и  $T_+$  неодинаковы, радиус экранирования характеризуется согласно (6.8) некоторой промежуточной температурой. В слабоионизированной разрядной плазме чаще всего  $T_e \gg T_+$ , причем ионная температура совпадает с температурой газа нейтральных частиц, который нередко остается холодным. Формально по формуле (6.8) экранирование определяется при этом низкой температурой газа и является очень сильным ( $d$  – очень малым). На самом деле это скорее всего не так. Пространственный заряд образуется в основном за счет перераспределения плотности легких подвижных электронов. Тяжелые малоподвижные ионы, особенно при низких температурах, не успевают в каждый момент образовывать равновесное распределение около движущейся частицы. Следовательно, возникает сомнение в применимости формулы Больцмана для  $n_+(r)$  в этом случае. Если же считать ионы «неподвижными», то в исходном уравнении следует положить  $n_+(r) = \text{const} = n_\infty$ , и тогда член с  $1/T_+$  выпадает из формулы (6.8). В этом приближении радиус экранирования становится равным

$$d = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 n_e}} = \sqrt{2} d_{\text{равновесное}}. \quad (6.10)$$

Эта величина также называется *дебаевским радиусом*. Использование статистической формулы Больцмана предполагает, что в дебаевской сфере

содержится много частиц:  $n_e \frac{4}{3} \pi d^3 \gg 1$  или  $d \gg \bar{r}$ , где  $\bar{r} \approx n_e^{-1/3}$  – среднее расстояние между зарядами. Это накладывает ограничение на применимость теории

$$n_e \ll 2,5 \cdot 10^5 (T[K])^3 \text{ см}^{-3}.$$

Например, при  $T = 10^4 \text{ K}$   $n_e \ll 2,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ . При выполнении указанного неравенства средняя энергия взаимодействия двух зарядов  $e^2/\bar{r}$  гораздо меньше тепловой  $kT$ , а кулоновский радиус  $r_0 \ll \bar{r}$ , т.е. газ заряженных частиц является заведомо *идеальным*. Как следует из (6.8) (если разложить экспоненту), энергия кулоновского взаимодействия данного заряда со всеми остальными составляет  $e^2/d$ . При условии  $e^2/d > kT$  или  $n_e > 10^7 (T[K])^3 \text{ см}^{-3}$  плазма явно не идеальна. Для газовых разрядов это не характерно.

Теперь вернемся к кулоновскому логарифму. Из вышеизложенного ясно, что предельное расстояние  $\rho_{\max}$  в формуле (6.6), до которого закон спадания поля заряженной частицы еще можно считать кулоновским, имеет порядок дебаевского радиуса. Поскольку зависимость  $\sigma_{lr}$  от  $\rho_{\max}$  является слабой, логарифмической, достаточно просто положить  $\rho_{\max} = d$ . Выбор формул (6.9) или (6.10) для  $d$  по той же причине не имеет особого значения. Для определенности пусть это будет (6.10). Не стоит учитывать и зависимость логарифма от конкретного значения кинетической энергии относительного движения, которая входит в кулоновский радиус  $r_0$ . Достаточно положить энергию раз навсегда равной средней тепловой –  $(3/2)kT$  (или  $(3/2)kT_e$ ). Это дает

$$\ln \Lambda = \ln \left( \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{(kT)^{3/2}}{e^3 n_e^{1/2}} \right) = 7,47 + \frac{3}{2} \lg(T[K]) - \frac{1}{2} \lg n_e. \quad (6.11)$$

При встречающихся в разрядах значениях  $T$  и  $n_e$  кулоновский логарифм имеет значения порядка нескольких или десяти единиц. Например,

при  $T = 10^4$  К,  $n_e = 10^{15}$  см<sup>-3</sup>,  $\ln \Lambda = 5,97$ ; при  $T = 10$  К  $n_e = 10^{12}$  см<sup>-3</sup>,  $\ln \Lambda = 9,43$ . Значит, далекие столкновения дают при этом существенно больший эффект, чем близкие. Большая величина отношения  $\Lambda \approx d/r_0$ , которая входит под знак кулоновского логарифма, в результате чего  $\ln \Lambda \sim 10$ , как уже ранее говорилось, является признаком идеальности плазмы.

Транспортное сечение (6.6) растет как  $1/v^4$  при уменьшении относительной скорости частиц. Увеличивается и эффективная частота столкновений  $\nu \sim \nu \sigma_{tr} \sim 1/v^3$ . Частота столкновений растет настолько быстро, что если усреднить ее с учетом максвелловского распределения частиц по скоростям, которое при малых  $v$  пропорционально  $v^2 dv$ , то интеграл до  $v = 0$  окажется логарифмически расходящимся. Дело в том, что при выводе формулы (6.6) считалось, будто медленные частицы могут рассеиваться, пролетая и на очень больших прицельных расстояниях. Но на самом деле поле рассеивателя простирается лишь до расстояний порядка дебаевского радиуса. Поэтому транспортное сечение для сколь угодно медленных частиц не превышает величины порядка  $\pi d^2$ . Но все равно средняя частота столкновений  $\langle \nu \rangle \sim \langle 1/v^3 \rangle$  окажется соответствующей очень медленным частицам с энергией гораздо меньше тепловой.

Подобная частота, как и отвечающая ей длина пробега, ни в каком смысле не являются показательными. Все те процессы, которые зависят от столкновений: диффузия, дрейф в поле, обмен энергией, определяются в основном теми частицами, которые обладают скоростями и энергиями порядка средних тепловых. Поэтому для характеристики частот кулоновских столкновений и длин пробега целесообразнее отнести эти величины к частицам со средней тепловой энергией. Средняя энергия относительного движения двух частиц равна  $\bar{\epsilon}' = 3kT/2$ ; ей соответствует среднеквадратичная относительная скорость  $v' = \sqrt{2\bar{\epsilon}'/m'} = \sqrt{3kT/m'}$ . Для частоты столкновений таких частиц  $\nu = n v' \sigma_{tr}$ , получим выражение

$$\nu = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9} \frac{e^4 n \ln \Lambda}{m'^{1/2} (kT)^{3/2}}. \quad (6.12)$$

Длина пробега частиц со средней тепловой энергией равна

$$l = \frac{9}{4\pi} \frac{(kT)^2}{e^4 n \ln \Lambda}. \quad (6.13)$$

Для электрон-электронных ( $ee$ ) столкновений в этих формулах следует положить  $m' = m/2$ ,  $T = T_e$ ,  $n = n_e$ ; для ион-ионных ( $ii$ ) –  $m' = M/2$ ,  $T = T_+$ ,  $n = n_+$ ; для электрон-ионных ( $ei$ ) –  $m' = m$ ,  $T = T_e$ ,  $n = n_+$  (сечение определяется скоростью и энергией быстрой частицы – электрона). В равновесной электронейтральной плазме, где температуры и плотности зарядов одинаковы, все три длины пробега равны (если ионы однозарядные), а частоты столкновений относятся как

$$v_{ee} : v_{ei} : v_{ii} = \sqrt{2} : 1 : \sqrt{m/M}. \quad (6.14)$$

Численно

$$v_{ee} = \frac{3,7 n_e \ln \Lambda}{(T[K])^{3/2}} \text{ с}^{-1}. \quad (6.15)$$

Транспортное сечение при средней тепловой энергии частицы  $\sigma_{\text{кул}}$  численно равно

$$\sigma_{\text{кул}} = \frac{4\pi e^4 \ln \Lambda}{9 (kT)^2} = \frac{16}{9} \pi a_0^2 \left( \frac{I_H}{kT} \right)^2 \ln \Lambda = \frac{2,87 \cdot 10^{-14} \ln \Lambda}{(T[\text{эВ}])^2} \text{ см}^2. \quad (6.16)$$

Например, при  $T = 1 \text{ эВ} = 11600 \text{ К}$  и  $\ln \Lambda = 8$  сечение  $\sigma_{\text{кул}} \approx 2,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}^2$ . Это на два порядка больше обычных газокинетических сечений и максимальных сечений упругих столкновений электронов с атомами инертных газов. Значит, для такой температуры столкновения электронов друг с другом и с ионами преобладают над их столкновениями с атомами, если степень ионизации превышает  $10^{-2}$ .

Как уже известно, частицы одного типа обмениваются при столкновениях значительными порциями энергии. Если электрон-электронные и ион-ионные столкновения преобладают над столкновениями с нейтральными частицами, то в электронном и ионном газах быстро устанавливаются максвелловские распределения со своими температурами  $T_e$ ,  $T_+$ . Характерные времена установления (времена релаксации) имеют порядок  $\frac{1}{v_{ee}}$ ,  $\frac{1}{v_{ii}}$  соответственно.

Иное дело обмен энергией между электронами и ионами. При столкновениях они обмениваются порциями энергии, которые составляют ничтожную долю порядка  $m/M$  от самих энергий. Поэтому выравнивание электронной и ионной температур – процесс относительно медленный. Очевидно, что для существенного обмена энергией требуется  $M/m$  столкновений, т.е. характерное время обмена и релаксации температур должно быть порядка  $M/m \cdot 1/v_{ei}$ .

Скорость передачи энергии от электронов к ионам легко вычислить, когда  $T_{ee} \gg T_+$  и справедлива общая формула для упругих потерь энергии электрона при столкновениях с неподвижными тяжелыми частицами. Подставляя в нее кулоновское транспортное сечение (6.6) с  $\varepsilon' = \varepsilon = mv^2/2$  и усредняя по скоростям электронов с учетом максвелловского распределения, найдем, что

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{T_e}{\tau_{обм}},$$

где

$$\frac{1}{\tau_{обм}} = v_{обм} = \frac{8\sqrt{2\pi}n_+m^{1/2} \ln \Lambda}{3Mk^{1/2}T_e^{3/2}}. \quad (6.17)$$

Следует отметить, что при любом соотношении энергий электронов и ионов скорость обмена определяется разностью средних энергий или температур

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{(T_e - T_+)}{\tau_{обм}} \quad (6.18)$$

с тем же характерным временем релаксации (6.17).

Сопоставляя частоту обмена по соотношению (6.17) с характерной частотой столкновений электронов с ионами  $v_{ei}$ , которая дается формулой (6.12) при  $m' = m$ ,  $T = T_e$ ,  $n = n_+$ , найдем

$$v_{обм} = \frac{2m}{M} \sqrt{\frac{6}{\pi}} v_{ei}, \quad \tau_{обм} = \frac{M}{2m} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \tau_{ei},$$

результат, который по порядку величины вытекает из самых простых соображений. Численно

$$\tau_{\text{обм}} = \frac{250A(T_e [K])^{3/2}}{n_+ \ln \Lambda} = \frac{3,15 \cdot 10^8 A(T_e [\text{эВ}])^{3/2}}{n_+ \ln \Lambda} \text{ с}, \quad (6.19)$$

где  $A$  – атомная масса иона. Например, при  $A = 40$  (аргон),  $T_e = 10^4$  К,  $n_+ = 10^{15}$  см<sup>-3</sup> время  $\tau_{\text{обм}} = 1,7$  мкс.

## Лекция 7. НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

*Ионизация • Ионизация возбужденных атомов и ионов •  
 Возбуждение и дезактивация электронных состояний •  
 Принцип детального равновесия • Возбуждение  
 молекулярных колебаний • Возбуждение  
 вращений молекул • Диссоциация молекул •  
 Возбуждение и ионизация ионами*

Ионизация атомов и молекул электронами – главнейший механизм рождения зарядов, и он, как правило, обуславливает саму возможность протекания разрядного процесса. Чтобы вырвать электрон из атома (молекулы), необходимо затратить энергию, равную энергии его связи в атоме. Эту величину называют *потенциалом ионизации*. Буквально потенциал ионизации  $I$  – это та разность потенциалов, которую должен пройти электрон в постоянном поле, чтобы приобрести энергию, достаточную для отрыва атомного электрона. Но по традиции  $I$  выражают в энергетических единицах – электрон-вольтах. Значения  $I$  для некоторых атомов и молекул приведены в табл. ПЗ. Самым высоким потенциалом ионизации обладает гелий, самым низким – цезий.

На рис. 7.1, 7.2 приведены эффективные сечения ионизации  $\sigma_i$  в зависимости от энергии электронов  $\varepsilon$ , полученные опытным путем. Особый интерес для разрядных процессов представляют величины сечений, соответствующих небольшим превышениям энергии электрона над пороговым значением  $I$ . В большинстве случаев очень энергичных электронов в газе

бывает мало, и потому их роль в ионизации чаще всего невелика. Хотя встречаются ситуации, например, в *катодном слое* тлеющего разряда, где электроны достигают энергий, значительно превышающих потенциал ионизации.

Поведение сечений ионизации вблизи порога неплохо аппроксимируется линейной функцией

$$\sigma_i = C_i(\varepsilon - I), \quad \varepsilon \geq I. \quad (7.1)$$

Экспериментальные значения констант  $C_i$ , характеризующих наклоны кривых сечения у порога, также приведены в табл. П4. Величина  $C_i [\text{см}^2/\text{эВ}]$  численно равна сечению ионизации  $\sigma_i(\varepsilon) [\text{см}^2]$  при энергии электрона, превышающей потенциал ионизации  $I$  на 1 эВ. Во многих случаях, когда средняя энергия электронов не слишком высока, порядка одного или нескольких электрон-вольт, численное значение  $C_i$  может служить масштабом сечения ионизации для сравнений. Характерное сечение ионизации  $[C_i \times 1 \text{эВ}] \text{см}^2$ , соответствующее  $\varepsilon = I + 1 \text{эВ}$ , на два порядка меньше сечений упругих соударений электронов. В максимуме сечение ионизации обычно в два или несколько раз меньше упругого при той же энергии электрона.

Ионизация атома электронным ударом – процесс квантовый, и вычисление его сечения требует применения квантовомеханической теории. Такие расчеты весьма сложны и реально выполнимы лишь для простейших атомных систем, таких как атом водорода. Однако еще до появления квантовой механики была сделана попытка понять закономерность поведения функции  $\sigma_i(\varepsilon)$ , показанной на рис. 7.1, 7.2, на основе простой модели, естественно, в рамках классической физики. Теория эта очень наглядна, дает правильные в качественном отношении

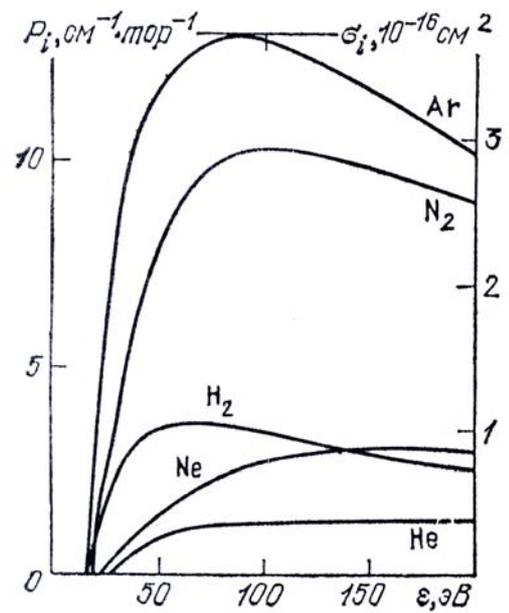


Рис. 7.1. Вероятности и сечения ионизации атомов He, Ne, Ar и молекул  $H_2$ ,  $N_2$  электронным ударом в широком диапазоне энергий

результаты, а также верные по порядку величины численные значения сечений. К тому же она помогает получить качественное представление и о таких процессах (ионизация возбужденных атомов, ионов), которые трудно исследовать на опыте.

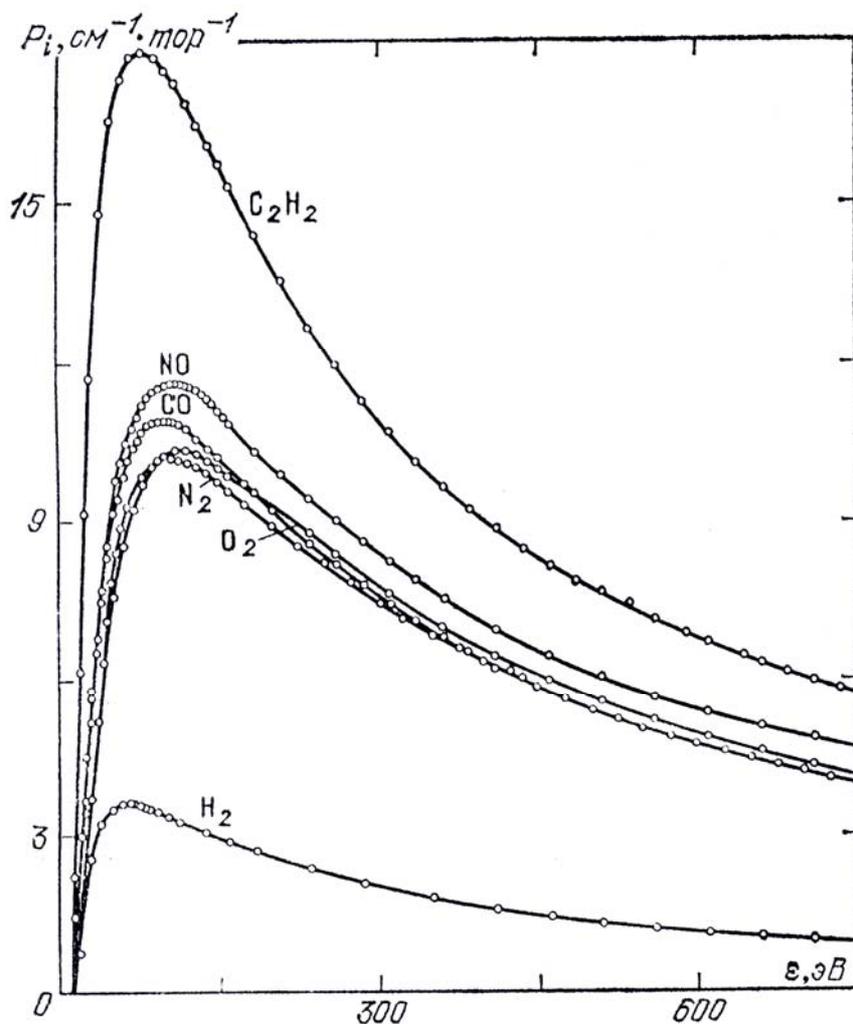


Рис. 7.2. Вероятность ионизации молекул электронами

Примем следующую упрощенную схему для описания акта ионизации атома. Налетающий электрон взаимодействует с внешним атомным электроном, который подлежит вырыванию и считается «неподвижным». Столкновение двух электронов происходит по законам упругого рассеяния. Налетающий электрон при столкновении передает атомному некоторую энергию  $\Delta\epsilon$ . Если эта энергия превышает энергию связи его в атоме, т.е. потенциал ионизации  $I$ , электрон высвобождается и происходит ионизация.

Передаваемая энергия  $\Delta\varepsilon$  зависит от угла рассеяния ударяющего электрона в Ц-системе  $\chi$  по формуле (4.1). В случае, когда рассеивающий электрон «неподвижен»,

$$\Delta\varepsilon = m' \vec{V} \vec{v} (1 - \cos \chi) = \frac{1}{2} \frac{m v_1^2}{2} (1 - \cos \chi) = \frac{1}{2} \varepsilon (1 - \cos \chi),$$

где  $\varepsilon = m v_1^2 / 2$  – энергия ударяющего электрона. Сечение рассеяния в интервал углов  $d\chi$  определяется формулой Резерфорда (6.2). Выражая в ней угол  $\chi$  через  $\Delta\varepsilon$ , найдем сечение передачи энергии от  $\Delta\varepsilon$  до  $\Delta\varepsilon + d(\Delta\varepsilon)$ :

$$d\sigma = \frac{e^4 d\Omega}{4\varepsilon^2 \sin^4(\chi/2)} = -\frac{2\pi e^4 d(\cos \chi)}{\varepsilon^2 (1 - \cos \chi)^2} = \frac{\pi e^4 d(\Delta\varepsilon)}{(\Delta\varepsilon)^2 \varepsilon}.$$

Сечение передачи энергии большей, чем  $I$ , получится, если проинтегрировать это выражение по  $d(\Delta\varepsilon)$  от  $I$  до максимально возможной передачи, которая совпадает с самой энергией ударяющего электрона  $\varepsilon$

$$\sigma_i = \int_{\Delta\varepsilon=I}^{\Delta\varepsilon=\varepsilon} d\sigma = \frac{\pi e^4}{\varepsilon} \left( \frac{1}{I} - \frac{1}{\varepsilon} \right) = \frac{\pi e^4}{I} \frac{\varepsilon - I}{\varepsilon^2}. \quad (7.2)$$

Согласно принятой модели это и есть сечение ионизации.

Эта формула была получена Томсоном в 1912 г. Ее целесообразно записать в несколько иной форме, вводя, как и ранее, атомный масштаб площади. Получим

$$\sigma_i = 4\pi a_0^2 \left( \frac{I_H}{\varepsilon} \right)^2 \frac{\varepsilon - I}{I}. \quad (7.3)$$

Вблизи порога, когда  $\varepsilon \approx I$ , получаем линейный закон (7.1) с константой

$$C_i = \frac{4\pi a_0^2}{I} \left( \frac{I_H}{I} \right)^2. \quad (7.4)$$

Сечение (7.3) достигает максимального значения

$$\sigma_{\max} = \pi a_0^2 \left( \frac{I_H}{I} \right)^2 = C_i \frac{I}{4} = 0,88 \cdot 10^{-16} \left( \frac{I_H}{I} \right)^2 \text{ см}^2 \quad (7.5)$$

при энергии электрона  $\varepsilon = 2I$ . Качественный ход функции (7.3) и характерные константы  $C_i$  и  $\sigma_{\max}$ , даваемые формулами (7.4) и (7.5) по порядку величины согласуются с экспериментальными данными.

Часто важную роль в газовом разряде играет ионизация возбужденных атомов. Эти процессы составляют заключительное звено так называемой *ступенчатой ионизации*, которая проходит в два или несколько этапов. На первом этапе электрон возбуждает атом. На следующем этапе либо после нескольких последовательных актов возбуждения, в результате которых атомный электрон переходит на все более и более высокий энергетический уровень, возбужденный атом ионизируется электронным ударом. Эффективность ступенчатой ионизации, благодаря которой этот процесс иногда конкурирует с ионизацией из основного состояния, обусловлена двумя обстоятельствами. Во-первых, и для возбуждения, и для отрыва электрона с верхнего уровня требуется меньшая энергия, чем для прямой ионизации атома из основного состояния. Поэтому такие акты могут совершать более медленные электроны. Во-вторых, сечение ионизации возбужденного атома велико, оно существенно больше, чем сечение ионизации из основного состояния, что хорошо видно из формул (7.3) – (7.5).

Теперь отметим основные моменты, связанные с ионизацией ионов. Энергия связи электронов в ионах больше, чем в нейтральных атомах, причем тем больше, чем выше заряд иона. Это обусловлено увеличением положительного заряда атомного остатка, который удерживает электрон своим полем. Например, в водородоподобном ионе, т.е. в атомной системе, состоящей из атомного ядра с зарядом  $Ze$  и электрона (таковы ионы  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ ,  $\text{Be}^{3+}$  и т.д.) потенциал ионизации равен  $I_Z = Z^2 I_H$ . Как следует из формул (7.3) – (7.5), сечения ионизации ионов меньше, чем у нейтральных атомов, причем тем меньше, чем выше кратность (заряд) иона. Для водородоподобных ионов с зарядом  $Ze$  константа  $C_i \sim Z^{-6}$ ,  $\sigma_{\max} \sim Z^{-4}$ . Как и в случае возбужденных атомов, это можно рассматривать как следствие того, что радиус электронной орбиты основного состояния водородоподобного иона  $a_Z = a_0 / Z^2$ , а площадь –  $\pi a_0^2 / Z^4$ .

А сейчас перейдем к рассмотрению возбуждения и дезактивации электронных состояний атомов и молекул. Эти акты существенным образом влияют на скорость развития электронной лавины во многих случаях

пробоя газов. Они составляют первый этап процесса ступенчатой ионизации в газе и вообще являются главным механизмом появления возбужденных атомов и молекул в плазме. Возбуждение атомов и молекул в значительной степени обуславливает свечение разрядной плазмы.

