Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Ю. К. КОКУРИНА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ

Учебно-практическое пособие

В двух частях

Часть 2

Неопределённый интеграл. Определённый интеграл.
Дифференциальные уравнения

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2015

УДК 51
ББК 22.11
К59

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Т. В. Прохорова

Кандидат экономических наук, доцент
кафедры математики и информатики
Владимирского филиала Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации
С. В. Никифорова

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Кокурина, Ю. К.

К59 Высшая математика для студентов-заочников : учеб.-практ. пособие. В 2 ч. Ч. 2. Неопределённый интеграл. Определённый интеграл. Дифференциальные уравнения / Ю. К. Кокурина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2015. – 60 с. – ISBN 978-5-9984-0570-9 (ч. 2). – ISBN 978-5-9984-0499-3.

При полном соответствии программе курса акцент сделан на сообщении студентам сведений, необходимых для практического применения при решении задач. Предполагается, что доказательства некоторых теорем и выводы части расчетных соотношений могут быть при необходимости разобраны по рекомендуемой литературе. Приведены необходимые графические иллюстрации и примеры решения типовых задач.

Предназначено для студентов различных специальностей заочной формы обучения ВлГУ.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 6. Табл. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 51
ББК 22.11

ISBN 978-5-9984-0570-9 (ч. 2)
ISBN 978-5-9984-0499-3

Введение

Изучение высшей математики имеет исключительно важное значение для всего процесса обучения в высшем учебном заведении. Значение высшей математики необходимо для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин. Математические методы широко используются для решения самых разнообразных задач науки, производства и экономики. Значение этих методов существенно возрастает в связи с массовой информатизацией и компьютеризацией общества и всех отраслей промышленности.

Цель преподавания математики в вузе – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и её приложения; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

В части 1 предлагаемого издания было представлено краткое изложение разделов математики «Элементы линейной и векторной алгебры», «Аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Функции нескольких переменных».

Часть 2 содержит следующие разделы: «Неопределённый интеграл», «Определённый интеграл», «Дифференциальные уравнения».

Математика – наука о пространственных формах и количественных отношениях в самом общем виде – прошла большой путь развития одновременно с развитием цивилизации и стала неотъемлемой частью культуры человечества и показателем интеллектуального уровня общества. Помимо собственных потребностей развития математика обслуживает потребности многих других наук – естественных, технических, экономических, гуманитарных. С развитием вычислительной техники область использования математики расширяется.

В наше время трудно представить себе хорошего специалиста в различных областях, не знающего основных математических методов и математического языка. Поэтому математика включена в учебные планы почти всех специальностей и её изучению отводится немало времени.

Для успешного изучения математики необходимы программа, учебники и учебные пособия, справочная литература, таблицы, инженерный микрокалькулятор и, конечно, волевые усилия. Необходимо посещать все очные занятия в период сессий и стремиться самостоятельно выполнять контрольные работы, пользуясь руководствами к решению задач, методическими указаниями и конспектами практических занятий.

Предлагаемое издание должно помочь студенту-заочнику рационально организовать свой труд по изучению математики и выполнению контрольных работ. Необходимо обратить пристальное внимание на таблицу распределения задач по вариантам и в соответствии с ней выполнять работы.

Желаем Вам успеха.

Глава 1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Определение. Таблица интегралов

Одной из задач предыдущей части курса было нахождение производной функции **f(x) –** новой функции **f`(x)**. Сформулируем *обратную* задачу – найти функцию **F(x)**, производная которой – заданная функция **f(x)**.

Функция **F(x)** называется *первообразной* функции **f(x)** на отрезке **[a, b]**, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство **F`(x) = f(x)**.

Первообразная функция определяется с точностью до произвольной постоянной: **[F(x) + C]` = f(x)**. Если **F(x)** – первообразная функции **f(x)**, то функциями вида **F(x) + C** исчерпываются все первообразные функции **f(x)**.

Если функция **F(x)** – первообразная функции **f(x)**, то выражение **F(x) + C** называется *неопределенным интегралом* от функции **f(x)** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (1.1)$$

где **f(x)** – подынтегральная функция; **f(x)dx** – подынтегральное выражение; $\int$ – знак интеграла.

Неопределенный интеграл представляет собой *семейство функций*, геометрически – семейство кривых, каждая из которых получается сдвигом одной из кривых вдоль оси **Oy**.

*Если функция **f(x)** непрерывна на отрезке **[a, b]**, то для этой функции существует первообразная (и неопределенный интеграл).* (Теорема существования).

Нахождение первообразной функции **f(x)** называется *интегрированием* ее.

Отметим, что если производная элементарной функции также элементарная функция, то первообразная элементарной функции может оказаться и неэлементарной функцией.

Из определения первообразной следует:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если

$$\mathbf{F`(x) = f(x)}, \text{ то и } \mathbf{(\int f(x)dx)` = f(x).} \qquad (1.2)$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$\mathbf{d(\int f(x)dx) = f(x)dx.} \qquad (1.3)$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\mathbf{\int F(x)\ dx = F(x) + C}. \qquad (1.4.)$$

Несложно показать, что справедливы и следующие свойства:

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен сумме интегралов от них:

$$\mathbf{\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx}. \qquad (1.5)$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если **a = const**, то

$$\mathbf{\int af(x)dx = a\int f(x)dx}. \qquad (1.6)$$

6. Если $\mathbf{\int f(x)dx = F(x) + C}$ и $\mathbf{u = \varphi(x)}$, то $\mathbf{\int f(u)du = F(u) + C}$. (1.7)

Используя таблицу производных и соотношения (1.2) – (1.7), несложно получить таблицу интегралов от простейших функций.

$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ при $\alpha \neq -1$ (1.8);

$\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ (1.9);

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ (1.10);

$\int \cos x dx = \sin x + C$ (1.11);

$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$ (1.12);

$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$ (1.13);

$\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$ (1.14);

$\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$ (1.15)

$\int e^x dx = e^x + C$ (1.16)

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ (1.16`)

$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$ (1.17)

$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$ (1.17`)

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ (1.18)

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$ (1.18`)

Приведем еще две формулы, справедливость которых можно проверить дифференцированием.

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \tag{1.19}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \lambda}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm \lambda} \right| + C. \tag{1.20}$$

Интегрирование в случаях, когда удается сразу воспользоваться табличными интегралами, называют *непосредственным*. Чаще подынтегральную функцию приходится преобразовывать, чтобы свести исходный интеграл к одному или нескольким табличным. Один из эффективных приемов – *метод подстановки*: в интеграле вида $\int f(x)dx$ делают замену переменной, положив $x = \varphi(t)$ ($\varphi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию). Тогда

$$dx = \varphi'(t)dt \text{ и } \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1.21}$$

Подразумевается, что после интегрирования в правой части равенства вместо **t** будет подставлено его выражение через **x** (возвращение к исходной переменной). Функцию $\varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы вычисление интеграла в правой части было максимально простым. Поясним на примере: $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$. Положим x = at, откуда dx = adt, t=x/a. Исходный интеграл примет вид $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{adt}{a^2 + a^2t^2} = \int \frac{adt}{a^2(1+t^2)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} =$

$= [\text{см } (1.17)] = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

Таким образом

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Иногда удобнее применять замену переменной вида $t = \psi(x)$. Вычислим $\int \operatorname{tg}x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = [\cos x = t;\ \sin x dx = -dt] =$

$$= -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

1.2. Интегрирование по частям

Если **u** и **v** – дифференцируемые функции от **x**, то **d(uv) = vdu + + udv,** откуда, интегрируя, получим

$$\mathbf{uv = \int vdu + \int udv} \quad \text{и} \quad \mathbf{\int udv = uv - \int vdu}. \qquad (1.22)$$

Это соотношение называют *формулой интегрирования по частям*.

Подынтегральное выражение "разбивают на части": **u** и **dv**, подбирая их так, чтобы **∫vdu** был табличным или более простым, чем исходный.

Пример: $\int xe^x dx = ?$ Положим **u = x и** $e^x dx = dv$, тогда **du = dx и** $v = e^x$, откуда $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

Отметим, что при нахождении **v** по **dv** произвольную постоянную без потери общности полагают равной нулю.

1.3. Интегрирование рациональных функций

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби – отношения двух многочленов (без потери общности полагаем, что они не имеют общих корней):

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0}{B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \ldots + B_1 x + B_0}.$$

Если степень числителя ниже степени знаменателя, дробь называют *правильной*, в противном случае – *неправильной*. Неправильную дробь **(m ≥ n)**, разделив числитель на знаменатель, можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби $\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)}$.

Рациональные дроби вида $\frac{A}{x-a}$; $\frac{A}{(x-a)^k}$; $\frac{Ax+B}{x^2+nx+q}$; $\frac{Ax+B}{(x^2+nx+q)^k}$,

где **k** – целое положительное число **≥ 2,** $D = n^2 - 4q$ называются *простейшими дробями **1, 2, 3** и **4-го** типов.* Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей, интегралы от которых рассмотрены ниже.

1. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$ (1.23)

2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(x-a)^{k-1}(1-k)} + C.$ (1.24)

3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+nx+q}dx = ?$ Применим следующий способ. Найдем дифференциал знаменателя **d(x² + nx + q) = (2x + n)dx** и представим числитель в виде суммы $\frac{A}{2}(2x+n)+(B-\frac{An}{2})$, тогда

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+nx+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+n)+(B-\frac{An}{2})}{x^2+nx+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+n)dx}{x^2+nx+q} + (B-\frac{An}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{n}{2})^2+(q-\frac{n^2}{4})} =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+nx+q)}{x^2+nx+q} + (B-\frac{An}{2})\int \frac{d(x+\frac{n}{2})}{(x+\frac{n}{2})^2+(q-\frac{n^2}{4})} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+nx+q) + \frac{2B-An}{\sqrt{4q-n^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+n}{\sqrt{4q-n^2}} + C. \quad (1.25)$$

Интеграл от простейшей дроби четвёртого типа легко вычисляется с помощью тригонометрической подстановки и будет рассмотрен ниже.

Разложение рациональной дроби на простейшие можно осуществить, опираясь на следующие теоремы (приводятся без доказательств).

1. *Если* ***x = a*** *есть корень знаменателя кратности* ***к****, т.е.* $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, *где* $f_1(a) \neq 0$, *то правильную дробь* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *можно представить в виде суммы двух других правильных дробей* $\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)}$, *где* ***A*** *– постоянная, отличная от нуля, а* $F_1(x)$ *многочлен, степень которого ниже степени знаменателя* $(x-a)^{k-1}f_1(x)$.

2. *Если* $f(x) = (x^2+nx+q)^{\mu}\varphi_1(x)$, *где многочлен* $\varphi_1(x)$ *не делится на* x^2+nx+q, *то правильную рациональную дробь* $\frac{F(x)}{f(x)}$ *можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следую-*

щим образом: $\dfrac{F(x)}{f(x)}=\dfrac{Mx+N}{(x^2+nx+q)^{\mu}}+\dfrac{\Phi(x)}{(x^2+nx+q)^{\mu-1}\varphi(x)}$*, где* ***Φ(x)*** *– многочлен, степень которого ниже степени многочлена* $\boldsymbol{(x^2+nx+q)^{\mu-1}\varphi(x)}$. Применяя к дроби $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ эти теоремы, можно выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие корням знаменателя **f(x)**. Т.е. если $\mathbf{f(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+nx+q)^{\mu}\ldots(x^2+lx+s)^{\nu}}$, то дробь представима в виде:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}+\ldots$$

$$+\frac{Mx+N}{(x^2+nx+q)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+nx+q)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+nx+q}+\ldots$$

$$+\frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^{\nu}}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.$$

Коэффициенты $\mathbf{A, A_1, \ldots, B, B_1}$, … определяют исходя из того, что последнее равенство есть *тождество*. Приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях слева и справа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях **x**, получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\mathbf{A, A_1, \ldots, B, B_1}$, …

Пример: используя предложенный способ, разложим на простейшие дроби $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\dfrac{A}{(x+1)^3}+\dfrac{A_1}{(x+1)^2}+\dfrac{A_2}{x+1}+\dfrac{B}{x-2}$. Приведя слагаемые к общему знаменателю и приравняв числители, получим $x^2 + 2 = = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^3$ или $x^2 + 2 = (A_2 + B)x^3 + (A_1 + 3B)x^2 + (A - A_1 - 3A_2 + 3B)x + (-2A - 2A_1 - 2A_2 + B)$. Приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x, и x^0 (свободный член), получим систему

$$\begin{cases} 0 = A_2 + B, \\ 1 = A_1 + 3B, \\ 0 = A - A_1 - 3A_2 + 3B, \\ 2 = -2A - 2A_1 - 2A_2 + B, \end{cases}$$ решая которую, найдем $A = -1$, $A_1 = 1/3$, $A_2 = -2/9$, $B = 2/9$.

