Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. П. Покровский

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ

Учебно-методическое пособие

Владимир 2014

УДК 51(07)
ББК 74.262.21
П48

Рецензенты:

Кандидат педагогических наук,
профессор кафедры начального образования
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Г. Г. Шмырёва

Кандидат педагогических наук
зав. кафедрой естественно-математического образования
Владимирского института повышения квалификации работников
образования имени Л. И. Новиковой
Е. И. Антонова

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Покровский, В. П.
П48 Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия : учеб.-метод. пособие / В. П. Покровский ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014. – 143 с. – ISBN 978-5-9984-0447-4.

Посвящено вопросам методики изучения функционального материала в школьных курсах алгебры (7 – 9-е классы), алгебры и начал анализа (10, 11-е классы) общеобразовательных учреждений. Включает теоретические основы и задания, помогающие студентам наиболее эффективно организовать самостоятельную работу по усвоению программного содержания важного раздела учебной дисциплины «Методика обучения математике». Базируется на идеях личностно-ориентированного и деятельностного подходов.

Предназначено для студентов 3, 4-го курсов очной формы обучения – будущих учителей математики, обучающихся по направлению 050100 – Педагогическое образование (бакалавриат). Может быть использовано учителями математики общеобразовательных учреждений.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 3. Табл. 10. Библиогр.: 26 назв.

УДК 51(07)
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9984-0447-4

Преподаватель должен стоять достаточно хорошо над тем материалом, который ему приходится излагать, и должен в точности знать все те подводные скалы и мели, среди которых он проводит своих учеников.

Феликс Клейн

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебно-методическое пособие с рекомендациями к самостоятельной работе студентов по изучению функциональной содержательно-методической линии курса «Методика обучения математике»– непосредственное продолжение уже изданного по числовым системам (см.: Покровский В. П. Методические рекомендации к самостоятельной работе студентов по изучению числовой содержательно-методической линии в курсе «Теория и методика обучения математике». Владимир : ВГГУ, 2008). В основу содержания учебного материала по организации процесса обучения по функциональным темам школьного курса математики также положены три вида анализа: логико-математический, логико-дидактический и логико-методический, выполнение которых является главным профессиональным умением учителя. Примерные действия учителя по проведению названных анализов теоретического и заданного материала с математической и процессуальной точек зрения были описаны в пункте «Общие методические указания» приведенного источника. Образцы проектирования изучения отдельных тем с последовательным выделением основных действий учителя можно найти в ряде методических пособий, например под редакцией Т. А. Ивановой [23, с. 197 – 210], Е. И. Лященко [6, с. 166 – 213], Н. Л. Стефановой [11, с. 238 – 240].

При проведении практических и лабораторных занятий студенты должны научиться проводить все три вида анализа различных школьных учебников. Они, как правило, проводятся последовательно в вышеобозначенном порядке. Каждый предыдущий вид анализа помогает осуществить последующий. Логико-методический анализ темы завершает процесс её проектирования и позволяет осознанно составить тематический план (раз-работать систему уроков), а затем на его основе уже писать поурочные конспекты. Заметим, что проекты уроков по теме определяются не только результатами этих анализов, но и педагогической ситуацией (особенностями учащихся класса, индивидуальностью учителя и т.п.). В практической деятельности учителя проводят анализ темы с разной степенью детализации и конкретизации, но студенты должны научиться проводить его с наибольшей полнотой. Полученные студентами в лабораторных условиях первоначальные умения закрепляются во время педагогической практики в конкретном классе общеобразовательного учреждения. Студенты часто при проведении логико-дидактического анализа смешивают понятия «математическая задача» и «учебная задача». Для разделения их содержания в методике вводится новое понятие прямого продукта учебной деятельности как её результата, на достижение которого в данный момент направлены главные усилия школьника и который служит основной целью деятельности. Исходя из такого подхода, для математической задачи прямым продуктом ее решения будет получение математического факта (графика или свойства функции, корней квадратного уравнения, упрощенного вида суммы алгебраических выражений и др.), а для учебной задачи – получение учебного факта, т.е. обобщенного знания, выполняющего функции метода (приема) обучения или учебного познания (общие приемы поиска решения задач на доказательство, формулировка эвристик, прием доказательства от противного, метод подобия, алгоритм исследования функций и др.). Учебные задачи призваны «учить учеников учиться». Математическая задача отличается от учебной формулировкой, содержанием познавательной деятельности и целевой установкой, но между ними существует определенная взаимосвязь: решая математическую задачу, ученик решает несколько учебных задач, и наоборот, учебные задачи в процессе обучения решаются в ходе решения математических задач. Приведем два примера:

1. При ответе на вопрос «Сформулируйте определение понятия функции» результатом выполнения будет само определение, т.е. математический факт. В результате деятельности по выделению существенных признаков функции, исходя из определения, и составлению заданий на подведение под понятие будет получен учебный факт.

2. При составлении обратной задачи к уже решенной учащийся имеет дело с математической задачей, а при овладении приемом переноса деятельности по составлению обратной задачи в другую ситуацию он уже решает учебную задачу.

Структура предлагаемого учебно-методического материала по функциям и графикам сохраняется прежняя: тематика вопросов, список литературы для самостоятельной проработки, методический комментарий по изучаемым вопросам и методические задания для выполнения на аудиторных занятиях совместно с преподавателем или самостоятельно в домашних условиях и во время педпрактики. Задания, как правило, связаны с формированием творческого подхода к обучению математике, умением оценивать различные системы изложения материала в альтернативных учебниках, высказывать и отстаивать свою точку зрения. При проработке рекомендуемой литературы (учебные пособия для вузов, методические рекомендации для учителей, сборники статей и др.) необходимо обращать внимание на год издания, соответствие современным научно-методическим концепциям, ФГОС второго поколения, примерным программам по математике и учебникам (2008 – 2013 гг.), творчески подходить к советам учителей, вырабатывать свое видение проблемы. Ввиду ограниченного количества экземпляров пособий для студентов в библиотеке возникла необходимость в этом руководстве для организации их самостоятельной работы, эффективном изучении частной методики обучения математике.

В данном пособии специально не приводится список федеральных учебников по математике, поскольку он ежегодно публикуется в «Российской газете» [24], не дается список статей из журнала «Математика в школе» и газеты «Математика», отражающий опыт работы учителей по изучению функционального материала со школьниками в общеобразовательных и профильных классах. Студенты сами должны отобрать статьи по изучаемым вопросам, используя тематические указатели на кафедре, и выписать из них наиболее эффективные методические приемы учителей в отдельную «тетрадь-копилку». По каждому вопросу в первую очередь необходимо ознакомиться с соответствующим материалом в альтернативных учебниках, выделить понятийные связи, сравнить методическое обеспечение, уровень строгости и подходы в изложении материала, спрогнозировать трудности в его усвоении учащимися. Затем ознакомиться с методическими рекомендациями, предложенными в книгах для учителя, «поклассных методиках». После этого изучить рекомендуемую методическую литературу и выполнить предложенные задания. Важно помнить, что без знания фактического материала школьных учебников о методике изучения и речи не может быть.

Предваряя изложение учебного материала по одной из важнейших содержательно-методических линий – функциональной – важно подчеркнуть ее значимость в построении курсов алгебры основной школы и начал математического анализа старшей школы. Заметная особенность содержания материала этой линии заключается в том, что с его помощью возможно устанавливать разнообразные внутрипредметные и межпредметные связи в обучении. Однако в течение длительного времени усилия ученых математиков и методистов были направлены на включение функционального материала в школьный курс математики. Еще в резолюциях Всероссийских съездов преподавателей математики (1911 – 1914 гг.) подчеркивалась необходимость проведения через весь курс предмета средней школы идеи функциональной зависимости. Этот вопрос подвергался оживленному обсуждению и позднее; он не утратил своей актуальности и до настоящего времени, особенно по включению начал анализа и методики их изучения в общеобразовательных и профильных классах. Работа по совершенствованию содержания и методики обучения функциональному материалу, активно начатая в 60-е гг. XX в., происходит волнообразно с некоторыми перерывами до настоящего времени.

Предлагаемое пособие охватывает все вопросы методики изучения функционального материала, включая пропедевтику. Оно разработано в соответствии с ФГОС школьного математического образования и ориентировано на современные учебники для общеобразовательных и профильных классов. В этом и состоит главное его отличие от прежних методических пособий, которые издавались для студентов в 70 – 80-е гг. прошлого столетия. Кроме того оно соответствует ФГОС высшего профессионального образования третьего поколения по направлению 050100 – Педагогическое образование (бакалавриат), предназначено для студентов, изучающих учебную дисциплину «Методика обучения математике», и призвано активизировать их самостоятельную работу; привить исследовательские навыки решения практических задач и способствовать творческому осмыслению методических проблем. Объединяя теоретические сведения и задания для их пополнения, осмысления и развития, пособие усиливает практическую направленность учебного процесса.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам пособия: профессору Галине Григорьевне Шмырёвой, кандидату педагогических наук Елене Ивановне Антоновой, а студентам желает творческих успехов в освоении одной из основных содержательно-методических линий в курсе «Методика обучения математике» для бакалавров.

Глава 1
УЧЕНИЕ О ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1. Общая характеристика функциональной линии: история, теория и школьная практика

Функциональная (или функционально-графическая) линия – основной стержень, который проходит от арифметики до высших разделов единой математики, и вокруг него группируется вся современная школьная алгебра, начала анализа и в некоторой мере геометрия. Существующая примерная программа содержит значительно увеличенный объем сведений функционального содержания после проведенной в 70-е гг. XX в. реформы математического образования. Расширение понятийного аппарата вплоть до включения начал математического анализа подняло функциональные представления учащихся на новый качественный уровень. Существенное влияние на такой решительный шаг оказали идеи педагогов-математиков Ф. Клейна, А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, А. И. Маркушевича, А. Г. Мордковича и других, убежденных в ведущей роли понятия функции в математике-науке и в обучении математике, непосредственно связанного с реальной действительностью. В нем ярко воплощены изменчивость и динамичность реального мира, причинно-следственная связь и обусловленность реальных объектов и явлений, диалектические черты современного математического мышления. Функция, являющаяся математической моделью многих реальных ситуаций, позволяет описывать и изучать разнообразные зависимости между величинами, познавать окружающий мир. Поэтому так важно знакомить учащихся с функциональным материалом, который позволяет осуществлять как внутрипредметные, так и межпредметные связи (многие понятия и законы носят функциональную основу), реализовывать прикладную направленность школьной математики.

Понятие функции в математике складывалось постепенно, возникая из самых разнообразных задач практики, когда находили общие приемы их решения (абстрагируясь от конкретного содержания задачи).

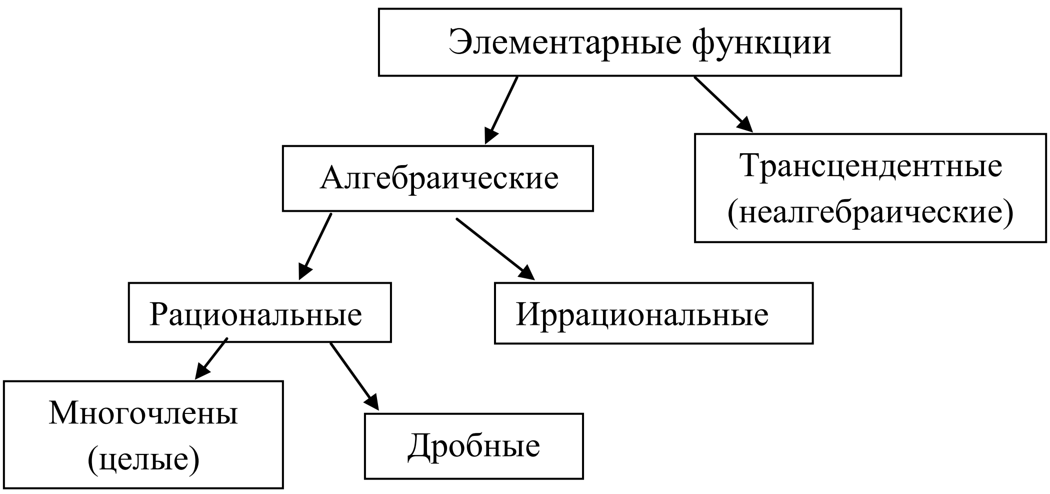
Исходным пунктом здесь было понятие переменной величины. Содержание понятия функции развивалось, обогащалось в процессе эволюции математики, существовало множество споров относительно вновь вводимых определений. И сейчас невозможно сказать, что математика нашла окончательное, последнее определение понятия.

Понятие функции прошло долгий путь развития и имеет свою историю. Хотя идея функциональной зависимости величин относится к глубокой древности, потребность в общем понятии функции возникла лишь в XVII в. в связи с возникновением идеи переменных, с которой в математику вошло движение, изменение, процессы, наблюдаемые во времени. Первоначальная трактовка была либо геометрической, либо механической: ординаты точек совершенно произвольных кривых – функции от абсцисс, путь и скорость – функции от времени (П. Ферма, Р. Декарт, И. Ньютон, Г. Лейбниц). В этот период Г. Лейбниц ввел термины: «функция» (1673), «переменная», «константа» (1698). Термин «функция» в переводе с латинского означает «свершение», «выполнение». Постепенно трактовка функции стала освобождаться от первоначальных представлений и доминировать стала аналитическая – отождествляющая функцию с формулой, задающей ее (И. Бернулли, Л. Эйлер). И. Бернулли в 1718 г. дал впервые явное определение функции, Л. Эйлер в 1734 г. ввел обозначение $y = f(x)$. Примерно в середине XIX в. понятие функции освободилось от единовластия формулы, и в новом определении делается акцент на идею соответствия (Н. И. Лобачевский, Л. Дирихле), которое называют классическим, близким к современным. После создания общей теории множеств идея соответствия была дополнена идеей множества, позволившей рассматривать функцию не только для числовых множеств, но и на объектах произвольной природы. В конце XIX в. сформировалось понятие отображения, развивающее понятие функции. В XX в. в связи с потребностями физики возникли «обобщенные функции» (Л. Шварц, С. Л. Соболев), сильно отличающиеся по внешнему виду от исходных представлений о функции. На примере развития понятия функции возможно познакомить учащихся с проявлением важных философских категорий – причины и следствия.

С понятием функции связана определенная система общефункциональных понятий (числовая функция, области определения и значений, способы задания, график, возрастание и убывание, четность и нечетность, нули (корни) функции, знакопостоянство, монотонность, экстремумы, периодичность, обратная и сложная функции, непрерывность или разрывность, приращение аргумента и функции, дифференцируемость, интегрируемость и др.). Многие из перечисленных понятий именуются и свойством функции, и названием отдельного вида функций. Например, свойство периодичности одной из тригонометрических функций указывает одновременно на принадлежность ее к виду периодических функций, выделяемых данным свойством.

Важное место в функциональной линии уделяется глубокому изучению класса функций, получивших название элементарных (не значит простых), которые имеют широкую область применения. К элементарным функциям, которые уже к XVII в. были хорошо изучены, относят многочлены, рациональные и иррациональные функции, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратно тригонометрические функции. Этот набор функций тесно связан с основными арифметическими операциями (сложение, вычитание, умножение, деление), алгебраическими операциями (возведение в целую степень, извлечение корня) и трансцендентными операциями (возведение в иррациональную степень, логарифмирование, тригонометрическими, модуль), понятием непрерывности и геометрическими преобразованиями, что позволяет устанавливать связи функциональной линии с другими содержательно-методическими линиями.