Уровни энергии простейшего атома – водорода – определяются главным квантовым числом  $n$ . Если отсчитывать энергию уровня  $E_n$  от основного состояния, что и дает энергию возбуждения, то по формуле Бора  $E_n = I_H \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ . Основному состоянию соответствует  $n=1$ , низшему возбужденному –  $n=2$ , т.е. энергия (потенциал) первого возбужденного уровня составляет  $\left(\frac{3}{4}\right)I_H = 10,2$  эВ, второго –  $\left(\frac{8}{9}\right)I_H = 12,1$  эВ и т.д. Уровни все сильнее и сильнее сгущаются по мере приближения к границе непрерывного спектра – потенциалу ионизации  $I_H = 13,6$  эВ.

У атомов инертных газов первые возбужденные уровни располагаются столь же высоко, их энергии составляют примерно 0,7 – 0,8 потенциала ионизации, но схемы их уровней сложнее, чем у водорода, и даже низшие возбужденные уровни следуют друг за другом через очень малые энергетические промежутки. У атомов других элементов в отличие от инертных газов и у молекул, как правило, имеются и относительно низко лежащие электронные уровни с небольшими энергиями возбуждения, порядка одного или нескольких электрон-вольт.

Среди возбужденных атомов и молекул выделяются частицы, находящиеся на *метастабильных уровнях*. Из метастабильных состояний в одноэлектронном дипольном приближении запрещен самопроизвольный переход в нижнее энергетическое состояние, сопровождающийся излучением кванта. Правила отбора, накладывающие запрет, не носят строгий характер. Запрет излучательного перехода означает, что его вероятность чрезвычайно мала. Тем не менее, в метастабильных состояниях частица может жить долго, до тех пор, пока она не дезактивируется ударом другой частицы, электрона или атома, т.е. не совершит *безызлучательный* переход в низшее энергетическое состояние. Кроме того, она может перейти в более высокое энергетическое состояние или ионизироваться. Времена жизни метастабильных состояний обычно превышают  $10^{-4}$  с и достигают значения в некоторых случаях равных нескольким секундам, тогда как обычные

возбужденные атомы и молекулы высвечиваются через  $10^{-9} - 10^{-7}$  с. Роль метастабильных частиц особенно велика для процесса ступенчатой ионизации, так как они живут долго и поэтому «с легкостью ожидают» ионизирующего удара.

Самый нижний из неметастабильных уровней называют *резонансным*. Возможен процесс, называемый *пленением излучения*: атом излучает квант света, возвращаясь в основное состояние. Этот квант с большой вероятностью поглощается соседним атомом, и переводит его на тот же самый резонансный уровень. Второй атом излучает квант и т.д. Так происходят *блуждание (диффузия) резонансного излучения* и периодическое появление, и исчезновение резонансно возбужденных атомов. Процессу препятствует дезактивация (*тушение*) резонансно возбужденных атомов ударами второго рода.

В табл. П4 приведены потенциалы возбуждения нижних метастабильных, а также резонансных уровней некоторых атомов и молекул, наиболее интересных для физики разряда.

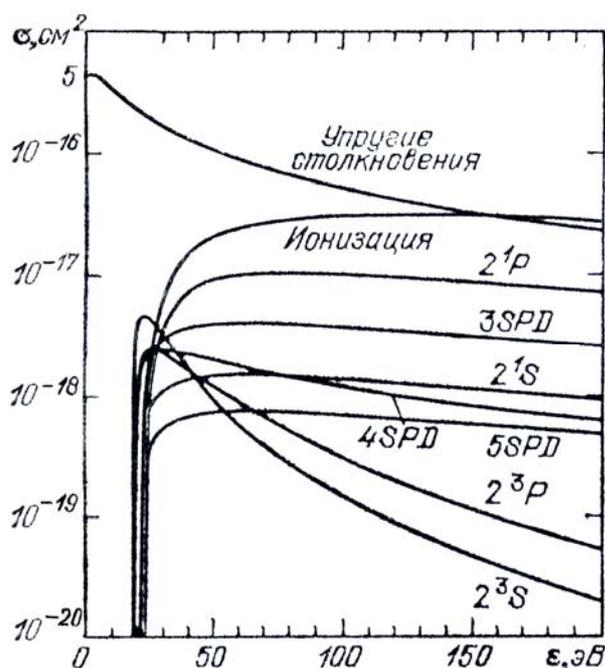


Рис. 7.3. Сечения возбуждения различных уровней He электронами

Эффективное сечение возбуждения электронного состояния  $\sigma_x(\varepsilon)$  называют иногда функцией возбуждения. В зависимости от энергии электрона это сечение ведет себя в качественном отношении так же, как сечение ионизации, только максимум располагается ближе к порогу. Но процесс этот сугубо квантовый, не поддается столь простой классической трактовке, как ионизация. Это связано с тем, что дискретные энергетические уровни — объект не классический. На рис. 7.3 представлены некоторые экспериментальные

результаты для гелия в широком диапазоне энергий электронов. В табл. П4 также приведены интерполяционные формулы типа (7.1), полезные для

оценки суммарного сечения возбуждения многих уровней; они составлены на основе экспериментальных данных. Формулы применимы вплоть до энергий, раза в два превышающих первый потенциал возбуждения. Следует отметить, что измерение сечений возбуждения представляет гораздо более трудную задачу, чем исследование ионизации, поэтому данные здесь значительно скуднее.

Сталкиваясь с возбужденным атомом, электрон может дезактивировать его, забрав себе энергию возбуждения. Измерять на опыте сечения этих процессов чрезвычайно трудно; непросто и рассчитывать их теоретически. И здесь на помощь приходит общее соотношение, которое связывает вероятности прямых и обратных столкновений любого рода, – *принцип детального равновесия*. Использование его помогает находить сечения и скорости многих процессов, если для обратных процессов эти величины известны из расчета или опыта.

Принцип детального равновесия гласит, что в условиях *полного термодинамического равновесия* скорости строго взаимных *прямых* и *обратных процессов* в точности одинаковы. Феноменологически принцип провозглашается на том основании, что термодинамически равновесное состояние любого тела является стационарным, несмотря на протекание в нем многих кинетических процессов. Так, электроны все время возбуждают атомы газа, но в равновесном состоянии число возбужденных атомов определяется только законами статистического равновесия и совершенно не зависит от сечений и скоростей актов возбуждения. Значит, наряду с процессами возбуждения электроны непрерывно совершают удары второго рода, и последние в точности компенсируют первые. Вообще говоря, стационарная концентрация атомов, возбужденных электронами, может поддерживаться и другим путем, например за счет дезактивации ударами молекул, но такое состояние уже не будет термодинамически равновесным. Оно будет зависеть, например, от того, какие молекулы дезактивируют атомы. В квантовой механике дается строгое теоретическое обоснование принципу детального равновесия. Оказывается, вероятности прямых и обратных процессов определяются одним и тем же выражением, которое является симметричным по отношению к тому, какое состояние считать начальным, а какое – конечным.

До сих пор мы говорили о возбуждении электронным ударом электронных состояний атомов и молекул. Для атомов это исчерпывающее

рассмотрение (включая ионизацию), но молекулы обладают помимо электронного возбуждения возможностью увеличить свою внутреннюю энергию за счет возбуждения электронами колебательных и вращательных степеней свободы. Перейдем теперь к рассмотрению этих актов электрон-молекулярного взаимодействия.

Процесс возбуждения молекулярных колебаний играет существенную роль в разрядах, происходящих в молекулярных газах, будучи главным процессом передачи энергии, от электронов молекулам. Ведь джоулево тепло токов и энергию поглощающихся электромагнитных излучений непосредственно воспринимают именно электроны, и лишь потом энергия передается газу тяжелых частиц. Процесс возбуждения колебаний в молекулах  $N_2$  и  $CO_2$  электронами лежит в основе работы электроразрядных газовых лазеров на  $CO_2$ .

Наглядной моделью двухатомной молекулы, совершающей колебательное движение, может служить отрезок спиральной пружины, на концах которой имеются два массивных шара, имитирующих атомные ядра. Поставим задачу возбудить собственные колебания в такой системе. Зафиксируем для простоты положение одного шара, а к другому приложим сжимающую нагрузку, направленную вдоль оси пружины. Попробуем медленно давить на шар, сжимая пружину, а потом столь же медленно освободим ее, постепенно снимая усилие. Очевидно, что в результате пружина распрямится до нормального состояния и никаких колебаний не возникнет. Такое медленное *квазистатическое* воздействие, при котором система в каждый момент времени находится в состоянии, близком к механическому равновесию, называется *адиабатическим*.

Осуществим противоположный случай – очень резко ударим по незакрепленному шару. Интуиция подсказывает, что и таким способом мы не приведем модель в колебательное движение. Приложенная сила, быть может, и будет большой, но из-за кратковременности воздействия шар не получит достаточного импульса. Чтобы заставить пружину совершать колебания, ударить нужно не слишком быстро и не слишком медленно, а так, чтобы длительность силового воздействия на шар  $\tau$  была сравнима с периодом собственных колебаний модели, точнее, с обратной круговой частотой  $\omega^{-1}$ .

Также обстоит дело и с возбуждением молекулярных колебаний ударом другой частицы. По мере сближения соударяющихся частиц сила взаимодействия между ними  $F$ , конкретнее, сила отталкивания, нарастает, а потом при разлете уменьшается. Радиус действия междучастичных сил имеет размер, равный размеру атома  $a$ , и если относительная скорость ударяющей частицы  $u$ , то характерная длительность воздействия  $\tau \sim a/u$ . Колебание в молекуле будет возбуждено со значительной вероятностью, если выполняется отмеченное выше условие  $\omega\tau \sim a\omega/u \sim 1$ . Если  $a\omega/u \gg 1$ , столкновение будет иметь адиабатический характер, если  $a\omega/u \ll 1$  – удар будет чересчур резким. И тот и другой случаи неблагоприятны для возбуждения колебаний.

Оптимальное для раскачки колебаний соотношение  $\omega\tau \sim 1$  можно трактовать как условие резонансного характера действия возбуждающей силы. Действительно, если разложить колоколообразную функцию  $F(t)$  в интеграл Фурье, то основной вклад придется на частоты  $\omega_F$  порядка обратной ширины колокола  $\tau$ . Следовательно, основная частота  $\omega_F$  должна примерно совпадать с собственной частотой возбуждаемой системы  $\omega$ .

Изложенные представления чисто классического толка полезно сопоставить с квантовой интерпретацией, ибо, строго говоря, колебания молекул и их возбуждение – процессы квантового характера. Энергия гармонического осциллятора, каковым приближенно является молекула, может принимать дискретные значения, которые отличаются на величину колебательного кванта  $\hbar\omega$ :  $\varepsilon_{\text{кол}} = \hbar\omega\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ . Здесь  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  – колебательное квантовое число, а  $(1/2)\hbar\omega$  – энергия нулевых колебаний, которой согласно квантовой механике, всегда обладает даже невозбужденный осциллятор. Чтобы возбудить колебания самого низкого уровня, ударяющая частица должна передать молекуле энергию  $\Delta E = \hbar\omega$ . Условие большой вероятности этого события  $\omega\tau \sim 1$  принимает вид  $\Delta E\tau \sim \hbar$  и представляет собой условие *квантово-механического резонанса*.

Адиабатический случай  $\Delta Ea/u \gg \hbar$  при условии, что ударяющая частица обладает достаточной энергией  $Mu^2/2 \gg \Delta E$ , вообще близок к

классике, так как при этом  $\lambda = (\hbar/Mu) \ll a$ . Он соответствует квазиклассическому приближению в квантовой механике, и его трактовка, в сущности, такова же, как и в чистой классике. А неэффективность слишком резкого удара с  $\omega\tau \ll 1$ , в квантовой интерпретации  $\Delta E\tau \ll \hbar$  можно рассматривать как несоблюдение принципа неопределенности Гейзенберга. Согласно одной из формулировок этого принципа изменение энергии системы  $\Delta E$  и время  $\tau$ , в течение которого происходит изменение, в реализуемом процессе непременно должны удовлетворять неравенству  $\Delta E\tau \geq \hbar$ .

Типичным примером медленного адиабатического процесса служит возбуждение колебаний при столкновении молекулы с атомом или другой молекулой в газе не слишком высокой температуры. Действительно, при  $T \sim 10^3$  К скорости молекул  $u \sim 10^4 - 10^5$  см/с,  $a \sim 10^{-8}$  см, частоты колебаний двухатомных молекул  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} \sim 10^{14}$  с<sup>-1</sup>. Значит, параметр адиабатичности (как его называют)  $a\omega/u \sim 100 \gg 1$ . По этой причине вероятности возбуждения колебаний при газокинетических столкновениях молекул, даже обладающих для этого необходимой энергией, а также вероятности дезактивации столь малы, что для осуществления неупругого акта требуются многие тысячи, даже миллионы столкновений. Поэтому колебательная релаксация, т.е. установление термодинамического равновесия между колебательными и поступательными степенями свободы ( $V-T$ -релаксация), в газах при невысоких температурах протекает весьма медленно.

В интересующем нас сейчас случае электронных ударов мы встречаемся с другой крайностью – чрезмерной кратковременностью взаимодействия, идущей вразрез с принципом неопределенности, если говорить о неупругой передаче энергии. В самом деле, при типичной энергии электрона  $\varepsilon \sim 1$  эВ  $u \sim 10^8$  см/с и  $\tau \sim a/u \sim 10^{-16}$  с. Следовательно, при  $\nu \sim 10^{14}$  с<sup>-1</sup>  $\omega\tau \sim 10^{-1}$  или  $\Delta E\tau \sim 10^{-1}\hbar \ll \hbar$ . Кроме того, в рамках классических представлений прямое возбуждение колебаний электронным ударом невозможно, так как при столкновении с тяжелой частицей электрон может отдать ей лишь ничтожную долю своей энергии порядка  $m/M$ .

Между тем опыт показывает, что электроны с энергией 1 – 10 эВ хорошо возбуждают колебания во многих молекулах. Сечения этого процес-

са в максимуме даже превосходят сечения электронного возбуждения и всего на порядок меньше сечений упругих столкновений. Результаты измерений для молекулы азота приведены на рис. 7.4, а (на рис. 7.4, б для сравнения даны сечения различных процессов при столкновениях молекул азота с электронами). У этой молекулы  $\nu = 0,71 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ ,  $\hbar\omega = 0,29 \text{ эВ}$ . В молекулах возбуждаются не только первые, но и высшие колебательные состояния.

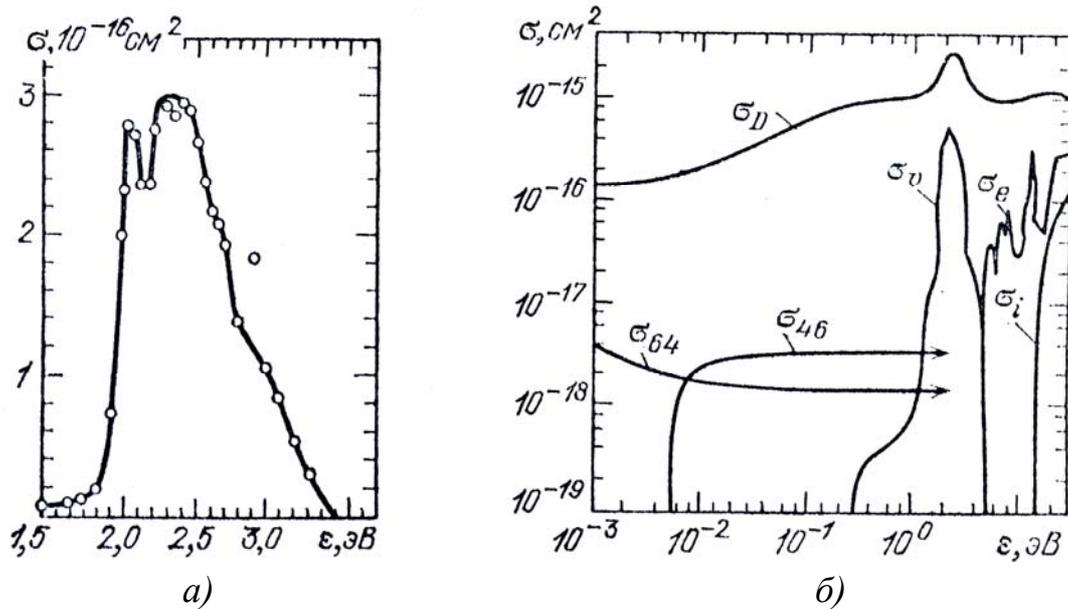


Рис. 7.4. Вероятность возбуждения колебательных уровней: а – суммарное сечение возбуждения первых 8 колебательных уровней  $N_2$  ударами электронов; б – сравнение сечений различных процессов при столкновении электронов с молекулами  $N_2$ :  $\sigma_D$  – упругое транспортное,  $\sigma_{46}$  и  $\sigma_{64}$  – вращательные возбуждения с уровня  $j = 4$  на уровень  $j = 6$  и дезактивация ( $T=77 \text{ K}$ , теория),  $\sigma_v$  – суммарное сечение возбуждения 8 колебательных уровней,  $\sigma_e$  – суммарное возбуждение электронных уровней с энергиями от 5 до 14 эВ,  $\sigma_i$  – ионизация

Указанное противоречие разрешается следующим образом. Процесс возбуждения молекулярных колебаний электронным ударом идет через промежуточное состояние:



На первом этапе электрон объединяется с молекулой, образуя молекулярный ион  $N_2^-$ . Будучи неустойчивым, этот отрицательный ион через короткое время распадается, освобождая электрон с энергией меньшей, чем начальная. Молекула при этом остается в возбужденном колебательном состоянии  $N_2^v$ , причем это состояние может соответствовать различным колебательным уровням. В пользу этого механизма говорит тот факт, что для азота резкий рост сечения возбуждения начинается не от энергетического порога, соответствующего энергии электрона  $\varepsilon = \hbar\omega = 0,29$  эВ, а от гораздо более высокой энергии  $\varepsilon \approx 1,8$  эВ. Действительно, в двухступенчатом процессе порог определяется не столько передаваемой энергией колебательного кванта, сколько энергией, необходимой для осуществления промежуточной стадии – образования иона  $N_2^-$ .

Хотя роль возбуждения и дезактивации молекулярных вращений электронным ударом для собственно разрядных процессов не очень существенна, ее роль в кинетике молекулярных газовых лазеров и мазеров значительна. Поэтому рассмотрим вкратце и возбуждение вращений молекул электронным ударом.

В отношении вращательного движения моделью двухатомной молекулы может служить «гантель», т.е. два массивных шара (атома), соединенных стержнем. Согласно квантовой механике энергия вращения такой системы, называемой жестким ротатором, принимает дискретный ряд значений  $\varepsilon_{вр} = B_e j(j+1)$ , где  $B_e$  – *вращательная постоянная* молекулы, а  $j = 0, 1, 2, \dots$  – вращательное квантовое число. Вращательные постоянные молекул очень малы. Выраженные в кельвинах ( $B_e/k$ , где  $k$  – постоянная Больцмана), они составляют несколько единиц. Например, у азота это 2,9 К. Поэтому даже при комнатной температуре  $T = 300$  К молекула азота с  $\varepsilon_{вр} = kT$  занимает высокий вращательный уровень  $j \sim 10$ , а расстояния между уровнями относительно малы. При столкновениях друг с другом молекулы обмениваются порциями энергии, в том числе и вращательной, порядка  $kT$ , которые составляют много квантов, т.е. процесс протекает чисто классически.

Иначе обстоит дело при возбуждении вращений электронами. Сталкиваясь с молекулой, электрон, как правило, действует на два атома неодинаково, он чаще «ударяет» по одному из них, и это должно было бы

привести по обычной механике к закручиванию «гантели». Но легкий электрон может передать тяжелой частице при ударе кинетическую энергию лишь порядка  $(m/M)\varepsilon$ , которая оказывается очень малой по сравнению с расстояниями между дискретными вращательными уровнями. А это и означает, что процесс возбуждения в данном случае носит квантовый характер.

Квантовый переход в молекуле происходит в результате электрического взаимодействия между электроном и медленно спадающей частью поля молекулы, причем электрон пролетает на очень большом расстоянии от молекулы. Здесь существенным является характер поля молекулы, а именно, обладает ли молекула дипольным моментом или нет. Если обладает, то происходит дипольный переход, при котором вращательное квантовое число  $j$  изменяется на единицу ( $j \rightarrow j + 1$  при возбуждении,  $j \rightarrow j - 1$  при дезактивации). Если молекула дипольным моментом не обладает, взаимодействие определяется квадрупольным моментом и при переходе  $j$  меняется на две единицы ( $j \rightarrow j + 1$ ,  $j \rightarrow j - 1$ ). Порядок сечения в максимуме –  $\pi a_0^2$ . Экспериментов по измерению возбуждения вращений электронным ударом почти нет.

Удары достаточно энергичных электронов могут приводить и к *диссоциации* молекул. Этот неупругий процесс, как правило, не оказывает существенного влияния на энергетический баланс электронов в разряде, уступая в этом отношении возбуждению колебательных уровней молекул. Но в определенных условиях диссоциация молекул имеет большое непосредственное значение, будучи начальным и наиболее ответственным этапом в цепочке последующих химических превращений. *Плазмохимия*, т.е. получение химических соединений в плазменных условиях, при помощи разрядов – новое важное направление в химической технологии. Для многих реакций «узким местом», определяющим скорость всего процесса, является образование из молекул атомов и свободных радикалов, которые потом уже достаточно быстро реагируют с другими компонентами. Протеканию этого этапа и способствует диссоциация молекул ударами электронов в разряде.

Плазмохимические реакции играют большую роль в кинетике генерации электроразрядных СО- и СО<sub>2</sub>-лазеров. При горении разряда в газо-

вой смеси, например  $\text{CO}_2$ -лазера (смесь –  $\text{CO}_2 + \text{N}_2 + \text{He}$ ), образуются окислы азота. Их количество невелико, но они обладают аномально большими сечениями прилипания электронов, что приводит к резкому уменьшению концентрации электронов в разряде и как следствие к резкому снижению вкладываемой в разряд мощности и выводимой мощности лазерного излучения.

Вероятность прямого разбиения молекулы за счет кинетической энергии электрона очень мала. Причина состоит все в том же – кратковременности взаимодействия электрона с молекулой, в течение которого тяжелые атомы не успевают получить необходимого для разлета импульса. Диссоциация идет двухступенчатым путем, но в отличие от возбуждения колебаний не через захват электрона, а через возбуждение электронных или электронно-колебательных состояний молекулы с последующим распадом возбужденной молекулы на атомы.

Неупругие столкновения ионов с атомами и молекулами, сопровождающиеся возбуждением их электронных состояний и ионизацией, сколько-нибудь значительной роли в разрядах не играют, так как эти столкновения, как правило, имеют адиабатический характер. Даже обладая энергией, достаточной для возбуждения или ионизации, ион пролетает мимо атома слишком медленно для того, чтобы подействовать на атомный электрон резонансным образом.

В самом деле, время перестройки электронного состояния в атоме порядка  $a_0/v_e$ , где  $v_e \sim \sqrt{I/m}$  – скорость движения электрона по орбите, радиус которой  $a_0$ . Время взаимодействия иона с атомами порядка  $a_0/v_i$ , где  $v_i$  – скорость иона. Если его энергия равна потенциалу ионизации  $I$ , то  $v_i \sim \sqrt{I/M}$ . Следовательно, время воздействия иона на атом в  $\sqrt{M/m}$ , т.е. в сотни раз больше характерного электронного времени. Ион медленно приближается к атому, квазистатическим образом деформируя его электронную оболочку, а затем столь же медленно удаляется. Оболочка по мере удаления постепенно восстанавливает свою прежнюю структуру – электронное состояние атома в результате не изменяется.

Вероятность неупругого превращения при ионном ударе значительна, только если электрон налетает со скоростью, равной скорости электрона в атоме,  $v_i \sim v_e \sim 10^8$  см/с, а для этого он должен обладать энергией

$\varepsilon \sim Mv_e^2 \sim I(M/m)$  в десятки, сотни килоэлектрон-вольт. Ионов с такой огромной энергией в разрядах не бывает. Как и при рассмотрении возбуждения молекулярных колебаний электронами, условие большой вероятности возбуждения или ионизации атома можно представить в форме условия квантово-механического резонанса  $\Delta E a/v \sim \hbar$  ( $\Delta E \approx I$ ). Типичные же скорости ионов в разрядах  $v_i \sim 10^5$  см/с удовлетворяют условию адиабатичности  $\Delta E a/v_i \gg \hbar$ .

