

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

А. А. КОБЗЕВ  
Ю. Е. МИШУЛИН  
Н. А. НОВИКОВА  
А. В. ЛЕКАРЕВА

# СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ

Монография



Владимир 2014

УДК 62-50  
ББК 30в6  
С40

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор,  
лауреат Государственной премии СССР  
профессор кафедры «Гидропневмоавтоматика и гидропривод»  
Ковровской государственной технологической академии  
имени В. А. Дегтярева  
*В. К. Кутузов*

Доктор технических наук, профессор  
профессор кафедры «Информационные системы  
и информационный менеджмент»  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*Р. И. Макаров*

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

**Системы** автоматического управления с параллельной про-  
С40 гнозирующей моделью : монография / А. А. Кобзев [и др.] ;  
Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир :  
Изд-во ВлГУ, 2014. – 160 с. – ISBN 978-5-9984-0507-5.

Изложены вопросы, направленные на повышение точности систем автоматического управления технологическими объектами и процессами с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой. Монография отражает результаты научных исследований, проводимых по проектам № 2.1.2/3091, № 2.1.2/11985 «Разработка и исследование систем автоматического управления с прогнозирующими моделями для объектов с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой» по ФЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» и некоторые результаты исследований по госзаказу, НИР № 3082 «Исследование и разработка математических моделей и алгоритмов обеспечения достоверности и доступности информации в системах передачи данных и обработки информации, функционирующих в условиях информационного противостояния».

Предназначена для специалистов, занимающихся проектированием систем автоматического управления технологического и специального оборудования, полезна для студентов и аспирантов вузов, обучающихся по направлениям «Мехатроника и робототехника», «Автоматизация технологических процессов и производств», «Электроэнергетика и электротехника».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Табл. 2. Ил. 52. Библиогр.: 40 назв.

УДК 62-50  
ББК 30в6

ISBN 978-5-9984-0507-5

© ВлГУ, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	5
<b>1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СТРУКТУРЫ САУ С НЕ ПОЛНОСТЬЮ НАБЛЮДАЕМОЙ РЕГУЛИРУЕМОЙ КООРДИНАТОЙ.....</b>	<b>7</b>
1.1. Определение САУ с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой .....	7
1.2. Классификация систем автоматического управления .....	14
с прогнозирующей моделью .....	14
1.3. Структуры САУ с прогнозирующими моделями .....	16
<b>2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ И ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ .....</b>	<b>22</b>
2.1. Классификация методов прогнозирования .....	22
2.2. Применение канонического полинома для приближения функций многочленами.....	26
2.3. Интерполирование функций с помощью полинома Лагранжа.....	29
2.4. Интерполирование функций с помощью полинома Ньютона.....	33
2.5. Интерполяция функций с использованием схемы Эйткена ..	36
2.6. Глобальная и кусочно-полиномиальная интерполяция .....	38
2.7. Интерполяция сплайнами .....	41
2.8. Тригонометрическая интерполяция .....	47
2.9. Метод наименьших квадратов.....	51
2.10. Другие методы прогнозирования.....	59
2.11. Рекомендации по выбору и методический подход к построению вычислительного алгоритма для прогнозирующей модели.....	61
2.12. Прогнозирование функций с разрывом первого рода .....	64
<b>3. РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В СРЕДЕ MATLAB.....</b>	<b>66</b>
3.1. Реализация интерполяции в MATLAB .....	66
3.2. Реализация интерполяции в MATLAB – SIMULINK.....	78
3.3. Моделирование алгоритма работы прогнозатора.....	81

4. ВВЕДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЧЕТВЕРТОЙ ФОРМЫ ИНВАРИАНТНОСТИ.....	88
4.1. Структуры САУ с введением дополнительного управления	88
4.2. Четвертая форма инвариантности – основа формирования дополнительного управления .....	91
4.3. Составляющие ошибок.....	94
4.4. Алгоритмы формирования дополнительного управления ...	98
4.5. Реализация дополнительного управления в системах программного управления .....	105
5. УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ В ЗАДАЧАХ ..... ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ.....	112
5.1. Формирование дополнительного управления в режимах ....	112
позиционирования.....	112
5.2. Определение условий прогноза на изменение управления .	122
6. ИССЛЕДОВАНИЕ САУ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ .....	130
6.1. Исследование САУ с параллельной моделью .....	130
6.2. Исследование САУ с параллельной моделью и прогнозированием внешних воздействий .....	139
6.3. Исследование алгоритмов формирования дополнительного управления .....	142
Заключение.....	153
Список использованных источников .....	155

## Введение

В работе рассматривается одно из перспективных направлений повышения точности процесса управления в классе систем автоматического управления (САУ) введением параллельной прогнозирующей модели (ПМ) основному контуру (САУ ПМ). Рассматриваемые технологические объекты управления – станки с ЧПУ, у которых обратная связь замыкается по координатным перемещениям, в то время как регулируемая координата – точка взаимодействия кромки режущего инструмента и заготовки; промышленные роботы, у которых датчики обратных связей установлены в «суставах плеч». Это также транспортные машины, на которых установлены системы слежения за подвижными объектами или иное специальное навесное оборудование. Регулируемая координата: продольная ось антенны локатора, ось ствола орудия или направляющей пусковой установки или навесного специального оборудования, в то время как датчики обратной связи установлены на координатных приводах. Такое управление может быть использовано также для подвижных транспортных средств в автоматическом (дистанционном) режиме в условиях переменных параметров рельефа местности и трассы движения.

Несмотря на широкое применение прогнозирующих систем в полуавтоматических системах управления, в САУ с элементами неопределенности внешней среды и состояния объекта управления это направление развито недостаточно.

В основу книги легли материалы исследований, выполненных по федеральной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы», проекты № 2.1.2/3091 и № 2.1.2/11985 «Разработка и исследование систем автоматического управления с прогнозирующими моделями для объектов с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой» и некоторые результаты исследований по госзаказу, НИР № 3082 «Исследование и разработка математических моде-

лей и алгоритмов обеспечения достоверности и доступности информации в системах передачи данных и обработки информации, функционирующих в условиях информационного противостояния». Работа выполнялась на кафедре «Мехатроника и электронные системы автомобилей» Владимирского государственного университета. Авторы выражают благодарность аспирантам кафедры Ю. С. Потанину, Н. Р. Липатову, Е. Ю. Мишулину, А. А. Махфуз и инженеру Е. В. Носкову, принимавшим участие в исследовании и моделировании ряда структур и алгоритмов.

В настоящей работе рассмотрены основные вопросы по построению САУ с ПМ. Даны классификация САУ с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой; характерные структуры САУ с ПМ; методы прогнозирования управляющих и возмущающих воздействий для построения прогнозатора в контуре прогнозирующей модели и их программно-алгоритмическая реализация; введение дополнительного управления с прогнозом на основе четвертой формы инвариантности; основы применения прогнозирующего подхода в режимах позиционирования САУ и некоторые прикладные вопросы применения прогнозирующего управления.

# 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СТРУКТУРЫ САУ С НЕ ПОЛНОСТЬЮ НАБЛЮДАЕМОЙ РЕГУЛИРУЕМОЙ КООРДИНАТОЙ

## 1.1. Определение САУ с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой

Требование повышения эффективности управления, оптимального использования на каждом этапе работы управляемой системой всех располагаемых ресурсов (энергетических, информационных, вычислительных и др.) приводит к необходимости более тщательного учета особенностей конструкции объекта управления и всех элементов системы автоматического управления (САУ) при соблюдении множества ограничений. При этом в практических задачах приходится иметь дело со сложными многомерными нелинейными системами и процессами.

В общем случае САУ состоит из объекта управления и устройства управления, включающего в себя усилительные, преобразовательные, исполнительные и измерительные устройства. Функциональная схема системы приведена на рис. 1.1. Состояние объекта в каждый момент времени характеризуется  $n$  переменными  $x_1, \dots, x_n$ , называемыми координатами состояния. Их удобно считать координатами  $n$ -мерного вектора состояния  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Измерительное устройство выдает информацию о состоянии объекта. Если на основании вектора измерения  $z(t)$  могут быть найдены значения всех координат состояния  $x_i(t)$ , то система будет полностью наблюдаемой; если некоторые координаты состояния  $x_i(t)$  не могут быть найдены при известном значении вектора измерения  $z(t)$ , то система будет не полностью наблюдаемой. Управляющее устройство вырабатывает управляющее воздействие  $u(t)$ . Таких управляющих воздействий может быть несколько, поэтому полагаем, что  $u(t)$  является  $r$ -мерной векторной величиной

$$u(t) = \{u_1(t), \dots, u_r(t)\}.$$

Задачей системы является воспроизведение полезного управляющего воздействия  $G$ , как правило, при действии возмущения на объект управления  $F$ , представляющего нагрузку, или помеху. Измерение координат объекта измерительным устройством может производиться с некоторыми случайными погрешностями  $v$ , называемыми шумами измерения.

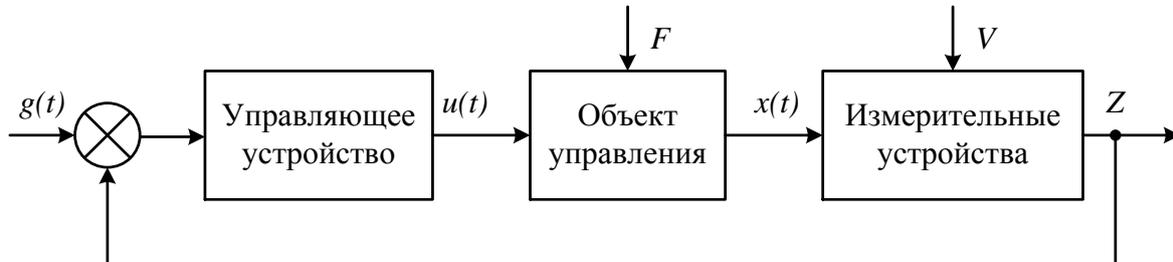


Рис. 1.1. Функциональная схема САУ

Задачей управляющего устройства является выработка такого управляющего воздействия  $u(t)$ , чтобы качество функционирования САУ в целом было бы наилучшим в некотором смысле.

Вектор состояния может быть представлен в виде

$$\dot{X} = A[x] \cdot G + B[x] \cdot F + C[x, z] + D[z].$$

Здесь  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  – известные (заданные) функции указанных аргументов.

Рассмотрим такие объекты управления, которые будут управляемыми, т. е. вектор состояния которых можно изменять требуемым образом путем соответствующего изменения вектора управления. Строгое понятие управляемости приведено в [6, 15].

Важной особенностью большого класса систем и процессов является то, что регулируемая координата не полностью наблюдаема (непосредственно не охватывается обратной связью), а следовательно, не учитываются динамические свойства неохваченной части объекта регулирования. В первую очередь это относится к таким объектам, как механообрабатывающее оборудование (точка контакта инструмента с деталью), промышленные роботы (рабочая поверхность инструмента, расположенного в схвате), машины литья под давлением (многофакторный процесс с косвенным контролем перемещения рабочих органов и температуры пары матрица-пуансон). К таким системам также относятся системы слежения за подвижными объектами; объекты вооружения, расположенные на гусеничных и колесных транспортных средствах, и др. В них датчики обратной связи уста-

навливаются, как правило, в узле поворотной цапфы, в промежуточном звене механической передачи. Они также могут быть встроены в исполнительный двигатель или являются гироскопическими, установленными в непосредственной близости к оси цапф. Непосредственная установка датчиков для получения информации о регулируемой координате и ее производным по конструктивным особенностям практически невозможна.

Сформулируем *правила выделения объектов*, относящихся к САУ с не полностью наблюдаемой координатой [25, 26].

1. *Системы автоматического управления, у которых хотя бы одна координата в области состояния переменных  $X(t)$  не наблюдаема, назовем системами автоматического регулирования с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой.*

2. *Системы автоматического управления, в которых регулируемая координата не может быть получена в силу их конструктивных особенностей, причем главная обратная связь берется с промежуточной координаты, назовем системами автоматического регулирования с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой. В таких системах главная обратная связь берется с промежуточной координаты, после которой стоит как минимум одно звено. Назовем эти системы вида САУ НК 1.*

3. *Системы автоматического управления, в которых регулируемая координата не может быть получена в силу физической реализации элементов, назовем системами автоматического регулирования с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой. Это системы с определенного вида нелинейностями и дискретными элементами. При изменении входного сигнала в определенном интервале его числовых значений или интервале времени выходная координата не изменяется. Назовем эти системы вида САУ НК 2.*

4. *Системы автоматического управления, в которых хотя бы одна координата в пространстве состояний не может быть получена в силу их конструктивных особенностей исполнения звеньев САУ. Назовем эти системы вида САУ НК 3.*

Структурная схема типовой САУ приведена на рис. 1.2. Здесь выделены три блока прямого контура: привод с кинематической передачей, описываемый передаточной функцией  $W_1(p)$ ; объект управления, часть которого охвачена главной обратной связью, с передаточной функцией  $W_2(p)$ ; объект управления, часть которого не охвачена главной обратной связью, с передаточной функцией  $W_3(p)$ , назовем его далее «свободное звено».

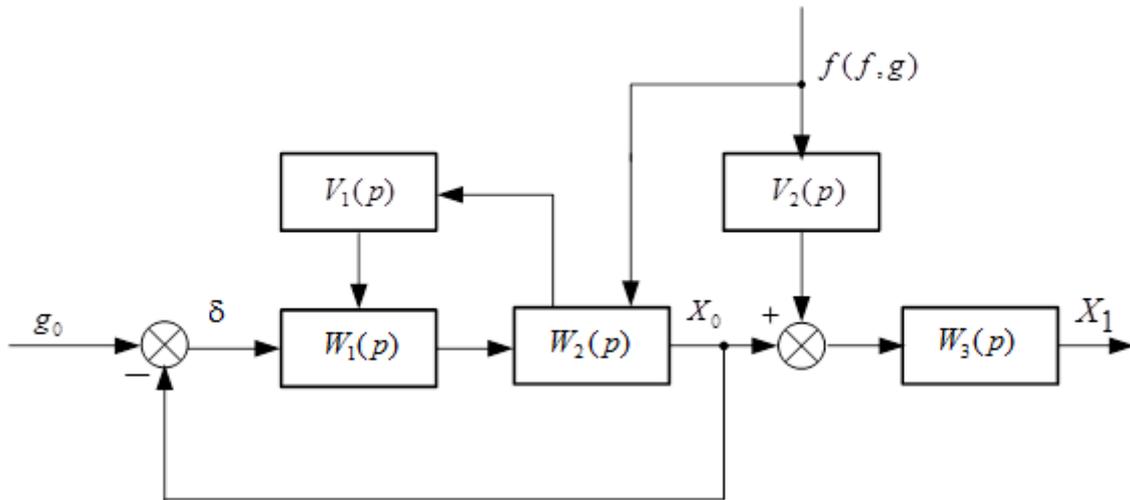


Рис. 1.2. Структурная схема САУ

На структурной схеме также обозначены:  $V_1(p)$ ,  $V_2(p)$  – передаточные функции привода по возмущению для охваченной и не охваченной частями объекта главной обратной связью соответственно;  $g_0, f(f, g)$  – управляющее и возмущающее воздействия привода соответственно;  $X_1, X_0$  – непосредственно регулируемая координата и ее промежуточное значение, охваченное в САУ главной обратной связью, соответственно;  $\delta$  – ошибка системы. Возмущение показано как функция двух параметров. Действительно, здесь возмущение является как функцией внешней среды, параметрами движения объекта, выполняемым процессом и соответственно его особенностями, так и внешними возмущениями в виде функции  $f(f, g)$ .

Для этой САУ ошибка определяется

$$\delta(p) = \left[ \frac{1}{1+W(p)} g_0(p) + \frac{V_1(p)}{1+W(p)} f(p) \right] W_3(p) + V_2(p) W_3(p) f(p). \quad (1.1)$$

Как следует из (1.1), свободное звено вносит составляющую в ошибки прямого тракта по управлению и возмущению и дополнительно от возмущения, подаваемого на его вход, от действия внешней среды.

Обратимся к выходной координате системы. Считаем, что система линейна и, следовательно, в ней справедлив принцип суперпозиции. Представим САУ в виде двух последовательно соединенных систем – контура, охваченного обратной связью, и свободного звена. Тогда выходную координату можно записать как

$$X_1(p) = X_0(p)[1 + V_2(p)W_3(p)f(p)], \quad (1.2)$$

где

$$X_0(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} g_0(p) + \frac{V_1(p)}{1+W(p)} f(p).$$

Так как нас интересует ошибка, вносимая свободным звеном, то выполним элементарную процедуру, аналогичную процедуре декомпозиции системы. Разделим ошибки в системе, определяемой уравнением (1.1), на две составляющие, одна из которых  $\delta_0(p)$  определяется звеном, охваченным обратной связью, а другая –  $\Delta\delta(p)$  – свободным звеном, т. е.

$$\delta_1(p) = \delta_0(p) + \Delta\delta(p), \quad (1.3)$$

где

$$\delta_0(p) = \frac{1}{1+W(p)} g_0(p) + \frac{V_1(p)}{1+W(p)} f(p),$$

$$\Delta\delta(p) = X_0(p)[1 + V_2(p)W_3(p)f(p)]. \quad (1.4)$$

Дополнительная ошибка в операторной форме, подлежащая парированию, определяется выражением (1.4).

*Концепция выделения класса систем автоматического управления с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой* состоит в следующей последовательности процедур.

1. Анализ технологического процесса или режим работы объекта управления.

2. Анализ носителя, на котором расположены подсистемы управления непосредственно исполнительного устройства или объекта управления.

3. Анализ структуры исходной системы. Выделение подсистем.

4. Установление структурной взаимосвязи подсистем в части иерархии и формирования управляющих и возмущающих воздействий.

5. Выделение звеньев, порождающих ненаблюдаемость координат пространства состояний. Определение зон и временных интервалов не полной наблюдаемости.

6. Определение звеньев системы, не охваченных главной обратной связью.

7. Составление модели звеньев, не охваченных главной обратной связью.

В техническом плане задача парирования дополнительной ошибки наиболее остро встает для трех видов технических систем, а именно:

1) объектов слежения, стоящих на подвижных транспортных средствах (наземных, морских, авиационных). Будем рассматривать в основном наземные;

2) промышленных роботов с угловой и антропоморфной кинематикой с «длинными» плечами;

3) металлообрабатывающих станков (токарной, фрезерной и других групп). Будем рассматривать в основном токарные.

Покажем особенности этих видов САУ.

1. *Объекты слежения, расположенные на подвижных транспортных средствах:*

– САУ представляет две последовательно соединенные взаимосвязанные системы. Первая (подвижный объект) формирует возмущающие воздействия, подлежащие их парированию и стабилизации. Координатные колебания корпуса являются управляющими, порождают возмущающие воздействия для второй системы – непосредственного слежения за подвижными объектами;

– закон изменения управляющего воздействия носит случайный характер и представляет субгармоническую функцию;

– управляющее воздействие для системы в явном виде не формируется;

– сигналом прямого тракта системы является сигнал ошибки, получаемый с гироскопического датчика;

– «платформа» представляет балку, закрепленную в шарнире, причем одно плечо  $l_1$  как минимум на порядок короче другого  $l_2$ ;

– регулируемой координатой, определяющей «качество технологического процесса», является крайняя точка продольной оси балки длинного плеча  $l_2$ ;

– гироскопический датчик главной обратной связи располагается на коротком плече балки в непосредственной близости от оси шарнира;

– если считать балку нежестким звеном, то датчик главной обратной связи не дает достоверной информации о регулируемой координате

при возмущающих воздействиях с большими ускорениями и значительной массе балки (платформы);

– по конструктивным и «технологическим» факторам невозможна установка гироскопического датчика обратной связи на конце длинного плеча балки (платформы);

2. *Промышленные роботы с угловой и антропоморфной кинематикой с «длинными» плечами на примере лазер-робота:*

– манипулятор оптики лазер-робота является многомерным гибридным объектом связанного управления и регулирования позиционными кинематическими, силовыми, энергетическими и температурными параметрами;

– процесс управления положением лазерного луча и точки фокуса в пространстве, являющийся, по сути, основным процессом, осуществляется опосредованно в функции состояния исполнительной системы манипулятора оптики и внешних воздействий на него, поскольку физическая обратная связь может быть организована лишь по  $Q$ -обобщенным координатам.

– кинематические упругие звенья имеют деформации, приводящие к изменению положения объекта регулирования (конечной точки лазерного луча в пространстве);

– как следствие, в этой САУ регулируемой координатой является конечная точка луча, которая не охватывается единичной главной обратной связью, т.е. является не полностью наблюдаемой;

– для анализа САУ звеньями промышленных роботов с антропоморфной кинематикой получила развитие теория многомерных матриц.

3. *САУ управлением механообработки (на примере станков токарной группы) [8, 9]:*

– звено САУ «инструмент-деталь» не охвачено главной обратной связью;

– модель многоконтурная с перекрещивающимися взаимосвязями;

– в свободном звене имеется звено с чистым запаздыванием.

При разработке САУ с прогнозирующей моделью, их анализе и синтезе выделим следующие основные вопросы:

1. Разработка структур САУ с ПМ в зависимости от вида управляемого процесса или объекта управления.

2. Анализ и выбор прогнозирующих функций и полиномов и основа их реализация.

3. Выбор способа формирования дополнительного управления, содержащего элемент прогноза.

4. Введение прогнозирующего управления в режимах позиционирования.

5. Прикладные вопросы применения САУ с ПМ.

## **1.2. Классификация систем автоматического управления с прогнозирующей моделью**

Одним из возможных вариантов построения рациональной структуры САУ, повышающей характеристики управления объектов отмеченного вида, является введение параллельной прогнозирующей модели (ППМ) основному контуру, в которой замыкание осуществляется непосредственно по регулируемой координате. Как уже отмечалось, прогнозирующее управление широко используется в полуавтоматических системах, где оператор непосредственно сам или с использованием вычислительных средств вводит дополнительную составляющую в управляющее воздействие с учетом упреждения. Классический пример – торпедная стрельба по движущейся цели, бомбометание и др. Параллельные прогнозирующие модели в динамических САУ не нашли широкого применения. Возможно дальнейшее развитие структур с названными моделями. В отечественной литературе такой подход получил названия «управление методом прогнозирующей модели» (А. А. Красовский и его школа [31, 32]), «упреждающего управления» (Н. Б. Филимонов), «метод управления с прогнозом» [30] и т.п.; в зарубежных источниках используется термин «model predicative control (MPC)» [10]. Возможно дальнейшее развитие таких структур. Например, можно сформировать упреждающее корректирующее воздействие, подаваемое на вход основного контура, в виде не только производных, но и дополнительной составляющей в управляющем воздействии. Впервые эта задача была поставлена в работах А. Г. Ивахненко, М. Б. Игнатъева [16], Б. И. Андрейчикова [4] и др. [17, 35, 36].

Классификационное дерево САУ с прогнозирующими моделями приведено на рис. 1.3.

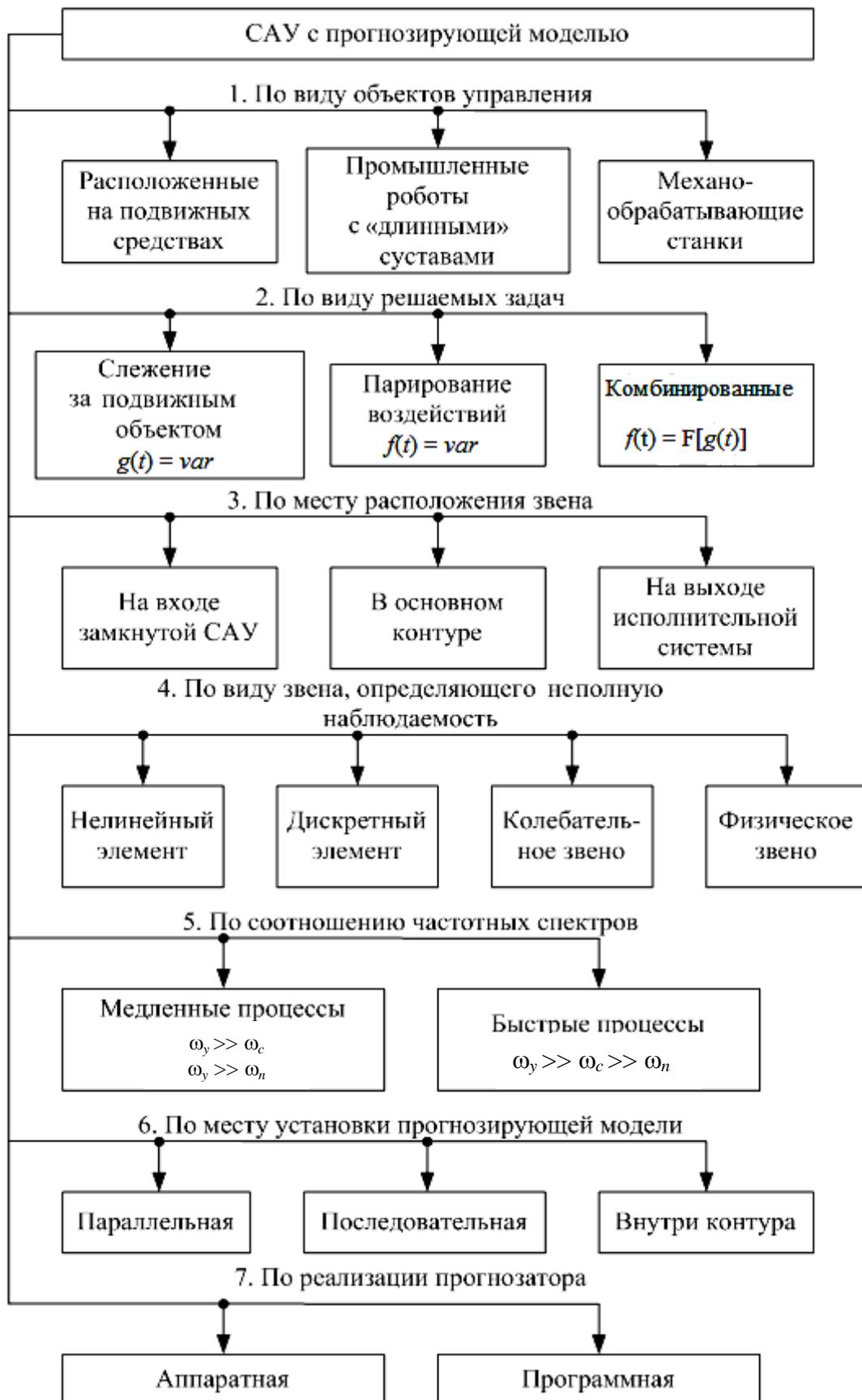


Рис. 1.3. Классификация систем управления с прогнозирующей моделью

Выделены следующие классификационные признаки.

1. По виду объекта управления. Выделяются объекты управления, их структура, подсистемы, их взаимосвязи, а также звенья, порождающие ненаблюдаемость.

2. По виду решаемых задач. Выделяется функциональное назначение САУ.

3. По месту расположения звена, порождающего ненаблюдаемость, ее степень. В дальнейшем будет рассматриваться класс систем с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой.

4. По виду звена, определяющего ненаблюдаемость. Это нелинейные элементы первого рода, у которых имеются зоны значений входного сигнала, когда при изменении входного сигнала выходной сигнал не изменяется: насыщения, нечувствительность; второго рода – люфт, гистерезис.

Дискретные элементы, у которых между периодами квантования выходная координата сохраняет постоянное значение. Отметим, что под физическим звеном имеются в виду технологические процессы, например взаимодействие режущей кромки инструмента с поверхностью заготовки. Эти процессы описываются сложной системой нелинейных уравнений и рассматриваются в данных системах как звено, не охваченное главной обратной связью.

5. По соотношению частотных спектров. Выделим частоты управляющего и возмущающего воздействий, полосу частот контура регулирования и собственную эквивалентную частоту звена, не охваченного обратной связью.

6. По месту установки модели: параллельная, последовательная, во внутреннем контуре.

7. По реализации возможны два естественных варианта – аппаратная и программная. Последняя, в свою очередь, может быть на микроЭВМ, микропроцессорах, ПЛИС.

### **1.3. Структуры САУ с прогнозирующими моделями**

В результате работ, проводимых по настоящему направлению, разработаны три структуры САУ с прогнозирующими параллельными моделями для объектов с не полностью наблюдаемыми регулируемые координатами [25, 26, 28, 36].

Структурная схема САУ приведена на рис. 1.4. Здесь выделены три блока прямого контура: привод с кинематической передачей, описываемый передаточной функцией  $W_1(p)$ ; объект управления, часть которого охвачена главной обратной связью, с передаточной функцией  $W_2(p)$ ; объект управления, часть которого не охвачена главной обратной связью, с передаточной функцией  $W_3(p)$ , назовем его далее «свободное звено».

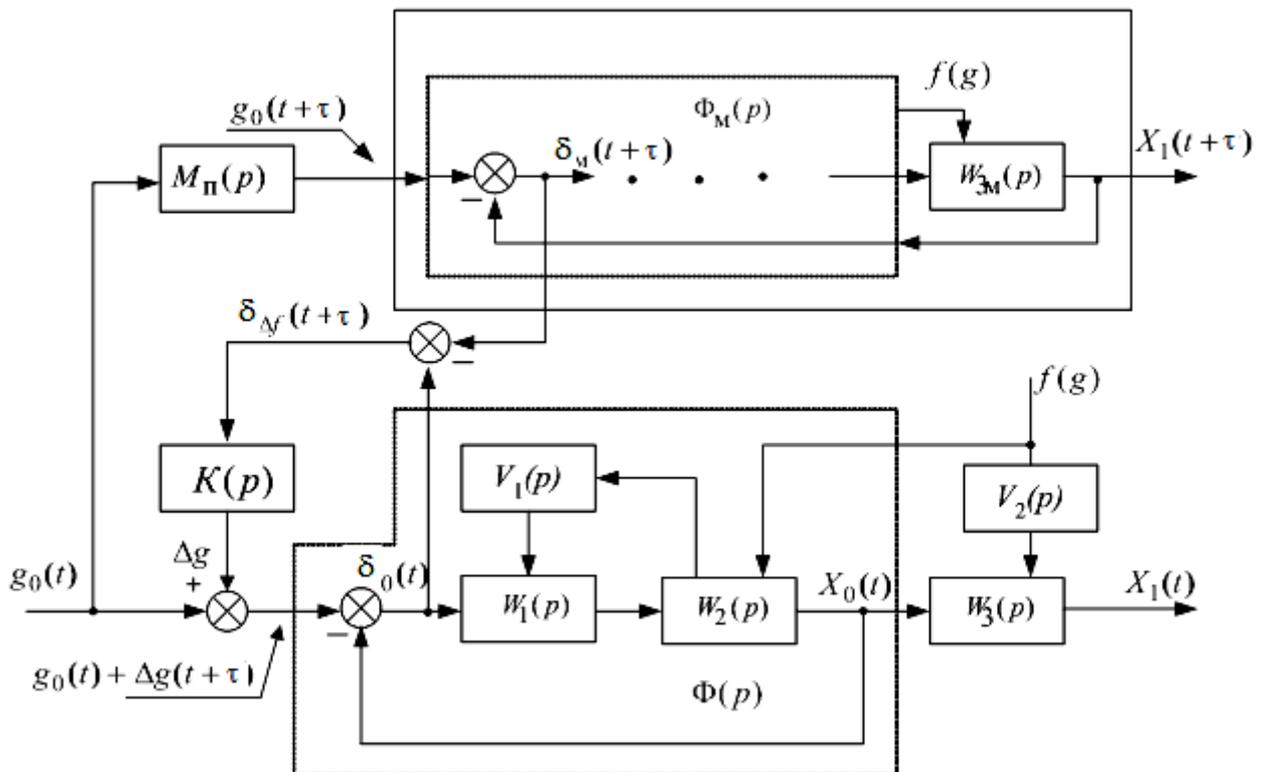


Рис. 1.4. Структурная схема системы с параллельной прогнозирующей моделью по управлению

На структурной схеме также обозначены:  $V_1(p)$ ,  $V_2(p)$  – передаточные функции привода по возмущению для охваченной и неохваченной частями объекта главной обратной связью соответственно;  $g_0$ ,  $f(f, g)$ ,  $\delta$  – управляющее и возмущающее воздействия привода воздействие соответственно и ошибка;  $X_1$ ,  $X_0$  – непосредственно регулируемая координата и ее промежуточное значение, охваченное в САУ главной обратной связью.

Особенности структуры:

1) на входе модели стоит опережающее звено с передаточной функцией  $M_{\Pi}(p) = e^{p\tau}$ , где  $\tau$  – время упреждения; назовем его «прогнозатор»;

2) модель основного контура включает все звенья прямого тракта, в том числе и свободного звена; ее передаточные функции

$$\Phi_M(p) = \frac{W_M(p)}{1 + W_M(p)}, \quad \Phi_{f_M}(p) = \frac{V_1(p)}{1 + W_M(p)};$$

3) последовательно соединенные опережающее звено (прогнозатор) и полная модель системы управления, включая свободное звено, назовем «прогнозирующая модель» (ПМ);

4) дополнительная составляющая в управляющем воздействии формируется на основе разности сигналов ошибки прогнозирующей модели и системы:

$$\delta_{\Delta f}(t + \tau) = \delta_{\Delta f}(t + \tau) - \delta_0(t);$$

5) дополнительное управление в конечном итоге формирует звено с передаточной функцией  $K(p)$ .

Второй вариант САУ с прогнозирующей моделью для парирования возмущений приведен на рис. 1.5.

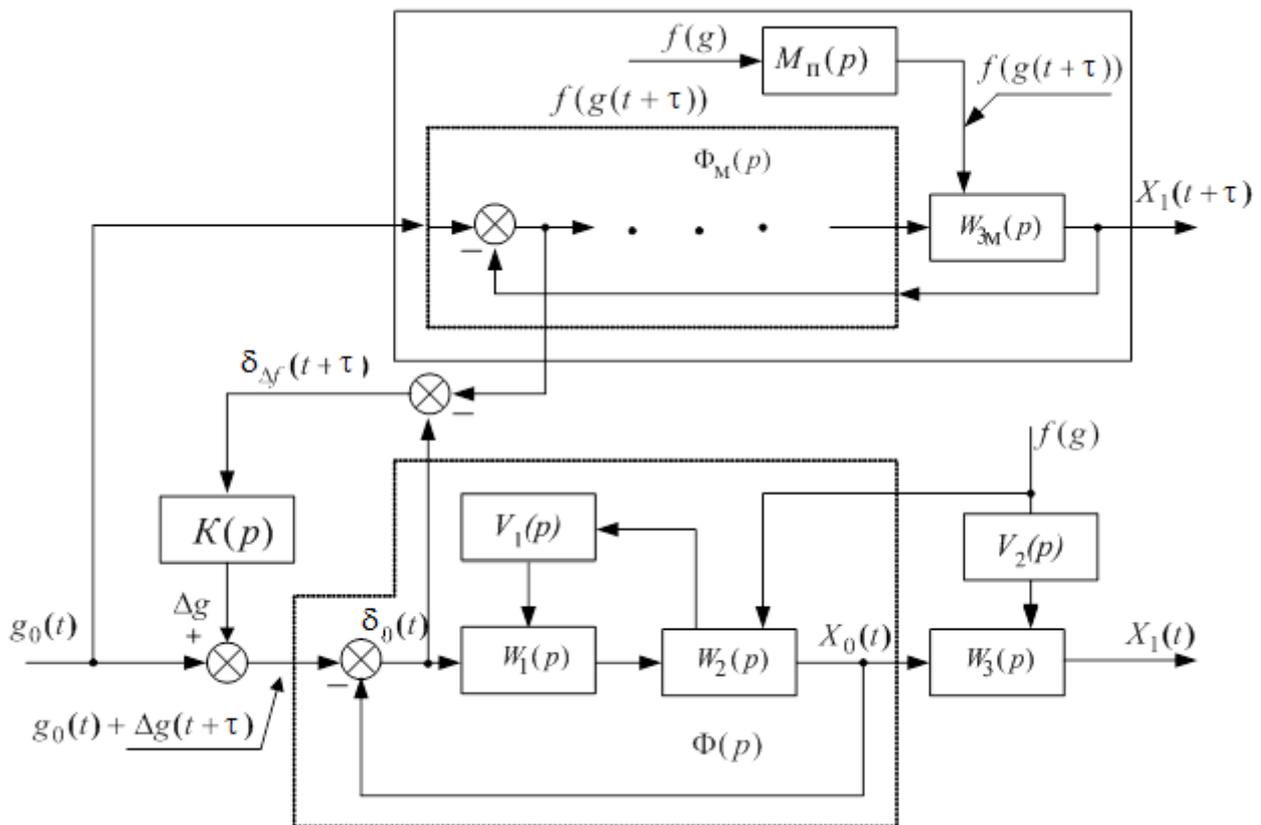


Рис. 1.5. Структурная схема системы с параллельной прогнозирующей моделью по возмущению

На рис. 1.6 приведена структурная схема САУ стабилизации с параллельной прогнозирующей моделью, расположенной в контуре ошибки. Здесь две прогнозирующие модели как по управлению, так и по возмущению.

В дополнение к ранее принятым использованы следующие обозначения:

- дополнительным индексом «м» обозначены аналогичные передаточные функции и координаты модели;
- $W_{за1}(p)$  – передаточная функция звена адаптации для первого варианта построения контура адаптации;
- $W_{за2}(p)$  – передаточная функция звена адаптации для второго варианта построения контура адаптации;
- $U_{y1}$  – напряжение управления привода (регулятора скорости) для первого варианта построения контура адаптации;
- $U_{y2}$  – напряжение управления привода (регулятора скорости) для второго варианта построения контура адаптации;
- $U_{a1}$  – выходной сигнал контура адаптации для первого варианта;
- $U_{a2}$  – выходной сигнал контура адаптации для второго варианта.

Особенности структуры:

- 1) платформа (балка) входит в прямой контур системы и модели в виде динамического звена с передаточной функцией  $W_{п}(p)$ ;
- 2) параллельная модель отражает прямой контур, начиная с регулятора тока;
- 3) следует рассматривать два вида контуров адаптации:
  - контур 1, формирующий сигнал адаптации в функции разности текущих значений скоростей системы и модели;
  - контур 2, формирующий сигнал адаптации в функции разности текущих значений выходной координаты модели и текущей ошибки системы;
- 4) выходные сигналы контуров адаптации  $U_{a1}$ ,  $U_{a2}$  вводятся в контуры регулятора тока;
- 5) на вход модели подается управляющий сигнал для контура скорости;
- 6) модель и звенья адаптации полностью реализуются на ПЭВМ.

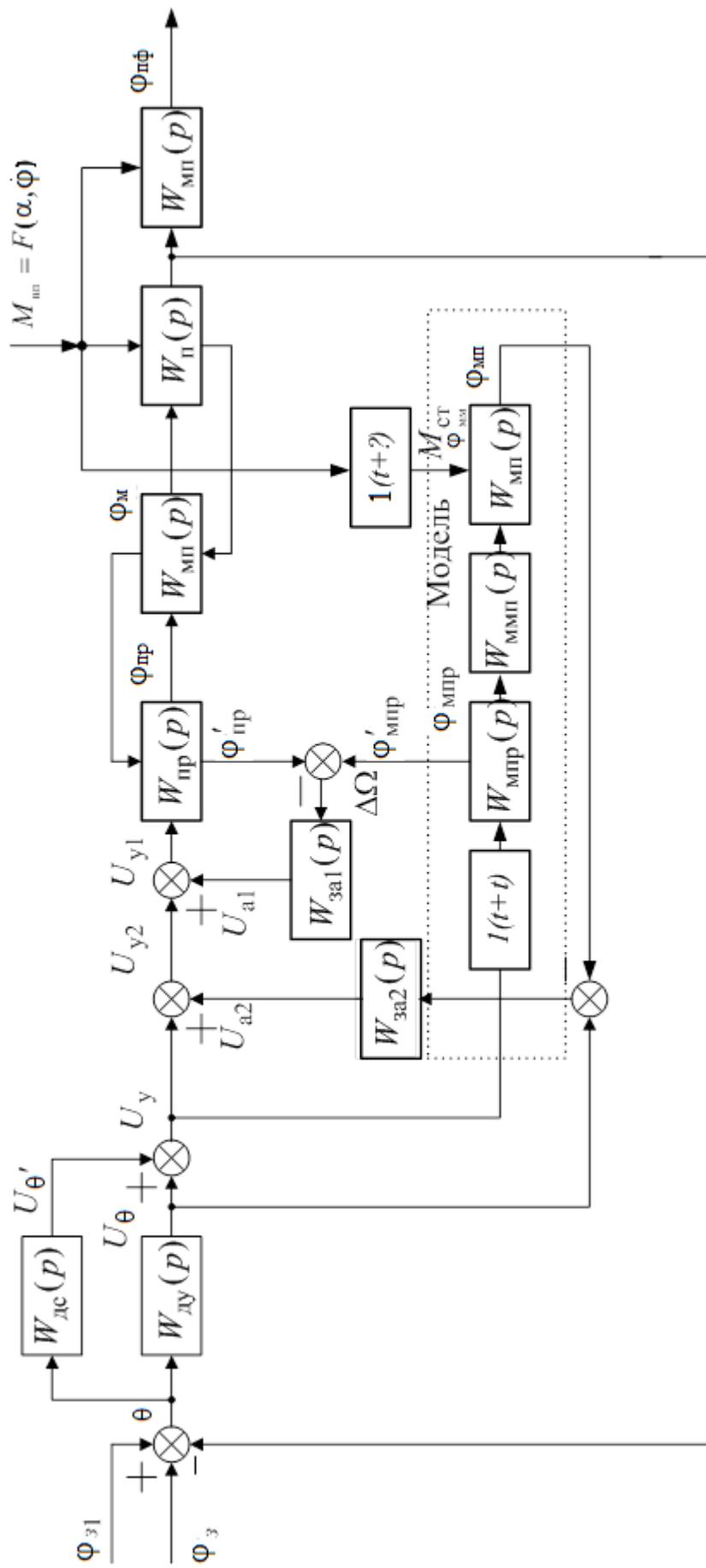


Рис. 1.6. Структурная схема системы с параллельной прогнозирующей моделью

Алгоритм работы системы управления следующий:

1. Рассматривается некоторая математическая модель объекта, начальным условием для которой служит его текущее состояние. При заданном программном управлении выполняется решение уравнений этой модели, что дает прогноз движения объекта на некотором конечном отрезке времени (горизонте прогноза).

2. Выполняется оптимизация программного управления, целью которого служит приближение регулируемых переменных прогнозирующей модели к соответствующим задающим сигналам на горизонте прогноза.

3. На шаге вычислений, составляющем фиксированную малую часть горизонта прогноза, реализуется найденное оптимальное управление.

4. Горизонт прогноза сдвигается на шаг вперед, и повторяются пп. 1 – 3 данной последовательности действий.

Принципиальными вопросами, подлежащими исследованию, являются: выбор прогнозирующих функций, или полиномов, и анализ точности их работы в реальном масштабе времени; алгоритмизация прогнозирующих функций и анализ особенностей их программной реализации; выбор и назначение значения времени прогноза; алгоритмы формирования дополнительной составляющей в управляющем воздействии; анализ устойчивости алгоритмов адаптации.

## 2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ И ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

### 2.1. Классификация методов прогнозирования

В данном разделе рассматриваются методы прогнозирования траектории движения, необходимые для построения системы управления с прогнозирующей параллельной моделью.

При выборе метода прогнозирования в динамических системах (алгоритма работы прогнозатора) требуется получить наилучшее в определенном смысле приближение функции, отражающей состояние объекта управления, при минимальном числе измеренных значений. При этом основным вопросом является выбор типового вида анализируемой функции и способа ее представления. Задача прогнозирования может быть решена с помощью методов интерполирования, причем ставится задача «интерполирования вперед» – экстраполирования, или аппроксимации, получаемых данных. При выборе способа обработки данных необходимо рассмотрение скорости, требуемой памяти и гладкости методов, нужно учитывать, что некоторые из них требуют большего объема памяти или выполняются быстрее, чем другие. Использование различных методик приближения функций позволяет находить компромисс между точностью представления экстраполируемых данных, скоростью вычислений и используемой памятью. Однако может потребоваться использование любого метода, чтобы достичь нужной степени точности экстраполяции (гладкости результатов).

Основные задачи – анализ и выбор прогнозирующих полиномов прогнозатора. В настоящее время существуют различные методы технического, экономического и социального прогнозирования [10, 17, 31, 32, 37]. Классификация методов прогнозирования представлена в виде иерархического дерева (рис. 2.1).

Классификация методов прогнозирования является классификацией последовательного типа, имеющей целью наглядное представление в виде иерархического дерева совокупности методов современного прогнозирования как некоторой системы.