Классификацию элементарных функций можно представить в следующем виде:



Приведенная классификация относит ту или иную функцию к определенному виду по «внешнему признаку», т. е. в зависимости от проводимых операций. Однако не всякая функция, заданная формулой, содержащей трансцендентные операции, является трансцендентной. Так, например, функция $y = 2^{\log_2(2+x^2)}$ не трансцендентная, т. к. ее закон соответствия может быть выражен посредством алгебраических операций: $y = 2 + x^2$. Слово «трансцендентный» произошло от латинского *transendens*–перешагивающий, выходящий за пределы чего-либо. Трансцендентные функции выходят за пределы алгебраических.

К классу элементарных функций относят и различные их комбинации, получаемые путем использования арифметических операций. Однако в школьном курсе определения таких операций с функциями отсутствуют. Арифметические операции с числовыми функциями все же неявно прослеживаются (при построении графиков, в некоторых формулировках, например, производная суммы и т. п.).

Основные элементарные функции могут соединяться между собой и с помощью операции взятия (отыскания) функции от функции. В таком случае мы придем к понятию сложной функции или композиции функций. Пусть даны две функции $y = f(z)$ и $z = g(x)$, тогда функцию $y = f(g(x))$ называют композицией двух данных функций или сложной функцией, составленной из них. Функция $z = g(x)$ называется промежуточным аргументом, x – основным аргументом.

Композиция функций – результат последовательного применения этих функций в определенном порядке. Для записи композиции функций часто употребляется значок «о» и пишут $h = f_0 g$, т. е. функция h получена как композиция функций f и g (сначала применяется g, а затем f). Ясно, что если z есть функция от x, а y есть функция от z, то y можно рассматривать как сложную функцию от x. Например, функцию $\sqrt{1-x^2}$ можно рассматривать как композицию функций $z = 1 - x^2$ и $y = \sqrt{z}$. Такое задание сложной функции называют еще цепным заданием. При этом цепь функций может состоять из любого их числа. Из функций $z = x^2 + 2$ и $y = \sqrt{1-z^2}$ образовать сложную функцию нельзя, т. е. $y = \sqrt{1-(x^2+2)^2}$ в области действительных чисел не существует, т. к. никакому числу x не соответствует число y. Поэтому при рассмотрении сложных функций следует иметь в виду области определения составляющих функций.

С понятием функции тесно связано понятие обратной функции и умение выяснять, имеет ли данная функция обратную, и если имеет, то как ее найти. Слово «обратный» часто используется в математике: обратное число, обратная дробь, обратное действие, обратная теорема, взаимно обратные числа (теоремы), взаимно обратные отношения (2:3 и 3:2) и др. Какой смысл вкладывается в понятие «обратная функция»? В учебнике М. И. Башмакова (9-й класс) дается такое определение: «Обратной функцией для функции f называется такая функция g, которая каждому числу y (из области значений функции f) ставит в соответствие такое число x, для которого $f(x) = y$». Если функция $y = f(x)$ имеет обратную (иногда ее обозначают $x = f^{-1}(y)$), то $f(x)$ называют обратимой, а функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ – взаимно обратными. Например, пары функций $y = kx$ и $x = \frac{1}{k} \cdot y$ $(k \neq 0)$, $y = x^3$ и $x = \sqrt[3]{y}$ взаимно обратные.

В ныне действующих учебниках алгебры приводятся примеры кусочных функций, т. е. функций, заданных различными формулами на разных промежутках области определения. Графики таких функций составляются из отдельных «кусочков» известных учащимся функций, создавая целостный образ, что и послужило основанием для их названия. Во многих случаях именно кусочные функции считаются математическими моделями реальных ситуаций. Такие функции стали рассматриваться только в середине XIX в., когда и было уточнено определение функции. Некоторые из них имеют свои названия и обозначения: модуль ($|x|$), знак (sign x), целая часть ($[x]$), дробная часть ($\{x\}$), функция Дирихле ($D(x)$). Функции такого рода не являются элементарными.

Последний важный вопрос, относящийся к теории: что такое равные функции? Пусть даны две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, они будут равными, если имеют одну и ту же область определения и для любого $x = a$ из их области определения $f(a) = g(a)$. Такие функции еще называют тождественными, одинаковыми.

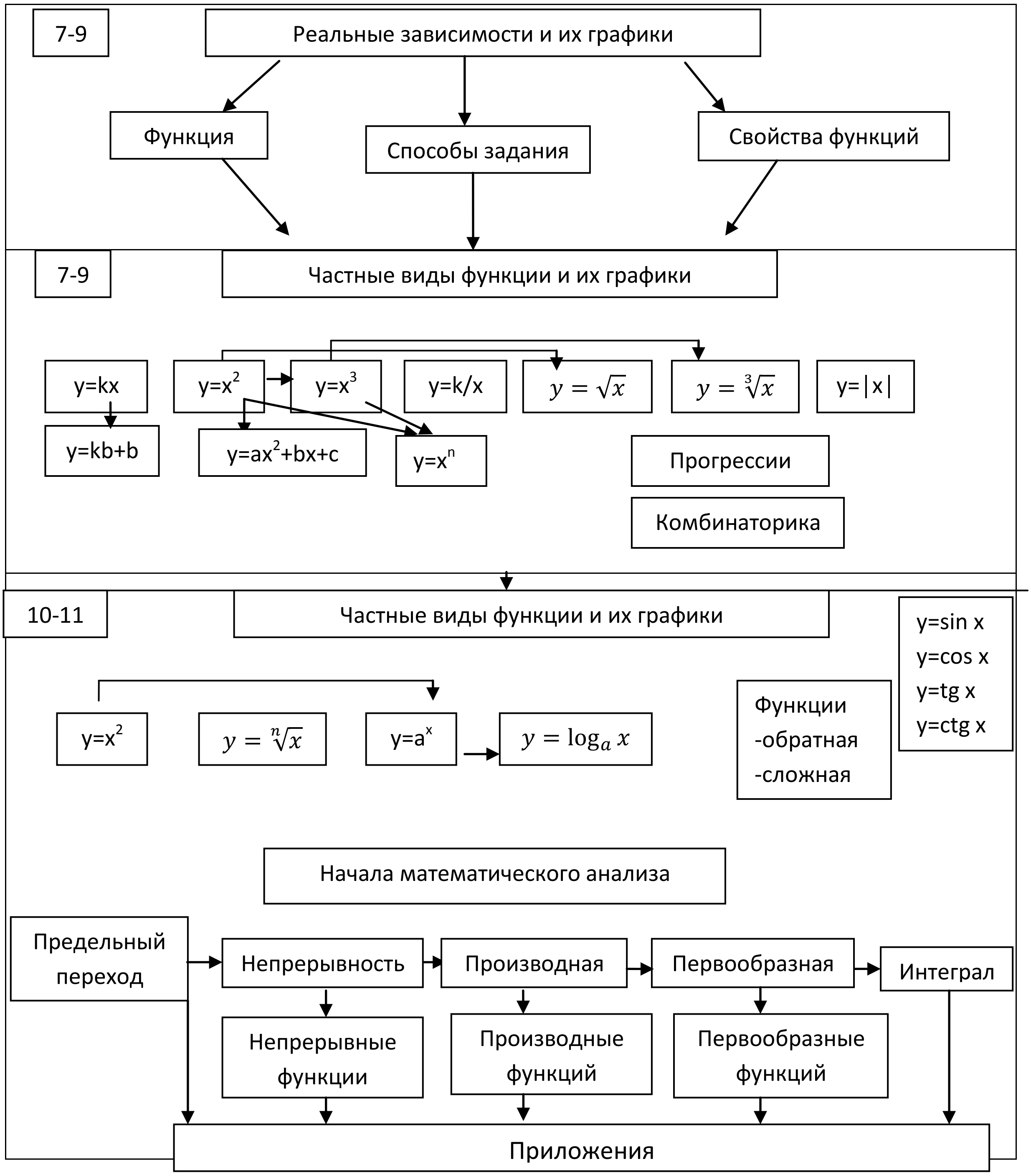
Систематическое изучение функций, их свойств и графиков, приложений начинается в курсе алгебры 7 – 9-х классов, а затем получает продолжение в курсе алгебры и начал анализа 10 – 11-х классов, причем в основном изучаются числовые функции, т. е. такие, которые заданы на числовом множестве и принимают значения из этого же числового множества. Числовые функции – и объект изучения, и та непосредственная среда, в которой строятся все основные понятия «математического анализа». В школе ограничиваются изучением начал анализа, в основном как аппарата для исследования элементарных функций и применения основ дифференциального и интегрального исчислений в смежных предметах. Учащиеся знакомятся с анализом поведения функции в области определения (глобальный подход) и в окрестности конкретной точки (локальный подход). Современное содержание функционального материала позволяет учащимся ознакомиться с исследованием функций как средствами алгебры (элементарные средства), так и средствами математического анализа (с помощью понятия производной); убедиться в преимуществах последнего, позволяющего изучать широкий класс функций и упрощать процесс получения результата.

Основы анализа были заложены И. Ньютоном и Г. Лейбницем в XVII – XVIII вв., Л. Эйлер провозгласил центральным его понятием функцию. И. Ньютон открыл общий способ описания связи между двумя величинами при непрерывном движении: скорость – производная пути, а путь – интеграл от скорости. Классической задачей является и задача о проведении касательной к кривой, решаемая Г. Лейбницем. В первой трети XIX в. О. Коши подвел под здание анализа строгий логический базис. Современные определения непрерывности функции, производной и интеграла используют понятие предела.

В стандартах второго поколения весь функциональный блок вошёл в содержательный раздел «Математический анализ» [26] или «Функция» [18], подчеркивая известную мысль Л. Эйлера. Традиционно на первых порах он включается в учебный предмет «алгебра». Таким образом, функция как математический объект изучается средствами алгебры и математического анализа.

Тему «Прогрессии» (9-й класс) необходимо отнести к функциональной линии, рассматривая последовательность как функцию натурального аргумента. Функциональная идея может быть использована и при изучении вопросов комбинаторики.

Структуру изложения функционального материала в действующих учебниках алгебры 7 – 9-х классов, алгебры и начал анализа 10 – 11-х классов можно представить на схеме:



Успешному изучению функционального материала будет способствовать соответствующая пропедевтика, которая должна вестись в начальной школе и в 5 – 6-х классах. Изучение математики в этих классах должно обеспечивать количественное накопление фактов и специфических способов деятельности, на базе которых возможен качественный скачок в изучении понятия функции и конкретных ее видов.

Задания для самостоятельной работы

● Сформулируйте основные этапы исторического развития понятия функции в математике и характерные их черты, приведите различные определения функции (И. Бернулли, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского, П. Дирихле) и раскройте их особенности, используя краткие исторические экскурсы из школьных учебников и более обстоятельные повествования из книг Г. И Глейзера. Поможет в этом статья Г. Е. Шилова «Что такое функция?» (Математика в школе. 2003. № 1. С. 4 – 10).

● Каковы возможности использования исторических сведений о развитии понятия функции на уроках алгебры и начал анализа и во внеурочной работе с учащимися?

● Каков развивающий потенциал функциональной линии в курсе математики? Используйте статью Л. А. Гориной «О развивающем потенциале функционально-графической линии в курсе алгебры основной школы» (Математика в школе. 2011. № 2. С. 69 – 73).

● Приведите примеры реализации взаимосвязей функциональной линии с другими содержательно-методическими линиями.

● Установите с помощью общеобразовательного стандарта (примерных программ) обязательное содержание учебного материала функциональной линии по 7 – 9-м и 10 – 11-м классам (базовый и профильный уровни). Составьте схему понятийного аппарата.

● Какие виды числовых функций изучаются в основной и старшей школах?

● В каких учебных предметах необходимы знания функционального содержания? Приведите примеры.

● Составьте презентацию беседы с учащимися на тему «Функции в природе и технике». Используйте высказывание А. Я. Хинчина о том, что в понятии функции, как в зародыше, уже заложена вся идея овладения явлениями природы и процессами техники с помощью математического аппарата.

● Проанализируйте исторические сведения в школьных учебниках алгебры и начал анализа с точки зрения использования их на уроках. Какому учебнику вы отдаете предпочтение?

● На основе изучения примерной программы по математике выделите цели изучения функционального материала и соответствующие требования к математической подготовке учащихся. Обратите внимание на форму подачи результатов изучения (овладение теорией, применение алгоритмов, приложения) в учебнике М. И. Башмакова (10 – 11-й классы).

● Раскройте преимущества концепции А. Г. Мордковича по изучению функций, которая предполагает построение материала по жесткой схеме: функция – уравнения – преобразования.

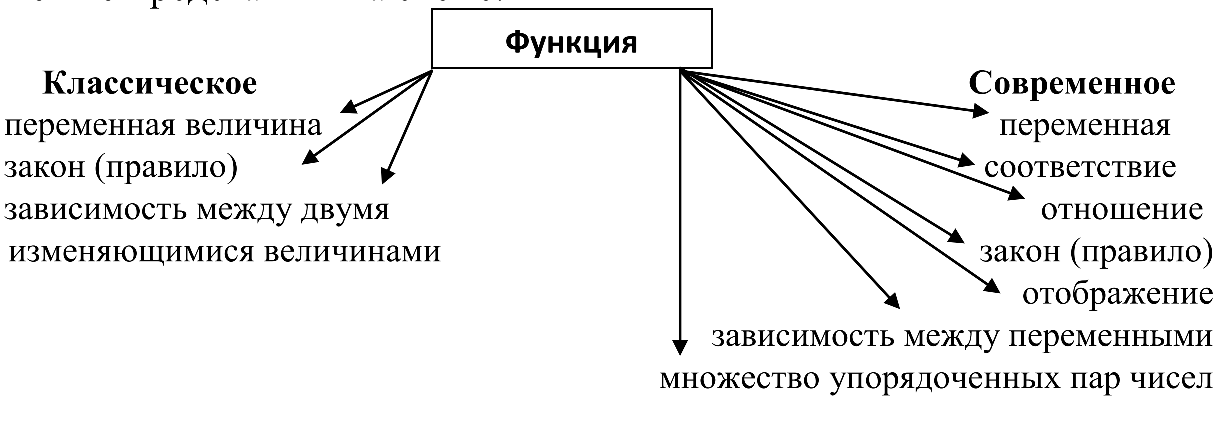
● Подберите 2-3 статьи, отражающие опыт работы учителей с функциональным содержанием, и зафиксируйте их общие рекомендации.

● Удалось ли реализовать в современных школьных учебниках по математике идеи Ф. Клейна о том, что функция должна играть основную, руководящую роль в курсе средней школы; функция должна появиться очень рано и должна пронизать все преподавание алгебры и геометрии; понятие функции в геометрической форме должно быть вообще душой школьного математического образования. Ответ по каждой позиции обосновать.

● Приведите примеры алгебраического источника происхождения понятия функции, например, решения неопределенного уравнения $x+y = 10$. О чем это говорит?

1.2. Различные подходы к определению общего понятия функции в школьном обучении

В методике обучения математике известны два основных направления в трактовке понятия функции: классическое (традиционное) и современное (теоретико-множественное), отражающее отдельные исторические этапы его развития. В рамках каждого направления выделяется по нескольку подходов, которые отличаются выбором определяющего (родового) понятия и соответствующей терминологии. Различные подходы к определению функции в направлениях можно представить на схеме:



В современном направлении существует еще один подход, согласно которому дается определение не самого понятия функции, а лишь функциональной ситуации. Для такого определения характерна фраза «…то говорят, что на множестве задана функция... ».

