

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

Ю.А. Алхутов
Н. М. Воронова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лабораторный практикум

Владимир 2002

УДК 517
А54

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Владимирского государственного педагогического университета
В.В. Жиков

Доктор физико-математических наук,
доцент кафедры вычислительной математики Московского
физико-технического института (государственного университета)
А.И. Лобанов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Алхутов Ю.А., Воронова Н.М. Математическое моделирование:
А54 Лаб. практикум / Владим. гос. ун-т;. Владимир, 2002. 72 с.
ISBN 5-89368-355-2

В практикуме дается общее представление о процессе создания математических моделей прикладных задач. Основное внимание уделяется составлению дискретных и вычислительных моделей, их анализу на предмет корректности постановки и устойчивости. Достаточно подробно описаны численные методы расчетов по моделям, особенности реализации их на ЭВМ.

Работа предназначена для студентов четвертого курса специальностей 010200 – прикладная математика и информатика и 072300 – лазерная техника и лазерные технологии, выполняющих лабораторные работы по курсу “Математическое моделирование”. Практикум может быть полезен всем студентам и аспирантам, выполняющим курсовые, дипломные или научные работы, связанные с математическим моделированием.

Табл. 7. Ил. 14. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517

ISBN 5-89368-355-2

© Владимирский государственный
университет, 2002

ПРЕДИСЛОВИЕ

Совершенно очевидно, что решение серьезной задачи – это очень сложный и длительный процесс, состоящий из отдельных законченных этапов. Реализацией этих этапов, как правило, занимается не один человек, а группа исследователей и специалистов. Успех их деятельности гарантирован лишь в случае слаженной работы и грамотного научного подхода на каждой стадии решения задачи. Естественным, что специалисты, участвующие в реализации какого-то одного этапа, должны иметь четкое представление обо всем процессе моделирования, о методологических вопросах и проблемах, которые возникают на каждой стадии решения задачи. В данном практикуме авторы стремились изложить расширенное общее, а не узкоспециализированное представление о математическом моделировании.

Подобранные примеры и задания, прямое моделирование изучаемых процессов дают возможность освоить наиболее известные методы и приемы, традиционно используемые при решении научных и практических задач на ЭВМ, понять границы их применимости и познакомиться с характерными эффектами, возникающими при численном решении задач.

Практикум включает в себя пять лабораторных работ, которые авторы настоятельно рекомендуют выполнять в строгой последовательности их изложения, так как материал построен по принципу последовательного возрастания сложности: от изучения простых моделей, описывающих стационарные процессы, до нелинейных и часто неустойчивых моделей.

Материал изложен простым и доступным языком, что, по мнению авторов, немаловажно при изучении и не требует дополнительных знаний по высшей математике, выходящих за рамки стандартной программы вуза. Однако предполагается, что читатель хорошо подготовлен в области алгоритмизации и программирования, так как вопросы построения оптимальных алгоритмов и программных кодов в данной работе не освещаются.

В конце практикума приведен подробный список литературы, имеющий целью сориентировать читателя, которому потребуется более глубоко разобраться с теми или иными вопросами.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить коллег по кафедре прикладной математики ВлГУ: к.ф-м.н., доцента А.Б. Евлюхина, ассистента Н.Н. Бухарова, к.ф-м.н., доцента А.Ф. Галкина за полезное обсуждение некоторых специальных вопросов математического моделирования и методов вычислений, а также за ценные советы по содержанию самой работы.

Авторы выражают глубокую признательность доктору физико-математических наук, доценту кафедры вычислительной математики МФТИ А.И. Лобанову за неоднократные плодотворные дискуссии по вопросам численного моделирования, а также за его искреннее доброжелательное внимание к авторам, что очень способствовало доведению этой работы до конца.

Хотелось бы выразить особую благодарность зам. зав. кафедрой прикладной математики кандидату физико-математических наук, доценту В.Г. Прокошеву, декану факультета информатики и прикладной математики кандидату технических наук, доценту А.А. Галкину за помощь и содействие при издании работы.

ВВЕДЕНИЕ

На практике исходным пунктом исследования свойств какого-либо процесса является эмпирическая ситуация, которая редко бывает четко очерченной. Поэтому исследовательские прикладные задачи первоначально формулируются в самом общем виде. В конечном же итоге требуется получить в качестве результатов конкретные численные или качественные соотношения между характеристиками и свойствами изучаемого объекта. Чтобы дойти от абстрактной постановки задачи до численного решения, исследователю приходится неоднократно прибегать к процессу моделирования (имитационного, математического, численного или какого-либо другого).

Для наглядности мы попытались изобразить основные этапы решения больших прикладных задач на схеме 1. Из этой схемы видно, что математическому моделированию предшествуют два этапа: **абстрактная формулировка** и **постановка задачи**. Как правило, этими этапами занимаются специалисты конкретной предметной области, которые сначала обнаруживают какой-то феномен или особенности в поведении объекта на практике. Затем на стадии постановки задачи формализуют, выявляют существенные особенности, определяют основные факторы, влияющие



на него, и исключают второстепенные. Безусловно, все это требует глубокого знания предметной области, так как всегда есть вероятность того, что, исключив, казалось бы, второстепенный фактор, окажется что именно он и был причиной наблюдаемого феномена. И все дальнейшие исследования окажутся неверными из-за неточностей, заложенных в самой постановке задачи.

Создание **математической модели** начинается с замены всех используемых в постановке задачи параметров изучаемого процесса математическими обозначениями (по возможности, передающими смысл параметра). Используя введенные обозначения, составляют саму математическую модель: устанавливают связи между параметрами исследуемого процесса в виде математических соотношений, формул, обеспечивающих получение результата. При этом нужно всегда учитывать, что математическая модель должна быть максимально полной, чтобы оказаться полезной для изучения свойств исследуемого явления. В то же время – достаточно простой, чтобы была возможность проанализировать ее существующими в математике средствами и в последствии реализовать на ЭВМ. Полученную математическую модель анализируют на предмет *существования* и *единственности* решения. Неединственность решения может быть следствием неправильной постановки исходной прикладной задачи.

Когда математическая модель получена, сначала пытаются отыскать точное решение. Но для абсолютного большинства реальных задач это невозможно по различным причинам. В одних случаях из-за нелинейностей, которые усложняют модель, в других – из-за большого числа расчетов, которые невозможно сделать вручную. То есть по тем или иным причинам требуется привлечь вычислительную технику и численные методы. Но так как численно на компьютере нельзя найти решение на всей области непрерывно, а можно найти лишь в каких-то ее точках, то, естественно, встает вопрос о дискретизации области и переходе от непрерывной математической модели к дискретной. То есть в процессе первого шага численного моделирования – дискретизации, математическая модель аппроксимируется некоторой **дискретной моделью**, естественно, с какой-то по-

6

грешностью. Полученную дискретную модель также необходимо исследовать. Здесь особое внимание уделяется анализу корректности этой модели: выяснению вопросов *существования* и *единственности* решения, исследованию устойчивости решения к погрешностям входных данных и прочее. Неединственность решения может быть проявлением неправильной постановки исходной прикладной проблемы или сигналом о неудачном выборе математической модели.

Затем дискретную модель изучают с целью выбора метода решения. Если нет явной зависимости выходных данных от входных, необходимо использовать численные методы. Теоретически для каждого типа дискретной модели можно подобрать несколько численных методов решения. Необходимо знать особенности применения этих методов, критерии, по которым оценивается их качество (точность, скорость сходимости, сложность реализации и прочее). Выбор существенно зависит от требований, предъявляемых к решению, от имеющихся в наличии ресурсов, от доступной для использования вычислительной техники и т.д. Таким образом, после завершения численного моделирования в руках исследователя должна появиться некая **вычислительная модель** – расчетная схема, состоящая из полного набора исходных данных, конечного числа простейших математических формул и соотношений, последовательное применение которых позволит за конечное число шагов вычислить неизвестные параметры исходной математической модели. Простейшими являются формулы, состоящие из элементарных математических функций и арифметических операций.

Выбранный численный метод содержит только принципиальную схему решения задачи. Необходима подробная детализация всех этапов вычислений, то есть **составление алгоритма**. Следует заметить, что к алгоритмам предъявляется целый ряд существенных требований, такие как быстроедействие, точность, экономия памяти, простота. Непосредственное **программирование** сводится к оптимальному переводу этого алгоритма на выбранный язык программирования.

На этапе **отладки программы** выявляют и исправляют синтаксические и семантические ошибки. После их устранения, необходимо провести тестирование программы – проверку правильности ее работы на специально отобранных тестовых задачах, имеющих известные решения.

Первые полученные **результаты** тщательно **анализируются** для того, чтобы убедиться в правильности работы программы и пригодности выбранного метода решения. Для того чтобы исследователь мог воспользоваться результатами расчетов, их необходимо интерпретировать, то есть представить на языке предметной области или в иной удобной для восприятия форме: в виде компактных таблиц, графиков и др.

Завершающий этап состоит в **использовании результатов расчетов** в практической деятельности, то есть во **внедрении результатов**. Очень часто анализ результатов, проведенный на этапе их обработки и интерпретации, указывает на несовершенство используемой математической модели и необходимость ее коррекции. В этом случае математическую модель модифицируют (при этом она, как правило, усложняется и начинается новый цикл решения задачи).

На данный момент у читателя могло сложиться впечатление, что в этой длинной цепи непосредственно математическое моделирование занимает не такое уж и важное место. Но это поверхностное суждение. И если читатель внимательнее изучит составляющие (схемы 1), то он непременно заметит, что именно математическая модель является тем ключевым звеном, которое позволяет описать абстрактные объекты и процессы реального мира на языке математики, давая тем самым исследователю очень большие дополнительные средства и возможности для научных изысканий. Все последующие этапы, в принципе, лишь модифицируют (с той или иной целью) полученную математическую модель. Поэтому очень часто математическим моделированием называют не один этап построения математической модели, а весь этот сложный процесс, изображенный на схеме 1.

Лабораторная работа № 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ МОНТЕ – КАРЛО

I. Цель работы

Знакомство с методом Монте – Карло. Моделирование на основе статистической обработки случайных испытаний приближенного решения некоторых задач.

II. Краткая теория

Идея метода Монте – Карло

Обычный путь решения задачи состоит в том, что указывается алгоритм, с помощью которого искомая величина f находится или точно, или с заданной погрешностью. Здесь процесс вычислений является строго **детерминированным**: два различных вычислителя при отсутствии ошибок приходят к одному и тому же результату.

Однако встречаются задачи, где построение такого рода алгоритма практически не выполнимо или сам алгоритм оказывается чрезмерно сложным. В этих случаях часто прибегают к моделированию математической или физической сущности задачи и использованию законов больших чисел теории вероятностей. Оценки $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ искомой величины f получаются на основании статистической обработки материала, связанного с результатами некоторых многократных **случайных испытаний**. В этих случаях вычислительный процесс является **недетерминированным**, так как он определяется итогами случайных испытаний.

Способы решения задач, использующие случайные величины, получили общее название метода **Монте – Карло**. Более точно под методом **Монте – Карло** понимается совокупность приемов, позволяющих получать решения математических или физических задач при помощи многократных случайных испытаний. Оценки искомой величины выводятся статистическим путем и носят вероятностный характер.

При пользовании методом Монте – Карло нет необходимости знать точные соотношения между данными и искомыми величинами задачи, а достаточно лишь выявить тот комплекс условий, при наличии которого соответствующие явление имеет место.

Из математических задач, для которых разработано применение метода Монте – Карло, выделим следующие: решение систем линейных уравнений, обращение матриц, нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы, вычисление кратных интегралов, решение задачи Дирихле, решение функциональных уравнений различных типов и др.

Способы получения случайных чисел

При практическом применении метода Монте – Карло случайные испытания обычно заменяют выборкой случайных чисел.

Существуют простые приемы получения случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке от $[0,1]$. Для простоты будем предполагать, что эти числа представляют собой правильные десятичные дроби с фиксированным количеством десятичных знаков после запятой, например, s (s – разрядные десятичные дроби), т. е. могут быть записаны в виде

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_s}{10^s}, \quad (1)$$

где α_i ($i = 1, 2, \dots, s$) – цифры этого числа, принимающие значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Для составления таблицы случайных чисел вида (1), равномерно распределенных на $[0,1]$, достаточно указать способы получения цифр α_i с соблюдением следующих условий:

1. α_i есть **случайная выборка** из системы чисел 0 – 9, причем все указанные значения равновероятны.
2. Выбор предыдущей цифры α_i никоим образом не влияет на выбор последующей α_{i+1} .

Рассмотрим некоторые способы получения случайных чисел.

1. В урну опускают 10 одинаковых пронумерованных шаров с номерами 0 – 9. Из урны последовательно извлекается шар и записывается его номер α . После каждого извлечения шар возвращают в урну, и перед каждым следующим тиражом все шары в урне перемешиваются.
2. Одновременно бросают две игральные кости. Если p_1 и p_2 – числа выпавших очков ($p_1, p_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) соответственно на первой и второй костях (кости должны быть различаемы), то очередная цифра α случайного числа берется равной остатку от деления суммы $6(p_1 - 1) + p_2$ на

10, где $n_1 < 6$, т. е. α_i есть целое неотрицательное число, меньшее 10, удовлетворяющее сравнению

$$6(n_1 - 1) + n_2 \equiv \alpha \pmod{10}. \quad (2)$$

Если $n_1 = 6$, то кости перебрасываются. Из формулы (2) вытекает, что α_i с равной вероятностью может принять любое значение от 0 до 9.

3. Используется десятичное разложение положительного иррационального числа

$$\omega = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\infty} \dots = \beta_0 + (\omega),$$

где β_0 – целая часть числа ω и (ω) – его дробная часть.

Для получения случайной последовательности $\{x_n\}$ полагают:

$$x_n = (n\omega) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Если требуется случайная последовательность, состоящая из s разрядных чисел, то в числах $(n\omega)$ ограничиваются соответствующими разрядами.

4. Наиболее распространенным на сегодняшний день является метод вычетов. В качестве первого целого случайного числа выбираем любое число, лежащее между 0 и P (число P выбирается заранее). Умножаем это случайное число на некоторый фиксированный выбранный заранее множитель M . Прибавляем к произведению некоторое фиксированное целое число K , выбранное заранее. Получившуюся сумму делим на P и получившийся остаток выбираем в качестве нового случайного числа. Метод вычетов можно записать в виде формулы $r_{i+1} \equiv (Mr_i + K) \pmod{P}$, которая и означает, что для получения следующего r_{i+1} нужно взять предыдущее r_i , умножить его на M , сложить результат с K , разделить сумму на P и взять остаток от деления.

Вычисление кратных интегралов методом Монте – Карло

Пусть функция

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

непрерывна в ограниченной замкнутой области S и требуется вычислить m – кратный интеграл

$$I = \int \int \dots \int_{(S)} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (3)$$

Геометрически число I представляет собой m -мерный объем прямого цилиндра в пространстве $Ox_1x_2 \dots x_m y$, построенного на основании S и ограниченного сверху данной поверхностью $y = f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ (рис.1).

Преобразуем интеграл (3) так, чтобы новая область интегрирования целиком содержалась внутри единичного m -мерного куба. Пусть область S расположена в m -мерном параллелепипеде

$$\begin{aligned} a_i \leq x_i \leq A_i \\ (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (4)$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} x_i &= a_i + (A_i - a_i)\xi_i \\ (i &= 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда, очевидно, m -мерный параллелепипед (4) преобразуется в m -мерный единичный куб

$$\begin{aligned} 0 \leq \xi_i \leq 1 \\ (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

и, следовательно, новая область интегрирования σ , которая находится по обычным правилам, будет целиком расположена внутри этого куба.