## *Лекция 8. ДРЕЙФ И ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОСТОЯННОМ ПОЛЕ*

*Скорость дрейфа • Подвижность • Подобие •  
Проводимость ионизированного газа •  
Энергия электронов*

Неизменное во времени и однородное в пространстве электрическое поле действует на заряд с постоянной силой. В промежутке между двумя столкновениями скорость электрона  $\vec{v}(t)$  подчиняется второму закону Ньютона:

$$m\dot{\vec{v}} = -e\vec{E}, \quad \vec{v}(t) = -\frac{e\vec{E}}{m}t + \vec{v}(0). \quad (8.1)$$

Если отсчитывать время от момента последнего столкновения,  $\vec{v}(0)$  – скорость сразу после рассеяния. В отсутствие столкновений, т.е. в случае достаточного разряженного газа, равенства (8.1) справедливы в течение всего времени пролета электрона через вакуумированный объем. Столкновение приводит к резкому изменению направления вектора  $\vec{v}$ , после чего электрон вновь ускоряется по закону (8.1) вплоть до следующего столкновения. Движение вдоль линии поля накладывается на беспорядочное. Та-

кое движение называется *дрейфовым*. Средняя за время многих столкновений скорость электрона направлена вдоль действия силы. Эту величину называют *скоростью дрейфа*  $\vec{v}_d$ . Тот факт, что под действием постоянной силы частица движется в среднем с постоянной скоростью, можно интерпретировать как результат компенсации внешней силы силой трения, действующей со стороны среды. Среда оказывает сопротивление длительному ускорению заряда полем. Именно такова природа электрического сопротивления в ионизированном газе, ибо дрейф зарядов в поле и порождает электрический ток.

Вычислим скорость дрейфа, исходя из представления о трении. Макроскопическая сила трения, действующая на электрон, равняется “размазанной” по времени скорости потери его импульса, обязанной столкновениям. Последняя дается формулой (3.4). Вводя ее в уравнение (8.1), где под  $\vec{v}(t)$  теперь подразумеваем среднюю скорость электрона, найдем:

$$m\dot{\vec{v}} = -e\vec{E} - m\vec{v}v_m. \quad (8.2)$$

Решением уравнения (8.2) является

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\vec{E}}{mv_m} \left(1 - e^{-v_m t}\right) + \vec{v}(0) \cdot e^{-v_m t}. \quad (8.3)$$

Теперь  $\vec{v}(0)$  – скорость электрона в некий начальный момент.

Очень скоро средняя скорость приобретает стационарное значение

$$\vec{v}_d = -\frac{e\vec{E}}{mv_m}. \quad (8.4)$$

Эта формула описывает дрейф, учитывая, в частности, влияние не-изотропности рассеяния. Все же она не вполне совершенна, так как выведена на основе упрощенного представления о движении “среднего” электрона. Эффективная частота столкновений  $\nu_m = N\nu\sigma_{tr}(\nu)$  зависит от скорости электрона  $\nu$ . Она чаще всего совпадает со скоростью его хаотического движения, которая, как мы увидим, гораздо больше дрейфовой. Поскольку во многих случаях мы интересуемся поведением большого числа электронов, обладающих всевозможными по величине скоростями, формулу (8.4) нужно усреднить по скорости электронов (из-за  $\nu_m \equiv \nu_m(\nu)$ ).

Однако для целого ряда задач оказывается справедливым допущение о независимости эффективной частоты столкновений от скорости электронов. В этом случае формула (8.4) не нуждается в усреднении и для численных оценок, пользуясь данными о  $\sigma_{tr}(v)$ , проще всего относить  $v_m$  к средней энергии электрона.

*Подвижностью* называется коэффициент пропорциональности между величинами скорости дрейфа заряженной частицы и поля. Подвижность электронов равна,  $\text{см}^2 / \text{В} \cdot \text{с}$ ,

$$\mu_e = \frac{e}{mv_m} = \frac{1,76 \cdot 10^{15}}{v_m [\text{с}^{-1}]}, \quad v_d = \mu_e E. \quad (8.5)$$

Поскольку средняя энергия электронов зависит от поля, зависимость  $\bar{v}_d$  от  $E$  не является строго линейной, и подвижность, определяемая формулой (8.5), зависит от поля. Но при теоретическом рассмотрении различных разрядных процессов чаще пользуются удобной для этой цели линейной связью (8.5) с  $\mu_e = \text{const}$ . Для численных оценок подбирают разумное эффективное значение этой величины (табл. П5).

Как и во всех случаях прохождения электрического тока через газ, электроны обладают определенным энергетическим спектром, который зависит от поля. Итогом экспериментального изучения дрейфа электронов в поле является зависимость  $\bar{v}_d$  от  $E$ . Скорость дрейфа в каждом газе зависит не только от поля, но и от плотности газа. Если частоту столкновений электронов считать независимой от их скорости, то в пренебрежении столкновениями заряженных частиц друг с другом (что справедливо когда плазма ионизирована слабо)  $\bar{v}_d$  и  $\mu_e$  обратно пропорциональны давлению. Скорость дрейфа при этом просто пропорциональна отношениям  $E/N$  или  $E/P$ .

Законы подобия, проявляющиеся во многих закономерностях газового разряда, имеют очень большое значение. Например, поставив себе задачу измерить скорость дрейфа в определенном газе в двух случаях:

$E = 10$  В/см,  $p = 10$  тор и  $E = 20$  В/см,  $p = 20$  тор мы вполне можем ограничиться одним опытом, так как в указанных случаях отношения  $E/P$  одинаковы. И результаты измерений функции двух переменных  $v_d(E, N)$  представляются не в виде семейства кривых, а в виде единственной кривой  $v_d(E/N)$ .

Результаты измерения скоростей дрейфа электронов в ряде газов, представляющих наибольший практический интерес, представлены на рис. 8.1 – 8.3. Скорость дрейфа растет по мере роста  $E/P$ , но не всегда этот рост близок к прямой пропорциональности, что связано с влияниями зависимости  $v_m$  от  $v$  и энергетического спектра.

Как видно из формул (8.4) – (8.5), которые отражают и эффекты, относящиеся к ионам, последние гораздо менее подвижны, чем электроны. Но различие в подвижностях не столь велико, как отношение масс  $M/m$ , ибо частота столкновений ионов существенно меньше, чем у электронов из-за малой скорости ионов. Подвижность ионов обычно в сотни раз меньше, чем у электронов, поэтому доля ионного тока в электрический ток пренебрежимо мала, за исключением тех нечастых случаев, когда плотность положительных и отрицательных ионов  $n_+, n_-$  сильно превышает электронную  $n_e$ .

Плотность потока электронов есть  $n_e \vec{v}_d$ . Плотность соответствующего тока, а в пренебрежении ионным и плотность электрического тока вообще есть

$$\vec{j} = -en_e \vec{v}_d = en_e \mu_e \vec{E} = \sigma \vec{E}. \quad (8.6)$$

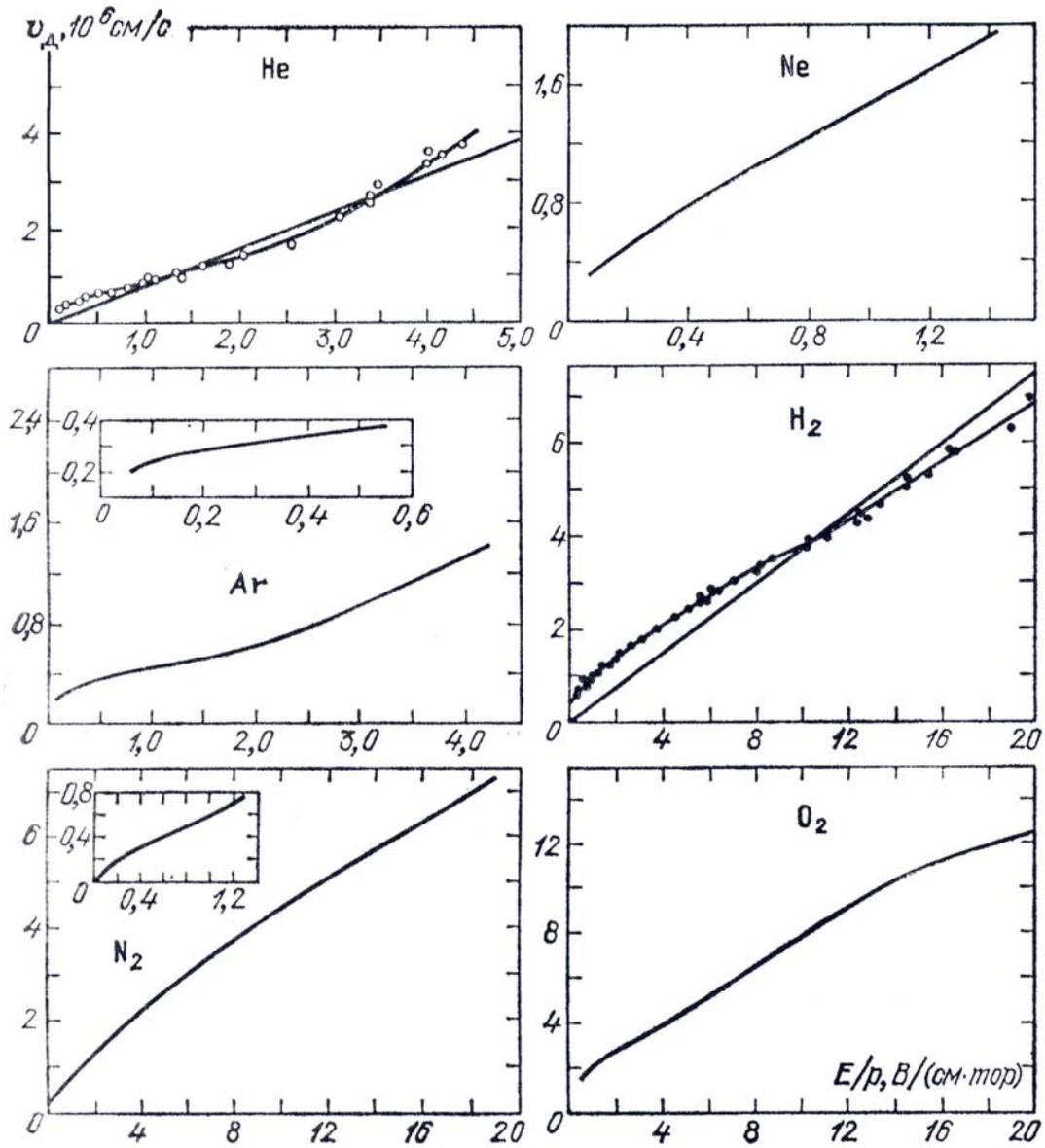


Рис. 8.1. Скорость дрейфа электронов в He, Ne, Ar, H<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> и O<sub>2</sub>

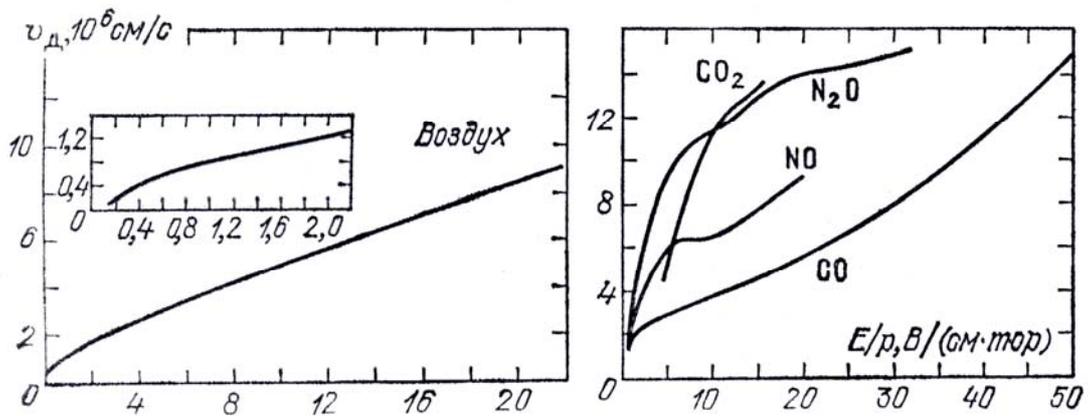


Рис. 8.2. Скорость дрейфа электронов в воздухе и молекулярных газах

Проводимость плазмы пропорциональна плотности и подвижности электронов и равна

$$\sigma = e\mu_e n_e = \frac{e^2 n_e}{m\nu_m} = 2,82 \cdot 10^{-4} \frac{n_e [\text{см}^{-3}]}{\nu_m [\text{с}^{-1}]} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}. \quad (8.7)$$

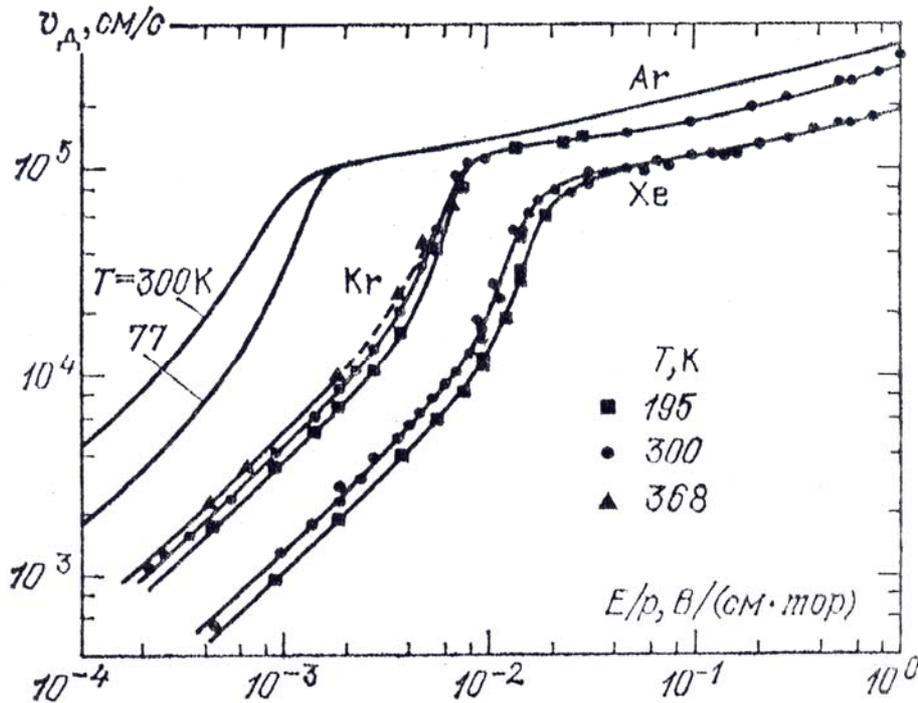


Рис. 8.3. Скорость дрейфа электронов в Ar, Kr, Xe

Она обратно пропорциональна плотности газа  $N$  и определяется в основном степенью его ионизации  $n_e/N$ . В некоторой мере  $\sigma$ , как и  $\mu_e$ , зависит от отношения  $E/N$  через среднюю энергию электронов. С изменением поля меняется и степень ионизации газа, так что не в пример металлам электрическое сопротивление газа нередко зависит от напряжения довольно заметным образом. Оценочные характеристики проводимости представлены в табл. П5.

В сильноионизированной плазме столкновения с ионами так же мешают ускорению электрона полем, как и столкновения с нейтральными частицами. Из-за очень большой величины кулоновского сечения электрон-ионные столкновения начинают снижать проводимость далеко не при полной ионизации газа. Для учета этого эффекта к частоте столкновений электронов с молекулами следует добавить частоту столкновений с положительными ионами. Как правило, при заметных степенях ионизации плазма бывает равновесной, электронейтральной, отрицательных ионов в ней образуется мало, так что  $n_+ = n_e$ . Таким образом,

$$v_m = N\nu\sigma_{tr} + n_e\nu\sigma_{кул}. \quad (8.8)$$

Например, при температуре электронов 1 эВ по формуле (6.16)  $\sigma_{кул} \approx 2.3 \cdot 10^{-13} \text{ см}^2$ , тогда как  $\sigma_{tr} \sim 10^{-16} - 10^{-15} \text{ см}^2$ . Значит, электрон-ионные столкновения становятся существенными уже при степени ионизации порядка 1 %. При большей ионизации они приобретают главенствующую роль, и тогда проводимость становится не зависящей от плотности газа и электронов, определяясь только электронной температурой. Пренебрегая первым членом в формуле (8.8), подставляя ее в (8.7) и пользуясь (6.16), найдем проводимость сильноионизированной плазмы с однозарядными ионами

$$\sigma = \frac{e^2}{m\nu\sigma_{кул}} = \frac{9(kT)^2}{4\pi e^2 m\nu \ln \Lambda}, \quad \sigma = 1,9 \cdot 10^2 \frac{T^{3/2} [\text{эВ}]}{\ln \Lambda} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} \quad (8.9)$$

Частота электрон-электронных столкновений даже больше, чем электрон-ионных, так как кулоновские сечения одинаковы, а средняя скорость относительного движения двух электронов в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем электрона и «неподвижной» частицы. Между тем соответствующее слагаемое  $\sqrt{2}n_e\nu\sigma_{кул}$  в (8.8) не добавлено. Это связано с тем, что сопротивление ускоренному движению электрона (трение) вызывается потерей направленной вдоль поля скорости электрона, потерей направленного импульса при рассеянии. Но суммарный импульс любой пары взаимодействующих электронов  $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$  при рассеянии сохраняется, хотя скорости каждого из них меняются и по величине, и по направлению. Отсюда следует, что при столкновении не изменяется суммарный электрический ток па-

ры  $-e\vec{v}_1 - e\vec{v}_2$ . Значит, если бы электрон не испытывал никаких иных столкновений, кроме как с другими электронами, движение электронного коллектива в поле было бы в среднем ускоренным, что и означает отсутствие электрического сопротивления.

Над электроном, движущимся со скоростью  $\vec{v}_e$ , в единицу времени поле совершает работу  $-e\vec{E}\vec{v}_e$ . Представим скорость электрона в виде суммы хаотической  $\vec{v}$  и дрейфовой составляющих,  $\vec{v}_e = \vec{v} + \vec{v}_d$ . По самому определению в среднем по многим электронам  $\langle \vec{v} \rangle = 0$  и  $\langle \vec{v}_e \rangle = \vec{v}_d$ . Работа поля в среднем равна  $-\langle e\vec{E}\vec{v}_e \rangle = eE v_d$ . В  $1 \text{ см}^3$  газа в 1 с при протекании тока выделяется энергия  $eE v_d n_e = jE$ . Это есть *джоулево тепло тока*. Поскольку дрейфовое, т. е. макроскопически не ускоренное, движение связано с действием трения в среде, можно сказать, что работа поля затрачивается на преодоление силы трения. В этом смысле джоулево тепло – это диссипация энергии поля, вызванная существованием трения или сопротивления.

*Среднее приобретение энергии электроном в одном эффективном столкновении равняется*

$$\Delta \varepsilon_e = eE v_d / \nu_m = e^2 E^2 / m \nu_m^2 = m v_d^2 \quad (8.10)$$

и по порядку величины совпадает с кинетической энергией дрейфового движения  $m v_d^2 / 2$ . Полная кинетическая энергия электрона в среднем складывается из хаотической  $\bar{\varepsilon}$  и дрейфовой составляющих

$$\left\langle \frac{m \vec{v}_e^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{m \vec{v}^2}{2} \right\rangle + \frac{m \vec{v}_d^2}{2} = \bar{\varepsilon} + \frac{m \vec{v}_d^2}{2}, \quad \langle \vec{v} \vec{v}_d \rangle = 0.$$

Результат (8.10) можно качественно трактовать следующим образом. Сразу после очередного столкновения (“эффективного”) скорость электрона полностью хаотизирована – вектор ее в среднем равен нулю. К следующему столкновению электрон набирает в поле направленную дрейфовую скорость и соответствующую кинетическую энергию. При столкновении эти новые порции также переходят в хаотическую часть – в электронное “тепло”, и все начинается сначала.

Формула (8.10) отражает лишь конечный, результирующий эффект различных и притом резко противоположных ситуаций, которые возникают в конкретных столкновениях. На самом деле в период между двумя столкновениями электрон может и ускоряться полем и тормозиться, и набирать энергию, и терять ее. Все зависит от того, пришлось ли ему начать движение после столкновения в сторону действия силы или против нее, с большой скоростью или малой. Поясним это на простейшем примере.

Зафиксируем внимание на двух электронах, которые сразу после столкновения обладают одинаковыми по величине скоростями  $v$  и летят параллельно полю, но в противоположных направлениях. Начальные кинетические энергии у них одинаковы,  $mv^2/2$ . Тот электрон, который движется в направлении действия силы (против поля), к следующему столкновению набирает скорость  $\vec{v} + eE/mv_m = \vec{v} + v_d$  и приобретает дополнительную энергию

$$\Delta\varepsilon_+ = \frac{m(v + v_d)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = m\vec{v}\vec{v}_d + \frac{mv_d^2}{2}.$$

Тот, который начал свое движение по полю сначала, а может и все время, тормозится и к следующему столкновению достигает скорости  $-\vec{v} + \vec{v}_d$ . Он приобретает дополнительную энергию

$$\Delta\varepsilon_- = \frac{m(-v + v_d)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -m\vec{v}\vec{v}_d + \frac{mv_d^2}{2},$$

которая оказывается отрицательной, если  $v > v_d/2$ . В этом случае электрон теряет энергию. Именно такая ситуация типична, поскольку, как мы увидим, хаотические скорости  $v$  гораздо больше дрейфовой.

В среднем по двум рассмотренным вариантам электрон получает дополнительную энергию

$$\frac{(\Delta\varepsilon_+ + \Delta\varepsilon_-)}{2} = \frac{mv_d^2}{2},$$

которая не зависит от  $v$ , всегда положительна и совпадает с выражением (8.10). Ясно, что электроны с любыми начальными скоростями  $\vec{v}$  можно

разбить на аналогичные пары с противоположно направленными векторами и получить тот же результат.

Забегая вперед, мы не раз уже отмечали, что  $\bar{v} \gg v_d$ . В силу этого результирующий эффект приобретения энергии из расчета на одно столкновение представляет собой малую разность относительно больших *истинных приобретений и потерь*

$$|\Delta\varepsilon_{\pm}| \approx m\bar{v}v_d \gg \Delta\varepsilon_E = mv_d^2.$$

Сами же истинные изменения энергии  $|\Delta\varepsilon_{\pm}|$ , в свою очередь, малы по сравнению со средней энергией электрона  $\bar{\varepsilon} \approx m\bar{v}^2/2$ . Указанные величины относятся как

$$\frac{\Delta\varepsilon_E}{|\Delta\varepsilon_{\pm}|} \sim \frac{|\Delta\varepsilon_{\pm}|}{\bar{\varepsilon}} \sim \frac{v_d}{\bar{v}}, \quad \frac{\Delta\varepsilon_E}{\bar{\varepsilon}} \sim \left(\frac{v_d}{\bar{v}}\right)^2. \quad (8.11)$$

Найдем теперь уравнение баланса энергии электронов. Энергию, которую электроны получают от поля, в слабоионизированном газе они передают атомам и молекулам. При слабой ионизации плотность тока и выделение джоулева тепла малы, так что газ нагревается мало. В этом случае обмен энергией между электронами и тяжелыми частицами носит односторонний характер, так как молекулам «нечего отдавать». В стационарных условиях средние энергии электронов обычно далеки от довольно высоких потенциалов электронного возбуждения и ионизации. Возбуждение и ионизацию осуществляет ничтожное количество сверхэнергичных электронов. В одноатомном газе в этом случае практически единственным механизмом передачи энергии от электронов газу являются упругие потери. В третьей лекции мы получили результат, согласно которому при каждом эффективном столкновении электрон в среднем передает атому долю  $\delta = 2m/M$  своей энергии  $\varepsilon$ . Таким образом, для энергии «среднего» электрона  $\varepsilon$  можно записать следующее уравнение баланса:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (\Delta\varepsilon_E - \delta\varepsilon)v_m = \left( \frac{e^2 E^2}{mv_m^2} - \delta\varepsilon \right) v_m. \quad (8.12)$$

В молекулярных газах электроны растрачивают приобретаемую энергию в основном на возбуждение колебаний и вращений молекул. И

этот случай описывается уравнением (8.12), но только коэффициент  $\delta$  не удастся вычислить так же просто, как для упругих потерь. Обычно неупругие потери на один-два порядка больше упругих, однако соответствующий коэффициент  $\delta$  по прежнему мал

$$\delta \sim 10^{-3} - 10^{-2} \left( 2m/M \sim 10^{-4} - 10^{-5} \right).$$

Установившееся значение энергии «среднего» электрона, которое соответствует компенсации приобретения энергии потерями, в данном приближении можно рассматривать как среднюю энергию электронов в поле  $\bar{\varepsilon}$ . Будем считать не зависящим от энергии коэффициент  $\delta$  и сечение рассеяния  $\sigma_{tr}$ , т.е. длину пробега электронов  $l = 1/N\sigma_{tr}$ ; при этом  $v_m = \bar{v}/l \sim \sqrt{\varepsilon}$ . Для определенности будем так же считать, что  $m\bar{v}^2 = (16/3\pi)\bar{\varepsilon}$ , как было бы в случае максвелловского спектра. Приравнявая нулю правую часть (8.12), найдем:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{3\pi}}{4} \frac{eEl}{\sqrt{\delta}} \approx 0,8 \frac{eEl}{\sqrt{\delta}} \approx \frac{e}{\sigma_{tr}\sqrt{\delta}} \frac{E}{N}. \quad (8.13)$$

Средняя энергия пропорциональна  $E/N$  и в  $1/\sqrt{\delta}$  раз больше энергии  $eEl$ , которую электрон приобретает на длине пробега, двигаясь в направлении действия электрической силы. Допущению о постоянстве длины пробега соответствует корневая зависимость скорости дрейфа от поля.