А. Н. Колмогоров в свое время рекомендовал отнести понятие функции к неопределяемым понятиям (см. его статью в журнале «Квант». 1970. №№ 1, 2). М. И. Башмаков считает, что «в определенном смысле понятие функции является одним из основных, близких к неопределяемым исходным понятиям» [2, с. 133]. А. Г. Мордкович отказывается «от формального определения функции при первом его появлении» и ограничивается «пояснительным описанием функциональной ситуации» [12, с. 9].

Все вышеизложенное подтверждает мысль о том, что вопрос об оптимальном для средней школы определении функции по-прежнему остается актуальным. О сложности проблемы говорит уже то обстоятельство, что во всех действующих учебниках алгебры даются различные по формулировке определения функции, отражающие один из подходов и методические соображения авторов. Определения функции, или функциональной ситуации, в старшей школе также разнятся.

В двух учебниках алгебры (М. И. Башмакова; Г. В. Дорофеева и др.) учащимся явно сообщается, что определение функции в математике может быть дано не единственным способом и приводятся различные трактовки термина (слова). Этот положительный момент может снять возникающие недоразумения у учащихся при чтении различных книг, которые отдают предпочтение тому или иному смысловому варианту.

Несмотря на различные формулировки определений функции в них можно выделить общие моменты:

1) под термином «функция» по умолчанию подразумеваются числовые функции (они и являются объектом изучения в школе);

2) термин «переменная» используется для общего обозначения различных меняющихся величин (признак переменности функции);

3) подчеркивается одновременное наличие двух неравноправных переменных (x и y);

4) четко выделен основной характерный признак функции – однозначность (в школе изучаются лишь однозначные функции);

5) речь не идет о каком-либо способе задания функции (это отдельный вопрос для изучения).

Попутно заметим, что для более явного лексического противопоставления x и y их называют соответственно независимой и зависимой переменной; определение функции не исключает случай, когда всем значениям переменной x ставится в соответствие одно и то же число (в этом случае функция называется постоянной или константой).

Подчеркнем, что принятые сейчас определения в основной школе являются осовремененным вариантом классического направления. Они педагогически целесообразны для первичного знакомства с функциями: ближе к привычным представлениям учащихся с учетом имеющейся пропедевтики сразу же дают мощный инструмент для описания и изучения меняющихся процессов, как это и было в истории науки. Отказ от чисто теоретико-множественного определения функции (более формального) через понятие соответствия (отношения, отображения), которое использовалось в учебниках алгебры в 70-е гг. прошлого века, считается оправданным в виду ряда его психолого-педагогических недостатков (см. статью Г. В. Дорофеева в журнале «Математика в школе». 1978. № 2). Однако при повтором изучении понятия функции в старшей школе (особенно в профильных классах), когда учащиеся уже владеют понятием на содержательном уровне и когда их общее логическое развитие стало значительно выше, желательно ознакомить и с современным определением, которое является более общим, допускающим рассмотрение множеств, элементами которых являются объекты произвольной природы. Это позволит расширить круг функций, распространить определение на геометрический материал, с единых позиций подойти к трактовке числовых функций и геометрических преобразований. Тем самым полнее раскрыть преемственность в изучении математики в школе.

Задания для самостоятельной работы

● Выпишите определения функции из действующих школьных учебников алгебры 7 – 9-х классов и сравните их. Обратите внимание на место введения явного определения.

● Выпишите определения функции из действующих школьных учебников алгебры и начал анализа для 10 – 11-х классов и сравните их, выясните преемственность с определениями основной школы.

● Выясните теоретическое и методическое значения различных подходов к определению понятия функции, используя ранее упомянутую статью Г. В. Дорофеева и другие источники [22, с. 260 – 263; 10, с. 113 – 128].

● Какое на ваш взгляд определение функции можно считать дидактически целесообразным для учащихся 7 – 9-х (10 – 11-х) классов? Ответ обоснуйте.

1.3. Функциональная пропедевтика

В методике обучения функциональному материалу первостепенная роль отводится его пропедевтике в начальной и основной школе до начала систематического изучения (определения функции, способов задания, общих свойств и др.). Подготовительная работа по созданию функциональной базы должна вестись регулярно и систематически через систему всевозможных упражнений, в основе которых лежит идея функциональной зависимости. Эта работа будет способствовать количественному накоплению фактов о зависимостях между величинами и приобретению учащимися опыта соответствующих учебных действий, которые позволят сформировать у них правильные представления, ведущие затем к образованию функциональных понятий, развитию функционального мышления. Подготовительный этап не предполагает сообщения учащимся каких-либо дополнительных сведений к изучаемому программному материалу, а лишь там, где возможно, подчеркивается функциональный момент вопроса. В некоторых учебниках алгебры еще определенное время продолжается функциональная пропедевтика.

Функциональная пропедевтика может осуществляться при рассмотрении следующих вопросов:

1. Решение текстовых задач, которое предполагает рассмотрение зависимостей между величинами, осмысление простейших видов зависимостей (прямая и обратная пропорциональности). Учащиеся постепенно приучаются к тому, что есть величины, которые могут менять свои числовые значения, причем в зависимости от изменения одной величины (например, времени) другая величина (путь) принимает определенное значение.

2. Зависимость между результатами арифметических действий и значениями их компонентов. Зависимость понимается здесь в том смысле, что изменение одного или нескольких компонентов (например, увеличение каждого из множителей в 2 раза) приводит к изменению результата (увеличению произведения в 4 раза). Вывод может быть оформлен в виде таблицы, которая наглядно устанавливает характер изменения.

3. Буквенные выражения, простейшие тождественные преобразования и числовые значения. Полезно обращать внимание учащихся на то, что значения выражений (например, $4m$; $5+a$) изменяются от изменения значений букв (m; a). Использование таблиц с одним или несколькими выражениями способствует усвоению понятия «соответствующие значения выражений», подчеркивается функциональная природа выражений. Необходимо показать учащимся, что выражение в некоторых частных случаях не имеет смысла, т. е. числового значения (например, на нуль делить нельзя). Важно научить их под буквой видеть неизвестное число.

4. Формулы. Учащиеся знакомятся со смыслом понятия «формула» как равенства, содержащего буквы; различными часто встречающимися формулами из геометрии, физики; учатся сами составлять формулы и производить вычисления по ним. Работая с формулой, они выясняют, от скольких и каких именно других величин зависит обозначенная величина (стоящая в равенстве слева).

5. Уравнения, которые решаются на основе связи между компонентами и результатами арифметических действий.

6. Координатная плоскость, которая позволяет наглядно представлять зависимости между двумя величинами. Учащиеся знакомятся с терминологией; учатся определять координаты точек и строить точки по координатам, строить геометрические фигуры и простейшие графики (последнее сейчас не во всех учебниках математики). Учащиеся осваивают учебные действия по работе с системой координат, которые будут необходимы при изучении конкретных функций.

7. Диаграммы (круговая, столбчатая), которые наглядно представляют зависимости между дискретными величинами.

Задания для самостоятельной работы

● Каково содержание функциональной пропедевтики в начальной школе, 5 – 6-х классах, в начале курса алгебры?

● Подберите типовые упражнения, подготавливающие изучение функционально-графической линии из различных школьных учебников (отдельно по каждому из семи направлений).

● Выделите материал, подготавливающий учащихся: 1) к введению понятия функции; 2) изучению способов задания функции; 3) исследованию свойств функций.

● Подберите упражнения, которые целенаправленно готовят учащихся к введению понятия функции, способов ее задания, области определения функции.

1.4. Введение понятия функции

Понятие функции – центральное в функционально-графической линии. Существуют различные мнения по месту введения формулировки определения в структуре курса алгебры. Одни считают, что логичнее определение дать сразу же при первом появлении понятия, т. к. трудно сформулировать ясное представление о понятии функции без четкой формулировки, выделяющей существенные признаки. Другие предлагают ввести формальное определение только тогда, когда учащиеся приобретут достаточный опыт работы с конкретными функциями, а поначалу ограничиться описанием, не требующим заучивания. Но все убеждены в том, что определить функцию или функциональную ситуацию нужно в основной школе. Однако формулировки определений различаются. Считается, что родовое понятие и соответствующая терминология, используемая в определении функции, должны быть понятны ученикам и не требовали предварительных громоздких рассмотрений на данном этапе изучения. Информация, содержащаяся в определении, должна быть не только научной, но и отвечать возрастным особенностям учащихся. Последнее нарушалось при теоретико-множественной трактовке понятия функции уже в 6-м классе (ныне это 7-й класс) в учебнике Ю. Н. Макарычева и др. (1970 г.). Смысл определяющих (опорных) понятий и терминов раскрывается с помощью конкретных примеров, без формальных определений с опорой на прежний опыт, полученный на пропедевтическом этапе. Учитель должен следовать точке зрения авторов на принятую в учебнике символику, т. к. встречаются разночтения в обозначениях. Необходимо внимательно самому вчитаться в формулировку определения функции или функциональной ситуации, а затем организовывать деятельность учащихся по усвоению опорных понятий, терминов, а затем и общего понятия функции. Обращать внимание на житейский смысл математических терминов, происхождение и перевод с латинского или греческого языка.

Остановимся на методике введения общего понятия функции по учебнику алгебры 7-го класса Ю. Н. Макарычева и др., в котором функция трактуется как особого рода зависимость одной переменной от другой. Термин «зависимость» мыслиться как связь между переменными. Такая точка зрения имеет богатые исторические корни, тесно связана с приложениями и позволяет полнее использовать язык графиков. Кроме того у учащихся уже имеется достаточный опыт в использовании понятия зависимости между величинами. Поэтому целесообразно избирать индуктивный метод с эвристической беседой при введении понятия функции, рассмотрев и проанализировав три-четыре ранее встречающиеся зависимости между переменными, заданные формулой, графиком и таблицей, которые позволили бы раскрыть содержание терминов: «независимая переменная», «зависимая переменная». (В учебнике предлагаются четыре задачи на движение, о площади квадрата, стоимости проезда, графике температуры, в которых величины выступают как переменные). При этом подчеркнуть, что каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Сообщить, что такая зависимость одной переменной от другой называется функциональной, или функцией. После такой подготовительной работы можно вводить определение, а затем термины «аргумент», «область определения функции», «значения аргумента и функции». Важно обратить внимание на то, что термин «функция» в учебнике употребляется в двух смыслах: как особого рода зависимость между двумя переменными, так и сама зависимая переменная. Для учащихся должны быть привычными обороты речи типа «площадь квадрата является функцией длины его стороны», «зависимость площади квадрата от длины его стороны является функциональной» и т. п. Особо следует обратить внимание на то, что в формулировке определения слово «соответствует» не говорит о виде выражения функциональной зависимости (функции), поэтому необходимо дать учащимся представления о различных способах задания функции, которые уже были обозначены (но не названы) во вводных задачах – формулой, таблицей, графиком. Затем формулируется определение графика функции как множества всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции. Учащиеся учатся при любом способе задания находить значение функции по значению аргумента и решать обратную задачу, осуществлять переход от одного способа задания функции к другому (если это возможно). Каждый из названных способов задания функции обладает определенными недостатками (какими?), поэтому на практике пользуются одновременно несколькими из них. Не допускать в речи учащихся фразы «функция $y = 2x + 5$», заменяющей правильное произношение «функция, заданная формулой $y = 2x + 5$», т. к. это приводит к ошибочному отождествлению функции с формулой. Учитель должен постоянно подчеркивать различие между этими понятиями. Следует обращать внимание учащихся на то, что при задании функции формулой необходимо указывать область определения – множество значений независимой переменной. На данном этапе продолжается работа по формированию умения строить и читать графики реальных зависимостей, выяснять, принадлежит ли точка графику, выполнять задания на подведение конкретных зависимостей под понятие. Например, обсудить вопрос о том, почему зависимость пути от времени при равномерном движении – функция. Она является функцией в том смысле, что в один и тот же момент времени путь, пройденный телом, не может иметь двух значений.

В последних изданиях учебника авторы внесли дополнительный пункт «Задание функции несколькими формулами» для тех, кто хочет знать больше.

На этом этапе изучения общих понятий функции и графика функции не вводится соответствующая символика. Она вводится во второй главе учебника 9-го класса, когда учащиеся уже ознакомились с простейшими функциями. Используются стандартные обозначения для переменных: x и y (они же обозначают координатные оси); запись $y = f(x)$ означает некоторую функцию; символ $f(x)$ – выражение с переменной или значение функции, соответствующее значению аргумента, равному x; буква f (первая буква латинского слова *functio*) характеризует правило вычисления $f(x)$ по x.

Аналогичный подход раннего введения понятия функции принят и в учебниках алгебры 7-го класса Ш. А. Алимова и др.; К. С. Муравина и др. как одной из пары переменных (y есть функция x – $y(x)$). В определении функции по К. С. Муравину и др. включены слова «допустимое значение» для переменной x , появление этих слов объясняется учащимся тем, что буквенные выражения, с помощью которых задаются функции, не всегда имеют смысл.

В других учебниках федерального списка формально-логическое определение функции дается позднее (8-й или 9-й класс). К этому времени учащиеся уже знакомы со множеством действительных чисел и поэтому можно без опасений говорить об области определения функции и графики строить в виде непрерывной линии. Кроме того учащиеся располагают таким алгебраическим материалом, который позволяет повысить уровень строгости в обосновании свойств функций, а именно тождественными преобразованиями выражений, уравнениями и неравенствами. При таком подходе общее понятие функции и ее графика возникает как обобщение накопившегося опыта в работе с различными видами функциональных зависимостей и их графиков, некоторыми свойствами функций. А. Г. Мордкович в учебнике алгебры 9-го класса подводит учащихся к появлению у них потребности в формальном определении функции, графика и свойств функции, обращаясь к истории развития математики. В определениях А. Г. Мордковича; С. М. Никольского и др.; Г. В. Дорофеева и др. подчеркивается, что функция рассматривается на некотором числовом множестве, которое объявляется областью определения функции. А. Г. Мордкович в отличие от других авторов переменную y не называет функцией; из его определения следует, что функция обозначается $y = f(x)$, где $x \in X$ (X – область определения), акцент сделан на заданную, а не на естественную область определения функции (область допустимых значений выражения $f(x)$). В учебниках А. Г. Мордковича и М. И. Башмакова ставится вопрос о том, что нужно указать при задании функции. Учащиеся должны осознавать, что ответ заложен в самом определении, а именно, область определения и правило (закон) соответствия. Подчеркнуть, что функция не зависит от выбора обозначений для аргумента и способа описания правила для вычисления ее значений; функции, имеющие одинаковое правило, но различные области определения, считаются разными (например, функции $y = x^2$ и $y = x^2$ при $x \geq 0$ различны).

В учебнике А. Г. Мордковича говорится, что в математике имеется достаточно много способов задания функции. Кроме наиболее популярных (аналитический, графический, табличный) он знакомит учащихся со словесным (описательным) способом задания функции, когда правило соответствия описывается словами родного языка. М. И. Башмаков вводит понятие уравнения функциональной зависимости между переменными (неявное задание функции); например, соотношение между переменными x и y в виде уравнения $3x - 5y = 7$ является неявным заданием функции, т. к. оно не разрешено относительно y.

При введении функции нет возможности сопоставить это понятие с другими понятиями, которые бы напоминали функцию, но были отличны от нее. Поэтому важно использовать специальные упражнения, требующие выяснения является ли данная зависимость функцией. Такие упражнения, используемые знания учащихся по материалу различных школьных предметов (физика, химия, история, биология, география) и из повседневной жизни, приведены в книге по методике обучения математике [11, с. 265 – 266]. Необходимое условие сознательного усвоения понятия функции учащимися – приведение собственных примеров зависимостей, являющихся и не являющихся функциями.