Вычисляя якобиан преобразования, будем иметь

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)} = \begin{vmatrix} A_1 - a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 - a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_m - a_m \end{vmatrix} = (A_1 - a_1)(A_2 - a_2) \dots (A_m - a_m).$$

Таким образом,

$$I = \iiint_{\sigma} F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m, \quad (6)$$

где

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = (A_1 - a_1)(A_2 - a_2) \dots (A_m - a_m) f(a_1 + (A_1 - a_1)\xi_1, a_2 + (A_2 - a_2)\xi_2, \dots, a_m + (A_m - a_m)\xi_m).$$

Введя обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

и

$$d\sigma = d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m,$$

запишем интеграл (6) короче в следующем виде

$$I = \int \int \dots \int_{\sigma} F(\xi) d\sigma. \quad (7)$$

Для вычисления интеграла (7) методом случайных испытаний выбираем m равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$ последовательностей случайных чисел:

$$\begin{array}{ccc} \xi_1^{(1)}, & \xi_2^{(1)}, \dots, & \xi_n^{(1)}, \dots; \\ \xi_1^{(2)}, & \xi_2^{(2)}, \dots, & \xi_n^{(2)}, \dots; \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{(m)}, & \xi_2^{(m)}, \dots, & \xi_n^{(m)}, \dots \end{array}$$

Точки $M_i(\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots, \xi_i^{(m)})$ ($i = 1, 2, \dots$) можно рассматривать как случайные. Выбрав достаточно большое число N точек $M_1, M_2, \dots, M_N$, проверяем, какие из них принадлежат области σ (первая категория) и какие не принадлежат (вторая категория).

Относительно границы области σ следует заранее договориться, причисляются ли граничные точки или часть их к области σ , или не причисляются к ней. В общем случае при гладкой границе это не имеет существенного значения; в отдельных случаях нужно решать вопрос с учетом конкретной обстановки.

Взяв достаточно большое число n точек $M_i \in \sigma$, приближенно можно положить

$$y_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i);$$

отсюда искомый интеграл выражается формулой

$$I = y_{cp} \sigma = \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n F(M_i),$$

где под σ понимается m -мерный объем области интегрирования. Если вычисление объема σ затруднительно, то можно принять:

$$\sigma \approx \frac{n}{N};$$

отсюда

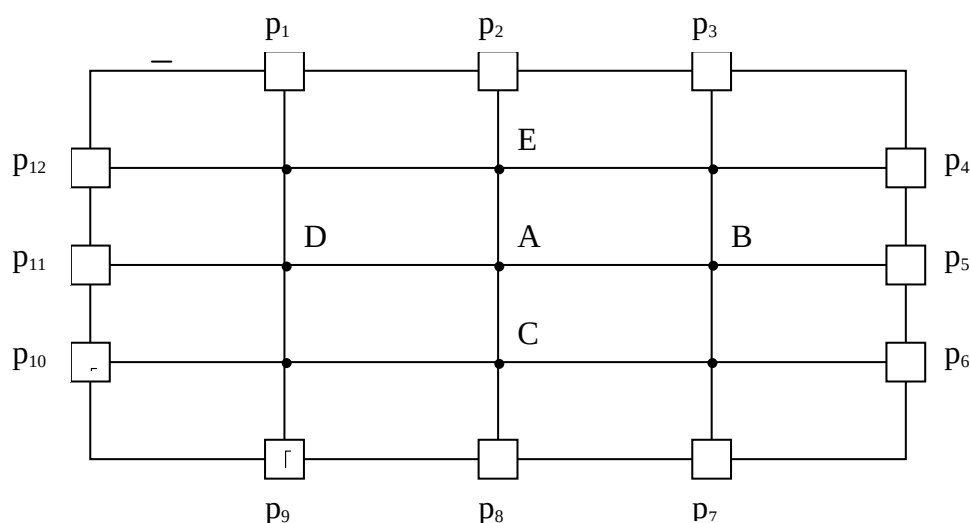
$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n F(M_i).$$

Решение уравнений с частными производными методом Монте – Карло

Как известно, с помощью азартных игр можно моделировать приближенные решения реальных задач. Можно сконструировать такую игру, результатом которой является приближенное решение дифференциального уравнения. В частности, модель случайных блужданий приводит к конечно-разностной аппроксимации задачи Дирихле.

Игра “Блуждающий пьяница”

1. Блуждания пьяницы начинаются из произвольной точки сетки (рис2) (например, точки A).
2. На каждом ходе игры пьяница случайным образом с равной вероятностью перебирается в одну из соседних точек сетки (B, C, D, E).
3. После перехода в соседнюю точку процесс блуждания возобновляется. Так, пьяница идет от точки к точке до тех пор, пока случайным образом не окажется в граничной точке p_i . Здесь он останавливается, мы фиксируем номер точки p_i . На этом заканчивается одна случайная прогулка.



A – начальная точка, • – внутренние точки сетки,
 $\square$ – конечная точка p_i , g_i – вознаграждение в точке p_i

Рис. 2

4. Повторим шаги 1 – 3 достаточно много раз и найдем относительное число прибытий пьяницы в каждую из граничных точек p_i .
5. Предположим, что пьяница получает вознаграждение $g_i = g(p_i)$ (величина граничного условия в точке p_i) и, предположим, что цель игры – вычислить среднее вознаграждение $R(A)$ всех случайных прогулок, начинающихся из точки A . Этот средний выигрыш определяется по формуле

$$R(A) = g_1 P_A(p_1) + g_2 P_A(p_2) + \dots + g_{12} P_A(p_{12}), \quad (8)$$

где $P_A(p_i)$ – относительная доля блужданий, закончившихся в точке p_i . Игра завершается, когда величина $R(A)$ найдена.

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Оказывается, что среднее вознаграждение является приближенным решением задачи Дирихле в точке A . Это интересное наблюдение основано на двух фактах.

Если пьяница начал свою прогулку из точки, лежащей на границе, то каждая такая прогулка немедленно заканчивается в той же точке, и пьяница получает вознаграждение g_i .

Ясно, что среднее вознаграждение для точки $R(A)$ будет средним арифметическим от средних вознаграждений для четырех соседних точек

$$R(A) = \frac{1}{4} [R(B) + R(C) + R(D) + R(E)].$$

Таким образом, величина $R(A)$ удовлетворяет двум уравнениям

$$R(A) = \frac{1}{4} [R(B) + R(C) + R(D) + R(E)] \quad (\text{во внутренних точках})$$

$$R(A) = g_i \quad (\text{в граничных точках}).$$

Если g_i – это значения функции $g(x, y)$ из граничного условия в граничных точках p_i , то эти два уравнения точно совпадают с двумя конечно-разностными уравнениями

$$u_{ij} = \frac{1}{4} [u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1}],$$

$$u_{ij} = g_{ij}.$$

То есть, величина $R(A)$ соответствует величине u_{ij} в разностных уравнениях и, следовательно, действительно аппроксимирует решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в точке A .

Подытожив все вышесказанное, заметим, что решение задачи сводится к следующей последовательности действий:

- 1) реализация модели случайных блужданий;
- 2) расчет количества приходов в каждую граничную точку;
- 3) расчет относительного числа приходов в каждую граничную точку;
- 4) вычисление приближенного решения по формуле (8).

Примечание: игру “Блуждающий пьяница” можно модернизировать, чтобы решить более сложную задачу, например, задачу Дирихле для уравнения с переменными коэффициентами.

III. Задания к работе

Первая часть

Рассчитать значение кратного интеграла методом Монте – Карло (варианты заданий см. в таблице).

Вторая часть

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа методом Монте – Карло во всех внутренних точках области.

Уравнение Лапласа: $U_{xx} + U_{yy} = 0$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

Гр. усл.: $U(x,y) = g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{на верхней стороне квадрата;} \\ 0, & \text{на боковых и нижней сторонах квадрата.} \end{cases}$

IV. Выполнение работы

Первая часть

1. Изобразить графически область интегрирования.
2. Составить вычислительную модель для расчета интеграла.
3. Составить алгоритм и программу для расчета интеграла по вычислительной модели, получить результат.
4. Посчитать значение интеграла вручную.
5. Сравнить точное решение и решение, полученное по модели.

Вторая часть

1. Составить вычислительную модель для решения задачи Дирихле.
2. Составить алгоритм и программу по вычислительной модели.

V. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Теоретическая часть.

По первой части

3. Задание.
4. Список идентификаторов.

Составляется список идентификаторов (здесь и в последующих работах) в виде следующей таблицы

Таблица 1

№	Параметр по задаче	Обозначение в мат. модели	Обозначение в вычислит. модели	Статус переменной (входная, выходная, промежуточная)	Тип перем.	Значение (только для входных параметров)

5. Письменно выполненные задания под пунктами 1 и 2.
6. Алгоритм и текст программы.
7. Результат работы программы.
8. Письменно выполненные задания под пунктами 4 и 5.
9. Вывод.

По второй части

10. Задание.
11. Список идентификаторов.
12. Вычислительная модель.
13. Алгоритм и текст программы.
14. Результат работы программы.
15. Вывод.
16. Общий вывод по работе.

VI. Вопросы к защите

1. Суть метода Монте – Карло.
2. Принципиальное отличие метода Монте – Карло от других методов.
3. Способы получения случайных чисел.
4. Каким условиям должен удовлетворять набор случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$?
5. Какие математические задачи можно решать методом Монте – Карло?
6. Как на основе метода Монте – Карло можно вычислить кратный интеграл?
7. Какому условию должна удовлетворять область интегрирования?
8. Достоинства и недостатки метода Монте – Карло для вычисления кратных интегралов.
9. В чем заключается модель случайных блужданий?
10. Как по модели случайных блужданий можно получить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа?

Таблица 2

Номер варианта	Задание	Номер варианта	Задание
1	$I = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) dx dy$ $\sigma : 1/2 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 2x - 1$	14	$I = \iint_{(\sigma)} ((x+8)^2 + (y-8)^2) dx dy$ $\sigma : 1/2 \leq x \leq 1 \quad 2x - 1 \leq y \leq 1$
2	$I = \iint_{(\sigma)} (3x^2 + y^2) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x$	15	$I = \iint_{(\sigma)} (x^3 - y) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 1 \quad x \leq y \leq 1$
3	$I = \iint_{(\sigma)} (5x^2 + 4y^2) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 3/4 \quad 0 \leq y \leq x + 1/4$	16	$I = \iint_{(\sigma)} (y - x^2) dx dy$ $\sigma : 1/2 \leq x \leq 1 \quad -x + 5/4 \leq y \leq 1$
4	$I = \iint_{(\sigma)} (1/2 x^2 + y^2) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 1/2 \quad 0 \leq y \leq x + 1/2$	17	$I = \iint_{(\sigma)} (4x^2 - x + y) dx dy$ $\sigma : 1/2 \leq x \leq 1 \quad -x + 3/2 \leq y \leq 1$
5	$I = \iint_{(\sigma)} (x^2 + x + 1/2 y^2) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 1/4 \quad 0 \leq y \leq x + 3/4$	18	$I = \iint_{(\sigma)} (x - 7 + y^2) dx dy$ $\sigma : 3/4 \leq x \leq 1 \quad -x + 7/4 \leq y \leq 1$
6	$I = \iint_{(\sigma)} (x^3 + y) dx dy$ $\sigma : 1/4 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x - 1/4$	19	$I = \iint_{(\sigma)} (x^2 + y - 4) dx dy$ $\sigma : x \leq 3/4 \quad x + 1/4 \leq y \leq 1$
7	$I = \iint_{(\sigma)} (x + y^4) dx dy$ $\sigma : 1/2 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x - 1/2$	20	$I = \iint_{(\sigma)} ((x+1)^2 - y) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 1/2 \quad x + 1/2 \leq y \leq 1$
8	$I = \iint_{(\sigma)} (x^3 + 10y^2) dx dy$ $\sigma : 3/4 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x - 3/4$	21	$I = \iint_{(\sigma)} ((x-1)^3 - y) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 3/4 \quad x + 3/4 \leq y \leq 1$
9	$I = \iint_{(\sigma)} (x + y + y^2) dx dy$ $\sigma : 1/3 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 3x - 1$	22	$I = \iint_{(\sigma)} (-x + (y+1)^3) dx dy$ $\sigma : 1/4 \leq x \leq 1 \quad x - 1/4 \leq y \leq 1$
10	$I = \iint_{(\sigma)} ((x+4)^2 + y) dx dy$ $\sigma : 2/3 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 3x - 2$	23	$I = \iint_{(\sigma)} (-3x + (y-1)^3) dx dy$ $\sigma : 1/2 \leq x \leq 1 \quad x - 1/2 \leq y \leq 1$
11	$I = \iint_{(\sigma)} (x + (y+4)^2) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 1/4 \quad 0 \leq y \leq -x + 1/4$	24	$I = \iint_{(\sigma)} (-4x^2 + y + 5) dx dy$ $\sigma : 3/4 \leq x \leq 1 \quad x - 3/4 \leq y \leq 1$
12	$I = \iint_{(\sigma)} (x + 5 - y^3) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 1/2 \quad 0 \leq y \leq -x + 1/2$	25	$I = \iint_{(\sigma)} (10x^2 - 7y^2) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$
13	$I = \iint_{(\sigma)} ((x-1)^2 - y) dx dy$ $\sigma : 0 \leq x \leq 3/4 \quad 0 \leq y \leq -x + 3/4$		

Лабораторная работа № 2

ПРИМЕНЕНИЕ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

I. Цель работы

Знакомство с сеточными методами. Получение дискретных и вычислительных моделей краевых задач для эллиптических уравнений (на примере уравнений Лапласа и Пуассона).

II. Краткая теория

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение стационарных, т.е. не меняющихся во времени процессов различной физической природы. Сюда относятся стационарные электрические и магнитные поля (электростатика, магнитостатика, поля постоянного электрического тока), потенциальное движение несжимаемой жидкости, стационарные тепловые поля и др. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа: $\Delta U = 0$.

В отличие от уравнений гиперболического и параболического типов краевые задачи для эллиптического уравнения характеризуются отсутствием начальных условий. В зависимости от типа краевых условий различают:

1. Первую краевую задачу (задачу Дирихле), если

$$U|_{\Sigma} = f_1$$

(задано значение искомой функции U на границе области). Это, например, задача о нахождении стационарного распределения температуры внутри области, если задана температура на границе этой области; или - распределение потенциала внутри области, если известен потенциал на границе.

2. Вторую краевую задачу (задачу Неймана), если

$$\frac{\partial U}{\partial n}|_{\Sigma} = f_2$$

(задана внешняя нормальная производная на границе области). Это общая задача и для стационарной теплопроводности, и для электростатики, если на границе задан поток (тепла, электронов и т. д.).

3. Третью краевую задачу, если

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n} + hU \right) \Big|_{\Sigma} = f_3 \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = -h(U - f_3).$$

Согласно этому граничному условию, поток, втекающий в область через границу, пропорционален разности между температурой U и некоторой заданной температурой f_3 .

Здесь f_1, f_2, f_3, h – заданные функции. Причем очевидно, что стационарное распределение функции U может установиться лишь при условии равенства нулю суммарного потока через границу области. Отсюда следует, что функция f_2 должна удовлетворять дополнительному требованию

$$\iint_{\Sigma} f_2 d\sigma = 0.$$

Существует много подходов к численному решению таких задач. Очень часто на первом этапе численного моделирования для получения дискретной модели применяются сеточные методы. Выбирается шаг дискретизации каждого аргумента. В соответствии с этим шагом область решения задачи покрывается сеткой. Точки, из которых состоит сетка, называются узлами, и решение ищется именно в этих узлах. Дискретную модель составляют путем замены в исходном дифференциальном уравнении всех частных производных разностными аналогами, в результате получается так называемое **разностное уравнение (разностная схема)**. Причем вид этого уравнения (схемы) будет зависеть от тех аналогов, которыми заменяют производные.

О понятии корректности разностной задачи

Разностная задача называется корректной (корректно поставленной), если решение уравнения существует и единственно для любых входных данных и если разностная схема устойчива, то есть решение задачи непрерывно зависит от входных данных, причем эта зависимость равномерна относительно шагов разбиения сетки.

Связь устойчивости и аппроксимации со сходимостью

Если схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, то она сходится (обычно говорят: ”из устойчивости и аппроксимации следует сходимость схемы”), причем порядок точности (скорость сходимости) оп-

ределяется ее порядком аппроксимации. Таким образом, изучение сходимости и порядка точности разностных схем сводится к изучению погрешности аппроксимации и устойчивости.

Порядок аппроксимации разностной схемы определяется порядком аппроксимации частных производных в дифференциальном уравнении.

Вопросы устойчивости рассматриваются подробнее в 3-й и 4-й лабораторных работах.

Конечно-разностные аппроксимации

Разложим в ряд Тейлора функцию одной переменной – $f(x)$ в окрестности некоторой точки x :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots$$

Если оборвать этот ряд на втором члене, то получим

$$f(x+h) \cong f(x) + f'(x)h.$$

Откуда

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (9)$$

Выражение, стоящее в правой части, называется **правой разностной производной**. Она аппроксимирует первую производную функции $f(x)$ в точке x .