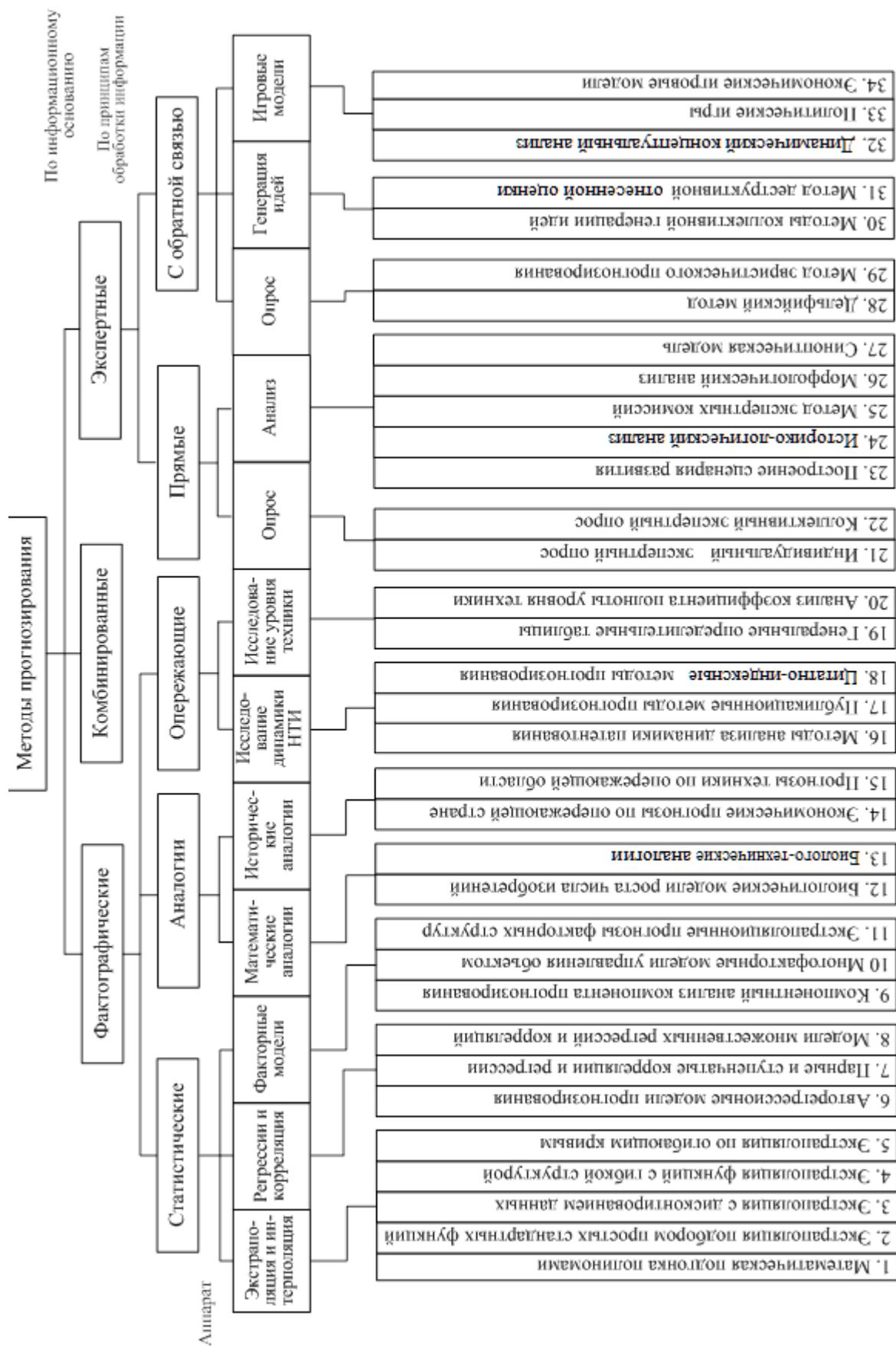


Рис. 2.1. Классификация методов прогнозирования

Каждый уровень классификации характеризуется своим классификационным признаком. Элементы каждого уровня представляют собой наименования принадлежащих им подмножеств элементов ближайшего нижнего уровня, причем подмножеств непересекающихся.

Элементы нижнего уровня представляют собой наименования узких групп конкретных методов прогнозирования (иногда из одного элемента), которые являются модификациями, или разновидностями, какого-либо одного наиболее общего из них.

В целом классификация открыта, так как предоставляет возможность увеличивать число элементов на уровнях и наращивать число уровней за счет дальнейшего дробления и уточнения элементов последнего уровня.

На первом уровне все методы делятся на три класса по признаку «информационное основание метода». *Фактографические* методы базируются на фактически имеющемся информационном материале об объекте прогнозирования и его прошлом развитии, *экспертные* – на информации, которую поставляют специалисты-эксперты в процессе систематизированных процедур выявления и обобщения этого мнения. *Комбинированные* методы выделены в отдельный класс, чтобы можно было относить к нему методы со смешанной информационной основой, в которых в качестве первичной используется фактографическая и экспертная информация. Например, при проведении экспертного опроса участникам предоставляют цифровую информацию об объекте, или фактографические прогнозы, либо, наоборот, при экстраполяции тенденции наряду с фактическими данными используют экспертные оценки.

Не следует относить к комбинированным те методы прогнозирования, которые к экспертной исходной информации применяют математические методы обработки или исходную фактографическую информацию оценивают экспертным путем. В большинстве случаев они достаточно хорошо укладываются в первый или второй классы из перечисленных выше.

Эти классы разделяются далее на подклассы по принципам обработки информации. *Статистические* методы объединяют совокупность методов обработки количественной информации об объекте прогнозирования по принципу выявления содержащихся в ней математических закономерностей развития и математических взаимосвязей характеристик с целью получения прогнозных моделей. *Методы*

*аналогий* направлены на то, чтобы выявлять сходство в закономерностях развития различных процессов и на этом основании производить прогнозы. *Опережающие* методы прогнозирования строятся на определенных принципах специальной обработки научно-технической информации, реализующих в прогнозе ее свойство опережать развитие научно-технического прогресса.

*Экспертные* методы разделяются на два подкласса. Прямые экспертные оценки строятся по принципу получения и обработки независимого обобщенного мнения коллектива экспертов (или одного из них) при отсутствии воздействий на мнение каждого эксперта мнений другого эксперта и коллектива. Экспертные оценки с обратной связью в том или ином виде воплощают принцип обратной связи путем воздействия на оценку экспертной группы (одного эксперта) мнением, полученным ранее от этой группы или от одного из ее экспертов.

Третий уровень классификации разделяет методы прогнозирования на виды по классификационному признаку «аппарат методов». Каждый вид объединяет в своем составе методы, имеющие в качестве основы одинаковый аппарат их реализации. Так, статистические методы по видам делятся на методы экстраполяции и интерполяции; методы, использующие аппарат регрессионного и корреляционного анализа; методы, использующие факторный анализ.

Класс методов аналогий подразделяется на методы математических и исторических аналогий. Первые в качестве аналога для объекта прогнозирования используют объекты другой физической природы, другой области науки, отрасли техники, однако имеющие математическое описание процесса развития, совпадающее с объектом прогнозирования. Вторые в качестве аналога используют процессы одинаковой физической природы, опережающие во времени развитие объекта прогнозирования.

*Опережающие* методы прогнозирования можно разделить на методы исследования динамики научно-технической информации, методы исследования и оценки уровня техники. В первом виде методов в основном используется построение количественно-качественных динамических рядов на базе различных видов НТИ и анализа и прогнозирования на их основе соответствующего объекта. При использовании второго вида методов применяют специальный аппарат анализа количественной и качественной информации, содержащейся в НТИ, для

определения характеристик уровня качества существующей и проектируемой техники.

Прямые экспертные оценки по признаку аппарата реализации делятся на виды экспертного опроса и экспертного анализа. В первом виде используются специальные процедуры формирования вопросов, организации получения на них ответов, обработки полученных ответов и формирования окончательного результата, во втором – основным аппаратом исследования является целенаправленный анализ объекта прогнозирования со стороны эксперта или коллектива экспертов, которые сами ставят и решают вопросы, ведущие к поставленной цели.

Экспертные оценки с обратной связью в своем аппарате имеют три вида методов: экспертный опрос; генерацию идей; игровое моделирование. Первый вид характеризуется процедурами регламентированного неконтактного опроса экспертов, перемежающимися обратными связями в рассмотренном выше смысле, второй – построен на процедурах непосредственного общения экспертов в процессе обмена мнениями по поставленной проблеме. Он характеризуется отсутствием вопросов и ответов и направлен на взаимное стимулирование творческой деятельности экспертов. Третий вид использует аппарат теории игр и ее прикладных разделов. Как правило, реализуется на сочетании динамического взаимодействия коллективов экспертов и вычислительной машины, имитирующих объект прогнозирования в возможных будущих ситуациях. Наконец, последний, четвертый уровень классификации подразделяет виды методов третьего уровня на отдельные методы и группы методов по некоторым локальным для каждого вида совокупностям классификационных признаков, из которых указать один общий для всего уровня в целом невозможно.

## **2.2. Применение канонического полинома для приближения функций многочленами**

Простейшая задача интерполирования заключается в следующем. На отрезке  $[a;b]$  заданы  $n + 1$  точки  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые называют узлами интерполяции, и значение некоторой функции  $f(x)$  в этих точках

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n. \quad (2.1)$$

Требуется построить интерполирующую функцию  $F(x)$ , принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и  $f(x)$ :

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, F(x_2) = y_2, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (2.2)$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую  $y = F(x)$  определенного типа, проходящую через заданную систему точек  $M_i(x_i, y_i)$ , где  $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ .

В такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений или не иметь их совсем. Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции  $F(x)$  искать полином  $P_n(x)$  степени  $n$ , удовлетворяющий условиям (2.2), т. е. такой, что

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, P_n(x_2) = y_2, \dots, P_n(x_n) = y_n.$$

Полученную интерполяционную формулу  $y = F(x)$  обычно используют для приближенного вычисления значений данной функции  $f(x)$  в точках  $x$ , отличных от узлов интерполирования. Такая операция называется интерполированием функции  $f(x)$ . При этом различают интерполирование в узком смысле, когда  $x \in [x_0; x_n]$ , и экстраполирование, когда  $x \notin [x_0; x_n]$ . Многочлен  $F_n(x)$ , удовлетворяющий этим условиям, называется интерполяционным, а соответствующие ему формулы – интерполяционными. Если  $F(x)$  выбирается в классе степенных функций, интерполяция называется параболической. Используют и другие виды интерполяции. Так если интерполируемая функция периодическая, то в качестве  $F(x)$  выбирают тригонометрические функции.

Задачи интерполяции:

- выбор наиболее удобного способа построения интерполяционной функции;
- оценка погрешности интерполяции;
- оптимальный выбор узлов интерполяции для получения минимальной погрешности.

Будем искать интерполирующую функцию  $F(x)$  (2.2) в виде канонического полинома степени  $n$

$$F(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n. \quad (2.3)$$

Выбор многочлена степени  $n$  основан на том факте, что через  $n + 1$  точку проходит единственная кривая степени  $n$  [5]. Подставив (2.1) в (2.3), получим систему линейных алгебраических уравнений





Наконец, для искомого многочлена получаем

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{y_j(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}. \quad (2.8)$$

Введя обозначения

$$L_j(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n),$$

можем записать полученный многочлен в виде

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} y_j. \quad (2.9)$$

Несложно найти количество операций, необходимых для вычисления значения интерполяционного полинома в какой-либо точке. Если вычислять интерполяционный полином точно по формуле (2.8), то для вычисления каждого из  $n + 1$ -го произведения

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \quad (2.10)$$

требуется  $n$  делений,  $n - 1$  умножение и  $2n$  сложений (вычитаний). Далее, когда произведения найдены, для вычисления суммы требуется  $n + 1$  умножение и  $n$  сложений, т.е. получается, что для каждого значения  $x$  вычисление  $L_n(x)$  требует порядка  $n^2$  операций.

Если требуется найти значения интерполяционного полинома в достаточно большом числе точек, то можно использовать более эффективный способ. Сначала вычислить все значения

$$z_k = \frac{y_k}{\prod_{\substack{j=1,2,\dots,n+1 \\ j \neq k}} (x_k - x_j)}$$

за  $n - 1$  умножение,  $n$  сложений и 1 деление (эта операция делается для данного интерполяционного полинома только один раз перед вычислением его значений в точках), а затем находить значения интерполяционного полинома по формуле

$$L_n(x) = w(x)s(x), \quad (2.11)$$

где  $w(x) = \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k)$ ,  $s(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{z_k}{x - x_k}$ .



$$Q_i(q) = \frac{q(q-1)\dots(q-n)(-1)^{n-i}}{(q-i)!i!(n-i)!} = (-1)^{n-i} \frac{C_n^i q(q-1)\dots(q-n)}{(q-i)n!},$$

где  $C_n^i = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ .

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов можно записать в виде

$$L_n(x) = \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{q-i} y_i.$$

На рис. 2.3 приведена блок-схема алгоритма интерполирования с помощью полинома Лагранжа.

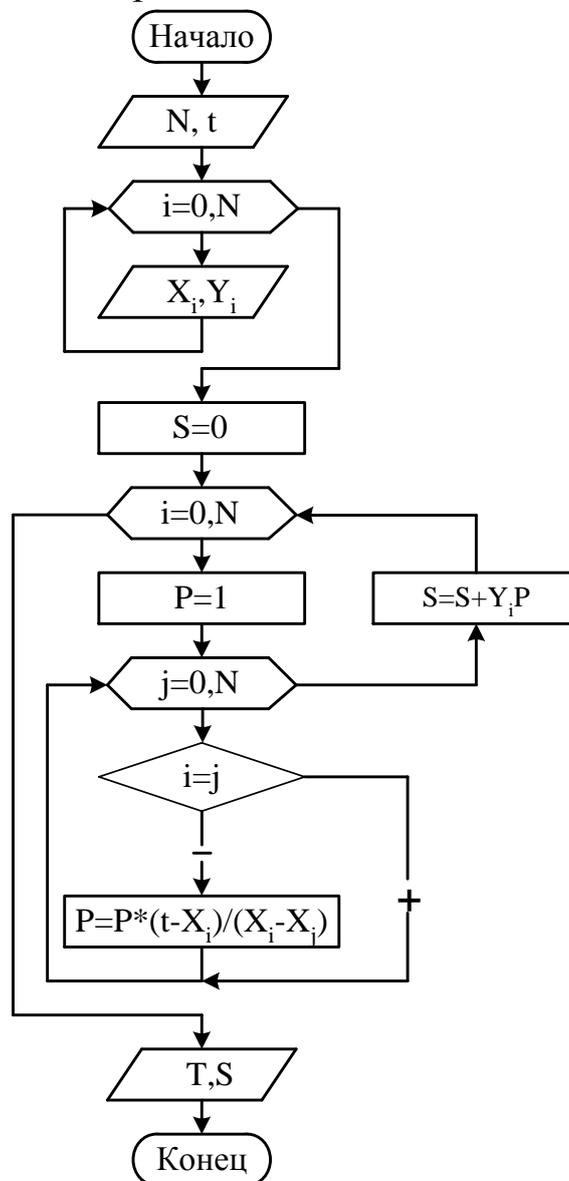


Рис. 2.3. Алгоритм интерполирования с помощью полинома Лагранжа

## 2.4. Интерполирование функций с помощью полинома Ньютона

Форма записи интерполяционного полинома Лагранжа, рассмотренная в предыдущем пункте, не является единственно возможной. Кроме того, она имеет определенные неудобства. Так, предположим, задан набор точек  $(x_k, y_k)$   $k = 1, 2, \dots, n + 1$  и по нему построен интерполяционный полином в форме Лагранжа (2.8). Тогда очевидно, что при добавлении новой точки к исходному набору точек придется заново конструировать интерполяционный полином. Этого недостатка лишен интерполяционный полином, записанный в рассмотренной ниже форме Ньютона. Однако каким бы способом ни строился интерполяционный полином по заданному набору точек, результат всегда получается один и тот же (с точностью до ошибок, возникающих при округлении вещественных чисел), поскольку через заданные  $n + 1$  точки проходит ровно один полином  $n$ -й степени.

Пусть функция  $f(x)$  задана в равноотстоящих узлах интерполяции  $x_0, x_1 = x_0 + h, \dots, x_n = x_0 + nh$ . Требуется построить интерполяционный многочлен  $n$ -й степени такой, что

$$P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n.$$

Используя конечные разности, интерполяцию удобно проводить, применяя интерполяционную формулу Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}), \quad (2.13)$$

где  $\Delta y_0 = \Delta P_n(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0 = \Delta y_0$  – конечная разность первого порядка многочлена  $P_n(x)$  в точке  $x_0$ ;  $\Delta^2 y_0 = \Delta^2 P_n(x) = \Delta y_1 - \Delta y_0$  – конечная разность второго порядка многочлена  $P_n(x)$  в точке  $x_0$  и т.д;  $\Delta^n y_0 = \Delta^n P_n(x) = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$  – конечная разность порядка  $n$  многочлена  $P_n(x)$  в точке  $x_0$ ;  $\Delta^0 y = y_0$  – конечная разность нулевого порядка.

На практике формула Ньютона используется в другом виде. Введя коэффициент  $q = \frac{x - x_0}{h}$ , где  $h$  – шаг интерполирования,  $q$  равен числу шагов, получим:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + q(q-1)\dots\frac{q-n+1}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2.14)$$

Формулу (2.14) удобно использовать в начале отрезка интерполирования  $[a, b]$ , когда  $q$  мало.

Если за число шагов интерполяции принять  $n = 1$ , то из (2.14) получим формулу линейного интерполирования  $P(x) = y_0 + q\Delta y_0$ , при  $n = 2$  – формулу параболического, или квадратичного, интерполирования:

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

Первая интерполяционная формула Ньютона используется для интерполирования в начале отрезка  $[a, b]$ , т.е. для интерполирования вперед и экстраполирования назад. При интерполировании вперед  $q = \frac{x-x_0}{h} > 0$ . При экстраполировании назад  $q = \frac{x-x_0}{h} < 0$ .

Для интерполирования в конце таблицы обычно применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2.15)$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона используется при интерполяции в конце таблицы, т.е. для интерполирования назад, когда  $q = \frac{x-x_n}{h} < 0$ , и для экстраполирования вперед, когда  $q = \frac{x-x_n}{h} > 0$ .

Погрешность интерполяции определяется формулой (2.12).

Используя разделенные разности, интерполяционный многочлен можно записать в следующем виде:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) = \sum_{k=0}^n f(x_0; x_1; \dots, x_k)\omega_k(x). \quad (2.16)$$

Здесь

$$\omega_0(x) \equiv 1, \omega_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}), \quad (2.17)$$

$f(x_0; x_1; \dots, x_n)$  – разделенная разность порядка  $n$ .

Записанный в таком виде интерполяционный многочлен называют интерполяционным многочленом Ньютона с разделенными разностями. Разделенные разности удобно представить в виде треугольной таблицы (рис. 2.4).

$f(x_1)$					
	$[x_1, x_2]f$				
$f(x_2)$		$[x_1, x_2, x_3]f$			
	$[x_2, x_3]f$				
$f(x_3)$	$\vdots$	$[x_2, x_3, x_4]f$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$[x_1, x_2, \dots, x_n]f$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]f$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$[x_2, x_3, \dots, x_{n+1}]f$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$f(x_n)$	$\vdots$	$[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}]f$			
	$[x_n, x_{n+1}]f$				
$f(x_{n+1})$					

Рис. 2.4. Таблица разделенных разностей

Тогда при вычислении значения интерполяционного полинома в форме Ньютона требуется выполнить следующие действия:

1. Найти разделенные разности, стоящие внизу треугольной таблицы.
2. Вычислить значение приведенного выше полинома от заданного значения  $x$ .

Для реализации вычислений таблицы разделенных разностей некоторой функции в MATLAB, вывода в командное окно и в текстовый файл можно воспользоваться приведенной в п. 3.1 (листинг 3.4) функцией DDIF. В ее входных аргументах задаются:

- 1) массив точек;
- 2) имя функции, для которой следует построить таблицу разделенных разностей;
- 3) имя файла, в который нужно записать эту таблицу.

Поскольку в первом столбце таблицы записываются значения функции через строку, то высота таблицы равна  $2N - 1$ , где  $N$  – число

точек, т.е.  $n + 1$  в вышеприведенных формулах. Ширина таблицы равна  $N$ , т.е. числу точек. На рис. 2.5 приведен алгоритм интерполирования с помощью полинома Ньютона.

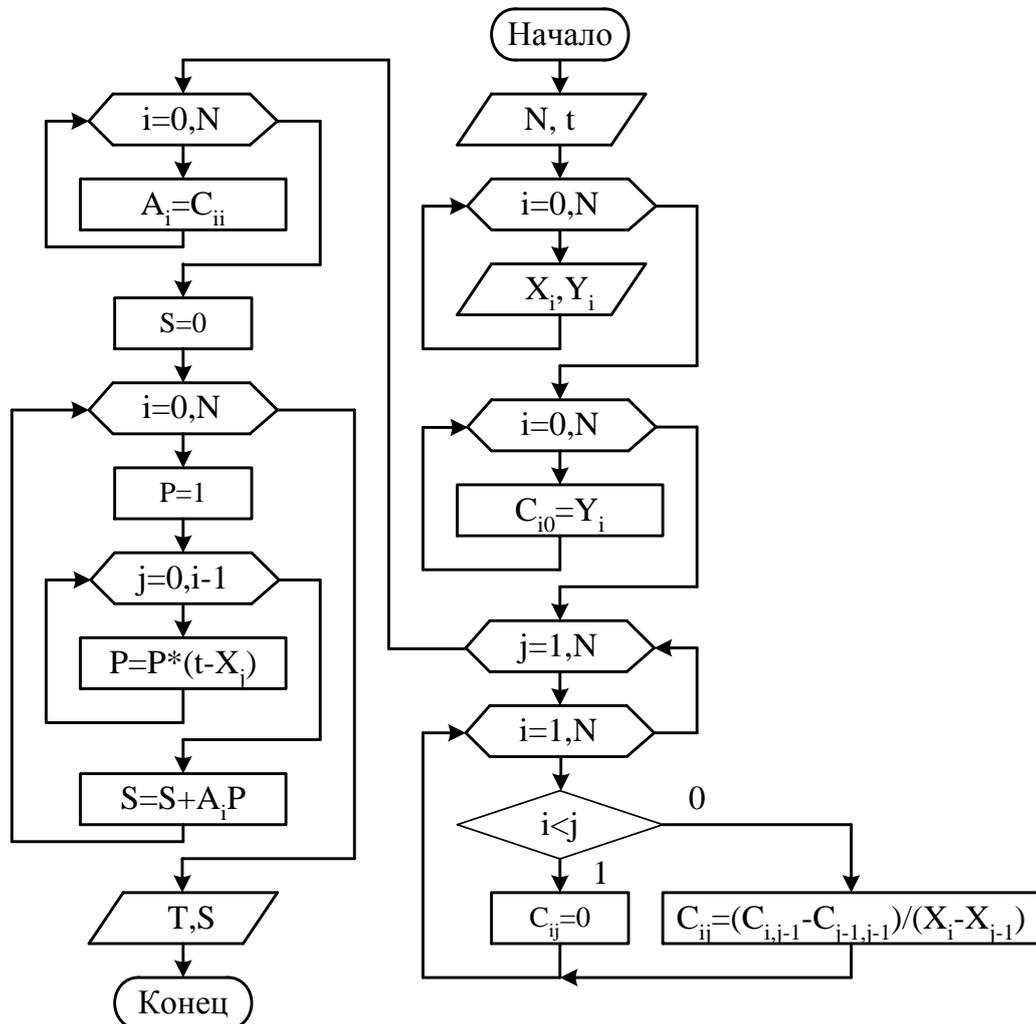


Рис. 2.5. Алгоритм интерполирования с помощью полинома Ньютона

## 2.5. Интерполяция функций с использованием схемы Эйткена

Рассмотрим алгоритм решения задачи интерполяции с использованием схемы Эйткена. Предполагается, что задана таблица значений функции  $f$ . Требуется при заданном  $x$  вычислить с помощью интерполяции значение  $f(x)$  с заданной точностью  $\varepsilon$  либо с максимально возможной при имеющейся информации точностью. Считается, что функция  $f$  достаточно гладкая.

Обозначим через  $P_{(k,k+1,\dots,m)}(x)$  интерполяционный многочлен степени  $m-k$  с узлами интерполяции  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_m$ . В частности, положим  $P_{(k)}(x) = y_k$ . В этих обозначениях справедливо равенство

$$P_{(k,k+1,\dots,m+1)}(x) = \frac{P_{(k+1,\dots,m+1)}(x)(x-x_k) - P_{(k,\dots,m)}(x)(x-x_{m+1})}{x_{m+1} - x_k}. \quad (2.18)$$

Правая часть представляет собой многочлен степени  $m+1-k$ , этот многочлен совпадает с  $y_i$  в точках  $x = x_i$ , для  $i = k, k+1, \dots, m+1$  и, значит, по определению равен  $P_{(k,\dots,m+1)}(x)$ .

Удобный и экономичный способ вычисления значения многочлена  $P_n(x) = P_{(0,1,\dots,n)}(x)$ , лежащий в основе рассматриваемого алгоритма, дает схема Эйткена. Она заключается в последовательном вычислении с помощью формулы (2.18) элементов следующей таблицы (рис. 2.6).

$P_{(0)}(x) = y_0$				
	$P_{(0,1)}(x)$			
$P_{(1)}(x) = y_1$		$P_{(0,1,2)}(x)$		
	$P_{(1,2)}(x)$	·	·	
$P_{(2)}(x) = y_2$	·	·	·	$P_{(0,1,\dots,n)}(x)$
·	·	·	·	
·	·	$P_{(n-2,n-1,n)}(x)$		
·	$P_{(n-1,n)}(x)$			
$P_{(n)}(x) = y_n$				

Рис. 2.6. Интерполяционная схема Эйткена

Для решения задачи интерполяции при заданном значении  $x$  узлы нумеруют в порядке возрастания их расстояния  $|x - x_k|$  до точки  $x$ . Затем последовательно вычисляют значения

$$P_1(x), \varepsilon_0, P_2(x), \varepsilon_1, \dots, P_{m+1}(x), \varepsilon_m, \dots$$

Если при некотором  $m$  оказывается, что  $\varepsilon_m \leq \varepsilon$ , то полагают  $f(x) \approx P_m(x)$ . Если же  $\varepsilon_m > \varepsilon$  для всех  $m$ , то полагают  $f(x) \approx P_k(x)$ , где  $k$  – степень, при которой достигается минимум оценки погрешности  $\varepsilon_k = \min_{m \geq 0} \varepsilon_m$ .

## 2.6. Глобальная и кусочно-полиномиальная интерполяция

Метод решения задачи приближения функций с помощью интерполяции единым для всего отрезка многочленом  $P_n(x)$  называют глобальной полиномиальной интерполяцией. Этот подход кажется наиболее привлекательным, так как удобно иметь один многочлен, пригодный для приближения функции  $f$  во всех точках отрезка  $[a, b]$ . Интерполирование полиномом по совокупности  $n + 1$  точки часто бывает неудовлетворительным. Известно, что полином степени  $n$  может иметь  $n - 1$  локальный максимум и график может раскачиваться. В то же время известные результаты теории аппроксимации позволяют приблизить функцию с любой требуемой точностью  $\varepsilon$  с помощью соответствующего выбора степени многочлена и узлов интерполяции на отрезке  $[a, b]$ . Интерполяция многочленами высокой степени в вычислительной практике обычно не проводится. Основные причины этого – сходимость и снижение точности при увеличении числа узлов (и степени интерполяционного многочлена соответственно). Вычисления показывают, что при больших  $n$  интерполяция дает хорошие результаты в центральной части отрезка. В то же время погрешность возрастает на концах отрезка и последовательность  $P_n(x)$  расходится при  $n \rightarrow \infty$ . Кроме того, равномерное распределение узлов интерполяции часто оказывается крайне неудачным. Не существует единой для всех непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $f$  стратегии выбора узлов интерполяции, гарантирующей ее сходимость. Практическая реализация стратегии выбора узлов интерполяции невозможна, когда приходится иметь дело с заданной таблицей значений.

Помимо погрешности, которая возникает от приближенной замены функции  $f$  интерполяционным многочленом, возникает еще дополнительная погрешность, связанная с тем, что значения интерполируемой функции также задаются с погрешностью.

Пусть заданные в узлах  $x_i$  значения  $y_i^*$  содержат погрешности  $\varepsilon_i$ .

Тогда вычисляемый по этим значениям многочлен  $P_n^*(x) = \sum_{j=0}^n y_j^* l_{nj}(x)$

содержит погрешность

$$P_n(x) - P_n^*(x) = \sum_{j=0}^n \varepsilon_j l_{nj}(x). \quad (2.19)$$

Например, при линейной интерполяции по приближенно заданным значениям справедливо равенство

$$P_1(x) - P_1^*(x) = \varepsilon_0 l_{10}(x) + \varepsilon_1 l_{11}(x),$$

где  $l_{10}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ ,  $l_{11}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ .

Тогда  $\max |P_1(x) - P_1^*(x)| \leq \max\{|\varepsilon_0|, |\varepsilon_1|\}$ .

Таким образом, при линейной интерполяции погрешность, возникающая вследствие погрешности значений функций, не превосходит верхней границы погрешности этих значений.

В общем случае если известно, что верхняя граница погрешности значений  $y_i^*$  равна  $\bar{\Delta}(y^*)$ , т. е.  $|\varepsilon_i| \leq \bar{\Delta}(y^*)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n$ , то для верхней границы соответствующей погрешности многочлена  $\bar{\Delta}(P_n^*) = \max_{[a,b]} |P_n(x) - P_n^*(x)|$  и справедлива оценка

$$\bar{\Delta}(P_n^*) \leq \Lambda_n \bar{\Delta}(y^*), \quad (2.20)$$

где  $\Lambda_n = \max_{[a,b]} \sum_{j=0}^n |l_{nj}(x)|$  (константа Лебега).

В случае когда  $|\varepsilon_i| = \bar{\Delta}(y^*)$  для всех  $i$ , выбором знаков погрешностей  $\varepsilon_i$  можно добиться выполнения равенства  $\bar{\Delta}(P_n^*) = \Lambda_n \bar{\Delta}(y^*)$ . Это означает, что в самом неблагоприятном случае погрешность входных данных при интерполяции может возрасти в  $\Lambda_n$  раз. Величина  $\Lambda_n$  не зависит от длины отрезка  $[a, b]$ , а определяется лишь относительным расположением узлов на нем.

Естественно поставить задачу о таком оптимальном выборе узлов интерполяции, чтобы величина  $\Lambda_n$  оказалась минимально возможной. В общем случае оптимальный выбор узлов неизвестен. Установлено, однако, что почти оптимальным является выбор в каче-

стве узлов интерполяции нолей многочлена Чебышева, при таком выборе  $\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + 1$ .

С рассматриваемой точки зрения крайне неудачным при больших  $n$  является выбор равноотстоящих узлов интерполяции. При таком выборе  $\Lambda_n > \frac{2^{n-1}}{(2^n - 1)\sqrt{n}}$  для  $n \geq 4$  и резко ухудшается с ростом  $n$ .

Сказанное позволяет сделать важный вывод: в вычислениях не следует использовать интерполяционные многочлены высокой степени с равноотстоящими узлами.

Еще один потенциальный источник потери точности при использовании многочленов  $P_n(x)$  высокой степени состоит в приближенном задании коэффициентов. Многочлен вычисляется на отрезке  $[a, b]$ , где  $|a| \leq b$ , причем предварительно он представлен в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x). \quad (2.21)$$

При вычислении коэффициентов  $a_k$  неизбежны погрешности, приводящие к приближенным значениям  $a_k^*$ . Поэтому в действительности будет вычисляться многочлен

$$P_n^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k(x).$$

Примем за относительную погрешность вектора  $a^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$  величину  $\delta(a^*) = (\max_{0 \leq i \leq n} |a_i - a_i^*|) / \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ , а за относительную погрешность многочлена  $P_n^*(x)$  – величину

$$\delta(P_n^*) = (\max_{[a,b]} |P_n(x) - P_n^*(x)|) / \max_{[a,b]} |P_n(x)|.$$

Числом обусловленности задачи вычисления многочлена с приближенно заданными коэффициентами называют величину  $cond_n$ , равную минимальной из постоянных  $K_n$ , для которых выполняется неравенство  $\delta(P_n^*) \leq K_n \delta(a^*)$ .

Величина  $cond_n$ , характеризующая чувствительность вычисляемых значений многочлена к погрешностям в коэффициентах  $a_k$ , существенно зависит от выбора базиса  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ . Неудачный выбор базиса может сделать эту, казалось бы, элементарную задачу очень плохо обусловленной.

Итак, глобальная полиномиальная интерполяция многочленом высокой степени может привести к неудаче или оказаться неэффективной. Альтернативный подход состоит в локальной интерполяции, когда функция  $f$  аппроксимируется интерполяционным многочленом  $P_m(x)$  невысокой степени  $m$  на содержащемся в  $[a, b]$  отрезке  $[a, v]$  малой длины. Естественно, что при этом используется лишь часть табличных значений. Существует два подхода к приближению функции, основанных на локальной интерполяции.

#### 1. Интерполирование с помощью «движущегося» полинома

Строят набор полиномов  $P_{(0,1,\dots,m)}, P_{(1,2,\dots,m+1)}, \dots, P_{(n-m,n-m+1,\dots,n)}$  фиксированной степени  $m$ , каждый из которых совпадает с табличными значениями в  $m + 1$  последовательных точках. Каждый такой полином используют для приближения функции в тех точках  $x$  из отрезка  $[a, b]$ , для которых выбранные узлы таблицы являются ближайшими.

#### 2. Кусочно-полиномиальная интерполяция

Исходный отрезок  $[a, b]$  разбивают на несколько отрезков меньшей длины, на каждом из которых функция интерполируется своим многочленом. Интерполяцию «движущимся» полиномом можно рассматривать как частный случай кусочно-полиномиальной интерполяции. Метод кусочно-полиномиальной интерполяции при использовании многочленов фиксированной степени  $m$  имеет  $(m + 1)$ -й порядок точности относительно  $h_{\max}$ .

### 2.7. Интерполяция сплайнами

Проведенное выше обсуждение интерполяции показывает, что повышение точности приближения гладкой функции благодаря увеличению степени интерполяционного многочлена возможно, но связано с существенным повышением сложности вычислений. К тому же использование многочленов высокой степени требует специальных мер предосторожности уже при выборе формы их записи, и вычисле-

ния сопровождаются накоплением ошибок округления. Поэтому на практике предпочитают кусочно-полиномиальную интерполяцию с использованием многочленов невысокой степени. Однако этот способ приближения имеет недостаток: в точках «стыка» двух соседних многочленов производная, как правило, имеет разрыв. Часто это обстоятельство не играет существенной роли. Вместе с тем нередко требуется, чтобы аппроксимирующая функция была гладкой, и тогда простейшая кусочно-полиномиальная интерполяция становится неприемлемой.

Естественная потребность в наличии аппроксимирующих функций, которые сочетали бы в себе локальную простоту многочлена невысокой степени и глобальную на всем отрезке  $[a, b]$  гладкость, привела к появлению сплайн-функций, или специальным образом построенных гладких кусочно-многочленных функций. Получив распространение как средство интерполяции сложных кривых, сплайны к настоящему времени стали важной составной частью самых различных вычислительных методов и нашли широчайшее применение в решении разнообразных научно-четких и инженерных задач.

Пусть отрезок  $[a, b]$  разбит точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  на  $n$  частичных отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$ . Сплайном степени  $m$  является функция  $S_m(x)$ , обладающая следующими свойствами:

1. Непрерывна на отрезке  $[a, b]$  вместе со всеми своими производными  $S_m^{(1)}(x), S_m^{(2)}(x), \dots, S_m^{(p)}(x)$  до некоторого порядка  $p$ .
2. На каждом частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  совпадает с некоторым алгебраическим многочленом  $P_{m,i}(x)$  степени  $m$ .

Разность  $m - p$  между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке  $[a, b]$  производной называют дефектом сплайна.

Простейший пример сплайна дает непрерывная кусочно-линейная функция, являющаяся сплайном первой степени (линейным сплайном) с дефектом, равным единице. Действительно, на отрезке  $[a, b]$  сама функция  $S_1(x)$  (нулевая производная) непрерывна. В то же время на каждом частичном отрезке  $S_1(x)$  совпадает с некоторым многочленом первой степени.

Наиболее широкое распространение на практике получили сплайны  $S_3(x)$  третьей степени (кубические сплайны) с дефектом, равным 1 или 2. Такие сплайны на каждом из частичных отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  совпадают с кубическим многочленом

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad (2.22)$$

и имеют на отрезке  $[a, b]$ , по крайней мере, одну непрерывную производную  $S_3'(x)$ . Следовательно, в промежутке между двумя соседними узлами  $S(x)$  представляет собой многочлен третьей степени.

Пусть функция  $y = f(x)$  задана таблицей своих значений  $y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ . Сплайн  $S_m(x)$  называется интерполяционным, если  $S_m(x_i) = y_i$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n$ . Значение  $s_i = S_m'(x_i)$  называется наклоном сплайна в точке  $x_i$ . Заметим, что на отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  интерполяционный кубический сплайн однозначно определяется заданием значений  $y_{i-1}, y_i, s_{i-1}, s_i$ :

$$S_3(x) = P_{3,i}(x) = \frac{(x - x_i)^2(2(x - x_{i-1}) + h_i)}{h_i^3} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2(2(x_i - x) + h_i)}{h_i^3} y_i + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i-1})}{h_i^2} s_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2(x - x_i)}{h_i^2} s_i. \quad (2.23)$$

Здесь  $h_i = x_i - x_{i-1}$ .

Различные методы интерполяции кубическими сплайнами отличаются один от другого способом выбора наклонов  $s_i$ .

*Локальный сплайн.* Если в точках  $x_i$  известны значения производной  $y_i' = f'(x_i)$ , то естественно положить  $s_i = y_i'$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n$ . Тогда на каждом частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  в соответствии с формулой (2.23), сплайн однозначно определяется значениями  $y_{i-1}, y_i$ , (поэтому его и называют локальным сплайном). Оценка погрешности интерполяции локальным кубическим сплайном выполняется из условия

$$\max_{[a,b]} |f(x) - S_3(x)| \leq \frac{M_4}{384} h_{\max}^4, \quad (2.24)$$

где  $h_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$  – максимальная длина частичных отрезков.

Заметим, что для построенного указанным образом сплайна можно гарантировать непрерывность на отрезке  $[a, b]$  только функции  $S_3$  и ее первой производной  $S_3'$ , т.е. его дефект равен 2.

Существуют и другие способы выбора коэффициентов  $s_i$ , приводящие к локальным сплайнам (кубический многочлен Бесселя, метод Акимы и др).

*Глобальные способы построения кубических сплайнов.*

Для того чтобы сплайн  $S_3(x)$  имел непрерывную на отрезке  $[a, b]$  вторую производную  $S_3''(x)$ , необходимо выбирать наклоны  $s_i$  так, чтобы в точках  $x_i$  «стыка» многочленов  $P_{3,i}$  и  $P_{3,i+1}$  совпадали значения их вторых производных:

$$P_{3,i}''(x_i) = P_{3,i+1}''(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.25)$$

Здесь

$$P_{3,i}''(x_i) = \frac{2s_{i-1}}{h_i} + \frac{4s_i}{h_i} - 6 \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i^2}. \quad (2.26)$$

Из подобной формулы, записанной для многочлена  $P_{3,i+1}$ , имеем

$$P_{3,i+1}''(x_i) = -\frac{4s_i}{h_{i+1}} - \frac{2s_{i+1}}{h_{i+1}} + 6 \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}^2}. \quad (2.27)$$

Таким образом, равенства (2.25) приводят к следующей системе уравнений относительно коэффициентов  $s_i$ :

$$h_i^{-1}s_{i-1} + 2(h_i^{-1} + h_{i+1}^{-1})s_i + h_{i+1}^{-1}s_{i+1} = 3 \left[ h_i^{-2}(y_i - y_{i-1}) + h_{i+1}^{-2}(y_{i+1} - y_i) \right] \\ i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.28)$$

Система уравнений (2.28) недоопределена, так как число уравнений системы (равное  $n-1$ ) меньше числа неизвестных (равного  $n+1$ ). Выбор двух оставшихся уравнений обычно связывают с некоторыми дополнительными условиями, накладываемыми на сплайн в граничных точках  $a$  и  $b$  (граничными условиями):

1. Если в граничных точках известны значения первой производной  $f'(a)$  и  $f'(b)$ , то естественно положить

$$s_0 = f'(a), \quad s_n = f'(b). \quad (2.29)$$

Дополняя систему (2.28) уравнениями (2.29), приходим к системе уравнений с трехдиагональной матрицей, которая легко решается методом прогонки. Полученный таким образом сплайн называется фундаментальным кубическим сплайном.

2. Если в граничных точках известны значения второй производной  $f''(a)$  и  $f''(b)$ , то можно наложить на сплайн граничные условия  $S_3''(a) = P_{3,1}''(x_0) = f''(a)$ ,  $S_3''(b) = P_{3,n}''(x_n) = f''(b)$ , что приводит к следующим уравнениям:

$$-\frac{4s_0}{h_1} - \frac{2s_1}{h_1} + 6\frac{y_1 - y_0}{h_1^2} = f''(a), \quad (2.30)$$

$$\frac{2s_{n-1}}{h_n} + \frac{4s_n}{h_n} - 6\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n^2} = f''(b) \quad (2.31)$$

(достаточно в равенстве (2.27) взять  $i = 0$ , в равенстве (2.26) —  $i = n$ ).

3. Полагая в уравнениях (2.30), (2.31)  $f''(a) = 0$ ,  $f''(b) = 0$  (независимо от того, выполнены ли эти условия для интерполируемой функции), приходим к системе уравнений, определяющих так называемый естественный кубический сплайн.

4. Часто нет никакой дополнительной информации о значениях производных на концах отрезка. Один из применяемых в этой ситуации подходов состоит в использовании условия «отсутствия узла». Выбор наклонов  $s_i$  производят таким образом, чтобы для получаемого сплайна выполнялись условия  $P_{3,1}(x) \equiv P_{3,2}(x)$ ,  $P_{3,n-1}(x) \equiv P_{3,n}(x)$ . Для этого достаточно потребовать совпадения в точках  $x_1$  и  $x_{n-1}$  соответствующих третьих производных

$$P_{3,1}^{(3)}(x_1) = P_{3,n-1}^{(3)}(x_{n-1}) = P_{3,n}^{(3)}(x_{n-1}).$$

Эквивалентные алгебраические уравнения имеют вид:

$$2h_1^{-3}(y_0 - y_1) + h_1^{-2}(s_0 + s_1) = 2h_2^{-3}(y_1 - y_2) + h_2^{-2}(s_1 + s_2), \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} 2h_{n-1}^{-3}(y_{n-2} - y_{n-1}) + h_{n-1}^{-2}(s_{n-2} + s_{n-1}) = \\ = 2h_n^{-3}(y_{n-1} - y_n) + h_n^{-2}(s_{n-1} + s_n). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Та же аппроксимирующая функция может быть получена несколько иначе. Уменьшим число частичных отрезков, объединив по-

парно отрезки  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$  и  $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ ,  $[x_{n-1}, x_n]$ . Это отвечает разбиению отрезка  $[a, b]$  точками  $a = \tilde{x}_0 < \tilde{x}_1 < \dots < \tilde{x}_{n-2} = b$ , где  $\tilde{x}_i = x_{i+1}$  для  $i = 1, 2, \dots, n-3$ , и построению соответствующего интерполяционного сплайна  $\tilde{S}_3(x)$ . Условия «отсутствия узла» эквивалентны требованию совпадения значений сплайна  $\tilde{S}_3(x)$  в точках  $x_1$  и  $x_{n-1}$  со значениями  $y_1$  и  $y_{n-1}$ .

5. Если  $f$  – периодическая функция с периодом, равным  $b - a$ , то систему (2.28) следует дополнить условиями

$$s_0 = s_n,$$

$$h_n^{-1}(s_{n-1} + 2s_n) + h_1^{-1}(2s_0 + s_1) = 3[h_n^{-2}(y_n - y_{n-1}) + h_1^{-2}(y_1 - y_0)].$$

Существуют и другие подходы к заданию граничных условий [5].

Если функция  $f$  имеет на отрезке  $[a, b]$  непрерывную производную четвертого порядка и  $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ , то для интерполяционного кубического сплайна  $S_3(x)$ , удовлетворяющего граничным условиям типов 1, 2, 4 или 5-го (последний – для случая периодической функции), справедлива следующая оценка погрешности:

$$\max_{[a,b]} |f(x) - S_3(x)| \leq CM_4 h_{\max}^4. \quad (2.34)$$

Сплайн  $S_3(x)$  не только сам аппроксимирует функцию  $f(x)$ , но и его производные  $S_3'(x)$ ,  $S_3''(x)$ ,  $S_3^{(3)}(x)$  приближают соответствующие производные функции  $f$ .

Благодаря простоте записи естественные сплайны получили значительное распространение. Однако искусственное наложение условий  $f''(a) = 0, f''(b) = 0$  при интерполяции функций, которые этим условиям не удовлетворяют, приводит к значительной потере точности. Вместо четвертого порядка точности (как локальный кубический сплайн или кубические сплайны с граничными условиями типов 1, 2, 4, 5-го) естественный сплайн обладает лишь вторым порядком точности. Если использование естественного сплайна не вызвано какими-либо специальными причинами, то следует, по-видимому, отказаться от него в пользу кубического сплайна с граничным условием типа 4-го.

Существует единственный кубический сплайн, который используется для экстраполяции по внутренним узлам  $x_1$  и  $x_2$ , чтобы найти  $S''(a)$ , и экстраполирования по узлам  $x_{n-1}$   $x_{n-2}$ , чтобы найти  $S''(b)$ . Экстраполяционный сплайн эквивалентен предположению, что край кубического полинома является продолжением смежного кубического полинома, т.е. форма сплайна – единственная кубическая кривая на интервале  $[x_0; x_2]$  и другая единственная кривая на интервале  $[x_{n-2}; x_{n+2}]$ . На рис. 2.7 приведена блок-схема алгоритма сплайн-интерполяции.