Общее понятие функции довольно сложное, поэтому успешно овладеть им учащиеся смогут только в результате длительного накопления конкретных представлений и фактов в курсе алгебры основной, а затем и старшей школы.

Задания для самостоятельной работы

● Как вы считаете, существенно ли дополнение в определении функции по К. С. Муравину?

● Какая символика вводится в названных учебниках 7-го класса? В чем отличие?

● В учебнике алгебры 9-го класса Ш. А. Алимова и др. определяется сама функция или функциональная ситуация?

● Почему в учебниках 7-го класса не ставится вопрос об области определения функции?

● Используется ли в учебниках 7-го класса термин «функциональная зависимость»?

● Какие задачи в тексте учебников 7-го класса используются для подведения учащихся к понятию функции?

● Приведите примеры наиболее удачных упражнений практической направленности по способам задания функции. Обоснуйте свою точку зрения.

● Приведите основные типы задач по усвоению общего функционального материала.

● Известно, что у учащихся вызывают интерес примеры, когда функциональной зависимости нет. Например, мы говорим, что масса человека зависит от его роста, но нельзя сказать, что масса человека есть функция его роста. Приведите еще несколько примеров. Есть ли они в учебниках?

● Задайте словесно функции: «целая часть числа» («*антье х*») и «дробная часть числа», запишите их формулой, постройте графики и укажите их области определения и изменения.

● Решая задачу: «Построить график функции, заданной формулой $y=\frac{x^2-4}{x+2}$», ученик построил график функции, заданной формулой $y = x - 2$. Какие ошибки он допустил? Как убедить его в ошибочности решения. Являются ли ошибки грубыми или их можно отнести к недочетам?

● Назовите условия равенства (совпадения) двух функций.

● Как организовать с учащимися работу по выяснению того, что функции $y = 1$ и $y = x^0$ различны?

● Как подобрать первые задачи для усвоения учащимися общего определения функции?

● Что должен знать ученик о способах задания функции? Какие достоинства и недостатки имеет каждый способ?

● Найдите интересные для учащихся примеры функций, которые могут быть заданы *а)* только с помощью графика, *б)* только с помощью таблицы.

● Приведите примеры текстовых задач, приводящих к ситуации, когда функцию задают несколькими формулами.

● Составьте конспект урока по введению понятия функции на основе одного из учебников по алгебре.

● Подготовьте презентацию урока по введению способов задания функции.

● Всегда ли из зависимости между двумя переменными одну из них можно выразить как функцию другой?

● В учебниках алгебры А. Г. Мордковича сообщается учащимся, что в математике (как в родном языке, вообще) один и тот же объект может быть назван по-разному. Приводится пример: $y = kx+b$ – это равенство с двумя переменными, линейное уравнение, линейная функция, формула, соотношение между x и y, зависимость между x и y, одна из математических моделей. Какой смысл вкладывается в перечисленные понятия? Приведите еще две- три аналогичные ситуации в математическом языке.

● В каком из учебников алгебры основной школы вы считаете общее определение функции наиболее приемлемым для учащихся и в каком классе его можно ввести? Ответ обоснуйте.

● Как показать ученикам, что не всякая формула задает функцию и не всякую функцию можно задать формулой.

● Приведите примеры нечисловых функций и укажите для них области определения и значений.

● Совпадают ли понятия «график функции» и «график уравнения»? Проиллюстрируйте на примерах уравнения единичной окружности и линейного уравнения с двумя переменными.

1.5. Общие теоретические и методические основы изучения числовых функций. Исследование функций

Значительная часть материала функциональной линии относится к изучению широкого круга частных видов числовых функций, которые распределены по различным классам основной и старшей школы. Так, например, в учебниках А. Г. Мордковича каждый год обучения ориентирован на конкретную модель реальной действительности: 7-й класс – линейная функция (моделирует равномерные процессы); 8-й класс – квадратичная функция (моделирует равноускоренные процессы); 10-й класс – тригонометрическая функция (моделируют периодические процессы); 11-й класс – показательная функция (моделирует процессы органического роста).

Принципиальная особенность изложения материала о частных видах функций в современных учебниках заключается в том, что исходным моментом в нем являются наиболее общие понятия – функция, формула и график. Эти понятия служат основой для развития функциональной линии – введения общефункциональных свойств (общих для всего семейства функций), свойств определенного вида (например, линейной функции), свойств конкретно заданной функции (например, $y=2x+3$). Свойства функции можно обнаружить исходя из ее графика, данного в готовом виде или самостоятельно построенного (графический метод), а также в процессе изучения формулы (аналитический метод). Графический метод часто называют наглядно-геометрическим, он помогает развивать у учащихся геометрическое мышление. С помощью того и другого методов мы изучаем свойства функций. Чтобы учащиеся более целенаправленно воспринимали изложение этого материала в учебнике, учителю необходимо разъяснить смысл задания «изучить свойства функции». Изучить свойства функции – это значит выяснить, как изменяются значения переменной y при изменении значений переменной x (возрастают, убывают, постоянны, положительны и т.д.) [19, с. 149], т.е. установить характер изменения (поведения) функции. Это задание формулируется в методике как «исследование функции». Под исследованием функции понимают качественное ее изучение, состоящее в выявлении основных свойств, позволяющих достаточно наглядно судить о ее поведении. Исследовать функцию можно по графику (графическое исследование), которое в методике получило свой термин «чтение графика». Исследование функции по графику и по формуле осуществляется по определенной схеме (алгоритму), которая имеется в учебниках, и содержит большее или меньшее число пунктов в зависимости от уровня, на котором проводится исследование, и используемых средств. Коллективно разбирая примеры из учебника, необходимо отработать с учащимися общую схему исследования функций.

Исследование функций в современных учебниках проходит на двух уровнях: первый – исследование функций элементарными средствами (посредством решения соответствующих уравнений и неравенств, доказательства тождеств и тождественных неравенств); второй – исследование функций с привлечением понятий математического анализа (предела, производной).

Заметим, что изучение всех видов элементарных функций происходит на первом уровне, поэтому предполагаемое ранее уменьшение удельного веса исследования функций элементарными средствами не произошло. Однако в старших классах (в 10-м или 11-м) формируются умения исследования различных функций (даже более сложных) с помощью производной и построения их графиков. Учащиеся должны узнать, какие свойства функций экономичнее исследовать с помощью производной.

В методике изучения функций основное – сочетание графического и аналитического методов исследования, которое позволяет содействовать гармоничному развитию мышления учащихся, активизируя оба полушария головного мозга: и правое, отвечающее за образы, и левое, отвечающее за логические рассуждения. Соотношение их определяет уровень строгости изложения функционального материала. Повышение уровня строгости возможно за счет усиления роли аналитического метода исследования. Однако с этим спешить не надо. В основной школе именно график позволяет «открывать» свойства изучаемой функции и запоминать их. Опора на наглядные образы отвечает возрастным возможностям учащихся, делает материал менее абстрактным и предупреждает формализм в знаниях учащихся. Наглядные представления помогают выяснить сущность свойств, подготавливая учащихся к восприятию формальных определений, воплощая их в свою очередь в наглядной материальной форме. По мере продвижения в изучении функций все чаще выводы, сделанные в результате рассмотрения графика, получают подтверждение путем аналитического доказательства.

График функции дает богатые представления о ее свойствах. Однако следует иметь в виду, что характер исследования функции в ходе ее изучения постепенно меняется от преимущественно индуктивного к усилению роли дедукции, когда учащимся при построении графиков функции предлагается провести небольшое аналитическое исследование, которое помогает увидеть отдельные ее свойства путем работы с формулой. В старшей школе аналитический аппарат становится исходным моментом в исследовании функции и построении ее графика. Исследуя функцию по графику или с помощью формулы, мы составляем довольно четкий ее «словесный портрет» – словесное описание поведения. Поэтому можно говорить, что результат исследования функции можно сформулировать на трех различных языках математики: графическом, словесном (вербальном) и символическом (аналитическом, формульном). Учащиеся должны овладеть умением перевода свойств функции с одного языка на другой, а для этого их необходимо специально обучать. Это умение формируется не сразу, но дидактическую значимость его трудно переоценить.

Учащимся необходимо показать, что исследование функции имеет большое практическое значение, т. к. позволяет во многом предсказать поведение реального процесса, который выражается данной функций.

Существенной особенностью изучения функционального материала является постепенное введение общефункциональных свойств по мере готовности учащихся воспринять соответствующую информацию. Введение того или иного свойства происходит в связи с изучением конкретных видов функций, в поведении которых оно наиболее проявляется. Соответствующее свойство функции может предъявляться на различных уровнях строгости: наглядно-интуитивном, словесно-описательном, формальном (со строгим определением). Учащиеся последовательно переходят с низшего уровня на более высокий в процессе изучения функций в основной и старшей школе. Перечислим свойства функций, которые на определенном уровне строгости изучаются в различных разделах курса алгебры (7 – 9-й классы), алгебры и начал анализа (10 – 11-й классы): область определения, область значений, нули (корни), знакопостоянство, монотонность, возрастание и убывание, четность (нечетность), периодичность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, непрерывность, ограниченность, выпуклость, дифференцируемость, интегрируемость, обратимость.

Важно при введении того или иного свойства функций показать его использование при решении различных задач, в частности, уравнений и неравенств данного вида, текстовых задач «на экстремум». Геометрическая интерпретация свойств функций играет большую роль для правильного восприятия и осмысления физических и многих других процессов. Изучение свойств функции имеет важное значение для исследования функций и построения их графиков.

В теории и практике обучения сложилась определенная методическая схема изучения числовых функций, которая является своеобразным планом-программой действий учителя и учащихся. Она применима для изучения любого конкретного вида функций с учетом уровня строгости изложения учебного материала и соотношения графического и аналитического методов исследования. Методическая схема (технологическая цепочка) включает в себя следующие пять этапов:

1. Рассмотреть две-три текстовые задачи, решение которых приводит к функции определенного вида (мотивация введения нового вида функции). На этом этапе учащихся необходимо убедить в целесообразности изучения нового вида функции, исходя из практических соображений или развития теории. Решая задачу, учащиеся приходят к формуле, задающей функцию.

2. Сформулировать определение функции через формулу, с помощью которой она задается, установить смысл и границы допустимых значений параметров, входящих в эту формулу, привести примеры частных случаев данной функции, вести специальное название для этого вида. На этом этапе учащиеся должны получить четкое представление о функции, о ее характерных признаках, выделяющих данную функцию из множества других, научиться распознавать ее по аналитическому выражению.

3. Построить график функции. На этом этапе учащиеся учатся строить графики конкретных частных случаев функции (при различных значениях параметров) «по точкам», составляя таблицу нескольких ее значений; выясняют влияние параметров на особенность расположения графика функции в системе координат; получают представление о графике функций в общем виде; строят графики по характеристическим точкам (если это возможно) и учатся отличать их от графиков функций других видов, распознавать по графическому изображению.

4. Провести исследование функции на основные свойства (или отсутствие каких-либо) с привлечением графика и формулы (в 7 – 9-х классах преимущественно по графику; в 10 – 11-х классах– с помощью формулы).

5. Рассмотреть задачи и упражнения на применение изученных свойств функции данного вида.

Этот этап служит закреплению основных понятий и теоретических фактов, связанных с изучаемым видом функций, формированию соответствующих умений и навыков.

Целостное представление о том или ином виде функций (свойства, график, применения) может быть получено только после осуществления всех этапов примерной схемы. Учащиеся должны понять, что рассматриваемые конкретные функции определенного вида обладают общностью аналитического способа задания, сходными особенностями графиков, свойств и областей применения. В системе упражнений после осознания отдельного вида функций учащимся предлагается провести исследование индивидуально заданных функций как представителей данного вида.

Учащиеся должны понять, что исследование функции может выполняться для различных целей. В зависимости от цели исследованию подвергаются все свойства данной функции (полное исследование) или их какая-то часть (частичное исследование). Цель исследования задается текстом задачи. Вот различные редакции: «Исследовать на экстремум функцию», «Исследовать функцию и построить ее график», «Построить график функции». В основу построения графиков должно быть положено исследование свойств данной функции. Построение отдельных точек служит лишь цели уточнения графика. Обычно «исследование функции» и «построение графика» не разделяются, а проводятся одновременно, хотя в методике их различают. Если ставится цель построить график, то в ходе ее реализации функция исследуется лишь в той мере, в какой это необходимо для построения достаточно точного графика, т. е. проводится частичное исследование, исключающее выполнение лишней работы.

Задания для самостоятельной работы

● Отыщите в учебниках основной и старшей школы схемы исследования функций. Сравните их по числу вопросов, на которые ученики должны дать ответы, и их формулировкам. Укажите классы.

● Можно ли утверждать, что наглядные соображения всегда помогают заметить какую-либо математическую закономерность? [19, с. 147].

● Какие свойства функций являются в большей мере наглядными, а какие – менее наглядными? [19, с.147 – 148].

● Опишите методику изучения пункта в учебнике М. И. Башмакова «Читаем график функции» (8-й класс).

● Приведите примеры выполнения различных заданий на исследование функций с помощью производной из альтернативных учебников.

● Приведите примеры названий параграфов (пунктов) из учебников основной и старшей школы, посвященных изучению конкретных видов функций. В каких из них используется термин «исследование функции»? Выясняется ли его смысл?

● Обоснуйте высказывание: «Математический анализ основывается на глубоком синтезе аналитических и графических методов».

● Оцените роль аналитического метода исследования функций в развитии логического мышления учащихся.

● Приведите примеры элементарных исследований свойств при изучении первых функций.

● Приведите запись определения свойств функции (возрастание, убывание) на трех языках.

● В каком из учебников приводятся таблицы перевода свойств функции со словесного языка на геометрический (графический)?

● Какой теоретический факт используется при исследовании функции на возрастание и убывание в основной и старшей школе?

● На примере конкретного учебника алгебры 9-го класса оцените соотношение графического и аналитического методов при изучении новых функций.

● Составьте для каждого комплекта учебников таблицу рассмотрения свойств функций с указанием времени изучения (класс) и уровня строгости (использовать обозначения для уровней: Н – наглядно-интуитивный, О – словесно-описательный, Ф-формальный). Например, по учебникам А. Г. Мордковича начало таблицы может выглядеть так:

Свойство	Класс				
	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й
Область определения	Н	О	Ф	Ф	Ф
Область значений	-	Н	Ф	Ф	Ф
Ограниченность	-	Н, О	Ф	Ф	Ф
………………………………………	…….	……...	….……	…….	…….

● Сравните составленные таблицы по времени изучения свойств и их уровню строгости. Какой из авторских подходов вы считаете наиболее удачным? Проследите динамику развития двух-трех свойств функции. Какова была пропедевтика через систему упражнений?

● Имеются ли в учебниках дидактические ситуации, когда ознакомление с новым видом (семейством) функций происходит на примере индивидуальной, но «типичной» функции данного вида (членом семейства)?

● В каких учебниках ведется изложение материала близко к приведенной методической схеме, а в каких имеются отступления? Выскажите свое мнение по каждой ситуации.