В разложении Тейлора функции $f(x)$ можно заменить h на $-h$ и получить **левую разностную производную**

$$f'(x) \cong \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \quad (10)$$

Вычитая $f(x-h) \cong f(x) - f'(x)h$ из $f(x+h) \cong f(x) + f'(x)h$, получаем **центральную разностную производную**

$$f'(x) \cong \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)]. \quad (11)$$

Если в ряде Тейлора оставить на одно слагаемое больше, то совершенно аналогично можно получить центральную разностную производную для аппроксимации второй производной функции $f(x)$:

$$f''(x) \cong \frac{1}{h^2} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)]. \quad (12)$$

Понятие конечно-разностной аппроксимации распространяется и на частные производные. Если исходить из разложения Тейлора функции двух переменных

$$U(x+h, y) = U(x, y) + U_x(x, y)h + U_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} + \dots,$$

$$U(x-h, y) = U(x, y) - U_x(x, y)h + U_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} + \dots,$$

можно получить следующие аппроксимации частных производных:

$$U_x(x, y) \cong \frac{U(x+h, y) - U(x, y)}{h},$$

$$U_{xx}(x, y) \cong \frac{1}{h^2} [U(x+h, y) - 2U(x, y) + U(x-h, y)],$$

$$U_y(x, y) \cong \frac{U(x, y+k) - U(x, y)}{k},$$

$$U_{yy}(x, y) \cong \frac{1}{k^2} [U(x, y+k) - 2U(x, y) + U(x, y-k)].$$

В этих формулах частные производные аппроксимируются правыми, центральными и левыми разностными производными.

Оценка погрешностей аппроксимации

Очевидно, что погрешность введенных формул (9) и (10) можно оценить следующим образом:

$$r_+(x, h) \cong f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (13)$$

$$r_-(x, h) \cong f'(x) - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \quad (14)$$

Воспользуемся для этого рядом Тейлора до третьего слагаемого включительно:

$$f(x \pm h) \cong f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(\xi_{\pm})}{2} h^2, \quad (15)$$

где ξ_+ и ξ_- — некоторые точки, расположенные на интервалах $(x, x+h)$ и $(x-h, x)$ соответственно. Подставляя разложения (15) в выражения (13) и (14), получаем

$$r_+(x, h) \cong -\frac{1}{2} f''(\xi_+)h,$$

$$r_-(x, h) \cong \frac{1}{2} f''(\xi_-)h.$$

Следовательно,

$$|r_+(x, h)| \leq \frac{1}{2} M_2 h, \quad M_2 = \max_{[x, x+h]} |f''(\xi)|, \quad (16)$$

$$|r_-(x, h)| \leq \frac{1}{2} M_2 h, \quad M_2 = \max_{[x-h, x]} |f''(\xi)|. \quad (17)$$

Таким образом, формулы (9) и (10) имеют первый порядок точности по h . Иначе говоря, правая и левая разностные производные аппроксимируют производную $f'(x)$ с первым порядком точности.

Подставляя в выражение для погрешности

$$r_0(x, h) \equiv f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

соответствующие разложения по формуле Тейлора

$$f(x \pm h) \equiv f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2} h^2 \pm \frac{f'''(\xi_{\pm})}{6} h^3,$$

получим

$$r_0(x, h) \equiv -\frac{f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)}{12} h^2.$$

Следовательно, справедлива оценка погрешности

$$|r_0(x, h)| \leq \frac{M_3}{6} h^2, \quad M_3 = \max_{[x-h, x+h]} |f'''(\xi)|. \quad (18)$$

Таким образом, центральная разностная производная аппроксимирует производную $f'(x)$ со вторым порядком точности относительно h .

Аналогично можно рассчитать погрешности для аналогов вторых производных.

Численное моделирование: получение дискретной модели задачи Дирихле для уравнения Лапласа сеточным методом

Пусть необходимо решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

$$\text{Гр. усл.: } U(x, y) = g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{на верхней стороне квадрата;} \\ 0, & \text{на боковых и нижней сторонах квадрата.} \end{cases} \quad (19)$$

Построим в плоскости (x,y) сетку с равноотстоящими узлами (рис. 3).

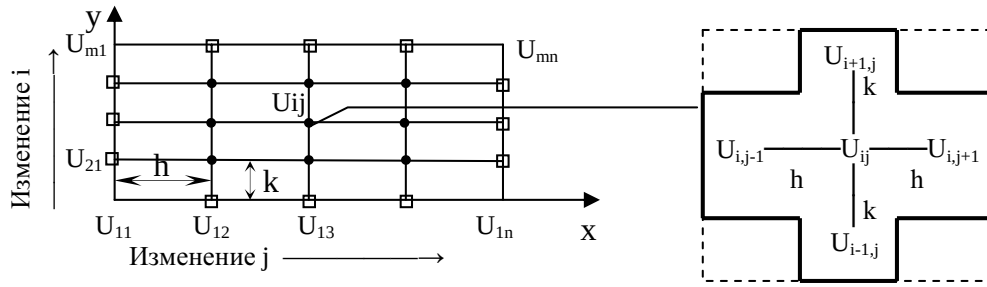


Рис. 3

Удобно использовать следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned}
 U(x, y) &= U_{i,j}, \\
 U(x, y-k) &= U_{i-1,j}, \\
 U(x-h, y) &= U_{i,j-1}, \\
 U(x+h, y) &= U_{i,j+1}, \\
 U(x, y+k) &= U_{i+1,j}, \\
 U_x(x, y) &= \frac{1}{2h} (U_{i,j+1} - U_{i,j-1}), \\
 U_y(x, y) &= \frac{1}{2k} (U_{i+1,j} - U_{i-1,j}), \\
 U_{xx}(x, y) &= \frac{1}{h^2} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}), \\
 U_{yy}(x, y) &= \frac{1}{k^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}).
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Заменив в уравнении Лапласа частные производные конечно-разностными аналогами, получим следующее **разностное уравнение**:

$$\Delta U = \frac{1}{h^2} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) + \frac{1}{k^2} (U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) = 0. \quad (21)$$

В случае, когда $h = k$, уравнение Лапласа приводится к виду

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{ij} = 0.$$

Или иначе,

$$\frac{1}{4} U_{i+1,j} + \frac{1}{4} U_{i-1,j} + \frac{1}{4} U_{i,j+1} + \frac{1}{4} U_{i,j-1} - U_{ij} = 0. \quad (22)$$

Разрешив его относительно U_{ij} , получим

$$U_{i,j} = \frac{1}{4}(U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}). \quad (23)$$

Уравнение (23) часто называют шаблоном. В этом уравнении все значения U_{ij} берутся для внутренних узлов сетки. Согласно последнему соотношению, решение U_{ij} аппроксимируется средним значением решения по четырем соседним точкам. Значение функции в граничных точках области рассчитывается из граничных условий.

Итак, мы получили следующую дискретную модель для математической модели (19):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}U_{i+1,j} + \frac{1}{4}U_{i-1,j} + \frac{1}{4}U_{i,j+1} + \frac{1}{4}U_{i,j-1} - U_{ij} &= 0 \quad i = \overline{1, m-2}; \quad j = \overline{1, n-2}. \\ U_{i0} = U_{in} = U_{j0} &= 0, \quad U_{mj} = 1, \quad i = \overline{1, m-2}, \quad j = \overline{1, n-2}. \end{aligned}$$

Теперь необходимо выбрать численный метод решения.

Численное моделирование: выбор численного метода

Если уравнение (22) записать для всех внутренних точек, то получится система линейных уравнений

$$AU = 0. \quad (24)$$

Причем число уравнений будет совпадать с числом внутренних узлов сетки. Если уменьшать шаги сетки h и k , число узлов сетки будет возрастать, и мы получим систему уравнений очень больших размеров. Матрица коэффициентов для этой системы станет разреженной, то есть будет содержать много нулей. Системы с разреженными матрицами решаются специальными методами.

Одним из эффективных методов численного решения этой задачи является итерационный метод Гаусса-Зейделя, который в применении к эллиптическим разностным уравнениям называется методом Либмана, или методом последовательных смещений. Алгоритм этого метода заключается в следующем:

1. Присвоить величинам U_{ij} , во внутренних узлах численное значение, равное среднему всех значений граничных условий.
2. В этом и последующих шагах осуществлять пересчет во всех внутренних точках сетки путем замены старого значения на новое, рассчитанное по формуле (23). Либо, если шаги по x и y различны, разрешить относительно U_{ij} уравнение (21) и осуществлять пересчет по получившейся формуле.

Итерационный процесс сходится к точному решению, если норма матрицы коэффициентов в системе линейных уравнений меньше 1. То есть должно выполняться хотя бы одно из трех условий:

$$\left. \begin{aligned} \|\bar{\alpha}_m\| &= \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad i = 1 \dots n \\ \|\bar{\alpha}_l\| &= \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1, \quad j = 1 \dots n \\ \|\bar{\alpha}_k\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1 \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$

где

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты системы уравнений (24).

Если условие сходимости не выполняется, то совершают допустимые линейные преобразования исходной системы, приводящие к равносильной системе, но обеспечивающие сходимость процесса.

При более подробном рассмотрении первого условия сходимости получается:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |\alpha_{ij}| = \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1, \quad i = 1 \dots n,$$

Если для каждого уравнения (24) будет выполнено условие сходимости, то и максимальная из вычисленных дробей будет меньше 1. Преобразуем еще раз первое условие сходимости из (25):

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \rightarrow \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1 \dots n. \quad (26)$$

Данное неравенство является следствием из условия сходимости (25), которое показывает, что для сходящегося итерационного процесса модуль коэффициента, стоящего в любой строке на главной диагонали матрицы $|a|$, должен быть больше суммы модулей остальных коэффициентов этой строки. Именно с проверки условия (26) должен начинаться анализ системы (24) на предмет выбора метода ее решения.

Если (26) выполняется, то после нескольких операций процесс сойдется к приближенному решению задачи. Скорость сходимости этого алгоритма небольшая. Для ускорения процесса сходимости Либман предложил ввести ускоряющий множитель

$$\tilde{U}_{ij}^{(k)} = \omega U_{ij}^{(k)} + (1-\omega)U_{ij}^{(k-1)}, \quad (27)$$

то есть усреднять предыдущий и только что найденный результаты. Практически, более подходящим является множитель $\omega \approx 1.7 \div 1.8$. Иногда введение этого множителя позволяет увеличить сходимость в 20 раз (подробнее о сходимости итерационных методов см. [5], [15], [16], [17], [29], [32], [34]).

Критерий окончания итерационного процесса можно сформулировать следующим образом: итерационный процесс считается законченным на k -м шаге, если

$$\max_{i,j} |U_{ij}^{(k)} - U_{ij}^{(k+1)}| < \varepsilon, \quad (28)$$

где ε – заданная точность вычисления U_{ij} .

Итак, обобщая все вышесказанное, получим следующую вычислительную модель для задачи (19)

$$U_{i0} = U_{in} = U_{j0} = 0, \quad U_{mj} = 1, \quad i = \overline{1, m-2}, \quad j = \overline{1, n-2}.$$

$$U_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2n + 2m - 4}, \quad i = \overline{1, m-2}; \quad j = \overline{1, n-2}.$$

$$U_{ij}^{(k)} = \frac{1}{4} (U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}), \quad i = \overline{1, m-2}; \quad j = \overline{1, n-2}.$$

$$\tilde{U}_{ij}^{(k)} = \omega U_{ij}^{(k)} + (1-\omega)U_{ij}^{(k-1)}, \quad \max_{i,j} |U_{ij}^{(k)} - U_{ij}^{(k+1)}| < \varepsilon.$$

З а м е ч а н и я:

1) Если близость границы области, в которой решается задача, вносит неправильность в положение узловых точек прямоугольной сетки (рис. 4), то целесообразно вблизи границы области разбить сетку с неравноотстоящими узлами. В этом случае точка U_{ij} не будет больше в центре прямоугольника. Положение ее определяется отношениями $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ расстояний до сторон прямоугольника (рис 5). Тогда формулы аппроксимации

частных производных будут иметь вид

$$U_x(x, y) = \frac{1}{h} \left[\frac{\beta U_{i,j+1}}{\alpha(\alpha + \beta)} - \frac{\alpha U_{i,j-1}}{\beta(\alpha + \beta)} - \frac{(\beta - \alpha) U_{i,j}}{\alpha\beta} \right],$$

$$U_y(x, y) = \frac{1}{k} \left[\frac{\delta U_{i+1,j}}{\gamma(\gamma + \delta)} - \frac{\gamma U_{i-1,j}}{\delta(\gamma + \delta)} - \frac{(\delta - \gamma) U_{i,j}}{\gamma\delta} \right],$$

$$U_{xx}(x, y) = \frac{2}{h^2} \left[\frac{U_{i,j+1}}{\alpha(\alpha + \beta)} - \frac{U_{i,j-1}}{\beta(\alpha + \beta)} - \frac{U_{i,j}}{\alpha\beta} \right],$$

$$U_{yy}(x, y) = \frac{2}{k^2} \left[\frac{U_{i+1,j}}{\gamma(\gamma + \delta)} - \frac{U_{i-1,j}}{\delta(\gamma + \delta)} - \frac{U_{i,j}}{\gamma\delta} \right],$$

Подставив эти аналоги производных в уравнение Лапласа и разрешив его относительно U_{ij} , получим:

$$U_{ij} = \frac{2\alpha\beta\gamma\delta}{\gamma\delta + \alpha\beta} \left[\frac{1}{h^2} \left(\frac{U_{i,j+1}}{\alpha(\alpha + \beta)} + \frac{U_{i,j-1}}{\beta(\alpha + \beta)} \right) + \frac{1}{k^2} \left(\frac{U_{i+1,j}}{\gamma(\gamma + \delta)} + \frac{U_{i-1,j}}{\delta(\gamma + \delta)} \right) \right].$$

Эта формула применяется в периферийной части зоны. В центральной же части зоны, там, где узлы сетки являются равноотстоящими, применяется формула (23).

2) Если область, в которой решается задача, имеет неправильную форму, то можно покрыть ее сеткой и аппроксимировать решение в ближайших к границе точках интерполяцией граничных условий. После этого задача решается обычным способом (рис. 6).

3) При решении задачи Неймана те производные, которые входят в граничное условие, также следует заменить их разностными аппроксимациями.

4) Подобным образом можно решать: неоднородные уравнения, уравнения с переменными коэффициентами, неоднородные уравнения с переменными коэффициентами.

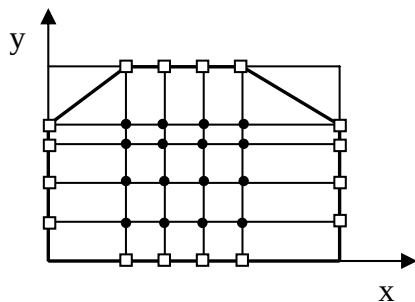


Рис. 4

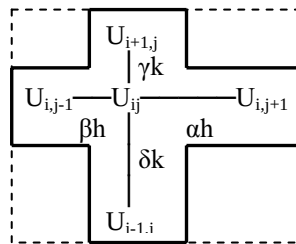


Рис. 5

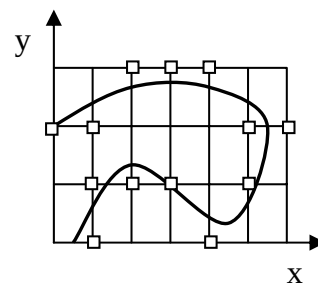


Рис. 6

Погрешность приближенного решения

Погрешность приближенного решения в общем случае складывается из следующих компонентов:

1. Погрешность замены дифференциального уравнения разностным (так называемая погрешность аппроксимации).
2. Погрешность аппроксимации граничных условий.
3. Погрешность, получаемая в результате того, что система разностных уравнений решается приближенным методом.

О погрешности аппроксимации говорилось выше (см. пункт “Оценка погрешностей аппроксимации”, формулы (16),(17),(18)).

Граничные условия в рассматриваемых задачах не аппроксимируются, поэтому здесь расчет этой погрешности рассматриваться не будет.

Получение эффективной оценки погрешности приближенного решения задачи Дирихле затруднительна, поэтому для грубой оценки можно использовать метод Рунге.

Обозначим

$$R = \max |U_h(x,y) - U_{2h}(x,y)|, \quad (29)$$

где $U_h(x,y)$ и $U_{2h}(x,y)$ – решения задачи, полученные при шаге h и $2h$ соответственно. Тогда погрешность вычислений будет

$$|U_{2h}(x,y) - \tilde{U}_{2h}(x,y)| \leq \frac{R}{2^p - 1}, \quad (30)$$

где p – порядок точности при шаге h , $\tilde{U}_{2h}(x,y)$ – точное решение.