В результате получим $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\dfrac{1}{(x+1)^3} + \dfrac{1}{3(x+1)^2} - \dfrac{2}{9(x+1)} + \dfrac{2}{9(x-2)}$.

Чтобы вычислить интеграл от рациональной дроби, нужно, если дробь неправильная, представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби, а дробь разложить на сумму простейших.

Пример:

$$\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3+1} = \int (x - \frac{x-1}{x^3+1})dx = \int xdx - \int \frac{(x-1)dx}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-1)dx}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1} = \dfrac{Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Cx + Bx + C}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ \begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 1 \\ A + C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -3A = 2 \\ A + C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{2}{3} \\ B = \dfrac{2}{3} \\ C = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array} \right]$$

$$= \int xdx + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln(x^2-x+1) + C.$$

1.4. Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида **$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$**

а) Если хотя бы один из показателей **m** и **n** – нечётное положительное число, используются подстановки **sinx = t** при нечётном **n** и **cosx = t** при нечетном **m**.

Примеры:

$$\alpha)\int \sin^2 x\cos^5 xdx=[\sin x=t;\cos xdx=dt;\cos^2 x=1-\sin^2 x]=$$

$$=\int \sin^2 x\cos^4 x\cos xdx=\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 d\sin x=\int t^2(1-t^2)^2 dt=$$

$$=\int (t^2-2t^4+t^6)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{2\sin^5 x}{5}+\frac{\sin^7 x}{7}+C.$$

$$\beta)\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos x\sqrt{\cos x}}=\int \sin^3 x\cos^{-\frac{3}{2}} xdx=\int \sin^2 x\cos^{-\frac{3}{2}} x\sin xdx=$$

$$=\int (1-\cos^2 x)\cos^{-\frac{3}{2}} xd\cos x=[\cos x=t]=\int (t^{-\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\cos x}}-\frac{2\sqrt{\cos^3 x}}{3}+C.$$

б) Если оба показателя **m** и **n** – чётные положительные числа, подынтегральную функцию следует преобразовать с помощью известных соотношений: $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\ \ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$

Пример:

$$\int \sin^4 x\cos^2 xdx=\int \sin^2 x\cos^2 x\sin^2 xdx=\int \frac{\sin^2 2x}{4}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx-\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx=\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx-\frac{1}{16}\int \sin^2 2xd\sin 2x=$$

$$=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int \cos 4xdx-\frac{1}{16}\int \sin^2 2xd\sin 2x=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

2. Интегралы вида $\int \mathbf{tg^m xdx}$ и $\int \mathbf{ctg^m xdx}$, где **m** – целое положительное число, интегрируются с помощью соотношений $\mathbf{tg^2x = sec^2x - 1}$ и $\mathbf{ctg^2x = cosec^2x - 1}$, позволяющих последовательно понижать степень подынтегральной функции.

Пример:

$$\int \mathrm{tg}^5 x dx = \int \mathrm{tg}^3 x(\sec^2 x - 1)dx = \int \mathrm{tg}^3 x d(tgx) - \int \mathrm{tg}^3 x dx =$$

$$= \int \mathrm{tg}^3 x d(\mathrm{tg} x) - \int \mathrm{tg} x(\sec^2 x - 1)dx = \int \mathrm{tg}^3 x d(\mathrm{tg} x) - \int \mathrm{tg} x d \mathrm{tg} x + \int \mathrm{tg} x dx =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}^4 x}{4} - \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

3. Аналогично находятся интегралы вида **∫tg$^{\mathbf{m}}$x sec$^{\mathbf{n}}$x dx** и **∫ctg$^{\mathbf{m}}$x cosec$^{\mathbf{n}}$xdx**, где **n** – целое положительное число.

Интегралы ∫sin(mx) cos(nx) dx, ∫cos(mx) cos(nx) dx, ∫sin(mx) sin(nx) dx вычисляются с помощью формул sinα cosβ = ½[sin(α +β) + + sin(α – β)], cosα cosβ = ½[cos(α + β) + cos(α – β)], sinα sinβ = = ½[cos(α – β) – cos (α + β)], позволяющих произведение тригонометрических функций представить в виде суммы.

4. Интегралы вида **∫R(sinx, cosx)dx**, где **R** – рациональная функция, вычисляются с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* **tg x/2 = t** (**x = 2arctgt**). Переход к новой переменной в подынтегральном выражении осуществляется с помощью формул

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (1.26)$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2+8t+8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C =$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+2} + C.$$

Проинтегрируем с помощью тригонометрической подстановки простейшую рациональную дробь четвёртого типа $\int \frac{dx}{(x^2+nx+q)^{\mu}}$, где $n^2 - 4q < 0$. Выделив в знаменателе полный квадрат, получим

$\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{4q-n^2}{4}\right)\right]^{\mu}}$ и, обозначив $x+\frac{u}{2}=z$, $\frac{4q-n^2}{4}=p^2$, получим $\int \frac{dz}{(z^2+p^2)^{\mu}}$.

1.5. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int \mathbf{R}(\mathbf{x}, (\mathbf{ax}+\mathbf{b})^{\mathbf{m_1/n_1}}, (\mathbf{ax}+\mathbf{b})^{\mathbf{m_2/n_2}}, \ldots)\mathbf{dx}$, где **R** – рациональная функция, а $\mathbf{m_i}$, $\mathbf{n_i}$, – целые числа, вычисляются с помощью подстановки $\mathbf{ax}+\mathbf{b}=\mathbf{t^s}$, где **s** – наименьшее общее кратное чисел $\mathbf{n_i}$.

Пример:

$$n_1=3; n_2=2; s=6$$

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}=\left|2x+1=t^6; x=\frac{t^6-1}{2}; dx=3t^5dt\right|=\int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int \frac{t^2dt}{t-1}=$$

$$=3\int (t+1+\frac{1}{t-1})dt=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C,$$

где $t=\sqrt[6]{2x+1}$.

2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводятся к табличным выделением полного квадрата в подкоренном выражении.

Пример:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+20}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+2x+5}|+C.$$

3. Интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ вычисляются с помощью известного уже приема – в числителе выделяют производную подкоренного выражения и интеграл представляют в виде суммы более простых интегралов.

Пример:

$$\int\frac{(3x+4)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx=[d(-x^2+6x-8)=(-2x+6)dx]=\int\frac{-\frac{3}{2}(-2x+6)+13}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{d(-x^2+6x-8)}{\sqrt{-x^2+6x-8}}+13\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\arcsin(x-3)+C.$$

4. Интеграл вида $\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ с помощью подстановки **$x-\alpha=1/t$** сводится к интегралу, рассмотренному ранее.

Пример:

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}=[x+1=\frac{1}{t};x=\frac{1}{t}-1;dx=-\frac{dt}{t^2}]=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+3(\frac{1}{t}-1)+3}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}=-\ln|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}|+C=$$

$$=\ln|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}|+C.$$

5. Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$, $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ приводятся к интегралам от рациональных относительно **sint (cost)** функций с помощью надлежащей тригонометрической подстановки: для первого **x =a sect** (**x = a cosect**), для второго **x = a sint** (**x = a cost**) и для третьего **x = a tgt** (**x = a ctgt**).

Пример:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=[x=a\,\mathrm{tg}t;dx=\frac{adt}{\cos^2 t}]=\int\frac{adt}{\cos^2 t\,a\,\mathrm{tg}t\sqrt{a^2+a^2tg^2t}}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\cos^2 t\frac{\sin t}{\cos t}\frac{1}{\cos t}}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin t}=\frac{1}{a}\int\frac{\sin t dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{a}\int\frac{d\cos t}{\cos^2 t-1}=\frac{1}{2a}\ln|\frac{\cos t-1}{\cos t+1}|+C=$$

$$=[\mathrm{tg}t=\frac{x}{a};\cos t=\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}]=\frac{1}{2a}\ln|\frac{a-\sqrt{x^2+a^2}}{a+\sqrt{x^2+a^2}}|+C=\frac{1}{a}\ln|\frac{a-\sqrt{x^2+a^2}}{x}|+C.$$

1.6. О «неберущихся» интегралах

Выше говорилось, что если и выполняются условия существования первообразной, то не всегда она может быть найдена как конечная комбинация элементарных функций. Соответствующий интеграл можно рассматривать как новую *неэлементарную* функцию. Такие функции часто носят название специальных, многие из них хорошо изучены (и табулированы). Например, та из первообразных $\int e^{-x^2}dx + C$, которая обращается в нуль при **x = 0,** называется функцией Гаусса и обозначается **Φ(x)**, т.е. $\Phi(x) = \int e^{-x^2}dx + C,$ если **Φ(0) = 0**.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной функции. Докажите, что любые две первообразные одной и той же функции отличаются на постоянное слагаемое.
2. Что называется неопределённым интегралом? Каков его геометрический смысл и основные свойства?
3. Постройте кривые семейства $y = \int x dx$, проходящие через точки $M_1(2,1)$, $M_2(2,2)$, $M_3(2,3)$.
4. Каковы основные методы интегрирования функций?
5. Выведите формулу интегрирования по частям.
6. Укажите некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.
7. Что называется дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью)?
8. Назовите четыре типа правильных рациональных дробей.
9. Как найти интегралы от простейших рациональных дробей 1-го и 2-го типов?
10. Как найти интегралы от простейших рациональных дробей 3-го и 4-го типов?
11. Как найти интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, если: а) хотя бы один из показателей m или n – нечётное положительное число; б) оба показателя m и n – чётные положительные числа?
12. Как найти интегралы вида $\int \mathrm{tg}^m x dx,$ $\int \mathrm{ctg}^m x dx$, где m – целое положительное число?
13. Как найти интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция?
14. Как найти интегралы вида $\int R\left(x,\ (ax+b)^{m_1/n_1},\ (ax+b)^{m_2/n_2},\ldots\right)dx$, где R – рациональная функция, а m_i, n_i – целые числа?

15. Как найти интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$?
16. Как найти интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$?
17. Как найти интегралы вида $\int R\left(x,\ \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\ \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\ \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$?
18. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.
19. Какая функция называется функцией Гаусса, как она определяется?

Глава 2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Понятие определённого интеграла. Свойства

Что такое определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и почему он есть площадь? Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке $[a;b]$ (рис. 2.1). Для определённости и простоты считаем, что функция положительна $(f(x)>0)$ и непрерывна на данном отрезке. Поставим задачу найти площадь S криволинейной трапеции**,** ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a,\ x=b$ и осью OX. Обратите внимание на тот факт, что непрерывность функции на отрезке заведомо гарантирует существование *конечной* площади S.