1.6. Методика построения графиков функций с помощью свойств и преобразований

Изучение функций сопровождается построением графиков. Умение строить графики функций – тот инструмент, который позволяет глубже осознать как само понятие функции, так и конкретные функциональные зависимости. На его основе развивается у учащихся наглядная форма математического мышления – геометрическое мышление. Геометрический язык необходим для качественной оценки поведения тех или иных функций в вопросах теории и для решения задач.

Вопросам графического изображения функций уделяется большое внимание в школе; они рассредоточены по различным разделам курса алгебры 7 – 9-го классов и курса алгебры и начал анализа 10 – 11-го классов и появляются каждый раз в связи с изучением конкретной числовой функции. Постепенно учащиеся знакомятся с общими способами (приемами) построения графиков функций. В элементарной математике наиболее распространен способ построения графиков «по точкам» (поточечный), который непосредственно вытекает из определения графика функции как множества всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Можно ученикам сообщить о существовании специального обозначения для графика функции $y = f(x)$:$G(f)$, или F(f), где F – прописная буква «гамма» греческого алфавита.

Ученики должны усвоить саму процедуру построения графиков функций этим способом. В учебниках М. И. Башмакова говорится о том, что график существует не сам по себе, а в определенной системе координат, т. е. уделяется внимание связи графика с системой координат. В большинстве учебников подчеркивается, что на практике невозможно найти все точки координатной плоскости, удовлетворяющие заданной функции $y = f(x)$, т. к. таких точек бесконечно много, поэтому геометрически изображают функцию в виде некоторого эскиза графика (схематически) с большей или меньшей точностью. Однако построение эскиза графика (его куска, расположенного в конечной части координатной плоскости) по отдельным точкам в методике также называют построением графика функции. В старших классах желательно на конкретных примерах показать учащимся ненадежность этого способа построения графика функции, поскольку поведение графика между выбранными точками и поведение его вне отрезка между крайними из них остается неизвестным (см.: В. Г. Болтянский и др. Лекции и задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1974). Чтобы избежать ошибочности в построении графика, необходимо обращаться к свойствам функции, которые позволят уточнить поведение графика функции.

Способ построения графика функции $y = f(x)$ «по точкам» может быть представлен алгоритмом: составить таблицу значений функции (с большим или меньшим шагом в зависимости от требуемой точности); на координатной плоскости отметить точки, координаты которых указаны в таблице; соединить точки от руки плавной линией. При этом имеется в виду, что графиком является непрерывная линия (кривая), которая и получается в большинстве случаев при изучении числовых функций.

В связи с изучением кусочных функций используется этот же способ построения их графиков, только отдельно на каждом промежутке, и сам способ получил название «по промежуткам». При построении графиков таких функций надо внимательно следить за граничными точками промежутков и соответствующим образом обозначить их принадлежность или не принадлежность графику («выколотые» точки отмечаем стрелочкой или кружочком). По промежуткам, указанным в таблице, удобно строить график и при исследовании с помощью производной.

Учащиеся основной школы постепенно отходят от прямого применения этого способа, вводя новые действия. Грамотное построение графика функции «по точкам» предполагает изучение особенностей заданной функции, поэтому оно основано на исследовании ее свойств. Сначала изучаются характерные свойства данной функции, с помощью которых можно построить эскиз графика. Затем выбираются несколько контрольных точек (выбор их определяется свойствами) для уточнения вида графика. И, наконец, через построенные точки проводят одну или несколько линий, используя свойства заданной формулой функции. Задание в этом случае формулируется так: исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график.

Рассмотрим часто используемые свойства функций, существенно упрощающие построение эскиза графика.

1. Четность и нечетность. Эти два свойства тесно связаны с симметричностью оси ординат (четность) и начала координат (нечетность), выявить их можно на основе соответствующего определения. Необходимым условием для того чтобы функция могла быть четной или нечетной, является симметричность области ее определения относительно нуля (т. е. точки x и $–x$ принадлежат одновременно области определения). Однако оно не достаточно, т. к. существуют функции с симметричной областью определения, не являющиеся ни четными, ни нечетными (их называют функциями «общего вида»). Вместе с тем единственная функция $y = 0$ одновременно и четная, и нечетная. Таким образом, все числовые функции делятся на четыре вида.

Выявление четности или нечетности функции облегчает построение ее графика: сначала изобразить его «половину» для $x \geq 0$, а затем дополнить ее при $x < 0$ с учетом симметричности. Часто говорят, что «левая половина» графика четной функции строится с «помощью зеркала», а нечетной функции – «с помощью циркуля». Построение симметричной части графика осуществляется по нескольким точкам, которые имеют соответствующие координаты $(-x\ ;\ y)$ или $(-x\ ;\ -y)$. Для осуществления симметрии «правой половины» графика относительно начала координат иногда поступают иначе: сначала имеющуюся половину графика симметрично отражают относительно оси ординат, а затем полученную симметрично отражают относительно оси абсцисс.

2. Периодичность. Это свойство функции тесно связано с параллельным переносом вдоль оси абсцисс и следует из определения периодической функции. Говоря о периоде функции $y = f(x)$, обычно имеют в виду наименьший положительный период (главный или основной период), который чаще всего обозначают через T, все другие периоды функции являются целыми кратными основного ($\pm nT$, где $n \in N$). Необходимо сообщить ученикам, что не всякая периодическая функция имеет основной период (y = const, для которой любое положительное число является периодом, не имеет основного; $y = D(x)$ – функция Дирихле, для которой любое рациональное число является периодом, не имеет основного). Приведенные два примера покажут ученикам, что не только тригонометрические функции – периодические. Можно еще рассмотреть функцию $y = \{x\} = x - [x]$ (дробная часть числа) с периодом, равным 1.

Для построения графика периодической функции достаточно сначала построить часть графика на отрезке оси абсцисс длиной, равной основному периоду, а затем, смещая построенную часть графика посредством параллельного переноса (сдвига) вдоль оси абсцисс вправо и влево на расстояния, равные основному периоду, получим искомый график функции. Иначе говоря, график периодической функции состоит из повторяющихся кусков.

Важно обратить особое внимание на нахождение основного периода периодической функции. Учащиеся чаще всего затрудняются указать период функции $y = f(ax)$, если число T – основной период функции $y = f(x)$ и a – положительное действительное число. Основным периодом этой функции будет число T/a.

3. Области определения и значений (в частности, ограниченность). Выявление этих свойств функций происходит на основе соответствующих определений. Устанавливая названные области для функции, мы выделяем соответствующие множества точек на осях координат (иначе говоря, находим проекции всех точек будущего графика на оси). Области определения и значений функции могут со-

стоять из отдельных точек, из одного или нескольких промежутков. С областью значений функции тесно связано свойство ограниченности (или неограниченности) функций, которое существенно влияет на вид и расположение графика: если функция $y = f(x)$ ограничена $m<f(x)<M$ (где m, M – некоторые числа), то весь ее график лежит в полосе между прямыми $y = m$ и $y = M$; ограничена сверху (снизу): $f(x) < M$ (или $f(x) >m$), то весь ее график лежит ниже (выше) прямой $y = M$ (или $y = m$).

Заметим, что для нахождения области значений функции часто проводятся некоторые предварительные преобразования. Например, имея функцию $y = x^2 – 6x + 11$ и преобразовав квадратный трехчлен к виду $(x – 3)^2 + 2$, можно утверждать, что $E(y)= [2; +\infty]$ и функция ограничена снизу; имея функцию $y = 5 \sin x – 12 \cos x$ и преобразовав выражение к виду $13 \sin (x – \varphi)$, $\varphi = \operatorname{arctg} 12/5$, получим, что $E(y) = [-13. 13]$ и функция является ограниченной.

4. Нули (корни) функции и промежутки знакопостоянства. Графически нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график пересекает ось абсцисс или касается ее. Следует обратить внимание на связь между нулями функции $y = f(x)$ и решением уравнения $f(x)= 0$. Нули функции определяют промежутки знакопостоянства, в которых функция либо положительна ($f(x) > 0$), либо отрицательна ($f(x) < 0$). Геометрически это означает, что график лежит выше или ниже оси абсцисс. Функция может менять знак только в нулевых точках или в точках разрыва, но может и не менять его.

5. Монотонность (возрастание, убывание), точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения функции. Сразу же отметим, что исследование функции на названные свойства в школе сначала производится элементарными средствами (на основе определений), а затем с помощью производной. Учащиеся имеют возможность оценить общность и алгоритмичность второго способа. Безотносительно к способу исследования необходимо выяснить промежутки монотонности (монотонный – однообразный), в которых график идет вверх (поднимается) или вниз (опускается). Особый интерес представляют точки области определения, разделяющие промежутки возрастания и убывания, т. е. точки, в которых меняется характер монотонности функции. Такие точки включаются одновременно как в промежутки возрастания, так и убывания; они именуются точками минимума и максимума или общим названием «точки экстремума» (это точки оси абсцисс). Точки экстремума – самые характерные наряду с нулями

для графика функции. Значения функции в экстремальных точках называют экстремумами (экстремум – крайнее). Нахождение точек экстремума дает возможность найти максимумы и минимумы функции и установить границы промежутков монотонности.

Термины «максимум» и «минимум» характеризуют поведение функции в достаточно малой окрестности. Поэтому к ним иногда добавляют слово «локальный» («местный»). Одна и та же функция может иметь несколько локальных максимумов и минимумов, причем минимум может оказаться даже больше максимума. Их нельзя отождествлять с наибольшим и наименьшим значениями функции в области ее определения. Но в то же время необходимо указать на определенную связь: для отыскания, например, наибольшего значения непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ сравнивают значения во всех точках максимума, попавших на интервал (a, b), и значения $f(a)$ и $f(b)$на концах отрезка. Из этих чисел выбирается наибольшее.

6. <u>Поведение функции вблизи точек разрыва и в бесконечности, асимптоты.</u> При исследовании поведения функции вблизи точек разрыва и на бесконечных ветвях (при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$) часто оказывается, что график сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называют асимптотами. Различают асимптоты вертикальные, горизонтальные и наклонные.

7. <u>Выпуклость (вверх, вниз) и точки перегиба</u>. Важной характеристикой формы графика функции на отдельных промежутках области определения является направление ее выпуклости – вверх или вниз. Выпуклость фигуры означает, что всякая хорда, соединяющая две точки графика лежит внутри его. В зависимости от расположения графика по отношению к хорде различают выпуклость вверх или вниз. Геометрически это означает, что соответствующая часть графика лежит выше или ниже проведенной хорды. Точки, в которых меняется характер выпуклости (при условии, что они входят в область определения функции), называются точками перегиба.

Естественно, что не всегда надо устанавливать все свойства функции для построения ее графика. Об этом говорится в школьных учебниках. В каждом конкретном случае вопрос решается индивидуально.

Заметим, что построение графиков функции в процессе их изучения упрощается за счет выявления характерных точек и линий графиков (прямая строится по двум точкам, парабола – по координатам вершины, оси симметрии и еще паре точек), особых приемов (тригонометрические функции – с помощью единичной окружности, квадратичная функция − путем выделения квадрата двучлена), а также шаблонов (квадратичная функция).

В современных школьных учебниках уделяется больше внимания, чем это было раньше, простейшим преобразованиям графиков. Это объясняется важностью для соединения с геометрическими линиями математики и необходимостью реализации целей общего развития. Преобразования графиков начинают рассматривать в курсе алгебры основной школы и затем через систему упражнений отрабатывают при изучении различных видов функций. Учащиеся должны уяснить идею этого способа построения графика функции. В ряде случаев график заданной функции можно построить путем преобразования графика некоторой уже известной функции, тесно связанной с данной. При этом нередко удается выводить некоторые свойства функции из полученного графика.

К преобразованиям графиков функций относят: параллельный перенос (сдвиг) вдоль осей координат, осевую симметрию (зеркальное отражение) относительно осей координат, растяжение (сжатие) вдоль осей координат. Такие переносы образования аргумента и функции называют линейными. Первые два из них проводятся без деформации известного графика, как единое целое, поэтому их относят к «механическим» приемам построения графиков, они не изменяют масштаб графика. Третье – сопровождается деформацией (растяжением или сжатием) известного графика, ведущей к изменению его масштаба.

При первоначальном ознакомлении с тем или иным преобразованием графика надо построить в одной системе координат графики основной и «производной» функции и сравнить их, выяснить, что произошло с координатами точек графика, какие действия над ними произведены, что можно сказать о графиках. Как правило, изучаются преобразования графиков квадратичной функции, вводится соответствующая терминология и приемы построения графика. Общий вывод делается, как правило, в старшей школе.

Составим таблицу, дающую представление о преобразованиях, сводящихся к линейным:

№ п/п	Основная функция	«Производная» функция	Вид преобразования	С учетом знака
1	$y = f(x) \to P(x,y) \to$	$y=f(x)+b$ $P'(x;y+b)$	Параллельный перенос на b масштабных единиц вдоль оси oy	При $b>0$ вверх, при $b<0$ вниз
2	$y=f(x) \to P(x,y) \to$	$y=f(x+a)$ $P'(x+a,y)$	Параллельный перенос на a масштабных единиц вдоль оси ox	При $a>0$ влево, при $a<0$ вправо
3	$y=f(x) \to O(x,y) \to$	$y=f(x+a)+b$ $O'(x+a;y+b)$	Объединяются пп. 1 и 2: последовательно совершаются два параллельных переноса с учетом знаков a и b	
4	$y=f(x) \to P(x,y) \to$	$y=-f(x)$ $P'(x,-y)$	Симметрия относительно оси ox	
5	$y=f(x) \to P(x,y) \to$	$y=f(-x)$ $P'(-x,y)$	Симметрия относительно оси oy	
6	$y=f(x) \to P(x,y) \to$	$y=kf(x),\ k>0$ $P'(x,ky)$	Растяжение вдоль оси oy с коэффициентом k	
7	$y=f(x) \to P(x,y) \to$	$y=f(kx),\ k>0$ $P'(kx,y)$	Растяжение вдоль оси ox с коэффициентом k	
8	$y=f(x) \to$	$y=\lvert f(x)\rvert$	Симметрия относительно оси ox тех участков графика функции $y=f(x)$, которые расположены ниже нее	
9	$y=f(x) \to$	$y=f(\lvert x\rvert)$	Симметрия относительно оси oy графика $y=f(x)$, построенного на положительной полуоси абсцисс	
10	$y=f(x) \to P(x,y)$	$x=f(y)$ $P'(y,x)$	Симметрия относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов	
11	$y=f(x) \to$	$y=Af(kx+a)+b$	Последовательно осуществляются растяжение вдоль осей координат, параллельные переносы и осевые симметрии	

Последний график имеет большое практическое значение в физике. Формулой $S = A\sin(\omega t + \varphi)$ задается закон гармонического колебательного движения, где A – амплитуда колебания, ω – частота, φ – начальная фаза, S – величина смещения в зависимости от времени t.

В некоторых школьных учебниках при построении графиков функций с помощью преобразований рекомендуют совершать не движение графика в выбранной системе координат, а координатных осей, т. е. получить новую систему координат из старой и к ней «привязать» известный график. Так поступает А. Г. Мордкович уже в 8-м классе, сообщая учащимся оба способа и предлагая им право выбора, хотя сам он считает, что более удачен второй способ. М. И. Башмаков полагает в основной школе второй способ преждевременным и трудным для учащихся.

Для отыскания нужной последовательности преобразований, сохраняющих линейность, можно предложить учащимся запись «со стрелочками». Например, для п. 11 записать, каким образом из x получается y: $x \to f(x) \to f(x + a) \to f(kx + a) \to Af(kx + a) \to Af(kx + a) + b$.