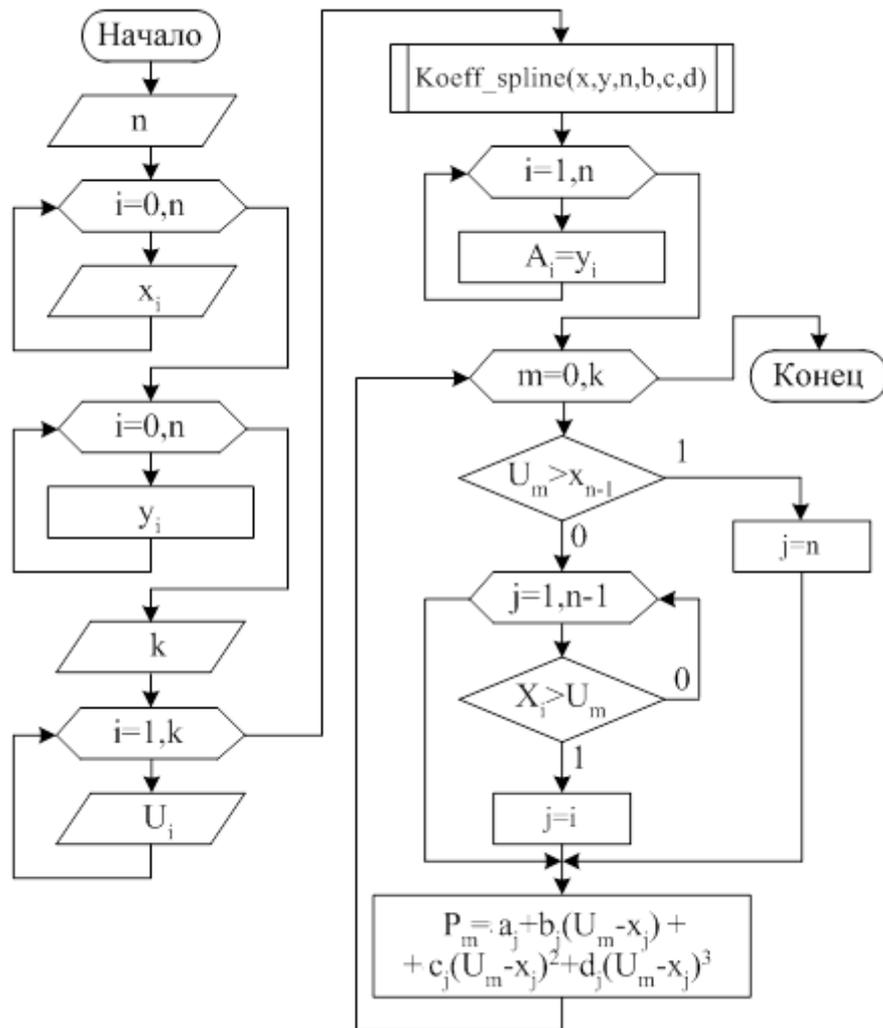


Рис. 2.7. Блок-схема алгоритма сплайн-интерполяции

## 2.8. Тригонометрическая интерполяция

В прикладных исследованиях широко используются различные варианты преобразования Фурье функций непрерывного аргумента, а также представление функций в виде сходящихся тригонометрических рядов (рядов Фурье) [3]. Известно, например, что всякая непре-

рывно дифференцируемая периодическая с периодом 1 функция  $f$  может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp\{2\pi i k x\}, \quad (2.35)$$

где  $i$  – мнимая единица.

Коэффициенты разложения вычисляются по формуле

$$a_k = \int_0^1 f(x) \exp\{-2\pi i k x\} dx. \quad (2.36)$$

Однако во многих случаях функция  $f$  бывает задана лишь в конечном числе точек  $x_j = j/N$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ . В этом случае аналогом формулы (2.35) является разложение вида

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\{2\pi i k x_j\}, 0 \leq j < N. \quad (2.37)$$

Заметим, что это разложение имеет место тогда и только тогда, когда тригонометрический многочлен

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp\{2\pi i k x\} \quad (2.38)$$

интерполирует функцию  $f$  по её значениям в точках  $x_j, 0 \leq j \leq N$ . Система функций  $\varphi_k(x) = \exp\{2\pi i k x\}, 0 \leq k < N$  ортогональна на множестве точек  $x_j = j/N, 0 \leq j < N$ , причем  $(\varphi_k) = N$ . Следовательно, разложение (2.37) действительно имеет место, причем коэффициенты  $a_k$  определяются по формуле

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \exp\{-2\pi i k x_l\}, 0 \leq k < N. \quad (2.39)$$

Операцию преобразования набора значений  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{N-1})$  в набор коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$  называют прямым дискретным преобразованием Фурье, а обратную операцию – обратным дискретным преобразованием Фурье. Осуществление этих операций является важной составной частью многих алгоритмов.

Обозначив  $\omega = \exp\{2\pi i/N\}$ , запишем выражения (2.37), (2.39) в следующем виде:

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{kj}, \quad 0 \leq j < N, \quad (2.40)$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(x_l) \omega^{-kl}, \quad 0 \leq k < N. \quad (2.41)$$

Если вычисления проводить непосредственно по формулам (2.40) и (2.41), то на выполнение каждого преобразования потребуется примерно  $N^2$  арифметических операций. (Здесь под арифметической операцией понимается умножение двух комплексных чисел с последующим сложением. Величины  $\omega^{kj}$  считаются вычисленными заранее.)

Однако в случае, когда число  $N$  не является простым, количество арифметических операций, требуемых для вычисления по формулам (2.40) и (2.41), можно существенно уменьшить. Поясним сказанное на примере вычислений по формулам (2.40). (Вычисления по формулам (2.41) производятся аналогично с заменой  $\omega$  на  $\omega^{-1}$ .)

Пусть  $N = N_1 N_2$ , где  $2 \leq N_1, 2 \leq N_2$  – целые числа. Представим индекс  $j$  в виде  $j = j_1 N_1 + j_0$ , где  $0 \leq j_0 < N_2, 0 \leq j_1 < N_1$ . Положим  $k = k_1 N_2 + k_0$ , где  $0 \leq k_1 < N_1, 0 \leq k_0 < N_2$ . Пользуясь тем, что  $kj = k_1 j_1 N + k_1 j_0 N_2 + k_0 j$  и  $\omega^{k_1 j_1 N} = 1$ , имеем  $\omega^{kj} = \omega^{k_1 j_0 N_2} \omega^{k_0 j}$ . Заменяя в формуле (2.40) суммирование по индексу  $k$  операцией повторного суммирования по индексам  $k_0$  и  $\omega^{-1}$ , получим

$$f(x_j) = \sum_{k_0=0}^{N_2-1} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} a_{k_1 N_2 + k_0} \omega^{k_1 j_1 N_2} \omega^{k_0 j} = \sum_{k_0=0}^{N_2-1} \tilde{a}(k_0, j_0) \omega^{k_0 j}, \quad (2.42)$$

где

$$\tilde{a}(k_0, j_0) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} a_{k_1 N_2 + k_0} \omega^{k_1 j_0 N_2}. \quad (2.43)$$

Массив  $\tilde{a}$  содержит  $N$  чисел, и для его вычисления требуется  $NN_1$  арифметических операций. После того как найдены значения  $\tilde{a}(k_0, j_0)$ , на вычисления по формуле (2.42) требуется  $NN_2$  операций.

Таким образом, общее число операций равно  $N(N_1 + N_2)$ . Заметим, что достигнута экономия в числе операций, поскольку  $N_1 + N_2 < N_1 N_2 = N$ , как только  $N > 4$ . Выигрыш удалось достичь благодаря тому, что оказалось возможным выделить группы слагаемых (2.43), которые используются для вычисления значений  $f(x_j)$  при различных  $j$ , но сами вычисляются лишь однажды.

Указанная выше идея развита в алгоритмах быстрого дискретного преобразования Фурье. В случае, когда  $N = N_1 \cdot N_2 \dots N_m$ , (где  $2 \leq N_s$ ), с помощью быстрого дискретного преобразования Фурье можно выполнить дискретное преобразование Фурье за  $N(N_1 + N_2 + \dots + N_m)$  арифметических операций. Особенно эффективным является этот алгоритм, когда число  $N$  является степенью числа 2 (т.е.  $N = 2^m$ ). В этом случае вместо  $N^2$  операций требуется выполнить лишь  $2N \log_2 N$  операций. Например, для  $N = 1024 = 2^{10}$  этот алгоритм позволяет ускорить вычисления в  $\frac{N}{2 \log_2 N} = 1024/20 \approx 50$  раз.

Программы, реализующие различные варианты алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье, входят в стандартное математическое обеспечение и доступны каждому пользователю (см п. 3.1).

Часто разложение (2.37) записывают в эквивалентном виде:

$$f(x_j) = \sum_{-N/2 < k \leq N/2} a_k \exp\{2\pi i k x_j\},$$

что соответствует интерполяции тригонометрическим многочленом

$$S_N(x) = \sum_{-N/2 < k \leq N/2} a_k \exp\{2\pi i k x\}. \quad (2.44)$$

Здесь коэффициенты  $a_k$  по-прежнему задаются формулой (2.39).

Хотя интерполяционные тригонометрические многочлены (2.38), (2.44) и совпадают в точках  $x_j$ , они принимают существенно разные значения в точках  $x$ , отличных от узловых.

Рассмотрим кратко задачу интерполяции функции  $f$ , заданной в точках  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} \leq 1$  тригонометрическим многочленом (2.44).

Не вдаваясь в довольно сложную проблему оценки погрешности тригонометрической интерполяции, отметим тем не менее, что для гладкой периодической с периодом 1 функции  $f$  есть основание рассчитывать на выполнение приближенного равенства  $f(x) \approx S_N(x)$  для всех  $x \in [0,1]$ .

Если значения  $y_i^* \approx f(x_i)$  интерполируемой функции задаются с погрешностями  $\varepsilon_i$  и известно, что  $|\varepsilon_i| \leq \overline{\Delta(y^*)}$  для  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , то вычисляемый по значениям  $y_i^*$  тригонометрический интерполяционный многочлен  $S_n^*$  содержит погрешность. Для нее справедлива оценка

$$\overline{\Delta(S_N^*)} = \max_{[0,1]} |S_N^*(x) - S_N(x)| \leq \Lambda_{\tilde{N}} \overline{\Delta(y^*)},$$

аналогичная оценке для алгебраических многочленов. Здесь  $\Lambda_{\tilde{N}}$  – постоянная, являющаяся аналогом константы Лебега  $\Lambda_N$ .

В отличие от задачи интерполяции алгебраическими многочленами оптимальным (т. е. дающим минимальное значение  $\Lambda_{\tilde{N}}$ ) является равномерное распределение узлов, которому отвечает значение

$$\Lambda_{\tilde{N}} \approx \frac{2}{\pi} \ln[(N+1)/2].$$

Таким образом, при тригонометрической интерполяции выбор узлов  $x_j = j/N$  ( $0 \leq j < N$ ) является наиболее естественным с точки зрения как простоты вычисления коэффициентов многочлена (быстрое дискретное преобразование Фурье), так и минимизации влияния ошибок исходных данных.

## 2.9. Метод наименьших квадратов

Известны два основных подхода к аппроксимации табличных данных кривыми. При одном из них требуется, чтобы аппроксимирующая кривая проходила через все заданные точки. Это удастся сделать с помощью методов интерполяции, рассмотренных ранее. При другом подходе данные аппроксимируют простой функцией, применимой во всем диапазоне данных, но не обязательно проходящей через все точки. Такой подход называют подгонкой кривой, которую

стараятся провести так, чтобы ее отклонения от табличных данных были минимальными. Обычно стремятся свести к минимуму сумму квадратов разностей между значениями функции, определяемыми выбранной кривой и таблицей. Такой метод подгонки называют методом наименьших квадратов. Задача подбора экспериментальной зависимости методом наименьших квадратов состоит из двух этапов: на первом этапе по табличным данным выбирается вид зависимости (прямая, парабола, экспонента и т.д.), на втором – подбираются параметры выбранной зависимости.

Линейная задача наименьших квадратов состоит в следующем. Пусть функция  $y = f(x)$  задана таблицей приближенных значений  $y_i \approx f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , полученных с ошибками  $\varepsilon_i = y_i^0 - y_i$ , где  $y_i^0 = f(x_i)$ . Если значения  $y_i$  получены из эксперимента, то ошибки носят случайный характер и зачастую уровень погрешности («шума» таблицы) бывает значительным.

Предположим, что для аппроксимации функции  $f$  используется линейная модель

$$y = \Phi_m(x) \equiv a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x), \quad (2.45)$$

где  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  – заданные базисные функции;  $a_0, a_1, \dots, a_m$  – параметры модели, являющиеся коэффициентами обобщенного многочлена  $\Phi_m(x)$ .

Одной из наиболее простых и часто используемых линейных моделей вида (2.45) (при  $\varphi_k(x) = x^k$ ) является полиномиальная модель

$$y = P_m(x) \equiv a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m. \quad (2.46)$$

В случае когда уровень неопределенности исходных данных высок, неестественно требовать от модели (2.45) выполнения условий совпадения значений обобщенного многочлена  $\Phi_m(x)$  в точках  $x_i$  с заданными значениями  $y_i$ , т.е. использовать интерполяцию. При интерполировании происходит повторение ошибок наблюдений, в то время как при обработке экспериментальных данных желательно, напротив, их сглаживание.



Существуют различные подходы к решению поставленной задачи. Простейший из них состоит в использовании необходимого условия экстремума функции  $s$ :

$$\frac{\partial s}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.48)$$

Вычисляя частные производные функции  $s$  и изменяя порядок суммирования, от равенства (2.48) переходят к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^m \left( \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) \right) a_j = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_k(x_i), \quad (k = 0, 1, \dots, m), \quad (2.49)$$

которая называется нормальной системой метода наименьших квадратов.

Если  $m = n$  и система функций  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно независима в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , то многочлен  $\Phi_n^y$ , найденный методом наименьших квадратов, совпадает с интерполяционным многочленом  $\Phi_n$ . В самом деле  $\Phi_n(x_i) = y_i$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n$ , и поэтому  $\delta(\Phi_n, y) = 0$ . Так как среднеквадратичное отклонение не может быть отрицательным, то  $\Phi_n$  – многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения. В силу его единственности  $\Phi_n = \Phi_n^y$ .

Как правило, при использовании метода наименьших квадратов предполагается, что  $m \ll n$ ,  $m \ll n$ . В этом случае метод обладает некоторыми сглаживающими свойствами.

Очень часто для приближения по методу наименьших квадратов используются алгебраические многочлены степени  $m \leq n$ . Поскольку система функций  $1, x, \dots, x^m$  линейно независима в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  при  $m \leq n$ , алгебраический многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения существует и единствен.

Так как в случае приближения алгебраическими многочленами  $\varphi_k(x) = x^k$ , то нормальная система (2.47) принимает следующий вид:

$$\sum_{j=0}^m \left( \sum_{i=0}^n x_i^{j+k} \right) a_j = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2.50)$$

Запишем систему (2.50) в развернутом виде для двух наиболее простых случаев  $m = 1$  и  $m = 2$ . В случае когда приближение осуществляется многочленом первой степени  $P_1(x) = a_0 + a_1x$ , нормальная система имеет вид

$$(n+1)a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i \right] a_1 = \sum_{i=0}^n y_i, \quad (2.51)$$

$$\left[ \sum_{i=0}^n x_i \right] a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^2 \right] a_1 = \sum_{i=0}^n y_i x_i.$$

Если же используется многочлен второй степени  $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , то нормальная система имеет вид

$$\begin{aligned} (n+1)a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i \right] a_1 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^2 \right] a_2 &= \sum_{i=0}^n y_i, \\ \left[ \sum_{i=0}^n x_i \right] a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^2 \right] a_1 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^3 \right] a_2 &= \sum_{i=0}^n y_i x_i, \\ \left[ \sum_{i=0}^n x_i^2 \right] a_0 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^3 \right] a_1 + \left[ \sum_{i=0}^n x_i^4 \right] a_2 &= \sum_{i=0}^n y_i x_i^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

При вычислении параметров  $a_0, a_1, \dots, a_m$  с помощью решения нормальной системы (2.47) задача сводится к стандартной проблеме линейной алгебры – решению системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей. Более того, в случае когда функции  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  линейно независимы в точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , матрица системы является симметричной и положительно определенной. В частности, это означает, что при решении нормальной системы методом Гаусса не нужен выбор главных элементов.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что при отсутствии специального выбора базисных функций  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  уже при  $m = 5$  нормальная система обычно оказывается очень плохо обусловленной. В этом случае вычисленные как решение системы (2.49) параметры модели могут оказаться полностью искаженными ошибками округления.

Простейший пример такой «почти линейно зависимой» системы базисных функций при больших  $m$  дает система  $1, x, \dots, x^m$ , широко применяемая при аппроксимации алгебраическими многочленами. При  $m = 5$  соответствующая нормальная система, как правило, здесь настолько плохо обусловлена, что ее использование практически бесполезно.

Существуют методы решения задачи наименьших квадратов, предваряющие решение нормальной системы численной ортогонализацией системы базисных функций [3, 5]. Однако в настоящее время в серьезной вычислительной практике нормальная система, как правило, не используется. Применяются другие, более надежные, методы (учитывающие, например, информацию об уровне погрешности данных и относительной точности используемой ЭВМ). Желательно приводить подбираемую функцию к такому виду, чтобы система (2.49) была системой линейных алгебраических уравнений.

Подбор коэффициентов осуществляется следующим образом.

#### 1. Линейная функция

Для подбора параметров линейной функции  $\Phi = a_0 + a_1x$  составим функцию (2.45) для линейной зависимости

$$s(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i)^2$$

Продифференцировав функцию  $s$  по  $a_0$  и  $a_1$ , получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i) \cdot (-1) &= 0, \\ 2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i) \cdot (-x_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a_0 \cdot n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{aligned} \right\},$$

решив которую определим коэффициенты функции  $\Phi = a_0 + a_1x$ :

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} - a_1 \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \\ a_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}. \end{aligned} \right. \quad (2.53)$$

## 2. Полином $k$ -й степени

Для определения параметров зависимости  $\Phi = a_0 + a_1x + a_2x^2$  составим для нее функцию (2.45)  $s(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2$ .

После дифференцирования  $s$  по  $a_0, a_1$  и  $a_2$  получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Решив систему (2.54), найдем значения параметров  $a_0, a_1$  и  $a_2$ .

Аналогично определяются параметры многочлена третьей степени

$$\Phi = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3.$$

Составим функцию  $s(a_0, a_1, a_2, a_3)$ :

$$s(a_0, a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - a_3x_i^3)^2$$

После дифференцирования  $s$  по  $a_0, a_1, a_2, a_3$  система уравнений для вычисления параметров  $a_0, a_1, a_2$  примет вид

$$\left. \begin{aligned} a_0n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^5 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^2, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^5 + a_3 \sum_{i=1}^n x_i^6 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^3. \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$



После решения системы (2.57) необходимо вычислить значения коэффициента  $a$  по формуле  $a = e^A$ .

В п. 3.1 приведены программы для подбора коэффициентов полинома  $k$ -й степени методом наименьших квадратов в MATLAB (листинги 3.9 – 3.12).

## 2.10. Другие методы прогнозирования

Некоторый гладкий сигнал  $s(t)$  может быть представлен бесконечным рядом Тейлора

$$s(t) = s(t_1) + s'(t_1) \frac{t}{1!} + s''(t_1) \frac{t^2}{2!} + s'''(t_1) \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (2.58)$$

Существо ряда Тейлора состоит в том, что сигнал сложной формы представляется взвешенной суммой простых стандартных степенных сигналов вида  $t^k$ . Если в какой-то момент времени  $t_1$  известны (измерены или вычислены) значение сигнала  $s(t_1)$ , его скорость  $s'(t_1)$ , ускорение  $s''(t_1)$  и более высокие производные по времени, то значения сигнала для последующих моментов времени  $t$  определяются как сумма исходного значения сигнала и его приращений, обусловленных скоростью, ускорением и т.д. Например, функция  $\sin(t)$  на некотором начальном интервале, не превышающем  $t_{\max} = 2$ , с некоторой точностью представляется таким рядом.

Графики синусоиды и сумм нескольких первых членов ряда Тейлора приведены на рис. 2.8.

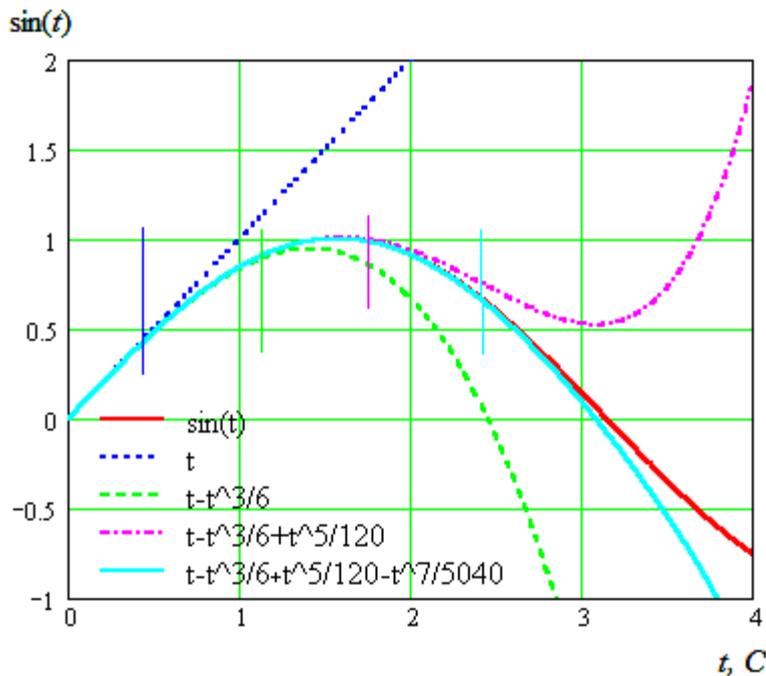


Рис. 2.8. График синусоидального сигнала и его усеченных разложений в ряд Тейлора в начале координат

Чем больше слагаемых в усеченном ряду, тем дольше аппроксимация совпадает с исходной синусоидой. Синусоида, будучи гладкой функцией в окрестности начала координат определена как угодно далеко вперед, а ряд Тейлора может на основании информации о синусоиде только из окрестности начала координат спрогнозировать поведение синусоиды как угодно далеко вперед.

Как видно на рис. 2.8, добавление слагаемого в усеченный ряд приводит к тому, что аппроксимация дольше совпадает с исходным сигналом – синусоидой. Каждый член ряда обеспечивает вместе с младшими слагаемыми совпадение аппроксимации на некотором интервале. Чем дальше он отстоит от момента определения производных, тем больше его номер, равный степени производной, определяющей его коэффициент.

Таким образом, каждый член ряда Тейлора вместе с младшими слагаемыми определяет поведение аппроксимации на некотором временном интервале. Чем больше номер слагаемого, тем на более дальнем участке он начинает вносить заметный и существенный вклад в аппроксимацию. Таким образом, ряд Тейлора позволяет прогнозировать гладкий сигнал.

Полный ряд Тейлора предсказывает поведение гладкой функции на неограниченный интервал вперед. Другими словами, информации, содержащейся в значениях сигнала в небольшой окрестности некоторой точки, достаточно для воспроизведения сигнала во всей области его определения.

Таким образом, если сигнал гладкий и полностью известен, то он может быть разложен в ряд Тейлора. Тем не менее усеченные ряды могут быть применены на практике для прогноза поведения неизвестного сигнала на некоторый относительно небольшой интервал вперед.

#### *Экстраполяционная формула Нистрёма*

Если подынтегральную функцию  $y'$  в соотношении

$$y(x_{n+1}) - y(x_{n-j}) = \int_{x_{n-j}}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx = \int_{x_{n-j}}^{x_{n+1}} y'(x) dx \quad (2.59)$$

заменить многочленом по формуле Ньютона

$$y'(x) = f(x, y(x)) = f(x_n + th, y(x_n + th)) = \sum_{i=0}^k \nabla^i f_n \frac{t(t+1)\dots(t+i-1)}{i!} + r_{k,n}(x)$$

и положить  $j=1$ , то это приведет к разностному уравнению

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h \sum_{i=0}^k A_i \nabla^i f_n$$

с коэффициентами 
$$A_i = \frac{1}{i!} \int_{-i}^i t(t+1)\dots(t+i-1)dt.$$

Подставляя численные значения коэффициентов, имеем

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_{n-1} + h \left( 2f_n + \frac{1}{3} \nabla^2 f_n + \frac{1}{3} \nabla^3 f_n + \frac{29}{90} \nabla^4 f_n + \frac{14}{45} \nabla^5 f_n + \dots + A_k \nabla^k f_n \right) = \\ &= y_{n-1} + h \left( 2f_n + \frac{1}{3} (\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n + \nabla^4 f_n + \nabla^5 f_n) - \frac{1}{90} (\nabla^4 f_n + 2\nabla^5 f_n) + \dots + A_k \nabla^k f_n \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Формула (2.60) называется *экстраполяционной формулой Нистрёма*. Локальная погрешность формулы Нистрёма вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= h A_{k+1} \nabla^{k+1} f_n + O(h^{k+3}) = h A_{k+1} h^{k+1} f^{(k+1)}(\eta, y(\eta)) + O(h^{k+3}) = \\ &= A_{k+1} h^{k+2} y^{(k+2)}(x_n) + O(h^{k+3}). \end{aligned}$$

$\eta$  заключено между  $x_{n-k-1}$  и  $x_n$ .

## 2.11. Рекомендации по выбору и методический подход к построению вычислительного алгоритма для прогнозирующей модели

Научно-методический подход к выбору алгоритма работы прогнозирующей модели включает следующие составляющие:

1. Анализ характерных режимов работы объекта управления для обоснованного выбора вида приближающей функции.

2. Выбор методики вычисления приближающей функции: для приближения многочленами – выбор интерполяционного многочлена, при использовании метода наименьших квадратов – вид аппроксимирующей функции.

3. Определение объема исходных данных для прогнозирования с требуемой точностью – количества узлов и их фиксации (равноотстоящие или с произвольными промежутками). При экстраполяции многочленами Лагранжа или Ньютона выбор количества узлов интерполяции задает порядок многочлена, что во многом определяет точность и трудоемкость прогноза.

4. Выбор шага экстраполяции на основании теоретических данных, результатов моделирования с учетом вышеперечисленных положений и погрешности прогнозирования.

Предлагается два способа задания алгоритма работы прогнозирующей модели в системах управления с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой на основе статистической обработки данных о состоянии объекта управления, представляемых в виде функциональных зависимостей:

1. Прогнозирование с помощью интерполяционных многочленов.
2. Приближение функций для прогноза путем аппроксимации данных методом наименьших квадратов.

Существует большое количество различных по сложности (объему вычислительной процедуры) и точности методов экстраполяции функций, часть которых представлена в данном пункте.

Мы рассмотрели параболическое интерполирование, когда в качестве интерполяционной функции выбирается многочлен степени не выше  $n$  для функции, заданной в  $n + 1$  узлах интерполяции. Все три рассмотренных многочлена (канонический, Лагранжа и Ньютона) – это три различных способа построения одной и той же кривой

$$F(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Многочлен  $F(x)$  степени  $n$  есть единственное разложение в классе степенных функций [5].

То есть если функция  $f(x)$  задана  $n + 1$  значениями  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1) \dots y_n = f(x_n)$  в несовпадающих узлах интерполяции, то это означает, что существует единственный многочлен  $F(x)$  степени  $n$ , принимающий в узлах интерполяции заданные значения  $y_0 = F(x_0)$ ,  $y_1 = F(x_1) \dots y_n = F(x_n)$ . Формулы канонического полинома, Ньютона и Лагранжа являются различными формами записи одного и того же многочлена  $n$ -й степени.

В отличие от интерполяционного полинома в канонической форме (2.3) для вычислений значений полинома Лагранжа (2.8) не требуется предварительно определять коэффициенты полинома путем решения системы уравнений. Однако для каждого значения аргумента полином Лагранжа приходится пересчитывать вновь, коэффициенты же канонического полинома вычисляются только один раз. Поэтому практическое применение полинома Лагранжа оправдано только в том случае, когда интерполяционная функция вычисляется в сравнительно небольшом количестве точек.

В практическом плане формула Ньютона (2.16) обладает рядом преимуществ перед формулой Лагранжа. Пусть, например, по каким-либо причинам необходимо увеличить степень интерполяционного многочлена на единицу, добавив в таблицу еще один узел  $x_{n+1}$ . При использовании формулы Лагранжа (2.6) каждое слагаемое является многочленом  $n$ -й степени, следовательно, увеличение числа точек и соответственно степени многочленов приводит не только к увеличению числа слагаемых, но и к необходимости вычислять каждое из них заново.

В то же время для вычисления  $P_{n+1}(x)$  по формуле Ньютона (2.16) достаточно добавить к многочлену  $P_n(x)$  лишь одно очередное слагаемое

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = f(x_0; \dots; x_n; x_{n+1}) \omega_{n+1}(x) \quad (2.61)$$

Заметим, что в случае когда величина  $|x_{n+1} - x|$  мала, а функция  $f$  достаточно гладкая, справедливо приближенное равенство

$$f(x_0; \dots; x_n; x) \approx f(x_0; \dots; x_n; x_{n+1}),$$

из которого с учетом равенства (2.61) следует, что

$$f(x) - P_n(x) \approx P_{n+1}(x) - P_n(x).$$

Таким образом, величину  $\varepsilon_n = |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$  можно использовать для практической оценки погрешности интерполяции.

Так как любой  $i$ -й член полинома Ньютона зависит только от  $i$  первых точек и от значения функций в них, добавление новых точек вызывает лишь добавление новых слагаемых без изменения первоначальных. Это является существенным преимуществом данного многочлена по сравнению с многочленом Лагранжа при составлении вычислительных алгоритмов и решении задач прогнозирования в реальном времени.

Для приближения функций, заданных в равноотстоящих узлах, известно большое количество формул вычисления многочленов на основе разностей [3], разработан единый подход к нахождению интерполяционных формул, выбору узлов и определению погрешности. Однако большинство из них (формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя и др.) используется для интерполирования в середине интервала и мало пригодно для задач экстраполяции. С учетом сказанного при выборе алгоритма работы прогнозатора рассматривались интерполяционная формула Ньютона, кубическая интерполяция сплайнами и аппроксимация данных методом наименьших квадратов.

## 2.12. Прогнозирование функций с разрывом первого рода

При прогнозировании сигналов с разрывом первого рода использование экстраполяции функций многочленами невозможно, так как функция должна быть непрерывной. На рис. 2.9 – 2.11 показаны графики абсолютной погрешности при прогнозировании единичного скачка с использованием экстраполяции по второй интерполяционной формуле Ньютона, сплайн-интерполяции и аппроксимации методом наименьших квадратов. Полученные результаты подтверждают необходимость учесть при составлении алгоритма работы прогнозатора возможные скачкообразные изменения анализируемых воздействий. О возникновении подобных ситуаций может свидетельствовать резкое увеличение погрешности прогнозирования, которую следует постоянно контролировать в процессе работы прогнозатора.

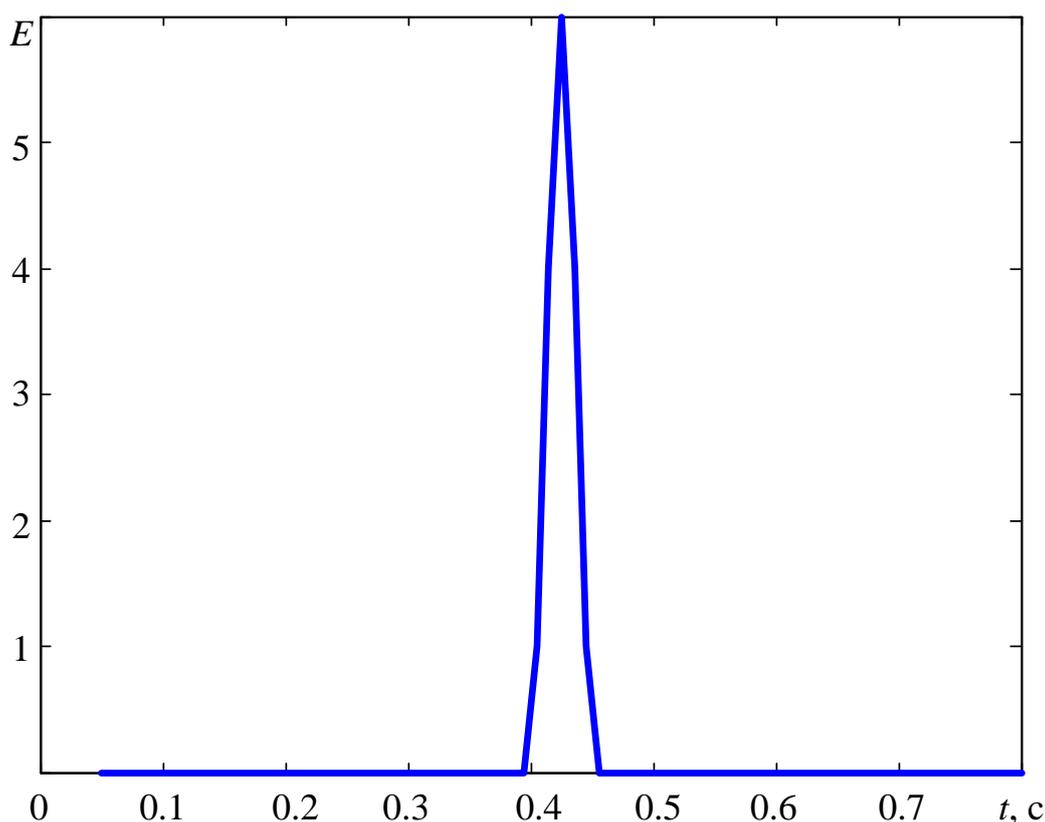


Рис. 2.9. График абсолютной погрешности прогнозирования единичного скачка с использованием интерполяционной формулы Ньютона

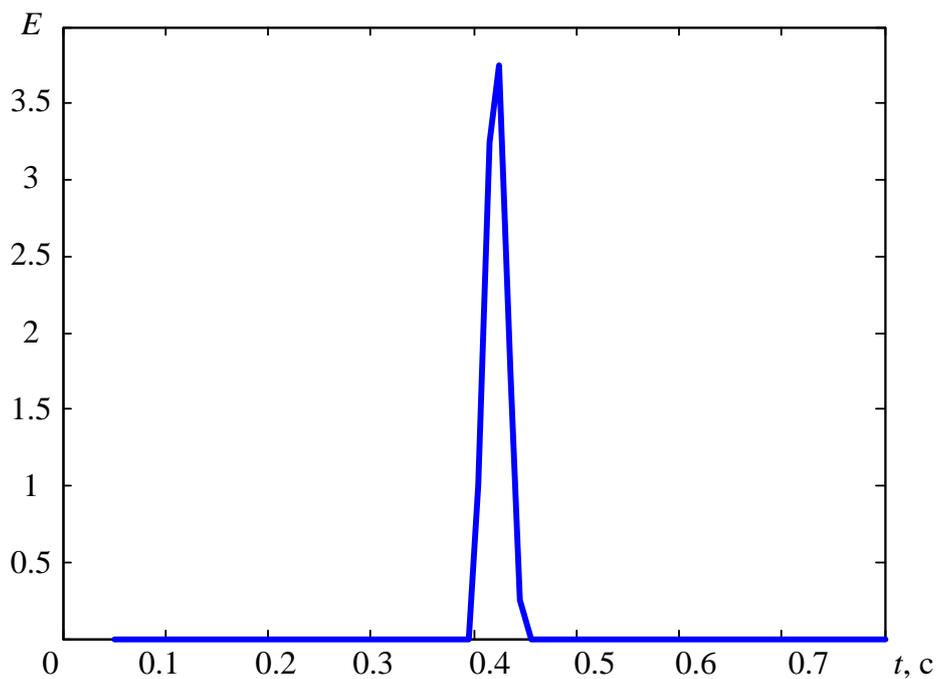


Рис. 2.10. График абсолютной погрешности прогнозирования единичного скачка с использованием сплайн-интерполяции

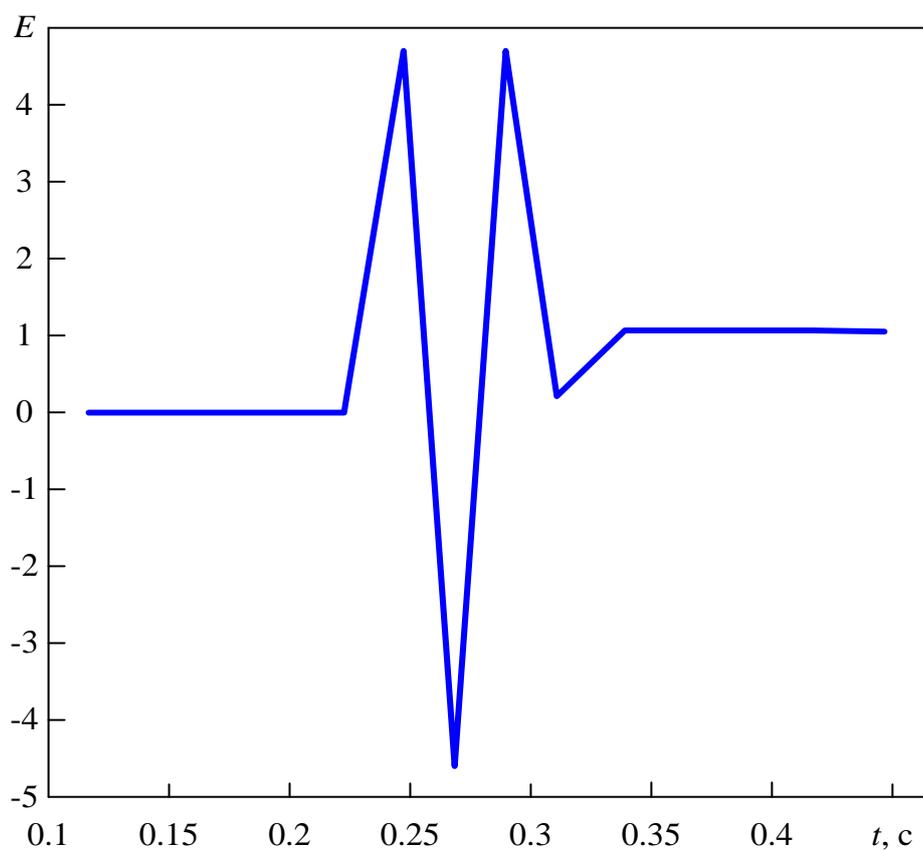


Рис. 2.11. График абсолютной погрешности прогнозирования единичного скачка с использованием аппроксимации методом наименьших квадратов

### 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В СРЕДЕ MATLAB

#### 3.1. Реализация интерполяции в MATLAB

В MATLAB отсутствуют встроенные функции для построения интерполяционного полинома  $n$ -й степени, однако средств пакета достаточно для написания функций, реализующих полином [12]. В листинге 3.1 представлена функция на М-языке для вычисления значения канонического полинома, в листингах 3.2 – 3.6 – полиномов Лагранжа и Ньютона в точке  $t$  по заданным значениям  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Листинг 3.1

```
function s=kanon(x,y,t)
% Вычисление количества точек в массивах x и y
n=length(x);
% Формирование коэффициентов системы уравнений (2.4)
for i=1:n
    for j=1:n
        A(i,j)=x(i).^(j-1);
    end
end
% Решение системы уравнений (2.4)
a=A^(-1)*y';
% Вычисление значения полинома по формуле (2.5)
s=0;
for i=1:n
    s=s+a(i)*t^(i-1);
end
end
```

Для вычисления интерполяционного полинома Лагранжа в MATLAB можно применить два способа (2.8), (2.11), описанных в п. 2.2. Ниже приведены тексты функций (листинги 3.2, 3.3), в которых реализованы эти способы:

- в функции lagrange – первый способ;
- в функции lagrangef – второй способ.

Входные массивы  $x$  и  $y$  должны содержать значения  $x_k$  и  $y_k$  соответственно для всех  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ . Входной аргумент  $xx$  функций `lagrange` и `lagrangef` может быть массивом значений аргумента, для которых требуется вычислить значение интерполяционного полинома. Тогда в выходном аргументе  $yy$  отображается массив соответствующих значений полинома. При программировании функций `lagrange` и `lagrangef` не потребовалось делать цикла по элементам массива  $xx$  благодаря поддержке поэлементных операций при работе с массивами в MATLAB.

При программировании интерполяционного полинома по второму способу (2.11) в функции `lagrangef` не делается проверка на равенство  $x$  какому-либо узлу, поскольку в MATLAB операция деления на ноль допустима (при делении на ноль числа, не равного нулю, получается `Inf`, а при делении нуля на ноль – `NaN`, т.е. Not a Number, не число).

### Листинг 3.2

```
function yy=lagrange(x,y,xx)
% вычисление интерполяционного полинома в форме Лагранжа
% x - массив координат узлов
% y - массив значений интерполируемой функции
% xx - массив значений аргумента, для которых надо
% вычислить значения полинома
% yy - массив значений полинома в точках xx
% узнаем число узлов интерполяции (N=n+1)
N=length(x);
% создаем нулевой массив значений интерполяционного полинома
yy=zeros(size(xx));
% в цикле считаем сумму по узлам
for k=1:N
    % вычисляем произведения, т.е. функции Psi_k
    t=ones(size(xx));
    for j=[1:k-1, k+1:N]
        t=t.*(xx-x(j))/(x(k)-x(j));
    end
    % накапливаем сумму
    yy = yy + y(k)*t;
end
```

### Листинг 3.3

```
function uu=lagrangef(x,y,xx)
% вычисление интерполяционного полинома в форме Ла-
гранжа
% x - массив координат узлов
% y - массив значений интерполируемой функции
% xx - массив значений аргумента, для которых
% надо вычислить значения полинома
% uu - массив значений полинома в точках xx
% узнаем число узлов интерполяции (N=n+1)
N=length(x);
% предварительное вычисление значений z(k)
z=zeros(size(x));
for k=1:N
    t=1;
    for j=[1:k-1 k+1:N]
        t=t*(x(k)-x(j));
    end
    z(k)=y(k)/t;
end
% вычисление w(x).
w=ones(size(xx));
for k=1:N
    w=w.*(xx-x(k));
end
s=zeros(size(xx));
% вычисление s(x)
for k=1:N
    s=s+z(k)./(xx-x(k));
end
% вычисление значений интерполяционного полинома
uu=w.*s.
```

Для реализации вычислений таблицы разделенных разностей (см. рис. 2.3), применяемых в интерполяционной формуле Ньютона (2.16) некоторой функции в MATLAB, выводе в командное окно и в текстовый файл, можно воспользоваться функцией DDIF.

В функции DDIF использованы следующие функции MATLAB:  
length – возвращает длину вектора.

feval – вычисляет функцию (по ее имени или указателю на нее) от заданного аргумента, т.е. если есть функция myfun, то вместо  $y = \text{myfun}(x)$  можно написать  $y = \text{feval}('myfun', x)$ , или  $y = \text{feval}(@myfun, x)$ .

reshape – перестраивает массив и приводит его к заданным размерам; используется для получения вектор-столбца значений функции, поскольку заданная функция может возвращать вектор-строку.

NaN – создает массив заданных размеров, заполненный NaN (Not a Number, т.е. не число); используется для того, чтобы потом в текстовом массиве заменить NaN на пробелы для получения треугольной таблицы (т.е. для получения пустых ячеек).

num2str – преобразует числовой массив в массив строк.  
strrep – заменяет в заданной строке одну подстроку на другую; используется для замены NaN на три пробела.

disp – выводит в командное окно.

fopen – открывает файл; функция fopen возвращает идентификатор файла.

fprintf – записывает данные в файл; для записи строк используется формат '%s'

fclose – закрывает файл.

#### Листинг 3.4

```
function DDIF(x, fun, fname)
%выводит таблицу разделенных разностей в командное
окно и в файл
%x - точки, в которых вычисляются разделенные разности
%fun - имя или указатель на функцию
%fname - имя файла
%узнаем число точек
N = length(x);
%вычисляем значения функции fun от x
y = feval(fun, x);
%делаем из y столбец 1 на N
y = reshape(y, 1, N);
%создаем массив 2*N-1 на N и заполняем его значениями
NaN
D = NaN(2*N-1, N);
%заполняем первый столбец D значениями функции (че-
рез строку)
D(1:2:end, 1) = y;
```

```

проходим по столбцам массива D, в j-й столбец записываем
разделенную разность (j-1)-го порядка
for j = 2 : N
s = j - 1;
i = 0;
%проходим по строкам массива D (через строку)
%вычисляем разделенную разность через две предыдущие
for k = j : 2 : 2*N - j
i = i + 1;
D(k,j) = (D(k+1, j-1) - D(k-1,j-1)) / (x(i+s) - x(i));
end
end
%преобразуем числовой массив D в массив строк STR
STR = num2str(D);
%проходим по строкам STR и меняем NaN на три пробела
for i = 1: 2*N-1
STR(i,:) = strrep(STR(i,:), 'NaN', ' ');
end
выводим таблицу в командное окно
disp(STR)
открываем файл с именем, записанным в fname, для запи-
си таблицы
f = fopen(fname, 'wt+');
%записываем каждую строку таблицы в файл
for i = 1 : 2*N-1
fprintf(f, '%s', STR(i,:));
end
% закрываем файл
fclose(f);

```

Для вычисления интерполяционного полинома в форме Ньютона (2.16) в MATLAB можно воспользоваться функциями `newton` (листинг 3.5) либо `newton1` (листинг 3.6).

#### Листинг 3.5

```

function yy = newton(x, y, xx)
% x – массив с абсциссами точек, через которые
%должен проходить интерполяционный полином
% y – массив ординат точек, через которые
%должен проходить интерполяционный полином

```

```

% xx – массив значений независимой переменной,
% для которой надо вычислить интерполяционный полином
% yy – вычисленные значения интерполяционного полинома
% определяем число точек
N = length(x);
% вычисляем разделенные разности
DIFF = y;
for k = 1 : N-1
for i = 1: N - k
DIFF(i) = (DIFF(i+1) - DIFF(i)) / (x(i+k) - x(i));
end
end
% вычисляем значения интерполяционного полинома в точ-
ках xx
% с использованием операции поэлементного умножения *
% для получения сразу всех значений полинома yy
yy = DIFF(1) * ones(size(xx));
for k = 2 : N
yy = DIFF(k) + (xx - x(k)) .* yy;
end

```

Листинг 3.6

```

function s=newton1(x,y,t)
% Вычисление количества точек в массивах x и y
n=length(x);
% Запись в первый столбец матрицы разделенных разно-
стей вектора y
for i=1:n
C(i,1)=y(i);
end
% Формирование матрицы разделенных разностей
for i=2:n
for j=2:n
if (i<j)
C(i,j)=0;
else
C(i,j)=(C(i,j-1)-C(j-1,j-1))/(x(i)-x(j-1))
end
end
end
end

```

```

% Формирование массива коэффициентов полинома Ньютона
for i=1:n
    A(i)=C(i,i);
end
% Расчет значения полинома в точке t по формуле (1.16)
s=0;
for i=1:n
    p=1;
    for j=1:i-1
        p=p*(t-x(j));
    end
    s=s+A(i)*p;
end
end

```

Для реализации сплайн-интерполяции в MATLAB есть встроенная функция `interp1` следующего вида:

$$y_i = \text{interp1}(x, y, x_i, \text{method}),$$

где  $x$  – массив абсцисс экспериментальных точек;  $y$  – массив ординат экспериментальных точек;  $x_i$  – точки, в которых необходимо вычислить значение функций с помощью сплайна, `method` – определяет метод построения сплайна. Параметр `method` может принимать одно из следующих значений:

- `'linear'` – линейная интерполяция;
- `'spline'` – кубический сплайн;
- `'nearest'` – интерполяция по соседним точкам – это метод построения кусочной функции, при котором значение в любой точке равно значению в ближайшей узловой точке.