Разобьём отрезок $[a;b]$ на n частей следующими точками:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

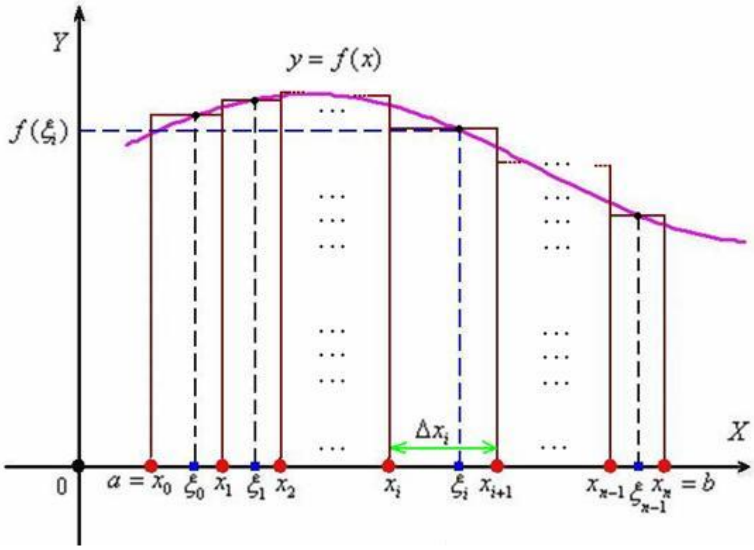

Рис. 2.1

В результате получено n *частичных промежутков* $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots,$ $[x_i; x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ с длинами $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_{n-1}$ соответственно. В общем случае длины *различны* – какие-то отрезки короче, какие-то длиннее. Максимальную длину называют диаметром разбиения и обозначают буквой «лямбда»: $\lambda = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_{n-1}\}$.

Примечание 1. *последняя запись читается как «максимальное значение из множества (набора)* $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_{n-1}$*».*

В каждом из полученных промежутков опять же *произвольно* выбираем точки $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n-1}$.

Примечание 2. ξ *(«кси») – 14-я буква греческого алфавита.*

Рассмотрим *i-й* промежуток $[x_i; x_{i+1}]$. Его длина, очевидно, равна $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (обоюдоострая линия). Значению аргумента ξ_i соответствует значение функции $f(\xi_i)$, и произведение $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ в точности равно площади соответствующего прямоугольника.

Аналогично устроен каждый отрезок. Составим сумму, которая равна площади ступенчатой фигуры:

$$\sigma = f(\xi_0) \cdot \Delta x_0 + f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \dots + f(\xi_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}.$$

Данная сумма называется интегральной суммой, и её часто записывают в свёрнутом виде: $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Примечание 3. $\sum$*– это значок суммы, а переменная* i *– своеобразный «счётчик», т.е. сначала* $i = 0$*, затем* $i = 1$*, потом* $i = 2$*, ... и, наконец,* $i = n - 1$.

Что означает прилагательное *«интегральная»*? В широком смысле слова, интегрировать – это значит, что-то объединять. В данном случае интегральная сумма σ объединяет площади прямоугольников и с некоторой точностью *приближает* площадь криволинейной трапеции: $\sigma \approx S$.

Теперь зададимся вопросом: как улучшить точность приближения? Действия очевидны – увеличиваем и увеличиваем значение n. При этом количество отрезков $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_i; x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ растёт, а их длины $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_i, \Delta x_{n-1}$ – уменьшаются, в том числе неизбежно уменьшается и максимальная длина λ. Количество точек $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots \xi_{n-1}$ тоже возрастает, и ступенчатая фигура всё больше и больше напоминает криволинейную трапецию.

И, если количество отрезков разбиения устремить к бесконечности $n \to \infty$, то интегральная сумма (площадь ступенчатой фигуры) будет стремиться к площади криволинейной трапеции: $\sigma \to S$.

Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна пределу интегральной суммы при диаметре разбиения, стремящемся к нулю: $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = \lim\limits_{\lambda \to 0}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$.

В результате площадь криволинейной трапеции S = $= \lim\limits_{\lambda \to 0}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Определение: *конечный* предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа дробления отрезка $[a; b]$, ни от выбора точек ξ_i, называется определённым интегралом функции $f(x)$ по промежутку $[a; b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

При этом функция $f(x)$ называется интегрируемой в промежутке $[a; b]$.

Свойства определённого интеграла

Ниже предполагается, что $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на замкнутом интервале $[a, b]$.

1. $\int\limits_a^b 1dx = b - a$;
2. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$,

   где k – константа;
3. $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$;
4. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $a < c < b$;
5. Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $0 \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$;
6. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;
7. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;
8. Если $f(x) \ge 0$ в интервале $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

2.2. Формула Ньютона – Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$. Если $F(x)$ – *первообразная* функции $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right)dx$.

Решение

Применяя формулу Ньютона – Лейбница, получаем

$$\int_0^2 \left(x^3 - x^2\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{16}{4} - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

2.3. Замена переменной

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ по переменной x можно преобразовать в определенный интеграл относительно переменной t с помощью подстановки $x = g(t)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\left(g(t)\right) g'(t)\,dx.$$

Новые пределы интегрирования по переменной t определяются выражениями

$$c = g^{-1}(a),\ d = g^{-1}(b),$$

где g^{-1} – обратная функция к g, т.е. $t = g^{-1}(x)$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x}{\left(3x^2 - 1\right)^4}\,dx$.

Решение

Сделаем замену: $t = 3x^2 - 1,\ \Rightarrow\ dt = 6x\,dx,\quad x\,dx = dt/6.$

Пересчитаем пределы интегрирования. Если $x = 0$, то $t = -1$. Если же $x = 1$, то $t = 2$. Тогда интеграл через новую переменную t легко вычисляется:

$$\int_0^1 \frac{x}{\left(3x^2 - 1\right)^4}\,dx = \int_{-1}^2 \frac{dt/6}{t^4} = \frac{1}{6}\int_{-1}^2 t^{-4}dt = \frac{1}{6}\left(\frac{t^{-3}}{-3}\right)\Bigg|_{-1}^2 = -\frac{1}{18}\left(\frac{1}{8} - 1\right) = \frac{7}{144}.$$

2.4. Интегрирование по частям

В этом случае формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

где $uv\Big|_a^b$ означает разность значений произведения функций uv при $x = b$ и $x = a$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$.

Решение

Запишем интеграл в виде

$$I = \int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = -\int_0^{\ln 2} xd\left(e^{-x}\right).$$

Используем интегрирование по частям: $\int u dv = uv - \int v du$.

В нашем случае пусть будет

$$u = x, \quad dv = d\left(e^{-x}\right), \quad \Rightarrow \quad du = 1, \quad v = e^{-x}.$$

Следовательно, интеграл равен

$$I = -\int_0^{\ln 2} xd\left(e^{-x}\right) = -\left[\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx\right] = -\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx =$$

$$= -\left(xe^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} - \left(e^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2} = -\left[e^{-x}\left(x+1\right)\right]\Big|_0^{\ln 2} = -e^{-\ln 2}\left(\ln 2 + 1\right) + e^0 \cdot 1 =$$

$$= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln e}{2} + \ln e = \frac{\ln e}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\left(\ln e - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

2.5. Вычисление площади плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции

Площадь фигуры, ограниченной осью $0x$, двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $f(x)$ (рис. 2.2), определяется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

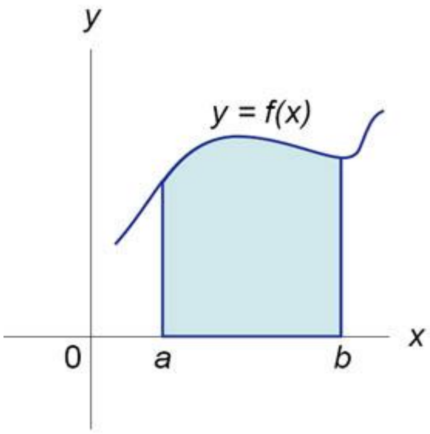

Рис. 2.2

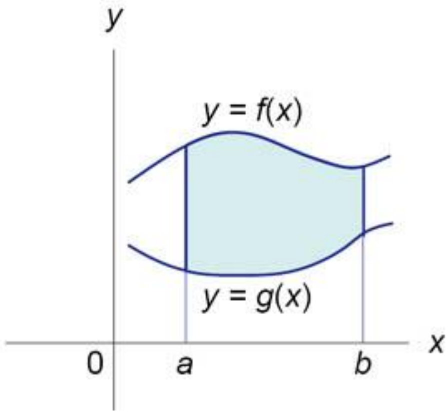

Рис. 2.3

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Если $f(x) \geq g(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$, то площадь области, ограниченной двумя кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и вертикальными линиями $x = a$, $x = b$ (рис. 2.3), определяется формулой

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a).$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение

Сначала определим точки пересечения двух кривых (рис. 2.4).

$x^2 = \sqrt{x},$

$\Rightarrow \quad x^2 - \sqrt{x} = 0,$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x}\left(x^{3/2} - 1\right) = 0,$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \; x_2 = 1.$

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках (0,0) и (1,1). Следовательно, площадь фигуры равна

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left.\left(\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \left.\frac{1}{3}\left(2\sqrt{x^3} - x^3\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$ и $x + y = 0$.

Решение

Найдем координаты точек пересечения кривых (рис. 2.5).

$$2x - x^2 = -x,$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x(x-3) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0, \ x_2 = 3.$$

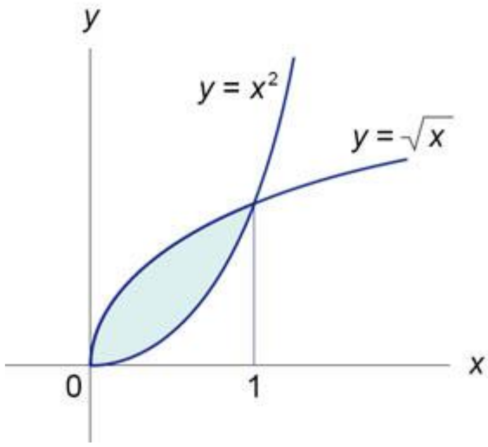

Рис. 2.4

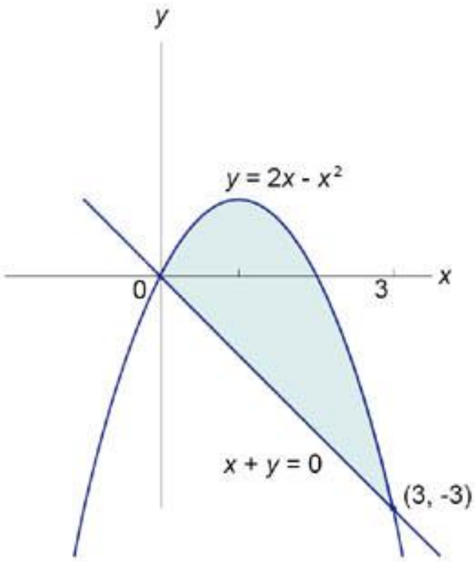

Рис. 2.5

Данная область ограничивается сверху параболой $y = 2x - x^2$, а снизу – прямой линией $y = -x$. Следовательно, площадь этой области равна

$$S = \int_0^3 \left(2x - x^2 - (-x)\right)dx = \int_0^3 \left(2x - x^2 + x\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

2.6. Вычисление объёма тела вращения

Вычисление объёма тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси OX.

Пример. Вычислить объём тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение

Как и в задаче на нахождение площади, решение начинается с чертежа плоской фигуры**.** То есть, на плоскости XOY необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, при этом не забываем, что уравнение $y = 0$ задаёт ось OX. Чертёж здесь довольно прост (рис. 2.6).

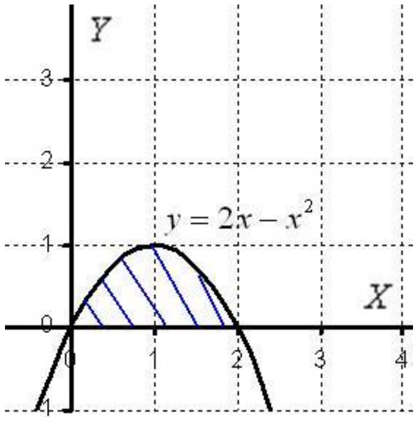

Рис. 2.6

Искомая плоская фигура заштрихована, именно она и вращается вокруг оси OX. В результате вращения получается такая немного яйцевидная «летающая тарелка», которая симметрична относительно оси OX.