Действительно, подставляя в  $v_m = N\bar{v}\sigma_{tr}$ ,  $\bar{v} = \left( \frac{16\bar{\varepsilon}}{3\pi m} \right)^{1/2}$  и определяя  $\bar{\varepsilon}$  выражением (8.13), по формуле (8.5) найдем

$$v_d = \left( \frac{3\pi}{16} \delta \right)^{1/4} \left( \frac{eE}{m\sigma_{tr}N} \right)^{1/2} \approx 0,9\delta^{1/4} \left( \frac{eE}{m\sigma_{tr}N} \right)^{1/2}. \quad (8.14)$$

С другой стороны, допущению о постоянстве частоты столкновений, когда  $\mu_e = \text{const}$  и  $v_d \sim E/N$ , отвечает квадратичная зависимость энергии от поля. Из (8.12) в этом случае получаем

$$\bar{\varepsilon} = \frac{e^2 E^2}{\delta m v_m^2} = \frac{e^2}{\delta m \tilde{v}_m^2}, \quad \tilde{v}_m \equiv \frac{v_m}{N}. \quad (8.15)$$

Таким образом, при выборе модели мы оказываемся перед двумя альтернативами: считать либо

$$v_m, \mu_e = \text{const} \Rightarrow v_d \sim \frac{E}{N}, \quad \bar{\varepsilon} \sim \delta^{-1} \left( \frac{E}{N} \right)^2,$$

либо

$$\sigma_{tr}, l = \text{const} \Rightarrow v_d \sim \delta^{1/4} \left( \frac{E}{N} \right)^{1/2}, \quad \bar{\varepsilon} \sim \delta^{-1/2} \frac{E}{N}.$$

Реальные зависимости  $v_d$  и  $\bar{\varepsilon}$  от  $E/N$  обычно сложны и в лучшем случае на отдельных участках  $E/N$  тех или иных газов хорошо аппроксимируются той или иной моделью. Поэтому при изучении различных эффектов выбирают тот вариант, который удобнее для анализа. Если эффекты определяются дрейфом, электрическим током, целесообразно считать постоянными подвижность, частоту. При рассмотрении энергетических аспектов поведения электронов в поле, как в этой лекции, лучше пользоваться приближением  $l = \text{const}$ .

Теперь мы в состоянии найти соотношение между хаотической и дрейфовой скоростями. Оно непосредственно вытекает из формул (8.5) и (8.13)

$$\frac{v_d}{\bar{v}} = \frac{eEl}{m\bar{v}^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \sqrt{\delta} \approx 0,8\sqrt{\delta}, \quad \frac{\bar{v}}{v_d} \approx \frac{1,2}{\sqrt{\delta}}. \quad (8.16)$$

Электрон приобретает в поле хаотическую скорость, которая в  $1/\sqrt{\delta}$ , т.е. в десятки и сотни раз больше дрейфовой. Соотношение (8.16), проясняющее физический смысл порядка малости  $v_d/\bar{v}$ , тесно увязано с показателями порядка малости энергетических характеристик электронов. При столкновении электрон приобретает либо теряет энергию порядка  $|\Delta\varepsilon_{\pm}| \approx \sqrt{\delta\varepsilon} \approx eEl$ , которая соответствует проходимой им в том или ином направлении разности потенциалов на длине свободного пробега. Энергия  $\Delta\varepsilon_+$  чуть больше  $|\Delta\varepsilon_-|$  на величину  $\Delta\varepsilon_E \approx \sqrt{\delta}|\Delta\varepsilon_{\pm}|$ , которую электрон в среднем и набирает в одном столкновении.

Несколько слов о пределах применимости полученных соотношений. Со стороны очень слабых полей она ограничена допущением об одностороннем характере обмена энергией между электронами и газом,  $\bar{\varepsilon} \gg kT$ . Ведь в отсутствии поля электроны термализуются и приобретают температуру газа  $T$ , если только до этого не гибнут. В слабоионизированной разрядной плазме условие  $\bar{\varepsilon} \gg kT$  обычно выполняется с большим запасом. В сильных полях вступают в игру значительные неупругие потери, что происходит при энергиях электронов  $\varepsilon \geq 10$  эВ. Даже из чисто формального перехода в формулах (8.13), (8.16) к пределу максимально возможных потерь  $\delta \sim 1$  видно, что направленная и хаотическая составляющие скорости становятся сравнимыми, стало быть, возникает сильная асимметрия и в движении, и в обмене энергией между электронами и полем. Электрон набирает на пробеге значительную энергию, возбуждает или ионизирует атом и устремляется дальше. Это уже не совсем та картина, которая рассматривалась до сих пор. Подобные явления могут происходить в катодном слое тлеющего разряда.

В заключение рассмотрим вопросы релаксации энергии электрона и выработаем критерии постоянства и однородности поля. Величину  $\nu_u = \delta \nu_m$  называют *частотой потерь энергии*. За время порядка

$$\tau_u = \nu_u^{-1} = \tau_m / \delta, \quad (8.17)$$

т.е. примерно за  $1/\delta$  эффективных столкновений, электрон растрчивает свою энергию, если «мгновенно» выключить поле. За такое же примерно время очень медленный электрон набирает в поле среднюю энергию, так как в одном столкновении он приобретает долю  $\delta$  от нее. Как видно из уравнения (8.12),  $\tau_u$  вообще характеризует скорость установления стационарной энергии в данном поле. Это есть *время релаксации для энергии*. Если поле меняется за время  $\tau_u$  мало, энергетический спектр электронов и их средняя энергия «следят» за изменением поля, т.е. являются квазистационарными. Если поле меняется быстро – «следить» не успевают. Таким образом, критерий «постоянства» поля можно сформулировать в виде

$$\frac{dE}{dt} \tau_u \ll 1.$$

Поскольку электроны в среднем систематически сдвигаются в направлении действия силы, процесс установления энергии протекает не только во времени, но и в пространстве. За время релаксации  $\tau_u$  электроны сдвигаются вследствие дрейфа на расстояние

$$\Lambda_u = v_d \tau_u \approx 0,8 \frac{l}{\sqrt{\delta}}. \quad (8.18)$$

Эта величина называется *длиной установления*, или *длиной релаксации энергии*. Она не в  $1/\delta$  раз, как время, а только в  $1/\sqrt{\delta}$  раз больше длины пробега электрона. Согласно (8.13), (8.18)

$$\bar{\varepsilon} = eE\Lambda_u, \quad (8.19)$$

т.е. свою среднюю энергию электрон приобретает, пройдя разность потенциалов на длине  $\Lambda_u$ .

Постоянное поле можно рассматривать как однородное, если оно мало меняется на расстоянии  $\Lambda_u$ , т.е. при условии

$$\frac{dE}{dx} \Lambda_u \ll 1.$$

В противоположном случае сильно неоднородных полей спектр и энергия электронов уже не являются функциями только локального отношения  $E/N$ . Энергия может определяться, например, разностью потенциалов, проходимой электроном от точки рождения.

В уравнении баланса энергии (8.12) член потерь в скобках растет с ростом  $\varepsilon$ , а приобретение – уменьшается: в предположении  $l = \text{const}$  – как  $1/\varepsilon$ . Следовательно, энергия электронов всегда стремится к стационарному значению  $\bar{\varepsilon}$ . Если  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ , то  $d\varepsilon/dt > 0$ ; если  $\varepsilon > \bar{\varepsilon}$ , то  $d\varepsilon/dt < 0$ . Это свидетельствует об устойчивости стационарного состояния, так как при случайном отклонении  $\varepsilon$  от  $\bar{\varepsilon}$  энергия будет со скоростью релаксации возвращаться к  $\bar{\varepsilon}$ .

## Лекция 9. ДИФФУЗИЯ, ДРЕЙФ И ПРОТЕКАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ПЛАЗМЕ

*Диффузионный поток • Соотношение Эйнштейна • Амбиполярная  
диффузия • Определение понятия «плазма» • Диффузионный  
ток и искажение поля градиентами • Критерий  
электронейтральности • Амбиполярный поток  
зарядов вдоль неоднородного поля*

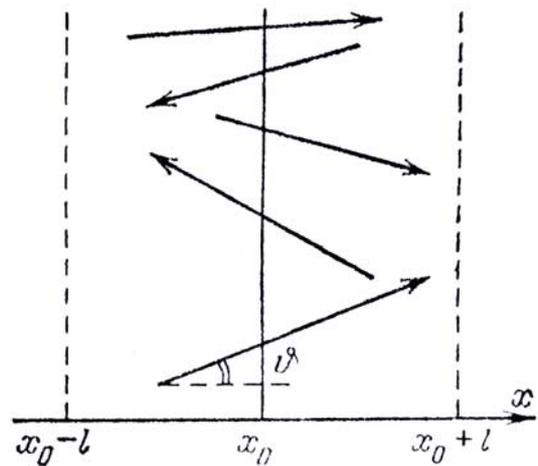
Когда плотность частиц  $n$ , находящихся в среде другого газа, неоднородна в пространстве, возникает *диффузионный поток*, который стремится ее выровнять. Этот поток легко найти путем не слишком строгих, но зато простых рассуждений (рис. 9.1).

Пусть  $n = n(x)$ . Проведем плоскость  $x_0$ , перпендикулярную оси  $x$ , и вычислим число частиц, которые пересекают ее в ту и другую стороны. После эффективного столкновения легкая частица (электрон) приобретает произвольно направленную в пространстве скорость и далее летит до следующего эффективного столкновения по прямой. В этом случае под углом  $\vartheta$  к оси  $x$  плоскость пересекают те частицы, которые приобрели это направление, испытав последнее столкновение

не дальше чем на расстоянии  $l = \frac{v}{v_m}$  по линии  $\vartheta$ .

Пусть  $v_x = v \cos \vartheta$  – составляющая скорости частицы,  $n_-$  – их плотность, средняя на длине  $l$  в косом направлении. Площадку в  $1 \text{ см}^2$  в  $1 \text{ с}$  слева направо пересекает

$$\langle n_- v_x \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \left[ n(x_0) + n \left( x_0 - \frac{v_x}{v_m} \right) \right] v_x \right\rangle$$



*Рис. 9.1. К выводу формулы  
для диффузионного потока частиц*

частиц. Здесь  $\langle \rangle$  означает усреднение по скоростям  $v_x$  положительного направления, т.е. по  $\vartheta$  и по  $\vartheta$  от 0 до  $\pi/2$ . Справа налево площадку пересекает

$$\langle n_+ |v_x| \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \left[ n(x_0) + n \left( x + \frac{|v_x|}{v_m} \right) \right] |v_x| \right\rangle$$

частиц. Вычитая вторую величину из первой и предполагая малость градиентов, ограничиваясь первыми членами разложения  $n(x)$ , найдем плотность диффузионного потока в  $x$ -направлении:

$$\Gamma_{\text{диф.}x} = -D \frac{dn}{dx}. \quad (9.1)$$

Ему соответствует коэффициент диффузии

$$D = \left\langle \frac{v_x^2}{v_m} \right\rangle = \frac{1}{3} \left\langle \frac{v^2}{v_m} \right\rangle \approx \frac{l\bar{v}}{3}. \quad (9.2)$$

Здесь принята во внимание практически полная беспорядочность направлений скоростей частиц, поскольку скорость направленного дрейфа электронов  $v_d \ll \bar{v}$ . В силу этого  $\langle \cos^2 \vartheta \rangle = 1/3$  легко проверить путем чисто геометрического построения, если  $n = n(x, y, z)$ , члены, пропорциональные  $\frac{\partial n}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial n}{\partial z}$ , в  $x$ -составляющей потока взаимно сокращаются, так что в векторной форме

$$\vec{\Gamma}_{\text{диф}} = -D \vec{\nabla} n. \quad (9.3)$$

Составим отношение  $D/\mu$  для электронов, имея в виду, что выражение (8.5) для  $\mu_e$  также должно быть усреднено по  $v$ . Если  $v_m(v) = \text{const}$ , получим

$$\frac{D}{\mu} = \frac{m\bar{v}^2}{3e} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\varepsilon}}{e}, \quad (9.4)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  – средняя энергия частиц. В случае максвелловского распределения  $\bar{\varepsilon} = \left(\frac{3}{2}\right) kT$ , где  $T$  – температура частиц, так что соотношение (9.4) можно представить в виде

$$\frac{D}{\mu} = \frac{kT}{e}. \quad (9.5)$$

Это равенство имеет общий характер и называется *соотношением Эйнштейна*, который получил его из термодинамических соображений. Действительно, поток положительно или отрицательно заряженных частиц складывается из дрейфового и диффузионного

$$\vec{\Gamma}_{\pm} = \pm n_{\pm} \mu \vec{E} - D \vec{\nabla} n_{\pm}. \quad (9.6)$$

В состоянии термодинамического равновесия, возможного в достаточно слабых полях, потока нет, а температура неизменна в пространстве. Дрейфовый поток компенсируется диффузионным, который возникает из-за того, что в поле плотность в соответствии с больцмановским распределением неоднородна:  $n_{\pm} \sim \exp\left(\mp \frac{e\varphi}{kT}\right)$ , где  $\varphi$  – потенциал поля  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ . Подставляя эти выражения в равенство (9.6), получим отношение (9.5).

При немаксвелловском спектре и  $v_m \neq \text{const}$  величина  $\frac{3}{2} \cdot \frac{D}{\mu}$  также характеризует среднюю энергию частиц, но не равняется ей точно. Отношение  $\frac{D_e}{\mu_e}$  называют *характеристической энергией* электронов. Если подвижность, как обычно, выражена в  $\frac{\text{см}^2}{(\text{В} \cdot \text{с})}$ , а  $D$  – в  $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ , отношение  $\frac{D}{\mu}$  численно дает энергию в электрон-вольтах.

Отметим, что уравнение диффузии в общем случае имеет вид уравнения непрерывности для плотности частиц  $n$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{\Gamma} = q, \quad (9.7)$$

где  $q$  — источники рождения (гибели) частиц в  $1 \text{ см}^3$  в  $1 \text{ с}$ .

Рассмотрим теперь диффузию заряженных частиц, в ходе которой происходит расплывание облака ионизированного газа в отсутствие поля

или в поперечном к нему направлении. Коэффициенты диффузии электронов и ионов сильно различаются по величине из-за того, что легкие электроны движутся гораздо быстрее, чем ионы. В принципе, спустя некоторое время электроны могли бы оставить далеко позади своих менее подвижных партнеров. На месте первоначального облака остался бы нескомпенсированный положительный заряд. Это и происходит на самом деле, но только в тех случаях, когда плотности зарядов невелики. Лишь при низкой плотности отрицательно и положительно заряженные частицы диффундируют независимо. Это явление называется *свободной диффузией*. Если плотности частиц обоих знаков не малы, в результате их разделения образуется значительный *пространственный заряд*, а возникшее электрическое поле *поляризации* препятствует дальнейшему нарушению электронейтральности. Отрицательные и положительные заряды как бы не могут при

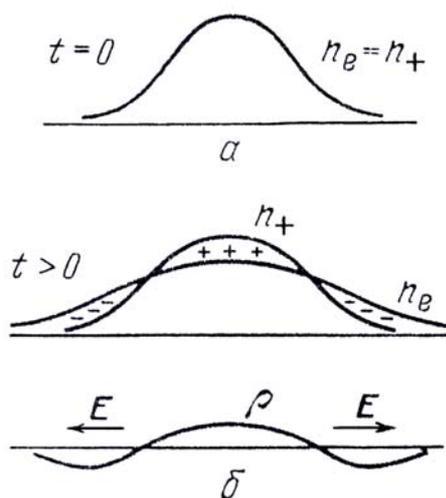


Рис. 9.2. Поляризация плазмы при наличии градиентов плотностей ионов и электронов: а – начальные распределения  $n_e = n_+$ ; б – распределения  $n_e, n_+$  и плотности объемного заряда  $\rho = e(n_+ - n_e)$  спустя некоторое время

этом оторваться друг от друга, будучи связанными кулоновскими силами. Эта ситуация иллюстрируется на рис. 9.2. Разделение зарядов и поле поляризации автоматически так подстраиваются друг к другу, чтобы поле сдерживало убегающие электроны, подтягивало к ним тяжелые ионы и заставляло их диффундировать только «вместе». Такая диффузия называется *амбиполярной*.

Найдем коэффициент амбиполярной диффузии. Для этого обратимся к общим выражениям (9.6) для потоков заряженных частиц. Поскольку мы интересуемся случаями либо отсутствия поля, либо диффузии в поперечном ему направлении, можно полагать, что поле  $\vec{E}$ , фигурирующее в этих формулах, связано исключительно с поляризацией плазмы. Оно удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e(n_+ - n_e). \quad (9.8)$$

Пусть разделение зарядов мало:  $|n_+ - n_e| \ll n_e \approx n_+ \approx n$ . Чтобы оно и не нарастало заметным образом, потоки электронов и ионов также должны

быть почти одинаковыми:  $\Gamma_{ex} \approx \Gamma_{+x} \approx \Gamma_x$ , где ось  $x$  направим перпендикулярно внешнему полю, если оно присутствует. Исключим поле поляризации из выражений

$$\Gamma_x \approx -\mu_e E_x n - D_e \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \Gamma_x \approx +\mu_+ E_x n - D_+ \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (9.9)$$

для чего разделим первое на  $\mu_e$ , второе – на  $\mu_+$  и потом сложим. В результате найдем, что поток заряженных частиц того и другого знаков записывается в обычной для диффузии форме

$$\Gamma_x = -D_a \frac{\partial n}{\partial x}, \quad D_a = \frac{D_+ \mu_e + D_e \mu_+}{\mu_e + \mu_+} \quad (9.10)$$

с неким эффективным коэффициентом  $D_a$  — *коэффициентом амбиполярной диффузии*. Поскольку  $\mu_e \gg \mu_+$ ,  $D_e \gg D_+$ , величина  $D_a \approx D_+ + D_e \left( \frac{\mu_+}{\mu_e} \right)$  больше  $D_+$ , но меньше  $D_e$  в соответствии со сказанным выше о подтягивании ионов и сдерживании электронов. В равновесной плазме, где температуры электронов  $T_e$  и ионов  $T$  одинаковы, с помощью соотношения Эйнштейна (9.4) найдем  $D_a = 2D_+$ . В неравновесной плазме, где температура электронов существенно выше температуры ионов, которая совпадает с температурой газа,

$$D_a \approx D_e \frac{\mu_+}{\mu_e} = D_+ \frac{T_e}{T} = \mu_+ \frac{kT_e}{e} = \frac{2}{3} \mu_+ (\bar{\varepsilon}_e [\text{эВ}]). \quad (9.11)$$

Определим теперь условия, при которых диффузия носит амбиполярный характер. Этот вопрос очень важен, поскольку коэффициенты свободной и амбиполярной диффузии в неравновесной плазме отличаются в десятки раз. Чтобы, несмотря на сильные неравенства  $D_e \gg D_+$ ,  $\mu_e \gg \mu_+$ , поток  $\Gamma_{ex}$  по формуле (9.9) не превышал потока  $\Gamma_{+x}$ , диффузионный и дрейфовый члены в  $\Gamma_{ex}$ , которые имеют противоположные знаки, должны компенсировать друг друга с точностью до относительно малой величины  $\Gamma_{+x}$ . Значит, то поле поляризации, которое автоматически устанавливается при амбиполярной диффузии, равно

$$E_x \approx -\frac{D_e}{\mu_e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{kT_e}{e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \sim \frac{kT_e}{eR}, \quad (9.12)$$

где  $R$  – длина, характеризующая масштаб градиента плотности зарядов. На этом расстоянии плотность меняется значительным образом. Например, если плазма находится в трубке, то  $R$  – ее радиус, так как плотность на оси значительно больше, чем на стенках трубки, где заряды нейтрализуются. Поле поляризации образуется в результате разделения зарядов, которое вызвано беспорядочным (тепловым) движением более быстрой компоненты – электронов и возникает за счет их тепловой энергии. В итоге разность потенциалов поля на всей длине  $R$  такова, что электрическая энергия заряда, приобретаемая на ней, порядка тепловой энергии электрона:  $e\delta\phi \sim eE_x R \sim kT_e$ .

Поле поляризации создается объемным зарядом  $e\delta n = e(n_+ - n_-)$ , порядок величины которого согласно (9.8) определяется из соотношения

$$\frac{E_x}{R} \sim 4\pi e\delta n = 4\pi e n \frac{\delta n}{n}.$$

С помощью (9.12) найдем

$$\frac{\delta n}{n} \approx \frac{kT_e}{4\pi e^2 n R^2} = \left(\frac{d}{R}\right)^2, \quad d = \left(\frac{kT_e}{4\pi e^2 n}\right)^{1/2}. \quad (9.13)$$

Величина  $d$ , как мы видим, представляет собой дебаевский радиус плазмы. Он как раз и характеризует те расстояния, на которых возможны сильные разделения зарядов и поляризация плазмы. Если  $R \gg d$ , т.е. заметный перепад плотности зарядов происходит на расстояниях, больших дебаевского радиуса, то  $\delta n/n \ll 1$ , нарушение электронейтральности мало и диффузия носит амбиполярный характер. При  $R \leq d$  электроны и ионы диффундируют независимо. Например, при  $T_e = 1$  эВ,  $n_e = 10^8$  см<sup>-3</sup>,  $R = 1$  см  $d = 0,052$  см и  $\delta n/n = 2,5 \cdot 10^{-3}$ , т.е. диффузия явно амбиполярна. Для тех же  $T_e$  и  $R$  только при плотности  $n_e < 10^6$  см<sup>-3</sup> заряды диффундируют свободно.

Условие  $\left(d/R\right)^2 \ll 1$ , где  $R$  – характерный размер области сильного перепада плотности зарядов, является той количественной мерой, которая отличает *плазму* как электронейтральную ионизированную среду от иных случаев присутствия зарядов в газе.

Если к плазме приложено внешнее электрическое поле и идет ток, то плотности потоков электронов и ионов в отличие от вышерассмотренного случая не одинаковы. Плотность тока  $\vec{j} = e(\vec{\Gamma}_+ - \vec{\Gamma}_e)$ . Из уравнений непрерывности для частиц данного сорта (9.7) и того факта, что положительные и отрицательные заряды рождаются и исчезают только парами (при отсутствии отрицательных ионов  $q_e = q_+$ ), вытекает уравнение непрерывности для электричества

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}\vec{j} = 0, \quad \rho = e(n_+ - n_e). \quad (9.14)$$

В электронейтральной среде, а в стационарных условиях всегда, ток не имеет источников

$$\text{div}\vec{j} = 0. \quad (9.15)$$

В одномерном случае вдоль направления тока  $z$   $\frac{dj}{dz} = 0$ ,  $j(z) = \text{const}$ , плотность тока неизменна. Обычно она определяется не локальными характеристиками, а условиями во всей системе в целом, включая внешнюю по отношению к разряду цепь.

В условиях квазинейтральности, когда  $n_e \approx n_+ \approx n$ , по формулам (9.6) получаем

$$\frac{\vec{j}}{e} = (\vec{\Gamma}_+ - \vec{\Gamma}_e) = (D_e - D_+) \vec{\nabla}n + (\mu_e + \mu_+) \vec{E}n, \quad (9.16)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{e(\mu_e + \mu_+)n} - \frac{D_e - D_+}{\mu_e + \mu_+} \frac{\vec{\nabla}n}{n}. \quad (9.17)$$

Электрическое поле складывается из «внешнего», благодаря которому течет ток, и поля поляризации, вызванного присутствием градиентов. Эти составляющие, естественно, неразличимы.