Задачу приближения заданных таблично функций с помощью сплайн-интерполяции можно решить, используя приведенные в листингах 3.7 и 3.8 функции `koef_spline(x,y)` и `my_spline(x,y,t)`. Функция `koef_spline(x,y)` предназначена для расчетов кубического сплайна, а функция `my_spline(x,y,t)`, которая, используя `koef_spline`, вычисляет значение кубического сплайна в заданной точке  $t$ .

### Листинг 3.7

```

function [b, c, d]= koef_spline(x,y)
% Функция предназначена для вычисления коэффициентов
сплайна,

```

```

% здесь x, y – массивы абсцисс и ординат заданных точек
% b, c, d – коэффициенты сплайна, рассчитываемые по
формулам (2.21),
% (2.23), (2.27), (2.30).
n=length(x);
for k=2:n
    h(k)=x(k)-x(k-1);
end
for k=2:n
    l(k)=(y(k)-y(k-1))/h(k);
end
delt(2)=-h(3)/(2*(h(3)+h(2)));
lyam(2)=1.5*(l(3)-l(2))/(h(3)+h(2));
for k=4:n
delt(k-1)=-h(k)/(2*(h(k-1)+h(k))+h(k-1)*delt(k-2));
lyam(k-1)=(3*(l(k)-l(k-1))-h(k-1)*delt(k-2))/(2*(h(k-1)+h(k))+ h(k-
-1)*delt(k-2));
end
c(n)=0;
for k=n:-1:3
    c(k-1)=delt(k-1)*c(k)+delt(k-1);
end
for k=2:n
    d(k)=(c(k)-c(k-1))/3/h(k);
    b(k)=l(k)+(2*c(k)*h(k)+h(k)*c(k-1))/3;
end
end

```

### Листинг 3.8

```

function z=my_spline(x,y,t)
% Вычисление значения кубического сплайна в точке t,
% x, y – массивы абсцисс и ординат заданных точек
[b, c, d]=koef_spline(x,y);
n=length(x);
a=y;
if t>x(n-1)
    j=n;
else
    for i=2:n-1

```

```

        if t<=x(i)
            j=l;
            break
        end
    end
end
end
z=a(j)+b(j)*(t-x(j))+c(j)*(t-x(j))^2+d(j)*(t-x(j))^3;
end

```

Для подбора коэффициентов полинома  $k$ -й степени методом наименьших квадратов в MATLAB есть функция `polyfit` ( $x$ ,  $y$ ,  $k$ ) ( $x$  – массив абсцисс заданных точек;  $y$  – массив ординат этих точек;  $k$  – степень полинома). Функция возвращает массив коэффициентов полинома. Затем можно вычислить значение полинома в любой точке с помощью функции `polyval` ( $k$ ,  $t$ ). В массиве  $k$  хранятся коэффициенты полинома,  $t$  – точка, в которой необходимо вычислить значение полинома. Функция `polyval` ( $k$ ,  $t$ ) вычисляет значение полинома в точке  $t$  по формуле  $k_1 t^n + k_2 t^{n-1} + \dots + k_n t + k_{n+1}$ . С помощью функций `polyfit`, `polyval` можно подобрать зависимости  $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$  и  $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ , что показано в листинге 3.9.

Листинг 3.9

```

X= [массив абсцисс заданных точек ];
Y= [массив ординат заданных точек];
%Подбор коэффициентов полинома 2-й степени с помощью МНК
a=polyfit (x,y,2);
%Подбор коэффициентов полинома 3-й степени с помощью МНК
b= polyfit (x,y,3);
%Определение массива для построения графика функции
t=x(1) : 0.1:x (length(x));
%Вычисление значений подобранных полиномов в точках t(i).
p2t =polyval (a,t);
p3t=polyval (b,t);
%Построение графика функции
plot (x, y, 'ko', t, p2t, 'r-', t, p3t, 'b-');

```

title (“Подбор зависимости методом наименьших квадратов”);  
 legend (“экспериментальные значения”, “полином 2-й степени”, “полином 3-й степени”);  
 grid on;

Несколько сложнее в MATLAB подобрать параметры зависимости  $y = c_0 + c_1x^2 + c_2x^3$  методом наименьших квадратов. Эта задача эквивалент-

на поиску минимума функции  $S(c_0, c_1, c_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - c_0 - c_1x_i^2 - c_2x_i^3)^2$ .

Задачу можно решать двумя способами:

- с помощью функции `fminsearch` найти минимум функции  $S$ ;
- можно найти частные производные функции

$$S(c_0, c_1, c_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - c_0 - c_1x_i^2 - c_2x_i^3)^2$$

по  $c_0, c_1, c_2$ , приравнять их к нулю, решить полученную систему линейных алгебраических уравнений.

*Первый способ решения.* Для поиска минимума функции многих переменных в MATLAB можно использовать функцию `fminsearch` (`fun, x_0`). `fun` – функция, минимум которой необходимо найти, `x_0` – вектор начального приближения точки минимума (неправильный выбор точки начального приближения может привести к некорректным результатам). Функция `fminsearch` возвращает массив, в котором хранятся координаты точки минимума и само значение минимума. Следует создать M-функцию, вычисляющую значение  $S(c_0, c_1, c_2)$  по

формуле  $\sum_{i=1}^n (y_i - c_0 - c_1x_i^2 - c_2x_i^3)^2$ . Текст этой функции приведен в листинге 3.10.

Листинг 3.10

```
function s=f_mnk(c)
%Переменные x, y являются глобальными,
%используются в нескольких функциях
global x;
global y;
s=0;
```

```

for i=1:length(x)
    s=s+(y(i)-c(1)-c(2)*x(i)^2-c(3)*x(i)^3)^2;
end
end

```

Затем необходимо обратиться к функции `fminsearch` (`fun,x0`) для поиска минимума  $S(c_0, c_1, c_2)$  (листинг 3.11), после чего можно будет показать график подобранной функции.

Листинг 3.11

```

global x;
global y;
%Задание начального значения вектора c,
%при неправильном его определении
%минимум может быть найден неправильно
c=[ , , ];
%Определение координат экспериментальных точек
x=[ , .      ];
y=[ , , .      ];
%Поиск минимума и тем самым определение
%коэффициентов зависимостей
[c, err]=fminsearch("f_mnk",c)
%Определение массива для построения графика функции
t=x(1) : 0.1.:x(length(x));
%Вычисление значений подобранных полиномов в точках
t(i).
p2t=c(3)*t.^3+c(2)*t.^2+c(1);
%Построение графика функции
plot (x, y, 'ko', t, p2t, 'r-');
legend ("экспериментальные значения ", 'Подобранная кри-
вая');
grid on

```

*Второй способ решения* начинается с формирования системы линейных алгебраических уравнений. Для этого продифференцируем

функцию  $S(c_0, c_1, c_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - c_0 - c_1 x_i^2 - c_2 x_i^3)^2$  по  $c_0, c_1, c_2$  и прирав-

няем все частные производные к нулю.

$$\left. \begin{aligned} nc_0 + c_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ c_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + c_1 \sum_{i=1}^n x_i^4 + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^5 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^2, \\ c_0 \sum_{i=1}^n x_i^3 + c_1 \sum_{i=1}^n x_i^5 + c_2 \sum_{i=1}^n x_i^6 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

В листинге 3.12 приведена функция `my_mnk(x,y)`, реализующая подбор зависимости вторым способом.

Листинг 3.12

```
function c=my_mnk(x,y)
%Определение количества элементов в массивах
%экспериментальных точек
n=length(x);
sx=0; sx2=0; sx3=0; sx4=0; sx5=0; sx6=0; sy=0; syx2=0;
syx3=0;
for i=1 : length(x)
    sx=sx+x(i); sx2=sx2+x(i)^2; sx3=sx3+x(i)^3;
    sx4=sx4+x(i)^4; sx5=sx5+x(i)^5; sx6=sx6+x(i)^6;
    sy=sy+y(i); syx2=syx2+y(i)*x(i)^2; syx3=syx3+y(i)*x(i)^3;
end;
%Формирование матрицы коэффициентов системы (3.1)
A(1,1)=n; A(1,2)=sx2; A(1,3)=sx3;
A(2,1)=sx2; A(2,2)=sx4; A(2,3)=sx5;
A(3,1)=sx3; A(3,2)=sx5; A(3,3)=sx6;
%Формирование вектора правой части системы (3.1)
B(1)=sy; B(2)=syx2; B(3)=syx3;
%Решение системы (3.1),
%нахождение параметров подбираемой зависимости
c=A^(-1)*B'
end
```

Параметры любой другой зависимости в MATLAB можно реализовать аналогично, решив задачу оптимизации функции  $S(a_0, a_1, \dots, a_k)$  (2.48) или сформировав систему уравнений (2.47) и решив ее в MATLAB. Желательно приводить подбираемую функцию к

такому виду, чтобы система (2.47) была системой линейных алгебраических уравнений.

### 3.2. Реализация интерполяции в MATLAB – SIMULINK

При реализации интерполяции в среде SIMULINK используются полиномы Лагранжа и Ньютона, рассмотренные в пп. 2.2 и 2.3.

Структурная схема моделирования полинома Лагранжа представлена на рис. 3.1, а полинома Ньютона – на рис. 3.2.

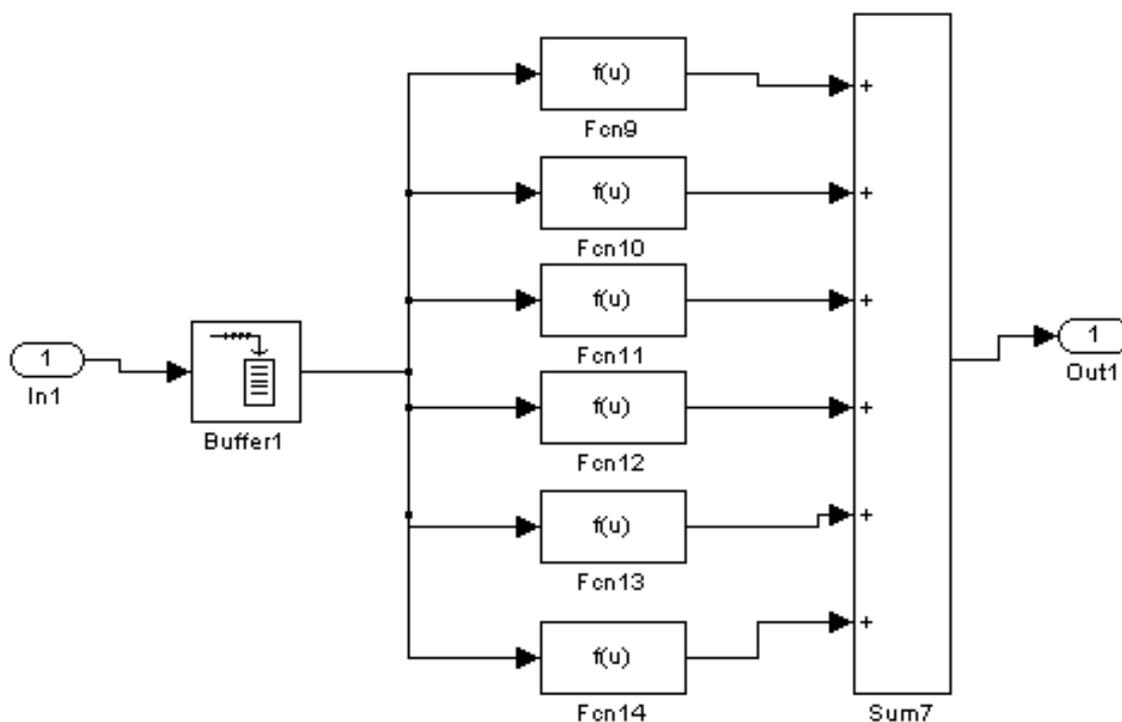


Рис. 3.1. Структурная схема полинома Лагранжа

Полином Лагранжа моделируется в виде функции  $L(x) = F_{cn9} + F_{cn10} + F_{cn11} + F_{cn12} + F_{cn13} + F_{cn14}$ , где  $F_{cni}$  вычисляются из произведения (2.8) для многочлена 4-го порядка.

На вход моделей подается функция вида  $f(t) = \sin(vt) - \cos(0,75vt)$ , график которой представлен на рис. 3.3.

В результате моделирования получены графики ошибки, показанные на рис. 3.4 и 3.5.

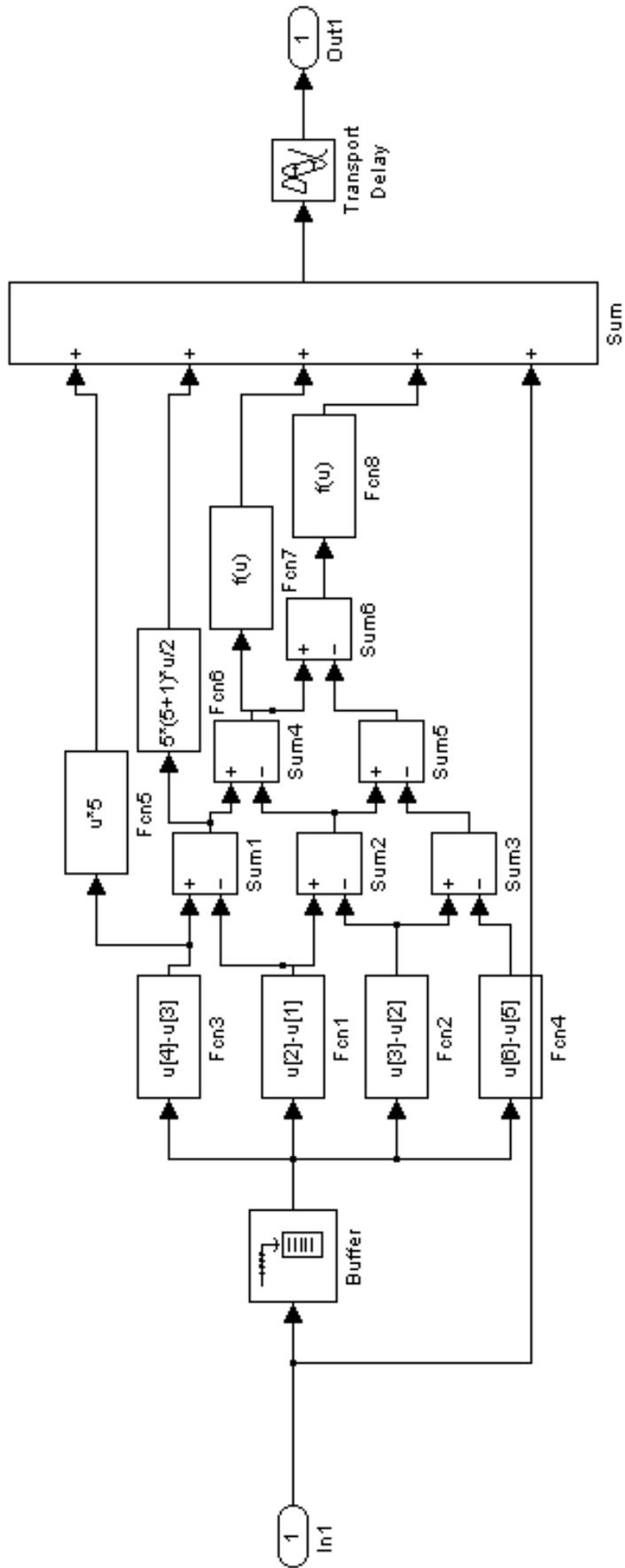


Рис. 3.2. Структурная схема полинома Ньютона

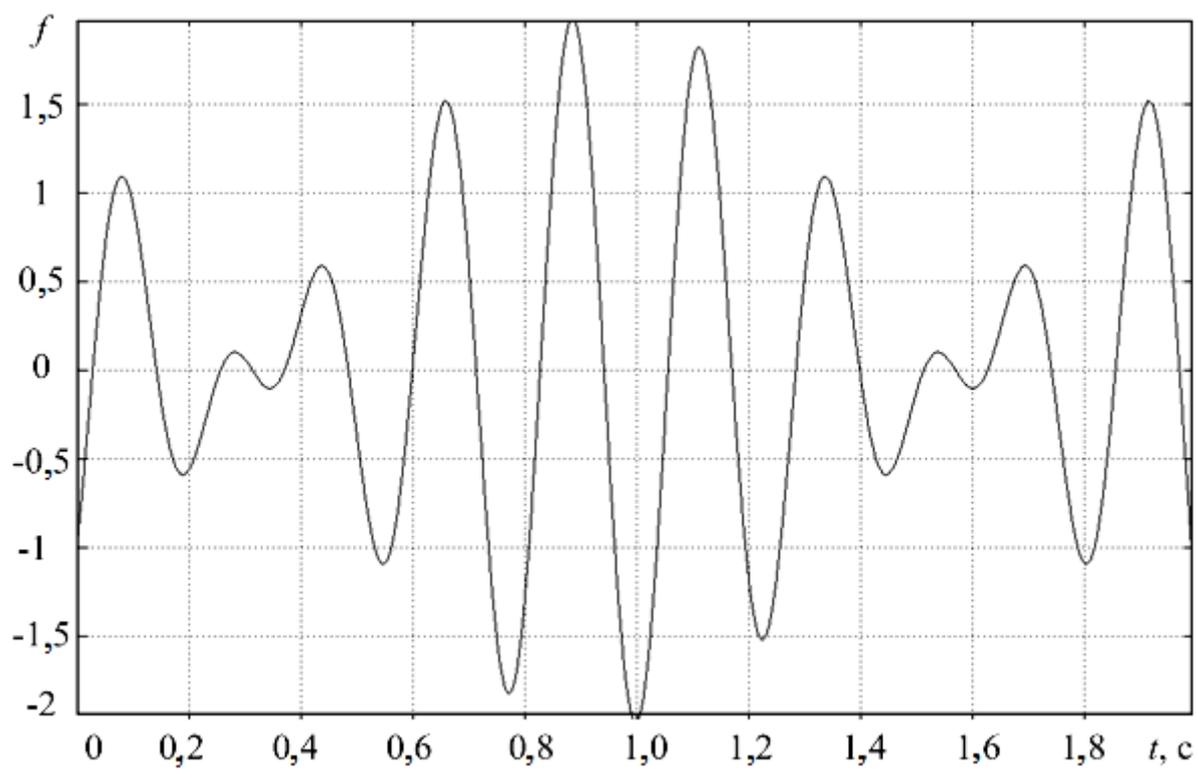


Рис. 3.3. Входное воздействие

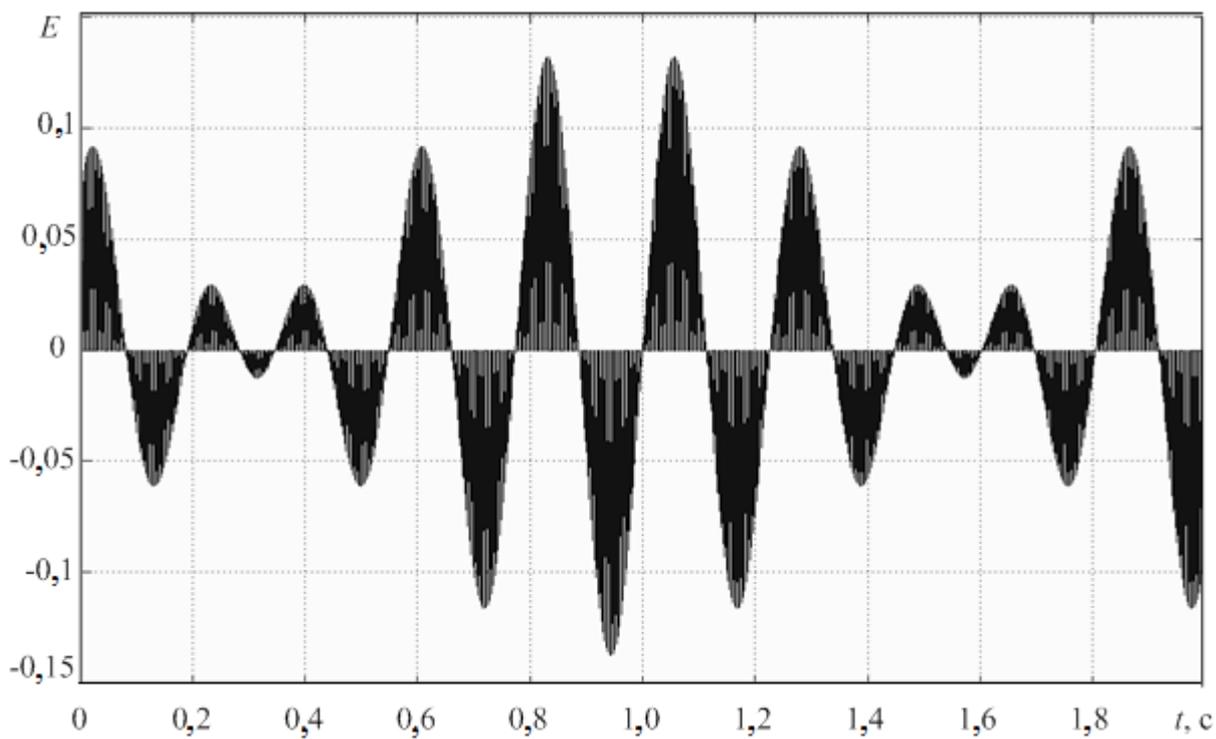


Рис. 3.4. Ошибка прогнозирования полинома Лагранжа

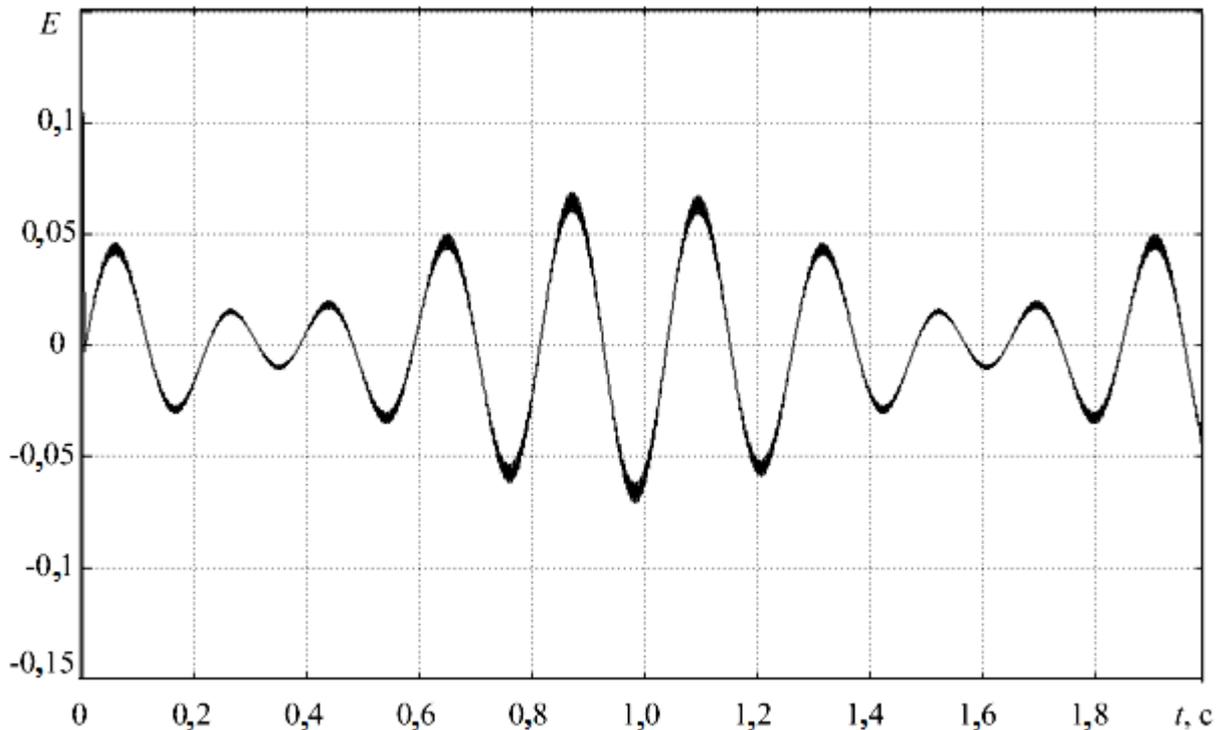


Рис. 3.5. Ошибка прогнозирования полинома Ньютона

Анализ результатов моделирования экстраполяции функции (см. рис.3.3) показал, что максимальная абсолютная погрешность при использовании для прогнозирования движения многочлена Лагранжа практически вдвое превышает погрешность при использовании многочлена Ньютона.

### 3.3. Моделирование алгоритма работы прогнозатора

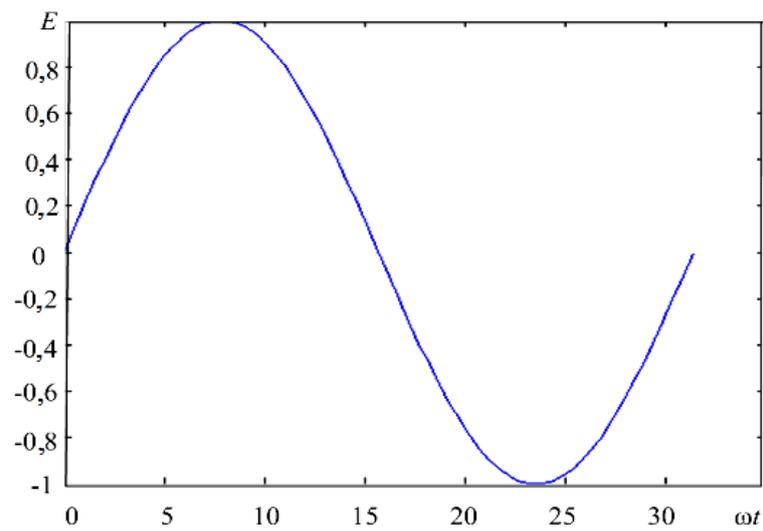
Методика разработки алгоритма работы прогнозирующей модели для систем автоматического управления с не полностью наблюдаемыми координатами включает:

1. Выбор метода экстраполяции данных (информации) о состоянии объекта управления в предшествующий период.
2. Задание экстраполирующей функции.
3. Определение объема данных (количества узлов) для экстраполяции.
4. Определение шага экстраполяции.
5. Разработка программного обеспечения для реализации алгоритма работы прогнозирующей модели.

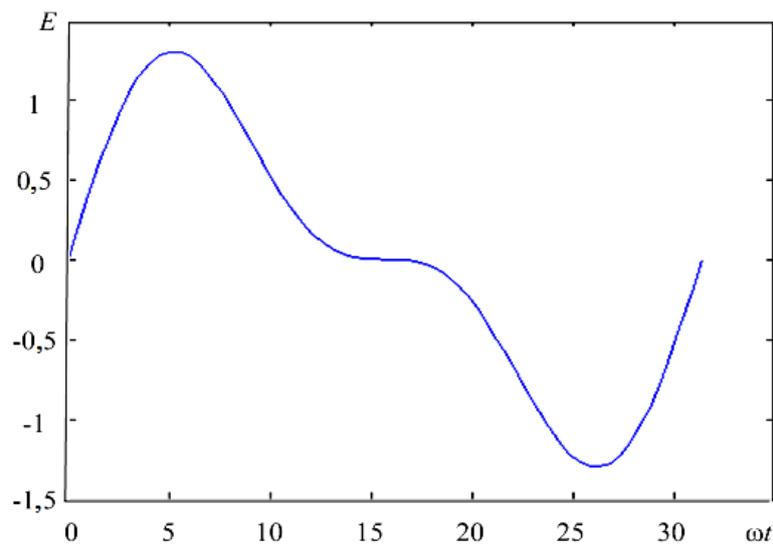
Моделирование алгоритма работы прогнозатора проводилось в среде MATLAB с использованием программ, приведенных в п. 3.1. Для экстраполяции рассматривались функции  $y = f(x)$ , реализующие траектории движения на плоскости, вида

$$y = A \sin x \text{ (рис.3.6, а), } y = A \sin x + \frac{A}{2} \sin 2x \text{ (рис.3.6, б).}$$

При использовании интерполяционного многочлена Ньютона 4-го порядка для функций, изображенных на рис. 3.6, а и 3.6, б, показаны графики абсолютной погрешности экстраполяции (рис. 3.7, а и 3.7, б) соответственно, а на рис. 3.8, а и 3.8, б – для сплайн-интерполяции.

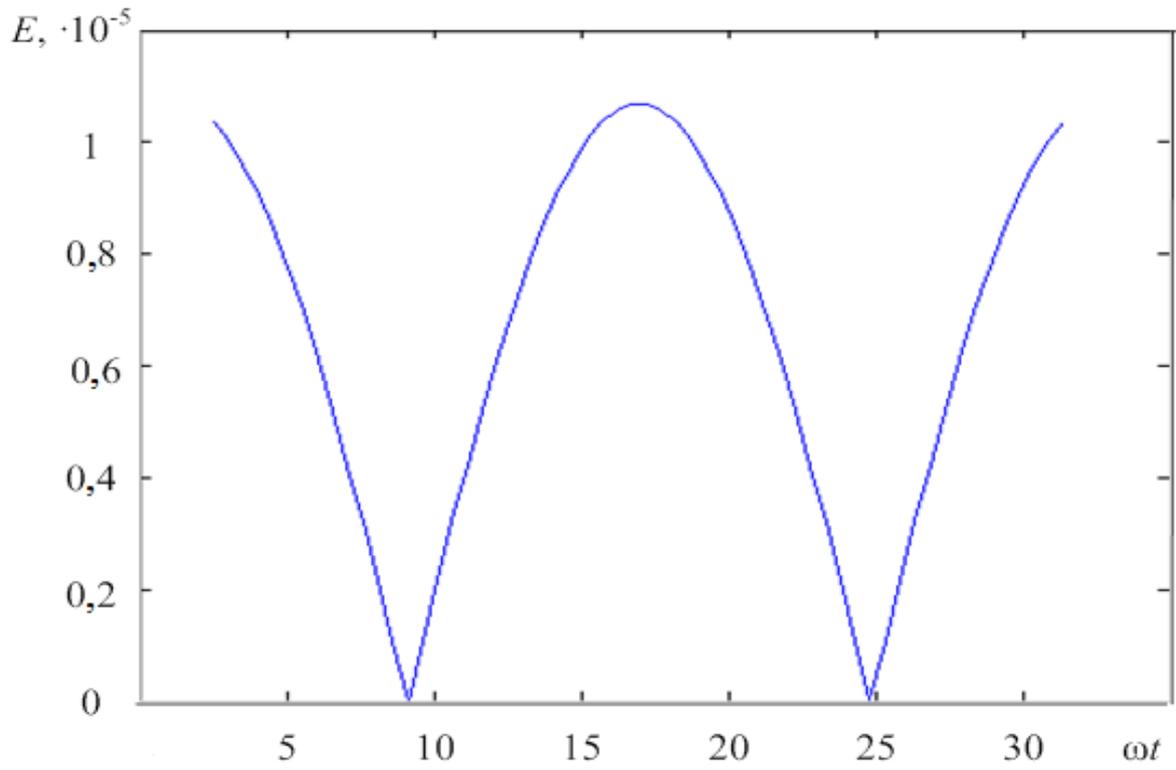


а)

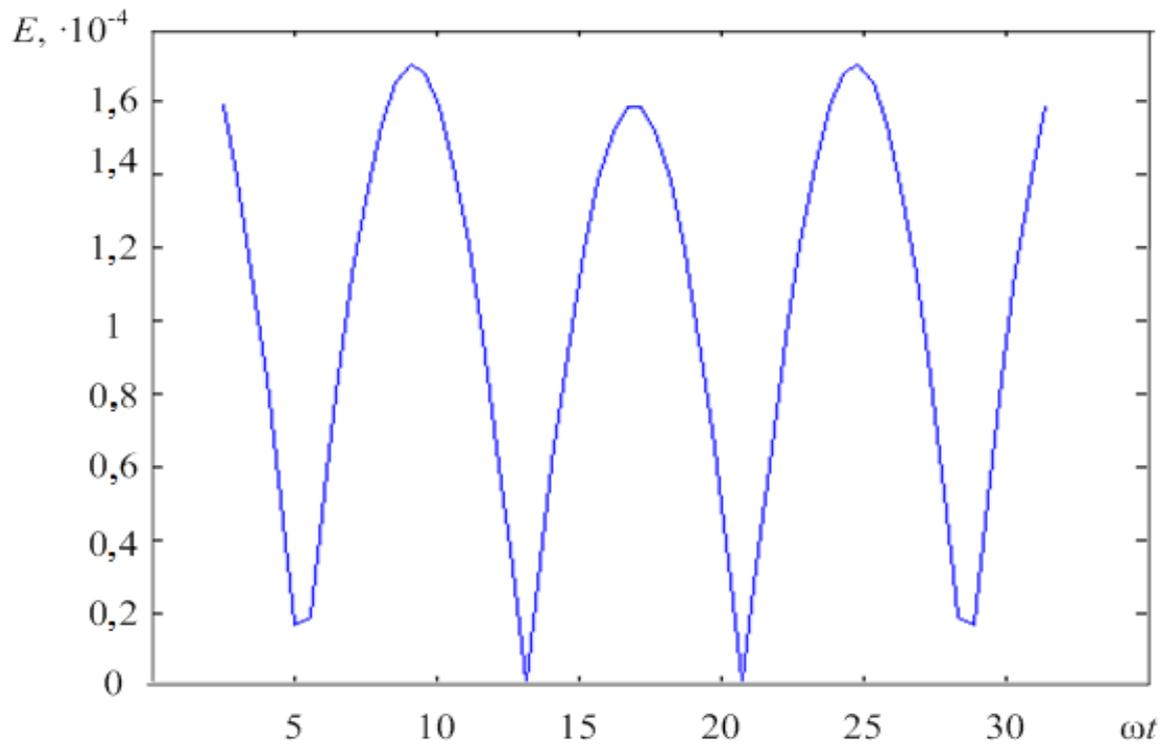


б)

Рис. 3.6. Траектории движения объекта управления

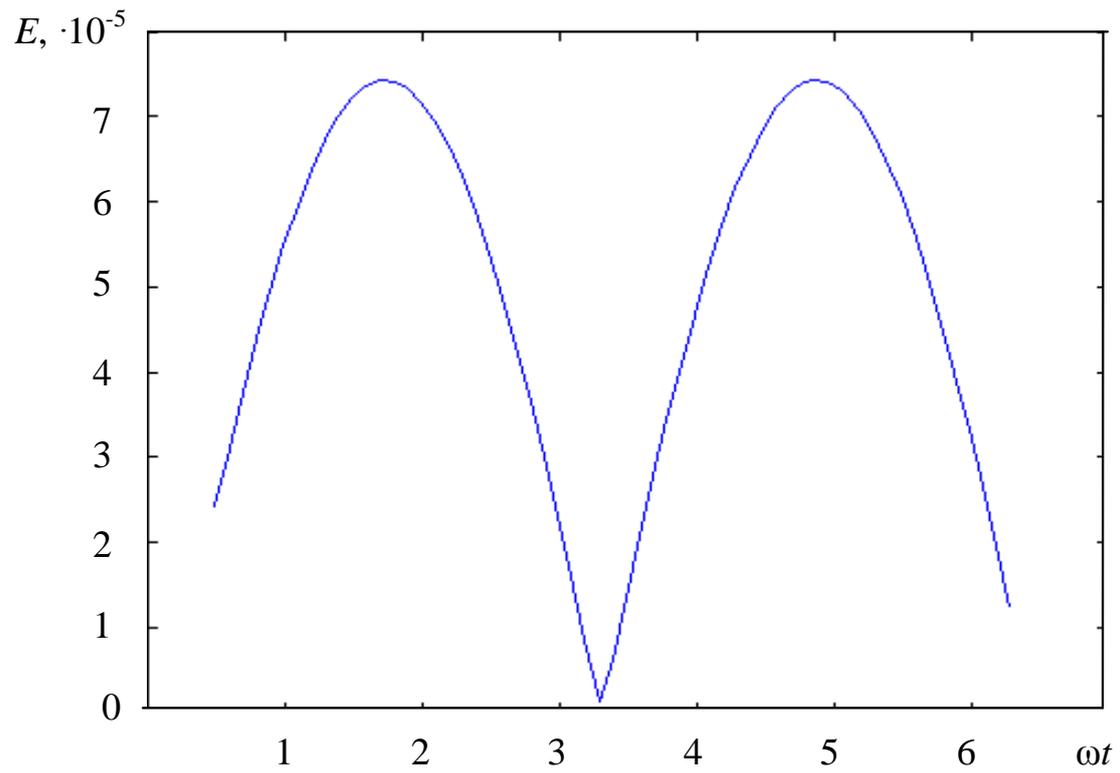


a)

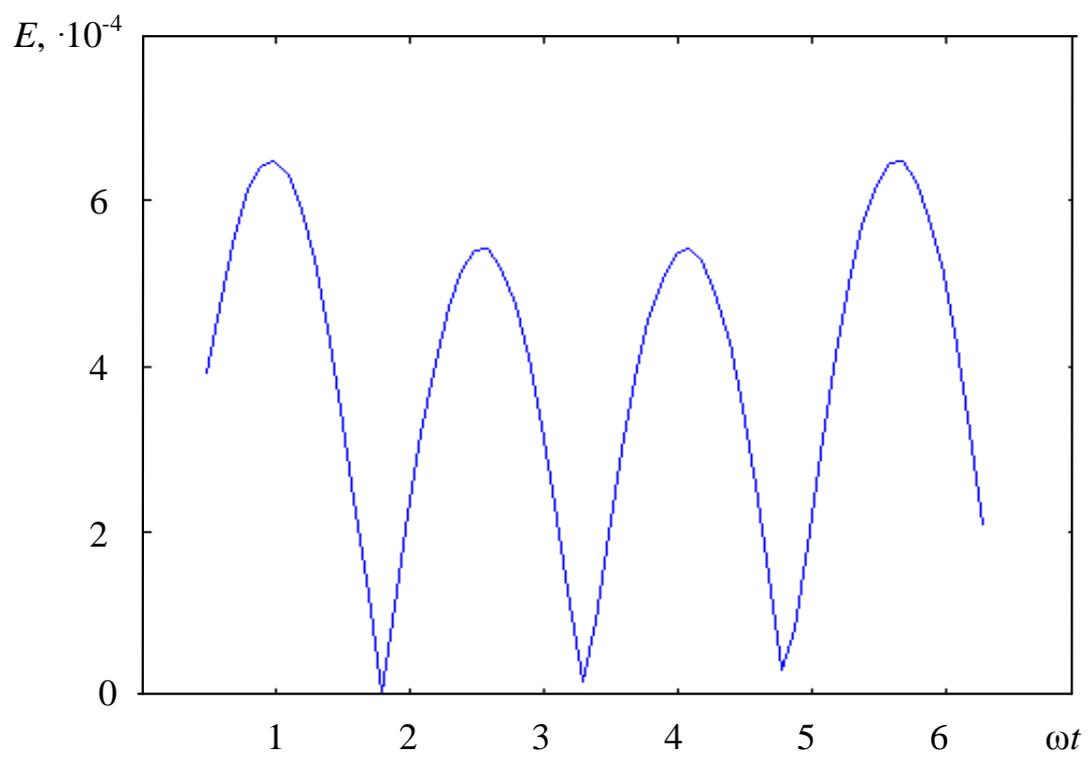


b)

Рис. 3.7. Абсолютная погрешность прогнозирования для интерполяционной формулы Ньютона траекторий: *a* – (3.2); *б* – (3.3)



a)



б)

Рис. 3.8. Абсолютная погрешность прогнозирования для сплайн-интерполяции траекторий:  $a - (3.2)$ ;  $б - (3.3)$

При постоянной горизонтальной составляющей скорости перемещения  $v$  закон изменения координаты  $x$  имеет вид  $x = vt$  (где  $t$  – время). В этом случае моделирование движения на плоскости можно заменить эквивалентным моделированием во времени функций:

$$1. y = A \sin vt. \quad (3.2)$$

$$2. y = A \sin vt + \frac{A}{2} \sin 2vt. \quad (3.3)$$

Проводился анализ точности прогнозирования (экстраполяции) функций при изменении их параметров (амплитуды и скорости), степени интерполяционного многочлена, шага интерполяции, количества узлов интерполяции. Точность прогноза оценивалась по максимальной абсолютной погрешности экстраполируемой функции

$$E = |y(x) - P_n(x)|,$$

где  $y(x)$  – истинное значение функции;  $P_n(x)$  – значение, полученное в результате экстраполяции;  $n$  – степень интерполяционного полинома.

Зависимость максимального значения абсолютной погрешности от амплитуды основной гармоники (скорости изменения функции на шаге интерполяции) для многочленов Ньютона третьей и четвертой степеней и экстраполяции с использованием сплайнов показана на рис. 3.9. Изменение амплитуды вызывает пропорциональное изменение абсолютной погрешности, не изменяя характера зависимости  $E(x)$ , что справедливо и для других методов прогнозирования [40].

Анализ влияния на погрешность прогнозирования функции (3.3) степени интерполяционного полинома Ньютона показал, что степень интерполяционного многочлена, определяемая количеством используемых для прогноза узлов интерполяции, существенно влияет на точность экстраполяции при шаге интерполяции  $h$ , не превышающем 2 % периода основной гармоники. В этом случае при увеличении порядка многочлена  $n$  на единицу максимальная погрешность снижается на порядок для функции вида (3.2) и в 5 раз – для функции (3.3). С увеличением шага интерполяции влияние степени многочлена (а значит, и объема исходной информации) на точность прогноза снижается и при  $h \geq 0.04T$  ( $T$  – период основной гармоники) практически не зависит от  $n$ .

Изменение величины интервала, предшествующего прогнозу на один шаг при аппроксимации функций (3.2) и (3.3) методом наименьших квадратов, приводит к изменению абсолютной погрешности на порядок [24].

Анализ абсолютной погрешности прогнозирования при экстраполяции функции (3.2) многочленом Ньютона и сплайнами показывает, что величина шага интерполяции  $h$  оказывает наибольшее влияние на точность экстраполяции. На рис. 3.10 приведены обобщенные результаты расчетов максимальной абсолютной погрешности экстраполяции функции (3.2) при использовании интерполяционной формулы Ньютона с разными значениями шага  $h$  для многочленов третьей ( $n = 3$ ) и четвертой ( $n = 4$ ) степеней. Увеличение шага интерполяции в 2 раза (на интервале, где  $h \leq 0.02T$ ) приводит к возрастанию ошибки до 40 раз при различных  $n$ . При  $h \geq 0.06T$  максимальная абсолютная погрешность превышает 10 % амплитуды основной гармоники, и ее дальнейшее увеличение делает экстраполяцию невозможной.

Аналогичные расчеты проводились для экстраполяции с использованием сплайнов и метода наименьших квадратов. Анализ результатов показывает, что при экстраполяции с использованием многочлена Ньютона при  $n \geq 4$  максимальная погрешность меньше, чем у сплайн-интерполяции (до 6 раз при малых  $h$ ). При увеличении шага  $h$  при интерполяции сплайнами погрешность увеличивается, но медленнее, чем при использовании многочлена Ньютона, при  $h \geq 0.025T$  погрешности практически совпадают.

Анализ расчетов прогнозирования с использованием аппроксимации методом наименьших квадратов показал сходные результаты с экстраполяцией методом Ньютона при значительно большем объеме вычислений и высокой их сложности.

Обобщение данных, полученных при моделировании алгоритма работы прогнозирующей модели, показало преимущество прогнозирования с использованием интерполяционной формулы Ньютона. Высокая точность вычислений при сравнительно небольшом их объеме, простота алгоритма делают его наиболее предпочтительным при построении систем автоматического управления с прогнозирующими моделями.