III. Задания к работе

Первая часть

Решить задачу (19), применив сеточный метод во всех внутренних точках области. Рассчитать погрешности.

Вторая часть

Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона, применив сеточный метод, во всех внутренних точках области (варианты заданий см. в табл. 3, 4). Рассчитать погрешности.

$$U_{xx} + U_{yy} = f(x,y), \quad a < x < b, \quad c < y < d.$$

$$\text{Гр. усл.: } g(x,y) = \begin{cases} g_a(y), & x = a, \\ g_b(y), & x = b, \\ g_c(x), & y = c, \\ g_d(x), & y = d. \end{cases}$$

Третья часть

Получить вычислительную модель задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

$$\text{Гр. усл.: } g(x,y) = \begin{cases} U(x,y) = 0, & \text{на верхней стороне квадрата;} \\ \frac{\partial U}{\partial x} = 1, & \text{на боковых и нижней сторонах квадрата.} \end{cases}$$

Четвертая часть

Бесконечно протяженный канал, образованный металлическими стенками, ориентирован вдоль некоторой оси. Три стенки заземлены и находятся под нулевым потенциалом. Оставшаяся стенка имеет потенциал, равный 1. Найти функцию распределения потенциала внутри канала. Длина стенок – 3, 4 м.

IV. Выполнение работы

1. Получить разностные аналоги частных производных до второго порядка включительно.
2. Рассчитать погрешности аппроксимации для вторых производных.

Первая часть

3. Для математической модели (19) получить дискретную модель.
4. Выбрать метод решения (выбор обосновать).
5. Для математической модели (19) получить вычислительную модель.
6. Составить алгоритм и программу, получить результаты. Если в качестве метода решения был выбран итерационный метод, то рассчитать количество итераций. Для метода Либмана найти решение при $\omega = 0.9, 1.0, \dots, 1.9$.
7. Рассчитать погрешность метода по формулам (29), (30).
8. Сравнить решение с решением, полученным в лаб. раб. № 1.

Вторая часть

9. Получить дискретную модель задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
10. Выбрать метод решения (выбор обосновать).
11. Получить вычислительную модель задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
12. Составить программу, получить результаты.
13. Рассчитать погрешность метода по формулам (29), (30).

Третья часть

14. Получить вычислительную модель задачи Неймана для уравнения Лапласа в конечно-разностной форме (можно – в частном случае, приняв количество внутренних точек области, равное, например, 4).

Четвертая часть

15. Дать математическое описание физической задачи – составить математическую модель (выбор модели обосновать).
16. Получить вычислительную модель.
17. Подставить в программу исходные данные, получить результат.

V. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Теоретическая часть.

По первой части

3. Список идентификаторов (составляется по образцу, указанному в лабораторной работе №1).
4. Письменно выполненные задания под пунктами 1,2,3,4,5.
5. Алгоритм и текст программы.
6. Результат работы программы.
7. Письменно выполненное задание под пунктом 7.

По второй части

8. Список идентификаторов.
9. Письменно выполненные задания под пунктами 9,10,11.
10. Алгоритм и текст программы.
11. Результат работы программы.
12. Письменно выполненное задание под пунктом 13.

По третьей части

13. Письменно выполненное задание под пунктом 14.

По четвертой части

14. Письменно выполненные задания под пунктами 15,16.
15. Результат работы программы.
16. Общий вывод по работе.

VI. Вопросы к защите

1. Какие физические задачи приводят к уравнениям эллиптического типа?
2. Какова главная особенность постановки краевых задач для эллиптических уравнений?
3. Сформулируйте задачу Дирихле для уравнения Лапласа, приведите примеры.
4. Сформулируйте задачу Неймана для уравнения Лапласа, приведите примеры.
5. Сформулируйте смешанную задачу для уравнения Лапласа, приведите примеры.
6. В чем заключается метод конечных разностей для решения дифференциальных уравнений?
7. Дать геометрическую интерпретацию правой разностной производной (формула (9)).
8. Дать геометрическую интерпретацию левой разностной производной (формула (10)).
9. Дать геометрическую интерпретацию центральной разностной производной (формула (11)).
10. Можно ли для вычисления первой производной получить формулы третьего, четвертого порядка точности? Если да, то каким образом?
11. Какими методами можно решать систему линейных уравнений, к решению которой сводится задача Дирихле, и каковы границы их применимости?
12. Что такое итерационные методы?
13. В чем заключается итерационный метод Либмана?
14. Условия сходимости метода Либмана?
15. Как оценивается полная погрешность приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, полученного методом сеток?

Таблица 3

Номер варианта	a	b	c	d	$g_a(y)$	$g_b(y)$
1	0	1	0	1	y^2	$\text{Cos}y + (2 - \text{Cos}1)y$
2	-1	1	-1	1	$e^{-(1+y^2)} - y^2$	$e^{-(1+y^2)} - y^2$
3	0	1	0	1	$e^y - e^{y^2}$	Y
4	-1	1	0	2	$-y - \text{Sin}(\frac{\pi y}{2})$	$y + \text{Sin}(\frac{\pi y}{2})$
5	-2	2	-2	2	$-2y$	$2y$
6	0	1	0	1	$-y^2 + 1$	y
7	0	1	0	1	$\text{Cos}(\frac{\pi y}{2})$	0
8	0	2	0	1	$\ln \sqrt{y^2 + 2y + 2}$	$\ln \sqrt{y^2 + 2y + 10} + \frac{4y^2}{3}$
9	0	1	0	1	0	y
10	0	1	-1	1	$\frac{1}{(y^2 + 1)} + \text{Cos}(\frac{\pi y}{2})$	$\frac{1}{y^2 + 2y + 2}$
11	0	1	0	1	$e^y + (1 - e)y^2 - 1$	y
12	0	1	0	1	y^2	$\text{Cos}y + (3 - \text{Cos}1)y$
13	0	2	0	2	$\frac{1}{(y+1)} - (y-2)^2$	$\frac{y+1}{(y^2 + 2y + 5)} + 2y - y^2$
14	0	$\pi/2$	0	π	$\text{Cos}y$	$(e+1)\text{Cos}y$
15	0	1	0	1	0	y
16	0	1	0	1	$-10y^2 - 8y + 6$	$-10y^2 - 30y + 22$
17	0	1	0	$\pi/2$	$y\text{Cos}y$	$e((y+1)\text{Cos}y + \text{Siny})$
18	0	1	0	1	$-7y^2 + 5y + 3$	$-7y^2 - 21y + 13$
19	0	1	0	1	$2e^y - (1 - 2e)y^2 - 1$	-y
20	0	1	0	1	e^{-y}	$1 - 3y^2 + e^{1-y}$
21	0	1	0	2	$-y\text{Siny}$	$e(\text{Cos}y - y\text{Siny})$
22	-1	1	-1	1	$y - 1$	$y + 1$
23	$-\pi$	π	0	π	$\pi(\frac{\pi}{2} - y)$	$\pi(y - \frac{\pi}{2})$
24	-1	1	-1	1	$1 - y^2 + e^{-y^2} \text{ch}(1)$	$1 - y^2 + e^{-y^2} \text{ch}1$
25	0	1	0	2	0	$-6y^2$

Таблица 4

Номер варианта	$g_c(x)$	$g_d(x)$	$f(x,y)$
1	x^3	$x+1$	x^2
2	$e^{-(1+x^2)} - x^2$	$e^{-(1+x^2)} - x^2$	$(4x^2 - 2)e^{-(x^2+y)} - 4$
3	$-x^3 + 1$	x^2	$3x^3 + 1$
4	0	$2x$	$-\frac{\pi^2}{2} \sin \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi y}{2}$
5	$-2x$	$2x$	$-2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y$
6	$\sin x - (1 + \sin 1)x^3 + 1$	x	$\sin(x)$
7	$\cos \frac{\pi x}{2}$	0	$-\frac{\pi^2}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2}$
8	$\ln \sqrt{x^2 + 2x + 2}$	$\ln \sqrt{x^2 + 2x + 5}$	$xy(x^2 + y^2)$
9	$\sin x - (\sin 1)x^3$	x	$\sin(x)$
10	$\frac{(x+1)}{x^2 + 2x + 2}$	$\frac{(x+1)}{x^2 + 2x + 2}$	$-\frac{\pi^2}{4} (1-x) \cos \frac{\pi y}{2}$
11	0	x	e^y
12	x^3	$2x+1$	$\cos(y)$
13	$-(x-2)^2 \frac{1}{x^2 + 1}$	$2x - x^2 + \frac{3}{x^2 + 9}$	-4
14	$e^x + \sin x$	$-e^x + \sin x$	$-2 \sin x \cos y$
15	$\sin x - (\sin 1)x^3$	x^2	$x^3 \sin(x)$
16	$9x^2 + 7x + 6$	$9x^2 - 15x - 12$	$x^2 + y^2$
17	x	xe^x	$-x \cos y$
18	$6x^2 + 4x + 3$	$6x^2 + 12x + 9$	$7y^2 + 6x^2$
19	$-x^3 + 1$	$x-2$	e^y
20	$x^3 + e^x$	$x^3 - 3x + e^{x-1}$	$2e^{x-y}$
21	xe^x	$e^x (x \cos 2 - 2 \sin 2)$	$-\frac{5\pi^2}{4} \sin \pi x \cos \frac{\pi y}{2}$
22	$x-1$	$x+1$	$-4\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y$
23	$-\frac{\pi}{2} x$	$\frac{\pi}{2} x$	$-\frac{1}{2} (5 \cos 2x - 1) \sin y$
24	$x^2 + \frac{1}{e} \operatorname{ch} 1 - 1$	$x^2 + \frac{1}{e} \operatorname{ch} 1 - 1$	$(4y^2 - 1) \operatorname{ch} x e^{-y^2}$
25	0	$-24x^2$	$-12(x^2 + y^2)$

Лабораторная работа №3

ПРИМЕНЕНИЕ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

I. Цель работы

Получение дискретных и вычислительных моделей краевых задач для уравнения теплопроводности. Сравнение явных и неявных разностных схем, исследование их на устойчивость.

II. Краткая теория

Нестационарные физические процессы, то есть процессы, зависящие от времени, как правило, описываются гиперболическими или параболическими уравнениями. К уравнениям гиперболического типа приводят задачи о колебаниях сплошных сред (струна, стержень, мембрана, газ и др.) и задачи об электромагнитных колебаниях. Уравнения параболического типа получаются при исследовании таких физических явлений, как теплопроводность, диффузия, распространение электромагнитных полей в проводящих средах, движение вязкой жидкости. Эти физические процессы могут быть охарактеризованы функциями, зависящими от времени и пространственных координат.

Простейшим модельным уравнением параболического типа, является уравнение, описывающее теплоперенос вдоль одномерного стержня

$$U_t = a^2 U_{xx}^1,$$

где a^2 – коэффициент температуропроводности стержня. Вообще, эта модель, не смотря на свою простоту, содержит в себе характерные черты сложных параболических уравнений, описывающих различные диссипативные процессы (типа теплопроводности или диффузии) в плазме, в магнитной гидродинамике, в биологии и т. д.

Для того чтобы найти температурное поле внутри тела в любой момент времени, надо помимо геометрической формы тела знать распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и закон взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела (граничные условия).

¹ Если U – концентрация, то это уравнение описывает диффузию вещества, поэтому его иногда называют уравнением диффузии.

Начальное условие определяется заданием закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени, то есть при $t = 0$.

Граничные условия могут быть заданы различными способами:

1. Граничное условие первого рода состоит в задании распределения температуры по поверхности тела в любой момент времени:

$$U(0,t)=\varphi_1(t); \quad U(1,t)=\varphi_2(t); \quad 0 < x < 1.$$

2. Граничное условие второго рода состоит в задании плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела как функции времени (закон Фурье)

$$q = -\sigma \lambda \frac{\partial U}{\partial x},$$

где q – количество тепла, протекающее в единицу времени в направлении оси x через площадку σ перпендикулярно к оси x , U – температура в рассматриваемом месте тела, λ – коэффициент теплопроводности¹.

3. Граничное условие третьего рода характеризует закон конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей жидкой или газообразной средой (закон Ньютона)

$$q = \sigma \alpha (U - U_0),$$

где q – количество тепла, протекающее в единицу времени в направлении оси x через площадку σ поверхности тела в окружающую среду, U – температура поверхности тела, U_0 – температура окружающей среды, α – коэффициент теплообмена².

Численное решение таких задач возможно на основе метода конечных разностей. Для этого в уравнении заменяют все частные производные их конечно-разностными аналогами. От выбора разностных аппроксимаций будет зависеть вид сеточного шаблона. В данной работе остановимся на получении явной четырехточечной и неявной шеститочечной схем для уравнения теплопроводности.

¹ λ зависит от физических свойств тела и от температуры U , но в достаточно широких пределах зависимостью λ пренебрегают, беря λ для среднего значения температуры.

² Все, что сказано в предыдущей сноске о зависимости λ от температуры, в известных пределах распространяется и на α .

Явные разностные схемы

Основная идея явных разностных схем состоит в том, что после замены нестационарного дифференциального уравнения конечно-разностным получаются формулы, явно выражающие значения решения для одного момента времени через значения решения в предыдущий момент времени. То есть, если известно решение в начальный момент времени, то можно по **схеме** так называемого **бегущего счета** найти решение при $t = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$. Заменяя частные производные по времени и по пространственной переменной конечно-разностными производными, можно получить явные выражения для U_{ij} через значения функции в предыдущие моменты времени. Такой процесс называется **явной схемой бегущего счета**.

Явная схема для уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу теплопроводности в стержне, начальная температура которого равна единице. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Коэффициент температуропроводности равен единице. Математическая модель данной задачи будет иметь вид:

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty, \\ \text{Гр. усл. } \begin{cases} U(0, t) = 0, \\ U(1, t) = 0, \end{cases} & \\ \text{Нач. усл. } U(x, 0) &= 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Построим в плоскости (t, x) прямоугольную сетку (рис.7):

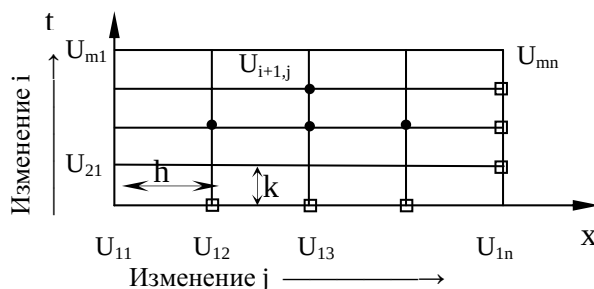


Рис. 7

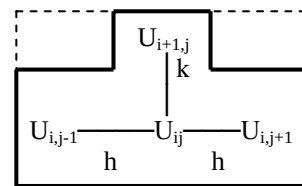


Рис. 8

Отметим, что значения U_{ij} на левой и нижней сторонах сетки известны из граничных и начальных условий и задача состоит в отыскании остальных значений U_{ij} . Для составления разностного уравнения по задаче

(31) потребуются аналоги для первой и второй частных производных. Используя выражения (20) из лабораторной работы № 2, получим:

$$U_t = \frac{1}{k} [U_{i+1,j} - U_{i,j}], \quad (32)$$

$$U_{xx} = \frac{1}{h^2} [U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}]. \quad (33)$$

Подставив эти выражения в уравнение $U_t = U_{xx}$, получим дискретную модель задачи (31)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} [U_{i,j+1} - U_{i,j}] &= \frac{1}{h^2} [U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}], \\ U_{i0} = U_{in} &= 0, \quad U_{j0} = 1, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

Разрешим получившееся уравнение относительно значений функции на верхнем временном слое

$$U_{i+1,j} = U_{i,j} + \frac{k}{h^2} [U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}]. \quad (34)$$

Это и есть искомая формула, поскольку она выражает решение в данный момент времени через решение в предыдущий момент времени (индекс i относится к временной переменной). На рис. 7, 8 выделены те значения, которые входят в формулу (34). Вычисления по формуле (34) производятся на всех временных слоях, то есть во всех точках U_{ij} , где $j = 1, 3, \dots, n-2$, $i = 1, 3, \dots, m-1$. Значения в точках U_{i1} и U_{in} берутся из граничных условий, а в точках U_{1j} – из начальных.