Важно подчеркнуть, что не все преобразования сохраняют линейность. Линейность не сохраняется при построении графика функции $g(x) = 1/f(x)$, исходя из графика $y = f(x)$. Известная схожесть с взаимно обратными числами здесь не проходит: функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ не являются взаимно обратными.

Графики простейших элементарных функций служат фундаментом, на котором базируется умение строить графики более сложных функций, являющихся в конечном счете различными комбинациями простейших элементарных функций. Применение рассмотренных примеров позволяет существенно упростить построение графика исходной функции и нередко свести его в конце концов к построению одной из простейших элементарных функций.

Свободное владение техникой построения графиков часто помогает решать многие задачи и порой оказывается единственным средством их решения. Оформившийся графический метод позволяет решать уравнения, неравенства и их системы. Графический метод используется для иллюстрации, а иногда и решения прикладных задач (физических, инженерных, геометрических и др.)

Роль графиков при изучении функций столь велика, что каждый математик старается не только построить графики всех важнейших функций, но и запомнить их, т. к. по ним легко восстановить в памяти свойства изученных функций.

Задания для самостоятельной работы

● Можно ли правильно построить графики функций по предложенным таблицам:

а) $f(x) = 2x/\,(2-x^2)+x^3$,

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-6	-3	0	3	6

б) $f(x) = x^3 + 1 - (x^3 - x)\,/(x^2-3)$,

x	-2	-1	0	1	2
$f(y)$	-1	0	1	2	3

в) $f(x) = 1\,/\,(3x^2 - 1)^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(y)$	$^1/_{121}$	$^1/_4$	1	$^1/_4$	$^1/_{121}$

●Ученику было предложено построить график функции $y = (x^2 - 4)\,/(x-2)$, но он построил график функции $y = x^2 + 2$. Какие ошибки допустил ученик? Как убедить его, что он допустил грубую ошибку?

● Построить график функции:

$$y = \begin{cases} -x, \text{ если } -2 < x < 0, \\ x+1, \text{если } 0 \le x < 1, \\ 2x, \text{если } 1 < x < 2, \\ x+1, \text{если } 2 < x \le 3. \end{cases}$$

Какие ошибочные действия могут произвести учащиеся?

● Подтвердите примерами мысль о том, что способ построения графиков функций «по точкам» можно назвать экспериментальным.

● Составьте круговую диаграмму классификации функций по признаку четности.

● Выясните логическую структуру определений четной и нечетной функций.

● Постройте графики функций с учетом свойства четности:

а) $y = 1/(1+x^2)$; б) $y = x^2 + 2\,|x|$; в) $y = x \cdot |x|$.

● Выясните, четной или нечетной функцией будет сумма, разность, произведение, частное:

а) двух нечетных функций;

б) двух четных функций;

в) четной и нечетной функций.

Приведите примеры.

● Как опровергнуть гипотезу о четности или нечетности конкретной функции?

● Можно ли утверждать, что одно из свойств функции – ее четность или нечетность – является отрицанием другого? Какова причина, стимулирующая у ученика ошибочность ответа на поставленный вопрос?

● В каком классе целесообразно, на ваш взгляд, сообщить ученикам материал, изложенный выше? Когда и как это излагается в учебниках?

● Выясните логическую структуру определения периодической функции.

● Как доказать, что некоторая функция не является периодической?

● Приведите примеры периодических функций, не являющихся тригонометрическими. Докажите их периодичность и найдите основной период, если он имеется.

● Постройте графики функций с учетом свойства периодичности:

а) $y = \{x\}$;

б) $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ если } 0 \le x \le 1, \\ \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}, \text{если } 1 < x < 2. \end{cases}$ при условии, что она периодическая с периодом $T = 2$.

в) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{если} - 1 < x \le 0, \\ x^2, \text{если } 0 < x \le 1. \end{cases}$ при условии, что она периодическая с периодом $T = 2$.

● Всегда ли обязательно стремиться к нахождению области значений функции до построения графика?

● Отыщите в учебниках графики функций, которые имеют нули, точки разрыва и определите промежутки знакопостоянства.

● Приведите примеры упражнений на решение уравнений и неравенств с помощью графика.

● Нарисуйте график функции, который имеет несколько локальных минимумов и максимумов. Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

● Отыщите в учебниках материал, связанный с понятиями, перечисленными в данном пункте.

● Приведите примеры функций, имеющих асимптоты.

● Как асимптоты помогают строить эскиз графика функции?

● В каких учебниках и в каком классе дается понятие об асимптотах? На каком уровне излагается материал? Какие приемы нахождения асимптот приводятся?

● Какие учебники и для какого класса приводят материал о выпуклости функции?

● На каком уровне строгости излагается этот материал?

● Всегда ли можно установить элементарными средствами выпуклость функции?

● Проследите по учебникам, как расширяются и углубляются знания учащихся о преобразованиях графиков функций. На каких графиках функций изучается этот материал?

● Какие варианты систематизации преобразований графиков существуют?

● Проиллюстрируйте на конкретном примере первоначальное введение параллельного переноса графиков (растяжения графиков).

● Постройте графики функций, применяя теорию преобразования графиков:

а) $y = \sqrt{2\,|\,x\,|\, + 1}$, б) $y = \sqrt{|\,2x + 1\,|}$,

в) $y = (x - 1)^2/x^2$, г) $y = -2 \sin (2\,x - 3)$.

● Подберите 2-3 книги, посвященные методике построения графиков, и составьте на них аннотации.

Глава 2
МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

2.1. Методика изучения линейной функции

После того как учащиеся получили общее представление о числовых функциях, они переходят к изучению конкретных функций. В качестве первой из них рассматривается линейная функция как самая простая математическая модель описания реальных процессов. Учащиеся впервые приступают к изучению графика определенного вида функций, поэтому необходимо показать им важность изучаемого материала с использованием практических примеров линейных зависимостей величин, известных им из математики, других смежных предметов и практической жизни.

В современных учебниках алгебры имеются разночтения во времени начала изучения линейной функции – 7-й или 8-й класс, последовательности изучения ее с частным случаем – прямой пропорциональностью (дедуктивный или индуктивный подход), в сообщении большего или меньшего числа свойств при первоначальном ознакомлении (компактное или распределенное по различным классам изучение свойств), во взаимосвязи линейного уравнения с двумя переменными и линейной функции, их графиков.

В большинстве школьных учебников алгебры изучение темы «Линейная функция» традиционно начинается с прямой пропорциональности и ее графика. С понятием прямой пропорциональной зависимости двух величин, числовые значения которых выражаются положительными числами, учащиеся уже знакомы. Им известно, что две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз. Они решали задачи на пропорциональные величины с помощью пропорции, учитывая, что отношения соответствующих значений этих величин равны. Поэтому зависимость называлась прямой пропорциональностью. Вышеприведенное определение верно только для положительных чисел. В алгебре оно заменяется на другое, которое включает и отрицательные числа.

Изучение прямой пропорциональности целесообразно начать с рассмотрения нескольких подводящих задач, которые учащиеся уже неоднократно решали. Например, таких:

1. Мотоциклист двигался со скоростью 16 м/с в течение t секунд. Сколько метров (s) проехал он за это время?

2. Ученик купил n карандашей по 5 р. Сколько рублей (c) он заплатил за покупку?

3. Найти массу m (г) алюминиевого провода, объем которого V (см^3), если плотность алюминия равна 2,7 г/см^3.

Учащиеся легко решат предложенные задачи, запишут три формулы: $s=16\ t\ (t>0)$, $c=5n\ (n \in N)$, $m=2{,}7\ V\ (V>0)$ и выяснят, что в каждом случае мы имеем дело с прямой пропорциональной зависимостью. Можно предложить ученикам самим привести подобные задачи, решение которых приводит к формулам, аналогичным рассмотренным.

Далее внимание учащихся следует обратить на то, что формулы, выражающие совершенно различные явления, имеют одинаковую математическую структуру и в общем виде могут быть записаны одной формулой: $y=kx$, где $k \neq 0$, x и y – две переменные. Поэтому можно сказать, что такие явления описываются одной и той же функцией, которую можно назвать прямой пропорциональностью. После этого формулируется определение: прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y= kx$, где x – независимая переменная, k – не равное нулю число. Обратить внимание учеников на исключение, что $k \neq 0$, т. к. k – это коэффициент прямой пропорциональности. Необходимо вспомнить известное свойство пропорциональных переменных x и y и записать его с помощью пропорций: $x_1/x_2 =y_1/y_2$ $(y_1/x_1 = y_2/x_2)$, где x_1 и x_2 – значения аргумента, y_1 и y_2 – соответствующие им значения функции (исключаем значения, равные нулю). В такой формулировке коэффициент пропорциональности может быть и отрицательным. В определении фраза «можно задать» означает, что функцию можно задать и иначе. Такая фраза будет применяться в определениях и других видов функций.

Для усвоения определения необходимо предлагать учащимся упражнения на распознавание прямой пропорциональности среди функций, заданных формулой (таблицей), нахождение коэффициента пропорциональности. При пропорциональности переменных выражение, стоящее в правой части формулы, имеет смысл при всех значениях x и каждому x соответствует единственное y, следовательно, формула задает функцию.

В учебнике алгебры Ш. А. Алимова и др. (7-й класс) рассматривается функция $y = kx$, где k – данное число (не исключая нуль), и только в случае $x>0$, $y>0$ и $k>0$ она называется прямой пропорциональностью, т. е. сохраняется прежний смысл понятия.

Теперь можно перейти к построению и изучению графика прямой пропорциональности. Учащимся предлагается построить несколько графиков функции (например, $y = 2x$, $y = 0{,}5x$, $y = -2x$) по нескольким точкам (например, шести-семи), зафиксированным в таблице значений. После нанесения точек на координатную плоскость учащиеся с помощью линейки (эмпирически) убеждаются, что все отмеченные точки лежат на прямой, которая проходит через начало координат. Проведя с помощью линейки прямую в каждом случае, ученики убеждаются, что она и является графиком заданной функции. Из курса геометрии учащиеся знают, что положение прямой определяется двумя точками, поэтому для построения графика достаточно вычислить координаты двух точек, одной из которых может быть начало координат. На первых порах в целях контроля за вычислениями и построением целесообразно находить координаты третьей точки.

Дальше можно перейти к исследованию расположения графика в координатной плоскости в зависимости от коэффициента. Предварительно предложить учащимся в качестве самостоятельной работы на координатной плоскости построить графики конкретных функций при различных значениях $k>0$ и $k<0$, а затем ответить на вопрос: от чего зависит расположение графиков в каждом случае? Рассматривая графики, учащиеся наглядно установят роль коэффициента.

Итогом проделанной работы будет общий вывод, касающийся графика изучаемой функции:

1) графиком является прямая;
2) прямая проходит через начало координат;
3) прямая строится по двум точкам;
4) прямая располагается при $k>0$ в I и III координатных четвертях, а при $k<0$ – во II и IV;
5) прямая не совпадает с осями координат;
6) точка принадлежит прямой, если ее координаты – соответствующие друг другу значения аргумента и функции.

Заметим, что все теоретические положения сопровождаются конкретными примерами, контрпримерами и графическими иллюстрациями. Ученикам полезно сказать, что первый факт требует доказательства и оно будет проведено в курсе геометрии 8-го класса.

В упражнениях выделяется случай, когда прямая пропорциональность задана на некотором подмножестве чисел, тогда ее графиком служит часть прямой – луч, отрезок, отдельные точки.

Следующий шаг – изучение очередной функции – линейной и ее графика. Название говорит о геометрической модели функции – прямой линии, служащей ее графиком. Знакомство с новой функцией происходит с опорой на знания о прямой пропорциональности и осуществляется по тому же плану. Вначале рассматриваются две-три сюжетные задачи в качестве мотивировки. Приведем возможные из них:

1. Автомобиль, находясь в 5 км от города, начал движение от него со скоростью 60 км/ч. На каком расстоянии (s) от города он будет через t ч?

2. На складе было 500 т угля. Ежедневно стали увозить по 30 т угля. Сколько угля будет на складе (m) через n дней? Решение задач приводит к двум формулам: $s = 60\,t + 5$ $(t \geq 0)$, $m = -30\,n + 500$ $(n = 1, 2, \ldots, 16)$, которые не напоминают прямую пропорциональность, следовательно, имеем дело с новой функцией, которая задается общей формулой $y = kx + b$ и называется линейной. Как видим, формула возникает в результате обобщения результатов реальных ситуаций. Дается соответствующее определение. Внимание учеников обращается на то, что в формулировке нет ограничений на числа k и b. Сразу же необходимо заметить, что если в формуле положить $b = 0$, то будем иметь при $k \neq 0$ уже изученную функцию, т. е. линейная функция обратилась в прямую пропорциональность. Этот факт может навести учащихся на мысль, что у этих функций много общего. В учебнике Ю. Н. Макарычева и др. общность сразу же проявляется при установлении вида графика линейной функции путем сравнения значений двух пар функций ($y = 0{,}5x + 2$ и $y = 0{,}5x$; $y = 0{,}5x - 3$ и $y = 0{,}5x$) при одних и тех же значениях x с помощью формул и составленных таблиц. Для первой пары функций выяснится, что для любого значения x значение функции $y = 0{,}5x + 2$ на 2 единицы больше значения функции

$y = 0{,}5x$, поэтому график первой функции может быть получен из графика второй путем сдвига (перемещения как целого) его на 2 единицы вверх в направлении оси ординат; утверждается параллельность этих прямых. После проведения аналогичных рассуждений для второй пары функций делается общий вывод о том, что график функции $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ есть прямая, параллельная прямой $y = k\,x$; знак b определяет направление перемещения. Обобщение сделано на основе рассмотрения частных примеров линейной функции. Это можно доказать и дедуктивным методом, но на данном этапе ограничиваются индуктивным рассуждением.

Если линейная функция изучается до ее частного случая, то вид графика выясняется иначе, путем приема построения по точкам. Отметим, что в ряде учебников алгебры линейная функция вводится после изучения линейных уравнений. В учебнике алгебры 7-го класса А. Г. Мордкович линейную функцию определяет как специальный вид линейного уравнения с двумя переменными.

Продолжая изучение линейной функции, необходимо рассмотреть ее частные случаи при различных значениях k и b:

1) при $k \neq 0$, $b = 0$ формула имеет знакомый вид $y = kx$;

2) при $k = 0$, $b \neq 0$ формула имеет вид $y = 0x + b$, или $y = b$; график – прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(0;\ b)$;

3) при $k = 0$, $b = 0$ формула имеет вид $y = 0x + 0$, или $y = 0$; графиком является ось абсцисс.

Полезно отметить, что ось ординат не является графиком какой-либо функции, это просто график уравнения $x = 0$.

Особое внимание уделяется способам построения графика линейной функции общего вида:

1) по двум точкам с произвольно выбранными значениями абсцисс (например, 0 и 1, 2 и 0, 1 и 5);

2) по точкам $(0;\ y_1)$ и $(x_2;\ 0)$ – точка пересечения прямой с координатными осями;

3) с помощью параллельного переноса (сдвига).