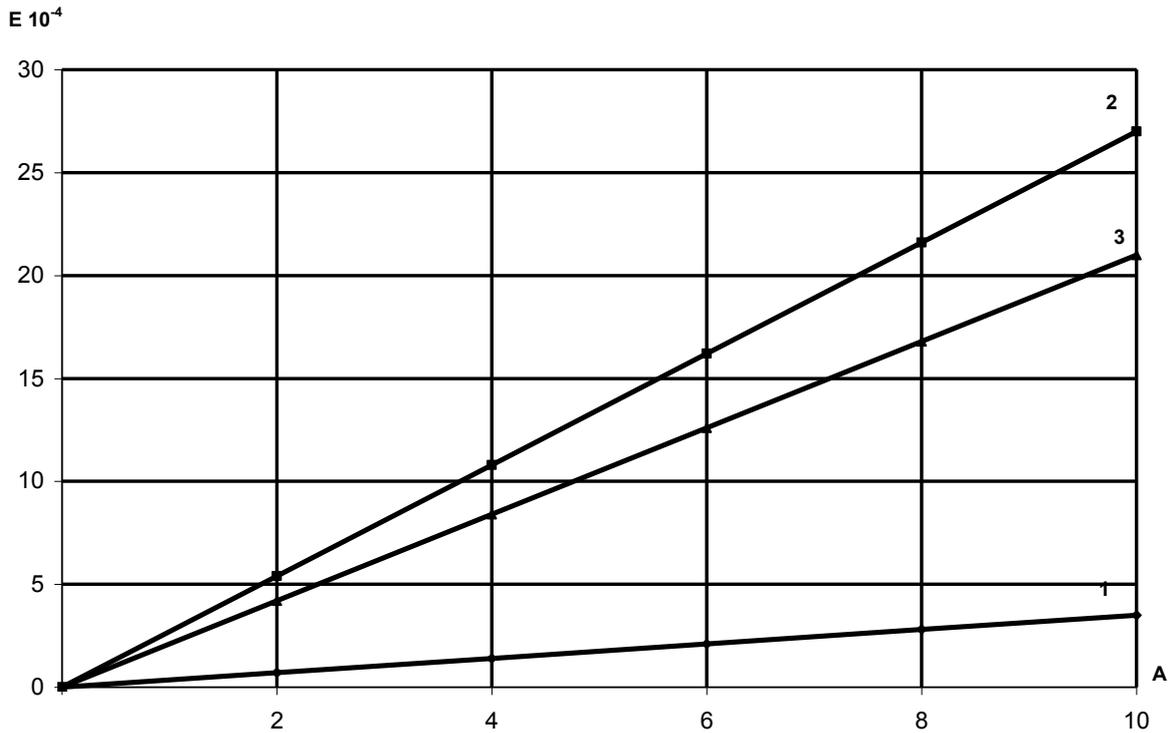


Рис. 3.9 Абсолютная максимальная погрешность прогнозирования траектории (3.2) при изменении амплитуды  $A$ . Для интерполяционного многочлена Ньютона 1 –  $n = 3$ ; 2 –  $n = 4$ ; 3 – для сплайн-интерполяции

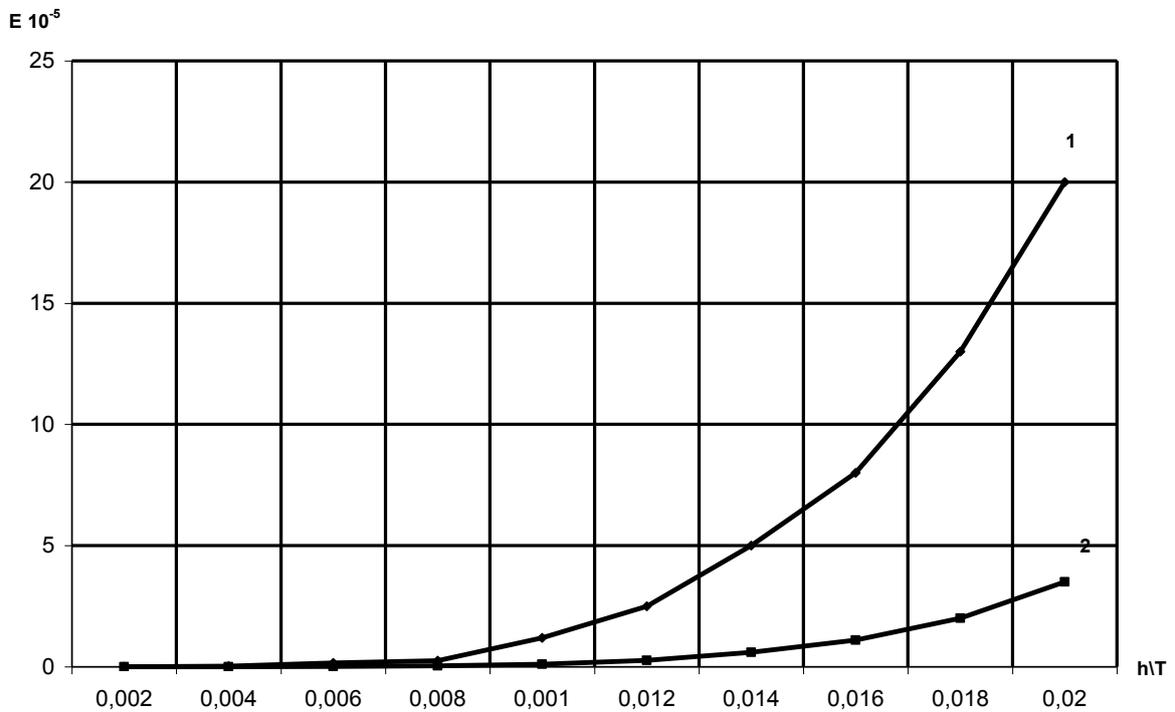


Рис. 3.10. Абсолютная максимальная погрешность прогнозирования для интерполяционного многочлена Ньютона при изменении шага интерполяции  $h$  (1 –  $n = 3$ ; 2 –  $n = 4$ )

## 4. ВВЕДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЧЕТВЕРТОЙ ФОРМЫ ИНВАРИАНТНОСТИ

### 4.1. Структуры САУ с введением дополнительного управления

Для рассматриваемых систем в части формирования дополнительного управления можно выделить следующие классификационные признаки [25, 35].

1. По способу построения структурной схемы:

- 1) разомкнутые (рис. 4.1, а);
- 2) замкнутые (рис. 4.1, б, в).

2. Разомкнутые будем классифицировать по следующим признакам:

2.1. В зависимости от места введения дополнительной составляющей управления  $\Delta g$ :

- 1) в управляющее воздействие на входе привода (см. рис. 4.1, а);
- 2) во внутренний контур привода (связь пунктиром на рис. 4.1, а).

2.2. В зависимости от способа реализации функциональной зависимости между возмущением и дополнительным управлением  $\Delta g$ :

- 1) по аналитическим выражениям;
- 2) табличным способом.

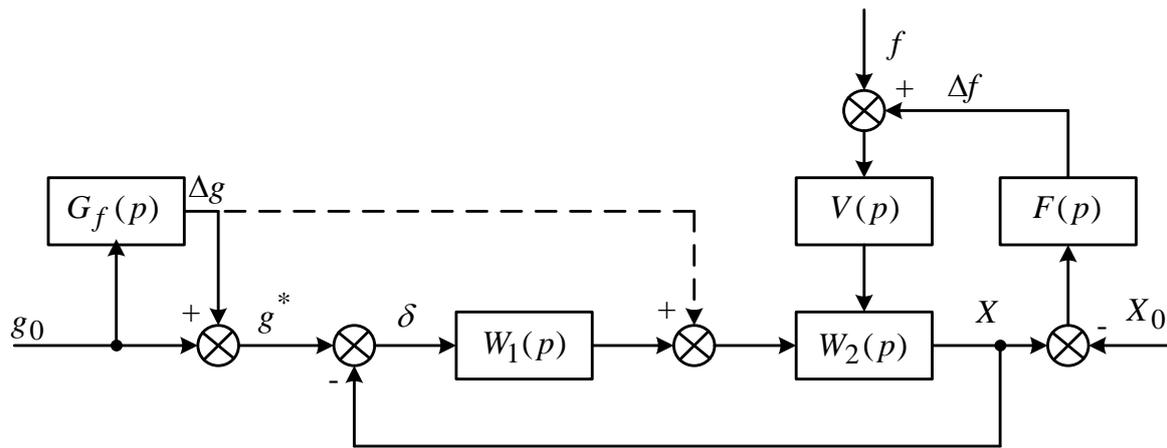
3. Замкнутые системы выделим по следующим признакам:

3.1. В зависимости от способа формирования дополнительной составляющей  $\Delta g$ :

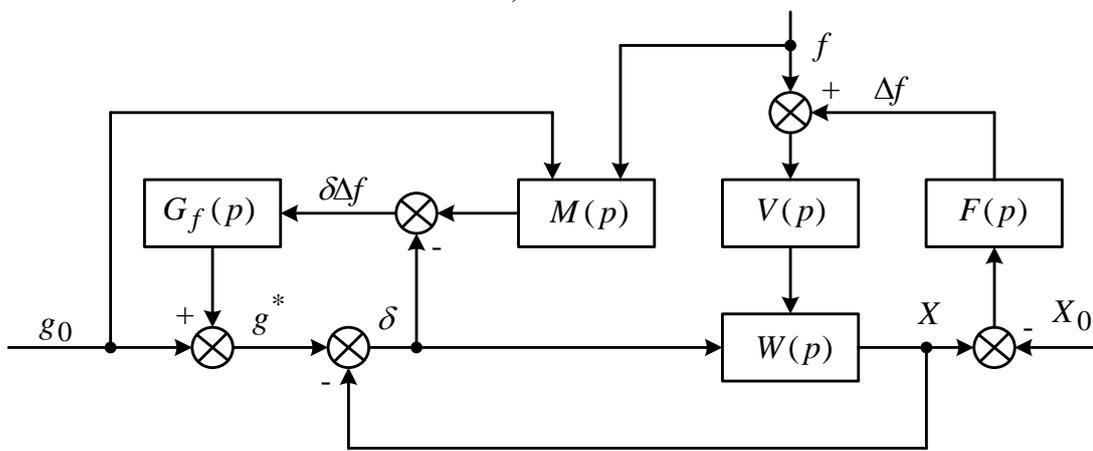
- 1) в виде автономной составляющей как слагаемое с расчетным управлением (см. рис. 4.1, б), которая может формироваться:
  - с обращением к таблицам функций;
  - без использования таблиц;
- 2) коррекцией основного управления  $g$  на стадии его формирования (см. рис. 4.1, в);
- 3) формированием дополнительных составляющих в инвариантных входах для систем комбинированного регулирования.

3.2. В зависимости от вида сигнала первичной информации по анализу:

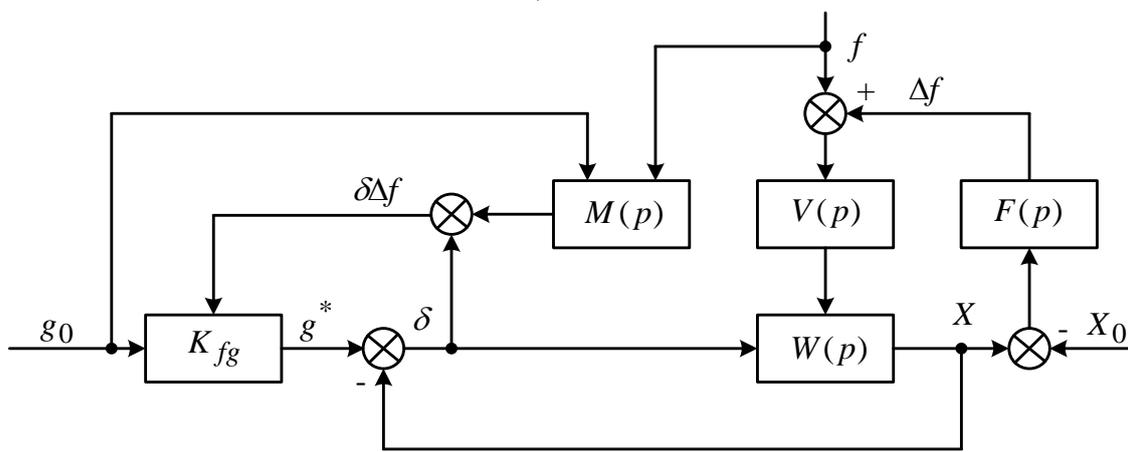
- 1) сигнала ошибки;
- 2) сигнала с датчика момента на выходе системы;
- 3) информации о выполняемом технологическом процессе (внешние сигналы для рассматриваемой системы).



a)



б)



в)

Рис. 4.1. Структурные схемы систем с формированием дополнительного управления

4. В двух и более координатных приводах в зависимости от «степени автономности» введения корректирующей поправки можно выделить следующие виды структур:

- 1) с автономным формированием дополнительной составляющей для каждой координаты;
- 2) использованием перекрестных связей для формирования дополнительного управления;
- 3) использованием принципа ведущей и ведомой координат;
- 4) формированием дополнительной составляющей в управлении на основе принципа построения итерационных систем.

5. Все перечисленные варианты структур формирования сигналов дополнительного управления могут быть выполнены на основе управления:

- 1) непрерывного;
- 2) разрывного (здесь не имеется в виду дискретная управляющая часть).

Особое значение здесь имеет способ формирования управляющего воздействия, относящий в конечном итоге всю систему к классам программных или следящих, хотя непосредственно приводы в обоих видах систем являются следящими. В системах программного управления исходной информацией является заданная аналитически или иным способом плоская или пространственная траектория. В следящих приводах систем слежения за подвижными объектами управляющие воздействия получают как выходные координаты стоящих впереди следящих систем, работающих по отклонению (РЛС, телескопы, гироазимутгоризонты), к которым подмешиваются дополнительные сигналы (всевозможные баллистические и метеорологические поправки). При рассмотрении вопросов коррекции управляющей программы необходимо учитывать принципиальные отличия программных систем от следящих:

1. Векторная ошибка располагается на траектории и не оказывает влияния на выполняемый технологический процесс (его качество оценивается после завершения всей технологической операции).
2. Процесс жестко не лимитирован во времени.
3. Программное движение детерминировано.

Поэтому при рассмотрении вопросов будем ориентироваться на один из классов этих систем с последующим распространением на другой.

## 4.2. Четвертая форма инвариантности – основа формирования дополнительного управления

Рассмотрим возможность применения четвертой формы инвариантности для компенсации ошибки от возмущения [4, 16, 20, 23, 38]. Рассматриваем процесс движения установившимся, т.е. составляющая, соответствующая начальным условиям, равна нулю. Выражение для суммарной ошибки, определяемой через передаточные функции по управляющему  $W(p)$  и возмущающему  $V(p)$  воздействиям, будет

$$\delta(p) = \frac{1}{1+W(p)} g(p) + \frac{V(p)}{1+W(p)} f(p). \quad (4.1)$$

Представим передаточные функции замкнутой системы в виде

$$W(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad V(p) = \frac{C(p)}{B(p)}. \quad (4.2)$$

Тогда с учетом (4.2) и обозначения  $C(p)/D(p) = Cd(p)$  выражение для ошибки запишется

$$\delta(p) = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)} g(p) + \frac{B(p)Cd(p)}{A(p) + B(p)} f(p). \quad (4.3)$$

Запишем (4.3) в строчной форме

$$H(p)\delta(p) = B(p)g(p) + L(p)f(p), \quad (4.4)$$

где  $H(p) = A(p) + B(p)$ ;  $L(p) = B(p) + Cd(p)$ .

Обратимся еще раз к трактовке четырех форм инвариантности по отношению к управляющему  $g(p)$  и возмущающему  $f(p)$  воздействиям. Для системы, определяемой выражениями (4.1) – (4.2), они записываются в виде системы [38]:

$$1. B(p) \neq 0, \quad g(p) = 0; \quad L(p) \neq 0, \quad f(p) = 0. \quad (4.5, \text{ а})$$

$$2. B(p) = 0, \quad g(p) \neq 0; \quad L(p) = 0, \quad f(p) \neq 0. \quad (4.5, \text{ б})$$

$$3. B(p) \neq 0, \quad g(p) \neq 0, \quad B(p)g(p) = 0; \\ L(p) \neq 0, \quad f(p) \neq 0, \quad L(p)f(p) = 0. \quad (4.5, \text{ в})$$

$$4. B(p) \neq 0, \quad g(p) \neq 0, \quad B(p)g(p) - B_1(p)g_1(p) = 0; \\ L(p) \neq 0, \quad f(p) \neq 0, \quad L(p)f(p) - L_1(p)f_1(p) = 0. \quad (4.5, \text{ г})$$

Универсальной является вторая форма. Однако она требует получения  $n$  производных, что при их числе более двух трудно реализу-

ется. Большими возможностями для систем программного управления и следящих систем с медленно изменяющимися параметрами входного и возмущающего воздействий обладает четвертая форма инвариантности.

Обратимся к возможности парирования второй составляющей ошибки в выражении (4.4). Рассмотрим этот вопрос в следующей постановке. Имеется система с номинальным управлением  $g_0(p)$  и возмущением  $f(f, g)$  на выходе. Необходимо парировать ошибку, обусловленную свободным звеном (см. рис. 1.2). В этом случае весьма удобно организовать управление на основе третьей и четвертой форм инвариантности. Такое управление предусматривает формирование дополнительного управления  $\Delta g$  для компенсации составляющей ошибки  $\Delta\delta(p)$ . Представим суммарное возмущение в виде двух составляющих – возмущения  $f_0(p)$ , соответствующего воздействию выходной координаты  $x_0(p)$ , и дополнительного возмущения  $\Delta f(p)$ , определяемого свободным звеном. Тогда имеем функции управления и возмущения в виде

$$g_1(p) = g_0(p) + \Delta g(p), \quad f_1(p) = f_0(p) + \Delta f(p). \quad (4.6)$$

Для компенсации дополнительного возмущения условие четвертой формы инвариантности, исходя из соотношений (4.2) – (4.4), запишется:

$$L(p)\Delta f(p) - B(p)\Delta g(p) = 0, \quad (4.7)$$

где  $L(p), B(p)$  – операторные многочлены, определяемые на основе уравнения (4.4) при его записи в строчной форме.

Выполнение условий *модифицированной четвертой формы инвариантности* для компенсации  $\Delta f(p)$  возможно в следующих вариантах:

- 1) формированием дополнительного полинома  $B_2(p)$  при выбранном  $\Delta g(p)$ ;
- 2) формированием дополнительного управления  $\Delta g(p)$  при выбранном  $B_2(p)$ ;
- 3) выбором произведения  $B_2(p)\Delta g(p)$ .

С позиции технической реализации целесообразно вводить дополнительное управление, которое при выбранной функции  $B_2(p)$  определяется из условия

$$\Delta g(p) = \frac{L(p)\Delta f(p)}{B_2(p)}. \quad (4.8)$$

Реализация условия (4.8) требует определения производных от возмущения. Однако можно выделить типовые режимы и ситуации, когда дополнительное управление можно сформировать, используя методы самонастройки.

Большие возможности использования такого подхода появляются в двухкоординатных системах и при рассмотрении многокоординатных систем, состоящих из соседствующих пар координат, где имеется геометрически силовое взаимодействие (или дополнительное внешнее возмущение) при выполнении технологического процесса. Именно силовой контакт, определяющий фактическую координату, представляет звено, не охваченное главной обратной связью. Это также относится к системам управления технологическими процессами, выполняемыми по технологическим траекториям: сборке, сварке, гидрорезанию струей жидкости в случае, когда программная и фактическая траектории не совпадают. Это определяется, в свою очередь, неточностью базирования или неопределенностью ее расположения в пространстве.

Обратимся к двухкоординатной системе, работающей в декартовой системе в плоскости  $XOZ$  и выполняющей, например, технологический процесс сборки путем перемещения детали, расположенной в исполнительном устройстве вала, по технологической траектории. Все многообразие возмущающих факторов приводит к отклонению фактической траектории от программной, что проявляется в нарушении расчетного режима по усилию. В результате за счет составляющей в процессе управления от этого звена возможно невыполнение технологического процесса. Необходимо определить дополнительную составляющую в управляющем воздействии, идентифицирующую программную траекторию с фактической [18, 19, 20, 25].

Изображение ошибок в каналах исходных приводов определяется из выражений

$$\begin{aligned} H_x(p)\delta_x(p) &= B_x(p)g_{xz}(p) + L_x(p)f_{xz}(p) \\ H_z(p)\delta_z(p) &= B_z(p)g_{zx}(p) + L_z(p)f_{zx}(p), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $g_{xz}(p)$ ,  $g_{zx}(p)$ ;  $f_{xz}(p)$ ,  $f_{zx}(p)$  – проекции вектора задания  $G(x,z)$  и возмущения  $F(x,z)$  в операторной форме соответственно.

С учетом отклонения вектора возмущения и введения дополнительного управления система (4.9) дополняется соответствующими членами и принимает вид

$$\begin{aligned} H_x(p)\delta_x(p) &= B_x(p)g_{xz}(p) + L_x(p)f_{xz}(p) + L_x(p)\Delta f_{xz}(p) + \\ &+ B_{2x}(p)\Delta g_{xz}(p), \\ H_z(p)\delta_z(p) &= B_z(p)g_{zx}(p) + L_z(p)f_{zx}(p) + L_z(p)\Delta f_{zx}(p) + \\ &+ B_{2z}(p)\Delta g_{zx}(p). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для системы (4.10) условие выполнения *четвертой модифицированной формы инвариантности* относительно дополнительных возмущений  $\Delta f_{xz}(p)$ ,  $\Delta f_{zx}(p)$  запишется как

$$\begin{aligned} L_x(p)\Delta f_{xz}(p) + B_{2x}(p)\Delta g_x(p) &= 0, \\ L_z(p)\Delta f_{zx}(p) + B_{2z}(p)\Delta g_z(p) &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Вне зависимости от способа разложения заданной геометрической траектории на управляющие функции (независимые или параметрические) одна из координат может рассматриваться как аргумент, а другая – как его функция. Это дает возможность выполнения условия (4.11) в различных вариантах формирования составляющих  $\Delta g_x(p)$ ,  $\Delta g_z(p)$ :

- введение дополнительных составляющих в каждом канале;
- введение дополнительной составляющей в канале координаты-функции (координаты-аргумента без изменения);
- перекрестной коррекцией (выделение дополнительного возмущения в одном канале и введении дополнительного управления в другом).

Условия (4.8), (4.10) не накладывают ограничений на закон изменения управляющего воздействия. Они в равной мере относятся как к системам слежения за подвижными объектами, так и к системам программного управления. При рассмотрении многокоординатных систем используется аналогичный подход.

### 4.3. Составляющие ошибок

Рассмотрим структурную схему САУ (см. рис. 4.1, б). Возмущение на выходе системы содержит собственную составляющую для

случая однокоординатной системы и составляющие возмущения, действующие на нее со стороны других координат для многокоординатной системы. Причем это внешнее дополнительное возмущение обусловлено динамическим звеном, не охваченным обратной связью. Дополнительная составляющая в исходное управление  $\Delta g(t+\tau)$  формируется введением прогнозирующей модели  $M(p)$  [25, 36, 26], где  $\tau$  – время прогнозирования (экстраполяции). Отметим также, что по мере введения дополнительной составляющей  $\Delta g$  в управляющее воздействие уменьшается и дополнительное возмущение, обусловленное, например, несовпадением расчетной (или программной) и фактической траекторий. Расчетная траектория определяется без учета звена САУ (объекта управления), не охваченного обратной связью. Составляющая  $\Delta g$  в управляющем воздействии должна сохраниться при парировании возмущения  $\Delta f$ . В простейшем случае между ними вводится интегральная зависимость

$$\Delta g(t) = \lambda \int_0^{t_i} l \Delta f(t) dt,$$

где  $t_i$  – время формирования составляющей  $\Delta g$  до окончания парирования возмущения  $\Delta f$ ;  $\lambda$  – в общем случае нелинейная функция зависимости  $\Delta f(\Delta x)$ .

Для физической реализации формирования  $\Delta g$  необходимо выделить составляющую ошибки, пропорциональную  $\Delta f$ . Для этого можно использовать информацию с силомоментных датчиков или обработать сигнал тока исполнительного двигателя. В случае бесконтактного технологического процесса (сварки, гидрорезания) необходима внешняя система ориентации рабочей поверхности. При отсутствии информации эту составляющую можно получить обработкой суммарной ошибки в контуре системы. При детерминированных и стационарных на участке наблюдения  $g(p)$ ,  $f(p)$  ошибку можно представить как

$$\delta(p) = \delta_g(p) + \delta_f(p) + \delta_{\Delta f}(p), \quad (4.12)$$

где  $\delta_g$ ,  $\delta_f$  – составляющие, соответствующие расчетному управлению и номинальному возмущению;  $\delta_{\Delta f}$  – составляющая, обусловленная возникновением  $\Delta f$ .

Здесь и далее под символом  $\delta_{\Delta}$  будем понимать разность ошибок параллельной прогнозирующей модели и основного контура САУ без свободного звена

$$\delta_{\Delta f}(t + \tau) = \delta_M(t + \tau) - \delta_0(t).$$

Для получения интересующей составляющей  $\delta_{\Delta f}$  из суммарной ошибки следует исключить две другие, в данном случае – детерминированные составляющие, которые могут быть получены, например, с помощью эталонной модели [2, 18, 33]. Рассмотрим режим слежения с постоянной или медленно изменяющейся скоростью  $V$ . В режиме движения с постоянной скоростью и постоянным моментом нагрузки  $M$  для систем управления с астатизмом первого порядка по управляющему воздействию и статических по возмущающему, что имеет место в электроприводах, составляющие ошибки выражения (4.12) определяются

$$\delta_g = \frac{V}{K_V}, \quad \delta_f = \frac{M}{K_M},$$

где  $K_V, K_M$  – добротности системы по скорости и моменту соответственно.

Для систем с бесконтактным технологическим процессом под значением  $\delta_f$  понимается разность программной траектории и фактической технологической поверхности в системе координат программной траектории. Тогда составляющая поправка в законе управления будет

$$\Delta g(p) = K(p)\delta_{\Delta f}(p) = K(p)\Phi_{gf}(p)F(p)\Delta f(p), \quad (4.13)$$

где  $\Phi_{gf}(p), F(p)$  – соответственно передаточная функция по ошибке от возмущения исходной системы.

При медленном изменении возмущающего воздействия и при работе в зоне упругих деформаций диссипативными потерями можно пренебречь. Природу возникновения  $\Delta f$  при несовпадении траекторий можно рассматривать как [13, 14]

$$F(p) = K_F, \quad \Delta f(p) = K_F \Delta X(p). \quad (4.14)$$

Рассмотрим возможность реализации структур, приведенных на рис. 4.1, по зависимости (4.13). Приведем возмущение соседней неза-

висимой координаты (аргумента)  $Z$  к возмущению, действующему на рассматриваемую координату  $X$ . Сопрягающая расчетная траектория  $X_{\pi} = K_{\pi}Z_{\pi}$ . Отклонение фактической и расчетной траекторий представим через отклонение коэффициента  $\Delta K$ . Здесь следует также иметь в виду, что расчетное  $X_{\pi}$  и фактическое  $X_0$  значения нужно рассматривать относительно расчетного значения  $Z_{\pi}$ . Тогда

$$\Delta X = K_{\pi}Z_{\pi} - K_{\phi}Z_{\pi}, \quad Z_{\pi} = \Delta K Z_{\pi}.$$

В свою очередь,  $Z_{\pi} = X_{\pi}/K_{\pi}$ , следовательно

$$\Delta X = \frac{\Delta K}{K_{\pi}} X_{\pi} = K_{\Delta} X_{\pi}, \quad (4.15)$$

где  $K_{\Delta} = \frac{\Delta K}{K_{\pi}}$ .

Как следует из (4.15), закон изменения  $\Delta X$  пропорционально зависит от  $X_{\pi}$ . Отклонение  $\Delta X$  имеет место на выходе системы, поэтому следовало бы в (4.15) учитывать ошибки по управляющему воздействию, т.е.

$$\Delta X(p) = K_{\Delta} [X(p) + \delta(p)].$$

Однако в рассматриваемом процессе интересующее нас изменение координаты функции  $\Delta X$  возникает при фактической координате аргумента  $Z$ . Поэтому вторая составляющая в данном случае не влияет на формирование закона корректирующей поправки. Она учитывается при выделении моментной ошибки из суммарной. Для этого из суммарной ошибки согласно (4.12) вычитаются составляющие, обусловленные программным управляющим воздействием, определяемые через коэффициенты ошибок. Опустим их далее из рассмотрения.

Составляющие ошибки по возмущающему воздействию можно представить в виде ряда [1, 18, 34]

$$\delta(t) = \delta_{\text{мс}}(t) + \delta_{\text{мк}}(t) + \delta_{\text{мд}}(t) + \dots, \quad (4.16)$$

где  $\delta_{\text{мс}}, \delta_{\text{мк}}, \delta_{\text{мд}}$  – статическая, кинетическая и динамическая ошибки по возмущению соответственно.

Ряд (4.16) можно также представить в виде

$$\delta_{\text{м}}(t) = C_{\text{м}0} f_0 + C_{\text{м}1} f'(t) + C_{\text{м}2} f''(t) + \dots, \quad (4.17)$$

где  $C_{\text{м}i}, i < 1, 2, 3, \dots, >$  – коэффициенты ошибок по возмущению.

В соответствии с (4.12) – (4.17) для рассматриваемого процесса приведем возмущение к входной координате в следующем виде:

$$f_0 = K_{\text{мх}} g_{\text{п}}; f'(t) = K_{\text{мх}} V_{\text{п}}; f''(t) = K_{\text{мх}} \varepsilon_{\text{п}}, \quad (4.18)$$

где  $K_{\text{мх}} = K_F \Delta K$ .

#### 4.4. Алгоритмы формирования дополнительного управления

Для формирования алгоритмов дополнительного управления используем методику, предложенную в работах [1, 18, 34]. Введем для оценки точности условную ошибку

$$\delta_{\text{м}}^2(t) = \lambda_1 \delta_{\text{мс}}^2(t) + \lambda_2 \delta_{\text{мк}}^2(t) + \lambda_3 \delta_{\text{мд}}^2(t) + \dots \quad (4.19)$$

Ряд (4.19) ограничим тремя членами, соответствующими вариантам изменения закона возмущающего воздействия: постоянным, с постоянными скоростью и ускорением. Представим их как интегральные квадратичные функции от соответствующих составляющих ряда (4.19):

$$\delta_{\text{мс}}^2(t) = \beta_0 \int_0^t \delta_{\text{мс}}^2(t) dt; \delta_{\text{мк}}^2(t) = \beta_1 \int_0^t \delta_{\text{мк}}^2(t) dt; \delta_{\text{мд}}^2(t) = \beta_2 \int_0^t \delta_{\text{мд}}^2(t) dt. \quad (4.20)$$

Для рассматриваемой совокупности минимизация каждой составляющей ряда (4.19) с учетом (4.20) может быть обеспечена формированием эквивалентной составляющей управляющего воздействия  $U_0, U_1, U_2$  при выполнении условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_{\text{мс}}^2(t, U_0)}{\partial U_0} &= \beta_0 \int_0^{t_i} \delta_{\text{мс}}(t, U_0) \frac{\partial \delta_{\text{мс}}(t, U_0)}{\partial U_0} dt = 0; \\ \frac{\partial \delta_{\text{мк}}^2(t, U_1)}{\partial U_1} &= \beta_1 \int_0^{t_i} \delta_{\text{мк}}(t, U_1) \frac{\partial \delta_{\text{мк}}(t, U_1)}{\partial U_1} dt = 0; \\ \frac{\partial \delta_{\text{мд}}^2(t, U_2)}{\partial U_2} &= \beta_2 \int_0^{t_i} \delta_{\text{мд}}(t, U_2) \frac{\partial \delta_{\text{мд}}(t, U_2)}{\partial U_2} dt = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Анализируя выражения (4.21) с учетом (4.14) – (4.16) и полагая, что переменными являются только параметры  $U_1$ , можно записать:

$$\frac{\partial \delta_{\text{мс}}(t, U_0)}{\partial U_0} = v_0 X; \frac{\partial \delta_{\text{мк}}(t, U_1)}{\partial U_1} = v_1 V; \frac{\partial \delta_{\text{мд}}(t, U_2)}{\partial U_2} = v_2 \varepsilon.$$

Ошибки ряда (4.16) с учетом (4.18) определяются как

$$\begin{aligned}\delta_{\text{мс}}(t) &= K_{\text{мх}} \frac{1}{K_{\text{м}}} g_{\text{п}} = \beta_0 g_{\text{п}}; \quad \delta_{\text{мк}}(t) = C_{\text{м1}} K_{\text{мх}} V_{\text{п}} = \beta_1 V_{\text{п}}, \\ \delta_{\text{мд}}(t) &= C_{\text{м2}} K_{\text{мх}} \varepsilon_{\text{п}} = \beta_2 \varepsilon_{\text{п}}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Формирование корректирующих поправок для закона управления выполняется методом последовательных приближений. Изменение параметров можно полагать пропорциональным изменению самой функции, тогда алгоритмы контуров формирования корректирующих сигналов определяются как

$$\begin{aligned}U_0 &= v_0 \int_0^{t_i} \delta_{\text{мс}}(t, U_0) g_{\text{п}} dt; \quad U_1 = v_1 \int_0^{t_j} \delta_{\text{мк}}(t, U_1) V_{\text{п}} dt, \\ U_2 &= v_2 \int_0^{t_k} \delta_{\text{мд}}(t, U_2) \varepsilon_{\text{п}} dt.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Рассмотрим особенности реализации условий формирования  $U_i$  при детерминированных стационарных управляющих воздействиях:

1. Управляющее воздействие  $g(t) = g_1 = \text{const}$ :

$$U_0 = v_0 \int_0^{t_i} \delta_{\text{мс}} g_1 dt \quad \text{или} \quad U_0^* = v_0^* \int_0^{t_i} \delta_{\text{мс}} dt, \quad (4.24)$$

где  $v_0^* = v_0 \beta_0$ .

2. Управляющее воздействие  $g(t) = V_1 t$ ;  $V_1 = \text{const}$ :

$$U_1 = v_1 \int_0^{t_j} \delta_{\text{мк}}(t) V_1 dt. \quad (4.25)$$

Если корректирующую поправку формировать как поправку координаты задания, то

$$U_1^* = v_1^* \int_0^{t_j} \int_0^{t_j} \delta_{\text{мк}}(t) (dt)^2, \quad (4.26)$$

где  $v_1^* = v_1 \beta$ .

3. Управляющее воздействие  $g(t) = \frac{\varepsilon_1 t^2}{2}$ ;  $\varepsilon_1 = \text{const}$ :

$$U_2 = v_2 \int_0^{t_k} \delta_{\text{мд}}(t) \varepsilon_1 dt. \quad (4.27)$$

Аналогично составляющая поправки в задании координаты будет

$$U_2^* = v_2^* \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \delta_{\text{мд}}(t)(dt)^3, \quad (4.28)$$

где  $v_2^* = v_2 \beta_2$ .

Дополнительная составляющая, сформированная по алгоритмам согласно (4.23) – (4.28), обеспечивает выполнение условия четвертой формы инвариантности.

Алгоритмы (4.23) – (4.28) можно разделить на две группы, или два способа, формирования дополнительного управления. Рассмотрим их, используя аппарат передаточных функций.

**Способ 1.** Формирование автономных сигналов  $U_0, U_1, U_2$ , не связанных с процедурой формирования управляющего воздействия. Здесь требуется суммировать составляющие, полученные согласно (4.21), (4.26), (4.28), с координатой задания. Звено  $K(p)$ , на которое подается сигнал ошибки контура адаптации, должно иметь передаточную функцию в зависимости от вида управляющего воздействия:

$$\begin{aligned} 1) \quad g(p) = g_1 = \text{const} : \quad K(p) &= \frac{v_0^*}{p}, \\ 2) \quad g(p) = \frac{V_1}{p}, \quad V_1 = \text{const}, \quad K(p) &= \frac{v_1^*}{p^2}, \\ 3) \quad g(p) = \frac{\varepsilon_1}{p^2}, \quad \varepsilon_1 = \text{const}, \quad K(p) &= \frac{v_2^*}{p^3}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Как следует из (4.29), порядок астатизма звена  $K(p)$  определяется порядком астатизма управляющего воздействия, который всегда на единицу выше астатизма управляющего воздействия. Это, в свою очередь, приводит к соответствующему повышению порядка астатизма эквивалентной передаточной функции по возмущающему воздействию, входящей в выражение (4.13). Здесь необходимы оценка устойчивости системы, например, с использованием аппарата параметрической передаточной функции [1, 18, 20, 21] и при необходимости введение дополнительных корректирующих звеньев.

Этот способ не связан со способами формирования управляющего воздействия. Область его эффективного применения – системы

слежения за подвижными объектами. Структурная схема системы соответствует структуре, представленной рис. 4.1, б.

В однокоординатных или двухкоординатных САУ составляющая  $\Delta g$  может вводиться для компенсации ошибок от динамических и квазидинамических погрешностей, обусловленных свойствами механической передачи как по разомкнутой схеме (см. рис. 4.1, а), так и по рассмотренному способу 1.

**Способ 2.** Получение сигналов  $U_0$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  в результате перемножения выходного сигнала звена  $K(p)$  с соответствующей производной при формировании управляющего воздействия:

$$\begin{aligned}
 1) \quad g(p) &= g_1 = \text{const}; & K(p) &= \frac{v_0}{p}, \\
 2) \quad g(p) &= \frac{V_1}{p}, V_1 = \text{const}; & K(p) &= \frac{v_1}{p}, \\
 3) \quad g(p) &= \frac{\varepsilon_1}{p^2}, \varepsilon_1 = \text{const}; & K(p) &= \frac{v_2}{p}.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

В этом случае астатизм эквивалентной передаточной функции по ошибке по возмущающему воздействию имеет первый порядок. Корректирующее звено изменяет (с последующим сохранением) уровень сигнала соответствующей производной при формировании управляющего воздействия. Структурная схема системы приведена на рис. 4.2. Канал коррекции каждого сигнала как объекта управления звена  $K(p)$  с замыканием через систему имеет астатизм первого порядка. Следовательно, ошибка, обусловленная этим сигналом, при медленном его изменении будет равна нулю. Очевидно, вопрос устойчивости в этом случае встает менее остро и может быть решен с помощью аппарата параметрической передаточной функции.

Управление технологическим процессом может быть с постоянной скоростью или ускорением. Адаптация уровней производных и самой координаты выполняется по алгоритмам группы (4.30). Составляющие ошибки от возмущения, обусловленного неучтенными технологическими факторами, получаются путем выделения из суммарной ошибки в контуре САУ. Из нее вычитаются кинетическая  $V/C_1$  и динамическая  $\varepsilon/C_2$  ошибки по управляющему воздействию и статическая  $M/C_{m0}$  по возмущающему. Селекция режимов по виду управля-

ющего воздействия осуществляется логическими элементами  $L$ , управляющими ключами  $K$ . Логика их работы:

$$L_0 = \bar{V} \ \& \ \bar{\varepsilon}, \quad L_1 = \bar{V} \ \& \ \bar{\varepsilon}, \quad L_2 = \bar{V} \ \& \ \bar{\varepsilon}, \quad (4.31)$$

где символ  $\wedge$  обозначает логическую переменную, принимающую значение 1 при ненулевых значениях соответствующих им аргументов и 0 – в противном случае.

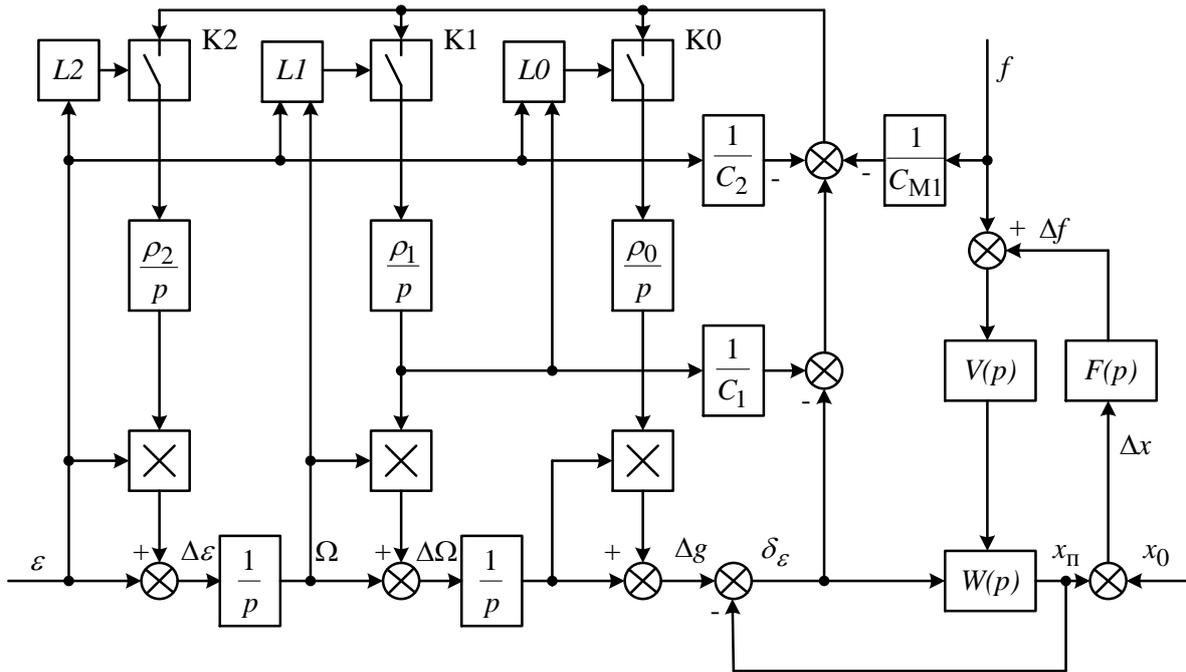


Рис. 4.2. Структурная схема контура формирования дополнительного управления по способу 2

Возможна работа этой структуры и при управляющих воздействиях другого вида. Для выделения составляющих ошибки следует использовать селектор, выделяющий области действия соответствующих составляющих закона изменения управляющего и возмущающего воздействия. Этот способ напрямую связан с методами формирования управляющего воздействия. Область его рационального применения – системы программного управления.

Блок-схемы алгоритмов формирования дополнительного прогнозирующего управления по способам 1, 2 приведены на рис. 4.3, 4.4 соответственно.

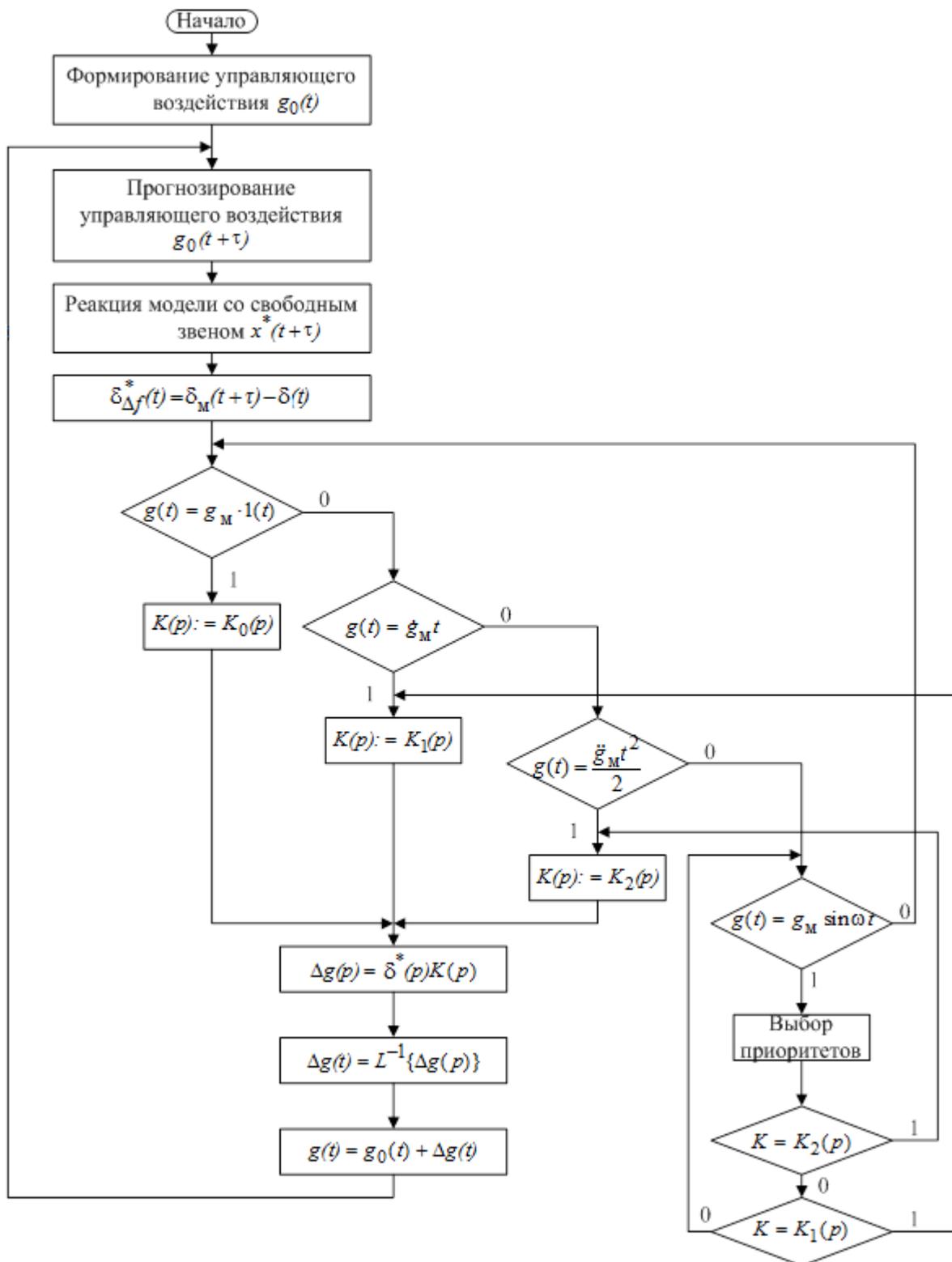


Рис. 4.3. Блок-схема алгоритма формирования дополнительного прогнозирующего управления по способу 1



Многокоординатные системы, реализующие способ 1, имеют следующие характерные признаки:

1) содержат устройства выделения ошибок, пропорциональных отклонению моментных ошибок от расчетного режима, или обусловленных несовпадением программной и фактической технологических траекторий;

2) содержат параллельную прогнозирующую модель, в структуре которой стоит свободное звено (не охваченное обратной связью в основном контуре);

3) выходное звено контура – интегрирующее звено, степень интегрирования которого соответствует степени астатизма управляющего воздействия;

4) дополнительная составляющая прогнозирующего управления суммируется с управляющим воздействием, подаваемым на вход привода ведущей координаты.

Многокоординатные системы, реализующие способ 2, имеют следующие отличительные особенности:

1) содержат устройства выделения ошибок, пропорциональных отклонению моментных ошибок от расчетного режима, или обусловленных несовпадением программной и фактической технологических траекторий;

2) содержат параллельную прогнозирующую модель, в структуре которой стоит свободное звено (не охваченное обратной связью в основном контуре);

3) выходное звено контура – интегрирующее звено первого порядка независимо от степени астатизма управляющего воздействия;

4) дополнительная составляющая формируется перемножением выходного сигнала интегрирующего звена с сигналом соответствующей производной на стадии ее формирования.

#### **4.5. Реализация дополнительного управления в системах программного управления**

Для управления координатными приводами технологического оборудования в основном используются системы числового программного управления (ЧПУ). Рассматриваемый вид прогнозирующего управления предусматривает введение в управление координатными приводами дополнительного управления, изменяющего в конечном итоге траекторию движения.

Все преобразования в устройствах ЧПУ выполняются на программном уровне. Принципиальное значение для рассматриваемого способа коррекции управляющей программы имеет процедура разложения заданной траектории на управляющие сигналы для приводов. Эта процедура в классе устройств ЧПУ получила название интерполяции. Для оценки возможности реализации адаптивных алгоритмов управления составим дискретную модель работы УЧПУ в режимах интерполяции. Рассмотрим формирование дополнительного управления, приводящего к коррекции программной траектории, в конечном итоге – к введению дополнительной составляющей в управляющее для приводов воздействие. Рассмотрим этот вопрос для двух наиболее распространенных в УЧПУ методов интерполяции – цифровых дифференциальных анализаторов (ЦДА) и оценочной функции (ОФ) – и для наиболее распространенных видов траектории – прямой линии и дуги окружности [19, 20, 21].