Итак, для математической модели (31) в результате получили следующую вычислительную модель

$$\begin{aligned} U_{i+1,j} &= U_{i,j} + \frac{k}{h^2} [U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}], \quad i = \overline{1, m-1}; \quad j = \overline{1, n-2}; \\ U_{i0} = U_{in} &= 0, \quad U_{j0} = 1, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{0, n-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Неявные разностные схемы

В неявных разностных схемах частные производные также заменяются конечно-разностными аппроксимациями, но $U_{i+1,j}$ уже не выражаются в явном виде через значения на предыдущих слоях. В том случае для определения величин $U_{i+1,j}$ необходимо решить систему уравнений. То есть для определения решения на каждом временном шаге необходимо решать систему уравнений.

Неявная схема для уравнения теплопроводности

Для математической модели (31) составим разностное уравнение в виде неявной шеститочечной схемы Кранка – Никольсона. Воспользуемся следующими конечно-разностными аппроксимациями:

$$U_t(x, y) = \frac{1}{k} [U(x, t + k) - U(x, t)], \quad (36)$$

$$U_{xx}(x, t) = \frac{\lambda}{h^2} [U(x + h, t + k) - 2U(x, t + k) + U(x - h, t + k)] + \frac{1 - \lambda}{h^2} [U(x + h, t) - 2U(x, t) + U(x - h, t)], \quad (37)$$

где λ выбирается из отрезка $[0, 1]$. Отметим, что U_{xx} аппроксимируется **взвешенным средним** центральных разностных производных в момент t и $t + k$. При $\lambda = 0,5$ получается обычное среднее этих двух центральных производных, а при $\lambda = 0,75$ – одна из разностных производных берется с весом $0,75$, а вторая – с весом $0,25$. При $\lambda = 0$ получается обычная центральная разностная производная.

После замены частных производных U_t и U_{xx} в задаче (31) получаем следующее разностное уравнение:

$$\frac{1}{k} (U_{i+1,j} - U_{i,j}) = \frac{\lambda}{h^2} (U_{i+1,j+1} - 2U_{i+1,j} + U_{i+1,j-1}) + \frac{(1-\lambda)}{h^2} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}), \quad (38)$$

Перенесем все неизвестные значения U с верхнего временного слоя (с индексом $i + 1$) в левую часть уравнения (38) и получим:

$$-\frac{\lambda k}{h^2} U_{i+1,j+1} + \left(1 + \frac{2\lambda k}{h^2}\right) U_{i+1,j} - \frac{\lambda k}{h^2} U_{i+1,j-1} = \frac{k(1-\lambda)}{h^2} U_{i,j+1} + \left(1 - \frac{2k(1-\lambda)}{h^2}\right) U_{i,j} + \frac{k(1-\lambda)}{h^2} U_{i,j-1} \quad (39)$$

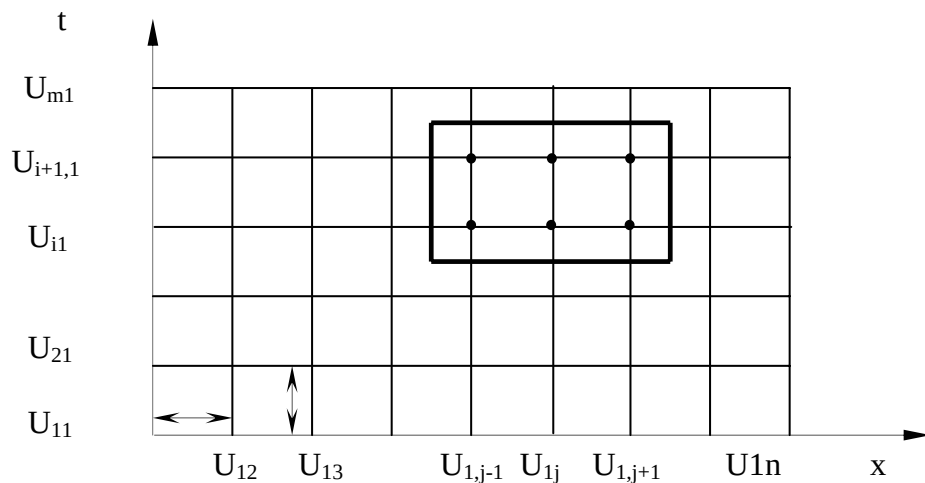


Рис. 9

На рис. 9 изображен вычислительный шаблон данной схемы. Если i фиксирован, а j изменяется от 1 до $n-2$, соотношения (39) определяют систему $n-2$ уравнений с $n-2$ неизвестными $U_{i+1,2}, U_{i+1,3}, \dots, U_{i+1,n-1}$, которые являются решением задачи во внутренних узлах сетки на временном слое $t = (i+1)\Delta t$.

Если переписать уравнения (39) в матричной форме, то получим так называемую трехдиагональную матрицу. Наиболее распространенным решением трехдиагональной системы является метод прогонки. Чтобы решить трехдиагональную систему

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix},$$

ее преобразуют в эквивалентную систему вида

$$\begin{bmatrix} 1 & c_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & c_2^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_3^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{n-1}^* \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix},$$

где

$$c_1^* = \frac{c_1}{b_1}, \quad c_{j+1}^* = \frac{c_{j+1}}{b_{j+1} - a_j c_j^*}, \quad j = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$d_1^* = \frac{d_1}{b_1}, \quad d_{j+1}^* = \frac{d_{j+1} - a_j d_j^*}{b_{j+1} - a_j c_j^*}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Решая уравнения последовательно снизу вверх, получаем

$$x_n = d_n^*, \quad x_j = d_j^* - c_j^* x_{j+1}, \quad j = n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

Исследование разностных схем на устойчивость

Как было сказано в лабораторной работе № 2, устойчивость схемы означает непрерывную зависимость решения разностного уравнения от входных данных (от начальных данных, от правой части и от краевых ус-

ловий). Иными словами, решение разностной задачи устойчиво, если оно мало меняется при малом изменении входных данных задачи. В противном случае, малые ошибки, допускаемые на промежуточных этапах вычислительного процесса, будут приводить к большим искажениям решения, и такую схему называют неустойчивой. Она не пригодна для практики.

Запишем разностную схему, аппроксимирующую дифференциальное уравнение на ограниченной области D при $0 \leq t \leq T$, в виде

$$\begin{aligned} L_h U^{(h)} &= F^{(h)} \\ U^{(h)}|_{t=0} &= U_0^{(h)} \\ U^{(h)}|_{\partial D} &= G^{(h)} \end{aligned} \quad (40)$$

где L_h – разностный оператор, $U^{(h)}$ – сеточная функция, $U_0^{(h)}$ – начальные условия, $G^{(h)}$ – граничные условия.

Пусть решение задачи (40) существует и единственно для любых функций $F^{(h)}$, $U_0^{(h)}$, $G^{(h)}$. Будем называть решение задачи (40) устойчивым (соответственно схему (40) – устойчивой), если для любых $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$ найдется $h_0 > 0$ такое, что для решения “возмущенной” задачи

$$\begin{aligned} L_h Z^{(h)} &= F^{(h)} + \delta_1 f^{(h)} & c \quad \|\delta_1 f^{(h)}\| &= \max_{D, 0 \leq t \leq T} |\delta_1 f^{(h)}| \leq \varepsilon_1 \\ U^{(h)}|_{t=0} &= U_0^{(h)} + \delta_2 u^{(h)} & c \quad \|\delta_2 u^{(h)}\| &= \max_{D, t=0} |\delta_2 u^{(h)}| \leq \varepsilon_2 \\ U^{(h)}|_{\partial D} &= G^{(h)} + \delta_3 g^{(h)} & c \quad \|\delta_3 g^{(h)}\| &= \max_{\partial D, 0 \leq t \leq T} |\delta_3 g^{(h)}| \leq \varepsilon_3 \end{aligned}$$

имеет место неравенство

$$\|Z^{(h)} - U^{(h)}\| \leq M_1 \|\delta_1 f^{(h)}\| + M_2 \|\delta_2 u^{(h)}\| + M_3 \|\delta_3 g^{(h)}\| \leq M_1 \varepsilon_1 + M_2 \varepsilon_2 + M_3 \varepsilon_3 \leq C \varepsilon$$

при любом $0 \leq h \leq h_0$ с константами M_1, M_2, M_3, C , не зависящими от h .

В линейном случае (если разностный оператор L_h – линейный) определение устойчивости может быть сформулировано в следующем виде.

Разностная схема (40) устойчива, если для любых функций $F^{(h)}$, $U_0^{(h)}$, $G^{(h)}$ имеет единственное решение $U^{(h)}$: такое, что

$$\|U^{(h)}\| \leq M_1 \|F^{(h)}\| + M_2 \|U_0^{(h)}\| + M_3 \|G^{(h)}\|,$$

где

$$\|F^{(h)}\| = \max_{D, 0 \leq t \leq T} |F^{(h)}|, \quad \|U_0^{(h)}\| = \max_{D, t=0} |U_0^{(h)}|, \quad \|G^{(h)}\| = \max_{\partial D, 0 \leq t \leq T} |G^{(h)}|, \quad \|U^{(h)}\| = \max_D |U^{(h)}|,$$

M_1, M_2, M_3 – положительные постоянные, не зависящие от шагов разбиения сетки.

Так как в разностной схеме (35) краевые условия однородные, а правая часть равна 0, то исследование ее на устойчивость по входным данным сводится к исследованию на устойчивость только по начальным данным.

Разностная схема (35) устойчива по начальным данным, если при достаточно малых шагах разбиения сетки имеет место неравенство:

$$\|U_{j+1}\| \leq M_1 \|U_0\|, \quad (41)$$

где $\|U_j\| = \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{ij}|$, $\|U_0\| = \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i0}|$, n – количество узловых точек на одном временном слое, M_1 – положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Перепишем (35) в виде

$$U_{i+1,j} = \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) U_{i,j} + \frac{k}{h^2} (U_{i,j+1} + U_{i,j-1}).$$

Поскольку

$$|U_{i+1,j}| = \left| \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) U_{i,j} + \frac{k}{h^2} (U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) \right|,$$

то, учитывая, что $|a + b| \leq |a| + |b|$, получим

$$|U_{i+1,j}| \leq \left| \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) U_{i,j} \right| + \left| \frac{k}{h^2} U_{i,j+1} \right| + \left| \frac{k}{h^2} U_{i,j-1} \right|.$$

Если

$$\left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) \geq 0, \quad \Rightarrow k \leq \frac{h^2}{2}, \quad (42)$$

то

$$|U_{i+1,j}| \leq \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) |U_{i,j}| + \frac{k}{h^2} |U_{i,j+1}| + \frac{k}{h^2} |U_{i,j-1}|.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i+1,j}| \leq \max_{1 \leq i \leq n-2} \left(\left(1 - \frac{2k}{h}\right) |U_{i,j}| + \frac{k}{h^2} |U_{i,j+1}| + \frac{k}{h^2} |U_{i,j-1}| \right). \quad (43)$$

Оценим правую часть (43)

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i+1,j}| &\leq \max_{1 \leq i \leq n-2} \left(\left(1 - \frac{2k}{h}\right) |U_{i,j}| \right) + \max_{1 \leq i \leq n-2} \left(\frac{k}{h^2} |U_{i,j+1}| \right) + \max_{1 \leq i \leq n-2} \left(\frac{k}{h^2} |U_{i,j-1}| \right) = \\ &= \left(1 - \frac{2k}{h}\right) \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i,j}| + \frac{k}{h^2} \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i,j+1}| + \frac{k}{h^2} \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i,j-1}| \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{2k}{h}\right) \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i,j}| + \frac{k}{h^2} \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i,j}| + \frac{k}{h^2} \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i,j}| = \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i,j}|, \end{aligned}$$

получим, что

$$\max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i+1,j}| \leq \max_{1 \leq i \leq n-2} |U_{i,j}|,$$

или

$$\|U_{i+1}\| \leq \|U_i\|.$$

Учитывая, что

$$\|U_i\| \leq \|U_{i-1}\|, \quad \|U_{i-1}\| \leq \|U_{i-2}\|, \quad \|U_{i-2}\| \leq \|U_{i-3}\|, \quad \dots$$

получим

$$\|U_{i+1}\| \leq \|U_0\|.$$

Таким образом, явная разностная схема устойчива по начальным данным при условии (42), которое накладывает ограничения на шаги сетки.

Вопросы устойчивости более подробно см. в [3], [5], [11], [12], [15], [16], [26], [28]-[31].

III. Задания к работе

Первая часть

Начальная температура стержня распределяется по закону: $\sin(\pi x)$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Коэффициент температуропроводности равен единице. Найти температуру стержня в момент времени $T = 1$. (44)

Протабулировать аналитическое решение задачи (44)

$U(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ и сравнить с численным.

Вторая часть

Составить математическую и вычислительную модели задачи теплопроводности (варианты заданий см. в конце лабораторной работы).

IV. Выполнение работы

Первая часть

1. Построить математическую модель задачи (44).
2. Построить дискретную модель в виде явной разностной схемы.
3. Выяснить, с каким порядком точности полученная схема аппроксимирует задачу (44).
4. Исследовать ее на устойчивость.
5. Выбрать численный метод решения.
6. Выбрать шаг разбиения сетки (выбор обосновать).
7. Построить вычислительную модель.
8. Составить программу, получить результаты с различными шагами.
9. Построить дискретную модель задачи (44) в виде неявной разностной схемы (параметр λ взять равным 0,5).
10. Выяснить, с каким порядком точности полученная схема аппроксимирует задачу (44).
11. Исследовать ее на устойчивость.
12. Выбрать численный метод решения.
13. Выбрать шаг разбиения сетки (выбор обосновать).
14. Построить вычислительную модель.
15. Составить алгоритм и программу, получить результаты с различными шагами.
16. Протабулировать аналитическое решение и сравнить с полученными численными решениями.
17. Провести сравнительный анализ явной и неявной разностных схем.

Вторая часть

18. Составить математическую модель задачи теплопроводности.
19. Получить вычислительную модель задачи теплопроводности (в основу положить либо явную, либо неявную схему по усмотрению).

V. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Теоретическая часть.

По первой части

3. Список идентификаторов.
4. Письменно выполненные задания под пунктами 1-7.
5. Текст программы.
6. Результат работы программы.
7. Список идентификаторов.
8. Письменно выполненные задания под пунктами 9-14.
9. Алгоритм и текст программы.
10. Результат работы программы.
11. Письменно выполненное задание под пунктом 17.

По второй части

12. Список идентификаторов.
13. Письменно выполненные задания под пунктами 18,19.

VI. Вопросы к защите

1. Какие физические задачи приводят к уравнениям параболического типа?
2. Какие физические задачи приводят к уравнениям гиперболического типа?
3. Сформулируйте граничное условие первого рода для уравнения теплопроводности.
4. Сформулируйте граничное условие второго рода для уравнения теплопроводности.
5. Сформулируйте граничное условие третьего рода для уравнения теплопроводности.
6. Как вы понимаете, что такое явная разностная схема?
7. Как вы понимаете, что такое неявная разностная схема?
8. Для разностной схемы (39) подобрать λ так, чтобы аппроксимация была $O(\tau^2 + h^2)$.
9. Связав шаги разностной схемы (39) соотношением $r = \tau / h^2 = \text{const}$, подобрать затем λ так, чтобы получить аппроксимацию порядка h^4 .
10. Для разностной схемы (39) при $\lambda=0$ подобрать число $r = \tau / h^2$ так, чтобы аппроксимация имела порядок h^4 .
11. Построить для задачи (31) разностную схему второго порядка точности с шаблоном:

$$\begin{array}{ccccc} U_{i-1,j+1} & \text{---} & U_{ij+1} & \text{---} & U_{i+1,j+1} \\ & h & & h & \\ & & | & & \\ & & k & & \\ & & U_{i,j} & & \end{array}$$

12. Сформулируйте условие устойчивости для однородной линейной разностной схемы с ненулевыми краевыми и начальными условиями.
13. Пусть в разностной схеме (39) $r = \tau / h^2 = \text{const}$. При каких значениях параметра $\lambda > 0$ она будет безусловно устойчивой?
14. В чем недостатки и преимущества явной четырехточечной разностной схемы?
15. В чем недостатки и преимущества неявной шеститочечной разностной схемы Кранка – Никольсона?