Как вычислить объём тела вращения?

Объём тела вращения можно вычислить по формуле $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

В формуле перед интегралом обязательно присутствует число π. Как расставить пределы интегрирования «*a*» и «*б*», думаю, легко догадаться из выполненного чертежа.

Что это за функция? Давайте посмотрим на чертеж (см. рис. 2.6). Плоская фигура ограничена графиком параболы $f(x) = 2x - x^2$ сверху. Это и есть та функция, которая подразумевается в формуле.

В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси OX. Это ничего не меняет – подынтегральная функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом интеграл всегда неотрицателен, что весьма логично.

Вычислим объём тела вращения, используя данную формулу:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \pi \cdot \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0\right) = \frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V = \frac{16\pi}{15}$ $ед^3. \approx 3{,}35$ $ед^3$.

В ответе нужно обязательно указать размерность – кубические единицы $ед^3$. То есть, в нашем теле вращения примерно 3,35 «кубиков». Почему именно кубические *единицы*? Потому что наиболее универсальная формулировка. Могут быть кубические сантиметры, могут быть кубические метры, могут быть кубические километры и т.д.

Контрольные вопросы

1. Назовите задачи, приводящие к определённому интегралу.
2. Напишите интегральную сумму для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.
3. Что называется определённым интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$?
4. Каков геометрический смысл определённого интеграла?
5. Перечислите свойства определённого интеграла.
6. Чему равна производная от определённого интеграла с переменным верхним пределом интегрирования?
7. Напишите формулу Ньютона – Лейбница.
8. Напишите формулу замены переменной в определённом интеграле.
9. Чему равен интеграл $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, если $y = f(x)$ есть чётная функция, нечётная функция?
10. Напишите формулу интегрирования по частям в определённом интеграле.
11. Как вычисляется площадь плоской фигуры в прямоугольной системе координат с помощью определённого интеграла?
12. Напишите формулу для вычисления объёмов тел, образованных вращением плоской фигуры вокруг оси Ox.

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделенными переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

с непрерывными функциями $f(x)$ и $g(y)$.

Равенство

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

где C – произвольная постоянная, определяет *общий интеграл уравнения с разделёнными переменными.*

Начальное условие для уравнения $f(x)dx + g(y)dy = 0$ можно задавать в виде $y(x_0) = y_0$ или $x(y_0) = x_0$.

Уравнением с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

Функции $f_1(x)$, $g_1(y)$, $f_2(x)$, $g_2(y)$ непрерывны в своих областях определения и $g_1(y)f_2(x) \neq 0$.

Разделив обе части уравнения на отличное от нуля произведение $g_1(y)f_2(x)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

Решение уравнения в области, где $g_1(y)f_2(x) = 0$, требует специального обсуждения.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$.

Решение

Переписываем производную в нужном нам виде

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0.$$

Оцениваем, можно ли разделить переменные. Можно. Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx,$$

и перекидываем множители по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx.$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int ctgxdx.$$

Интеграл левой части легко найти методом подведения функции под знак дифференциала**,** с интегралом от котангенса расправляемся стандартным приемом.

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x},$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x},$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|.$$

В правой части у нас получился логарифм, поэтому константу тоже рекомендуется записать под логарифмом.

Теперь пробуем упростить общий интеграл. Поскольку у нас одни логарифмы, то от них вполне можно (и нужно) избавиться.

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|,$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C|,$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\left|\frac{C}{|\sin x|}\right|,$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\sin x}.$$

Можно ли выразить «игрек»? Можно. Надо возвести в квадрат обе части. Но делать это не обязательно.

Совет: если для получения общего решения нужно возводить в степень или извлекать корни, то *в большинстве случаев* следует воздержаться от этих действий и оставить ответ в виде общего интеграла. Дело в том, что общее решение будет смотреться просто ужасно – с большими корнями, знаками «$\pm$» и т.п.

Поэтому ответ запишем в виде общего интеграла. Хорошим тоном считается представить его в виде $F(x;y) = C$, т. е., в правой части, по возможности оставить только константу.

Ответ: общий интеграл: $\sqrt{2y+1}\cdot\sin x = C,$ где $C = const$.

Общий интеграл проверяется довольно легко, главное, уметь находить производную от функции, заданной неявно**.** Дифференцируем ответ:

$$(\sqrt{2y+1}\cdot\sin x)' = (C)'$$

$$(\sqrt{2y+1})'\cdot\sin x + \sqrt{2y+1}\cdot(\sin x)' = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2y+1}}\cdot(2y+1)'\cdot\sin x + \sqrt{2y+1}\cdot\cos x = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2y+1}}\cdot(2y'+0)\cdot\sin x + \sqrt{2y+1}\cdot\cos x = 0$$

$$\frac{y'}{\sqrt{2y+1}}\cdot\sin x + \sqrt{2y+1}\cdot\cos x = 0$$

Умножаем оба слагаемых на $\sqrt{2y+1}$:

$$\sqrt{2y+1}\cdot\frac{y'}{\sqrt{2y+1}}\cdot\sin x + \sqrt{2y+1}\cdot\sqrt{2y+1}\cdot\cos x = 0$$

$$y'\sin x + (2y+1)\cdot\cos x = 0$$

Делим на $\sin x$:

$$\frac{y'\sin x}{\sin x}+\frac{(2y+1)\cdot\cos x}{\sin x}=0$$

$$y'+(2y+1)ctgx=0$$

Получено в точности исходное дифференциальное уравнение $y'+(2y+1)ctgx=0$, значит, общий интеграл найден правильно.

3.2. Линейные уравнения первого порядка. Метод Бернулли

Для краткости их часто называют просто *линейными* уравнениями.

Линейное уравнение первого порядка в стандартной записи имеет вид $y'+p(x)\cdot y=q(x)$.

Что мы видим?

1. В линейное уравнение входит первая производная y'.

2. В линейное уравнение входит произведение $p(x)\cdot y$, где y – одинокая буковка «игрек» (функция), а $p(x)$ – выражение, зависящее только от «икс».

3. И наконец, в линейное уравнение входит выражение $q(x)$, тоже зависящее только от «икс». В частности, $q(x)$ может быть константой.

Перед тем как перейти к практическим задачам, рассмотрим некоторые частные модификации линейного уравнения:

– Как уже отмечалось, выражение $q(x)$ может быть некоторой константой k (числом), в этом случае линейное уравнение принимает вид $y'+p(x)\cdot y=k$.

– Выражение $p(x)$ тоже может быть некоторой константой k, тогда линейное уравнение принимает вид $y'+ky=q(x)$. В простейших случаях константа равна +1 или –1, соответственно линейное уравнение записывается еще проще $y'+y=q(x)$ или $y'-y=q(x)$.

– Рядом с производной может находиться множитель $r(x)$, зависящий только от «икс»: $r(x)\cdot y'+p(x)\cdot y=q(x)$. Это тоже линейное уравнение.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'-y=e^x$.

Решение

Данное уравнение является линейным и имеет простейший вид: $y'-y=q(x)$.

Как решить линейное уравнение?

Существуют два способа решения. Первый способ – это так называемый метод вариации произвольной постоянной. Второй способ связан с заменой переменной и подстановкой, иногда его называют *методом Бернулли*. В данном случае будет рассматриваться метод подстановки, он алгоритмически прост и понятен, и решение уравнения принимает чёткий трафаретный характер. Линейное дифференциальное уравнение можно решить одной-единственной заменой $y = uv$, где u и v – некоторые, пока ещё неизвестные функции, зависящие от x.

Коль скоро проводится замена $y = uv$, то нужно выяснить, чему равна производная. По правилу дифференцирования произведения $y' = u'v + uv'$

Подставляем $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в наше уравнение $y' - y = e^x$:

$$u'v + uv' - uv = e^x.$$

В чём состоит задача? Необходимо найти неизвестные функции u и v, которые зависят от x. И как раз этому будут посвящены все последующие действия.

После подстановки смотрим на два слагаемых, которые располагаются вот на этих местах:

$$u'v + \boxed{uv' - uv} = e^x$$

У них нужно вынести за скобки всё, что можно вынести. В данном случае: $u'v + u(v' - v) = e^x$.

Теперь нужно составить систему уравнений. Система составляется стандартно.

Приравниваем к нулю то, что находится в скобках: $v' - v = 0$.

Если $v' - v = 0$, тогда из нашего уравнения $u'v + u(v' - v) = e^x$ получаем $u'v + u \cdot 0 = e^x$ или просто $u'v = e^x$.

Уравнения записываем в систему

$$\begin{cases} v' - v = 0 \\ u'v = e^x \end{cases}$$

Именно в таком порядке. Система опять же решается стандартно.

Сначала из первого уравнения находим функцию v. Это простейшее уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' - v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx$$

$$\ln|v| = x$$

$$v = e^x$$

Функция v найдена. Обратите внимание, что константу C на данном этапе мы не приписываем.

Далее подставляем найденную функцию $v=e^x$ во второе уравнение системы $u'v=e^x$:

$$u'\cdot e^x=e^x$$

Экспоненты сокращаются. Из второго уравнения находим функцию u.

$u'=1$

$\dfrac{du}{dx}=1$

$u=\int dx=x+C\cdot$

Функция u найдена. А вот здесь уже добавляем константу C.

Вспоминаем, с чего всё начиналось: $y=uv$.

Обе функции найдены:

$v=e^x$,

$u=x+C$.

Записываем общее решение: $y=uv=(x+C)\cdot e^x$, где $C=const$.

В ответе можно раскрыть скобки, но это не обязательно.

Ответ: общее решение $y=Ce^x+xe^x$, где $C=const$.

Можно выполнить проверку (она выполняется по той же технологии). Берём полученный ответ $y=Ce^x+xe^x$ и находим производную

$$y'=(Ce^x+xe^x)'=C(e^x)'+(x)'e^x+x(e^x)'=Ce^x+e^x+xe^x.$$

Подставим $y=Ce^x+xe^x$ и $y'=Ce^x+e^x+xe^x$ в исходное уравнение $y'-y=e^x$:

$Ce^x+e^x+xe^x-(Ce^x+xe^x)=e^x$

$Ce^x+e^x+xe^x-Ce^x-xe^x=e^x$

$e^x=e^x$

Получено верное равенство, таким образом, общее решение найдено правильно.

3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Однородное дифференциальное уравнение (ДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:

$$y''+py'+qy=0,$$

где p и q – константы (числа), а в правой части – строго ноль.

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое *характеристическое уравнение*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 .$$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:

– вместо второй производной записываем λ^2;

– вместо первой производной записываем просто «лямбду»;

– вместо функции y ничего не записываем.

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это обычное квадратное уравнение, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий. Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будем использовать готовые формулы.

1. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня.

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два различных действительных корня λ_1, λ_2 (т.е. если дискриминант $D > 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

где C_1, C_2 – константы.

В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} .$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$,

$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$,

$\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.

Получены два различных действительных корня. Всё, что осталось сделать, – записать ответ, руководствуясь формулой $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

Ответ: общее решение $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x},\ где\ C_1, C_2 - const$.

2. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня.

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два кратных (совпавших) действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы.

Если оба корня равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то общее решение опять же упрощается: $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 x e^{0 \cdot x} = C_1 + C_2 x$.

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$.

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно применить известную школьную формулу сокращенного умножения: $(\lambda - 3)^2 = 0$.

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$.

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$.

3. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни. Для понимания третьего случая требуются элементарные знания про комплексные числа. Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет сопряженные комплексные корни $\lambda_1 =$ $= \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид $y = e^{\alpha x} \cdot \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$, где C_1, C_2 – константы.