#### Движение по прямой линии

Метод ЦДА основан на первичном использовании дифференциального уравнения траектории, которая в конечном итоге разлагается на два параметрических уравнения, уже автономных для каждого канала. Для формирования интерполяционного импульса ( $\Delta x \vee \wedge \Delta z$ ) используется процедура цифрового интегрирования конечных значений координат. Особенность формирования интерполяционных импульсов состоит в том, что процедура их определения происходит в два этапа на двух частотах  $f_0 = 1/T_0$  и  $f_k = 1/T_k$ , причем  $f_0 \gg f_k$ .

На рабочей частоте  $f_0$  определяется строгая очередность появления импульсов согласно

$$\Delta X_i[nT_0] = \begin{cases} 1 \forall N_{xi} = \sum_{i=1}^n X_{a1}[n_i T_0] + A_{x,k-1} \geq N_{xm}, \\ 0 \forall N_{xi} < N_{xm}; \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\Delta Z_j[nT_0] = \begin{cases} 1 \forall N_{zj} = \sum_{j=1}^n Z_{a1}[n_j T_0] + A_{z,k-1} \geq N_{zm}, \\ 0 \forall N_{zj} < N_{zm}, \end{cases}$$

где  $X_a, Z_a$  – координаты конечной точки отрезка, задаваемые в программе;  $n, m$  – число шагов суммирования до выполнения условия

больше или равно  $N_m$ ;  $i, j$  – число интерполяционных импульсов, причем  $A_{x,k-1}, A_{z,k-1}$  – содержимое или остатки от переполнения накопителей на предыдущем цикле, тактируемом частотой  $f_k$ , причем число интерполяционных импульсов должно быть

$$i = 1, 2, \dots, X_a; j = 1, 2, \dots, Z_a.$$

Эти импульсы записываются в промежуточную память.

Далее с частотой  $f_k$ , которая определяет скорость перемещения рабочего органа и задается в программе, формируется абсолютное значение управляющего для привода воздействия

$$\begin{aligned} g_x[nT_k] &= g_{x_{i-1}} \pm \sum_1^i \Delta x_i[nT_0] \cdot 1[nT_k]; \\ g_z[nT_k] &= g_{z_{j-1}} \pm \sum_1^j \Delta z_j[nT_0] \cdot 1[nT_k], \end{aligned} \quad (4.33)$$

где  $g_{x_{i-1}}, g_{z_{j-1}}$  – абсолютные значения координат предыдущих кадров и тактов управления. Знаки "+" или "-" определяются для текущего кадра направлением движения.

*Метод ОФ* основан на использовании аналитической записи траектории в виде определенной функции. Для организации управления вдоль заданной кривой (рис. 4.5, б) или прямой (рис. 4.5, а)  $Z=f(X)$  отыскивается такая функция  $S$ , которая удовлетворяет следующим условиям (рис. 4.5):

- 1) делит плоскость одного квадранта, где организуется управление, например  $XOZ$ , на две подплоскости  $U_+$  и  $U_-$ ;
- 2) в подплоскости  $S_+$  функция  $S > 0$ ;
- 3) в подплоскости  $S_-$  функция  $S < 0$ ;
- 4) на заданной траектории функция  $S=0$ .

Алгоритм управления по ОФ предусматривает движение шагами по каждой координате в зависимости от знака ОФ в сторону, приближающую программную точку к идеальной траектории. В области всех значений аргументов это предусматривает вычисление ОФ, определение ее знака и в зависимости от него формирование приращений  $\Delta x, \Delta z$ .

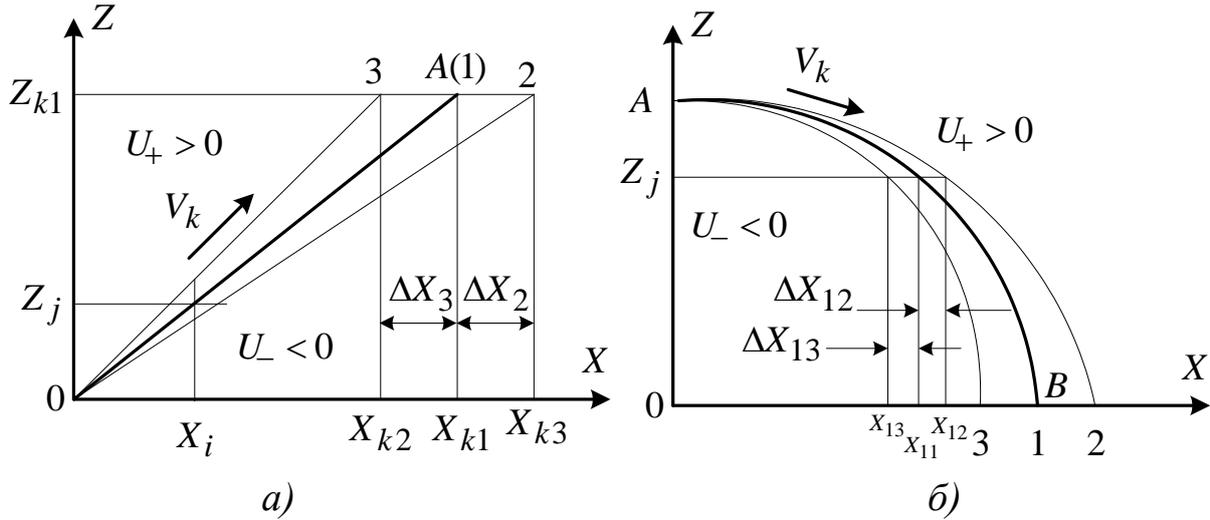


Рис. 4.5. Организация движения по методу ОФ

На частоте  $f_0$  определяется новое значение ОФ согласно выражениям

$$U_{i+1,j}[nT_0] = U_{i,j}[(n-1)T_0] \pm Z_a \text{ при шаге по } Z, \quad (4.34)$$

$$U_{i,j+1}[nT_0] = U_{i,j}[(n-1)T_0] \pm X_a \text{ при шаге по } X,$$

где знаки перед  $X_a$ ,  $Z_a$  определяются квадрантом.

Условия выполнения элементарных координатных приращений можно представить в виде

$$\Delta z_{j+1}[nT_0] = \begin{cases} 1 \forall U_{i,j+1} \vee U_{i+1,j} < 0, \\ 0 \forall U_{i,j+1} \vee U_{i+1,j} > 0, \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\Delta x_{i+1}[nT_0] = \begin{cases} 0 \forall U_{i+1,j} \vee U_{i,j+1} < 0, \\ 1 \forall U_{i+1,j} \vee U_{i,j+1} > 0, \end{cases}$$

где  $i, j$  – число предыдущих приращений по координатам  $X, Z$  соответственно.

На частоте  $1/T_\kappa$  формируется управляющее для привода воздействие. Из выражений (4.32) – (4.36) следует:

1) в формировании приращений используются только значения координат конечной точки  $X_a, Z_a$ , задаваемые в программе и являющиеся для данного участка константами;

2) для изменения траектории достаточно изменить значение одной из координат конечной точки – аргумента, причем независимо от метода интерполяции;

3) в силу принципа разложения заданного контура на управляющие воздействия и двухчастотного преобразования при изменении вектора положения автоматически изменяются проекции вектора скорости;

4) при неизменной в процессе выполнения технологической операции траектории достаточна разовая коррекция параметра  $X_a$  или  $Z_a$ .

Существуют различные модификации этих методов интерполяции, например с большими и малыми шагами, переменным шагом; выделением крутых и пологих участков. Однако существование принципа адаптации путем изменения координат конечной точки при этом сохраняется.

#### **Движение по дуге окружности**

Метод ЦДА определяет элементарные координатные приращения в виде

$$\Delta x_i[nT_0] = \begin{cases} 1 \forall N_{xi} = \sum_{i=1}^n Z_j \cdot 1[nT_0] + A_{x,k-1} \geq N_{xm}, \\ 0 \forall N_{xi} < N_{xm}, \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\Delta z_j[nT_0] = \begin{cases} 1 \forall N_{zj} = \sum_{j=1}^n X_i \cdot 1[nT_0] + A_{z,k-1} \geq N_{zm}, \\ 0 \forall N_{zj} < N_{zm}, \end{cases}$$

где  $X_i, Z_j$  – текущие значения координат при движении по дуге.

Метод ОФ определяет элементарные координатные приращения в виде

$$V_{i+1,j}[nT_0] = V_{i,j}[(n-1)T_0] \pm 2x_i[(n-1)T_0] + 1, \quad (4.37)$$

$$V_{i,j+1}[nT_0] = V_{i,j}[(n-1)T_0] \pm 2z_j[(n-1)T_0] + 1,$$

где знаки перед вторым слагаемым определяются квадрантом и направлением движения.

В зависимости от знака ОФ приращения формируются в соответствии с логическими уравнениями

$$\Delta z_{i+1}[nT_0] = \begin{cases} 1 \forall U_{i,j+1} \vee U_{i+1,j} < 0, \\ 0 \forall U_{i,j+1} \vee U_{i+1,j} > 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\Delta z_{j+1}[nT_0] = \begin{cases} 0 \forall U_{i+1,j} \vee U_{i,j+1} < 0, \\ 1 \forall U_{i+1,j} \vee U_{i,j+1} > 0. \end{cases}$$

Из выражений (4.36) – (4.38) следует, что в отличие от линейной интерполяции здесь для формирования приращений используются текущие координаты  $X_i, Z_j$ .

Таким образом, коррекция программного управления сводится к коррекции значения одной из координат конечной точки при движении по прямолинейному отрезку и коррекции текущего значения одной из координат при движении по дуге окружности, гиперболе, параболе и эллипсу, причем эта коррекция носит разовый характер при неизменной фактической траектории.

*Особенности реализации.* Большинство рассматриваемых технологических операций выполняется с постоянной или медленно изменяющейся скоростью. Тогда составляющая моментной ошибки  $\Delta \delta_{km}$ , обусловленная отклонениями программной и фактической траекторий, может быть получена путем вычитания из текущей ошибки детерминированных составляющих ошибок: кинетической по управляющему воздействию и статической по возмущающему. В конечном итоге должна быть получена  $\Delta \delta_{km}$ .

Рассмотрим сначала коррекцию при движении по прямолинейному участку в плоскости. Дополнительное управление  $\Delta g_x$  должно выполняться за счет изменения значения координаты (функции) конечной точки  $X_a$ , используемой в процедурах (4.32), (4.35) при получении интерполяционных импульсов. Новое значение  $X_a^*$

$$X_a^* = X_a \pm \Delta X_a,$$

где знаки "+" или "-" определяются знаком моментной минимизируемой ошибки.

Дополнительная составляющая  $\Delta X_a$  будет определяться

$$\Delta X_a[nT_a] = \begin{cases} \sum_{a=1}^l \delta_{\text{км}}[kT_c] \cdot 1[aT_a] \forall \delta_{\text{км}} > 0, \\ - \sum_{a=1}^l \delta_{\text{км}}[kT_c] \cdot 1[aT_a] \forall \delta_{\text{км}} < 0, \end{cases} \quad (4.39)$$

где  $l$  – число шагов до выполнения условия  $\delta_{\text{км}} = 0$ . Здесь частота  $T_a$  определяет частоту изменения  $X_a$  в соответствующей ячейке памяти.

С целью упрощения при реализации в выражении (4.39) вместо  $\delta_{\text{км}}$  можно взять коэффициент интегрирования постоянным и равным  $M$ , причем необходимо выполнение условия  $M \leq K_y$ .

Тогда

$$\Delta g_x[mT_a] = \begin{cases} \sum_{m=1}^l M \cdot 1[mT_a] \forall \delta_{\text{км}} > 0, \\ - \sum_{m=1}^l M \cdot 1[mT_a] \forall \delta_{\text{км}} < 0. \end{cases}$$

При движении по дуге окружности коррекция значений текущей координаты функции изменяется аналогично по зависимости

$$X_i^* = X_i \pm \Delta X_i.$$

Параллельно с этим выполняется процедура формирования интерполяционных импульсов.

Частота  $T_a$  зависит от быстродействия следящих приводов и может быть оценена по полосе его пропускания в соответствии с формулой Шеннона. Применительно к данной ситуации это требование записывается

$$T_a \ll F_c; \quad F_c = \omega_n \log 2 \left( 1 + \frac{P_c}{P_{\text{ш}}} \right) \approx \omega_n \log 2 \frac{\delta_{\text{МК}}^2}{\delta_0^2},$$

где  $\omega_n$  – полоса пропускания следящего привода по каналу управления;  $P_c$  – мощность полезного сигнала, в данном случае максимальное значение ошибки  $\delta_{\text{МК}}$ , рекомендуется принимать  $\delta_{\text{МК}} \leq 0,2 - 0,3 \sigma_{\text{кУ}}$ ;  $P_{\text{ш}}$  – мощность шума, в данном случае определяется единицей дискретности по положению  $\delta_0$ .

Реализация адаптивных алгоритмов управления реализуется на программном уровне и не вызывает каких-либо затруднений.

## 5. УПРАВЛЕНИЕ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ В ЗАДАЧАХ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

### 5.1. Формирование дополнительного управления в режимах позиционирования

Рассмотрим задачу повышения качества позиционирования введением дополнительного управления, или нелинейного функционала, в систему на основе прогноза и дополнительного управления по входу системы. Обратимся к обеспечению инвариантности в четвертой форме. При заданных показателях качества, например  $t_{\text{пп}}$ ,  $\sigma = (1-5) \%$ ,  $n = 1-3$ , при обработке ступенчатого управляющего воздействия показатели качества должны быть  $t_{\text{пп}}^* < t_{\text{пп}}$ , ( $t_{\text{пп}}^* = (0,6-0,8)t_{\text{пп}}$ ),  $\sigma^* = 0$ ,  $n^* = 0$ , причем улучшение процесса должно достигаться за счет парирования реакции свободного звена. При этом должен обеспечиваться апериодический, или монотонный, переходный процесс с большим быстродействием. Для этих целей могут быть использованы классические методы оптимального управления [6, 15, 37], когда выполняется синтез на оптимальное быстродействие. Однако в случае не полной наблюдаемости используется несколько иной подход. В этом пункте символом „\*” обозначены желаемые параметры, получаемые в результате вводимой коррекции и прогнозирования.

Введем здесь определение «улучшение управления»:

$$\Delta x(t) = x^*(t) - x(t), \quad (5.1)$$

где  $x^*(t)$  – желаемая переходная характеристика.

Рассмотрим возможность выполнения условия (5.1) двумя способами, а именно введением:

- 1) дополнительной составляющей в управляющее воздействие;
- 2) нелинейного функционала (нелинейного элемента).

Рассмотрим типовую структурную схему системы (рис. 5.1, а). На схемах рис. 5.1 показано свободное звено с передаточной функцией  $W_2(p)$ . Для получения переходной характеристики  $x^*(t)$  необходимо обеспечить управление

$$g^*(t) = L^{-1}[x^*(p)]. \quad (5.2)$$

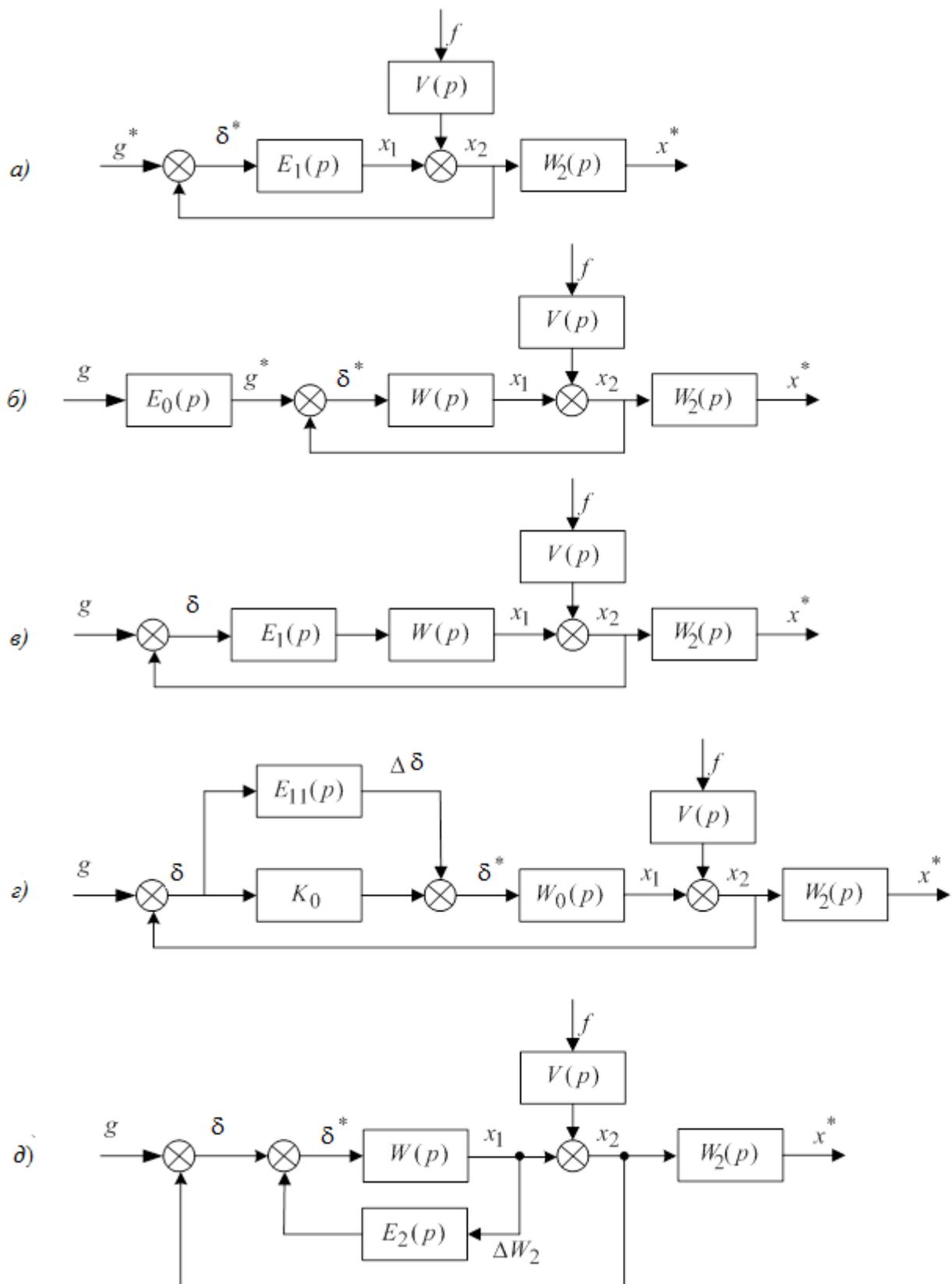


Рис. 5.1. Структурные схемы систем с нелинейным звеном

$$x^*(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} g^*(p) + \frac{V(p)}{1+W(p)} f(p) + \frac{M(p)}{1+W(p)} f(p), \quad (5.3)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$ ;  $W(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$  – передаточная функция разомкнутой системы по управляющему воздействию;  $A(p)$ ,  $B(p)$  – полиномы от  $p$  степеней  $m$  и  $n$  соответственно, причем  $m > n$ ;  $V(p) = \frac{C(p)}{D(p)}$  – передаточная функция разомкнутой системы по возмущающему воздействию;  $C(p)$ ,  $D(p)$  – полиномы от  $p$  степеней  $k$  и  $l$  соответственно, причем  $l > k$ ;  $M(p)$  – полином от  $p$ , учитывающий начальные условия.

Для получения требуемой функции на выходе  $x^*(t)$  при скачкообразном входном воздействии  $g(t) = g_m 1(t)$  на вход системы следует подать управление вида  $g^*(t)$ . В соответствии с (5.3) оно определяется как

$$g^*(p) = \frac{1+W(p)}{W(p)} x^*(p) + \frac{V(p)}{W(p)} f(p) + \frac{M(p)}{W(p)} f(p). \quad (5.4)$$

В полиномиальной форме

$$G^*(p) = G_n^* p^n + G_{n-1}^* p^{n-1} + \dots + G_1^* p + G_0^*. \quad (5.4, a)$$

В зависимости от места приложения сигнала  $g^*(t)$  можно выделить четыре структуры (рис. 5.1, б – 5.1, д). В них корректирующие нелинейные элементы  $E_i(p)$  включаются только при обработке ступенчатого входного воздействия. В этих же точках системы возможно и приложение дополнительного управляющего сигнала. Рассмотрим особенности их построения.

*Структура 1.* Для формирования  $g^*(t)$  вводится последовательное звено, устанавливаемое на входе замкнутого привода (рис. 5.1, б). Оно располагается вне контура привода и, следовательно, не влияет на собственные свойства. Его передаточная функция определяется непосредственно из выражения (5.4) в виде

$$E_0(p) = \frac{g^*(p)}{g(p)} = \frac{\frac{1+W(p)}{W(p)} x^*(p) + \frac{V(p)}{W(p)} f(p) - \frac{M(p)}{W(p)} f(p)}{g(p)}. \quad (5.5)$$

Это выражение, в свою очередь, определяет и вид требуемого эквивалентного управляющего воздействия. Во временной области оно определяется

$$g^*(t) = L^{-1}[g^*(p)] = L^{-1}[E_0(p)].$$

Выделим в управляющем воздействии и в выходной координате составляющие, определяющие улучшения управления  $\Delta x$ . Исходное управление  $g(p)$  обеспечивает  $x(p)$ . В управлении  $g^*(p)$  следует сформировать дополнительную составляющую  $\Delta g(p)$ . При этом

$$x^* = x + \Delta x; \quad g^* = g + \Delta g. \quad (5.6)$$

Тогда выражение (5.4) с учётом (5.6) запишется

$$E_0(p) = \frac{g(p) + \Delta g(p)}{g(p)} = \frac{1 + W(p)}{W(p)} [x(p) + \Delta x(p)] + \frac{V(p)}{W(p)} f(p) + \frac{M(p)}{W(p)} f(p). \quad (5.7)$$

Представим  $E_0(p)$  в виде двух составляющих

$$E_0(p) = E_{01}(p) + \Delta E(p) = \frac{g(p) + \Delta g(p)}{g(p)}.$$

Здесь  $E_{01}(p)$  передает  $g(p)$  без изменения, т.е.

$$E_{01}(p) = \frac{g(p)}{g(p)} = 1, \quad \Delta E(p) = \frac{\Delta g(p)}{g(p)},$$

тогда  $E_0(p) = 1 + \Delta E(p)$ .

В соответствии с этим фрагмент структурной схемы системы в части формирования управляющего воздействия представлен на рис. 5.2.

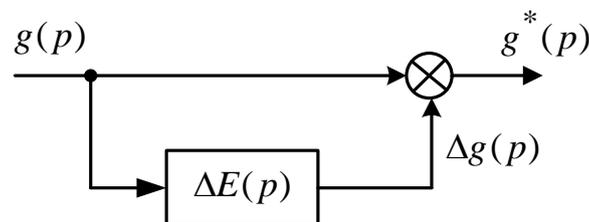


Рис. 5.2. Формирование управляющего воздействия

Передаточная функция  $\Delta E(p)$  запишется

$$\Delta E(p) = \frac{\Delta g(p)}{g(p)} = \frac{1+W(p)}{W(p)} \Delta x(p) + \frac{V(p)}{W(p)} f(p) - \frac{M(p)}{W(p)}, \quad (5.8)$$

или с учетом исходных полиномов согласно (5.3)

$$\Delta E(p) = \frac{\Delta g(p)}{g(p)} = \frac{A(p)+B(p)}{A(p)} \Delta x(p) + \frac{C(p)B(p)}{D(p)A(p)} f(p) - \frac{B(p)M(p)}{A(p)}. \quad (5.8, a)$$

При управляющем воздействии  $g(t) = g_m 1(t)$ , причем когда  $g_m = 1$ , дополнительная составляющая  $\Delta g(p)$  согласно (5.8) определяется

$$\Delta g(p) = \frac{\Delta g(p)}{g(p)} = \frac{A(p)+B(p)}{A(p)} \Delta x(p) + \frac{C(p)B(p)}{D(p)A(p)} f(p) - \frac{B(p)M(p)}{A(p)}. \quad (5.9)$$

В свою очередь, это выражение также определяет и  $\Delta E(p)$ .

В случае нулевых начальных условий при рассмотрении опускается последний член в (5.9), т.е.

$$\Delta g(p) = \frac{\Delta g(p)}{g(p)} = \frac{A(p)+B(p)}{A(p)} \Delta x(p) + \frac{C(p)B(p)}{D(p)A(p)} f(p). \quad (5.9, a)$$

Если  $x^*(t)$  формируется без учёта возмущения  $f(p)$ , тогда  $\Delta g(p)$  определяется первым членом выражения (5.9), т.е.

$$\Delta g(p) = \frac{A(p)+B(p)}{A(p)} \Delta x(p). \quad (5.9, б)$$

Условие формирования  $\Delta g(p)$  или  $\Delta E(p)$  учитывает начальные условия и возмущения. Они могут быть учтены в составляющей  $\Delta g(p)$  или  $\Delta E(p)$ , если имеется функциональная зависимость их с управляющим воздействием  $g(p)$ . В общем случае дополнительная составляющая управления будет

$$\Delta g(p) = f[(g_m / g_{\text{л}}, x'_{\text{л}}, x''_{\text{л}})],$$

или

$$\Delta g(p) = \Delta g_g(p) + \Delta g_f(p) + \Delta g_{\text{нч}}(p),$$

где  $\Delta g_g(p)$ ,  $\Delta g_f(p)$ ,  $\Delta g_{\text{нч}}(p)$  – дополнительные составляющие в управляющем воздействии, определяемые соответствующими членами уравнения (5.9).

Под соответствующими составляющими понимаются  $\Delta g_{\text{нч}}(p)$  скорости и ускорения системы. Их введение дает положительный эффект в режимах реверса и позиционирования с максимальной установившейся скоростью движения. Здесь появляется возможность учета естественных нелинейностей силовой части привода, а именно насыщения по скорости и ускорению. Это относится к режимам позиционирования, когда амплитуда входного воздействия превышает ширину линейной зоны  $g_{\text{л}}$ , т.е. когда  $g_m/g_{\text{л}} > 1$  и скорость выходной координаты постоянна, тогда  $x'_{\text{л}} = g'_m$ . В этом случае, по существу, идет управление приводом при скачкообразном входном воздействии.

Составляющая по возмущению  $\Delta g^f(p)$  должна отвечать одному принципиальному требованию – иметь функциональную взаимосвязь с управляющим воздействием, т.е. должна быть аналитическая или экспериментальная зависимость (заданная в табличном или графическом виде или описанная аналитически). К таким возмущениям относятся нелинейности механической передачи, объединенные в группу квазидинамических. Это циклические и кинематические погрешности и «сухое» трение. Сюда же можно отнести, например, и момент неуравновешенности.

Обратимся к вопросу формирования  $\Delta g$  с позиций теории инвариантности. Говорить об обеспечении равенства нулю ошибки в этом режиме нельзя по двум причинам. Во-первых, это в принципе невозможно с позиций технической реализации. Во-вторых, идеальная ступенчатая отработка вызовет удар с импульсом силы  $F/\Delta t$ . Здесь он будет  $F/\Delta t = \infty \forall \Delta t \rightarrow 0$ , что для любой инерционной нагрузки просто недопустимо. Поэтому можно вести речь о разности ошибок желаемой  $\sigma^*(t)$  и исходной  $\sigma(t)$  переходных характеристик как ошибке, подлежащей компенсации, т.е.

$$\Delta\sigma(t) = \sigma(t) - \sigma^*(t). \quad (5.10)$$

Ошибке  $\sigma^*(t)$  соответствует полином

$$\sigma^*(t) = R(p) = R_s p^s + \dots + R p_1 + R_0, \quad (5.10, a)$$

определяемый как  $R(p) = L[1 - x^*(t)]$ .

Для рассматриваемой системы вида (5.3) изображение ошибки  $\Delta\sigma(p)$  замкнутой системы определяется

$$\Delta\sigma(p) = \frac{1}{1+W(p)} \Delta g(p) + \frac{V(p)}{1+W(p)} f(p) - \frac{M(p)}{W(p)} f(p). \quad (5.11)$$

В зависимости от степени возможного учета возмущения и начальных условий определяются и условия обеспечения четвертой формы инвариантности. Выделим их здесь как три случая.

Случай 1. Возмущение не учитывается. Случай, когда оно не связано функциональной зависимостью с управляющим воздействием. Тогда второй член выражения (5.11) опускается. Переходя к полиномиальной форме, имеем:

$$H(p)\Delta\sigma(p) = B(p)g(p) - B(p)g^*(p) = B(p)\Delta g(p), \quad (5.11, a)$$

где  $H(p) = A(p) + B(p) = h_n p^n + \dots + h_1 p + h_0$ ;  $h_i = a_i + b_i$ .  $h_0 = a_0$ ;  
 $A(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0$ ;  $B(p) = b_m p^m + \dots + b_p + b_0$ .  $m \geq n$ .

Применение четвертой формы инвариантности значительно упрощает задачу. Необходимо сформировать вторую составляющую из условия

$$B(p)g(p) - B(p)g^*(p) = 0, \quad (5.12)$$

или

$$B(p)\tilde{g}^{*\sim}(p) = B(p)g(p) - H(p)\Delta\sigma(p) = 0, \quad (5.12, a)$$

где  $B(p)\tilde{\phantom{x}} = B(p) + \Delta B(p)\tilde{\phantom{x}}$ ;  $g^{*\sim}(p) = g^*(p) + \Delta g^{*\sim}(p)$ .

Здесь возможна вариация как  $B(p)\tilde{\phantom{x}}$  так и  $g^{*\sim}(p)$ . Следует программно реализовать функцию

$$G\tilde{\phantom{x}}(t) = L^{-1}[B(p)\tilde{g}^{*\sim}(p)]. \quad (5.12, б)$$

В любом варианте реализации  $B(p)\tilde{\phantom{x}}$  или  $g^{*\sim}(p)$  формируется сигнал, являющийся дополнительным управляющим воздействием для замкнутого контура привода.

Случай 2. Имеется функциональная взаимосвязь возмущающего воздействия с управляющим. Тогда используются две составляющие выражения (5.11). Переходя к полиномиальной форме, имеем:

$$H(p)D(p)\Delta\sigma(p) = B(p)D(p)g(p) - B(p)D(p)g^*(p) + C(p)f(p). \quad (5.13)$$

Условие четвертой формы инвариантности:

$$B(p)D(p)g(p) - B(p)D(p)g^*(p) + C(p)f(p) = 0, \quad (5.14)$$

или с учетом равенства этого выражения левой части (5.13):

$$B(p)\tilde{g}^*(p)\tilde{=} = B(p)g(p) - H(p)D(p)\Delta\sigma(p) + C(p)f(p). \quad (5.14, a)$$

Здесь также возможна вариация как  $B(p)\tilde{}$ , так и  $g^*\tilde{(p)}$ , и программно реализуется функция вида (5.12, б), но определяемая по условию (5.14, а).

Случай 3. Учет начальных условий. Здесь используются все составляющие выражения (5.11). Если необходимо учитывать перемещение  $x_{\text{л}}$ , скорость  $x'_{\text{л}}(V_{\text{л}})$  и ускорение  $x''_{\text{л}}(\varepsilon_{\text{л}})$ , то в условии (5.14) появляются дополнительные составляющие и оно принимает вид

$$B(p)D(p)g(p) - B(p)D(p)g^*(p) + C(p)f(p) + \\ + M_0(p)x_{\text{л}}(p) + M_1(p)V_{\text{л}}(p) + M_1(p)\varepsilon_{\text{л}}(p) = 0, \quad (5.15)$$

или

$$B(p)\tilde{g}^*(p)\tilde{=} = B(p)g(p) - H(p)D(p)\Delta\sigma(p) + C(p)f(p) + \\ + M_0(p)x_{\text{л}}(p) + M_1(p)V_{\text{л}}(p) + M_1(p)\varepsilon_{\text{л}}(p). \quad (5.15, a)$$

*Структура 2.* Для получения требуемой переходной характеристики  $x^*(t)$  корректирующий нелинейный элемент с передаточной функцией  $E_1(p)$  вводится в прямой тракт ошибки привода последовательно (рис. 5.1, в). Изображение желаемой ошибки определяется

$$\sigma^*(p) = \frac{1}{1 + E_1(p)W(p)}g(p) + \frac{V(p)}{1 + E_1(p)W(p)}f(p) + \frac{M(p)}{1 + E_1(p)W(p)}. \quad (5.16)$$

При нулевых начальных условиях, разрешая (5.16) относительно  $E_1(p)$ , получим:

$$E_1(p) = \left[ \frac{g(p)}{\sigma^*(p)} + \frac{V(p)f(p)}{\sigma^*(p)} - 1 \right] / W(p). \quad (5.17)$$

Для рассматриваемого режима  $g(t) = g_{m1}(t)$  звено  $E_1(p)$  можно определить через исходные полиномы в виде

$$E_1(p) = \frac{B(p)[g_m + C(p)f(p) - G^*(p)]}{A(p)D(p)R(p)}. \quad (5.17, a)$$

Следует отметить, что функция  $\sigma^*(p)$  здесь вполне определенная и соответствует выражению (5.13, а). Звено  $E_1(p)$  в случае известной взаимосвязи возмущения  $f(p)$  с управляющим воздействием и при его полной физической реализации обеспечивает требуемую переходную характеристику. Когда возмущение равно нулю или не учитывается, то выражение (5.17) упрощается и принимает вид

$$E_1(p) = \left[ \frac{g(p)}{\sigma^*(p)} - 1 \right] / W(p), \quad (5.18)$$

или определяется через исходные полиномы

$$E_1(p) = \frac{B(p)[g_m + R(p)]}{A(p)R(p)}. \quad (5.18, a)$$

Из анализа зависимостей семейства (5.18) и (5.19) вытекает предложение о возможной реализации их, используя в качестве  $E_1(p)$  эквивалентный нелинейный функционал. Параметры его должны соответствовать выполнению условий (5.10). Для определения его статической характеристики может быть рекомендована следующая последовательность процедур (далее этот вопрос будет рассмотрен несколько подробнее) [27, 29]:

1. Формируется требуемая переходная функция  $x^*(t)$ .
2. Определяются  $x^*(p) = L[x^*(t)]$  и  $g^*(p)$  согласно (5.4).
3. Определяются ошибки  $\sigma(p)$  и  $\sigma^*(p)$  согласно (5.22) для  $g(p)$  и  $g^*(p)$  соответственно.
4. Определяются ошибки  $\sigma(t)$  и  $\sigma^*(t)$  во временной области как  $\sigma(t) = L^{-1} [\sigma(p)]$  и  $\sigma^*(t) = L^{-1} [\sigma^*(p)]$ .
5. На основании  $\sigma(t)$  и  $\sigma^*(t)$  строится зависимость  $\sigma^*(\sigma)$ . Для этого берутся значения  $\sigma$  и  $\sigma^*$  для одинаковых моментов времени. Она и является искомой характеристикой нелинейного элемента  $E_1(p)$ .

В нелинейных системах с насыщением звено  $E_1(p)$  определяется с учетом начальных условий и соотношения ширины линейной зоны  $g_{\text{л}}$  и характеристики и амплитуды  $g_m$ , когда  $g_m/g_{\text{л}} > 1$ . Подчеркнем еще раз факт зависимости характера переходного процесса от соотношения  $g_m/g_{\text{л}}$  и начальных условий по скорости  $x_{\text{л}}'$  и ускорению  $x_{\text{л}}''$  входа в линейную зону. Поэтому для получения переходного процесса с заданными характеристиками в выражениях (5.18) и (5.19) следует учитывать составляющие, определяемые начальными условиями. Тогда выражение для  $E_1(p)$  принимает вид

$$E_1(p) = \left[ \frac{g(p)}{\sigma^*(p)} + \frac{V(p)f(p)}{\sigma^*(p)} + \frac{M(p)f(p)}{\sigma^*(p)} \right] / W(p), \quad (5.19)$$

*Структура 3.* Она представляет вариант параллельной коррекции нелинейным функционалом  $E_{11}(p)$  в тракте ошибки (см. рис. 5.1, з). Ошибка здесь определяется

$$\sigma^*(p) = \frac{1}{1 + [K_0 + E_{11}(p)]W_0(p)} g(p) + \frac{V(p)}{1 + [K_0 + E_{11}(p)]W_0(p)} f(p).$$

Для рассматриваемого режима  $g(t) = g_{m1}(t)$  передаточная функция звена

$$E_{11}(p) = \frac{g_m}{\sigma^*(p)W_0(p)} + \frac{V(p)}{\sigma^*(p)W_0(p)} - \sigma^*[1 + K_0W_0(p)]. \quad (5.20)$$

Для полной независимости исходного привода целесообразно принять  $K_0 = 1$ , отнеся требуемое его значение во внутренний контур. Тогда

$$E_{11}(p) = \frac{g_m}{\sigma^*(p)W_0(p)} + \frac{V(p)f(p)}{\sigma^*(p)W_0(p)} - \sigma^*[1 + W_0(p)]. \quad (5.20, a)$$

При необходимости учитываются начальные условия аналогично, как и при рассмотрении предыдущих структур.

*Структура 4.* Представляет введение нелинейного функционала  $E_2$  во внутренние контуры. С позиций простоты реализации его целесообразно вводить параллельно коэффициенту передачи этого контура или параллельно сигналам обратных связей (см. рис. 5.1, г). Тогда

выбор параметров звена  $E_2(p)$  можно вести с помощью стандартных уравнений [37, 38, 39]. Исходное уравнение:

$$Hed(p)x(p) = A_d(p)g^*(p) + C(p)f(p) + M(p)f_0(p), \quad (5.21)$$

где  $Hed(p) = [H(p) + E_2(p)]D(p)$ .

Члены при соответствующих степенях  $p$  в характеристическом полиноме  $Hed(p)$  представлены совокупностью

$$h_i = a_i + b_{io} + b_{ioc} + e_i(g^*),$$

где  $b_{io}$  – коэффициент уравнения для исходной системы;  $b_{ioc}$  – коэффициент уравнения для цепи обратной связи;  $e_i(g^*)$  – нелинейная составляющая в цепи обратной связи.

Нелинейные составляющие определяются при решении условий (5.21) во временной области. В результате проведенного анализа структур можно сделать следующие выводы:

1. Имеется принципиальная возможность повышения качества переходных процессов при отработке скачкообразного входного воздействия двумя способами, а именно введением:

- дополнительного управления в функции времени;
- дополнительного функционала (нелинейного корректирующего звена) во внутренний контур системы.

2. Дополнительное управление, или корректирующее звено, можно рассматривать как условие обеспечения четвертой формы инвариантности относительной желаемой переходной характеристики.

## 5.2. Определение условий прогноза на изменение управления

Рассмотрим взаимосвязь желаемой переходной характеристики с изменяемым во времени или в функции ошибки коэффициентом усиления с позиции возможности физической реализации таких систем. Анализ проведем на примере систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядка, в следующей постановке задачи. Имеется линейная система с определенными параметрами ( $K$  и  $T$  – коэффициент передачи и постоянная времени прямого тракта соответственно). Переходный процесс на ступенчатое управляющее воздействие монотонный с максимальным для этой линейной системы быстродействием. Необходимо при ограничениях на числовые значения этих параметров получить монотонный переходный процесс с большим быстродействием.

При монотонном переходном процессе доминирующую составляющую, определяющую характер и длительность переходного процесса, можно представить в виде

$$x(t) = g(1 - e^{-\alpha t}), \quad (5.22)$$

где  $\alpha$  – доминирующий вещественный корень.

Значение  $\alpha$  определяется из условия достижения выходной координатой требуемого значения за интервал времени  $t_{\text{пн}}$ . Как правило, принимают трубку в 5 %, при этом

$$x(t) \Big|_{t = t_{\text{пн}}} \geq 0.95 g. \quad (5.23)$$

Тогда величина  $\alpha$  определяется соотношением

$$\alpha \geq \ln 20 / t_{\text{пн}}. \quad (5.23, \text{ а})$$

Зададимся, например, временем переходного процесса  $t_{\text{пн}} = 0.02$  с. Тогда значение доминирующего корня должно быть  $\alpha = 150$ .

Будем считать, что условие (5.23, а) достигается переменным во времени коэффициентом усиления  $K(t)$ . Необходимое значение его можно получить из первого уравнения динамики системы, которое в общем случае имеет вид

$$\sum_{i=1}^n [A_i p^i + k(t)] x(t) = \sum_{j=1}^m B_j p^j g(t), \quad (5.24)$$

где  $p = d/dt$ .

Для систем второго порядка с характеристическим уравнением вида

$$Tp^2 + p + K = 0 \quad (5.25)$$

решением (5.25) для  $K(t)$  будет выражение

$$K(t) = \frac{Tp^2 x(t) + px(t)}{g(t) - x(t)}. \quad (5.26)$$

При заданной переходной характеристике вида (5.23) выражение для определения коэффициента усиления принимает вид

$$K(t) = \alpha(1 - \alpha T) = \text{const}. \quad (5.26, \text{ а})$$

Выражение (5.26, а) устанавливает предельно допустимое значение постоянной времени системы  $T \leq 0.01$  с. Постоянный коэффициент передачи системы  $K(t) = \text{const}$  не может обеспечить требуемое быстродействие ( $t_{\text{III}} \leq 0.02$  с) при монотонности переходного процесса. Для систем второго порядка монотонный переходный процесс возможен при действительных корнях характеристического уравнения (5.26). Из условия необходимости вещественных корней определяется требование к значению коэффициента передачи, т.е. если

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4KT}}{2T}, \quad (5.27)$$

то условием монотонного процесса является

$$K \geq \frac{1}{4T}. \quad (5.27, \text{ а})$$

В соответствии с (5.27, а) для  $t_{\text{III}} \leq 0.02$  с величина доминирующего корня должна быть не менее 150, откуда следует, что при ограничении на величину постоянной времени  $T \geq 0.01$  с для систем второго порядка невозможно получить монотонный процесс со временем  $t_{\text{III}} \leq 0.02$  с.

Проанализируем возможность получения монотонного переходного процесса с большим быстродействием при ограничении на постоянную времени введением нелинейного элемента. Всю процедуру синтеза нелинейной характеристики можно разделить на три этапа [2, 22, 27, 37]:

- 1) формирование эквивалентного управляющего воздействия  $g^*(t)$  из условия заданной переходной характеристики  $x^*(t)$ ;
- 2) определение эквивалентного коэффициента усиления как функции времени  $K(t)$  и соответствующего ему сигнала ошибки;
- 3) определение характеристики нелинейного элемента в функции ошибки.

*Этап 1.* Желаемая переходная функция  $x^*(t)$  может быть задана в аналитической или табличной форме. Это определяет применяемый математический аппарат, но не изменяет методики определения  $K(t)$ . Функция  $x^*(t)$  должна отвечать двух основным требованиям, а именно обеспечивать:

- требуемые динамические показатели;

– физическую реализуемость коэффициента передачи нелинейного элемента.

Кроме того, из (5.27) следует, что  $x^*(t)$  и  $px^*(t)$  должны быть непрерывными функциями, чтобы исключить неопределенность  $K(t)$  в момент переключения.

Рассмотрим несколько вариантов задания функции  $x^*(t)$ .

Функция 1. Представим функцию  $x^*(t)$  двумя отрезками экспоненциальных функций вида

$$x^*(t) = \begin{cases} a(1 - e^{-\beta t}) \forall 0 < t < t_1, \\ g(1 - e^{-\alpha t}) \forall t_1 < t < \infty. \end{cases} \quad (5.28)$$

Здесь и далее наложим сразу ограничение на интервал времени  $t_1$ . Будем рассматривать симметричную отработку управляющего воздействия на интервалах  $0 - t_1$ ,  $t_1 - t_\infty$ , равную  $g/2$ , т. е. изменения выходной координаты на участках разгона и торможения одинаковы. Этот момент требует своего дополнительного исследования. Здесь он пока не рассматривается, так как необходимо сначала установить общую зависимость для требуемой управляющей функции  $g^*(t)$ . На втором участке коэффициент усиления  $K(t) = \text{const}$  и определяется в соответствии с условием (5.27, а). Его допустимые значения ограничены при этом величиной времени  $T$ . На начальном участке коэффициент усиления должен изменяться по закону

$$K(t) = \frac{\alpha\beta(1 - \beta T)e^{-\beta t}}{g - a(1 - e^{-\beta t})}. \quad (5.28, \text{ а})$$

Начальное значение коэффициента усиления (при  $t = 0$ ) определяется выражением

$$K(0) = \frac{\alpha\beta(1 - \beta T)}{g}. \quad (5.28, \text{ б})$$

Очевидно, что для повышения быстродействия и сохранения монотонности переходного процесса коэффициент  $K(t)$  должен иметь большие значения на начальном участке. Это приводит к требованию выполнения условия  $a > g$ . Однако анализ функции  $dK(t)/dt$  показывает, что при  $a > g$  функция  $K(t)$  убывает, так как

$$\frac{dK(t)}{dt} = \frac{(a-g)\alpha\beta^2(1-\beta T)e^{-\beta t}}{\left[g - a(1 - e^{-\beta t})\right]^2} \quad \text{и} \quad \beta < \frac{1}{T}.$$

Следовательно, аппроксимация регулируемой величины  $x(t)$  на начальном участке переходной характеристики экспоненциальными функциями вида (5.28) невозможна.

Функция 2. Представим функцию  $x^*(t)$  на начальном участке степенной функцией, а на конечном – экспоненциальной, т.е.

$$x^*(t) = \begin{cases} at^2 \forall 0 < t < t_1, \\ g(1 - Ae^{-\alpha t}) \forall t_1 < t < \infty, \end{cases} \quad (5.29)$$

где  $a = \text{const}$ .

Тогда после подстановки (5.29) в уравнение динамики (5.25) и решения его относительно  $K(t)$  получим

$$K(t) = \begin{cases} \frac{2a(t+T)}{g - aT^2} \forall 0 < t < t_1, \\ a(1 - \alpha T) \forall t_1 < t < \infty. \end{cases}$$

Очевидно, что на начальном участке ( $t \leq t_1$ ) функция  $K(t)$  возрастает, что, как уже было отмечено выше, недопустимо.

Анализировались также и некоторые другие функции  $x^*(t)$  и соответствующие им законы изменения  $K(t)$ . В итоге приемлемой оказалась только функция вида 3.