Сильное падение плотности зарядов в направлении, противоположном внешнему полю, может привести к его полному уничтожению. Электрический ток, с которым в силу (9.15) ничего при этом не происходит, переносится в этом месте благодаря диффузии электронов: при  $E \approx 0$  по (9.17) с учетом  $D_e \gg D_+$ ,  $\mu_e \gg \mu_+$   $\vec{j} \approx D_e \vec{\nabla}n$ . Диффузия при этом происходит свободно (амбиполярная – электричества не переносит).

Подставляя соотношение (9.17) в выражения (9.6) для  $\vec{\Gamma}_e$ ,  $\vec{\Gamma}_+$  и имея в виду определение (9.10), найдем

$$\vec{\Gamma}_e = -D_a \vec{\nabla} n - \frac{\mu_e}{\mu_e + \mu_+} \frac{\vec{j}}{e}, \quad \vec{\Gamma}_+ = -D_a \vec{\nabla} n + \frac{\mu_+}{\mu_e + \mu_+} \frac{\vec{j}}{e}. \quad (9.18)$$

Потоки электронов и ионов складываются из одинаковых амбиполярных диффузионных (они могут иметь составляющую и вдоль тока) и потоков, обусловленных протеканием тока. Но они в отличие от амбиполярных различаются сильно, в  $\frac{\mu_e}{\mu_+} \gg 1$  раз. Подставляя любое из выражений (9.18) в соответствующее уравнение непрерывности (9.7) и имея в виду (9.15), получим общее уравнение баланса числа заряженных частиц в плазме:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D_a \Delta n = q, \quad n = n_e = n_+. \quad (9.19)$$

Оно имеет вид обычного уравнения диффузии (с амбиполярным коэффициентом) в присутствии объемных источников частиц и не содержит никаких признаков того, что в среде может течь электрический ток. Ток сказывается не на балансе, а на потоках зарядов (9.18). Баланс не зависит от тока, потому что, образно говоря, сколько электричества втекает в какое-то место, ровно столько согласно (9.15) и вытекает.

Рассмотрим теперь критерий электронейтральности. Он различается для следующих двух ситуаций. Если тока нет или он есть, но мал по сравнению с диффузионным током электронов (поле поляризации больше «внешнего» в соотношении (9.17)), мы возвращаемся к рассмотренной ранее ситуации и критерию (9.13):  $\left(\frac{d}{R}\right)^2 \ll 1$ . Если дрейфовый ток больше диффузионного, согласно (9.17)  $\vec{j} \approx e \mu_e \vec{E} n$  и в соответствии с (9.15), (9.8) имеем

$$-\vec{E} \vec{\nabla} n = n \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi e n (n_+ - n_e) = 4\pi e n \delta n, \\ \frac{\delta n}{n} \sim \frac{E}{4\pi e n L} \sim \frac{kT_e}{4\pi e^2 n} \frac{eE}{kT_e L} \sim \frac{d^2}{L \Lambda_u} \sim \left(\frac{d}{L}\right)^2 \frac{L}{\Lambda_u}, \quad (9.20)$$

где  $L$  – длина вдоль поля, на которой сильно меняются  $n_e$  и проводимость. Дебаевский радиус следует сравнивать со средним геометрическим между

$L$  и  $\Lambda_u$ . Будет ли критерий (9.20) жестче или мягче (9.13), зависит от конкретных условий, как и то, что сильнее нарушает электронейтральность – градиенты вдоль поля или поперек.

Амбиполярный поток зарядов вдоль неоднородного поля имеет дрейфовую природу (в отличие от диффузионного) и обусловлен присутствием пространственного заряда. Подставим в уравнение непрерывности (9.7) для  $n_e, n_+$  выражения (9.6) для потоков  $\vec{\Gamma}_e, \vec{\Gamma}_+$ . Умножая уравнение для  $n_e$  на  $\frac{\mu_+}{\mu_e}$  и считая для простоты  $\mu_e, \mu_+$  постоянными, сложим результат с уравнением для  $n_+$ . Интересуясь действием пространственного заряда, который даже в квазинейтральной (в смысле  $\frac{\delta n}{n} \ll 1$ ) плазме может быть сам по себе значительным, сохраним при суммировании дрейфовых потоков «малую» разность  $\delta n$ . Подставляя  $\delta n = (4\pi e)^{-1} \text{div} \vec{E}$  и пренебрегая членами, пропорциональными  $\frac{\mu_+}{\mu_e} < 10^{-2}$ , получим уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \left( -D_a \vec{\nabla} n + \frac{\mu_+}{4\pi e} \vec{E} \text{div} \vec{E} \right) = q, \quad n \approx n_+ \approx n_e,$$

уточненное по сравнению с (9.19). Наряду с потоком амбиполярной диффузии появляется поток *амбиполярного дрейфа*.

В одномерном случае он равен  $\left( \frac{\mu_+}{8\pi e} \right) \frac{\partial E^2}{\partial x}$  и с плотностью зарядов непосредственно не связан. Однако в силу постоянства тока вдоль его направления  $j \approx en_e \mu_e E \approx \text{const}$  градиент поля неизбежно сопровождается градиентом плазмы. Поэтому амбиполярный дрейфовый поток эквивалентен некому диффузионному

$$\frac{\mu_+}{8\pi e} \frac{\partial E^2}{\partial x} \approx -\frac{\mu_+ E^2}{4\pi e n} \frac{\partial n}{\partial x} = -D_E \frac{\partial n}{\partial x},$$

с эффективным коэффициентом диффузии  $D_E$ , который складывается с  $D_a$ . Сравнительная роль двух потоков характеризуется отношением

$$\frac{D_E}{D_a} = \frac{E^2}{4\pi n k T_e} = \frac{\left( E \left[ \frac{\text{В}}{\text{см}} \right] \right)^2}{1,8 \cdot 10^{-6} n T_e [\text{эВ}]}.$$

Например, при  $n = 6 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e = 1 \text{ эВ}$  амбиполярный дрейф преобладает над амбиполярной диффузией, если  $E > 10^2 \text{ В/см}$  или с учетом характерных для плазмы значений  $E/p \sim 1-10 \text{ В/см} \cdot \text{тор}$ , при  $p > 10-100 \text{ тор}$ . Благодаря обоим эффектам плазма перекачивается из мест с более высокой плотностью и более слабым полем в места с пониженной плотностью и более сильным полем.

### *Лекция 10. ОБРАЗОВАНИЕ И ГИБЕЛЬ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ГАЗЕ*

*Различные механизмы и их роль в условиях газового разряда •*

*Ионизация электронным ударом в электрическом поле •*

*Первый таунсендовский коэффициент •*

*Ионизационная способность •*

*Уравнение Саха*

Рождение и исчезновение зарядов является результатом многообразных процессов, происходящих в ионизированной газовой среде. В плане обеспечения проводимости газового промежутка их степень важности различна, поэтому сейчас мы приступим к рассмотрению как самих процессов рождения и гибели зарядов, так и их относительной роли.

Существуют три основные возможности вырывания электронов из атомов и молекул, находящихся в основном состоянии: электронным ударом, ударами тяжелых частиц и световыми квантами (фотоионизацией). Символически это записывается следующим образом:



Стрелками, направленными влево, обозначены обратные процессы (рекомбинации).

Ионизация электронным ударом является главным источником появления электронов и положительных ионов в газовом разряде. Ионизация ударами атомов, ионов, как уже отмечалось ранее, обладает заметной вероятностью только при энергиях частиц, превышающих несколько кэВ, и в разрядах происходит редко. Сечения фотоионизации при энергиях квантов, не сильно превышающих потенциалы ионизации атомов, довольно велики ( $10^{-17} - 10^{-19} \text{ см}^2$ ), но ограниченность размеров лабораторной плазмы не позволяет плотности излучения подняться до сколь либо значительных величин. Потоки квантов в непрерывном спектре гораздо меньше термодинамически равновесных, и фотоионизация в плазме также случается довольно редко. Но, если в холодном газе отсутствуют электроны, а по соседству имеется нагретая плазма, электроны в газе могут появляться в результате поглощения ультрафиолетового излучения, испускаемого плазмой. Этот эффект играет главенствующую роль в фотосферах звезд, а также происходит при распространении разрядов и искровом пробое.

Реакции (10.1) – (10.3) протекают и с возбужденными частицами

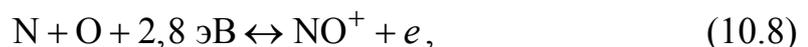


хотя главной в разрядах по-прежнему остается ионизация электронным ударом.

При очень малой концентрации электронов может оказаться важной так называемая *ассоциативная ионизация*:



Когда атомы объединяются в молекулу, выделяется энергия связи, которая также расходуется на отрыв электрона. Поэтому для ионизации нужно добавить за счет кинетической энергии лишь разницу между потенциалом ионизации и энергией диссоциации молекулы  $AB$ . Например реакция



которая в некоторых случаях служит главным механизмом ионизации в нагретом воздухе, требует затраты энергии всего лишь 2,8 эВ, тогда как

для прямого отрыва электрона от молекулы NO потребовалась бы энергия  $I_{\text{NO}} = 9,25$  эВ, а для прямой ионизации атомов и молекул кислорода и азота – еще больше.

Ассоциативная ионизация протекает и в тех случаях, когда нейтральной молекулы не существует. Несмотря на это, соответствующий молекулярный ион обладает небольшой энергией связи (порядка 1 эВ). В этом случае требуется затрата энергии, которая лишь немногим меньше потенциала ионизации атома, и реакция протекает только с высоковозбужденными атомами. Таковы процессы в инертных газах типа

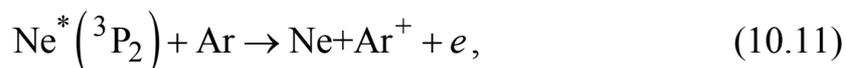


а также в парах металлов, где связь у нейтральных молекул если и есть, то слабая.

Если возбужденный атом одного сорта обладает энергией, превышающей потенциал ионизации другого, то при столкновении он затрачивает свою энергию на его ионизацию



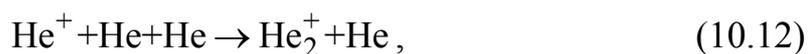
Особенно велика вероятность такого процесса, если имеется близость к резонансу, т.е. энергия возбуждения  $A^*$  мало отличается от потенциала ионизации  $B$ . Если атом  $A^*$  метастабильный, процесс называется *эффектом Пеннинга*. Типичный пример пеннинговской ионизации



где энергия возбуждения метастабильного  $\text{Ne}^*(^3\text{P}_2)$  16,62 эВ чуть выше  $I_{\text{Ar}} = 15,8$  эВ.

Возможен процесс *автоионизации*, который заключается в следующем. Электронным ударом или в результате поглощения фотона на возбужденный уровень в атоме переводится оптический (валентный) электрон. В следующем аналогичном акте в более высокое состояние переводится другой электрон. Если, как это обычно бывает, суммарная энергия возбуждения двух электронов в атоме превышает потенциал его ионизации, один электрон покидает атом, унося избыток энергии, а другой возвращается в основное состояние, так что остается невозбужденный ион. В физике рентгеновских лучей аналогичный процесс называется *оже-эффектом*. Автоионизация не является главным механизмом ионизации газа в разрядах.

*Электрон-ионная рекомбинация* протекает по схемам (10.1) – (10.9), справа налево. Та энергия, которая требуется для ионизации атома или молекулы, при рекомбинации выделяется. Она отдается частицам или уносится светом. В плотной сильноионизированной (низкотемпературной) плазме основную роль играет *рекомбинация в тройных столкновениях* с участием электрона в качестве третьей частицы. Этот процесс оказывается значительно более сложным, чем простейшая реакция (10.1), в которой слева фигурирует невозбужденный атом. Он идет ступенчатым путем, подобно ступенчатой ионизации, но в обратном направлении. Рекомбинация в тройных столкновениях с участием атомов происходит редко. При сильной ионизации тяжелые частицы не выдерживают конкуренции с электронами, при слабой – газ чаще всего бывает холодным и главным механизмом является *диссоциативная рекомбинация* (10.7), (10.9), которая обратна ассоциативной ионизации. Даже в благородных газах атомарные ионы сперва объединяются с атомами в тройных столкновениях типа



а потом рекомбинируют по схеме (10.9). Тем более это относится к молекулярным газам, таким как азот, где с самого начала образуются ионы  $\text{N}_2^+$ .

Запишем теперь *закон рекомбинации*. Число актов рекомбинации в  $1 \text{ см}^3$  в 1 с пропорционально плотностям рекомбинирующих частиц:

$$\left( \frac{dn_e}{dt} \right)_{\text{рек}} = -\beta n_e n_+. \quad (10.13)$$

Коэффициент пропорциональности  $\beta$  называется *коэффициентом рекомбинации*. В случае парных столкновений он не зависит от плотностей частиц, при тройных – пропорционален плотности третьих частиц, участвующих в реакции. В электронейтральной плазме без отрицательных ионов  $n_+ = n_e$ , и за исключением процессов с участием электронов в качестве третьих частиц  $\beta$  не зависит от  $n_+$ ,  $n_e$ . Плотность электронов в рекомбинирующей плазме уменьшается при этом по закону

$$n_e = \frac{n_e^0}{1 + \beta n_e^0 t}, \quad \frac{n_e^0}{n_e} = 1 + \beta n_e^0 t, \quad (10.14)$$

где  $n_e^0$  – начальная плотность. Измеряя тем или иным способом  $n_e$  в падающей плазме, построив график зависимости  $n_e^0/n_e$  от времени и убедившись в том, что точки ложатся на прямую линию, можно по наклону прямой определить коэффициент рекомбинации.

*Характерное время рекомбинации* равно  $\tau_{\text{рек}} = \frac{1}{\beta n_e^0}$ . Отметим, что

для одного из наиболее действенных механизмов – диссоциативной рекомбинации –  $\beta$  имеет порядок  $10^{-7}$  см<sup>3</sup>/с. Если, например, начальная плотность  $n_e^0 = 10^{10}$  см<sup>-3</sup>, степень ионизации уменьшается вдвое за время  $t = \tau_{\text{рек}} \sim 10^{-3}$  с. Через большое время  $t \gg \tau_{\text{рек}}$  плотность электронов перестает зависеть от начальной ионизации и спадает как  $n_e \approx \frac{1}{\beta t}$ .

*Фоторекомбинация и диэлектронная рекомбинация*, являющиеся обратным процессом автоионизации на исчезновение электронов в разрядных условиях, оказывают незначительное влияние, и на них мы останавливаться не будем.

Некоторые атомы и молекулы обладают *сродством к электрону* и способны образовывать устойчивые отрицательные ионы. Подобные газы называются *электроотрицательными*. Существуют ионы  $O^-$ ,  $O_2^-$ ,  $H^-$ ,  $NO_2^-$ , галогенов  $Cl^-$ ,  $Cl_2^-$  и др., воды  $H_2O^-$ , радикалов  $OH^-$  и т.д. Связаны они слабо, энергией порядка 1 эВ. *Прилипание* электронов к атомам и молекулам зачастую сильно влияет на потери электронов и электропроводность ионизированного газа. Это связано с тем, что подвижность отрицательных ионов, как и положительных, гораздо меньше подвижности электронов.

Механизмы прилипания аналогичны механизмам рекомбинации: в тройных столкновениях типа



диссоциативным путем по схеме



(эти две реакции протекают в воздухе); путем *фотозахвата*



(в фотосферах звезд).

Когда в газе присутствуют отрицательные ионы, одним из важных механизмов нейтрализации зарядов является *ион-ионная рекомбинация*. При низких плотностях она протекает в парных соударениях типа



Выделяющаяся энергия рекомбинации затрачивается на возбуждение одной из частиц, а также переходит в кинетическую энергию их разлета. При больших плотностях вероятны тройные столкновения типа



когда энергию рекомбинации полностью или частично уносит третья частица.

*Диффузионный уход зарядов к стенкам разрядного сосуда* в результате как свободной диффузии, так и амбиполярной, является одним из действенных механизмов гибели зарядов. Как правило, стенки играют каталитическую роль, способствуя нейтрализации зарядов противоположного знака. Кроме того, заряды, особенно электроны, просто прилипают к ним.

Ознакомившись с основными процессами рождения и гибели электронов, перейдем теперь к более подробному изучению очень важного для горения разряда в газе – процесса ионизации электронным ударом в электрическом поле.

Важнейшей величиной, характеризующей скорость рождения электронов, является *частота ионизации*. Она определяется подобно частоте упругих столкновений. Обозначим:  $n(\varepsilon)$  – функция распределения электронов по энергиям;  $n(\varepsilon)d\varepsilon$  – число электронов в  $1 \text{ см}^3$  с энергиями  $\varepsilon = m\nu^2/2$  в интервале от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + d\varepsilon$ . Число актов ионизации в  $1 \text{ см}^3$  в 1 с равно

$$\left( \frac{dn_e}{dt} \right)_i = \int_I^\infty n(\varepsilon) \nu \sigma_i(\varepsilon) N_a d\varepsilon, \quad n_e = \int_0^\infty n(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (10.20)$$

где  $N_a$  – плотность атомов,  $\sigma_i$  – сечение ионизации,  $n_e$  – плотность электронов. Частота ионизации  $\nu_i$  – это число ионизаций, которое какой-нибудь электрон в среднем совершает в 1 с. Она равна

$$\nu_i = \frac{\int n(\varepsilon) \nu \sigma_i(\varepsilon) N_a d\varepsilon}{\int n(\varepsilon) d\varepsilon} = N_a \langle \nu \sigma_i \rangle \equiv N_a k_i . \quad (10.21)$$

Скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по энергетическому спектру. Коэффициент  $k_i$ , смысл которого следует из равенства  $\left(\frac{dn_e}{dt}\right)_i = k_i n_e N_a$ , называется *константой скорости реакции ионизации* (таково определение *констант скорости* любых реакций).

Пусть ионизация развивается в однородных условиях, т.е. с постоянной частотой  $\nu_i$ . В отсутствие процессов гибели, вернее, до тех пор, пока роль этих процессов не станет заметной, что происходит только при достаточно большом числе электронов, последнее лавинообразно нарастает по закону

$$\frac{dn_e}{dt} = \nu_i n_e, \quad n_e = n_e^0 \cdot \exp(\nu_i t), \quad (10.22)$$

где  $n_e^0$  – начальное количество электронов. Их число удваивается за время  $\nu_i^{-1} \ln 2$ .

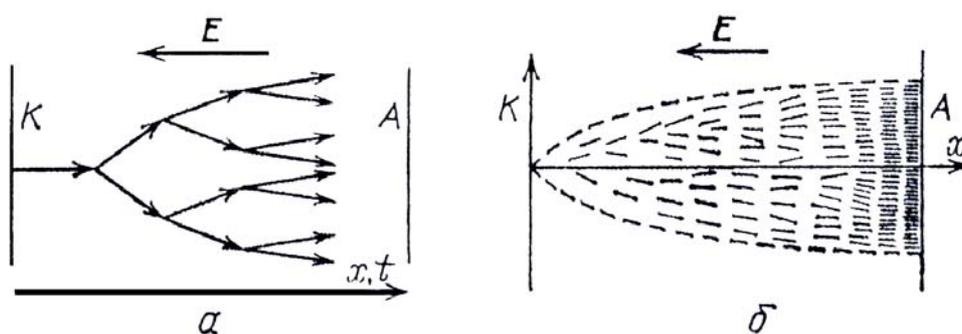
В достаточно сильноионизированной плазме, когда электроны сталкиваются не только с атомами, но и друг с другом и интенсивно обмениваются энергией, у них устанавливается максвелловское распределение. Обычно температура газоразрядной низкотемпературной плазмы существенно меньше потенциала ионизации газа. Это связано с тем, что сильная ионизация наступает, когда величина  $kT_e$  раз в 5 – 10 меньше  $I$ . Следовательно, ионизируют атомы те электроны, которые принадлежат «хвосту» максвелловского спектра с  $\varepsilon \gg kT_e$ . Поскольку функция  $n(\varepsilon) \sim \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT_e}\right)$  спадает очень резко, в интеграл (10.20) можно подставить линейный закон сечения  $\sigma_i(\varepsilon)$  (7.1), справедливый при небольших превышениях энергии электронов над порогом ионизации. В этом случае интегрирование дает

$$\nu_i = N_a \bar{v}_e C_i (I + 2kT_e) \exp\left(-\frac{I}{kT_e}\right) = N_a \bar{v}_e \sigma_e \left(\frac{I}{kT_e} + 2\right) \exp\left(-\frac{I}{kT_e}\right), \quad (10.23)$$

где  $\bar{v}_e = (8kT_e/\pi m)^{1/2}$  – средняя тепловая скорость электрона, а  $\sigma_e = C_i kT_e$  – характерное для данного случая сечение ионизации. Оно соответствует  $\varepsilon = I + kT_e$ . Величина электронной температуры обычно  $10^4 \text{ K} \approx 1 \text{ эВ}$ . Для иллюстрации приведем численный пример. Пусть ионизируется аргон при плотности  $N_a = 1,7 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , отвечающей давлению  $p = 50 \text{ тор}$  при

комнатной температуре. Имеем  $\sigma_i = 2 \cdot 10^{-17} \text{ см}^{-2}$ ;  $\bar{v}_e = 6,7 \cdot 10^7 \text{ см/с}$ ;  $k_i = \langle v \sigma_i \rangle = 3 \cdot 10^{-18} \text{ см}^{-3}/\text{с}$ ;  $\nu_i = 510 \text{ с}^{-1}$ ; время удвоения числа электронов 1,4 мс. Забегая несколько вперед, отметим, что равновесная степень ионизации при таких  $T_e$  и  $N_a$  равна 0,021; полное давление при  $T = T_e$  составляет 2,8 атм. Если бы электронная лавина началась с  $n_e^0 = 1 \text{ см}^{-3}$ , то до равновесной плотности  $n_e = 3,6 \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-3}$  она доросла бы примерно за 75 мс (на самом деле несколько медленнее, так как на последнем этапе рост лавины замедляется рекомбинацией).

Этот пример относится к низкотемпературной равновесной плазме и совершенно не типичен для слабоионизированной плазмы пробоя или тлеющего разряда. Хотя частота ионизации  $\nu_i$  является величиной первичной, в случае, когда газ находится в постоянном однородном электрическом поле, целесообразнее пользоваться другой величиной. Ведь в постоянном поле электрон наряду с беспорядочным совершает неуклонное прямолинейное движение вдоль поля со скоростью дрейфа  $v_d$ . Лавина в этом случае развивается не только во времени, но и в пространстве, по мере продвижения электронов и начальных, и вновь рожденных. Электроны движутся вдоль поля от катода к аноду. Кроме того, лавина, проистекающая от определенного начального электрона, рожденного в определенном месте, расплывается и в поперечном направлении вследствие поперечной диффузии электронов. Это связано с приобретением электронами хаотической скорости при упругих столкновениях с атомами (см. рисунок).



*Механизм ударной ионизации: а – схема лавинного размножения электронов в промежутке между катодом К и анодом А; б – схема диффузионного расплывания электронная лавины, которая рождается от электрона, вышедшего из определенного места катода*

Адекватной характеристикой ионизационного процесса, который в постоянном поле имеет нелокальный характер, является *первый ионизационный коэффициент Таунсенда*  $\alpha$  – число пар ионов, которое один электрон в среднем рождает на 1 см пути (а не в 1 с), дрейфуя в направлении –  $\vec{E}$ . Нарастание числа электронов в лавине описывается уравнением

$$\frac{dN_e}{dx} = \alpha N_e, \quad (10.24)$$

где  $N_e dx$  – число электронов в слое толщины  $dx$ , а  $N_e$ , следовательно, не объемная, а линейная плотность. Ее можно заменить обычной объемной плотностью  $n_e$  только в том случае, если условия строго одномерны. Это означает, что отсутствуют поперечные градиенты – параллельные плоскости электродов как бы бесконечны в направлениях  $y$  и  $z$ . В противном случае лавина расплывается в поперечных направлениях вследствие диффузии электронов или поле  $\vec{E}$  имеет пространственные неоднородности ( $E_y, E_z \neq 0$ ), и тогда плотность  $n_e$  меняется вдоль оси  $x$  не только за счет ионизации.