Варианты задач

1. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является некоторой функцией $f(x)$, а концы стержня поддерживаются при заданной температуре $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$. Коэффициент температуропроводности a^2 .
2. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является некоторой функцией $f(x)$, а на концы стержня подается извне заданный тепловой поток $q_1(t)$ и $q_2(t)$. Коэффициент температуропроводности a^2 ; коэффициент теплопроводности материала стержня λ ; площадь поперечного сечения σ .
3. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является некоторой функцией $f(x)$, а на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой. Коэффициент температуропроводности a^2 ; коэффициент теплопроводности материала стержня λ ; коэффициент теплообмена α ; значение температуры окружающей среды у концов стержня $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.
4. Поставить краевую задачу о нагревании полуограниченного стержня, если конец стержня горит, причем фронт горения распространяется с постоянной скоростью v_0 и имеет известную температуру $\varphi(t)$. Начальная температура стержня равна нулю. Коэффициент температуропроводности a^2 .
5. Неограниченный стержень с постоянным поперечным сечением получен соединением двух однородных полуограниченных стержней с различными коэффициентами теплопроводности и температуропроводности.

сти. Поставить краевую задачу об определении температуры в этом стержне, если концы составляющих стержней соединены непосредственно (приварены торцом к торцу). Коэффициенты температуропроводности в стержнях соответственно – $a_1^2; a_2^2$. Коэффициенты теплопроводности материалов стержней – λ_1, λ_2 . Начальная температура стержней является некоторой функцией $f(x)$. Поверхность стержня считать теплоизолированной.

6. Поставить краевую задачу о нагревании тонкого стержня, по которому скользит с постоянной скоростью v_0 плотно прилегающая электропечь постоянной мощности, если внешняя поверхность печи, не прилегающая к стержню, теплоизолирована, а теплоемкость печи пренебрежимо мала. Коэффициент температуропроводности – a_2 . Коэффициент теплопроводности материала стержня – λ . Площадь поперечного сечения – σ ; Q – количество тепла, выделяемое электропечью в единицу времени. Начальная температура стержня является функцией $f(x)$.
7. Начальная температура неограниченной пластины толщиной $2h$ равна нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры по толщине пластины, если пластина нагревается с обеих сторон равными постоянными тепловыми потоками q .
8. Дана тонкая прямоугольная пластина со сторонами l, m , для которой известно начальное распределение температуры. Поставить краевую задачу о распространении тепла в пластине, если боковые стороны поддерживаются при температуре $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_1(y), \psi_2(y)$.
9. Два полуограниченных стержня, сделанных из разных материалов, в начальный момент времени приведены в соприкосновение своими концами. Поставить краевую задачу о распределении тепла в бесконечном стержне, если известны начальные температуры каждого из двух полуограниченных стержней.
10. Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры в тонкой прямоугольной пластине $OACB$ со сторонами $OA=a, OB=b$, если на боковых сторонах пластины поддерживаются заданные температуры.
11. Поставить краевую задачу о стационарном распределении температуры в тонкой прямоугольной пластине $OACB$ со сторонами $OA=a, OB=b$, если на сторонах OA и OB заданы тепловые потоки, а стороны BC и AC теплоизолированы.

Лабораторная работа № 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

I. Цель работы

Провести полную математическую обработку физической задачи в соответствии с этапами, изложенными во введении.

II. Краткая теория

Рассмотрим некоторые подходы к построению математических моделей, иллюстрирующие применение фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. На первый план выдвигаются вопросы, связанные с тем, какой закон (законы) следует применить в данном случае и как это делать.

Закон инерции

Рассмотрим одномерную среду, состоящую из частиц, движущихся по инерции (то есть без взаимодействия и в отсутствии внешних сил). Обозначим через $U(x,t)$ – скорость частицы, находящейся в момент времени t в точке x . Если $x = \varphi(t)$ – траектория движения некоторой фиксированной частицы, то ее скорость $\varphi'(t) = U(t, \varphi(t))$, ускорение $\varphi''(t)$ равно нулю. Значит,

$$0 = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} U(t, \varphi(t)) = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \varphi' = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} U.$$

Полученное квазилинейное гиперболическое уравнение

$$U_t + UU_x = 0,$$

описывающее в данном случае эволюцию поля скоростей U невзаимодействующих частиц, называется уравнением Хопфа.

Закон сохранения массы вещества

Рассмотрим процесс движения жидкости в n -мерном евклидовом пространстве R^n при отсутствии источников и стоков. Обозначим через $v(x,t) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ – вектор скорости движения жидкости, $\rho(x,t)$ – ее плот-

плотность. Зафиксируем произвольную область V в R_n . В момент времени t масса жидкости, содержащейся в этой области, равна

$$M_V(t) = \int_V \rho(x, t) dx,$$

скорость изменения этой массы есть $\frac{dM_V}{dt}$. С другой стороны, при отсутствии источников и стоков внутри V , изменение массы M_V происходит только от втекания и вытекания жидкости через границу ∂V рассматриваемой области, то есть скорость изменения массы $M_V(t)$ равна потоку жидкости через ∂V :

$$\frac{dM_V}{dt} = - \int_{\partial V} (v(x, t), n) \rho(x, t) dS_x.$$

Здесь $(v(x, t), n)$ – скалярное произведение вектора скорости v и вектора единичной внешней нормали n к границе в точке $x \in \partial V$, dS_x – элемент площади на ∂V .

Таким образом, имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dx = - \int_{\partial V} (v(x, t), n) \rho(x, t) dS_x.$$

Предположим, что ρ и v достаточно гладкие функции и преобразуем правую часть последнего равенства по формуле Остроградского-Гаусса (интеграл от дивергенции по некоторой области равен потоку через ее границу):

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int_V \operatorname{div}(\rho v) dx,$$

где div – оператор дивергенции по пространственным переменным x . Отсюда в силу произвольности V в R_n приходим к уравнению для $\rho(x, t)$, отвечающему закону сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (45)$$

с начальным условием

$$\rho(x, t) = \rho_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (46)$$

Таким образом, скорость изменения плотности жидкости $\rho(x, t)$ со временем в любом сечении области определяется “скоростью” изменения потока жидкости $\rho(x, t)v(\rho(x, t))$ через это сечение. Схожим свойством обладают многие модели, отвечающие законам сохранения и описывающие совсем другие процессы.

В частности, уравнение (45) может описывать процесс неинерционного движения частиц какого-то вещества (пылинок, электронов и т. д.) в ограниченной области (это означает, что скорость частиц может изменяться лишь под действием внешних сил). В этом случае необходимо ввести предположение о том, что частицы между собой не взаимодействуют (не сталкиваются, не притягиваются и т.д.). Для этого плотность частиц должна быть достаточно малой, тогда заряженные частицы не только не будут сталкиваться, но и не будут оказывать влияния друг на друга из-за большого расстояния между ними.

Применение закона сохранения массы вещества при построении модели, описывающей течение сжимаемого газа, также может привести к уравнению (45), где $\rho(x,t)$ - плотность газа. В этом случае оно называется уравнением неразрывности для сжимаемого газа и является одним из основных уравнений в газовой динамике.

В одномерном случае уравнение (45) перепишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x,t)v(\rho(x,t))) = 0,$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \rho = 0 \quad (47)$$

Если скорость $v(\rho(x,t)) = v_0$ постоянна, то приходим к простейшему линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (48)$$

Его общее решение можно найти, приняв во внимание, что уравнение (48) имеет характеристики – линии $x = v_0 t + C$, на которых значения искомой функции постоянны во времени, то есть $\rho(x = v_0 t + C, t) = \rho_c$, или, в эквивалентной записи,

$$\rho(x,t) = \rho(x + v_0(t - t_0), t_0), \quad t - t_0 \geq 0.$$

Выбирая $t_0 = 0$, получим

$$\rho(x,t) = \rho(\xi) = \rho(x + v_0 t). \quad (49)$$

Интеграл (49) является общим решением уравнения (48). Из формулы (49) и начальных данных (46) можно найти искомую функцию, причем она зависит не по отдельности от переменных x, t , а от их комбинации $\xi = x + v_0 t$ (*бегущая волна*). Пространственный профиль плотности без искажений переносится вдоль потока (рис. 10) с постоянной скоростью. Уравнение (48)

называют также *уравнением переноса*. Это основное свойство решения уравнения (48) несколько модифицируется в случае, когда скорость зависит от времени, профиль плотности переносится за равные промежутки времени на разные расстояния. Если же скорость потока зависит от плотности ($v = v(\rho(x,t))$), то процесс движения жидкости, газа или заряженных частиц в этом случае описывается нелинейным уравнением (47), и поведение его решения может иметь качественно иной характер.

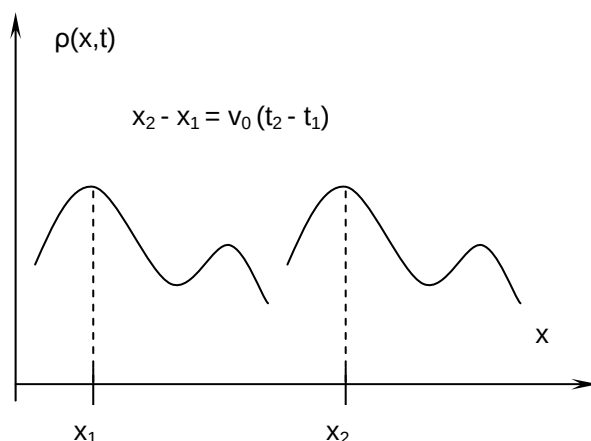


Рис. 10

Это хорошо видно из следующего примера. Упрощение ряда сложных моделей в газовой динамике приводит к уравнению Хопфа в лагранжевых координатах, записанному относительно плотности $\rho(m,t)$ ¹ (подробный вывод этого уравнения см. в [23]).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sqrt{a_0} \rho^\sigma \frac{\partial \rho}{\partial m} = 0, \quad (50)$$

где a_0 и $\sigma > 1$ – некоторые постоянные.

Уравнение (50) первого порядка, но оно содержит типичную газодинамическую нелинейность и поэтому служит хорошей моделью для изучения нелинейных эффектов, характерных для течений сжимаемого газа. Самый яркий из них – “градиентная катастрофа”, заключающаяся в появлении в волнах сжатия бесконечных градиентов газодинамических величин, несмотря на то, что в начальный момент все функции являются гладкими.

¹ В лагранжевом подходе координата связывается не с определенной точкой пространства, а с определенной фиксированной частицей вещества – жидкой частицей. Если при математическом моделировании процесса течения сжимаемого газа ввести лагранжеву координату по правилу $m(x) = \int_{x_0}^x \rho(x,t) dx$, $dm = \rho dx$, то все газодинамические

величины будут трактоваться как зависящие не от x,t , а от m,t (в этом случае лагранжевая переменная называется массовой координатой).

Поясним это понятие следующими простыми рассуждениями. Уравнение Хопфа может быть записано в характеристическом виде

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_s = 0. \quad (51)$$

Здесь индекс s означает, что полная производная по времени берется вдоль характеристики – линии в координатах m, t , на которой значение решения (плотности) остается постоянным во все моменты. Раскрывая (51) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dm_s(t)}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial m} = 0, \quad (52)$$

где $m_s(t)$ – значение координаты m для данной характеристики в разные моменты времени, и сравнивая (52) и (50), находим уравнение характеристики

$$m_s(t) = \sqrt{a_0} \rho^\sigma t + m_s(0).$$

Из этого выражения видно, что состояния с большим значением плотности распространяются по массе газа с большей скоростью, чем состояния с меньшей плотностью, и в какой-то момент времени “догоняют” последние. В решении образуется неоднозначность, его градиенты в точке “слияния” состояний с разными плотностями неограниченно возрастают. Схематически этот процесс изображен на (рис.11), где показана эволюция со временем начального профиля плотности треугольной формы: вершина треугольника через некоторое время оказывается в точке, с той же координатой m_k , что и его передний фронт.

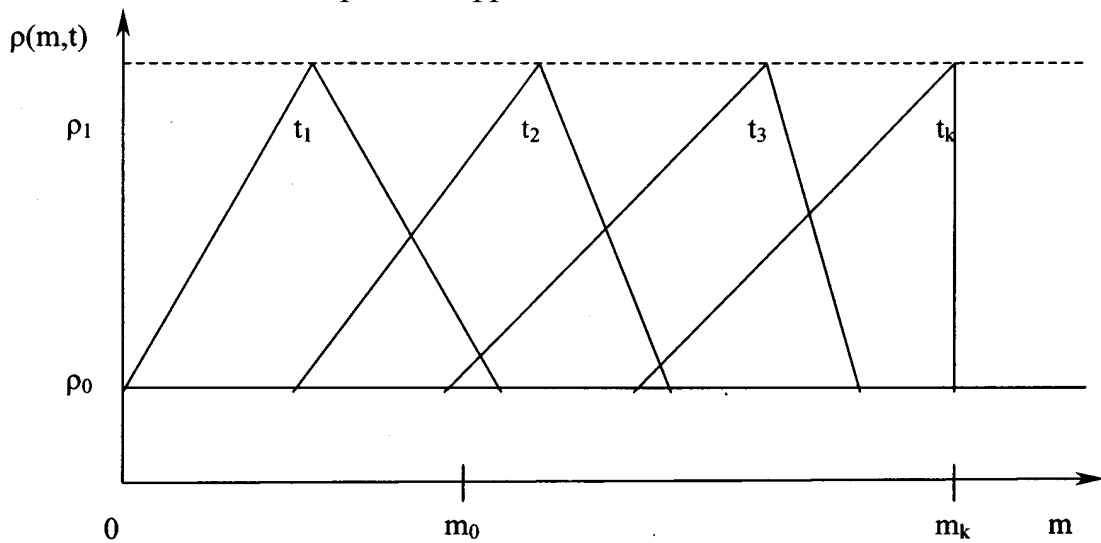


Рис. 11

“Градиентная катастрофа” – нелинейный эффект. Он не возникает в линейном уравнении переноса (48), которое, кстати, можно также получить и из (50) при рассмотрении малых возмущений в окрестности постоянного решения. Существование этого эффекта приводит к необходимости рассматривать разрывные решения. В этом состоит важное отличие нелинейных гиперболических уравнений от линейных.

Закон сохранения для задачи дорожного движения

Оказывается, закон сохранения применим и при моделировании задач, достаточно отвлеченных от гидродинамики и газовой динамики. С его помощью можно с успехом математически описать, например, задачу дорожного движения.

Предположим, что автомобили движутся слева направо по скоростной автостраде, у которой нет боковых съездов и въездов.

Обозначим:

$U(x,t)$ – плотность автомобилей в точке x (число автомобилей на единицу длины),

$f(x,t)$ – поток автомобилей в точке x (число автомобилей, проходящих через точку x в одну минуту).

На участке дороги $[a,b]$ изменение числа автомобилей (за единицу времени) – I задается следующими двумя выражениями:

$$I = \frac{d}{dt} \int_a^b U(x,t) dx,$$

$$I = f(a,t) - f(b,t) = - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dx.$$

Второе соотношение – следствие основной теоремы интегрального исчисления. Приравнявая эти два интеграла, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_a^b U(x,t) dx = - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dx.$$

Поскольку промежуток $[a,b]$ произволен, делаем вывод, что подынтегральные функции равны, то есть выполняется закон сохранения:

$$U_t + f_x = 0.$$

Некоторые обобщения

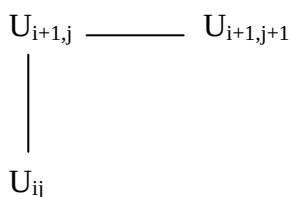
Как вы, наверное, уже успели заметить, математическими моделями многих физических, химических задач, задач газовой динамики, гидродинамики являются нелинейные уравнения гиперболического типа. В этих

уравнениях одной из независимых переменных, как правило, является время, а физические процессы, моделируемые ими, протекают достаточно долго. Основные особенности у решений таких задач: слабые разрывы, когда само решение еще непрерывно, но разрывной становится производная, и сильные разрывы, когда за конечное время решение приобретает разрыв первого рода. Построение точных решений задач данного типа возможно далеко не всегда, поэтому часто используют численные методы для приближенного вычисления этих решений.

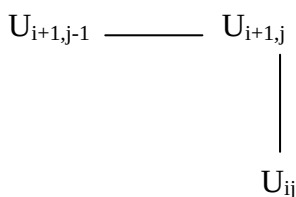
Численное решение нелинейных уравнений первого порядка гиперболического типа

На этапе построения дискретной модели, аппроксимирующей математическую модель, используя разностные аналоги, заменяют исходное дифференциальное уравнение конечно-разностным. Некоторые возможные шаблоны разностных схем приведены на рис. 12.