Функция 3. Требованиям, предъявляемым к  $x^*(t)$ , удовлетворяет функция вида

$$x^*(t) = \begin{cases} (C_0 - Ct)t^2 \forall 0 < t < t_1, \\ g(1 - Ae^{-\beta t}) \forall t_1 < t < \infty, \end{cases} \quad (5.30)$$

где  $C_0, C$  – параметры, определяющие закон изменения ускорения;  $\beta$  – характеристика заключительного экспоненциального участка переходной характеристики.

Анализ выражения (5.29) показывает, что на участке ( $0 < t < t_1$ ) осуществляются разгон и торможение, причем ускорение на участке ( $t_1 < t < \infty$ ) имеет плавный подход к заданному положению. Система

уравнений (5.30) отвечает условию (5.24) и условиям физической реализации. Следует отметить необходимое и выполняемое здесь условие гладкости первой и второй производных в момент времени  $t_1$ .

*Этап 2.* Определение коэффициента передачи  $K(t)$  при заданной функции  $x^*(t)$ . Решая (5.27) с учетом (5.30), находим требуемый закон изменения эквивалентного коэффициента усиления системы в переходном процессе:

$$K(t) = \begin{cases} \frac{2C_0(t+T) - 3Ct(t+2T)}{g - (C_0 - Ct)t^2} \forall 0 < t < t_1, \\ \beta(1 - \beta T) = K_{уст} \forall t_1 < t < \infty. \end{cases} \quad (5.31)$$

Анализ выражения (5.31) показывает, что закон функционирования динамического корректирующего звена, формирующего эквивалентный коэффициент усиления системы, зависит от величины управляющего воздействия  $g$ , инерционности системы, требуемого быстродействия и начальных условий ( $x^*(0)$ ,  $px^*(0)$ ,  $px^{*2}(0)$ ).

Второе уравнение системы (5.31) позволяет определить  $\beta$  по заданной добротности  $K_{уст}$ . Используя для вычисления составляющей  $\beta t_{шт}$  условие (5.24) и второе уравнение системы (5.31), получим  $A\beta \leq 0.05$ , тогда  $A \leq 0.05 \exp(\beta t_{шт})$ . Для определения начального ускорения  $C_0$  воспользуемся первым уравнением из (5.30) при  $t = 0$ , тогда

$$K(t) \Big|_{t=0} = K(0) = \frac{2C_0T}{g}, \text{ откуда } C_0 = \frac{K_{max}g}{2T},$$

где  $K_{max} = K(0)$  – максимально допустимый по условиям эксплуатации коэффициент усиления системы. Здесь следует иметь в виду реально допустимые значения его для систем рассматриваемого типа. На сегодняшний день реально достигнутая добротность высококачественных электроприводов с высокомоментными и вентильными двигателями составляет не более  $100 \text{ с}^{-1}$ .

Выбор параметров  $C$  и  $t_1$ , определяющих для выходной координаты изменение ускорения и момент перехода с параболического на экспоненциальный характер ( $t \geq t_1$ ) соответственно, выполняется из условия непрерывности функции  $x^*(t)$  и ее первой производной

$px^*(t)$  для всех  $t > 0$ . При нулевых начальных условиях эти условия сводятся к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} (C_0 - Ct_1)t_1^2 = g(1 - Ae^{-\beta t_1}), \\ 2C_0t_1 - 3Ct_1^2 = gA\beta e^{-\beta t_1}. \end{cases} \quad (5.32)$$

В результате несложных преобразований систему нелинейных уравнений (5.32) можно заменить уравнениями

$$\frac{C_0t_1^2}{3} - g \left[ 1 - A \left( 1 + \frac{\beta t_1 e^{-\beta t_1}}{3} \right) \right] = 0, \quad (5.32, \text{ а})$$

$$C(\beta t_1^3 + 3t_1^2) = \beta C_0t_1^2 + 2C_0t_1 - g\beta. \quad (5.32, \text{ б})$$

Уравнение (5.32, а) позволяет определить  $t_1$ , а (5.32, б) –  $C$ . Последнее используется для определения  $C$  при фиксированных  $t_1$ .

В общем случае в левой части уравнения (5.32) следует учесть начальные условия  $x^*(0)$  и  $px^*(0)$ . При ненулевых начальных условиях закон изменения выходной координаты  $x^*(t)$  с учетом (5.30) принимает вид

$$x^*(t) = \begin{cases} (C_0 - Ct)t^2 + x_0^* \quad \forall 0 < t < t_1, \\ g(1 - Ae^{-\beta t}) \quad \forall t_1 < t < \infty, \end{cases}$$

где  $x_0^* = x^*(0)$ .

Тогда в соответствии с (5.27) динамический коэффициент усиления будет определяться следующим образом:

$$K(t) = \begin{cases} \frac{T(2C_0 - 6Ct + x_0''^*) + x_0'^* + t(2C_0 - 3Ct)}{g - (C_0 - Ct)t^2 + x_0^*} \quad \forall 0 < t < t_1, \\ \beta(1 - \beta T) \quad \forall t_1 < t < \infty, \end{cases} \quad (5.33)$$

где  $x_0'^* = x_0'(t)|_{t=0} = x_0'(0)$ ;  $x_0''^* = x_0''(t)|_{t=0} = x_0''(0)$ .

С учетом ненулевых начальных условий уравнение (5.32, а) для определения параметров ускорения, момента  $C$  и времени  $t_1$  перехода

выходной координаты с параболического на экспоненциальный участок преобразуется к виду

$$C(\beta t_1^3 + 3t_1^2) = C_0 t_1 (2 + g t_1) - g\beta + \beta x_0^* - x_0'^*, \quad (5.33, a)$$

где  $C_0 = \frac{K_{\max}(g - x_0^*) - x_0'^* - x_0''^* T}{2T}$ .

Уравнение (5.33) можно использовать и для анализа нелинейных систем с насыщением в прямом тракте в следующей постановке. Рассматривается переходный процесс при входе в линейную зону, величина которой составляет  $x_0$  (обозначим это значение как  $\sigma_{\text{л}}$ ), с начальной скоростью  $x_0'(t)$  и ускорением  $x_0''(t)$ . Тогда для определения коэффициента передачи на участке разгона следует использовать первое уравнение системы (5.31), а при входе в линейную зону – систему (5.33). Момент времени  $t_1$  для участка торможения выбирается также из условия отработки половины рассогласования, но в данном случае уже  $\sigma_{\text{л}}/2$ .

*Этап 3.* При технической реализации необходимо иметь зависимость динамического коэффициента усиления в функции ошибки  $K(\sigma)$ . С учетом (5.30) ошибка  $\sigma(t)$  при монотонном переходном процессе может быть записана в виде

$$\sigma^*(t) = \begin{cases} g - (C_0 - Ct)t^2 \forall 0 < t < t_1, \\ Ae^{-\beta t} \forall t_1 < t < \infty. \end{cases} \quad (5.34)$$

Определяя  $K(t_i)$  и  $\sigma^*(t_i)$  для фиксированных моментов времени  $t_1$  по выражениям (5.31), (5.34) соответственно, можно получить зависимость  $K(\sigma)$ , заданную дискретно с любым шагом. В конечном итоге требуется определить характеристику входа-выхода нелинейного элемента в координатах ошибка – напряжение. Характеристика  $U(\sigma)$  получается простым коэффициентом  $K(\sigma)$  в диапазоне 0 – 1 при условии, что максимальный коэффициент обеспечивается линейным звеном, стоящим далее.

Из проведенного анализа следует, что принципиально возможно получить большее быстродействие переходного процесса с монотонным характером за счет введения дополнительного управления, парирующего реакцию звена, не охваченного главной обратной связью.

## 6. ИССЛЕДОВАНИЕ САУ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

### 6.1. Исследование САУ с параллельной моделью

Для повышения эффективности управления и построения рациональной структуры необходимо проанализировать влияние параметров объекта в различных режимах работы на динамику САУ. В предлагаемом издании приведены результаты исследования привода перемещения с главной обратной связью по положению исполнительного механизма (двигателя постоянного тока с независимым возбуждением). Привод включает в себя два внутренних контура – по напряжению и частоте вращения двигателя – и ПИД-регулятор. Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением описывается следующей системой дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} U_{\text{я}} = i_{\text{я}} \cdot R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \cdot \frac{di_{\text{я}}}{dt} + E_{\text{я}} = i_{\text{я}} \cdot R_{\text{я}} + L_{\text{я}} \cdot \frac{di_{\text{я}}}{dt} + C_e \Omega, \\ M_{\text{д}} = C_m \cdot i_{\text{я}} = J \frac{d\Omega}{dt} + M_{\text{вн}}, \\ i_{\text{я}} = \frac{J}{C_m} \frac{d\Omega}{dt} + \frac{M_{\text{вн}}}{C_m}, \\ M_{\text{я}} = \frac{J \cdot R_{\text{я}}}{C_m} \cdot \dot{\Omega} + \frac{M_{\text{вн}}}{C_m} + \frac{L_{\text{я}} \cdot J}{C_m} \cdot \ddot{\Omega} + \frac{L_{\text{я}}}{C_m} \cdot \dot{M}_{\text{вн}} + C_e \Omega, \end{cases}$$

где  $U_{\text{я}}$  – напряжение на якорной обмотке двигателя;  $i_{\text{я}}$  – ток якоря;  $R_{\text{я}}$  – активное сопротивление якорной цепи;  $L_{\text{я}}$  – индуктивность якорной цепи;  $E_{\text{я}}$  – электродвижущая сила (ЭДС) якоря;  $M_{\text{д}}$  – электромагнитный момент двигателя;  $C_m$  – коэффициент связи между моментом и током якоря;  $M_{\text{вн}}$  – момент нагрузки;  $\Omega$  – скорость вращения вала двигателя;  $J$  – момент инерции;  $C_e$  – коэффициент связи между скоростью и ЭДС;  $M_{\text{я}}$  – момент якорной цепи двигателя.

Объект управления не охвачен обратной связью и имеет конечную жесткость  $C$  и коэффициент демпфирования  $b$ . Расчетная схема объекта управления приведена на рис. 6.1.

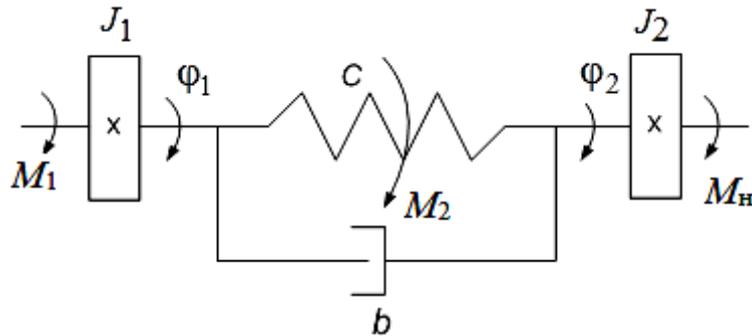


Рис. 6.1. Расчетная схема объекта управления

Система дифференциальных уравнений динамики такого объекта имеет вид

$$\begin{cases} M_1 - M_2 = J_1 \ddot{\varphi}_1, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 = c(\varphi_1 - \varphi_2) + b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + M_H, \end{cases}$$

где  $M_1, J_1$  – динамический момент и момент инерции исполнительного двигателя;  $M_2, J_2$  – момент упругих сил и приведенный момент инерции нагрузки;  $\varphi_1, \varphi_2$  – угловые перемещения исполнительного двигателя и нагрузки;  $M_H$  – внешний статический момент. Структурная схема объекта управления показана на рис. 6.2.

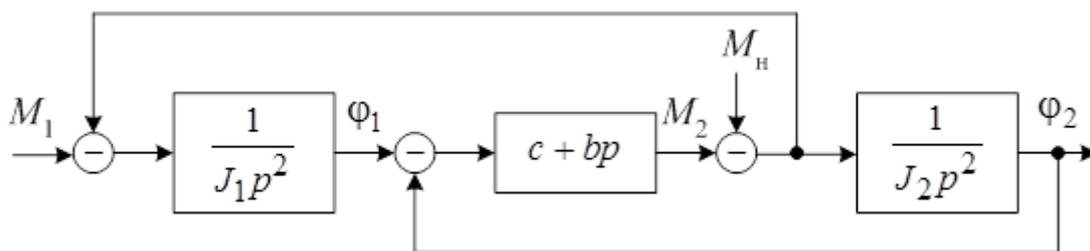


Рис. 6.2. Структурная схема объекта управления

Момент упругих сил  $M_2$  является главным возмущающим воздействием и определяет влияние не охваченного обратной связью объекта управления на работу САУ. Система дифференциальных уравнений, описывающая динамику САУ с не полностью наблюдаемым объектом управления, имеет шестой порядок и учитывает ограничения по току двигателя и напряжению. Модель привода, выполненная в среде Matlab (Simulink), приведена на рис. 6.3.

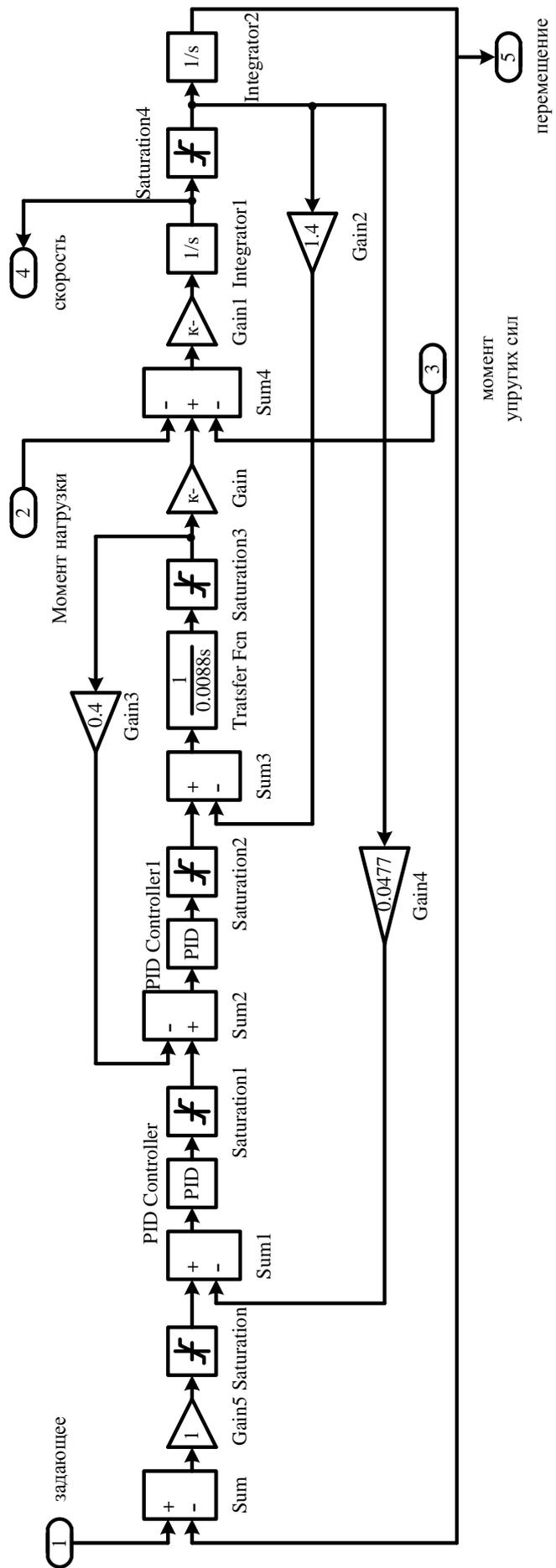


Рис. 6.3. Модель привода

Моделирование проводилось в среде MATLAB (Simulink), определялись показатели качества переходных процессов и точности регулирования при разных законах изменения входного сигнала и величины момента нагрузки. Модель САУ с объектом управления, не охваченным обратной связью, показана на рис. 6.4. Привод (без учета ОУ) имеет стабильные характеристики (отсутствие перерегулирования и заданное быстродействие 0.2 с), которые практически не зависят от внешних воздействий как управляющего, так и возмущающего.

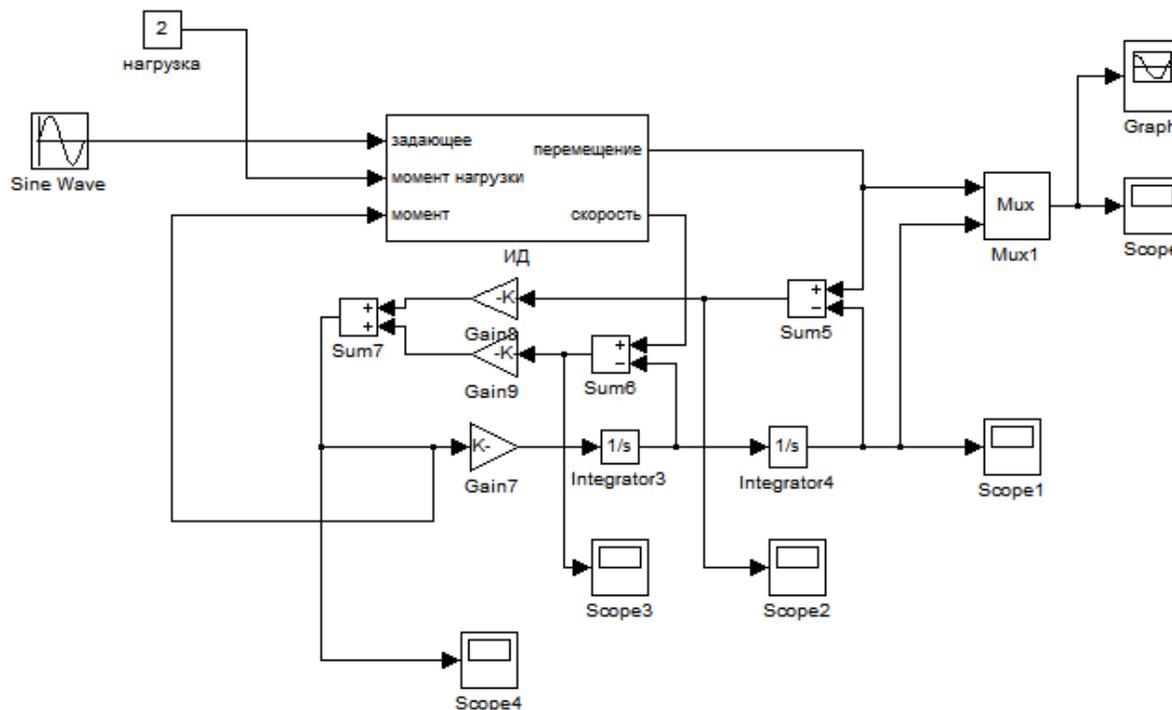


Рис. 6.4. Модель САУ с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой

Результаты моделирования САУ с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой показали, что величина момента нагрузки  $M_H$  оказывает незначительное влияние на динамику САУ при обработке скачкообразного сигнала: с ростом момента нагрузки наблюдается небольшой рост перерегулирования. Однако при воздействии отрицательных значений момента нагрузки происходит снижение запаса устойчивости системы. Наибольшее влияние на динамику оказывает величина входного воздействия при обработке скачкообразного сигнала. Его рост приводит к увеличению перерегулирования и уменьшению запаса устойчивости, причем эта зависимость нелинейная. Возрастание величины входного воздействия в пределах от 1 до 5 вызывает рост перерегулирования, далее САУ теряет устойчивость.

Показатели качества переходных процессов и точности регулирования при обработке скачкообразного сигнала приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

1. Момент нагрузки $M_H = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$									
Величина задающего воздействия $g, \text{ м}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,2	4,4
Перерегулирование $\sigma, \%$	–	–	–	–	–	6	18	33	<i>Расходящийся процесс</i>
Время переходного процесса $t_{\text{пп}}, \text{ с}$	0,18	0,2	0,2	0,2	0,2	0,22	0,3	0,45	
2. Момент нагрузки $M_H = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$									
Величина задающего воздействия $g, \text{ м}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,2	4,4
Перерегулирование $\sigma, \%$	–	–	–	–	–	6	17	30	<i>Расходящийся процесс</i>
Время переходного процесса $t_{\text{пп}}, \text{ с}$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,22	0,3	0,45	
3. Момент нагрузки $M_H = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$									
Величина задающего воздействия $g, \text{ м}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,2	4,4
Перерегулирование $\sigma, \%$	–	–	–	–	–	8	19	31,6	<i>Расходящийся процесс</i>
Время переходного процесса $t_{\text{пп}}, \text{ с}$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,22	0,31	0,45	
4. Момент нагрузки $M_H = -2 \text{ Н} \cdot \text{м}$									
Величина задающего воздействия $g, \text{ м}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,2	4,4
Перерегулирование $\sigma, \%$	–	–	–	–	–	8,2	25	<i>Расходящийся процесс</i>	
Время переходного процесса $t_{\text{пп}}, \text{ с}$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,22	0,4		
5. Момент нагрузки $M_H = -5 \text{ Н} \cdot \text{м}$									
Величина задающего воздействия $g, \text{ м}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,2	4,4
Перерегулирование $\sigma, \%$	–	–	–	–	–	11,4	<i>Расходящийся процесс</i>		
Время переходного процесса $t_{\text{пп}}, \text{ с}$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,21	0,25			
6. Момент нагрузки $M_H = -10 \text{ Н} \cdot \text{м}$									
Величина задающего воздействия $g, \text{ м}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,2	4,4
Перерегулирование $\sigma, \%$	–	–	–	–	6	14,3	<i>Расходящийся процесс</i>		
Время переходного процесса $t_{\text{пп}}, \text{ с}$	0,2	0,2	0,2	0,25	0,3	0,35			

Величина момента нагрузки  $M_H$ , как видно из табл. 6.1, оказывает незначительное влияние на динамику САУ при отработке скач-

кообразного сигнала: с ростом момента нагрузки наблюдается небольшой рост перерегулирования. Однако при воздействии отрицательных значений момента нагрузки происходит существенное снижение запаса устойчивости системы.

При обработке гармонического сигнала увеличение частоты колебаний приводит к снижению точности, установившаяся динамическая ошибка возрастает до недопустимого значения. Объект управления, не охваченный обратной связью, вызывает существенное уменьшение полосы пропускания САУ. Показатели качества переходных процессов и точности регулирования при обработке гармонического сигнала приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

1. Момент нагрузки $M_H = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$					
Амплитуда задающего воздействия $A = 1 - 5 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	9	16	20
Амплитуда задающего воздействия $A = 10 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	10	16	<i>Расходящийся процесс</i>
2. Момент нагрузки $M_H = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$					
Амплитуда задающего воздействия $A = 1 - 5 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	10	16	21
Амплитуда задающего воздействия $A = 10 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	10	16	<i>Расходящийся процесс</i>
3. Момент нагрузки $M_H = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$					
Амплитуда задающего воздействия $A = 1 - 5 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	10	16	21
Амплитуда задающего воздействия $A = 10 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	10	16	<i>Расходящийся процесс</i>
4. Момент нагрузки $M_H = -2 \text{ Н} \cdot \text{м}$					
Амплитуда задающего воздействия $A = 1 - 10 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	10	16	21

5. Момент нагрузки $M_H = -5 \text{ Н} \cdot \text{м}$					
Амплитуда задающего воздействия $A = 1 - 10 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	10	16	21
6. Момент нагрузки $M_H = -10 \text{ Н} \cdot \text{м}$					
Амплитуда задающего воздействия $A = 1 - 5 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	10	16	21
7. Амплитуда задающего воздействия $A = 10 \text{ Н}$					
Частота задающего воздействия $\omega$ , рад/с	2	6	10	14	17
Установившаяся ошибка $\delta$ , %	–	4	10	16	<i>Расходящийся процесс</i>

Еще одним важным фактором является величина момента инерции нагрузки, изменение которой оказывает существенное влияние на динамику привода. При значительном росте момента инерции нагрузки  $J_H = 10J_{\text{ном}}$  привод теряет устойчивость при любых значениях входного сигнала при обработке как скачкообразного сигнала, так и гармонического. САУ с такими динамическими свойствами не отвечают требованиям, предъявляемым к современным системам управления.

Для построения эффективной системы управления целесообразно использование САУ с параллельной эталонной моделью.

Проводилось исследование систем управления, имеющих разную структуру параллельной модели: с параллельной моделью, имеющей структуру, аналогичную исходной САУ с главной обратной связью по регулируемой координате, и с параллельной моделью, формирующей заданный переходный процесс. Моделирование показало, что в первом случае введение параллельной модели позволяет стабилизировать динамические характеристики (устранить перерегулирование, сократить время переходного процесса, уменьшить ошибку) только в ограниченном диапазоне внешних воздействий. Дальнейшее увеличение задающего воздействия приводит к возрастанию перерегулирования. Модель в этом случае может стать источником дополнительного возмущения и часто приводит к ухудшению динамических характеристик и устойчивости САУ.

В качестве параллельной модели целесообразно использовать такую систему, которая имеет требуемый «эталонный» переходный процесс. При этом структура модели значения не имеет, так как в параллельную модель встраивается не система с определенной схемой и параметрами, а независимая структура, формирующая заданный динамический процесс [29].

Проведено моделирование работы САУ при скачкообразных и гармонических входных воздействиях, которое показало, что система сохраняет заданные динамические характеристики в достаточно широком диапазоне изменения внешних воздействий.

Включение в цепь формирования «дополнительного» управления – элемента с переменным коэффициентом передачи, величина которого зависит от величины задающего воздействия, – позволяет обеспечить инвариантность САУ к внешним воздействиям и минимизировать влияние нелинейностей:

$$\Delta g = K(g)(\varphi_2 * -\varphi_1),$$

где  $\Delta g = \varphi_2 * -\varphi_1$  – «дополнительное управление», разность между выходной координатой модели ( $\varphi_2 *$ ) и привода ( $\varphi_1$ ).

На рис. 6.5 приведена зависимость дополнительного коэффициента усиления  $K(g)$  от величины задающего воздействия. Результаты получены моделированием различных режимов САУ в среде MATLAB.

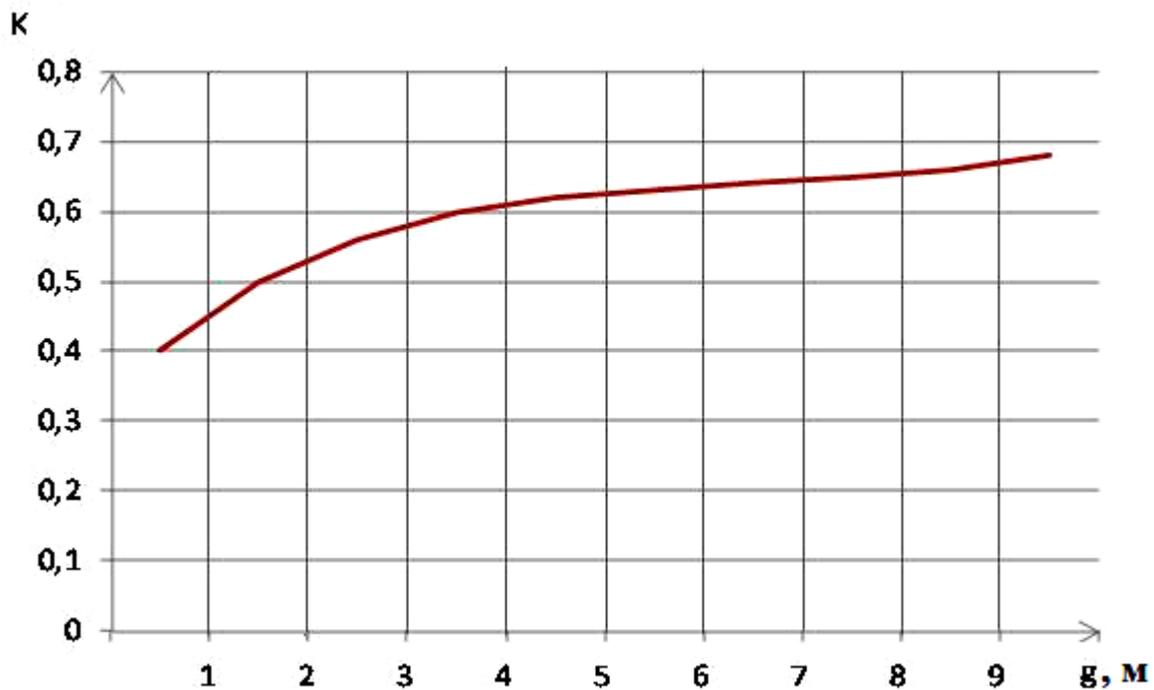


Рис. 6.5. График зависимости дополнительного коэффициента усиления  $K$  от величины задающего воздействия  $g$

Существенное влияние на качество работы системы управления оказывает нелинейность объекта, не охваченного главной обратной связью. Результаты моделирования показали, что зона нечувствительности объекта управления в системе управления без параллельной модели приводит к увеличению динамической ошибки до 20 % от установившегося значения выходной величины. Введение параллельной модели позволяет существенно снизить установившуюся ошибку, но полностью влияние нелинейности не устраняет.

Для обеспечения стабильности динамических характеристик переходного процесса в САУ с нелинейным объектом управления целесообразно использовать элемент с переменным коэффициентом передачи как в канале дополнительного управления, так и в параллельной модели. Закон функционирования такого нелинейного корректирующего звена зависит от величины управляющего воздействия. Графики зависимости коэффициентов передачи канала управления 1 и модели 2, обеспечивающие стабильные показатели работы САУ, от величины входного сигнала приведены на рис. 6.6.

Анализ динамики САУ в режиме реализации гармонических входных воздействий показал целесообразность использования звена с переменным коэффициентом передачи в модели при изменяющейся амплитуде задающего воздействия. На рис. 6.7 показаны графики зависимости коэффициентов передачи канала управления 1 и параллельной модели 2 от амплитуды гармонического входного сигнала.

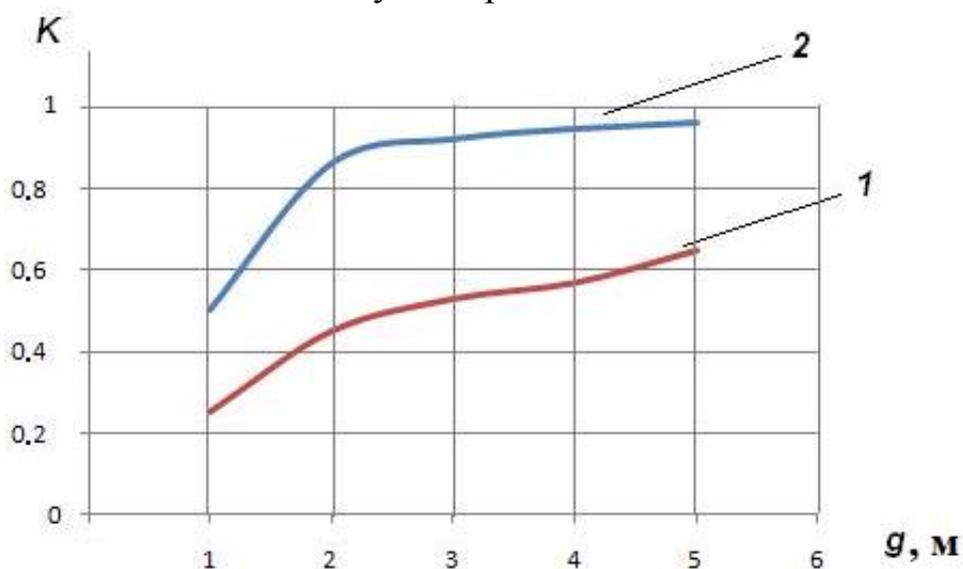


Рис. 6.6. Графики зависимости коэффициентов передачи канала управления (1) и параллельной модели (2) от величины входного сигнала

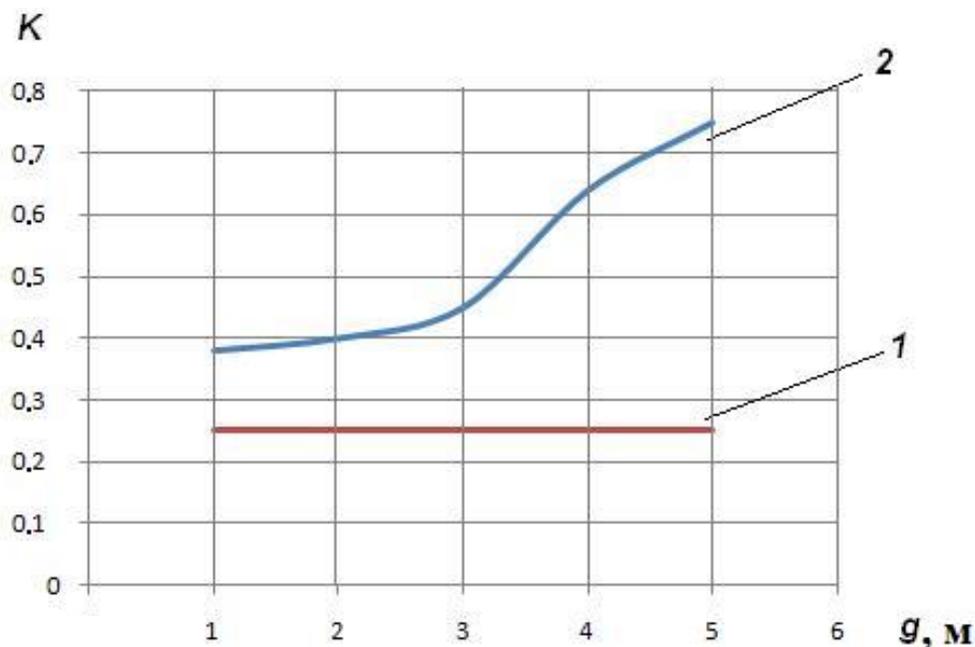


Рис. 6.7. График коэффициентов передачи канала управления (1) и параллельной модели (2) от амплитуды гармонического входного сигнала

Анализ полученных результатов моделирования показал целесообразность введения параллельных моделей для повышения динамических показателей систем автоматического управления объектами и технологическими процессами с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой.

## 6.2. Исследование САУ с параллельной моделью и прогнозированием внешних воздействий

Использование элемента с переменным коэффициентом передачи в канале «дополнительного» управления значительно усложняет структуру САУ. Алгоритм подбора величины коэффициента передачи трудно реализуем в силу зависимости данного коэффициента от многих факторов, в частности от момента инерции нагрузки. Введение в канал сигнала задания САУ с параллельной моделью элемента прогнозирования внешних воздействий позволяет существенно улучшить динамические характеристики системы и упростить алгоритм управления нелинейного звена с переменным коэффициентом передачи.

На рис. 6.8 представлена модель САУ с параллельной прогнозирующей моделью, реализованная в среде MATLAB. В основу алгоритма работы прогнозирующего элемента положен интерполяционный полином Ньютона.

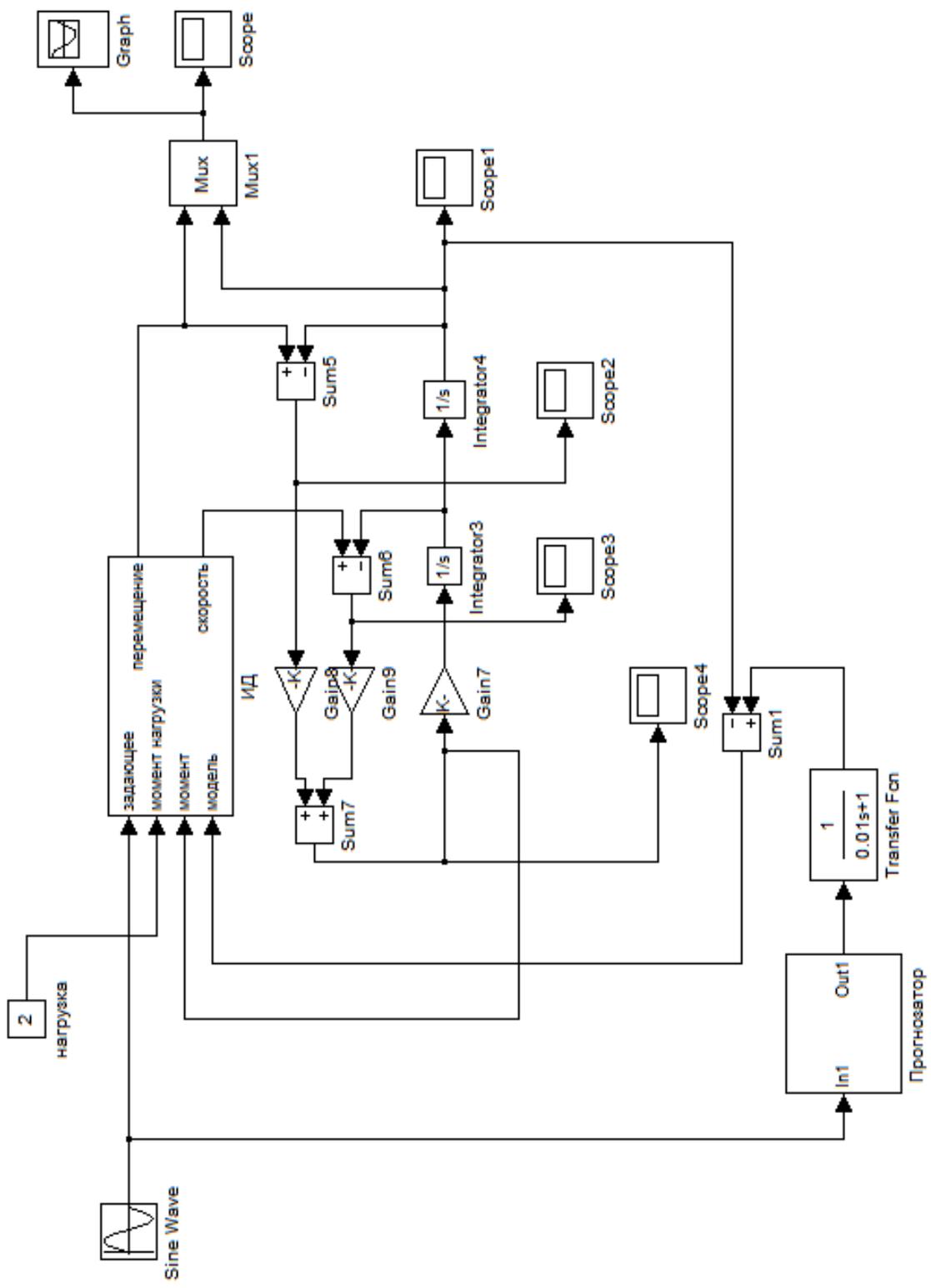


Рис. 6.8. Модель САУ с параллельной прогнозирующей моделью

Исследовалась работа САУ в режиме движения по гармоническому закону. На рис. 6.9 приведен график выходной координаты объекта управления: 1 – гармонический входной сигнал при амплитуде  $A = 5$  Н и частоте  $\omega = 3$  рад/с, 2 – полученный сигнал на выходе системы, максимальная погрешность не превышает 0,01.

Величина прогноза зависит только от частоты входного сигнала (рис. 6.10).

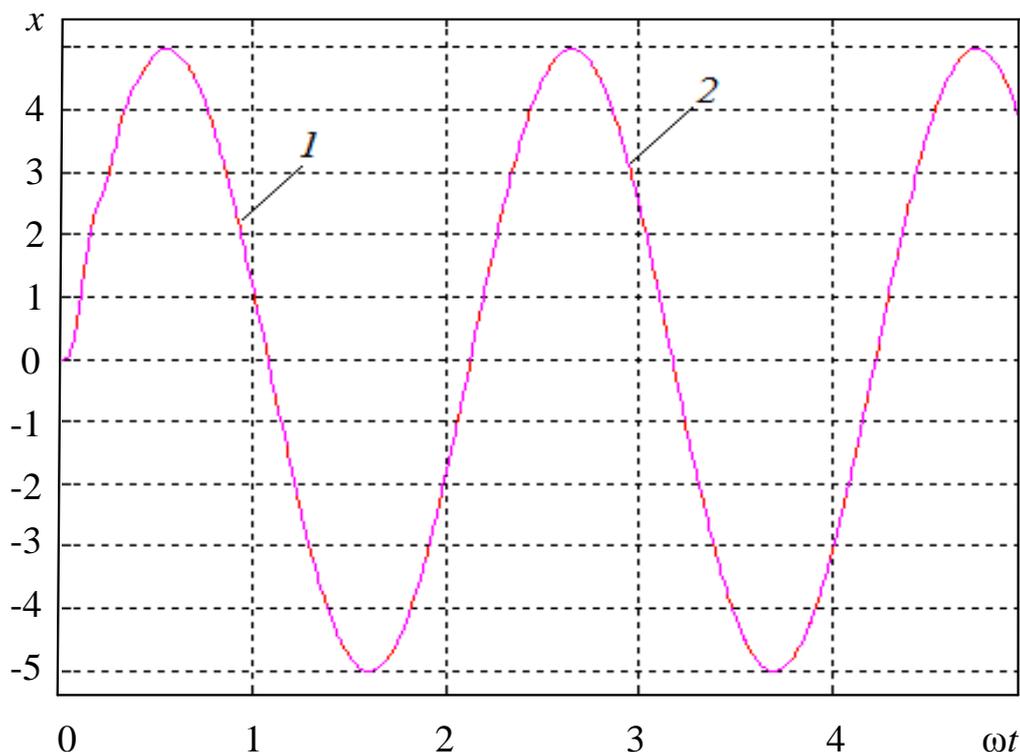


Рис. 6.9. График изменения выходной координаты САУ с параллельной моделью и прогнозатором

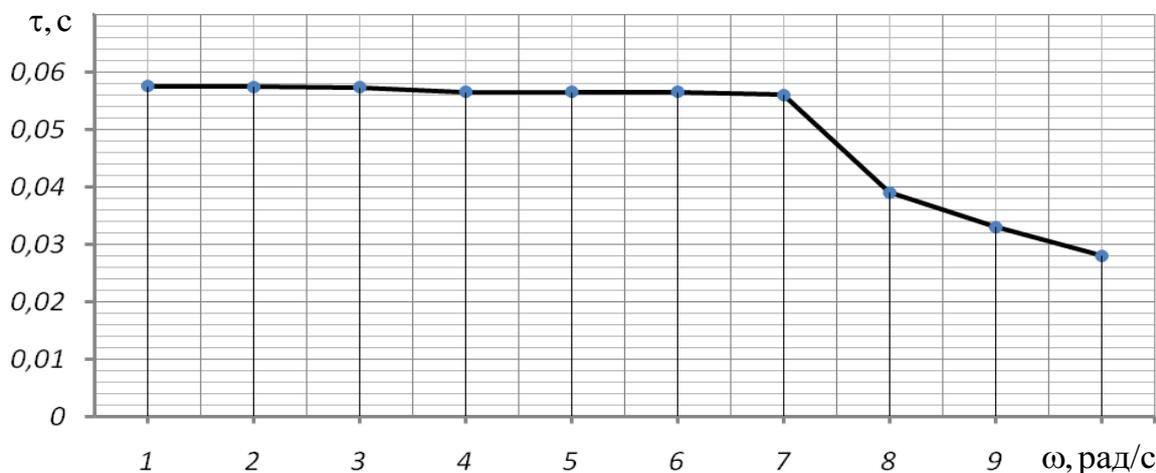


Рис. 6.10. График зависимости величины прогноза от частоты задающего сигнала

Исследования показали, что введение дополнительной составляющей прогнозирующего управления в САУ с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой позволяет существенно улучшить характеристики без изменения параметров основного контура. Расширяется частотный диапазон внешних воздействий с парированием реакции свободного звена.

### **6.3. Исследование алгоритмов формирования дополнительного управления**

В ряде мехатронных и робототехнических систем цель управления состоит в обеспечении технологического процесса, выполняемого по некоторой заранее заданной или неопределенной траектории с обеспечением требуемого вектора усилия при внешних флуктуирующих возмущениях. При этом следует парировать внешние межкоординатные возмущения, обусловленные динамическими нагрузками со стороны объекта или выполняемого технологического процесса, или возникающие при отклонении координат расположения рабочей поверхности в процессах сварки и гидрорезания. Эта проблема особенно актуальна в технологическом оборудовании с большим моментом инерции и высокой динамикой. Она также имеет место в случаях, когда действительная траектория отличается от программной и требуется переход на фактическую, например управление мобильными роботами, роботами для гидрорезания нефтепроводов. Характерными процессами управления для таких систем являются операции сопряжения двух деталей, выполняемых роботами по сопрягающей траектории с заданным усилием, и др.

Широкое распространение для систем автоматического управления (САУ) отмеченного типа получило управление, основанное на положениях теории инвариантности, рассмотренное в гл. 4.

Реализация модифицированной четвертой формы инвариантности возможна с использованием методов самонастройки, представленных в подп. 4.2 – 4.5 гл. 4. Рассмотрим алгоритмы адаптации, описываемые выражениями (4.29), см. п. 4.4. Данный способ адаптации предусматривает формирование дополнительной составляющей в уже сформированное управляющее воздействие, при этом возможны две структуры построения САУ (рис. 6.11). На схемах обозначены:  $W_1(p)$  –

передаточная функция привода с кинематической передачей и объектом управления;  $V(p)$  – передаточная функция привода по возмущению;  $K(p)$  – передаточная функция звена адаптации управляющего сигнала;  $g_0, f$  – управляющее и возмущающее воздействия привода соответственно;  $X, X_0$  – непосредственно регулируемая координата и приведенная координата смежного привода соответственно;  $\delta$  – суммарная ошибка системы;  $\Delta f$  – отклонение фактического усилия от расчетного;  $\delta_{f0}$  – составляющая ошибки системы, обусловленная возмущающим воздействием;  $\delta_{\Delta f}$  – моментная составляющая ошибки;  $\Delta g$  – дополнительная составляющая управляющего воздействия.