Примечание. *Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом:* $\lambda_{1,2} = \alpha + \beta i$.

Если получаются чисто мнимые сопряженные комплексные корни $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$, то общее решение упрощается:

$$y = e^{0 \cdot x} \cdot \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x.$$

Пример. Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$,

$D = 4 - 40 = -36$,

$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни.

Ответ: общее решение: $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x),\ где\ \ C_1, C_2 - const$.

3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y''+py'+qy=f(x)$, где p и q – константы, а $f(x)$ – функция, зависящая только от *x*. В простейшем случае функция $f(x)$ может быть числом, отличным от нуля.

Как решить линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами вида $y''+py'+qy=f(x)$?

Алгоритм решения неоднородного ДУ следующий.

1. Сначала нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения. Надо взять уравнение $y''+py'+qy=f(x)$, откинуть правую часть $y''+py'+qy=0$ и найти общее решение. Данная задача уже была подробно разобрана ранее. Общее решение однородного уравнения будем обозначать буквой Y.

2. Наиболее трудный этап. Необходимо найти какое-либо частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Сделать это можно так называемым способом подбора частного решения с применением метода неопределенных коэффициентов**.**

Метод неопределенных коэффициентов

Правая часть $f(x)$ неоднородного дифференциального уравнения часто представляет собой многочлен, экспоненциальную или тригонометрическую функцию, или некоторую комбинацию указанных функций.

Подчеркнем, что данный метод работает лишь для ограниченного класса функций в правой части, таких как

1. $f(x)=P_n(x)\exp(\alpha x)$;

2. $f(x)=\left[P_n(x)\cos(\beta x)+Q_m(x)\sin(\beta x)\right]\exp(\alpha x)$,

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ − многочлены степени n и m соответственно.

В обоих случаях выбор частного решения должен соответствовать структуре правой части неоднородного дифференциального уравнения.

В случае 1, если число α в экспоненциальной функции совпадает с корнем характеристического уравнения, то частное решение будет содержать дополнительный множитель x^s, где s − кратность корня α в характеристическом уравнении.

В случае 2, если число α + βi совпадает с корнем характеристического уравнения, то выражение для частного решения будет содержать дополнительный множитель x.

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой найденного выражения для частного решения в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

3. На третьем этапе надо составить общее решение y неоднородного уравнения**.** Это совсем легко: $y = Y + \tilde{y}$. Совершенно верно, следует их просто приплюсовать.

Если изначально в условии сформулирована *задача Коши* (найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям), то добавляется четвёртый этап.

4. Нахождение частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = 8x^3$.

Решение

1. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. Берём наше неоднородное дифференциальное уравнение $y'' - 4y = 8x^3$ и обнуляем правую часть: $y'' - 4y = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$ – получены различные действительные корни, поэтому общее решение $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x},\ где\ C_1, C_2 - const$.

2. Теперь нужно найти какое-либо частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y'' - 4y = 8x^3$.

Прежде всего, смотрим на нашу правую часть $f(x) = 8x^3$. Тут у нас многочлен третьей степени. По идее, частное решение тоже следует искать в виде многочлена третьей степени: $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, где A, B, C, D – пока ещё не известные коэффициенты (числа). Смотрим на корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$, найденные на предыдущем этапе: это различные действительные корни, отличные от нуля. Приходим к выводу, что, да, действительно, частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде: $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

Найдём первую и вторую производные:

$\tilde{y}' = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$,

$\tilde{y}'' = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$.

Подставим $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения

$$y'' - 4y \overset{(1)}{=} 6Ax + 2B - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \overset{(2)}{=}$$

$$= 6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D \overset{(3)}{=} 8x^3$$

1. Выполняем подстановку $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ и $\tilde{y}'' = 6Ax + 2B$.

2. Раскрываем скобки.

3. После максимальных упрощений ставим знак равенства и приписываем нашу правую часть $8x^3$.

Далее работаем с последним равенством: необходимо приравнять коэффициенты при соответствующих степенях и составить систему линейных уравнений. В картинках процесс выглядит так:

$$\boxed{6A}x + 2B \boxed{-4A}x^3 - 4Bx^2 \boxed{-4C}x - 4D = \boxed{8}x^3 + 0 \cdot x^2 + \boxed{0} \cdot x + 0$$

$$\begin{cases} -4A = 8 \\ -4B = 0 \\ 6A - 4C = 0 \\ 2B - 4D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \\ C = -3 \\ D = 0 \end{cases}$$

Чтобы было еще проще рекомендуется предварительно сгруппировать подобные слагаемые: $6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D = -4Ax^3 - 4Bx^2 + {}$ $+ (6A - 4C)x + (2B - 4D) = 8x^3$, и только потом составлять систему.

Подставляем найденные значения A, B, C, D в наш исходный подбор частного решения $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$:

$$\tilde{y} = -2x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x + 0 = -2x^3 - 3x.$$

Таким образом, подобранное частное решение неоднородного уравнения: $\tilde{y} = -2x^3 - 3x$.

3. Запишем общее решение неоднородного уравнения: $y = Y + \tilde{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - 2x^3 - 3x,\ где\ \ C_1, C_2 - const$.

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - 2x^3 - 3x,\ где\ \ C_1, C_2 - const$.

Пример. Найти частное решение неоднородного уравнения, соответствующее заданным начальным условиям $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Алгоритм решения полностью сохраняется, но в конце добавляется дополнительный пункт.

Решение

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 3$ – получены кратные действительные корни, поэтому общее решение $Y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$.

2. Выясняем, в каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$. Смотрим на правую часть неоднородного уравнения $f(x) = e^{3x}$, и сразу появляется первая версия подбора $\tilde{y} = Ae^{3x}$.

Далее смотрим на корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 3$ – действительные кратные корни. Приходим к выводу, что «очевидное» частное решение $\tilde{y} = Ae^{3x}$ необходимо домножить на x^2, т. е. частное решение следует искать в виде $\tilde{y} = Ax^2e^{3x}$.

Ищем неизвестный коэффициент A.

Найдем первую и вторую производные:

$\tilde{y}' = (Ax^2e^{3x})' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x} = (3Ax^2 + 2Ax)e^{3x}$,

$\tilde{y}'' = ((3Ax^2 + 2Ax)e^{3x})' = (6Ax + 2A)e^{3x} + (9Ax^2 + 6Ax)e^{3x} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x}$.

Подставим $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения и максимально упростим выражение

$y'' - 6y' + 9y = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x} - 6(3Ax^2 + 2Ax)e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} =$

$= (9Ax^2 + 12Ax + 2A - 18Ax^2 - 12Ax + 9Ax^2)\cdot e^{3x} = 2Ae^{3x} = e^{3x}$

В самом конце после упрощений приписываем исходную правую часть e^{3x}.

Из последнего равенства $2Ae^{3x} = e^{3x}$ следует: $2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$. Таким образом $\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$.

3. Составим общее решение неоднородного уравнения

$y = Y + \tilde{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x},\ где\ \ C_1, C_2 - const$.

4. Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Сначала берём найденное общее решение $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}$ и применяем к нему первое начальное условие $y(0) = 0$

$y(0) = C_1e^{3\cdot 0} + C_2\cdot 0\cdot e^{3\cdot 0} + \frac{1}{2}\cdot 0^2\cdot e^{3\cdot 0} = C_1e^0 + 0 + 0 = C_1$.

Согласно начальному условию $y(0) = C_1 = 0$ получаем первое уравнение.

Далее находим производную от общего решения:
$y' = \left(C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 e^{3x}\right)' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x} + x e^{3x} + \frac{3}{2} x^2 e^{3x}$ и применяем к найденной производной второе начальное уравнение $y'(0) = 1$: $y'(0) = 3C_1 e^0 + C_2 e^0 + 0 + 0 + 0 = 3C_1 + C_2$.

Согласно второму начальному условию $y'(0) = 3C_1 + C_2 = 1$ получаем второе уравнение.

Составим и решим систему

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y'(0) = 3C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 1.$$

Подставим найденные значения констант $C_1 = 0, C_2 = 1$ в общее решение $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 e^{3x}$.

Ответ: частное решение $y = x e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 e^{3x}$.

Пример. Найти общее решение неоднородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 21\cos 2x - \sin 2x$.

Решение

1. Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$,

$D = 4 - 20 = -16$,

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2}$,

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ – получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение $Y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

2. Частное решение неоднородного уравнения ищем в «обычном» виде: $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$.

Выясним, чему равны коэффициенты A, B.

Найдем производные:

$\tilde{y}' = (A\cos 2x + B\sin 2x)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$,

$\tilde{y}'' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$.

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения:
$$y'' - 2y' + 5y = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4A\sin 2x - 4B\cos 2x + 5A\cos 2x + 5B\sin 2x =$$
$$= (A-4B)\cos 2x + (4A+B)\sin 2x = 21\cos 2x - \sin 2x$$
(После подстановки и максимальных упрощений приписываем правую часть: $f(x) = 21\cos 2x - \sin 2x$).

Из последнего равенства $(A-4B)\cos 2x + (4A+B)\sin 2x = 21\cos 2x - \sin 2x$ составим и решим систему
$$\begin{cases} A-4B=21 \\ 4A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A-16B=84 \\ 4A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow 17B=-85 \Rightarrow B=-5; A=1.$$
(Здесь первое уравнение умножено на 4, а затем проведено почленное вычитание: из второго уравнения почленно вычтено первое уравнение). Таким образом, подобранное частное решение $\tilde{y} = \cos 2x - 5\sin 2x$.

3. Составим общее решение неоднородного уравнения
$$y = Y + \tilde{y} = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \cos 2x - 5\sin 2x, \ \textit{где} \ \ C_1, C_2 - const.$$

Ответ: общее решение
$$y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \cos 2x - 5\sin 2x, \ \textit{где} \ \ C_1, C_2 - const.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Что называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка?
4. Что называется частным решением дифференциального уравнения?
5. Каков геометрический смысл частного решения дифференциального уравнения первого порядка?
6. Приведите примеры дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
7. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным, а какое – уравнением Бернулли? Укажите способы их решения.
8. Какое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка?
9. Какое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка?

10. Какое уравнение называется характеристическим для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?
11. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от дискриминанта характеристического уравнения?
12. Как найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
13. Какой вид имеет частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если его правая часть есть многочлен, показательная функция, тригонометрическая функция, комбинация этих функций?

Глава 4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

4.1. Методические указания к решению задач

Решение типовых примеров.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\arccos^3 x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение

Сделаем замену t = arccosx. Тогда $dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и

$$\int \sqrt{t^3}(-dt) = -\int t^{\frac{3}{2}}dt = -\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = -\frac{2}{5}\sqrt{\arccos^5 x} + C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл $\int e^{x^3+3x}\left(x^2+1\right)dx$.

Решение

Применим подстановку $t = x^3 + 3x$, тогда $dt = \left(3x^2+3\right)dx = 3\left(x^2+1\right)dx$, откуда $\int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3+3x} + C$.

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{2x+9}{x^2-10x+26}dx$.

Решение

Преобразуем знаменатель дроби, стоящий под знаком интеграла, следующим образом: $x^2-10x+26=x^2-2\cdot 5x+25+1=(x-5)^2+1^2$. Тогда после замены $t=x-5$ получаем:

$\int \frac{2(t+5)+9}{t^2+1}dt=\int \frac{2t+19}{t^2+1}dt=\int \frac{2t}{t^2+1}dt+\int \frac{19}{t^2+1}dt$; второй интеграл является табличным.

Для решения первого интеграла нужно воспользоваться заменой переменной: $t^2+1=z$, тогда $dz=2tdt$, откуда $\int \frac{2t}{t^2+1}dt=$ $=\int \frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln\left|t^2+1\right|+C.$ Таким образом, окончательный ответ $\ln\left(t^2+1\right)+19\operatorname{arctg}t+C,$ или $\ln\left(x^2-10x+26\right)+19\operatorname{arctg}(x-5)+C$.