Определим связь между частотой ионизации и ионизационным коэффициентом. Путь  $dx$  электрон в поле проходит за время  $dt = dx/v_d$ . На этом пути он рождает  $\alpha dx$  пар ионов. С другой стороны, за это время он рождает  $v_i dt$  пар. Следовательно,  $\alpha dx = v_i dt$ , так что

$$\alpha = \frac{v_i}{v_d}, \quad v_i = \alpha v_d. \quad (10.25)$$

Отметим еще раз, что первичной величиной, непосредственно вычисляемой на основе рассмотрения микроскопического процесса, является частота ионизации. «Первичной» является и скорость дрейфа  $v_d$ . Коэффициент Таунсенда  $\alpha$ , определенный формулой (10.25), – величина производная. Например, в быстропеременном поле  $\alpha$  и  $v_d$  особого смысла не имеют, тогда как  $v_i$  имеет вполне четкое значение.

Для аналитического описания ионизационного коэффициента Таунсендом была предложена эмпирическая формула

$$\frac{\alpha}{p} = A \exp\left(-\frac{Bp}{E}\right). \quad (10.26)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых. В табл. П6 приведены значения этих констант и указаны области их применения.

Очень полезной характеристикой процессов ионизации является *ионизационная способность*. Так называют число пар ионов, которое в среднем рождает электрон, проходя в однородном поле разность потенциалов 1 В:  $\eta = \alpha/E$ . Обратная величина  $\eta^{-1}$  определяет, следовательно, количество электрон-вольт, которое в среднем затрачивается на образование одной пары ионов. Величина  $\eta$ , будучи функцией  $E/p$ , имеет максимум. В

приближении (10.26)  $\eta_{\max} = A/Be$  при  $\left(E/p\right)_{\max} = B$ . Значению  $\left(E/p\right)_{\max}$  отвечают оптимальные условия для размножения электронов, поскольку на рождение пары ионов тратится минимальная энергия,  $E_e$ .  $\eta_{\max}^{-1}$  называют *константой Столетова*. Из данных табл. П7 видно, что на рождение пары ионов даже в лучшем случае необходимо затратить энергию, которая в несколько раз превышает потенциал ионизации газа. Это связано с тем, что электрону приходится терять много энергии на возбуждение. В воздухе она составляет величину, равную 66 эВ на пару ионов. Ее не следует путать с другой часто встречающейся величиной – 33 эВ на пару ионов. Последнюю тратит быстрый электрон с  $\varepsilon > 4$  кэВ, который замедляется в воздухе. Он тратит на возбуждение меньше энергии.

В заключение рассмотрим условия термодинамического равновесия электронов в газовой среде. Формула, которой определяется равновесная плотность электронов, имеет исключительно большое значение для физики разрядов, плазмы, высоких температур. Помимо того что во многих реальных условиях плазма пребывает в состоянии, близком к равновесному, и формула позволяет вычислить плотность электронов по температуре и плотности газа, она чрезвычайно облегчает задачу нахождения скоростей реакций рождения и исчезновения зарядов. По принципу детального равновесия скорости прямых и обратных процессов связаны через равновесную плотность электронов. Поэтому во многих случаях бывает достаточно непосредственным путем определить скорость только одного из процессов – либо ионизации, либо рекомбинации.

В состоянии термодинамического равновесия плотности электронов, ионов и нейтральных атомов  $N$  связаны с температурой ( $T_e = T$ ) соотношением

$$\frac{n_e n_+}{N} = 2 \frac{g_+}{g_a} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I}{kT}\right) = A \frac{g_+}{g_a} T^{3/2} \exp\left(-\frac{I}{kT}\right), \quad (10.27)$$

$$A = 4,85 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} \cdot K^{-3/2} = 6,06 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3} \cdot \text{эВ}^{-3/2},$$

которое выводится методами статистической физики безотносительно к механизмам рождения и исчезновения зарядов. Оно носит название *уравнения Саха*;  $g_+$  и  $g_a$  – статистические веса иона и атома (молекулы). Например, у инертных газов  $g_a = 1$ ,  $g_+ = 6$ ; у щелочных металлов  $g_a = 2$ ,  $g_+ = 1$ ; у Hg, N, O, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>  $g_a = 1, 4, 9, 1, 3$ ,  $g_+ = 2, 9, 4, 2, 4$  соответственно.

В электронейтральной плазме при однократной ионизации атомов  $n_e = n_+$ . Если степень ионизации мала, так что  $n_e \ll N$ , то

$$n_e \approx \left( A \frac{g_+}{g_a} \right)^{1/2} N^{1/2} T^{3/4} \exp\left(-\frac{I}{kT}\right). \quad (10.28)$$

В общем случае для *степени ионизации*  $\alpha = \frac{n_e}{N + n_+}$  получается квадратное уравнение

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = A \frac{g_+}{g_a} \frac{T^{3/2}}{N_0} \exp\left(-\frac{I}{kT}\right), \quad (10.29)$$

где  $N_0 = N + n_+$  – плотность ядер. Следует отметить, что электроны появляются при весьма низких по сравнению с  $I$  температурах. Равновесная ионизация достигает десятков процентов при  $kT$  в 5 – 10 раз меньших, чем потенциал ионизации.

Равновесную плотность электронов можно связать с равновесной плотностью атомов  $N_n$ , находящихся в определенном,  $n$ -м квантовом состоянии. Комбинируя уравнения Саха и Больцмана, найдем:

$$\frac{n_e n_+}{N_n} = \frac{g_+}{g_n} A T^{3/2} \exp\left(-\frac{I_n}{kT}\right), \quad (10.30)$$

где  $I_n$  – потенциал ионизации атома из  $n$ -го состояния. Соотношение (10.30) применительно к высоким уровням имеет существенно большую

силу, чем уравнения Саха и Больцмана по отдельности. Это связано с тем, что ионизация и рекомбинация, а также возбуждение атомов из основного состояния – процессы более медленные, чем процессы отрыва электронов с верхних уровней и захвата на них. Во многих реальных условиях числа электронов и высоковозбужденных атомов не успевают придти в равновесие с полным числом атомов, но между электронами в свободном и связанном на высоких уровнях состояниях равновесие успевает установиться. Уравнения Саха (10.27) и Больцмана при этом силы не имеют, а соотношение (10.30) с  $T_e$  вместо  $T$  – имеет.

## Лекция 11. ИСПУСКАНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ

*Электронны проводимости в металле • Температура вырождения •  
 Распределение Ферми • Работа выхода • Термоэлектронная  
 эмиссия • Влияние внешнего поля на работу выхода •  
 Эмиссия электронов под действием частиц •  
 Вырывание электронов из тела сильным  
 электрическим полем • Влияние  
 эмиссии на усиление тока  
 первичных электронов*

Возможность протекания постоянного тока в самостоятельном разряде обеспечивается *испусканием (эмиссией)* электронов с поверхности катода. Из металла вылетают электроны проводимости. Они являются свободными в том отношении, что не принадлежат определенным атомам и перемещаются внутри тела, как электроны в ионизированном газе. Но выйти за пределы тела, не получив достаточной для этого энергии, электроны не могут. Эту ситуацию можно трактовать так, словно они находятся в потенциальной яме (рис. 11.1).

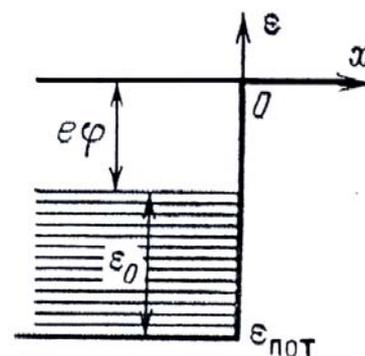


Рис. 11.1. Схема потенциальной ямы для электронов в металле

Согласно общим принципам квантовой статистики фазовое пространство координат  $\vec{r}$  и импульсов  $\vec{p}$  делится на элементарные ячейки объемом  $h^3$ . В каждой из них по принципу Паули может находиться не более двух электронов (с противоположно направленными спинами). При абсолютном нуле температуры электроны плотно заполняют в пространстве импульсов состояния с возможно более низкими величинами  $p$  так, чтобы энергия электронного газа в целом была минимальная. В элементе фазового объема  $d\vec{r}d\vec{p}$  содержится  $\frac{d\vec{r}d\vec{p}}{h^3}$  ячеек. Значит, количество электронов в  $1 \text{ см}^3$   $n_e$  связано с максимальной величиной импульса  $p_{\max}$  равенством

$$n_e = 2 \int_0^{p_{\max}} \frac{d\vec{p}}{h^3} = 2 \int_0^{p_{\max}} \frac{4\pi p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi p_{\max}^3}{3h^3}.$$

Максимальная кинетическая энергия электронов при  $T = 0$ , равная

$$\varepsilon_F = \frac{p_{\max}^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n_e}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (11.1)$$

называется *граничной энергией Ферми*, а  $\varepsilon_F/k$  – *температурой вырождения*. Если  $T \ll \varepsilon_F/k$ , электронный газ вырожден и подчиняется квантовой статистике Ферми – Дирака, при  $T \gg \varepsilon_F/k$  – классической статистике Больцмана. В обычном ионизированном газе выполняется второе условие, и поэтому для равновесного электронного газа в плазме мы пользуемся максвелловским распределением. Так, при  $p \sim 1 \text{ атм}$ ,  $T \sim 10^4 \text{ К}$ ,  $n_e \sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$ ,  $\varepsilon_F \approx 0,003 \text{ эВ}$  и  $\varepsilon_F/k \approx 35 \text{ К} \ll T$ . В металлах из-за большой плотности положение обратное. Например, в меди освобождается по одному электрону от каждого атома. В этом случае  $n_e = 8,4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ,  $\varepsilon_F = 7,0 \text{ эВ}$  и  $\varepsilon_F/k = 8,1 \cdot 10^4 \text{ К}$ , что гораздо выше температуры плавления металлов.

При произвольной температуре в одной фазовой ячейке, отвечающей энергии  $\varepsilon$ , содержится  $n_1 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}$  электронов с определенным направ-

лением спина. Не зависящая от энергии частицы константа  $\mu$  имеет смысл *химического потенциала* электронного газа. Функция распределения по скоростям, точнее, количество электронов в  $1 \text{ см}^3$  с составляющими скоростей от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$  и т.д. составляет

$$f(\vec{v})d^3\vec{v} = 2n_1 \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2m^3}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dv_x dv_y dv_z}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}. \quad (11.2)$$

Химический потенциал зависит от  $T$  и  $n_e$ . Функция  $\mu(T, n_e)$  задается условием нормировки:

$$n_e = \frac{2m^3}{(2\pi\hbar)^3} \iiint_{v_x, v_y, v_z} \frac{dv_x dv_y dv_z}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} + 1}.$$

При  $T=0$   $n_1=1$ , если  $\varepsilon < \mu$ , и  $n_1=0$ , если  $\varepsilon > \mu$  (рис. 11.2). В этом случае химический потенциал совпадает с энергией Ферми, а вырождение – полное. При повышении температуры скачки  $n_1$  и  $f$  размываются, как показано на рис. 11.2.

Обычно температуры даже сильно нагретых катодов не превышают 4000 К, так что электронный газ является вырожденным. В металле  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{кин}} + \varepsilon_{\text{пот}}$ . Потенциальная энергия электрона  $\varepsilon_{\text{пот}}$  отрицательна. Она отсчитывается от верхнего края ямы, соответствующего состоянию электрона вне металла в отсутствие внешних полей и при нулевой скорости движения. Кинетическая энергия ограничена энергией Ферми  $\varepsilon_{\text{кин}} < \varepsilon_F$  (в пренебрежении температурным раз-

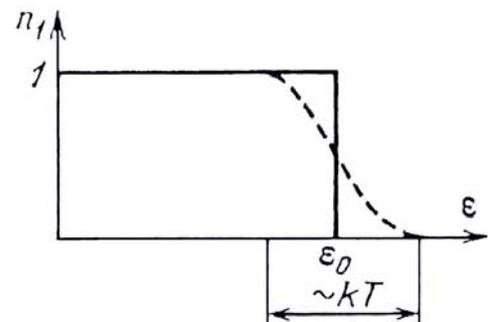


Рис. 11.2. Функция распределения электронного газа по статистике Ферми – Дирака при  $T = 0 \text{ К}$  (сплошная кривая) и при небольшой по сравнению с энергией Ферми температуре (штриховая кривая)

мытием скачка функции распределения), а полная энергия максимальной величиной  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_F + \varepsilon_{\text{пот}}$ . Электроны плотно заполняют энергетические состояния от дна ямы до  $\varepsilon_F$  (см. рис. 11.1). Очевидно, легче всего вырвать из металла самый быстрый электрон, находящийся на самом верхнем уровне. Необходимая для этого минимальная энергия  $e\varphi = |\varepsilon_{\max}| = |\varepsilon_{\text{пот}}| - \varepsilon_F$  называется *работой выхода*. Ее можно рассматривать как энергию связи электрона в металле. Работы выхода различных материалов имеют порядок нескольких электрон-вольт (табл. П8). Из чистых металлов наименьшей работой выхода обладает цезий,  $e\varphi = 1,87$  эВ, самой большой – платина, 5,32 эВ. Следует отметить, что работа выхода зависит от состояния поверхности, ее чистоты, шероховатости. У монокристаллов она меняется от грани к грани в пределах 1 эВ. Данные табл. П8 относятся к поликристаллическим материалам.

Энергию, необходимую для выхода из металла, электрон может получить в результате нагревания тела. Как следует из (11.2) и как видно из рис. 11.2, при повышении температуры появляются достаточно быстрые электроны, которые благодаря своей кинетической энергии могут преодолеть притяжение к телу. Так возникает *термоэлектронная эмиссия*. Это один из важнейших механизмов эмиссии. Он обеспечивает протекание сильного тока в дуговых разрядах и вообще имеет огромное значение для электроники, радиотехники, поскольку принцип накаливаемого катода лежит в основе работы, в частности, электронных ламп и термоэлектронных преобразователей.

В отсутствие внешнего поля поток электронов из нагретого тела меньше того, что может дать вещество при данной температуре. Вылетевшие электроны скапливаются вблизи поверхности и образуют объемный заряд, который препятствует вылету других электронов. Отрицательный объемный заряд устраняется, если приложить небольшое вытягивающее поле. Найдем *ток насыщения эмиттера*, который получается при отсутствии внешних препятствий для вылета электронов.

Допустим, что вылететь из металла может каждый электрон, который в состоянии преодолеть силу притяжения, действующую в области «стенки» потенциальной ямы. А она имеет конечную ширину порядка атомных размеров. Направим ось  $x$  перпендикулярно поверхности тела

наружу и обозначим электрический потенциал силы притяжения  $\varphi'(x)$ .  
Уравнение движения электрона в области стенки имеет вид

$$m\dot{v}_x = -e\left(-\frac{d\varphi'}{dx}\right), \quad m\dot{v}_y = 0, \quad m\dot{v}_z = 0.$$

Тангенциальные составляющие скорости электрона не меняются, а нормальная при прохождении через стенку изнутри наружу изменяется от  $v_{x1}$  до  $v_{x2}$  в соответствии с интегралом первого уравнения

$$\frac{mv_{x2}^2}{2} - \frac{mv_{x1}^2}{2} = e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi'}{dx} dx \equiv \varepsilon_{\text{пот}}.$$

Поскольку  $v_{x2}^2 \geq 0$ , выйти наружу могут только те электроны, которые внутри тела обладают составляющей скорости

$$v_x \geq v_t = \left(2 \frac{|\varepsilon_{\text{пот}}|}{m}\right)^{1/2}.$$

Поток таких электронов через поверхность равен

$$\frac{j}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \int dv_x \cdot f(v_x, v_y, v_z) \cdot v_x \text{ c}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}. \quad (11.3)$$

При вычислении этого интеграла с функцией распределения (11.2) и  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{кин}} + \varepsilon_{\text{пот}}$  заметим, что в интеграл по  $v_x$  дают вклад электроны только с большими энергиями, которые превышают  $\varepsilon_F$  по крайней мере на  $e\varphi$  (см. рис. 11.1). Обычно  $e\varphi \gg kT$ , поэтому во всей области интегрирования экспоненциальный множитель в (11.2) велик по сравнению с единицей. Кроме того, при сравнительно низких температурах вырождение сильно, и  $\mu \approx \varepsilon_{\text{max}} \approx -(|\varepsilon_{\text{пот}}| - \varepsilon_F) = -e\varphi$ . Пренебрегая единицей в знаменателе (11.2) и проводя интегрирование в (11.3), найдем электрический ток насыщения термоэлектронной эмиссии:

$$j = A_0 D T^2 \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right), \quad A_0 = \frac{4\pi m e k^2}{h^3} = 120 \frac{A}{\text{см}^2 \cdot K^2}. \quad (11.4)$$

В эту формулу сверх (11.3) введен дополнительный множитель  $D$ , который учитывает отклонение реального закона эмиссии от теоретического. Для монокристаллических эмиттеров реальный предэкспоненциальный множитель  $A_1 = A_0 D$  заключен в пределах 15 – 300.

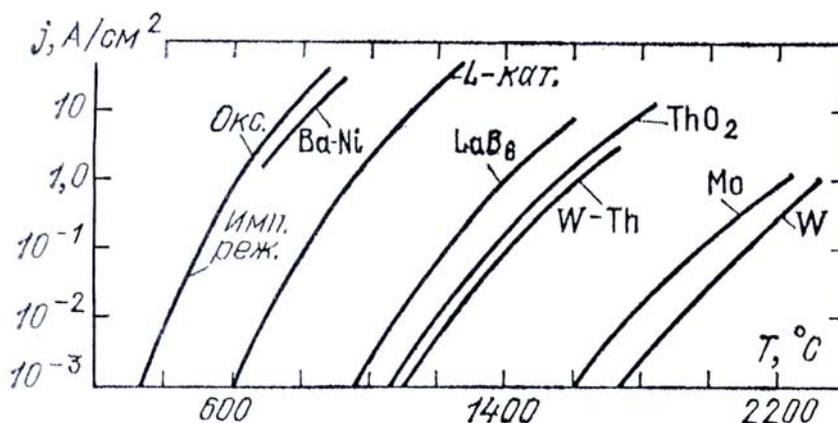


Рис. 11.3. Зависимость плотности тока термоэлектронной эмиссии от температуры для нескольких материалов

Электроны вылетают из металла со средней кинетической энергией

$$\bar{\epsilon}_{\text{кин}} = \left( \frac{j}{e} \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{v_t}^{\infty} \epsilon_{\text{кин}} v_x f dv_x. \quad (11.5)$$

Вычисляя интеграл таким же образом, как (11.3), найдем:

$$\bar{\epsilon}_{\text{кин}} = \frac{m}{2} \left( \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \right) = kT + \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} = 2kT. \quad (11.6)$$

Ввиду большого практического значения были разработаны многие способы увеличения эмиссионной способности *термокатодов*. *Торированный вольфрам* (вольфрам, покрытый тонким слоем тория) дает при  $T = 1500$  К на пять порядков большую эмиссию, чем чистый вольфрам. Очень высокой термоэлектронной активностью обладают окислы щелочноземельных элементов. На этой основе были созданы *оксидные катоды* (никель или вольфрам, покрытые слоем из окислов бария, кальция, стронция). Многими ценными свойствами обладает оксидно-ториевый катод (тугоплавкий металл, покрытый слоем  $\text{ThO}_2$ ). Для него

$\phi = 2,5 \text{ В}$ ,  $A_1 \approx 3 - 8 \text{ А}/(\text{см}^2 \cdot \text{К}^2)$ , и при рабочей температуре  $1600 \text{ К}$  он дает ток  $4 \text{ А}/\text{см}^2$ . Рис. 11.3 показывает, насколько усовершенствованные, сложные термокатоды эффективнее чистых тугоплавких металлов, т.е. дают тот же ток при более низкой температуре.

Из опыта известно, что эффект насыщения является лишь некоторым приближением к реальности. На самом деле при увеличении внешнего вытягивающего электроны поля ток эмиссии все время возрастает. Это объясняется снижением работы выхода под действием поля и носит название *эффект Шоттки*. Как уже говорилось, энергию связи электрона в металле можно качественно описать как работу против силы электрического изображения (рис. 11.4). Если имеется внешнее вытягивающее поле  $E$ , то на расстоянии  $r$  от поверхности на электрон действует суммарная сила  $F = e^2/4r^2 - eE$ . Начиная с расстояния  $r_k = (e/4E)^{1/2}$ , где  $F = 0$ , и дальше, внешнее вытягивающее воздействие превышает силу притяжения к поверхности. Следовательно, чтобы выбраться из тела, электрону достаточно преодолеть лишь расстояние  $r_k$ , т.е. преодолеть результирующую энергию притяжения

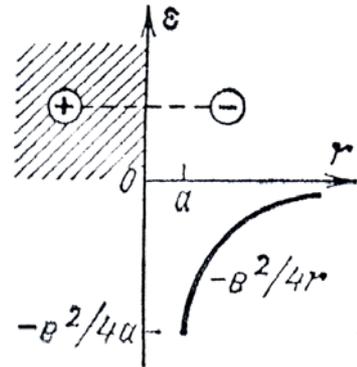


Рис. 11.4. К вопросу о «силе изображения»

$$\int_a^{r_k} F dr = \int_a^{r_k} \left( \frac{e^2}{4r^2} - eE \right) dr = \frac{e^2}{4a} - e^{3/2} E^{1/2}.$$

Снижение энергии связи и работы выхода по сравнению со значением  $e^2/4a$ , соответствующим отсутствию поля, составляет

$$e\Delta\phi = e^{3/2} E^{1/2} = 3,8 \cdot 10^{-4} [E(\text{В}/\text{см})]^{1/2} \text{ эВ}. \quad (11.7)$$

Поскольку  $e\phi/kT \gg 1$  и стоит в экспоненте, даже небольшое снижение  $\phi$  может оказать заметное влияние на термоэмиссию. Так происходит до полей  $E \sim 3 \cdot 10^6 \text{ В}/\text{см}$ , когда начинается непосредственное вырывание электронов полем.

Электронная эмиссия с *холодного* катода обеспечивает пробой разрядных промежутков и протекание небольших постоянных токов, которые не в состоянии разогреть катод до температур, достаточных для термоэлектронной эмиссии. В частности, так происходит в тлеющем разряде. Вырывание электронов с поверхности твердого тела может происходить в результате трех основных процессов:

- *ионно-электронной эмиссии* (удары положительных ионов);
- *вторичной электронной эмиссии* (удары возбужденных атомов и электронов);
- *внешнего фотоэффекта* (облучение световыми квантами).

Ранее отмечалось, что кинетическая энергия тяжелых частиц малоэффективна в отношении возбуждения или ионизации атомов. Такие процессы хорошо идут, когда сравнимы скорости частицы и электронов в атоме. То же относится и к вырыванию электронов из твердого тела, где электронные скорости такого же порядка, как и в атомах.

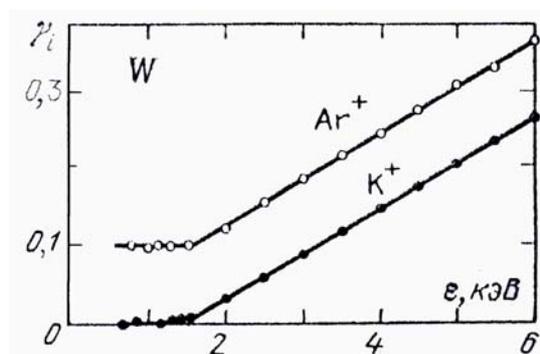


Рис. 11.5. Коэффициент ионно-электронной эмиссии из вольфрама в зависимости от энергии ионов  $Ar^+$  и  $K^+$

На рис. 11.5 показаны результаты исследования бомбардировки вольфрама ускоренными ионами калия. На нем представлен коэффициент вторичной эмиссии  $\gamma_i$  – количество выбитых электронов, приходящихся на один ударяющий ион. Видно, что эмиссия начинается только при энергии ионов  $\epsilon_i > 1,5$  кэВ. Потом она неуклонно растет с  $\epsilon_i$ . Но ионов столь больших энергий в разряде практически не бывает.

Между тем вырывание электронов ионами – важный механизм эмиссии в стационарных условиях с холодным катодом. Очень показателен в этом отношении тот же опыт, но с ионами аргона. Результаты его также представлены на рис. 11.5. Нарастание  $\gamma_i$  при  $\epsilon_i > 1,5$  кэВ, очень похожее на то, что происходит в случае ионов  $K^+$ , начинается не от нулевого  $\gamma_i$ , а от довольно значительной величины  $\gamma_i \approx 0,1$ , которая при  $\epsilon_i < 1,5$  кэВ сохраняется почти неизменной.