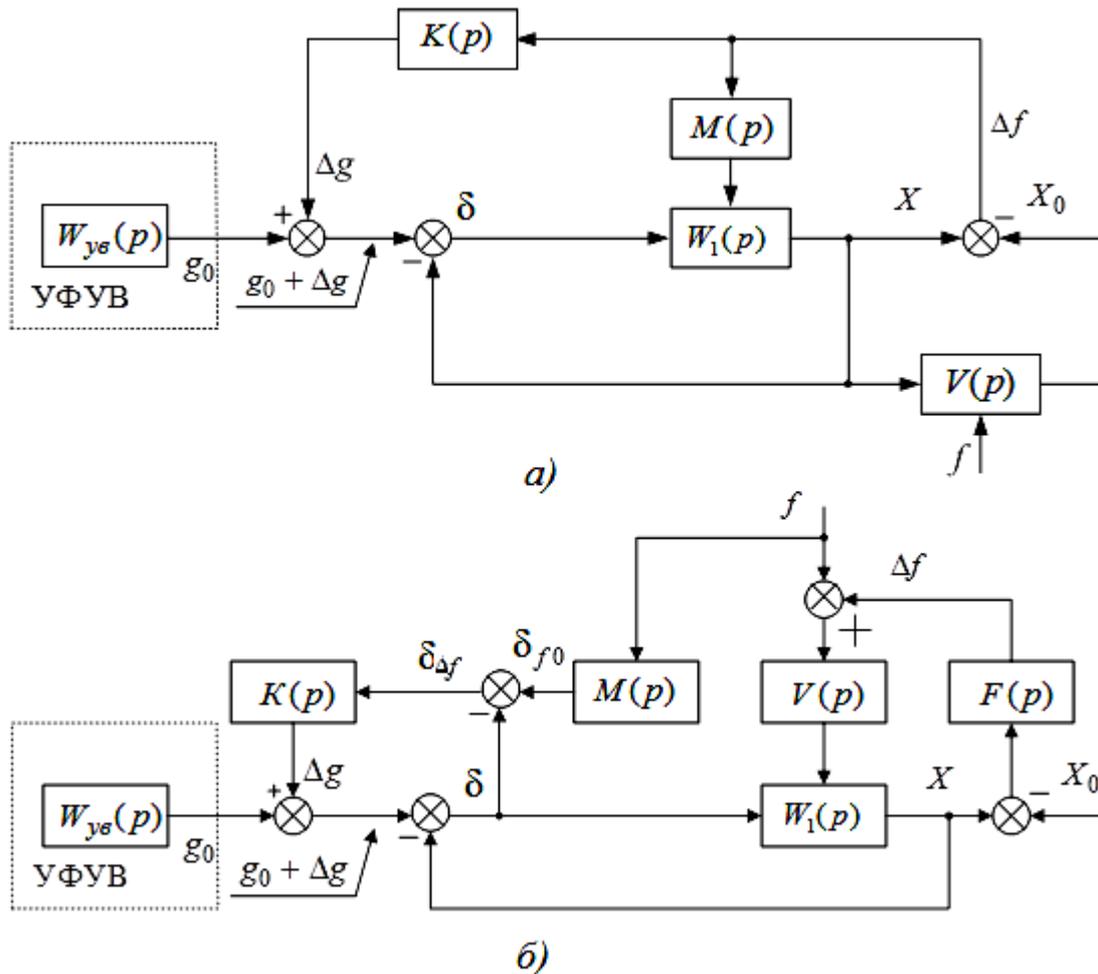


Рис. 6.11. Структурные схемы САУ с формированием дополнительного управления

Согласно структурной схеме, представленной на рис. 6.11, а, дополнительная составляющая управления формируется на основе разности координат приводов, определяющей их геометрически-силовое взаимодействие или обусловленной несовпадением про-

граммной и фактической траекторий. На рис. 6.11, *а* блок с передаточной функцией  $V(p)$  представляет симулятор другой координаты, участвующей в формировании технологической программной траектории. Для синхронизации их взаимодействия введена связь с выхода первого привода. Вторым способом, иллюстрируемый структурной схемой на рис. 6.11, *б*, предусматривает формирование дополнительной составляющей как функции моментной ошибки от нерасчетного возмущения или от разности программной и фактической траекторий. В контур адаптации вводятся интегрирующие звенья со степенью интегрирования, пропорциональной степени производной управляющего воздействия.

Моделирование структур (см. рис. 6.11) с каналом адаптации сигнала задания по положению, скорости и ускорению было реализовано в среде пакета программы MatLab – Simulink. В частности, проводился анализ точности системы управления в режиме движения с постоянной скоростью и при обработке гармонического входного сигнала.

При моделировании алгоритмом адаптации с сигналами задания по скорости и ускорению входного воздействия для коррекции управляющего воздействия и парирования межкоординатных возмущений применяется переменная структура системы управления. Разность регулируемой и последующей координаты, обусловленная несовпадением скоростей (ускорений) задания, фиксируется в памяти (рис. 6.12). Управление структурой САУ реализуется посредством селекторов  $C1$  и  $C2$ , переключение которых осуществляется одновременно. Селектор  $C1$  осуществляет проверку равенства скоростей координатных приводов. Блок  $\Delta f$  хранит значение величины  $\Delta f$ , запись которой в память происходит при поступлении на вход управления активного логического сигнала. В случае совпадения скоростей приводов формирование дополнительной составляющей управления реализуется на основе последнего значения  $\Delta f$ , считываемого из памяти.

В роли объекта исследования выступает привод перемещения с главной обратной связью по положению исполнительного механизма. Привод включает в себя два внутренних контура: по напряжению и частоте вращения двигателя и ПИД регулятор. Модель привода приведена на рис. 6.3.

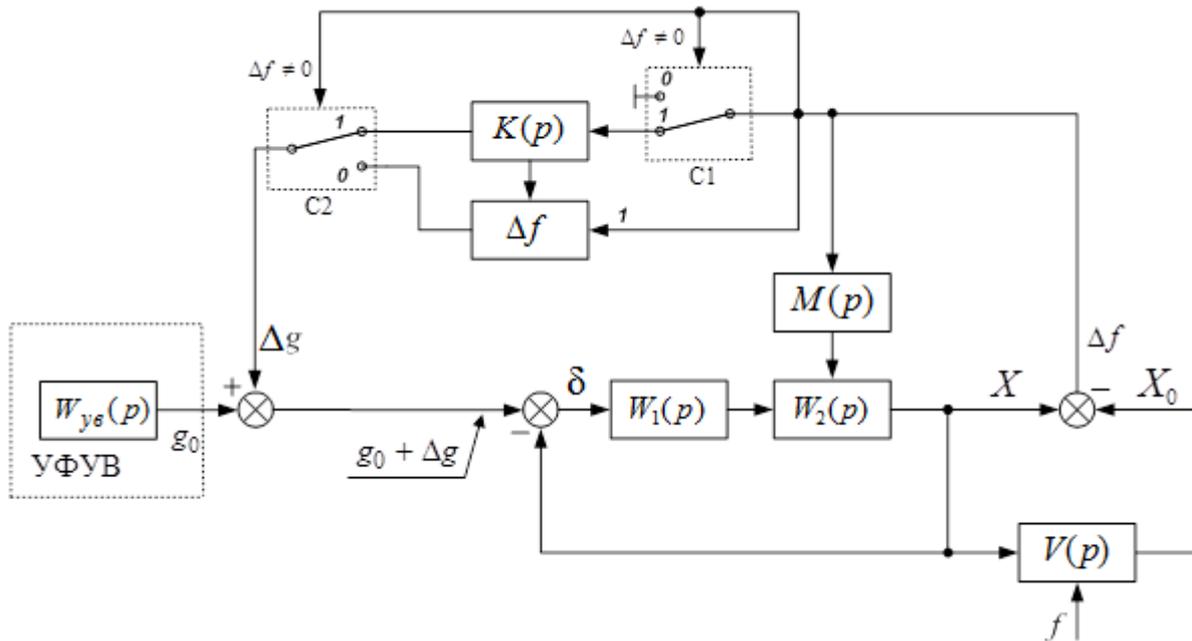


Рис. 6.12. САУ с переменной структурой

Главное возмущающее воздействие обусловлено геометрически-силовым взаимодействием координатных приводов и отклонением фактической траектории исполнительного органа от заданной. В качестве привода смежной координаты выступает симулятор межкоординатных возмущений. В зависимости от вида сигнала задания его выходная координата описывается уравнениями

Случай 1. Канал адаптации по положению:

$$X_0 = \begin{cases} (X \pm (0,01 - 0,1) X) \quad \forall x(t) = X, \\ (X \pm (0,01 - 0,1) X) \sin \omega t \quad \forall x(t) = X \cdot \sin \omega t. \end{cases}$$

Случай 2. Канал адаптации по скорости:

$$X_0 = (V \pm (0,01 - 0,15) V) t \quad \forall x(t) = V \cdot t.$$

Случай 3. Канал адаптации по ускорению:

$$X_0 = (\varepsilon \pm (0,01 - 0,15) \varepsilon)^2 t/2 \quad \forall x(t) = \varepsilon^2 \cdot t/2,$$

где  $X$  – регулируемая координата исследуемого привода;  $V$  – скорость входного сигнала исследуемого привода;  $\varepsilon$  – ускорение исследуемого привода.

Исследования проводились в режиме изменения момента нагрузки  $M_H(t)$ , обусловленного влиянием «другой» координаты, в интервале от 1 до 5 Н · м (при номинальном моменте привода 2 Н · м). В ходе моделирования плавно изменялись скорость задания управляю-

шего воздействия в диапазоне 10 – 80 мм/с для каналов адаптации по положению и скорости, а также ускорение входного сигнала в пределах от 1 до 20 мм/с<sup>2</sup> для канала адаптации по ускорению. Соотношение координат приводов (в части отклонения фактической и расчетной траекторий) варьировалось от 1 до 10 %. Исследуемый привод в режиме движения с постоянной скоростью имеет ошибку положения, обусловленную влиянием симулятора смежной координаты и изменяющуюся в пределах от 5 до 10 %. Результаты моделирования САУ в режиме отработки гармонического входного сигнала показали, что вследствие внешних межкоординатных возмущений на выходе системы управления наблюдается установившаяся динамическая ошибка (10 % амплитуды задающего сигнала). Данные показатели не отвечают требованиям, предъявляемым к системам управления отмеченного типа. Введение контура адаптации позволяет свести к минимуму влияние внешних возмущений при выполнении технологического процесса. На рис. 6.13 представлены графики изменения выходной координаты привода с контуром адаптации и без него, в режиме движения с постоянной скоростью и при отработке САУ гармонического входного сигнала.

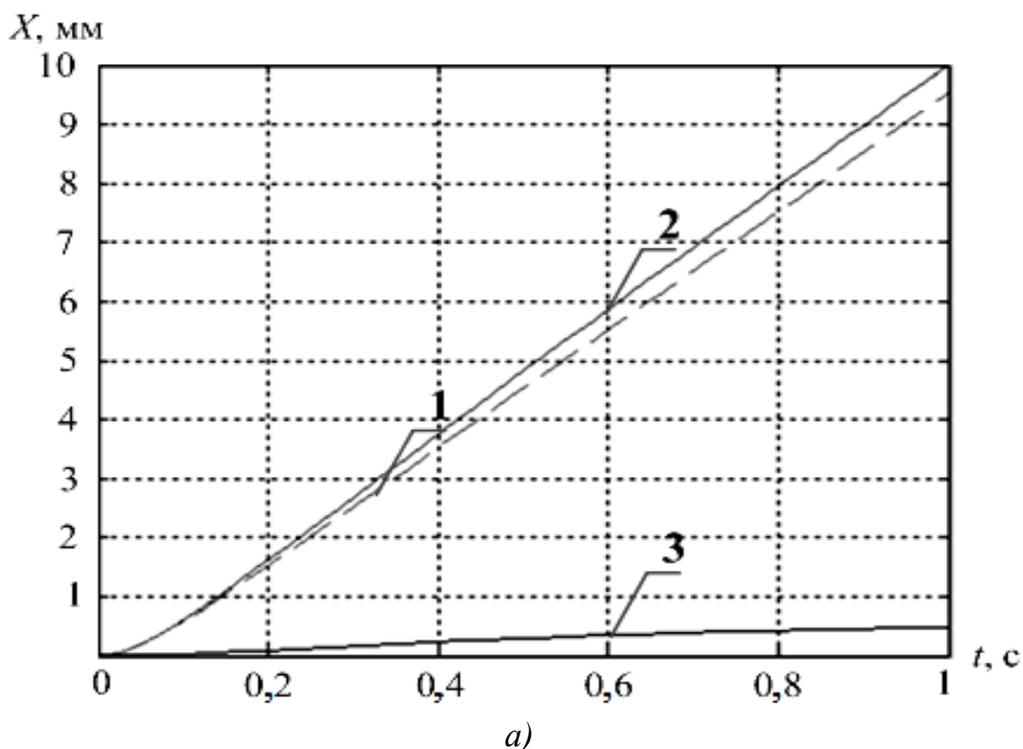


Рис. 6.13. Исследование показателей точности системы управления:  
 а – графики изменения выходной координаты САУ в режиме движения с постоянной скоростью для каналов адаптации по скорости и положению ( $V = 10$  мм/с,  $\Delta x = 5$  %,  $M_n = 5$  Н · м) (см. также с. 147)

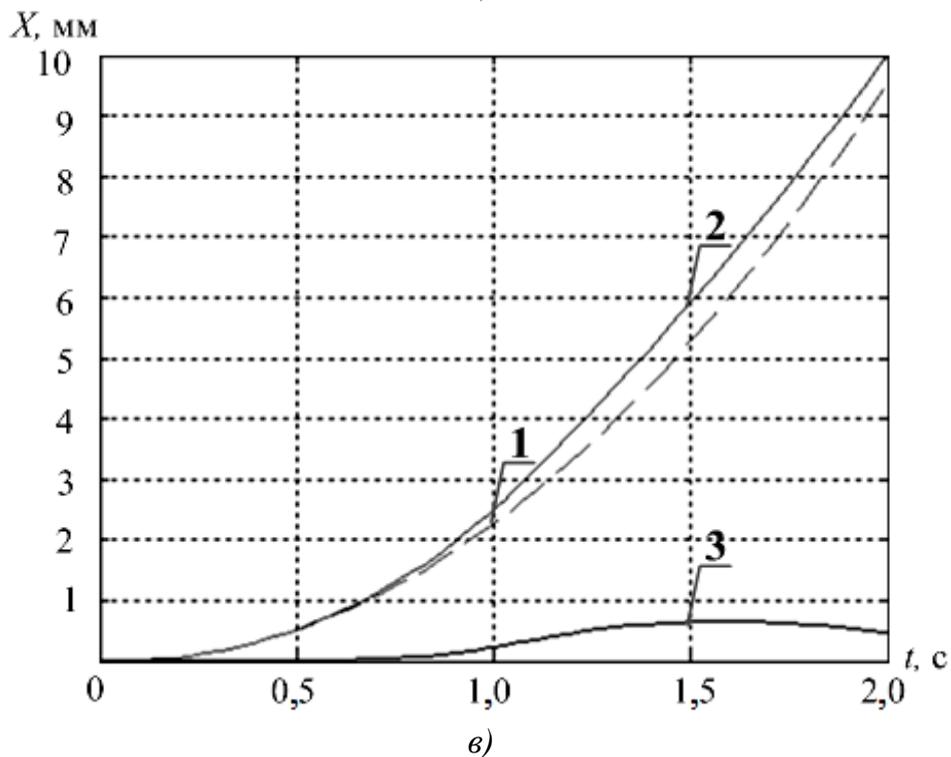
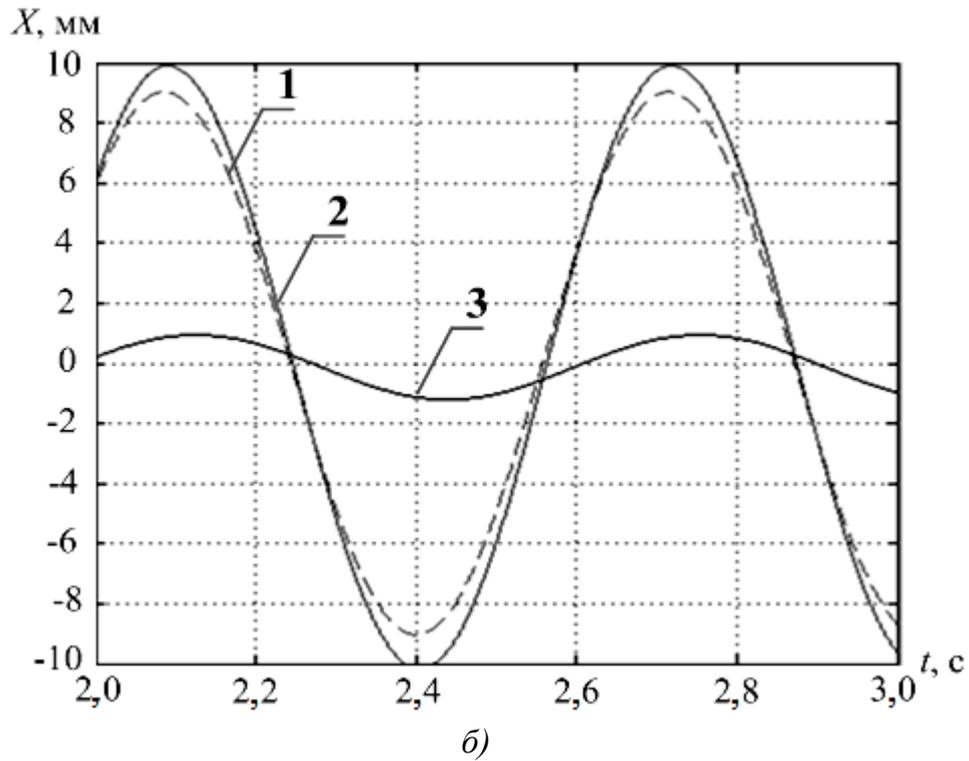


Рис. 6.13. Исследование показателей точности системы управления: б – графики изменения выходной координаты САУ при обработке гармонического входного сигнала для канала адаптации по положению ( $A = 10$ ,  $\omega = 10$  рад/с,  $M_H = 5$  Н · м); в – графики изменения выходной координаты САУ для канала адаптации сигнала задания по ускорению ( $\varepsilon = 5$  мм/с<sup>2</sup>,  $\varepsilon/\varepsilon_0 = 10$  %,  $M_H = 5$  Н · м)

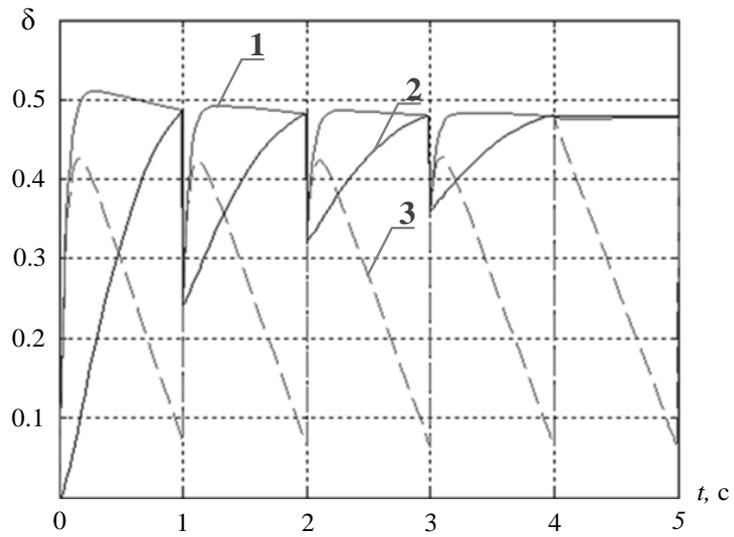
На рис. 6.13 цифрами обозначены: 1 – график изменения выходной координаты САУ без контура адаптации; 2 – график изменения выходной координаты САУ с контуром адаптации; 3 – отклонение положения инструмента  $\Delta x$  от заданной траектории.

Рис. 6.14 демонстрирует графики изменения показателей САУ в течение времени процесса компенсации: графики изменения составляющих ошибок САУ в режиме движения с постоянной скоростью, для канала адаптации по положению ( $t_{\text{пк}} = 5$  с,  $V = 10$  мм/с,  $\Delta x = 5$  %,  $M_{\text{н}} = 5$  Н · м) (рис. 6.14, а); графики изменения составляющих ошибок САУ для канала адаптации по скорости ( $t_{\text{пк}} = 5$  с,  $V = 10$  мм/с,  $V/V_0 = 1 - 15$  %,  $M_{\text{н}} = 5$  Н · м) (рис. 6.14, б); графики изменения составляющих ошибок САУ для канала адаптации сигнала задания по ускорению ( $t_{\text{пк}} = 5$  с,  $\varepsilon = 5$  мм/с<sup>2</sup>,  $\varepsilon/\varepsilon_0 = 10$  %,  $M_{\text{н}} = 5$  Н · м) (рис. 6.14, в).

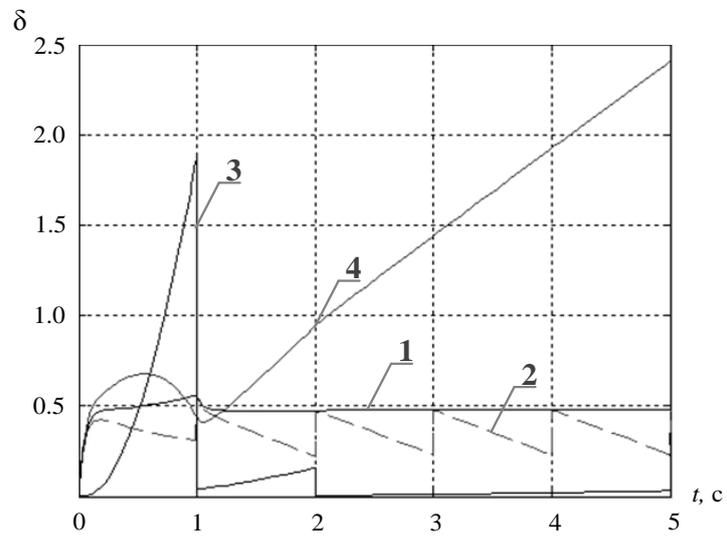
На рис. 6.14 обозначены: 1 – график изменения ошибки системы управления  $\delta$ ; 2 – график моментной составляющей ошибки  $\delta_{\Delta f}$ ; 3 – график изменения дополнительной составляющей управления  $\Delta g$ ; 4 – график отклонения фактического усилия от расчетного  $\Delta f$ .

В ходе моделирования получены зависимости коэффициента передачи звена  $K(p)$  в канале адаптации от скорости (частоты) задающего воздействия для контура адаптации по скорости и положению, а также от ускорения сигнала задания для контура адаптации по ускорению. Коэффициент передачи звена в цепи формирования дополнительного управления при отработке САУ гармонического входного сигнала определяется, главным образом, частотой задающего сигнала (рис. 6.15).

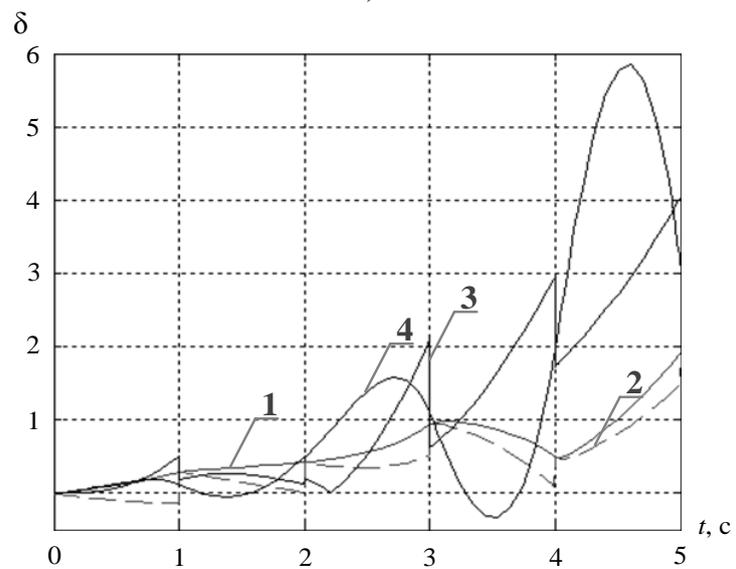
Графики зависимости коэффициента передачи от времени процесса компенсации и соотношения координат приводов  $\Delta x$  при отработке скачкообразного входного сигнала для канала адаптации по положению представлены на рис. 6.16.



a)



б)



в)

Рис. 6.14. Графики изменения показателей САУ

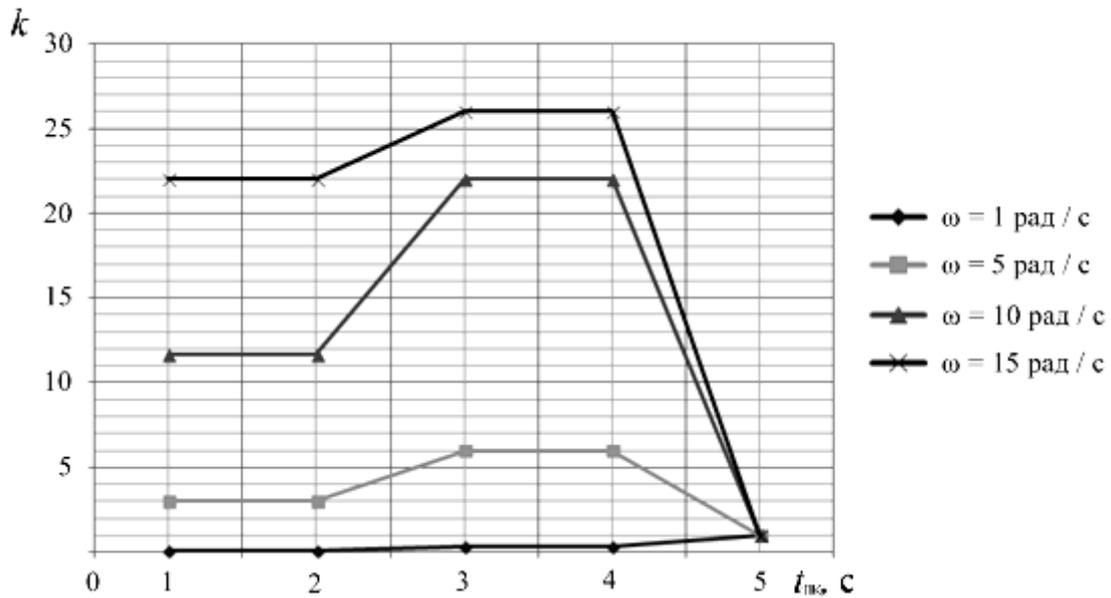


Рис. 6.15. График зависимости коэффициента передачи от времени процесса компенсации и частоты задающего сигнала

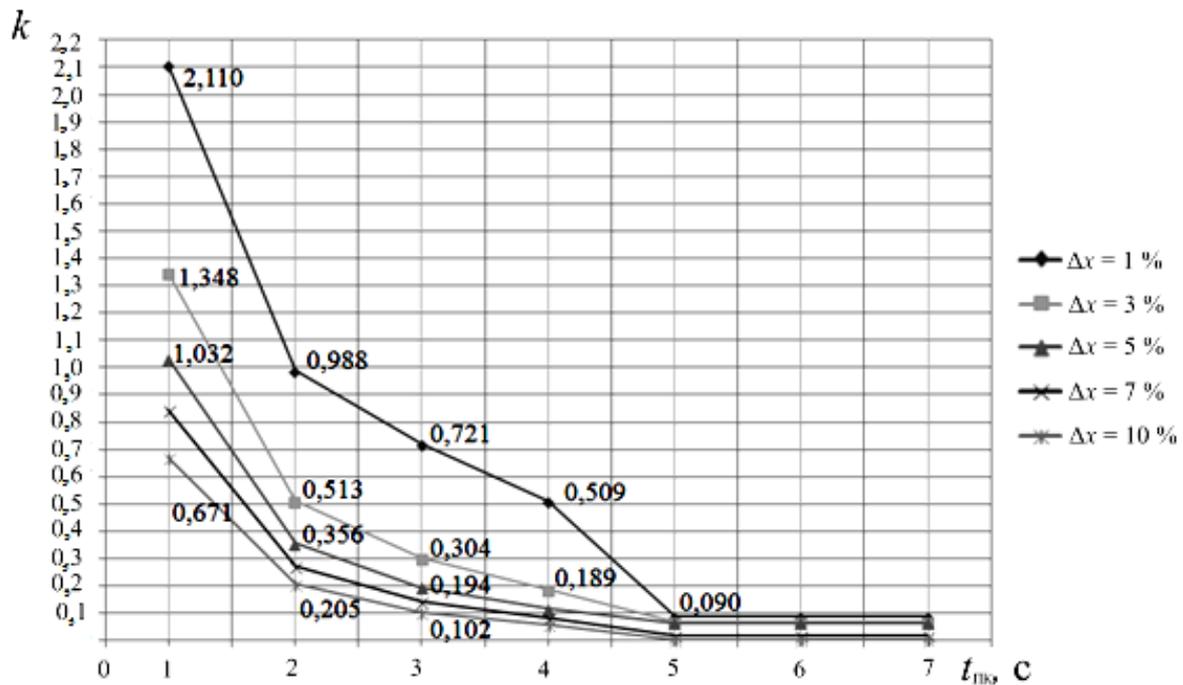


Рис. 6.16. График зависимости коэффициента передачи от времени процесса компенсации и значения ошибки положения инструмента

График зависимости коэффициента передачи от времени процесса компенсации для канала адаптации по скорости представлен на рис. 6.17 (скорость задания управляющего сигнала плавно изменялась в пределах от 10 до 80 мм/с).

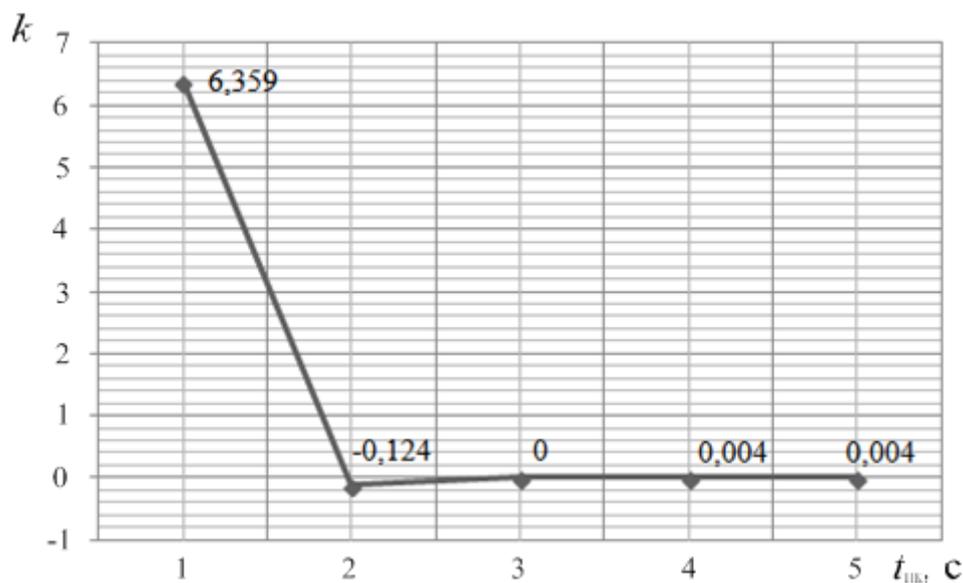


Рис. 6.17. Характеристика блока адаптации

График зависимости коэффициента передачи от времени процесса компенсации и соотношения скоростей для канала адаптации по скорости задающего сигнала приведен на рис. 6.18 (скорость задания управляющего сигнала  $V = 40$  мм/с). Отрицательное значение коэффициента передачи обусловлено необходимостью уменьшения величины дополнительной составляющей управления  $\Delta g$  на определенном этапе процесса компенсации.

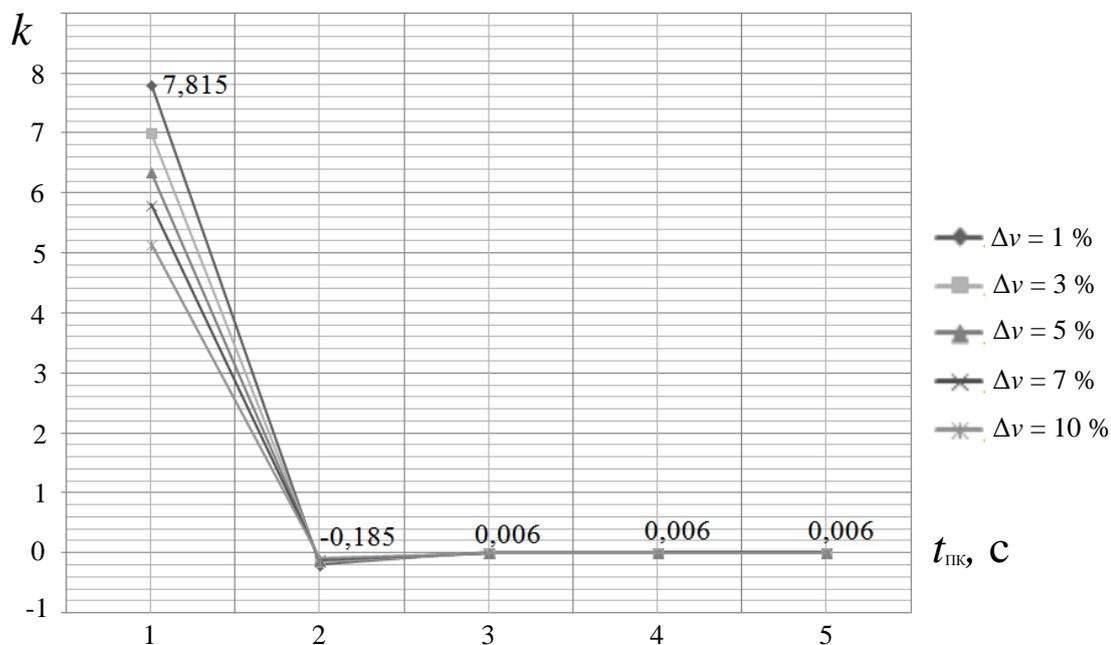


Рис. 6.18. График зависимости коэффициента передачи от времени процесса компенсации и соотношения скоростей

Результаты исследования показали, что использование контура адаптации позволяет свести к минимуму влияние внешних межкоординатных возмущений, а следовательно, повысить точность САУ.

Моделирование САУ с каналом адаптации по положению проводилось при плавном изменении скорости задания управляющего сигнала от 10 до 80 мм/с, соотношение координат исследуемого привода и симулятора второй координаты изменялось в пределах от 1 до 15 %, момент нагрузки принимался равным номинальному моменту  $M_n = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Звено адаптации имеет передаточную функцию  $K(p) = \alpha_0^* / p$ . Коэффициент передачи в канале формирования дополнительного управления определяется соотношением координат приводов и временем процесса компенсации. При отработке системой управления гармонического входного сигнала изменялась частота задающего сигнала в пределах от 1 до 15 рад/с. Результаты моделирования показали, что в данном режиме работы коэффициент передачи зависит только от частоты входного сигнала.

Моделирование САУ с каналом адаптации по скорости проводилось при плавном изменении скорости задания управляющего сигнала от 10 до 80 мм/с<sup>2</sup>, соотношение скоростей исследуемого привода и симулятора второй координаты изменялось в пределах от 1 до 15 %, момент нагрузки принимался равным номинальному моменту  $M_n = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Звено адаптации имеет передаточную функцию  $K(p) = \alpha_1^* / p^2$ . Коэффициент передачи в канале формирования дополнительного управления определяется соотношением скоростей координатных приводов и временем процесса компенсации.

Моделирование САУ с каналом адаптации по ускорению проводилось при плавном изменении ускорения задания управляющего сигнала от 1 до 10 мм/с<sup>2</sup>, соотношение ускорений исследуемого привода и симулятора второй координаты изменялось в пределах от 1 до 10 %, момент нагрузки принимался равным номинальному моменту  $M_n = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Звено адаптации имеет передаточную функцию  $K(p) = \alpha_2^* / p^3$ . Коэффициент передачи в канале формирования дополнительного управления определяется ускорением задающего сигнала, а также зависит от соотношения ускорений координатных приводов и времени процесса компенсации.

## Заключение

Выделен класс систем автоматического управления (САУ) с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой и предложена концепция выделения класса САУ с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой. На основе анализа характерных групп и классификации рассматриваемых САУ разработаны две модели САУ с прогнозирующей моделью.

Выполнен анализ применения методов приближения функций многочленами для прогнозирования управляющих и возмущающих воздействий в САУ с не полностью наблюдаемой координатой. Исходя из требований точности (абсолютная погрешность не более 5 %) проведено математическое моделирование различных алгоритмов работы прогнозатора. Показано, что наиболее эффективными являются:

- 1) экстраполяция с использованием многочлена Ньютона;
- 2) экстраполяция сплайнами;
- 3) аппроксимация методом наименьших квадратов.

Предложены два способа формирования дополнительной составляющей в управлении. Первый основан на формировании автономного дополнительного управления на основе одно-, двухкратного и трехкратного интегрирования ошибок между исходной системой и прогнозирующей моделью. Второй способ предусматривает коррекцию координаты и соответствующих производных в управляющем воздействии на стадии их формирования в устройстве управления.

Отметим теоретические и прикладные результаты, полученные в ходе исследований:

1. Разработаны две модели САУ с различной структурой параллельной прогнозирующей модели.

2. Предложена методика построения САУ со свободным звеном в режимах позиционирования.

3. Анализ результатов показывает, что введение параллельной модели позволяет обеспечить в монотонный переходный процесс выходной координаты САУ в различных режимах работы, а также подтверждает целесообразность использования элемента с переменным коэффициентом передачи для формирования «дополнительного» управления.

4. В качестве модели целесообразно использовать такую систему, которая имеет требуемый «эталонный» переходный процесс. При этом структура САУ в модели особого значения не имеет, так как в параллельную модель встраивается не система с определенной схемой и параметрами, а независимая структура, формирующая заданный динамический процесс.

Структуры САУ с ПМ и прогнозаторов, прогнозирующие функции и полиномы и их структурно-алгоритмическая реализация и ПО, модели этих систем для исследования могут быть реализованы как в существующих системах при их модернизации, так и во вновь проектируемых САУ объектами с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой.

САУ с ПМ применяют:

- в САУ систем слежения за подвижными объектами;
- объектах, расположенных на подвижном основании;
- технологических процессах, в которых главная обратная связь формируется с промежуточного звена;
- станках с ЧПУ, роботах.

Ожидаемое повышение точности – исключение ошибок, обусловленных динамикой звена, не охваченного главной обратной связью (по результатам исследования не менее 30 %). Улучшаются показатели качества переходных процессов (количественно следует рассматривать для конкретных систем).

Предложенные и исследованные структуры систем автоматического управления с прогнозирующей моделью для систем, не охваченных главной обратной связью, представляют новый этап развития адаптивных САУ. Аналогии подобных систем, работающих в сложных динамических режимах, дают основание говорить о новизне и перспективности настоящего направления при разработке новых систем и модернизации существующих.

## Список использованных источников

1. Автоматы-настройщики следящих систем / Б. В. Новоселов [и др.] ; под ред. Б. В. Новоселова. – М. : Энергия, 1975. – 264 с.
2. Александров, А. Г. Оптимальные и адаптивные системы управления / А. Г. Александров. – М. : Высш. шк., 1989. – 263 с. – ISBN 5-06-000037-0.
3. Амосов, А. А. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. – М. : Высш. шк., 1994. – 554 с. – ISBN 5-06-000625-5.
4. Андрейчиков, Б. И. Динамическая точность систем программного управления станками / Б. И. Андрейчиков. – М. : Машиностроение, 1964. – 368 с.
5. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учеб. пособие для физ.-мат. специальностей вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 7-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с. – ISBN 978-5-9963-0449-3.
6. Благодатских, В. И. Введение в оптимальное управление : линейная теория : учеб. для вузов / В. И. Благодатских. – М. : Высш. шк., 2001. – 239 с. – ISBN 5-06-003983-8.
7. Вержбицкий, В. М. Численные методы: Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие для мат. специальностей вузов / В. М. Вержбицкий. – М. : Высш. шк., 2001. – 384 с. – ISBN 5-06-003982-X.
8. Генералов, Л. К. Модельное управление точностью обработки резанием / Л. К. Генералов, А. А. Кобзев // Вестн. машиностроения. – 2009. – № 12. – С. 65 – 68.
9. Они же. Модель процесса токарной обработки в системе автоматического управления / Л. К. Генералов, А. А. Кобзев // СТИН (Станки и инструмент). – 2008. – № 11. – С. 26 – 29.
10. Гудвин, Г. К. Проектирование систем управления / Г. К. Гудвин, С. Ф. Гребе, М. Э. Сальгадо. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 911 с. – ISBN 5-94774-128-8.
11. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1966. – 664 с.

12. Дьяконов, В. П. Математические пакеты расширения MATLAB : спец. справ. / В. П. Дьяконов, В. В. Круглов. – СПб. : ПИТЕР, 2001. – 488 с. – ISBN 5-318-00004-5.
13. Егоров, И. Н. Разработка алгоритмов управления и приводов робота, осуществляющего сопряжение деталей изделий машиностроения / И. Н. Егоров, А. А. Кобзев // Роботизация сборочных процессов. – М. : Наука, 1985. – 256 с. – С. 189 – 196.
14. Управление робототехническими системами с силомоментным оцувствлением / И. Н. Егоров [и др.] ; под. ред. И. Н. Егорова. – Владимир : Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2005. – 276 с. – ISBN 5-89368-619-5.
15. Иванов, В. А. Теория оптимальных систем автоматического управления : учеб. пособие для вузов по специальности «Автоматика и телемеханика» / В. А. Иванов, Н. В. Фалдин ; под ред. Е. П. Попова. – М. : Наука, 1981. – 331 с.
16. Игнатъев, М. Б. Об инвариантности голономных автоматических систем / М. Б. Игнатъев // Теория инвариантности в системах автоматического управления. – М. : Наука, 1964. – С. 115 – 125.
17. Кабанов, С. А. Управление системами на прогнозирующих моделях / С. А. Кабанов. – СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1997. – 200 с.
18. Кобзев, А. А. Адаптация управляющего воздействия в приводах сборочных роботов / А. А. Кобзев // Изв. вузов. Электромеханика. – 1991. – № 12. – С. 73 – 79.
19. Он же. Динамическая коррекция программного движения в системах ЧПУ / А. А. Кобзев // Проектирование и технологии электронных средств. – 2002. – № 1. – С. 21 – 24.
20. Он же. Коррекция программного движения в сборочных системах / А.А. Кобзев // Сборка в машино- и приборостроении. – 2007. – № 7. – С. 27 – 31.
21. Он же. Коррекция программного движения в системах управления сборочным роботом / А. А. Кобзев // Изв. вузов. Приборостроение. – 1992. – № 3 – 4. – С. 15 – 20.
22. Повышение качества электропривода введением нелинейного элемента в прямой тракт / А. А. Кобзев [и др.] // Электротехника. – 1994. – № 3. – С. 44 – 48.

23. *Кобзев, А. А.* Особенности реализации четвертой формы инвариантности в системах программного управления / А. А. Кобзев, А. А. Махфуз // Изв. ВолгГТУ (Серия «Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах»). – 2013. – № 22 (125). Вып. 18. – С. 102 – 105.
24. *Он же.* Алгоритм работы прогнозирующего анализатора в системах управления движением / А. А. Кобзев, Ю. Е. Мишулин, Н. А. Новикова // Изв. вузов. Электромеханика. – 2014. – № 2. – С. 68 – 72.
25. *Они же.* Анализ систем автоматического управления с не полностью наблюдаемой регулируемой координатой / А. А. Кобзев, Ю. Е. Мишулин, Н. А. Новикова // Изв. ин-та инженер. физики. – 2010. – № 4. – С. 16 – 21.
26. *Они же.* Система автоматического управления с прогнозирующей моделью / А. А. Кобзев, Ю. Е. Мишулин, Н. А. Новикова // Интеллектуальные системы : тр. Девятого Междунар. симпозиума. – М. : РУСАКИ. – 2010. – С. 538 – 540.
27. *Они же.* Система управления электроприводом с модуляцией управляющего сигнала / А. А. Кобзев, Ю. Е. Мишулин, Н. А. Новикова // Электричество. – 1997. – № 4. – С. 21 – 25.
28. *Кобзев, А. А.* Повышение точности технологического оборудования за счет введения прогнозирующей модели / А. А. Кобзев, Е. В. Носков // Проектирование и технологии электронных средств. – 2008. – № 1. – С. 62 – 69.
29. *Они же.* Система автоматического управления с параллельной прогнозирующей моделью / А. А. Кобзев, Е. В. Носков // Вест. ИГЭУ. – 2008. – Вып. 4. – С. 65 – 67.
30. *Краснощеченко, В. И.* Синтез управления в задаче быстрогодействия методом модельного прогнозируемого управления / В. И. Краснощеченко // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 10. – С. 2 – 8.
31. *Красовский, А. А.* Оптимальное время прогнозирования в системах автоматического управления / А. А. Красовский // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1987. – № 4. – С. 136 – 144.
32. *Он же.* Прогнозирование и оптимальное автоматическое управление / А. А. Красовский // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 4. – С. 115 – 122.

33. Модельное управление точностью обработки на металлорежущих станках : монография / В. П. Легаев, А. А. Кобзев, Л. К. Генералов. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 166 с. – ISBN 987-5-9984-0058-2.

34. Новоселов, Б. В. Проектирование квазиоптимальных следящих систем комбинированного регулирования / Б. В. Новоселов. – М. : Энергия, 1972. – 200 с.

35. Новоселов, Б. В. Системы следящих приводов с самонастройкой внутренних параметров и коррекцией управляющего воздействия / Б. В. Новоселов, А. А. Кобзев // Вопросы оборонной техники. – 1998. – Сер. 9. – Вып. 2 (222). – С. 8 – 11.

36. Система автоматического управления объектов вооружения с прогнозируемой моделью / Б. В. Новоселов [и др.] // Оборонная техника. – 2006. – № 8. – С. 29 – 32.

37. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М. : Высш. шк., 2005. – 544 с. – ISBN 5-06-004137-9.

38. Проектирование инвариантных следящих приводов / В. Н. Яворский [и др.] ; под ред. В. Н. Яворский. – М. : Высш. шк., 1964. – 420 с.

39. Ричард К. Дорф. Современные системы управления / Ричард К. Дорф, Роберт Х. Бишоп. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2004. – 832 с. – ISBN 5-93208-119-8.

40. Ушаков, А. В. Формирование полиномиальной динамической модели при сложном экзогенном стохастическом воздействии / А. В. Ушаков, А. Ю. Цвентарный // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2010. – № 3. – С. 14 – 19.

*Научное издание*

КОБЗЕВ Александр Архипович  
МИШУЛИН Юрий Евгеньевич  
НОВИКОВА Наталья Александровна  
и др.

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ  
С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОГНОЗИРУЮЩЕЙ МОДЕЛЬЮ

Монография

Подписано в печать 31.10.14.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 9,30. Тираж 65 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.