Пример 4. Найти интеграл: $\int (5x-1)\cos 7x dx$.

Решение

Применим формулу интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$. Разбиваем подынтегральное выражение на части: $u=(5x-1),\ dv=\cos 7x dx,$ тогда $du=5dx,\quad v=\int \cos 7x dx=\frac{1}{7}\sin 7x$.

Следовательно, $\int (5x-1)\cos 7x dx=\frac{1}{7}\sin 7x\,(5x-1)-\frac{5}{7}\int \sin 7x dx=$ $=\frac{5x-1}{7}\sin 7x+\frac{5}{7}\frac{1}{7}\cos 7x+C.$

Пример 5. Найти интеграл: $\int \operatorname{arctg}5x dx$.

Решение

Положим $u=\operatorname{arctg}5x,\ dv=dx$, тогда $du=\frac{5}{1+25x^2}dx,\quad v=x.$

Отсюда $\int \operatorname{arctg}5x dx=x\cdot\operatorname{arctg}5x-\int \frac{5x}{1+25x^2}dx$. Применяя в последнем интеграле подстановку $1+25x^2=t$, получаем $dt=50xdx$, следовательно, $\int \frac{5x}{1+25x^2}dx=\frac{1}{10}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{10}\ln|t|+C=\frac{1}{10}\ln\left|1+25x^2\right|+C$, отсюда $\int \operatorname{arctg}5x dx=x\cdot\operatorname{arctg}5x-\frac{1}{10}\ln\left(1+25x^2\right)+C$.

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{3x - 2}{x^3 - 1} dx.$

Решение

Разложим знаменатель на множители $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$, тогда $\frac{3x-2}{x^3-1} = \frac{3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ освобождаемся от знаменателя: $3x - 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x-1) = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx - C.$

Теперь приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^2 $A + B = 0,\ A = -B,$

x^1 $A - B + C = 3,$

x^0 $A - C = -2,\ C = A + 2.$

Из второго уравнения получаем $A + A + A + 2 = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{3}.$

Отсюда $A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{7}{3}.$

Следовательно, $\int \frac{3x-2}{x^3-1} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}{x^2+x+1} dx =$
$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x-7}{x^2+x+1} dx.$

Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегрального выражения $x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$

Произведем подстановку $t = x + \frac{1}{2},\ dt = dx,\ x = t - \frac{1}{2}$ и

$$\frac{1}{3}\int \frac{x-7}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{3}\int \frac{t - \frac{1}{2} - 7}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} dt + \frac{1}{3}\left(-\frac{15}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(t^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left(x^2 + x + 1\right) - \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2 + x + 1\right) + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

Пример 7. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

Решение

$$\int \sin^2 x \cos^5 x dx = [\sin x = t; \cos x dx = dt; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x] =$$

$$= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d \sin x = \int t^2 (1 - t^2)^2 dt =$$

$$= \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Решение

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin^2 x dx =$$

$$= \int \frac{\sin^2 2x}{4} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x = = \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx -$$

$$- \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Решение

Используем универсальную тригонометрическую подстановку

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} = [x = 2\mathrm{tg}t; dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}] = \int \frac{2dt}{\cos^2 t \cdot 2\mathrm{tg}t\sqrt{4+4\mathrm{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\cos^2 t \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos t}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{2}\int \frac{d\cos t}{\cos^2 t - 1} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\right| + C =$$

$$= [tgt = \frac{x}{2}; \cos t = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}] = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{2+\sqrt{x^2+4}}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{x}\right| + C.$$

Пример 11. Вычислим площадь фигуры, ограниченной параболами:

$y = 2x^2 - 3x - 6,$

$y = -x^2 + x - 2.$

Решение

Найдем абсциссы точек пересечения заданных парабол. Для этого приравняем правые части их уравнений: $2x^2 - 3x - 6 = -x^2 + x - 2$, $3x^2 - 4x - 4 = 0$, $Д = 16 + 4\cdot 12 = 64$, отсюда $x_1 = \frac{4+8}{6} = 2$, $x_2 = \frac{4-8}{6} = -\frac{2}{3}$.

Вычисление площади осуществляется по формуле

$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$, где $f_1(x), f_2(x)$ – кривые, ограничивающие фигуру ($f_1(x) \geq f_2(x)$).

В нашем случае

$$S = \int_{-\frac{2}{3}}^{2} \left[(1 - x^2 + x - 2) - \left(2x^2 - 3x - 4\right)\right]dx = \int_{-\frac{2}{3}}^{2}\left[-3x^2 + 4x + 2\right]dx = \left(-3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-\frac{2}{3}}^{2} =$$

$$= -\left(2^3 + \frac{8}{27}\right) + 2\left(2^3 - \frac{4}{9}\right) + 2\left(2 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{224}{27} + \frac{2\cdot 32}{9} + \frac{2\cdot 8}{3} = -\frac{224}{27} + \frac{192}{27} + \frac{144}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}.$$

Пример 12. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой $y = 5x^2$, прямой $y = -2x + 7$ и осью Оx.

Решение

Найдем абсциссу точки пересечения параболы и прямой в первом квадранте из системы уравнений $\begin{cases} y = 5x^2, \\ y = -2x + 2, \end{cases}$ откуда $5x^2 = -2x + 7$,

или $5x^2 + 2x - 7 = 0$.

Для этого решим уравнение $x_{0,1} = -\frac{1 + \sqrt{1+35}}{5} = \frac{-1 \pm 6}{5}$, $x_1 = 1$, $x_0 = -\frac{7}{5}$,

а также найдем абсциссу точки пересечения прямой с осью Оx:

$-2x + 7 = 0$,

$x_2 = \frac{7}{2}$.

Тогда, используя формулу для вычисления объёма тела вращения получим $V = V_1 + V_2$,

$$V_1 = \pi \int_0^{x_1} \left(5x^2\right)^2 dx,$$

$$V_2 = \pi \int_{x_1}^{x_2} (-2x + 7)^2 dx,$$

где $V_1 = \pi \int_0^1 25x^4 dx = \pi 5x^5 \Big|_0^1 = 5\pi$.

$$V_2 = \pi \int_1^{\frac{7}{2}} \left(4x^2 - 28x + 49\right) dx = \pi \left(\frac{4}{3} x^3 - 14x^2 + 49x \right) \Bigg|_1^{\frac{7}{2}} =$$

$$= \pi \left(\frac{4}{3} \left(\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 1 \right) - 14 \left(\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 1 \right) \right) = \pi \left(\frac{335}{6} - \frac{7 \cdot 45}{2} + \frac{49 \cdot 5}{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{12} (670 - 1890 + 1470) = \frac{125}{6} \pi.$$

Пример 13. Решить дифференциальное уравнение $\sqrt{1-x^2}ydy=-\sqrt{3+y^2}dx$.

Решение

Данное уравнение допускает разделение переменных. Разделяем переменные и интегрируем:

$\sqrt{1-x^2}ydy=-\sqrt{3+y^2}dx$,

$\dfrac{ydy}{\sqrt{3+y^2}}=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\displaystyle\int\frac{d\left(3+y^2\right)}{2\sqrt{3+y^2}}=-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

$\sqrt{3+y^2}=-\arcsin x+C$.

Ответ: общий интеграл: $\arcsin x+\sqrt{3+y^2}=C$, где $C=const$.

Пример 14. Решить уравнение $y'x\,ln\,x-y=3x^3\,ln^2\,x$.

Решение

Разделим обе части уравнения на $x\,ln\,x$: $y'-\dfrac{y}{x\,ln\,x}=3x^2\,ln\,x$, убеждаемся, что оно линейное. Положим $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$ и уравнение преобразуется к виду $u'v+uv'-\dfrac{uv}{x\int\,lnx}=3x^2\int lnx,$ или

$u'v+u\left(v'-\dfrac{v}{x\,ln\,x}\right)=3x^2\,ln\,x$.

Так как искомая функция представима в виде произведения двух вспомогательных функций u и v, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем в качестве v какой-либо частный интеграл уравнения $v'-\dfrac{v}{x\,ln\,x}=0$.

Тогда для отыскания функции u имеем уравнение

$$u'v=3x^2\,ln\,x. \qquad (*)$$

Получаем два уравнения с разделяющимися переменными.

Решаем первое уравнение:

$\dfrac{dv}{v}-\dfrac{dx}{x\,ln\,x}=0$, $\quad\displaystyle\int\frac{dv}{v}-\int\frac{d(ln\,x)}{ln\,x}=0$, $\quad ln|v|-ln|ln\,x|=0$, $\quad ln\left|\dfrac{v}{ln\,x}\right|=0$,

$\dfrac{v}{ln\,x}=1$, $v=ln\,x$.

Подставим $v = ln\,x$ в уравнение (*) и решим его:

$u'\ln x = 3x^2 \ln x$, $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$, $\int du = \int 3x^2 dx + C$, $u = x^3 + C$.

Следовательно, $y = (x^3 + C)ln\,x$ – общее решение данного уравнения.

Пример 15. Найти частное решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 6, y'(0) = 10$.

Решение

Для нахождения общего решения данного однородного уравнения составляем характеристическое уравнение $\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0$, имеющее корнями числа $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 3$.

Общим решением данного уравнения является функция $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

Используя начальные условия, определяем значения постоянных C_1 и C_2. Подставляя в общее решение заданные значения $x = 0$, $y = 6$ (первое начальное условие), получим $6 = C_1 + C_2$.

Дифференцируя общее решение уравнения, имеем $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$ и, подставляя в полученное выражение $x = 0$, $y = 10$ (второе начальное условие), получаем второе уравнение с неизвестными C_1 и C_2:

$10 = C_1 + 3C_2$.

Решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10 \end{cases}$$

находим $C_1 = 4$, $C_2 = 2$.

Подставляя значения $C_1 = 4$ и $C_2 = 2$ в общее решение уравнения, получим искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

Пример 16. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

Решение

Находим общее решение однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -2$, $k_2 = 1$. Тогда $y_{одн} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Найдем частное решение $\bar{y}$ данного неоднородного уравнения. Его правая часть есть функция $f(x)=6x^2$. Так, число 0 не является корнем характеристического уравнения, $\bar{y}$ есть многочлен второй степени, т. е. $\bar{y}=Ax^2+Bx+C$. Отсюда находим $\bar{y}'=2Ax+B$, $\bar{y}''=2A$ и, подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в данное уравнение, получаем тождество

$$2A+2Ax+B-2Ax^2-2Bx-2C\equiv 6x^2, \text{ или}$$

$$-2Ax^2+(2A-2B)x+2A+B-2C\equiv 6x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства (только при этом условии оно будет тождеством), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -2A=6, \\ 2A-2B=0, \\ 2A+B-2C=0, \end{cases}$$

из которой находим $A=-3$, $B=-3$, $C=-4{,}5$.

Следовательно, $\bar{y}=-3x^2-3x-4{,}5$, и искомым общим решением данного неоднородного уравнения является $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-3x^2-3x-4{,}5$.

Пример 17. Найти частное решение уравнения $y''-2y'+y=$ $=9e^{-2x}+2x-4$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Решение

Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет равные корни $k_1=k_2=1$, поэтому $y_{одн}=C_1e^x+C_2xe^x$.

Правая часть данного уравнения есть сумма показательной функции $9e^{-2x}$ и многочлена первой степени $2x-4$. Так как числа -2 и 0 не являются корнями характеристического уравнения, то

$$\bar{y}=Ae^{-2x}+Bx+C.$$

Подставляя $\bar{y}$, $\bar{y}'=-2Ae^{-2x}+B$, $\bar{y}''=4Ae^{-2x}$ в данное уравнение, имеем

$$4Ae^{-2x}+4Ae^{-2x}-2B+Ae^{-2x}+Bx+C\equiv 9e^{-2x}+2x-4.$$

Приравнивая коэффициенты подобных членов обеих частей этого тождества, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 9A=9, \\ B=2, \\ -2B+C=-4, \end{cases}$$

откуда A = 1, B = 2, C = 0.