Для выяснения геометрического смысла параметров b и k в формуле $y = kx + b$ необходимо предложить ученикам в домашних условиях построить графики при их различных числовых значениях, а затем в классе обсудить поставленную проблему. В ходе ее разрешения учащиеся должны понять:

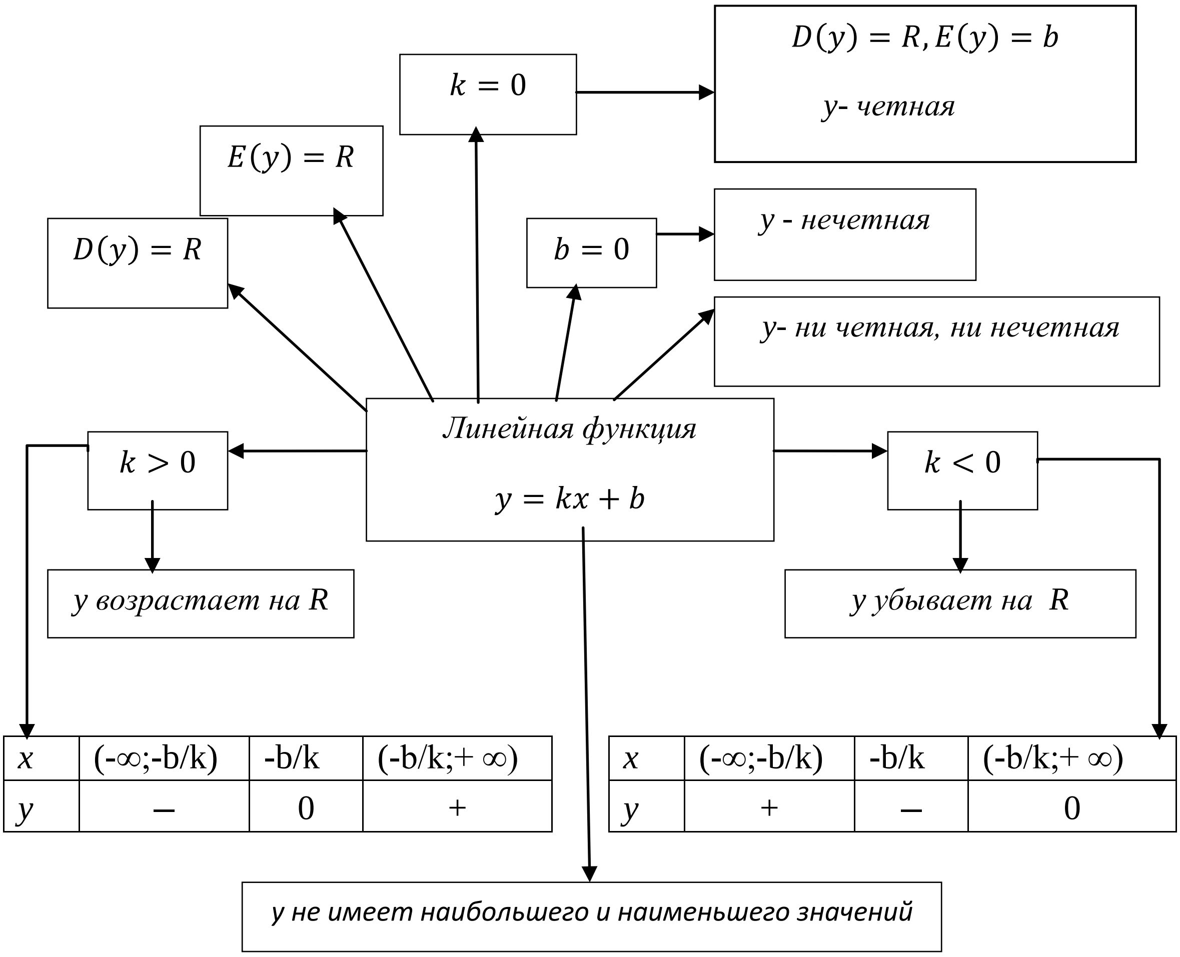
1) число b есть ордината точки пересечения прямой с осью ординат (график пересекает ось ординат в точке $(0; b)$); число b иногда называют начальной ординатой;

2) число k – угловой коэффициент прямой, который определяет угол наклона ее к положительному направлению оси абсцисс: если $k>0$, то угол острый, если $k<0$, то угол тупой (от k зависит «степень крутизны» прямой).

В связи с последним фактом важно подчеркнуть, что для линейной функции общего вида коэффициент k не является коэффициентом пропорциональности, т. к. ее значения не пропорциональны значениям аргумента. Учащиеся часто допускают такую ошибку.

Изучение сведений о графике линейной функции завершается рассмотрением вопроса о взаимном расположении в координатной плоскости графиков линейных функций. Этот вопрос можно предложить ученикам исследовать самостоятельно с использованием графического материала. Общие закономерности могут быть обнаружены методом неполной индукции. Устанавливается, что графики двух линейных функций $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ пересекаются, если $k_1 \neq k_2$ и параллельны, если $k_1 = k_2$. Этот факт находит применение при выяснении вопроса о числе решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными; устанавливает связь с курсом геометрии.

После такого тщательного анализа графического материала появляется возможность изучить свойства линейной функции и ее частного случая – прямой пропорциональности. Надо заметить, что характерные свойства функций вводятся не все сразу, а постепенно по мере готовности учащихся их доказать. Систематизировать свойства возможно в 9-м классе во время обобщающего повторения курса алгебры. В учебнике А.Г. Мордковича (7-й класс) свойства возрастания и убывания, знакопостоянства на наглядно-интуитивном уровне приближены к графикам (например, вводит фразы «поднимаемся в горку», «спускаемся с горки»). Представление о свойствах линейной функции в основной школе можно получить из рис. 2.1.



x	(-∞;-b/k)	-b/k	(-b/k;+ ∞)
y	–	0	+

x	(-∞;-b/k)	-b/k	(-b/k;+ ∞)
y	+	–	0

Рис. 2.1

Желательно установить связь с геометрией после изучения соответствующего материала. Например, выяснить, что k=tgα, где α – угол наклона прямой к оси абсцисс, симметричность графика функции y=kx относительно начала координат, симметричность графика функций y=b относительно оси ординат. Проявлением симметрии графиков является свойство четности и нечетности. После введения производной угловой коэффициент даёт количественную оценку поведения функции *(*k=$f'(x)$*)*.

Определить характер монотонности можно двумя способами: а) на основании определения возрастающей или убывающей функции (основная школа); б) с помощью производной (старшая школа). Отсутствие экстремумов обосновывается существованием производной и необращением её в нуль при k≠0 (старшая школа).

Задания для самостоятельной работы

● Составьте сравнительный анализ учебников алгебры по перечисленным разночтениям.

● Из различных учебников алгебры (7 – 8-й классы) выпишите примеры реальных зависимостей, описываемых прямой пропорциональностью.

● Ознакомьтесь с доказательством теоремы о том, что графиком прямой пропорциональности является прямая на основе подобия фигур, уравнения прямой (см : А. В. Погорелов. Геометрия 7 – 11-й классы), теоремы Фалеса (см. : М. И. Башмаков. Алгебра 8-й класс).

● Составьте планы уроков по изучению прямой пропорциональности.

● Покажите целесообразность введения нового определения прямой пропорциональности в курсе алгебры. Ограниченность прежнего определения проверьте на примере зависимости $y = 3x$ с помощью таблицы с положительными и отрицательными числами.

● Приведите примеры применения линейной функции в смежных предметах, используя упражнения из различных учебников. Обратите внимание на использование её в статистике по материалам учебника алгебры Г.В. Дорофеева и др. (8-й класс).

● Приведите примеры графического решения задач на равномерное движение, используя учебник алгебры С. М. Никольского и др. (8-й класс).

● Приведите систему упражнений на распознавание линейной функции по формуле и графику, включая частные случаи.

● Известно, что линейная функция задается указанием чисел k и b. Оформите таблицу графиков функции в зависимости от сочетания числовых значений k и b ($k>0$ *при* $b>0$, $b=0$, $b<0$; $k<0$ при $b>0$, $b=0$, $b<0$; $k=0$ при $b>0$, $b=0$, $b<0$). Изложите методику работы с ней на уроке.

● Какими приемами можно повысить интерес учащихся к изучению линейной функции?

● Составьте методическую схему изучения линейной функции по различным учебникам алгебры, включив в нее изучение линейных уравнений (систем) с двумя переменными (по выбору студентов). Выскажите свое мнение о целесообразности той или иной последовательности вопросов, подлежащих изучению.

● Составьте план урока по введению понятия линейной функции.

● Ознакомьтесь по учебнику алгебры А. Г. Мордковича (7-й класс) с таблицей, оперирующей алгебраическим и геометрическим языками по выяснению расположения графиков двух линейных функций в системе координат. Какова методика ее использования на уроке?

● Проанализируйте систему упражнений по изучению свойств линейной функции. Выделите основные типы упражнений.

● Докажите, что приращение линейной функции пропорционально приращению аргумента ($\Delta y=k\,\Delta x$).

● Проведите полное исследование линейной функции.

● Сформулируйте результаты изучения линейной функции (знать…, уметь…, использовать в деятельности…).

2.2. Методика изучения квадратичной функции

Квадратичная зависимость между величинами обнаруживается как в самой математике, так и в её приложениях в других науках и в технической практике. С помощью квадратичной функции выражаются законы многих явлений и процессов в природе и технике. Этим объясняется повышенное внимание к ней в школьной программе, которая предусматривает сначала изучение элементарными средствами (основная школа), затем – с помощью понятия производной (старшая школа). В основной школе учащиеся имеют возможность познакомиться с новыми свойствами функций; с построением и чтением более сложных графиков; с элементарными преобразованиями графиков; с решением простейших задач на максимум и минимум; с графическим способом решения квадратного уравнения и неравенства и др. Решение квадратного уравнения и неравенства целесообразно приблизить к изучению квадратичной функции, т. к. этот материал тесно взаимосвязан. Кроме того нужно подчеркнуть различие между понятиями «квадратное уравнение» и «квадратичная функция» : при решении уравнения $ax^2+bx+c=0$ мы находим те значения x (корни уравнения), при которых равенство обращается в тождество, а при изучении функции $y= ax^2+bx+c$ интересуемся законом, по которому каждому значению x соответствует определенное значение y (учащиеся часто смешивают эти понятия). Квадратичную функцию часто называют еще квадратным трехчленом, т. к. в правой части формулы он и записан.

Изучение квадратичной функции по традиции в основной школе проводится поэтапно. По числу выделяемых этапов учебники различаются. В учебниках Ю.Н. Макарычева и др. последовательность такова: $y=x^2$ (7-й класс), $y=ax^2$, $y=ax^2+n$, $y=a(x–m)^2$, $y=a(x–m)^2+n$, $y=ax^2+bx+c$ (9-й класс); в учебниках Ш.А. Алимова и др. весь материал сосредоточен в 8-м классе и особо выделяются три функции: $y=x^2$, $y=ax^2$, $y=ax^2+bx+c$. Постепенное рассмотрение графиков частных случаев квадратичной функции необходимо для нахождения наиболее рационального способа её построения, поскольку по выбранным точкам, принадлежащим графику, трудно установить его вид. Чтобы легче было определить точки, нужно преобразовать квадратный трехчлен, задающий функцию. На конкретном графическом материале учащиеся знакомятся с линейными преобразованиями графиков. Кроме того по формуле $y=a(x–m)^2+n$ можно провести простейшие исследования свойств функции, не используя график.

Заметим, что во всех учебниках алгебры излагаются свойства функций $y=x^2$ и $y=ax^2$, а также вытекающие из них особенности графиков. Исследование свойств квадратичной функции в общем виде не предусматривается. Учащиеся должны уметь исследовать только конкретные примеры функций по построенному графику и частично по аналитическому заданию (формуле). Исследование в общем виде переносится в старшую школу после изучения производной.

Для облегчения построения графиков целесообразно использовать лекала (шаблоны) парабол $y=x^2$, $y=0{,}5x^2$, $y=2x^2$, $y=1/3x^2$, $y=3x^2$ (для классной доски с масштабом 1дм = 1ед., для тетради – 1см = 1ед.), координатную сетку, миллиметровую бумагу. На уроках применять готовые таблицы различных графиков, использовать компьютерные варианты преобразований графиков.

При изучении квадратичной функции графический метод разумно сочетается с аналитическим методом.

Изучение семейства квадратичной функции начинается с $y=x^2$, связанной с действием возведения числа в квадрат. В некоторых учебниках эта функция ещё и не получает названия. Но она важна тем, что учащиеся знакомятся с новым видом функциональной зависимости, отличным от линейной (графиком, его особенностями и свойствами), её график в дальнейшем поможет ввести понятия четности и монотонности функции, иррационального числа, установить неравномерный характер изменения значений функции и др. Мотивировкой изучения функции является задача об установлении зависимости площади квадрата от длины его стороны. График функции $y = x^2$ строится по большому числу точек, координаты которых занесены в таблицу. Для большей точности построения нужно проследить, как график ведет себя вблизи начала координат, для чего полезно дополнительно выбрать еще несколько значений функции на отрезке [-1;1]. После нанесения точек на координатную плоскость и соединения их можно выявить некоторую плавную кривую линию. Дается название полученной линии – парабола. Обращается внимание на то, что график неограниченно продолжается вверх справа и слева от оси ординат, а на рисунке мы изображаем только часть его.

Исходя из формулы, таблицы и графика, формулируют свойства функции и графика, а также дают им обоснование. Результатом может быть табл. 2.1.

Таблица 2.1

№ п/п	Свойства функции $y = x^2$	Свойства графика (параболы)
1	Если x=0,то y=0	Точка O (0;0) принадлежит графику, ее называют вершиной параболы
2	Если $x \neq 0$, то $y>0$	Все точки графика, кроме точки O (0;0), расположены выше оси абсцисс
3	Противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y	График симметричен относительно оси ординат – оси параболы
4	При $x \geq 0$ функция возрастает, при $x \leq 0$ функция убывает	График поднимается вверх («в горку») при $x \geq 0$, опускается вниз («с горки») при $x \leq 0$
5	При x=0 функция принимает наименьшее значение, равное нулю	Точка O (0;0) является самой «низкой» точкой графика

В 7-м классе приводятся первые три свойства в учебнике Ю. Н. Макарычева, а все пять – в учебнике А. Г. Мордковича. Важно сразу же приучать учеников правильно изображать параболу при вершине (ошибочно рисуют заострением книзу) и завершении обеих ветвей (ошибочно далеко удаляют их от оси OY и с перегибом вправо и влево). Подчеркнуть, что парабола касается оси абсцисс в начале координат, график практически сливается с осью.

В 8-м или 9-м классе вводится понятие квадратичной функции, рассматриваются её свойства, особенности графика и приёмы построения параболы, приводятся примеры квадратичной зависимости величин. Квадратичная функция определяется, как обычно, формулой $y=ax^2+bx+c$. Здесь же выясняются её частные случаи в зависимости от коэффициентов b и c (один или оба равны нулю); коэффициент $a\neq0$ по определению. Учащиеся должны научиться распознавать квадратичную функцию по формуле и определять коэффициенты.

Изучение квадратичной функции начинается с частного случая $y=ax^2$ $(a\neq0)$. При $a=1$ получаем уже знакомую функцию $y=x^2$, которая послужит своеобразным эталоном при изучении других функций. Уместно показать на двух-трех задачах потребность в особом изучении функции $y=ax^2$. Например, сопротивление среды движению тела (самолета, подводной лодки) пропорционально квадрату его скорости; путь, пройденный телом при равномерно-ускоренном (замедленном) движении, пропорционален квадрату времени; площадь круга пропорциональна квадрату радиуса. Вызвав познавательный интерес к функции, можно её изучение начать с выяснения влияния коэффициента $(a\neq1)$ на поведение функции (иначе говоря установление геометрического смысла a) при $a>1$, $0<a<1$, $a<0$. Для этого предложить ученикам в одной системе координат построить графики функции $y=ax^2$ при различных значениях a $(a=1;\ 2;\ 0{,}5;\ -2)$ с помощью табл. 2.2, которую можно составить заранее дома (или дать в готовом виде). Предложить сравнить значения функций по таблице и на графике для одних и тех же значений аргумента, выяснить особенности расположения графиков в сравнении с графиком при $a=1$.