Механизм этого эффекта, который в подавляющем большинстве разрядных условий и обеспечивает электронную эмиссию при взаимодействии ионов и атомов с поверхностью, поясняется рис. 11.6. Если энергия связи электрона с ионом, т.е. потенциал ионизации образующегося атома  $I$ , превышает удвоенную работу выхода, то ион, приблизившись к поверхности, отнимает у тела электрон, рекомбинирует, а выделяющаяся при этом энергия  $I - e\phi > e\phi$  затрачивается на освобождение из тела еще одного электрона. Разность  $I - 2e\phi$  сообщается ему в виде кинетической энергии. При условии  $e\phi < I < 2e\phi$  происходит рекомбинация иона, не сопровождаемая эмиссией.

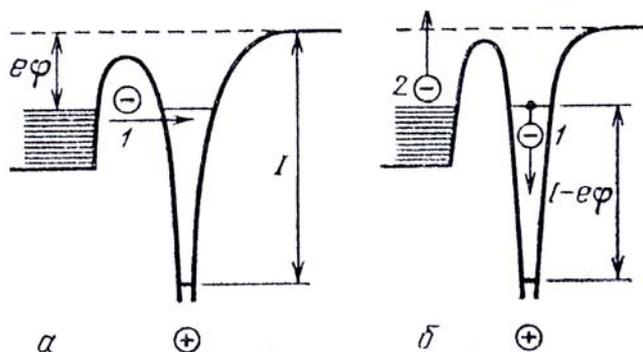


Рис. 11.6. Схема взаимодействия электрона с металлом и ионом, иллюстрирующая процесс потенциального вырывания:  
 а – электрон из металла переходит на возбужденный уровень атома;  
 б – атом переходит в основное состояние, а выделяющаяся энергия передается второму электрону металла

Описанный механизм вырывания называют *потенциальным*. На рис. 11.7 показаны коэффициенты потенциальной эмиссии электронов из вольфрама под действием ионов инертных газов. Коэффициенты  $\gamma_i$ , соответствующие небольшим энергиям ионов, возрастают с ростом разности  $I - 2e\phi$ . Данные ряда измерений с различными комбинациями иона и металла с точностью до 50% укладываются в эмпирическую формулу

$$\gamma_i \approx 0,016 \{ (I - 2e\phi) [\text{эВ}] \}. \quad (11.8)$$

Если энергия возбуждения атома  $E^*$  превышает работу выхода, то возможно *потенциальное вырывание электронов возбужденными атомами*. Обычно в эмиссии участвуют метастабильные атомы, поскольку они долго сохраняют состояние возбуждения и, следовательно, чаще сталкиваются с поверхностью. Приведем некоторые примеры. Коэффициент эмиссии из никеля под действием метастабильных атомов ртути имеет порядок  $\gamma_m \sim 10^{-2}$  на один акт взаимодействия. Атом  $\text{He}(2^3S)$  выбивает из Pt

0,24 электрона на атом,  $\text{He}(2^1S) - 0,4$ ; Ar из Cs – 0,4 электрона. Разность энергий  $E^* - e\phi$  сообщается освобожденному из металла электрону. Возможен также процесс выбивания электронов энергичными атомами, которые образуются из достаточно быстрых ионов в результате перезарядки.

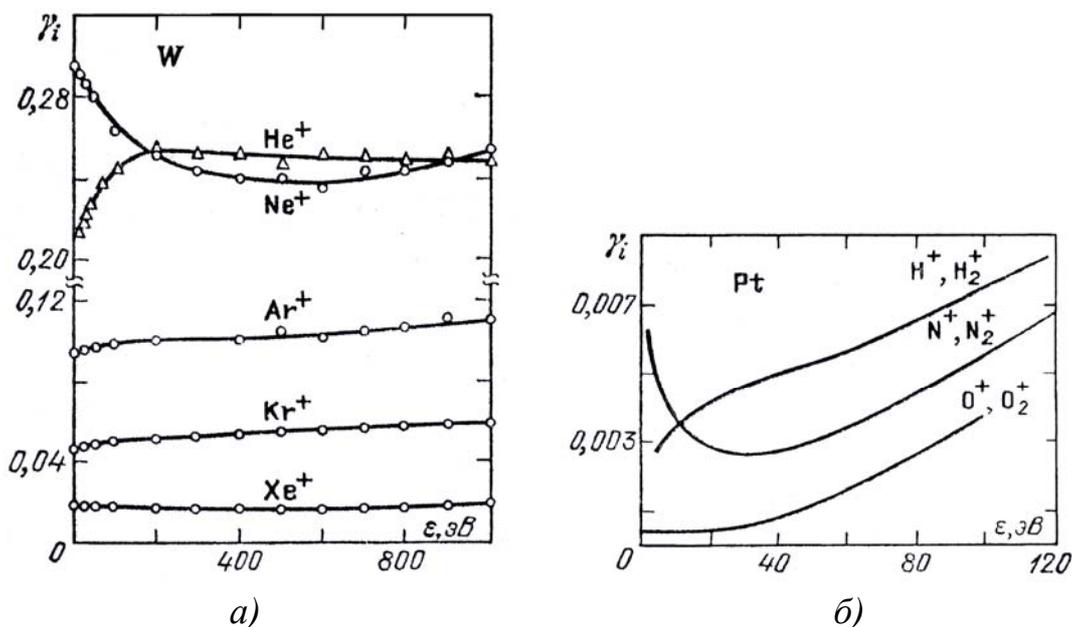


Рис. 11.7. Коэффициент ионно-электронной эмиссии: а – из вольфрама в зависимости от энергии ионов инертных газов; б – для ионов водорода, азота и кислорода при бомбардировке платины

Рассмотрим теперь внешний фотоэффект. Как известно, длинноволновая граница фотоэффекта зависит от работы выхода материала. Электрон может быть вырван только квантом с энергией  $\hbar\omega \geq e\phi$ , чем и определяется максимальная длина волны излучения. Работы выхода большинства веществ лежат в видимой (1,5 – 3,1 эВ, 8000 – 4000 Å) и ближней ультрафиолетовой (3,1 – 5,6 эВ, 4000 – 2200 Å) частях спектра. Но на опыте исследовано действие и вакуумного ультрафиолета (6,2 – 12 эВ, 2000 – 1000 Å), и более жесткого излучения. В разрядных условиях встречаются всевозможные кванты, в том числе и превышающие потенциалы ионизации атомов  $I \approx 10 - 20$  эВ, которые рождаются при фотозахватах электронов ионами. Эффективность излучения в отношении фотоэффекта характеризуется *квантовым выходом*  $\gamma_v$ , который по смыслу эквивалентен ко-

эффективности эмиссии  $\gamma$  – это есть число испущенных электронов на один падающий квант. В видимой и ближней ультрафиолетовой областях спектра, не слишком близко к красной границе,  $\gamma_v$  имеет порядок  $10^{-3}$ , в дальнем ультрафиолете  $10^{-2} - 10^{-1}$ . В первых двух областях выход очень чувствителен к качеству и чистоте поверхности, в третьей чувствительность меньше. Меньшую роль играет там и отражение света от поверхности, которое в первых двух областях существенно снижает квантовый выход. Фотоны и метастабильные атомы дают вклад в эмиссию с катода в условиях тлеющего разряда, а при пробое фотоэмиссия часто играет определяющую роль.

Что же касается вторичной электронной эмиссии, то в разрядах постоянного тока (и высокочастотных при не слишком низких давлениях) этот процесс роли не играет. Ведь в постоянном поле электроны ударяются об анод, а не о катод, тогда как важна эмиссия именно с катода. Даже если из анода выбиваются электроны, они возвращаются обратно под действием поля. Но при пробое высокого вакуума высокочастотными полями электрон совершает колебания от стенки к стенке, почти не испытывая столкновений. Размножение электронов и в конечном счете пробой остаточного газа происходят в основном за счет выбивания вторичных электронов из стенок ударами сильно разогнанных электронов. Коэффициент эмиссии  $\gamma_e$  – число вырванных электронов на один падающий – в данном случае также имеет смысл коэффициента размножения. Характер зависимости  $\gamma_e$  от энергии ударяющего электрона и порядки величин в общем для всех веществ примерно одинаковы.

Так, для металлов максимум  $\gamma_e$  лежит в диапазоне энергий падающего электрона 0,2 – 0,8 кэВ, достигая значения 0,6 (Be) для левого края диапазона и 1,8 (Pt) для правого.

Электроны выбиваются электронным ударом и с поверхности диэлектриков. Для стекол максимальные коэффициенты размножения  $\gamma_e$  заключены в диапазоне от 2 до 3, причем максимумы лежат при  $\varepsilon \sim 300 - 400$  эВ. Коэффициент  $\gamma_e$  меньше единицы при  $\varepsilon < 40 - 60$  эВ. При таких энергиях падающих электронов поверхность диэлектрика заряжается отрицательно, так как падающие электроны «прилипают» к ней. Когда  $\gamma_e > 1$ , поверхность заряжается положительно.

Рассмотрим теперь влияние электронной эмиссии на усиление тока первичных электронов. Пусть в результате облучения источником ультрафиолетового излучения с катода выходит стационарный ток первичных электронов  $i_o$ . Пока нет вторичной эмиссии, на анод поступает экспоненциально усиленный электронный ток  $i = i_o e^{\alpha d}$  ( $d$  – расстояние между электродами). Он и идет во внешней цепи, потому что ионного тока у анода нет: ионы с анода не вылетают. Такой же ток в стационарном режиме проходит и через катод, складываясь из электронного и ионного. В самом деле, один вышедший с катода электрон рождает в промежутке  $e^{\alpha d} - 1$  положительных ионов, и все они приходят на катод. Стало быть, ток на катоде

$$i_{\text{эл}} + i_{\text{ион}} = i_o + i_o (e^{\alpha d} - 1) = i_o e^{\alpha d} = i.$$

При повышении поля размножение быстро возрастает и на величине тока начинает сказываться вторичная эмиссия с катода под действием рожденных в разряде положительных ионов, фотонов, возбужденных атомов. Положим для простоты, что действуют одни лишь положительные ионы. Каждый из  $e^{\alpha d} - 1$  ионов, рожденных от одного электрона, вылетевшего с катода, попадая на катод, вырывает  $\gamma_i$  электронов. Этот ток вторичных электронов добавляется к току первичных  $i_o$  от внешнего источника. Суммарный электронный ток с катода  $i_K$  определяется, следовательно, из уравнения  $i_K = i_o + \gamma_i i_K (e^{\alpha d} - 1)$ . На анод и во внешнюю цепь поступает ток (индекс у  $\gamma$  опускаем)

$$i = i_K e^{\alpha d} = i_o \frac{e^{\alpha d}}{1 - \gamma (e^{\alpha d} - 1)}. \quad (11.9)$$

Формула подобного типа была впервые выведена Таунсендом (1902 г.) для объяснения процесса зажигания самостоятельного разряда. Благодаря вторичной эмиссии знаменатель в формуле (11.9), не отличающийся от единицы при небольших коэффициентах усиления  $\alpha d$ , по мере роста  $\alpha d$  приближается к нулю. Обращение знаменателя в нуль означает осуществление пробоя и зажигание самостоятельного разряда: формально « $i = 0/0 = \text{const}$ » при  $i_o = 0$ . Достичь этого на опыте можно, повышая напряжение на электродах.

Постоянное электрическое поле  $E$ , направленное так, чтобы ускорять электроны от поверхности тела, не только облегчает термоэлектронную эмиссию, но может и непосредственным образом вырывать электроны из холодного металла. Наложение внешнего поля меняет распределение потенциальной энергии электрона в области границы тела. К исходной энергии  $\varepsilon_{\text{пот}}(x)$ , характеризующей форму потенциальной ямы, вне металла добавляется слагаемое  $-eEx$ , где  $x$  отсчитывается от границы металла наружу. Внутри «идеального» проводника, каковым можно считать металл, сильное поле не проникает. Если считать исходную яму прямоугольной, как на рис. 11.1, суммарная энергия примет вид, изображенный на рис. 11.8, *a*. Потенциальная стенка ямы превращается в *потенциальный барьер* конечной ширины.

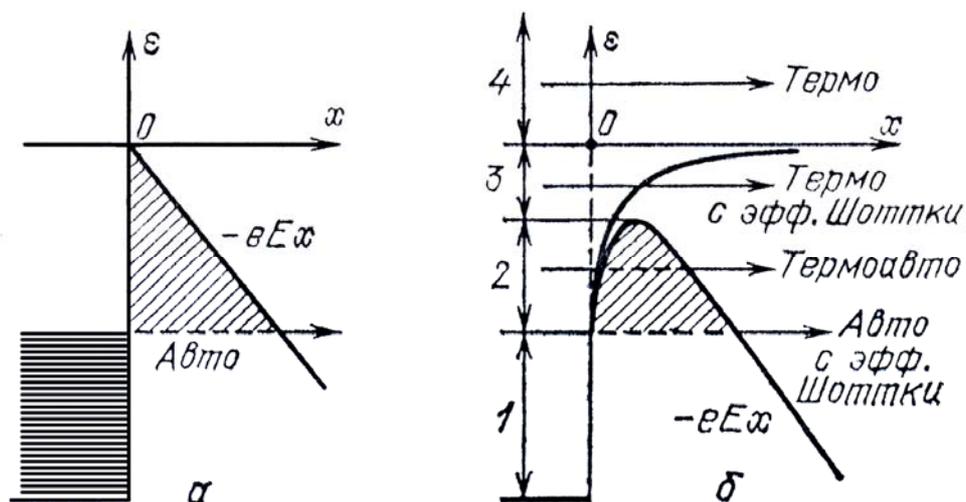


Рис. 11.8. Потенциальная энергия электрона при наложении на металл внешнего поля: *a* – без учета силы изображения; *б* – с учетом силы изображения

По квантовой механике существует вероятность *туннельного* проникновения частицы сквозь барьер без изменения ее энергии, как показано на рис. 11.8, *a*. Эта вероятность определяется площадью барьера над линией перехода и тем больше, чем выше энергия электрона. При  $T=0$  наибольшей вероятностью обладают электроны с максимальной энергией, соответствующей границе Ферми,  $\varepsilon_{\text{кин}} = \varepsilon_F$ . Величина электрического тока

автоэлектронной эмиссии, как называют этот эффект, для барьера, изображенного на рис. 11.8, а, дается соотношением

$$j = \frac{e^2}{2\pi h} \frac{\varepsilon_F^{1/2} E^2}{|\varepsilon_{\text{пот}}| (e\varphi)^{1/2}} \exp \left[ -\frac{8\pi(2m)^{1/2} (e\varphi)^{3/2}}{3hE} \right]. \quad (11.10)$$

Под знаком экспоненты обычно стоит большое число, поэтому ток  $j$  чрезвычайно чувствителен к величинам  $\varphi$  и  $E$ . Очевидно, что в этих условиях должно существенным образом сказаться понижение работы выхода вследствие эффекта Шоттки.

С учетом протяженного характера действия силы изображения «стенка» ямы не является вертикальной. На каком-то удалении  $x$  от границы металла, где имеет смысл говорить о потенциале силы изображения, потенциальная энергия в поле этой силы равняется  $-e^2/4x$ . Около самой «границы» на расстоянии порядка размеров атома поле слишком неоднородно, чтобы можно было описывать его силой изображения. Реальную зависимость  $\varepsilon_{\text{пот}}(x)$  следует представить не скачком, а так, как показано на рис. 11.8, б. Там же изображена результирующая потенциальная энергия при наложении внешнего поля. Остроконечная вершина барьера (рис. 11.8, а) сглаживается, а высота и площадь уменьшаются. Соответственно возрастает вероятность проникновения через барьер.

Когда к высокотемпературной поверхности металла приложено очень сильное вытягивающее поле, оба фактора – температура и поле – оказывают влияние на вылет электронов, причем дело не ограничивается одним лишь понижением работы выхода для термоэлектронной эмиссии. На рис. 11.8, б спектр электронов в металле разбит на четыре группы. По мере повышения энергии над уровнем Ферми количество электронов резко убывает в соответствии с функцией распределения (11.2). Электроны группы 1 испытывают обычную автоэлектронную эмиссию, как и при нулевой температуре. Электроны группы 4 вылетали бы путем обычной термоэлектронной эмиссии даже в отсутствие поля. Электроны группы 3 за счет тепловой энергии перепрыгивают через барьер, возникший в результате действия поля. В этом проявляется эффект Шоттки, который имеет классическую природу. Что же касается электронов 2-й группы, то они имеют повышенную вероятность совершить туннельный переход, так как

благодаря высокой температуре обладают тепловой энергией. Барьер для них уже и ниже, чем для электронов группы 1. Этот процесс называется *термоавтоэлектронной эмиссией*.

## Лекция 12. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ

*Функция распределения • Формулировка кинетического уравнения • Приближение для угловой зависимости • Уравнение для энергетического спектра электронов*

В предыдущих лекциях мы рассматривали поведение электронов в присутствии постоянного электрического поля в рамках *элементарной теории*. Все внимание в ней сосредоточено на одном отдельном электро-не, а при переходе к макроскопическим величинам считается, что все электроны ведут себя одинаково. Таким образом, можно приближенно вычислить много важных характеристик ионизированного газа: электропроводность и диэлектрическую проницаемость, коэффициент поглощения электромагнитных волн, нагревание электронов в поле. Благодаря этому можно изучать многие конкретные процессы, в частности, разряды разных типов.

Однако этот метод не позволяет анализировать более тонкие и сложные процессы, такие как, например, ионизация и возбуждение атомов электронным ударом, возбуждение колебаний молекул в молекулярных лазерах. В таких случаях необходимо знание *функции распределения электронов*. Лишь с ее помощью можно детально описывать всевозможные явления, возникающие при взаимодействии электронов с атомами, молекулами и даже с самим полем. Сразу отметим, что максвелловское распределение соответствует частному случаю термодинамического равновесия и для названного выше анализа является слишком грубым приближением.

Напомним определение функции распределения электронов по скоростям  $f(t, \vec{r}, \vec{v})$ . Величина  $f d\vec{r} d\vec{v}$  есть количество электронов, находящихся в момент  $t$  в элементе объема  $d\vec{r} \equiv dx dy dz$  около точки  $\vec{r}$  и обла-

дающих составляющими вектора скорости от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ , от  $v_y$  до  $v_y + dv_y$  и от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$ . При этом  $d\vec{v} \equiv dv_x dv_y dv_z$ . Интеграл от  $f$

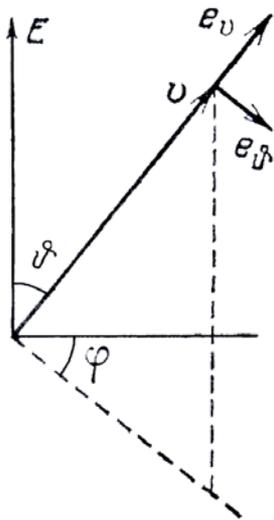


Рис. 12.1. Вектор скорости в сферических координатах

по всем скоростям равен плотности электронов  $n_e(t, \vec{r})$ . Поскольку в пространстве имеется выделенное направление электрического вектора  $\vec{E}$ , скорость целесообразно выражать не в декартовых, а в сферических координатах. Вектор  $\vec{v}$  характеризуется модулем  $v$ , углом наклона  $\vartheta$  к полярной оси  $\vec{E}$  и азимутальным углом  $\varphi$  (рис. 12.1), причем  $d\vec{v} = v^2 dv d\Omega$ . Здесь  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  — элемент телесного угла около направления  $\vec{v}$ .

От функции  $f(\vec{v})$  легко перейти к функциям распределения по абсолютным значениям скорости  $F(v)$  и по энергиям  $w(\varepsilon)$

$$w(\varepsilon) d\varepsilon = F(v) dv = v^2 dv \int f(\vec{v}) d\Omega. \quad (12.1)$$

Они также нормированы на плотность электронов  $n_e(t, \vec{r})$ . Связь между ними вытекает из равенства  $\varepsilon = mv^2/2$

$$w(\varepsilon) = F(v) / m v, \quad F(v) = w(\varepsilon) \sqrt{2m\varepsilon}. \quad (12.2)$$

Зная функцию распределения, можно, в принципе, вычислить любую величину, относящуюся к электронному газу. Например, частота ионизации выражается формулой (10.21). Аналогичными формулами, но со своими сечениями выражаются частоты любых неупругих столкновений, любых реакций. Плотность полного электрического тока, переносимого электронами, есть

$$\vec{j} = -e \int \vec{v} f(\vec{v}) d\vec{v}. \quad (12.3)$$

Перейдем теперь к выводу кинетического уравнения для электронов. Оно представляет собой частный случай общего кинетического уравнения

Больцмана для функции распределения частиц в газе и по своему смыслу выражает баланс числа частиц в точке фазового пространства.

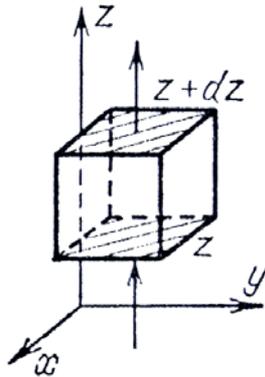


Рис. 12.2. К выводу уравнения баланса числа частиц

Выделим около фиксированной точки фазового пространства  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  элементарный объем «кубической» формы. Поскольку нарисовать *шестимерный куб* невозможно, изобразим обычный трехмерный (рис. 12.2), и, призвав на помощь воображение, будем представлять шестимерный с координатами одной из вершин  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$ . В момент  $t$  в кубическом объеме  $d\Gamma = dxdydzdv_xdv_ydv_z$  находится  $f d\Gamma$  частиц, так что функция распределения  $f$  имеет смысл *плотности* в фазовом пространстве.

Даже в отсутствие столкновений число частиц в кубе меняется с течением времени. Обладая скоростью  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ , частица меняет свое положение  $\vec{r}$ , а подвергаясь действию силы  $\vec{F}$ , испытывает ускорение  $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$  и меняет свою скорость  $\vec{v}$ . Частица движется в фазовом пространстве, и поскольку плотность  $f$  меняется от точки к точке, через одну «грань» куба в него, вообще говоря, втекает частиц больше или меньше, чем вытекает в противоположную. Так происходит накопление или убыль частиц в объеме. Столкновения приводят к тому же. Одни частицы покидают объем вследствие резкого изменения вектора скорости или гибели, другие попадают в него после столкновения или в результате рождения.

Через определенную грань куба (а всего их 12), например нижнюю заштрихованную на рис. 12.2, в 1 с в объем  $d\Gamma$  втекает

$$(fv_z)_z dxdydv_xdv_ydv_z \text{ частиц.}$$

Индекс  $z$  у  $z$ -составляющей плотности потока  $fv_z$  означает, что значение потока берется в точке  $z$  оси, «перпендикулярной» грани. Произведение пяти дифференциалов – это площадь грани (грань *пятимерна*). Через противоположную грань (верхнюю заштрихованную) в 1 с вытекает

$$(fv_z)_{z+dz} dxdydv_xdv_ydv_z \text{ частиц.}$$

Разница между втеканием и вытеканием

$$\left[ (fv_z)_z - (fv_z)_{z+dz} \right] dx dy dv_x dv_y dv_z = - \left[ \frac{\partial (fv_z)}{\partial z} \right] d\Gamma$$

дает свой вклад в скорость накопления частиц в кубе  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) d\Gamma$ . Аналогичным образом поступаем и с остальными пятью парами граней.

Что касается столкновений, то их вклад в скорость изменения числа частиц в объеме  $d\Gamma$  пропорционален самому объему. Обозначим этот вклад как  $\left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{ст}} d\Gamma$ . Собирая все члены и сокращая на общий множитель  $d\Gamma$ , получим уравнение баланса числа частиц:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (fv_x) + \dots + \frac{\partial}{\partial v_x} (fa_x) + \dots \right] = \left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{ст}}. \quad (12.4)$$

Оно вполне аналогично обычному уравнению непрерывности при наличии источников, роль которых играют столкновения. В прямоугольных скобках стоит “дивергенция плотности потока”.