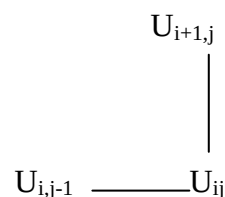
Неявный левый уголок



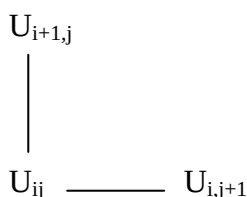
Неявный прав. уголок



Явный левый уголок



Явный правый уголок



Явная четырехточечная схема

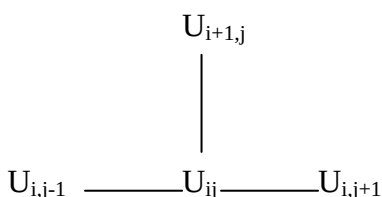
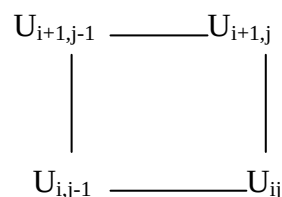
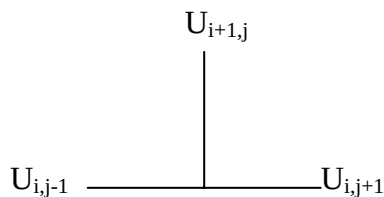


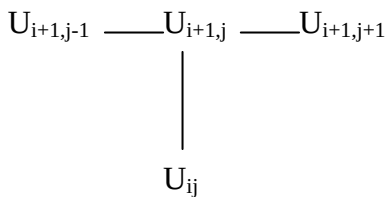
Схема «прямоугольник»



**Явная центральная
трехточечная схема**



Неявная четырехточечная схема



Неявная шеститочечная схема

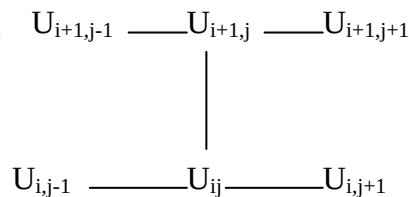


Рис.12

Далее выясняют порядок аппроксимации разностной схемы, исследуют ее на устойчивость, и дают прогноз (по возможности, конечно), какие свойства разностного решения будут в основном наблюдаться после численных расчетов: дисперсионные или диссипативные. Перед изучением свойств и тем более до решения нелинейной задачи необходимо полностью исследовать соответствующую ей линеаризованную задачу, дать теоретический прогноз поведения ее решения, выполнить по ней численный расчет и сравнить его с теоретическим предположением. И только после этого можно приступить к решению нелинейной задачи.

Для теоретического исследования свойств разностного решения в линейном случае следует найти дифференциальное приближение исследуемой разностной схемы.

Дифференциальное приближение разностной схемы

Сеточная функция в общем случае не удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое аппроксимирует разностная задача.

Дифференциальное уравнение, решением которого является сеточная функция, называют *дифференциальным приближением разностной схемы*.

Выведем в качестве примера для уравнения (48) дифференциальное приближение разностной схемы с шаблоном типа неявного правого уголка (см. рис.12)

$$\frac{U(x, t+k) - U(x, t)}{k} + a \frac{U(x, t) - U(x-h, t)}{h} = 0. \quad (53)$$

Поскольку функция U по предположению является гладкой, то подставим в (53) вместо $U(x-h, t)$, $U(x, t+k)$ их выражения в виде рядов Тейлора с точностью разложения до $O(k^4)$ $O(h^4)$ соответственно.

В результате получим

$$\frac{1}{k} \left(\left[U(x, t) + U_t(x, t)k + U_{tt}(x, t)\frac{k^2}{2} + U_{ttt}(x, t)\frac{k^3}{6} + O(k^4) \right] - U(x, t) \right) + \frac{a}{h} \left(U(x, t) - \left[U(x, t) - U_x(x, t)h + U_{xx}(x, t)\frac{h^2}{2} - U_{xxx}(x, t)\frac{h^3}{6} + O(h^4) \right] \right). \quad (54)$$

После несложных преобразований это уравнение приводится к виду

$$U_t + aU_x = -\frac{k}{2}U_{tt} + \frac{ah}{2}U_{xx}(x,t) - \frac{k^2}{6}U_{ttt}(x,t) - \frac{ah^2}{6}U_{xxx}(x,t) + O(k^3 + h^3). \quad (55)$$

Дифференцируя (54) по времени, получаем

$$U_{tt} + aU_{xt} = -\frac{k}{2}U_{ttt} + \frac{ah}{2}U_{xxt}(x,t) - \frac{k^2}{6}U_{tttt}(x,t) - \frac{ah^2}{6}U_{xxx}(x,t) + O(k^3 + h^3), \quad (56)$$

а дифференцируя (54) по x и умножая на $-a$, получаем

$$-aU_{tx} - a^2U_{xx} = \frac{ak}{2}U_{ttx} - \frac{a^2h}{2}U_{xxx}(x,t) + \frac{a^2k^2}{6}U_{tttx}(x,t) + \frac{a^2h^2}{6}U_{xxxx}(x,t) + O(k^3 + h^3). \quad (57)$$

Складывая (56) и (57), получаем

$$U_{tt} = a^2U_{xx} + k\left(-\frac{U_{ttt}}{2} + \frac{a}{2}U_{ttx} + O(k)\right) + h\left(\frac{a}{2}U_{xxt} - \frac{a}{2}U_{xxx} + O(h)\right). \quad (58)$$

Аналогично можно получить следующие выражения для производных U_{tt} , U_{tx} , U_{xt}

$$\begin{aligned} U_{tt} &= -a^3U_{xxx} + O(k+h), \\ U_{tx} &= -a^2U_{xxx} + O(k+h), \\ U_{xt} &= -aU_{xxx} + O(k+h). \end{aligned} \quad (59)$$

Заменяя в правой части уравнения (56) производные по временной переменной на производные по пространственной переменной по формулам (58) и (59), получаем

$$U_t + aU_x = \frac{ah}{2}(1-\eta)U_{xx} - \frac{ah^2}{6}(2\eta^2 - 3\eta + 1)U_{xxx} + O(k^3 + h^3), \quad (60)$$

где $\eta = \frac{ak}{h}$. Уравнение (60) и называют дифференциальным приближением

разностной схемы (53) с точностью до членов порядка $O(k^3 + h^3)$.

Главным членом, вносящим погрешность в численное решение, является первое слагаемое (имеющее наименьший порядок малости в зависимости от шагов разностной сетки) правой части (60). Если это слагаемое содержит член с четной производной, то имеет место диссипация на разностной сетке (рис.13). Воздействие диссипации приводит к растяжению крутых линий раздела, которые могут появиться в расчетной области. Явление, связанное с производными нечетного порядка в первом слагаемом правой части дифференциального приближения, называют дисперсией (рис.14). Дисперсия приводит к искажению соотношения фаз различных волн.

Для снижения диссипативных и дисперсионных свойств в разностные схемы вносят дополнительный параметр, позволяющий хотя бы частично нейтрализовать первое слагаемое правой части дифференциального приближения.

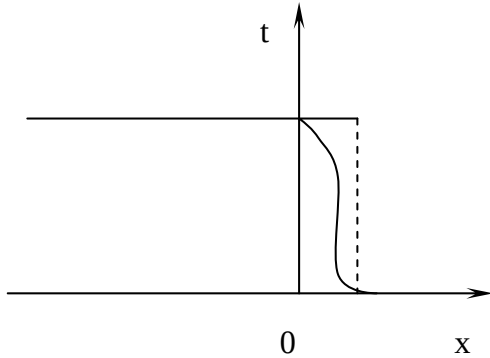


Рис. 13

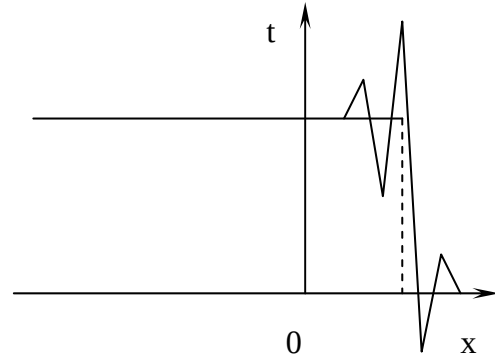


Рис. 14

Спектральный признак устойчивости Неймана

Пусть необходимо решить дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (61)$$

в области $0 \leq x \leq l$ с начальными и граничными условиями:

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad U(0, t) = g_1(t), \quad U(l, t) = g_2(t)$$

Заменим уравнение (43) следующим разностным уравнением:

$$\frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{\tau} + a \frac{U_{ij} - U_{i-1j}}{h} = 0, \quad (62)$$

где h и τ – шаги сетки по пространственной переменной x и по времени соответственно.

Решение $U(x, t)$ уравнения (61) ищется на интервале длиной l . Считая, что длина этого интервала l есть период для функции $U(x, t)$, можем разложить ее на этом периоде в ряд Фурье:

$$U(x, t) = \sum_m^{\infty} b_m(t) e^{ik_m x}, \quad (63)$$

где k_m – волновое число (циклическая частота).

Так как $U(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению, то поведение каждой гармоники, входящей в (63), можно рассматривать независимо. Рассмотрим главный член:

$$U_m = b_m(t) e^{ik_m x}.$$

Будем искать решение в виде

$$z^n e^{ik_m x}.$$

При $t = 0$ ($n = 0$) оно имеет вид $e^{ik_m x}$. Пусть $z = e^{a\tau}$, тогда $z^n = e^{an\tau} = e^{at}$.

Имеем

$$U_m = e^{at} e^{ik_m x}. \quad (64)$$

Решение считается *устойчивым по спектральному признаку устойчивости Неймана*, если при заданном законе стремления шагов h и τ к нулю выполнено условие

$$\left| e^{at} \right| = \left| \left(e^{a\tau} \right)^n \right| \leq 1 \Rightarrow \left| e^{a\tau} \right| \leq 1. \quad (65)$$

Подставим (64) в (61)

$$\frac{e^{a(t+\tau)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x}}{\tau} + a \frac{e^{at} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m(x-h)}}{h} = 0.$$

Умножим обе части уравнения на h

$$h \left(e^{a(t+\tau)} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m x} \right) + a\tau \left(e^{at} e^{ik_m x} - e^{at} e^{ik_m(x-h)} \right) = 0$$

и разделим на $e^{at} e^{ik_m x}$

$$\begin{aligned} h(e^{a\tau} - 1) + a\tau(1 - e^{-ik_m h}) &= 0, \\ e^{a\tau} - 1 &= -\frac{a\tau}{h}(1 - e^{-ik_m h}), \\ e^{a\tau} &= 1 - \frac{a\tau}{h}(1 - e^{-ik_m h}). \end{aligned} \quad (66)$$

Из (66) следует, что необходимое условие устойчивости (65) будет выполнено, если

$$0 \leq \left| \frac{a\tau}{h} \right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{|a|\tau}{h} \leq 1, \quad \text{то есть} \quad 0 \leq \frac{a\tau}{h} \leq 1. \quad (67)$$

Принцип замороженных коэффициентов

Сформулируем принцип замороженных коэффициентов, пользуясь в качестве примера следующей разностной схемой с переменными коэффициентами:

$$\frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{\tau} + a(x_i, t_j) \frac{U_{ij} - U_{i-1j}}{h} = 0 \quad (68)$$

Выберем произвольную внутреннюю точку (x_1, y_1) области, где рассматривается задача, и “заморозим” коэффициенты задачи (68) в этой точке. В этом случае оно сводится к разностному уравнению (61) с постоянными коэффициентами.

По принципу замороженных коэффициентов для устойчивости задачи (68) необходимо, чтобы краевая задача разностного уравнения с постоянными коэффициентами (61) удовлетворяла необходимому признаку устойчивости Неймана.

Мы выяснили, что для устойчивости разностной схемы (61) должно выполняться условие (65). Так как по принципу замороженных коэффициентов это условие должно выполняться при любых (x_1, y_1) , то разностная схема (68) будет устойчива, если

$$0 \leq \frac{\max_{x_1, t_1} a(x_1, t_1) \tau}{h} \leq 1. \quad (69)$$

Принцип замороженных коэффициентов позволяет исследовать устойчивость нелинейных задач. Пусть необходимо решить следующую задачу

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (1 + U^2) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

в области $0 \leq x \leq l$ с начальными и граничными условиями:

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad U(0, t) = g_1(t), \quad U(l, t) = g_2(t).$$

Используем следующую разностную схему:

$$\frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{\tau} + (1 + (U_{ij})^2) \frac{U_{ij} - U_{i-1j}}{h} = 0.$$

В этой схеме допускается изменение шага по времени от слоя к слою. Для выбора следующего шага принимается, что предстоит найти решение линейного разностного уравнения с переменными коэффициентами (68), где $a(x_i, t_j) = 1 + (U_{ij})^2$. Применение признака Неймана к уравнению с пере-

менными коэффициентами (68) дает ограничение (69) на соотношение шагов сетки, необходимое для устойчивости. Следовательно,

$$0 \leq \frac{\max_x a(x, t_1) \tau}{h} = \frac{\max_i \left(1 + (U_{ij})^2\right) \tau}{h} \leq 1.$$

Отсюда следует рекомендация выбрать очередной шаг по времени из условия

$$\tau \leq \frac{h}{\max_i \left(1 + (U_{ij})^2\right)}.$$

III. Задания к работе

Провести полную математическую обработку физической задачи (варианты заданий см. в табл. 5,6,7).

IV. Выполнение работы

1. Построить математическую модель задачи (если математическая модель окажется нелинейной, то линеаризовать ее).
2. Построить дискретную модель в виде разностной схемы.
3. Выяснить, с каким порядком точности полученная схема аппроксимирует исходную математическую модель.
4. Исследовать ее на устойчивость. Если разностная схема окажется абсолютно неустойчивой, вернуться к пункту 2.
5. Выбрать шаг разбиения схемы (выбор обосновать).
6. Выбрать численный метод решения.
7. Построить вычислительную модель.
8. Составить алгоритм и программу, получить результаты.

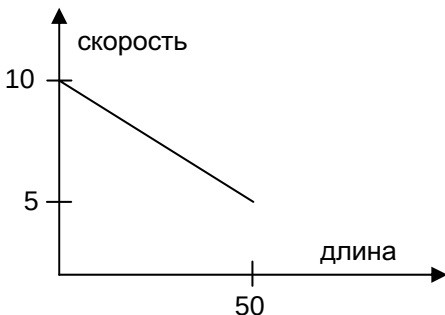
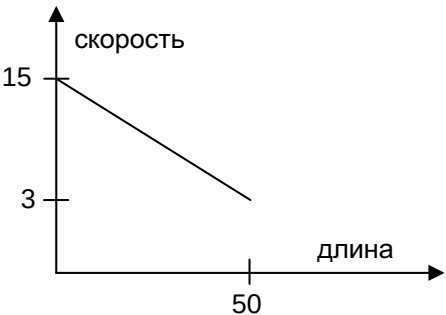
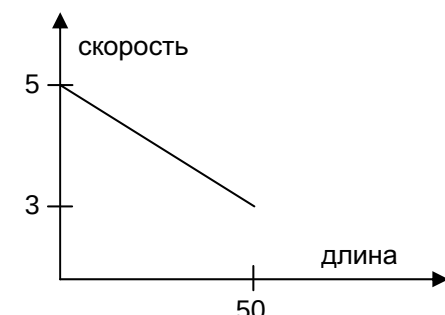
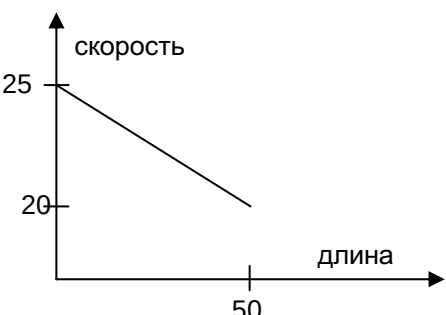
V. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Теоретическая часть.
3. Список идентификаторов.
4. Письменно выполненные задания под пунктами 1-7.
5. Алгоритм и текст программы.
6. Результат работы программы.
7. Выводы.

Варианты задач

1. Частицы движутся по инерции в одномерной среде. Определить картину эволюции движения частиц на участке длиной 50 м через 3 с после начала наблюдения. Скорости частиц в начальный момент времени см. в табл. 5.