Следовательно, $\bar{y}=e^{-2x}+2x$, и общим решением данного уравнения является функция $y=C_1e^x+C_2xe^x+e^{-2x}+2x$.

Используя начальные условия, определим значения постоянных C_1 и C_2. Так как $y(0)=1$, то C_1+1=1, C_1=0.

Находим производную $y'=C_1e^x+C_2e^x+C_2xe^x-2e^{-2x}+2$.

Тогда $C_1+C_2-2+2=1$, $C_1+C_2=1$, $C_2=1$.

Итак, $y=xe^x+e^{-2x}+2x$ − искомое частное решение.

4.2. Задачи для контрольной работы

В задачах 1 – 20 найти неопределённые интегралы способом подстановки (методом замены переменной).

1. $\int\sqrt{\cos x}\sin x dx$.
2. $\int(\ln x)^3\dfrac{dx}{x}$.
3. $\int\dfrac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$.
4. $\int\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$.
5. $\int e^{-x^2}xdx$.
6. $\int\dfrac{x}{2+x^4}dx$.
7. $\int\sqrt{\ln x}\cdot\dfrac{dx}{x}$.
8. $\int\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^2}}dx$.
9. $\int\dfrac{x}{2x^4+5}dx$.
10. $\int\dfrac{dx}{x\ln x}$.
11. $\int\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.
12. $\int\dfrac{x^2}{2x^3+3}dx$.
13. $\int\sqrt{5x^4+3}\;x^3dx$.
14. $\int x^2e^{x^3+1}dx$.
15. $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{8x^4-1}}dx$.
16. $\int\dfrac{x}{2x^2+3}dx$.
17. $\int\arcsin^2x\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
18. $\int\dfrac{\sqrt{\mathrm{arctg}\,x}}{1+x^2}dx$.
19. $\int\dfrac{\ln x+3}{x}dx$.
20. $\int\sqrt{1+2x^2}\;xdx$.

В задачах 21 – 40 найти неопределённые интегралы, используя выделение полного квадрата.

21. $\int \frac{4x-1}{x^2-4x+8}dx.$

22. $\int \frac{5x+8}{x^2+2x+5}dx.$

23. $\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx.$

24. $\int \frac{8x-3}{x^2+6x+10}dx.$

25. $\int \frac{7x+3}{x^2-4x+5}dx.$

26. $\int \frac{9x+10}{x^2-6x+10}dx.$

27. $\int \frac{3x+10}{x^2-8x+10}dx.$

28. $\int \frac{3x+7}{x^2+8x+17}dx.$

29. $\int \frac{5x-2}{x^2-2x+5}dx.$

30. $\int \frac{7x-3}{x^2+6x+13}dx.$

31. $\int \frac{8x-7}{x^2+10x+29}dx.$

32. $\int \frac{11x-3}{x^2+6x+13}dx.$

33. $\int \frac{10x-7}{x^2-8x+20}dx.$

34. $\int \frac{3x+11}{x^2-16x+68}dx.$

35. $\int \frac{5x+16}{x^2+2x+17}dx.$

36. $\int \frac{3x-11}{x^2-8x+20}dx.$

37. $\int \frac{17x+5}{x^2-12x+40}dx.$

38. $\int \frac{12x-7}{x^2+16x+65}dx.$

39. $\int \frac{8x-7}{x^2-2x+17}dx.$

40. $\int \frac{17x-3}{x^2+8x+32}dx.$

В задачах 41 – 60 найти неопределённые интегралы, применяя метод интегрирования по частям.

41. $\int \ln x dx.$

42. $\int (2x+1)\sin 3x dx.$

43. $\int (x-1)e^{2x}dx.$

44. $\int \mathrm{x}\cos 2\mathrm{x}\ dx.$

45. $\int \mathrm{arctg} 2\mathrm{x}\ dx.$

46. $\int (5\mathrm{x}+1)\ln x dx.$

47. $\int (8x-2)\sin 5x dx.$

48. $\int (x-3)e^{-2x}dx.$

49. $\int \sqrt{x}\ \ln 3x dx.$

50. $\int (2x+8)e^{-7x}dx.$

51. $\int \mathrm{x}^3 \ln x dx.$

52. $\int (3\mathrm{x}+7)\cos 5\mathrm{x}\ dx.$

53. $\int (12x+2)\sin 3x dx.$

54. $\int \sqrt[3]{x}\ \ln 2x dx.$

55. $\int x \sin 8x dx.$

56. $\int \arccos \mathrm{x}\ dx.$

57. $\int \arcsin 2x dx.$

58. $\int (2\mathrm{x}-1)\cos 3\mathrm{x}\ dx.$

59. $\int (8x-10)\sin 7x dx.$

60. $\int \ln 8x dx.$

В задачах 61 – 80 найти неопределённые интегралы, пользуясь разложением рациональных дробей на сумму простейших.

61. $\int \frac{x}{x^3+1}dx.$

62. $\int \frac{x+20}{x^3-8x}dx.$

63. $\int \frac{3x+1}{x(x^2+1)}dx.$

64. $\int \frac{2x+5}{x^3+2x}dx.$

65. $\int \frac{3x-1}{x^3+3x}dx.$

66. $\int \frac{8x+5}{(x+1)(x^2+2)}dx.$

.

67. $\int \frac{7x-2}{(x-3)(x^2+1)}dx.$

68. $\int \frac{5x-11}{x(x^2+4)}dx.$

69. $\int \frac{3x}{(x+1)(x^2+3)}dx..$

70. $\int \frac{2x}{x^3-1}dx.$

71. $\int \frac{3x-1}{x(x^2+3)}dx.$

72. $\int \frac{5x-1}{x^3+1}dx.$

73. $\int \frac{2x-1}{x^3-x}dx.$

74. $\int \frac{2x+5}{x^3-4x}dx.$

75. $\int \frac{x}{(x+5)(x^2+3)}dx.$

76. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4)}dx.$

77. $\int \frac{x}{(x-3)(x^2+10)}dx.$

78. $\int \frac{2x+5}{x(x^2+6)}dx.$

79. $\int \frac{x-3}{(x+2)(x^2+5)}dx.$

80. $\int \frac{x-2}{(x+2)(x^2+3)}dx.$

В задачах 81 – 100 найти неопределённые интегралы от тригонометрических функций.

81. $\int \sin^3 2x\cos^5 2x dx.$

82. $\int \sin^3 3x\cos^3 3x dx.$

83. $\int \sin^3 2x\cos^4 2x dx.$

84. $\int \sin^5 2x\cos^2 2x dx.$

85. $\int \sin^5 3x\cos^3 3x dx.$

86. $\int \sin^4 3x\cos^5 3x dx.$

87. $\int \sin^2 5x\cos^5 5x dx.$

88. $\int \sin^2 3x\cos^7 3x dx.$

89. $\int \sin^5 3x\cos^4 3x dx.$

90. $\int \sin^6 3x\cos^3 3x dx.$

91. $\int \sin^5 3x\cos^2 3x dx.$

92. $\int \sin^4 2x\cos^3 2x dx.$

93. $\int \sin^5 3x\cos^4 3x dx.$

94. $\int \sin^3 5x\cos^3 5x dx.$

95. $\int \sin^2 8x\cos^3 8x dx.$

96. $\int \sin^2 6x\cos^5 6x dx.$

97. $\int \sin^3 2x\cos^6 2x dx$

98. $\int \sin^3 7x\cos^2 7x dx.$

99. $\int \sin^3 7x\cos^3 7x dx.$

100. $\int \sin^4 8x\cos^3 8x dx.$

В задачах 101 – 120 найти неопределённые интегралы, используя формулы понижения степени.

101. $\int \sin^2 2x \cos 3x dx$.

102. $\int \sin^2 3x \cos 6x dx$.

103. $\int \sin^2 2x \cos x dx$.

104. $\int \sin^2 2x \cos 7x dx$

105. $\int \sin^2 3x \sin 4x dx$.

106. $\int \sin^2 3x \sin 7x dx$.

107. $\int \sin^2 5x \sin 9x dx$.

108. $\int \sin 3x \cos^2 2x dx$.

109. $\int \sin 3x \cos^2 x dx$.

110. $\int \sin 3x \cos^2 5x dx$.

111. $\int \sin 3x \cos^2 7x dx$.

112. $\int \cos 2x \cos^2 x dx$.

113. $\int \cos 3x \cos^2 5x dx$.

114. $\int \cos 5x \cos^2 7x dx$.

115. $\int \sin^2 8x \cos^2 2x dx$.

116. $\int \sin^2 6x \cos^2 2x dx$.

117. $\int \sin^2 2x \cos^2 4x dx$.

118. $\int \sin^2 7x \cos^2 x dx$.

119. $\int \cos^2 7x \cos^2 x dx$.

120. $\int \cos^2 8x \cos^2 2x dx$.

В задачах 121 – 140 найти неопределённые интегралы, используя универсальную тригонометрическую подстановку.

121. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

122. $\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$.

123. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.

124. $\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$.

125. $\int \frac{(\cos x-\sin x)dx}{(1+\sin x)^2}$.

126. $\int \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$.

127. $\int \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$.

128. $\int \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$.

129. $\int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$.

130. $\int \frac{(1+\sin x)dx}{1+\cos x+\sin x}$.

131. $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x}$.

132. $\int \frac{(1+\cos x)dx}{1+\cos x+\sin x}$.

133. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}$.

134. $\int \frac{(1+\sin x)dx}{(1-\sin x)^2}$.

135. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x+\sin x}$.

136. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$.

137. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}$.

138. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

139. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

140. $\int \frac{(1-\sin x)dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

В задачах 141 – 160 найти неопределённые интегралы, используя тригонометрические подстановки.

141. $\int \sqrt{256 - x^2}\,dx.$

142. $\int \frac{dx}{(25 + x^2)\sqrt{25 + x^2}}.$

143. $\int \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}.$

144. $\int \frac{dx}{\sqrt{(25 - x^2)^3}}.$

145. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4}\,dx.$

146. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$

147. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$

148. $\int x^2 \sqrt{16 - x^2}\,dx.$

149. $\int \frac{dx}{(16 + x^2)^{3/2}}.$

150. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}.$

151. $\int \frac{dx}{\sqrt{(64 - x^2)^3}}.$

152. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4}\,dx.$

153. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$

154. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4}\,dx.$

155. $\int \sqrt{(25 - x^2)^3}\,dx.$

156. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4}\,dx.$

157. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^4}\,dx.$

158. $\int \frac{dx}{(9 + x^2)^{3/2}}.$

159. $\int \frac{dx}{\sqrt{(36 - x^2)^3}}.$

160. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{36 - x^2}}.$

В задачах 161 – 180 вычислить площадь, ограниченную заданными параболами.

161. $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1;$ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6.$

162. $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2;$ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + 7.$

163. $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 2;$ $y = -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4.$

164. $y = 2x^2 + 6x - 3;$ $y = -x^2 + x + 5.$

168. $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4;$ $y = -\frac{2}{3}x^2 + x + 2.$

169. $y = x^2 - 5x - 3;$ $y = -3x^2 + 2x - 1.$

170. $y = x^2 - 2x - 5;$ $y = -x^2 - x + 1.$

171. $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 5;$ $y = -\frac{3}{4}x^2 - x + 1.$

175. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1;$ $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 2.$

176. $y = 2x^2 + 4x - 7;$ $y = -x^2 - x + 1.$

177. $y = 2x^2 + 3x + 1;$ $y = -x^2 - 2x + 9.$

178. $y = 2x^2 - 6x - 2;$ $y = -x^2 + x - 4.$

165. $y = 3x^2 - 5x - 1;$
$y = -x^2 + 2x + 1.$

166. $y = x^2 - 3x - 1;$
$y = -x^2 - 2x + 5.$

167. $y = 2x^2 - 6x + 1;$
$y = -x^2 + x - 1.$

172. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2;$
$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3.$

173. $y = 2x^2 - 6x + 3;$
$y = -2x^2 + x + 5.$

174. $y = x^2 - 3x - 4;$
$y = -x^2 - x + 8.$

179. $y = x^2 - 2x - 4;$
$y = -x^2 - x + 2.$

180. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1;$
$y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3.$

В задачах 181 – 200 найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, расположенной в первом квадрате и ограниченной заданными параболой и прямой.