Применим полученный результат к электронам в поле. Не касаясь случая сильных магнитных полей и учитывая, что в полях электромагнитных волн лоренцева сила обычно пренебрежимо мала по сравнению с электрической, будем считать  $\vec{F}$  равной  $-e\vec{E}$ . В этом случае общее уравнение баланса для функции распределения электронов будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \nabla f - \frac{e\vec{E}}{m} \nabla_v f = \left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{ст}}, \quad (12.5)$$

где символом  $\nabla_v$  обозначен градиент в пространстве скоростей. Раскроем его теперь в сферических координатах

$$\nabla_v \equiv \vec{e}_v \frac{\partial}{\partial v} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{v \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

где  $\vec{e}_v, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$  – единичные векторы направлений. Будем рассматривать только однородные поля. Для электромагнитных волн это приближение оправдано тем, что амплитуды колебаний электронов обычно малы по сравнению с длинами волн. В однородном поле зависимость  $f$  от пространственных координат может быть связана лишь с присутствием стенок

и диффузионных потоков, вызванных градиентами. Чтобы лучше понять нашу основную задачу – выяснение влияний поля и столкновений на функцию распределения – положим, что все в пространстве однородно. Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{eE}{m} \left[ \cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\sin^2 \vartheta}{v} \frac{\partial f}{\partial (\cos \vartheta)} \right] = \left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{ст}}. \quad (12.6)$$

От угла  $\vartheta$  функция распределения не зависит, так как  $\vec{E}$  – ось симметрии.

Будем считать газ слабоионизированным и пренебрегать электрон-электронными и электрон-ионными столкновениями, учитывая только столкновения с нейтральными атомами. Это допущение облегчает задачу решения кинетического уравнения, так как делает его *линейным*. Обычное уравнение Больцмана для газа нелинейно, поскольку в его правую часть входят члены, описывающие столкновения частиц исследуемого сорта друг с другом. В эти члены, естественно, входят произведения функций распределения сталкивающихся частиц. В нашем же случае электроны сталкиваются с посторонними частицами – тяжелыми «покоящимися» атомами, у которых, как мы считаем, «нет» распределения. Вклады столкновений каждого рода в изменение функции распределения просто суммируются. Разделим все столкновения на *упругие* и *неупругие*

$$\left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{ст}} = \left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{упр}} + \left( \frac{df}{dt} \right)_{\text{неупр}} = I(f) + Q(f). \quad (12.7)$$

К группе неупругих столкновений помимо процессов возбуждения и ионизации атомов и молекул отнесем рождение новых электронов при ионизации и возможные процессы их исчезновения. Неупругие столкновения играют большую роль в формировании *энергетического спектра* электронов, но случаются они гораздо реже, чем упругие и поэтому практически не влияют на взаимодействие электронов с полем и на изменения скорости и энергии электронов под действием поля. Неупругие процессы не влияют, следовательно, на установление *асимметричной* части функции распределения, которая связана с направленным действием поля и частыми упругими столкновениями. Поэтому мы пока не будем раскрывать второе слагаемое в правой части (12.7) и сделаем это лишь после того, как перейдем от функции распределения по векторам скоростей к распределению по энергии электронов.

Первое слагаемое, стоящее в правой части соотношения (12.7) и описывающее действие упругих столкновений, называется *интегралом столкновений*. Далее будем считать атомы покоящимися и, кроме того, пренебрежем величинами порядка  $m/M$ , полагая  $M = \infty$ . В этом приближении абсолютная величина скорости движения электрона  $v$  и его энергия  $\varepsilon$  при рассеянии в точности сохраняются. В дальнейшем, когда мы выведем окончательное уравнение для спектра электронов, мы учтем упругие потери. При помощи простого физического рассуждения мы добавим к уравнению дополнительный член упругих потерь, причем этот результат будет точным. Между тем, если учитывать изменение  $v$  при рассеянии с самого начала, то это не слишком существенное уточнение заметно усложнит вывод интеграла столкновений.

Интеграл столкновений  $I[f(\vec{v})]$  учитывает изменение числа электронов с данным вектором скорости  $\vec{v}$  вследствие ухода электронов в другие точки фазового пространства с другим вектором  $\vec{v}'$  в результате рассеяния на атомах, а также вследствие прихода из всех других точек  $\vec{v}'$  в  $\vec{v}$ . Поскольку величина скорости согласно нашему допущению не меняется, вектор  $\vec{v}$  достаточно характеризовать единичным вектором направления  $\vec{\Omega}$ . Имея в виду, что все функции содержат еще в качестве аргумента одно и то же абсолютное значение скорости  $v$ , будем, например, вместо  $f(\vec{v}) = f(v, \vec{\Omega})$  писать просто  $f(\vec{\Omega})$ . Из данного телесного угла  $d\Omega$  около рассматриваемого направления скорости  $\vec{\Omega}$  в 1 с вследствие рассеяния уходит  $f(\vec{\Omega})d\Omega v_e(v)$  электронов. Уходят они во все другие возможные направления  $\vec{\Omega}'$ . Пусть  $q(v, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}')d\Omega$  – вероятность того, что при столкновении электрон, летевший в направлении  $\vec{\Omega}$ , приобретет направление  $\vec{\Omega}'$  в интервале  $d\Omega'$ . Поскольку какое-либо направление электрон при рассеянии непременно приобретает, то

$$\int q(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')d\Omega = 1.$$

Число уходящих электронов можно подробно расписать в виде

$$f(\vec{\Omega})d\Omega v_c = v_c \int_{\Omega'} f(\vec{\Omega}')d\Omega' q(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')d\Omega.$$

Из других направлений  $\vec{\Omega}'$  в данное  $\vec{\Omega}$  в тот же интервал в 1 с приходит  $v_c \int_{\Omega'} f(\vec{\Omega}') d\Omega' q(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) d\Omega$  электронов. Разность между приходом и уходом и дает нам  $I[f(\vec{\Omega})] d\Omega$ .

Прежде чем выписывать разность, отметим, что вероятность рассеяния из одного направления в другое зависит не от самих направлений, а от угла между ними – угла рассеяния  $\theta$  (рис. 12.3). Поэтому  $q(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = q(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = q(\theta)$ , и вероятность можно интегрировать как по конечным  $\vec{\Omega}'$ , так и по начальным  $\vec{\Omega}$  направлениям. Тогда, сокращая на дифференциал  $d\Omega$ , по которому не ведется интегрирования, получим окончательно

$$I(f) = v_c(v) \int_{\Omega'} [f(\vec{\Omega}') - f(\vec{\Omega})] q(\theta) d\Omega'. \quad (12.8)$$

Интегрирование здесь ведется по всем направлениям  $\vec{\Omega}'$  при фиксированном  $\vec{\Omega}$ . Уравнение (12.6) с правой частью (12.7), в которой интеграл столкновений  $I$  дается формулой (12.8), а член неупругих столкновений  $Q$  будет раскрыт ниже, представляет собой искомое *кинетическое уравнение*.

Кинетическое уравнение, будучи интегро-дифференциальным по углу  $\vartheta$ , в математическом отношении очень сложно. Причиной, по которой функция распределения зависит от направления скорости, т.е. от  $\vartheta$ , является поле. В его отсутствие распределение было бы изотропным. Ускоряя отрицательные заряды в направлении обратном  $\vec{E}$ , поле создает избыток электронов, движущихся в этом направлении, и недостаток – в противоположном.

Допустим, что поле не очень сильное и вызванная им *анизотропия* функции распределения невелика. Учтем ее в виде поправки к основной, *симметричной* части функции. Если совершать эту операцию математически строго, следует представить угловую зависимость  $f(t, v, \vartheta)$  в виде разложения в ряд по функциям, наилучшим образом описывающим все усложняющуюся по мере уточнения асимметрию  $f(\vartheta)$ . Для разложения применяются только ортонормированные функции. Для угловой зависимости

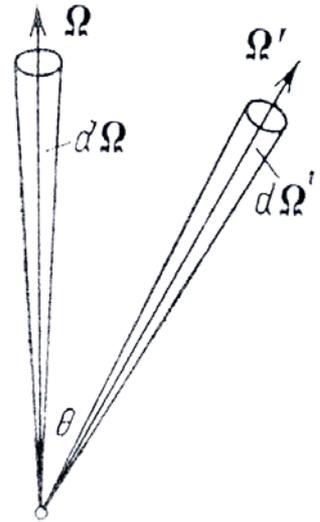


Рис. 12.3. Схема рассеяния на угол  $\theta$

сти таковыми являются полиномы Лежандра:  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = \cos \vartheta$  и т.д. В порядке приближения ограничимся первыми двумя членами разложения

$$f(t, \nu, \vartheta) = f_0(t, \nu) + \cos \vartheta \cdot f_1(t, \nu), \quad (12.9)$$

где  $f_0$  и  $f_1$  – новые искомые функции, для которых необходимо составить уравнения.

Эти функции имеют определенный физический смысл. Первой из них *симметричной* частью определяется *энергетический спектр* электронов. Согласно (12.1)

$$w(\varepsilon) d\varepsilon = F(\nu) d\nu = 4\pi\nu^2 f_0(\nu) d\nu. \quad (12.10)$$

*Асимметричная* часть  $\cos \vartheta \cdot f_1$  определяет *электрический ток*. Вследствие осевой симметрии  $f(\vec{\nu})$  ток направлен вдоль поля. Величина его по формулам (12.3) и (12.9) есть

$$j_t = -e \iint \nu \cos^2 \vartheta \cdot f_1 2\pi\nu^2 d\nu \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{4\pi}{3} e \int \nu^3 f_1 d\nu. \quad (12.11)$$

Выведем теперь уравнения для функций  $f_0, f_1$ . Для этого воспользуемся методом «моментов». Исходное уравнение для  $f$  умножается на полином Лежандра и интегрируется по углам с учетом свойств полиномов. То есть, один раз проинтегрировать уравнение (12.6) по телесному углу  $d\Omega$ , так как  $P_0 = 1$ , а второй раз – умножить (12.6) на  $P_1 = \cos \vartheta$  и снова проинтегрировать. В результате первого интегрирования (точнее – усреднения, т. е. операции  $\int d\Omega / 4\pi$  с учетом того, что  $\overline{\cos \vartheta} = 0$ ,  $\overline{\cos^2 \vartheta} = 1/3$ ,  $\overline{\sin^2 \vartheta} = 2/3$ ) найдем

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{eE}{m} \left( \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \nu} + \frac{2f_1}{3\nu} \right) = Q(f_0).$$

Интеграл  $\int I d\Omega$  в правой части автоматически обращается в нуль. Он представляет собой изменение числа электронов, движущихся во всех направлениях в результате упругих столкновений. Но упругие столкновения не меняют число электронов. Слагаемое неупругих столкновений линейно по  $f$ , от направления скорости не зависит, а определяется только энергетическим спектром. Поэтому оно превращается просто в функцию от сим-

метричной части  $f_0$ . Преобразуя выражение в скобках, перепишем полученное уравнение в виде:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{eE}{m} \frac{1}{3v^2} \frac{\partial(v^2 f_1)}{\partial v} + Q(f_0). \quad (12.12)$$

При втором усреднении кинетического уравнения с весом  $\cos \vartheta$  получим

$$\frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{v_c}{4\pi} \int \cos \vartheta d\Omega \int [f(\vec{\Omega}') - f(\vec{\Omega})] q(\theta) d\Omega', \quad (12.13)$$

где мы пока просто переписали выражение (12.8), не подставляя (12.9), а вкладом неупругих столкновений в правую часть пренебрегли по сравнению с вкладом упругих.

Теперь раскроем правую часть (12.13). Внутренний интеграл по  $d\Omega'$  берется по всем направлениям  $\vec{\Omega}'$  при фиксированном  $\vec{\Omega}$ . Но при интегрировании по углам  $\vec{\Omega}'$  вовсе не обязательно выбирать в качестве полярной оси вектор  $\vec{E}$ , как было сделано при выводе кинетического уравнения. В данном случае гораздо удобнее направить полярную ось по  $\vec{\Omega}$  (рис. 12.4) и описывать направление  $\vec{\Omega}'$  углами  $\theta$  и  $\varphi'$ , отсчитывая азимут  $\varphi'$  от фиксированной плоскости, которая проходит через векторы  $\vec{\Omega}$  и  $\vec{E}$ . В этих координатах элемент телесного угла  $d\Omega' = d\varphi' \sin \theta d\theta$ , что очень удобно, поскольку сомножитель  $q$  под знаком интеграла есть функция  $\theta$ . Подставляя теперь (12.9), запишем внутренний интеграл:

$$J = \int [f(\vec{\Omega}') - f(\vec{\Omega})] q(\theta) d\Omega' = f_1 \int (\cos \vartheta' - \cos \vartheta) q(\theta) d\varphi' \sin \theta d\theta,$$

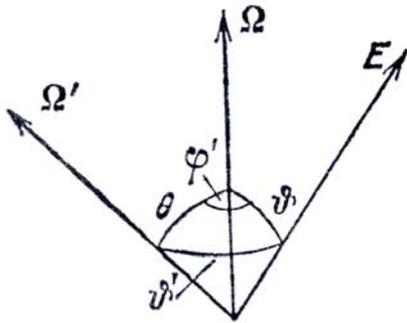
где угол  $\vartheta$  фиксирован. Подставляя, как и ранее (лекция 4) соотношение, связывающее углы в сферической тригонометрии и учитывая, что при интегрировании по  $\varphi'$  слагаемое с  $\cos \varphi'$  исчезнет, получим:

$$J = f_1 \cos \vartheta \int (\cos \theta - 1) q(\theta) d\varphi' \sin \theta d\theta = f_1 \cos \vartheta (\overline{\cos \theta} - 1).$$

Здесь  $\overline{\cos \theta}$  – по определению *средний косинус угла рассеяния*, так как  $\overline{\cos \theta}$  усредняется в соответствии с вероятностью рассеяния  $q(\theta)$ , нормированной по углам на единицу. Вводя эффективную частоту столкновений

$v_m = v_c (1 - \overline{\cos\theta})$ , подставляя внутренний интеграл  $J$  в (12.13) и совершая еще одно интегрирование по  $d\bar{\Omega}$ , найдем второе из искомых уравнений:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_m f_1 = \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial t}. \quad (12.14)$$



*Рис. 12.4. Направления напряженности поля и скоростей до и после рассеяния*

Таким образом, вместо интегродифференциального по углам уравнения (12.6) мы получили два дифференциальных уравнения для функций  $f_0$  и  $f_1$ , аппроксимирующих истинную функцию распределения соотношением (12.9). Эти уравнения ((12.12) и (12.14)) справедливы как для постоянного, так и для переменного поля  $E$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

### Газокинетические параметры

Газ	$d,$ $10^{-8}$ см	$\sigma,$ $10^{-15}$ см <sup>2</sup>	$l,$ $10^{-3}$ см	$\nu,$ $10^4,$ см/с	$\nu,$ $10^6$ с <sup>-1</sup>	$\tau,$ $10^{-7}$ с
He	2,15	1,45	13,2	12,0	9,09	1,10
Ne	3,54	3,93	9,41	5,35	5,68	1,94
Ar	3,58	4,02	4,76	3,80	7,98	1,25
H <sub>2</sub>	2,70	2,29	8,41	16,9	21,1	0,54
N <sub>2</sub>	3,70	4,31	4,47	4,53	10,1	0,99
O <sub>2</sub>	3,56	3,98	4,81	4,25	8,83	1,13

Таблица П2

### Поляризуемости атомов и молекул в основном состоянии $\alpha$ и дипольные моменты молекул $d_0$

Атом	$\alpha/a_0^3$	Молекула	$\alpha/a_0^3$	$d_0/ea_0$	Атом	$\alpha/a_0^3$	Молекула	$\alpha/a_0^3$	$d_0/ea_0$
H	4,5	H <sub>2</sub>	5,52	0	O	512	CO <sub>2</sub>	17,5	0
He(1 <sup>1</sup> S)	1,39	N <sub>2</sub>	11,8	0	Ne	2,76	H <sub>2</sub> O	9,8	1,84
He(2 <sup>1</sup> S)	800	O <sub>2</sub>	10,6	0	Ar	11,1	NH <sub>3</sub>	15,4	1,46
He(2 <sup>3</sup> S)	316	CO	13,1	0,1	Kr	16,8			
N	7,6	NO	11,5	0,16	Xe	27,2			

Таблица ПЗ

**Потенциалы ионизации и наклон кривых сечения ионизации у порога**

Атом, молекула	$I$ , эВ	$C_i$ , $10^{-17}$ см <sup>2</sup> /эВ	Область применимости $\varepsilon$ , эВ
H	13,6		
He	24,6	0,13	24,6 – 35
Ne	21,6	0,16	21,6 – 40
Ar	15,8	2,0	15 – 25
Kr	14,0		
Xe	12,1		
N	14,5	0,59	15 – 30
O	13,6	0,6	14 – 25
Hg	10,4	7,9	10,5 – 13
Hg		2,7	10,5 – 28
H <sub>2</sub>	15,4	0,59	16 – 25
N <sub>2</sub>	15,6	0,85	16 – 30
O <sub>2</sub>	12,2	0,68	13 – 40
CO <sub>2</sub>	13,8		
CO		0,67	14 – 25
Na	5,1		
K	4,3		
Cs	3,9		

**Энергия нижних метастабильных и резонансных уровней, времена жизни метастабильных атомов, сечения возбуждения**

Атом, молекула	Энергия возбуждения, эВ	Время жизни, с	Интерполяция суммарного сечения возбуждения вблизи порогов $\sigma$ , $\text{см}^2$ ; $\varepsilon$ [эВ]
H ( $2^1S$ )	10,20*	0,142	$25 \cdot 10^{-18}(\varepsilon - 10)$
H ( $2P$ )	10,20		
He ( $2^3S_1$ )	19,82*	$6 \cdot 10^5$	$4,6 \cdot 10^{-18}(\varepsilon - 20)$
He ( $2^1S_0$ )	20,6*	$2 \cdot 10^{-2}$	
He _____	21,21		
Ne	16,62*		
	16,7*		$1,5 \cdot 10^{-18}(\varepsilon - 16)$
	16,85		
Ar ( $4^3P_2^0$ )	11,55*	> 1,3	
	11,61		$7 \cdot 10^{-18}(\varepsilon - 11,5)$
	11,72*	> 1,3	
Kr	9,91*		$\sigma_{x\max} = 1,7 \cdot 10^{-16}$ при $\varepsilon = 6,5$
	10,02		
	10,5*		
Xe	8,32*		$7,6 \cdot 10^{-18}(\varepsilon - 8,7)$
	8,45		
Hg	9,4*		
	4,6*		
	4,87		$2,7 \cdot 10^3$
	5,4*		
H <sub>2</sub>	6,7		12
	8,7*		
N <sub>2</sub> ( $A^3\Sigma_u^+$ ) <sub>2</sub>	11,5	1,3 – 2,6	
N <sub>2</sub> ( $a^1\Sigma_u^-$ )	6,2*	0,5	
O <sub>2</sub> ( $^1\Delta_g$ )	8,4*		
O <sub>2</sub> ( $b^1\Sigma_g^+$ )	0,98*		
	1,64*		

Примечание: звездочкой отмечены метастабильные уровни.

Таблица П5

**Оценочные значения подвижности электронов,  
эффективной частоты столкновений, проводимости, длины пробега**

Газ	$\mu_e p,$ $10^6 \frac{\text{см}^2 \cdot \text{тор}}{\text{В} \cdot \text{с}}$	$\frac{v_m}{p},$ $10^9 \frac{1}{\text{с} \cdot \text{тор}}$	$\frac{\sigma p}{n_e},$ $10^{-13} \frac{\text{тор} \cdot \text{см}^2}{\text{Ом}}$	Диапазон $\frac{E}{p},$ $\frac{\text{В}}{\text{см} \cdot \text{тор}}$	$l_p,$ $10^{-2} \text{см} \cdot \text{тор}$
He	0,86	2,0	1,4	0,6-10	6
Ne	1,5	1,2	2,4	0,4-2	12
Ar	0,33	5,3	0,53	1-13	3
H <sub>2</sub>	0,37	4,8	0,58	4-30	2
N <sub>2</sub>	0,42	4,2	0,67	2-50	3
Воздух	0,45	3,9	0,72	4-50	3
CO <sub>2</sub>	1,1	1,8	1,8	3-30	3
CO	0,31	5,7	0,5	5-50	2

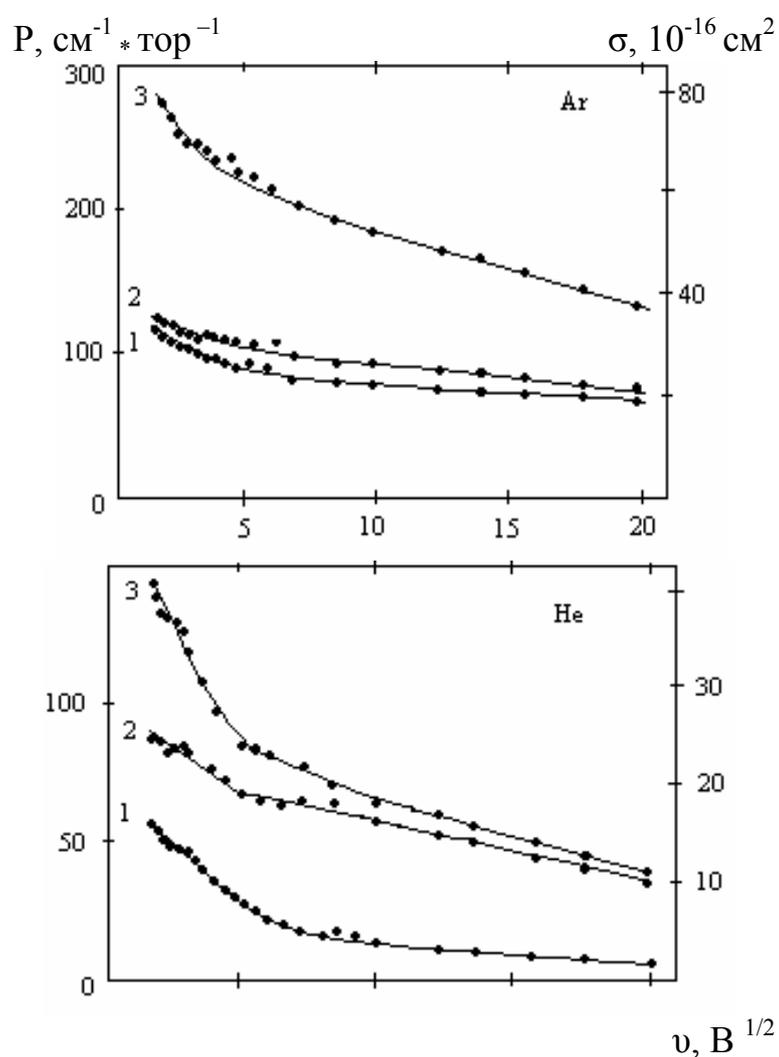
Таблица П6

**Константы в формуле для ионизационного коэффициента  
и области их применимости**

Газ	A, $\text{см}^{-1} \cdot \text{тор}^{-1}$	B, $\text{В}/(\text{см} \cdot \text{тор})$	$E/p,$ $\text{В}/(\text{см} \cdot \text{тор})$
He	3	34	20 – 150
Ne	4	100	100 – 400
Ar	12	180	100 – 600
Kr	17	240	100 – 1000
Xe	26	350	200 – 800
Hg	20	370	200 – 600
Воздух	15	365	100 – 800
CO <sub>2</sub>	20	466	500 – 1000
H <sub>2</sub> O			
H <sub>2</sub>	13	290	150 – 1000
N <sub>2</sub>	5	130	150 – 600
N <sub>2</sub>	12	342	100 – 600
N <sub>2</sub>	8,8	275	27 – 200

Константы Столетова и соответствующие  $E/p$ 

Газ	$\frac{E}{p}$ , $B/(\text{см} \cdot \text{тор})$	$\eta_{\text{max}}^{-1}$ , эВ на пару ионов	Газ	$\frac{E}{p}$ , $B/(\text{см} \cdot \text{тор})$	$\eta_{\text{max}}^{-1}$ , эВ на пару ионов
He	50	83	$H_2$	140	70
Ne	100	66	$N_2$	350	75
Ar	200	45	$CO_2$	400	62
Kr	200	42			
Xe	300	38			
Hg	200	80			
Воздух	365	66			



Вероятность и сечения столкновений

ионов в инертных газах:

1 – упругое рассеяние, 2 – перезарядка,

3 – их сумма

Учебное издание

АВЕРИН Анатолий Петрович

**ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД**  
**В двух частях**  
**Часть I. Основы физики атомных столкновений**  
**Курс лекций**

Редактор А.П. Володина

Корректор Е.В. Афанасьева

Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 16.09.05.

Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.

Печать на ризографе. Усл. печ. л. 7,90. Уч.-изд. л. 8,17. Тираж 120 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета

600000, Владимир, ул. Горького, 87.