Таблица 5

№ варианта	Начальная скорость движения частиц (м/с) в среде	№ варианта	Начальная скорость движения частиц (м/с)
1		4	
2		5	
3			

2. Вследствие аварии на очистных сооружениях нефтеперерабатывающего завода на грунтовую землю вытекла смесь воды и нефти после промывки баков. Найти плотность распределения нефтеводной смеси в грунте до глубины L через 1 час после обнаружения утечки¹. Варианты исходных данных см. в табл. 6.

¹ Для упрощения можно считать, что смесь движется только под действием силы тяжести, то есть движение вертикальное и от горизонтальных координат зависимости нет.

Таблица 6

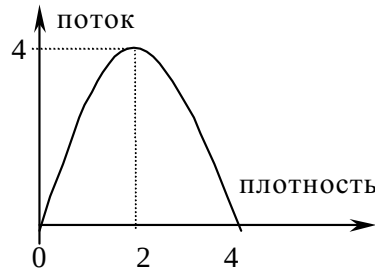
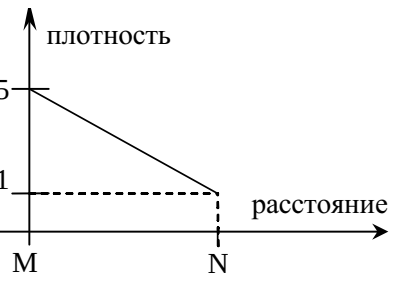
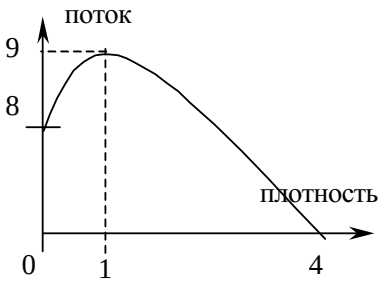
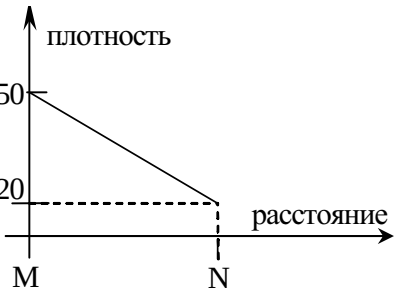
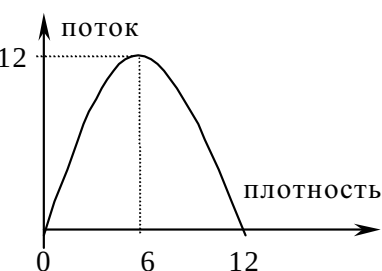
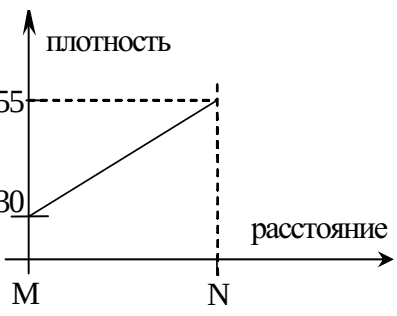
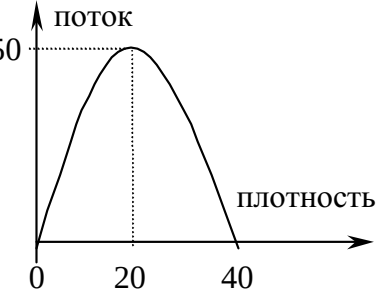
№ варианта	Глубина L (см)	Плотность распределения нефтеводной смеси в грунте на момент обнаружения утечки (г/см ³)	Зависимость скорости просачивания смеси (см/мин) от плотности распределения (г/см ³)
6	50		
7	30		
8	20		
9	15		

Окончание табл. 6

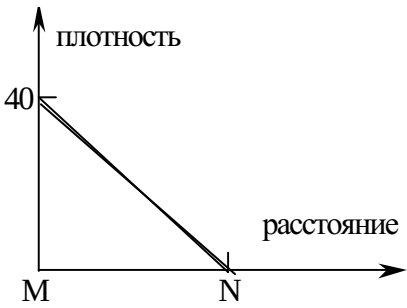
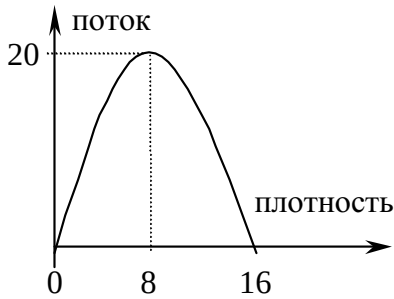
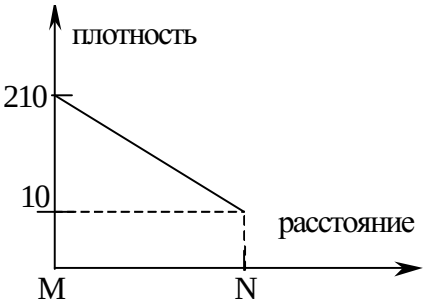
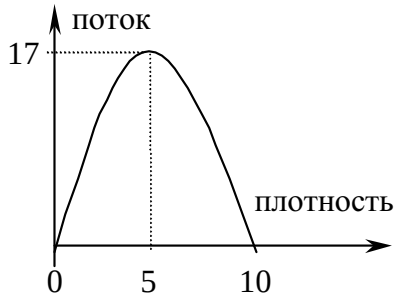
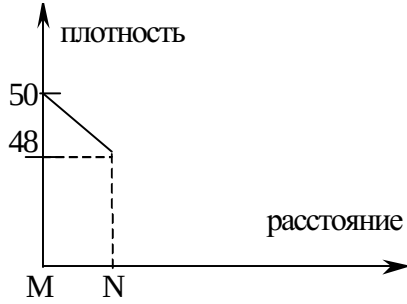
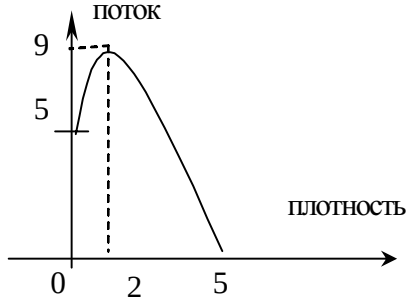
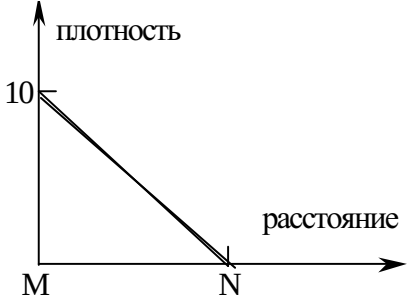
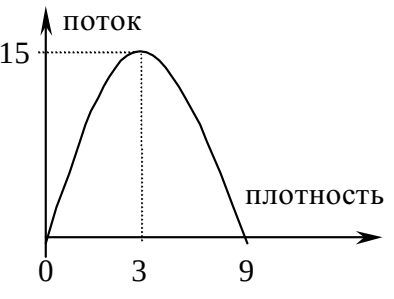
№ варианта	Глубина L, см	Плотность распределения нефтеводной смеси в грунте на момент обнаружения утечки, г/см ³	Зависимость скорости просачивания смеси (см/мин) от плотности распределения (г/см ³)
10	45		
11	15		
12	10		
13	50		

2. На участке дороги от города М до города N автомобили движутся справа налево по скоростной автострате, у которой нет боковых съездов и въездов. Какова будет плотность распределения автомобилей на указанном участке дороги в 12 ч дня? Варианты исходных данных см. в табл. 7.

Таблица 7

№ варианта	Расстоян. между городами	Плотность распределения автомобилей между городами в 7 ч утра (шт/км)	Зависимость потока автомобилей (шт/ч) от плотности распределения (шт/км)
14	20		
15	4		
16	30		
17	25		

Продолжение табл. 7

№ варианта	Расстоян. между городами	Плотность распределения автомобилей между городами в 7 ч утра (шт/км)	Зависимость потока автомобилей (шт/ч) от плотности распределения (шт/км)
18	40		
19	200		
20	2		
21	25		

Окончание табл. 7

№ варианта	Расстоян. между городами	Плотность распределения автомобилей между городами в 7 ч утра (шт/км)	Зависимость потока автомобилей (шт/ч) от плотности распределения (шт/км)
22	2		
23	4		
24	30		
25	60		

Лабораторная работа № 5

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

I. Цель работы

Знакомство с вариационным методом Ритца.

II. Краткая теория

Вариационные методы применяются при решении задач вариационного исчисления. В простейшем случае такую задачу можно сформулировать как нахождение минимума функционала

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (70)$$

в которой минимум берется по множеству гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (71)$$

В предположении, что интеграл $F(x, y, y')$ является гладкой функцией своих переменных, эта задача сводится к решению краевой задачи для уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right] = 0, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (72)$$

Краевая задача эквивалентна нахождению минимума функционала (70) при условиях (71), и задачу (72) можно решать вариационными методами.

Другой классический пример задачи вариационного исчисления для функций двух переменных состоит в отыскании минимума функционала:

$$J[U] = \oint_D \left[U_x^2 + U_y^2 + 2Uf \right] dx dy. \quad (73)$$

Здесь D – ограниченная область евклидова пространства, f – заданная в D функция, а минимум берется по множеству гладких в D функций, равных нулю на границе ∂D . Эта задача эквивалентна задаче Дирихле:

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= f \\ U|_{\partial D} &= 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Метод Ритца минимизации функционала

Одним из приближенных методов решения вариационной задачи является метод Ритца. Пусть необходимо минимизировать функционал (73). Выбирается некоторое произвольное целое число n . Функция U , минимизирующая функционал, ищется в виде:

$$U_n(x, y) = a_1\varphi_1(x, y) + a_2\varphi_2(x, y) + \dots + a_n\varphi_n(x, y), \quad (75)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – заданные, достаточно хорошие функции, обращающиеся в нуль на границе. Эти функции называют пробными, или базисными. Предполагается, что система базисных функций линейно независима и линейными комбинациями (75) при соответствующем выборе коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ можно аппроксимировать любую гладкую функцию, равную нулю на границе единичного квадрата, с желаемой степенью точности. Определим набор базисных функций для задачи Дирихле в единичном квадрате в виде

$$\varphi_1(x, y) = xy(1-x)(1-y),$$

$$\varphi_2(x, y) = x\varphi_1(x, y),$$

$$\varphi_3(x, y) = y\varphi_1(x, y),$$

$$\varphi_4(x, y) = x^2\varphi_1(x, y),$$

$$\varphi_5(x, y) = xy\varphi_1(x, y),$$

$$\varphi_6(x, y) = y^2\varphi_1(x, y),$$

.

Первые четыре приближения имеют вид

$$U_1(x, y) = a_1xy(1-x)(1-y),$$

$$U_2(x, y) = xy(1-x)(1-y)[a_1 + a_2x],$$

$$U_3(x, y) = xy(1-x)(1-y)[a_1 + a_2x + a_3y],$$

$$U_4(x, y) = xy(1-x)(1-y)[a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2],$$

.

Функционал

$$J[U_n] = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left[\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right]^2 + 2f \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \right\} dx dy$$

является функцией коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Следовательно, для того чтобы найти минимум J , необходимо решить систему

$$\frac{\partial J[U_n]}{\partial a_1} = 2 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right] a_j + f \varphi_1 \right\} dx dy = 0,$$

.

$$\frac{\partial J[U_n]}{\partial a_n} = 2 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right] a_j + f \varphi_n \right\} dx dy = 0.$$

Если переписать эти уравнения в матричной форме, то получится система линейных уравнений:

$$Aa = b, \quad (76)$$

здесь $A = (A_{ij})$ матрица размером $n \times n$, элементы которой вычисляются по формулам

$$A_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dx dy = 0,$$

$b = (b_i)$ – вектор с компонентами

$$b_i = - \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \varphi_i dx dy = 0,$$

$a = (a_i)$ – неизвестный вектор. Решение линейной системы (76) дает приближенное решение задачи Дирихле.

III. Задания к работе

Решить задачу (74) вариационным методом (варианты функции взять из лабораторной работы № 2).

IV. Выполнение работы

1. Для математической модели (74) построить вычислительную модель.
2. Выбрать численный метод решения.
3. Составить программу.
4. Протестировать программу для уравнения Лапласа с нулевыми граничными условиями.
5. Получить результаты для своего варианта.

V.Содержание отчета

1. Цель работы.
 2. Теоретическая часть.
 3. Письменно выполненные задания под пунктами 1,2.
 4. Список идентификаторов.
 5. Текст программы.
 6. Результат работы программы.
- Выводы по работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 542 с.
2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964. 372 с.
3. Андерсон Д. и др. Вычислительная гидромеханика и теплообмен, В 2 т. М.: Мир, 1990. 728 с.
4. Басанский Е.Г., Кудряшов Н.А. Численное моделирование фильтрации газа из сферической полости // Математическое моделирование физических процессов. М.: Энергоиздат, 1982. С. 82-90. 110 с.
5. Бахвалов Н.С. и др. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
6. Будаков Б.М., Самарский А.А. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 540 с.
7. Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 287 с.
8. Владимиров В.С., Жаринов В.В., Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
9. Волков Б.И., Якунин С.А. Математические задачи плазмооптики. М.: Знание, 1982. 85 с.
10. Вычислительные алгоритмы и их программы. Лабораторные работы по курсу “Вычислительная математика и программирование”. М.: МЭИ, 1987. 54 с.
11. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
12. Гулин А.В., Самарский А.А. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.

13. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Физматлит, 1963. 660 с.
14. Дмитриев С.К., Лейтан В.А., Луцько А.С., Ребане Г.П., Рошаль А.С. Двумерная математическая модель электростатической рекуперации энергии заряженных частиц // Математическое моделирование физических процессов. М., Энергоиздат, 1982. С. 47-53. 110 с.
15. Иванов В.Д., Косарев В.И., Лобанов А.И. и др. Лабораторный практикум по курсу “Основы вычислительной математики”. М.: МЗ-Пресс, 2001. 190 с.
16. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. М.: МФТИ, 2000. 225 с.
17. Лейтан В.А., Ребане Г.П., Рошаль А.С. О некоторых особенностях численного решения двумерного уравнения Пуассона методом последовательной верхней релаксации // Математическое моделирование физических процессов. М.: Энергоиздат, 1982. С. 62-68. 110 с.
18. Математическое моделирование. М.: МГУ, 1993. 270 с.
19. Математическое моделирование. М.: Мир, 1979. 285 с.
20. Математическое моделирование физических процессов. Киев: ИМ, 1989. 150 с.
21. Методические указания к лабораторному практикуму по курсу высшей математики. Тула: ТПИ, 1980. 63 с.
22. Методические указания по проведению лабораторных работ по вычислительным методам в инженерных расчетах на ЭВМ. М.: МЭИ, 1979. 60 с.
23. Михайлов А.П., Самарский А.А. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
24. Моисеев Н.Н. Модели эволюции и экологии. М.: Знание, 1983. 310 с.
25. Николаев Е.С., Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
26. Подливаев И.Ф., Соловьев В.В. Численное решение обратной задачи для уравнения теплопроводности по определению коэффициента переноса // Математическое моделирование физических процессов. М.: Энергоиздат, 1982. С. 69-72. 110 с.
27. Попов А.В. Практикум на ЭВМ. Разностные методы решения квазилинейных уравнений первого порядка. М.: МГУ, 1999. 64 с.
28. Попов Ю.А., Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 352 с.

29. Роуч П. Вычислительная газодинамика. М.: Мир, 1980. 380 с.
30. Рябенкий В.С. Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 1994, 2000. 295 с.
31. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 280 с.
32. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
33. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987. 288 с.
34. Самарский А.А., Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. М.: МГУ, 1999. 800 с.
35. Сборник задач по методам вычислений / Под ред. П.И. Монастырского. М.: Физматлит, 1994. 320 с.
36. Фарлоу С. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1985. 384 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Лабораторная работа № 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ МОНТЕ – КАРЛО	9
Лабораторная работа № 2. ПРИМЕНЕНИЕ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ	19
Лабораторная работа № 3. ПРИМЕНЕНИЕ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ	35
Лабораторная работа № 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА	48
Лабораторная работа № 5. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ	67
Библиографический список.....	70

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Лабораторный практикум

АЛХУТОВ Юрий Александрович
ВОРОНОВА Наталия Михайловна

Ответственный за выпуск - зав. кафедрой профессор С.М. Аракелян

Редактор-корректор Е.П. Викулова
Верстальщик Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 10.12.02.

Формат 60х84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл.-печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 4,45. Тираж 100 экз.

Заказ

Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.