181. $y = 2x^2;$
$y = -2x + 4.$

182. $y = x^2;$
$y = -x + 2.$

183. $y = 3x^2;$
$y = -x + 4.$

184. $y = \frac{1}{4}x^2;$
$y = -x + 3.$

185. $y = \frac{1}{2}x^2;$
$y = -3x + 8.$

186. $y = \frac{1}{3}x^2;$
$y = -3x + 12.$

187. $y = 4x^2;$
$y = -2x + 2.$

188. $y = \frac{1}{4}x^2;$
$y = -\frac{1}{2}x + 2.$

189. $y = 4x^2;$
$y = -2x + 6.$

190. $y = x^2;$
$y = -x + 3.$

191. $y = 2x^2;$
$y = -3x + 14.$

192. $y = \frac{1}{3}x^2;$
$y = -x + 6.$

193. $y = 3x^2;$
$y = -2x + 5.$

194. $y = \frac{1}{3}x^2;$
$y = -2x + 9.$

195. $y = \frac{1}{4}x^2;$
$y = -2x + 6.$

196. $y = 2x^2;$
$y = -x + 10.$

197. $y = 3x^2;$
$y = -3x + 6.$

198. $y = x^2;$
$y = -2x + 5.$

199. $y = \frac{1}{2}x^2;$
$y = -x + 3.$

200. $y = 3x^2;$
$y = -5x + 8.$

В задачах 201 – 220 найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

201. $xydx + (x+1)dy = 0$.

202. $y - y' = y^2 + xy'$.

203. $x^2 y' - 2xy = 3y$.

204. $2xy' = 1 - y^2$.

205. $x(x-1)y' + y = y^2$.

206. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

207. $(2y+8)^2 \cdot y' = (1-3x)^2$.

208. $y(x^2+1) + x(y^2-1) \cdot y' = 0.$

209. $(2x+5) \cdot y' = 3y + 7$.

210. $(x^2-1) \cdot y' + 2xy^2 = 0$.

211. $y' \cdot \mathrm{ctg} x + y = 2$.

212. $\sqrt{4+y^2}dx = (x^2 y + y)dy$.

213. $(1-x^2)dy + xydx = 0$.

214. $2x^2 yy' = 2 - y^2$.

215. $x^2 dy + (y-1)dx = 0$.

216. $x \cdot \dfrac{dx}{dy} + y = 1$.

217. $y' \cdot \mathrm{tg} x = y + 5$.

218. $10x^5 y' = -y^5$.

219. $xy' = e^y + 2y'$.

220. $y' = \dfrac{y}{x}$.

В задачах 221 – 240 решить задачу Коши.

221. $xy' = xy + e^x$; $y(1) = 0$.

222. $x^2 y' + xy + 1 = 0$; $y(1) = 0$.

223. $xy' - y = x^2 \cos x$; $y(\pi) = 0$.

224. $2xy' + y = 2x^3$; $y(1) = 1$.

225. $x^3 y' + 3yx^2 = 2$; $y(1) = 1$.

226. $x^3 y' - x^2 y + 12 = 0$; $y(1) = 4$.

227. $xy' + y = 3x^2$; $y(1) = 1$.

228. $x^2 y' + xy = x^3 - 1$; $y(1) = 0$.

229. $y' \sin x - y \cos x = 1$; $y(\pi/2) = 1$.

230. $2xy' - y = 3x^2$; $y(1) = 1$.

231. $(x^2 + y)dx = xdy$; $y(1) = 2$.

232. $xy' - y - x^3 = 0$; $y(2) = 4$.

233. $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3$; $y(0) = 1$.

234. $y' = \sin x \cos x - y \cos x$; $y(0) = -1$.

235. $y' + y = x + 2$; $y(0) = 1$.

236. $x^2 y' = 2xy + 3$; $y(1) = 0$.

237. $y' + xy = -x^3$; $y(0) = 3$.

238. $xy' + 2y = x^4$; $y(1) = -5/6$.

239. $y' - \cos x + y/x = 0$; $y(\pi/2) = 1$.

240. $y' - y/x - x = 0$; $y(1) = 1$.

В задачах 241 – 260 решить однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

241. $y'' - y' - 2y = 0;$
$y'' - 2y' + 2y = 0.$

242. $y'' - 6y' + 8y = 0;$
$y'' + 6y' + 10y = 0.$

243. $y'' - 2y' - 15y = 0;$
$y'' - 8y' + 20y = 0.$

244. $y'' - 11y' + 28y = 0;$
$y'' + 7y' + 10y = 0.$

245. $y'' - 5y' + 6y = 0;$
$y'' - 2y' + 5y = 0.$

246. $y'' - 7y' + 12y = 0;$
$y'' - 2y' + y = 0.$

247. $y'' - 9y' + 20y = 0;$
$y'' - 8y' + 17y = 0.$

248. $y'' - 5y' - 14y = 0;$
$y'' - 6y' + 8y = 0.$

249. $y'' + 6y' + 5y = 0;$
$y'' + 2y' + y = 0.$

250. $y'' - y' - 6y = 0;$
$y'' - 6y' + 13y = 0.$

251. $y'' + 8y' + 15y = 0;$
$y'' + 9y = 0.$

252. $y'' + 10y' + 24y = 0;$
$y'' + 4y = 0.$

253. $y'' - y' - 12y = 0;$
$y'' - 4y' + 5y = 0.$

254. $y'' + 7y' + 10y = 0;$
$y'' + 3y' + 2y = 0.$

255. $y'' + 2y' - 15y = 0;$
$y'' + y = 0.$

256. $y'' - 3y' - 10y = 0;$
$y'' + 2y' + 2y = 0.$

257. $y'' - 10y' + 16y = 0;$
$y'' + 16y = 0.$

258. $y'' - 4y' - 21y = 0;$
$y'' - 4y' + 8y = 0.$

259. $y'' + 3y' - 18y = 0;$
$y'' + 25y = 0.$

260. $y'' - 100y = 0;$
$y'' + 100y = 0.$

В задачах 261 – 280 найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

261. $y'' - 4y' + 3y = 2e^{3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$.

262. $y'' + 4y' = 4\cos 2x - 12\sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

263. $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

264. $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 9x + 9$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

265. $y'' - 2y' + y = 2e^{x}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 5$.

266. $y'' + 9y = 6\cos 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

267. $y'' + 2y' = 8x^3 + 12x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

268. $y'' + y = -2\sin x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

269. $y'' - 5y' + 4y = 4x^3 - 15x^2 + 6x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$.

270. $y'' - 4y' - 5y = -9xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

271. $y'' + 4y = x^4 + 3x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

272. $y'' + y' - 6y = (3 - 4x)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

273. $y'' - 9y' = 2x^3 + 6x^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

274. $y'' - 4y' + 3y = -xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

275. $y'' + 2y' - 3y = 6\cos 3x - 12\sin 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

276. $y'' + y = (2x + 2)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

277. $y'' + y' = 2 - e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

278. $y'' - 2y' = 2e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

279. $y'' - 3y' + 2y = 6\sin 2x - 2\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

280. $y'' + y' - 2y = 3e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4.3. Таблица распределения задач по вариантам

Номер варианта	Номера задач													
	Контрольная работа № 2													
1	1	21	41	61	81	101	121	141	161	181	201	221	241	261
2	2	22	42	62	82	102	122	142	162	182	202	222	242	262
3	3	23	43	63	83	103	123	143	163	183	203	223	243	263
4	4	24	44	64	84	104	124	144	164	184	204	224	244	264
5	5	25	45	65	85	105	125	145	165	185	205	225	245	265
6	6	26	46	66	86	106	126	146	166	186	206	226	246	266
7	7	27	47	67	87	107	127	147	167	187	207	227	247	267
8	8	28	48	68	88	108	128	148	168	188	208	228	248	268
9	9	29	49	69	89	109	129	149	169	189	209	229	249	269
10	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210	230	250	270
11	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191	211	231	251	271
12	12	32	52	72	92	112	132	152	172	192	212	232	252	272
13	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193	213	233	253	273
14	14	34	54	74	94	114	134	154	174	194	214	234	254	274
15	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195	215	235	255	275
16	16	36	56	76	96	116	136	156	176	196	216	236	256	276
17	17	37	57	77	97	117	137	157	177	197	217	237	257	277
18	18	38	58	78	98	118	138	158	178	198	218	238	258	278
19	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199	219	239	259	279
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280

4.4. Правила выполнения и оформления контрольной работы

При выполнении контрольной работы надо придерживаться указанных ниже правил.

1. Выбор варианта. Каждому студенту при поступлении присваивается учебный шифр. Он указан в зачетной книжке и студенческом билете. Студенты, учебные шифры которых равны числам от 1 до 20, выбирают соответствующие варианты заданий от 1 до 20. Если номер шифра больше 20, то вариант определяется по целому остатку от деления номера шифра на 20. Например, если шифр 60, то остаток от деления на 20 равен 0, следовательно, номер варианта 20. Если шифр 173, то остаток равен 13, следовательно, номер варианта 13, если шифр 1350, то остаток равен 10 и вариант 10-й и т.д. Номера задач, входящих в тот или иной вариант, указаны в специальной таблице.

2. Контрольную работу надо выполнить в отдельной тетради, оставляя поля для замечаний рецензента. В конце работы оставьте 3 – 4 чистые страницы, которые, возможно, понадобятся для исправления решений.

3. В заголовке работы должны быть разборчиво написаны фамилия, имя и отчество, группа, вариант, название дисциплины. Заголовок надо поместить на обложке тетради.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номер задач своего варианта.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие, заменив, где надо, общие данные контрольными из своего варианта.

6. Решения задач излагайте аккуратно, объясняя основные действия, выписывая нужные формулы, делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы исправьте все ошибки и недочеты, отмеченные рецензентом, вписав исправления на оставленных чистых страницах.

Заключение

Это учебно-практическое пособие (часть 2) является продолжением учебно-практического пособия «Высшая математика для студентов-заочников» (часть 1). Часть 2 содержит следующие разделы: «Неопределённый интеграл», «Определённый интеграл», «Дифференциальные уравнения».

Опыт показал, что для многих начинающих, особенно для заочников, значительную трудность представляет решение задач. Поэтому в данном пособии главное внимание уделено решению типовых примеров и задач. Однако прежде чем начать решать эти примеры, надо сначала изучить соответствующий теоретический материал.

В наше время в связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике будущие экономисты, инженеры, архитекторы, строители и другие нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим определяется место математики в системе высшего образования.

Можно с уверенностью сказать, что изучение математики способствует усвоению самого современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

Короче говоря, жизнь современного человека невозможна без математики.

Библиографический список

1. *Бугров, Я. С.* Высшая математика : в 3 т. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Дрофа, 2004. – Т. 1. – 288 с.

2. *Шипачёв, В. С.* Курс высшей математики / В. С. Шипачёв. – М. : Проспект, 2004. – 600 с.

3. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Г. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986. – Ч. 1. – 304 с.

4. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.

5. Сборник задач по высшей математике / К. Н. Лунгу [и др.]. – М. : Айрис Пресс, 2007. – 576 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КОКУРИНА Юлия Камильевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ

Учебно-практическое пособие

Часть 2

Редактор Р. С. Кузина

Технический редактор Н. В. Тупицына

Корректор В. С. Теверовский

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Подписано в печать 24.04.15.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 3,49. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.