Таблица 2.2

№ п/п	Функ-ция	Значения аргумента (x)							Результат сравнения
		-3	-2	-1	0	1	2	3	
1	$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9	
2	$y=2x^2$	18	8	2	0	2	8	18	(1) и (2): в два раза больше при $x\neq 0$ (график растянут)
3	$y=0{,}5x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	(1) и (3): в два раза меньше при $x\neq 0$ (график сжат)
4	$y= -2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	(2) и (4): противоположны по знаку и равны по модулю (ветви направлены вниз)

Непосредственно можно убедиться, что (2) и (3) параболы отличаются от (1) только масштабом, в котором они изображены, а (2) и (4) параболы одной формы, только расположены по разные стороны от оси абсцисс.

Учащиеся знакомятся с понятиями растяжения и сжатия графика, однако отработка этих преобразований не приводится. Говорится о симметрии графиков относительно оси абсцисс при $a>0$ и при $a<0$. От величины коэффициента a зависит степень крутизны параболы: большему значению a соответствует более «крутая» парабола, меньшему – более «пологая» , а от его знака – направление ветвей параболы. После выяснения особенностей расположения параболы формулируются свойства функции $y=ax^2$ при $a>0$ и при $a<0$, выясняется их общность и различие. Желательно свойства представить в виде таблицы с двумя колонками.

Изучение двух других частных случаев квадратичной функции $y=ax^2+n$ *и* $y=a(x-m)^2$ происходит по аналогии с первым случаем, но здесь главное внимание обращется на построение графиков, а свойства их остаются в тени. Эталоном для сравнения будет выступать уже функция $y=ax^2$ $(a\neq 1)$. Рассуждения все ведутся на конкретных примерах функций. Для первого случая можно выбрать $y=2x^2$, $y=2x^2+2$, $y=2x^2–2$, для второго – $y=2x^2$, $y=2(x–2)^2$, $y=2(x+2)^2$. Сравнивая составленные таблицы значений функций и соответствующие графики, учащиеся смогут сформулировать вывод, который затем можно обобщить и представить в виде опорного сигнала (рис. 2.2): 1) $y=ax^2$ – базовая функция, 2) $y=ax^2+n$ ($n>0$), 3) $y=ax^2+n$ ($n<0$), 4) $y=a(x–m)^2$ ($m>0$), 5) $y=a(x–m)^2$ ($m<0$).

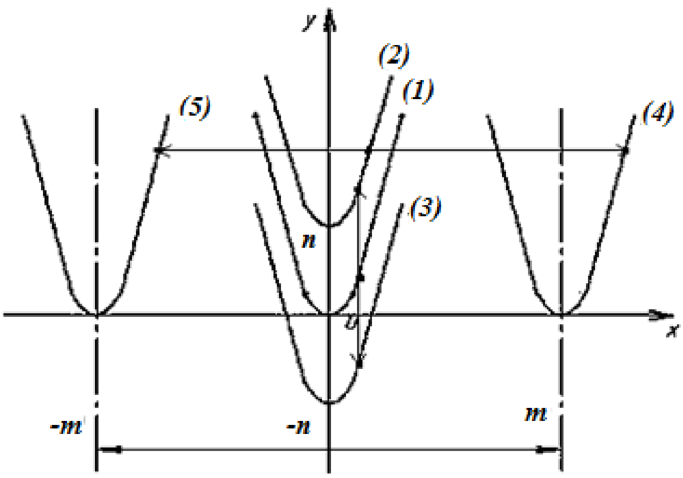


Рис. 2.2

Из наглядных соображений устанавливают, что графиком функций $y=ax^2$, $y=ax^2+n$ и $y = a(x – m)^2$ является одна и та же парабола, в последних двух случаях она получена из первой путем параллельного переноса вдоль оси ординат или абсцисс.

После рассмотрения двух частных случаев квадратичной функции можно перейти к изучению ее в общем виде. Понимание расположения ее графика в системе координат облегчается за счет предварительного ознакомления с графиками функций $y=ax^2+n$ и $y=a(x – m)^2$. Исходя из задания квадратичной функции квадратным трехчленом $y=ax^2 + bx +c$ и возможности представить его в виде квадрата двучлена $y=a(x – m)^2 +n$, можно функцию записать иначе как $y=a(x – m)^2 +n$. В учебнике А. Г. Мордковича (8-й класс) доказывается, что графиком квадратичной функции является парабола, которая также получается из графика функции $y=ax^2$ с помощью двух параллельных переносов (или одного, если двигать оси координат). Доказательство проводится методом выделения полного квадрата (квадрата двучлена).

Среди упражнений большое внимание уделяется построению графиков конкретных функций и выяснению свойств по ним. Через систему упражнений можно узнать о перечне свойств, подлежащих выяснению. К ним относятся: области определения и значений, нули функции, промежутки знакопостоянства и монотонности, наибольшее или наименьшее значение.

Рекомендуется строить графики различными способами. Однако не увлекаться с помощью преобразований, т. к. этот способ использовался в большей мере для разъяснения, что график функции $y=ax^2+ bx +c$ есть парабола, равная параболе $y=ax^2$, но смещенная вдоль осей координат. В учебниках внимание учащихся обращается на алгоритм построения графика, который рекомендуется начать с нахождения вершины параболы – точки $A\ (m\ ,\ n)$, проведения оси симметрии параболы $x = m$ и составления таблицы координат нескольких точек параболы. При этом целесообразно абсциссы выбирать симметрично относительно оси параболы. Можно найти нули функции и точку пересечения параболы с осью ординат.

Полезно обратить внимание учеников на следующий момент: при решении квадратного уравнения $y=ax\ ^2+bx+c\ =\ 0$ можно изменять знаки у всех членов на противоположные и получить правильный ответ, а в правой части формулы, задающей функцию $y=ax\ ^2+bx\ +c$, этого делать нельзя, т. к. будем иметь уже другую функцию, графиком которой будет парабола, симметричная прежней относительно оси абсцисс.

После введения понятия производной в старшей школе через систему упражнений учащиеся знакомятся с исследованием квадратичной функции на конкретных примерах в рамках темы «Применение производной к исследованию функций». Учащиеся должны уяснить, что аппарат производной значительно упрощает процесс нахождения характерной точки графика квадратичной функции – вершины параболы (вместо выделения полного квадрата достаточно продифференцировать функцию), промежутков монотонности (вычисления на основе определения заменяются выяснением знака производной). Облегчается деятельность по решению прикладных задач на экстремум, когда исследуемая величина выражается квадратичной функцией, которая в области определения содержит единственную точку экстремума и соответствующее ей значение функции наибольшее или наименьшее.

График квадратичной функции позволяет находить решение квадратичных неравенств. Традиционно знакомство с этим способом проводится сразу же после изучения свойств функции, т. к. задача о решении неравенства, например $y=a\ ^2+bx+c>0,$ может быть переформулирована в задачу о нахождении промежутков, на которых функция $y\ =ax^2+bx+c$ принимает положительные значения. При таком способе решения достаточно установить расположение параболы относительно оси абсцисс без нахождения координат ее вершины. Анализируя возможные случаи геометрического решения строгих квадратных неравенств, надо подчеркнуть, что их решение определяется знаком коэффициента a и дискриминанта D. Полезно заметить, что решение нестрогого неравенства, например $y = ax^2 + bx + c \geq 0$, есть объединение решений неравенства $y = ax^2 + bx + c > 0$ и уравнения $y = ax^2 + bx + c = 0$.

Важно обратить внимание на терминологию. В ряде методических руководств встречается название «квадратная функция» по аналогии с квадратным трехчленом (уравнением, неравенством). Однако в действующих школьных учебниках принято исторически сложившееся и общепринятое название «квадратичная функция». Относительно квадратного трехчлена надо иметь в виду, что он не обязательно должен состоять из трех слагаемых, некоторые слагаемые могут отсутствовать ($ax^2 + bx$, $ax^2 + c$), но не член, содержащий квадрат независимой переменной. В некоторых пособиях не употребляют термин «ветви» для параболы, а говорят о двух ее частях или не упоминают и части.

Задания для самостоятельной работы

- Приведите разнообразные примеры квадратичной зависимости.
- Проанализируйте систему упражнений по изучению каждого частного случая квадратичной функции, выделите их основные типы.
- Составьте сравнительную таблицу по выяснению преобразований графиков функции $y = a x^2 + n$, $y=a(x-m)^2$, $y=a(x-m)^2+n$, которую можно использовать на уроках.
- Составьте таблицу графиков квадратичной функции в зависимости от значений коэффициента a и дискриминанта D ($a > 0$, $a < 0$, $D > 0$, $D < 0$, $D=0$), а также таблицы ее вариантов для $b \neq 0$, $c > 0$ и $c < 0$; $b>0$ *и* $b<0$ и $c=0$; $b=c=0$; $b=0$ при $a>0$ и $c>0$, $a<0$ и $c<0$, $a>0$ и $c=0$, $a<0$ и $c=0$, $a>0$ и $c<0$, $a<0$ и $c<0$. Опишите методику их использования.
- Составьте методическую схему изучения квадратичной функции и ее частных случаев по различным учебникам.
- Сформулируйте результаты изучения квадратичной функции в основной и старшей школе.

- Проведите исследование квадратичной функции в общем виде с помощью аппарата производной. Когда возможно его дать учащимся в старшей школе?
- Ознакомьтесь с задачами-исследованиями по учебнику Г. В. Дорофеева и др. (9-й класс) и предложите методику их включения в учебный процесс по изучению квадратичной функции.
- Приведите примеры графиков уравнений, содержащих модули.
- Найдите в учебниках пояснение термину «лежачая парабола».
- Подберите интересный материал для рассказа об истории параболы, наблюдениях ее в реальной жизни, параболоиде.
- Как можно использовать компьютер при изучении темы?
- Разработайте методику введения функции $y = ax^2$ и ее свойств.
- Ознакомьтесь с шестью различными планами урока по теме «Функция $y = ax^2$ и ее график» по книге А. А. Окунева «Спасибо за урок, дети!» (М. : Просвещение. 1998. С. 27 – 37) и выберите тот вариант, который возможно использовать в обычном классе.
- Сравните учебники по используемой терминологии относительно параболы.

2.3. Методика изучения степенной функции

Особое место в ряду элементарных функций занимает степенная функция, которая тесно связана с понятием степени, т. е. выражением вида p^q, существование которого определяется допустимыми значениями основания (p) и показателя (q). Взаимосвязь прослеживается уже в самом названии функции. Постепенное расширение и обобщение понятия степени (аналогично понятию числа), следуя его историческому пути развития, приводит к поэтапному изучению степенной функции. В её семействе выделяются несколько групп функций в зависимости от принадлежности показателя степени к тому или иному числовому множеству. Поэтому степенную функцию отдельно рассматривают при фиксированном показателе – натуральном, целом отрицательном, рациональном (положительном и отрицательном), иррациональном, действительном. Природа этой функции существенно зависит от показателя степени: если показатель – рациональное число, то функция относится к алгебраическим, если показатель – иррациональное число, то функция относится к трансцендентным. Из истории математики известно, что удалось «продолжить» степенную функцию на действительные числа, т. е. дать определение степени с иррациональным показателем, только в XVIII в., а строго логически доказать её свойства – уже в XIX в. после того как было определено понятие предела и доказаны его свойства.

Ввиду такой широкой разветвленности функции её невозможно изучать в одном разделе, поэтому ознакомление с ней начинается в основной школе, а завершается в старшей школе. Параллельное изучение степени с определенным показателем и соответствующих стандартных частных случаев степенной функции создает наглядную основу для понимания назначения и практического использования свойств степени, существенного влияния их на свойства и график функции. Исследование конкретных частных случаев функции помогает осуществить перенос выделенных свойств и особенностей графика на целую группу в зависимости от показателя степени, постепенно формируя и понятие степенной функции в общем виде. По мере ознакомления с частными случаями степенной функции расширяется функциональный материал в целом, в частности, вводятся понятия области изменения, возрастания и убывания, четности и нечетности и других, символика преобразования графиков, новые виды уравнений и неравенств.

Термин «степенная функция» вводится лишь в 9-м классе в связи с углублённым изучением степенной функции с натуральным показателем. Изучаемые до этого момента частные случаи степенной функции, относящиеся к различным её группам, либо получают иное название (другого вида), либо на этом уровне остаются пока без него. При этом каждый раз выясняются особенности графиков, а также общие и отличительные свойства функций на индуктивной основе с привлечением графических иллюстраций. Важно обратить внимание учеников на то, что стандартные степенные функции используются в качестве своеобразного эталона, с которым сравнивают скорости роста других функций, изобразив их на одном рисунке. Встречу с каждой новой функцией необходимо мотивировать приведением примеров соответствующей зависимости, встречающейся на практике. По мере знакомства с новыми функциями список степенных зависимостей будет постепенно пополняться.

В ряде учебников 9-го класса авторы сочли возможным ознакомить учащихся со второй группой степенной функции, а именно с отрицательным целым показателем, чтобы введенные общефункциональные понятия применить в новой ситуации. Изучение степенной функции продолжается в старшей школе на базе ранее усвоенного материала. Внимание учащихся концентрируется на степенной функции с рациональным показателем. В то же время подчеркивается, что степенная функция может быть рассмотрена и с действительным показателем. Тем самым обговаривается перспективная возможность изучения функции в полном объеме в вузовском курсе математического анализа.

В большинстве школьных учебников алгебры и начал анализа прослеживается наметившаяся еще в алгебре поэтапность в изучении степенной функции, обобщаются полученные ранее результаты и открываются новые, формируются свойства дифференцируемости и интегрируемости функции. В учебнике А. Н. Колмогорова и др. степенная функция, завершая функциональную линию, исследуется с помощью понятия производной, что делает изложение материала более компактным, упрощая доказательство свойств.

В учебниках алгебры и начал анализа дается определение степенной функции общего вида как функции, которая может быть задана формулой $y = x^{\alpha}$, где α – любое действительное число. В некоторых учебниках отмечается, что степенной функцией можно называть и функцию более общего вида $y = ax^{\alpha}$, при $a \neq 0$. В этом случае целесообразно сразу же обратить внимание учащихся на взаимосвязь графиков функций $y = ax^{\alpha}$ и $y = x^{\alpha}$. В ряде учебников отмечается, что общая степенная функция рассматривается только при $x > 0$ с учетом её монотонности и непрерывности; в этой области определения при любом фиксированном значении α функция имеет обратную.

Учащиеся часто смешивают степенную функцию с показательной. Чтобы этого не случалось, необходимо сразу же обратить их внимание на то, где содержится аргумент x: если в основании степени – степенная, если в показателе степени – показательная. Учитель должен знать, что степенную функцию можно заменить показательной, используя основное логарифмическое тождество (из вузовского курса математического анализа).

Перейдем к рассмотрению методики поэтапного изучения степенной функции в основной и старшей школе.

1. Функции $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$.

Первые две их них уже были нами рассмотрены как частные случаи собственно линейной (график – прямая) и квадратичной (график – парабола) функций. Функция $y = x^3$ может быть изучена при значительной активности учащихся по тому же плану, что и первые две, с использованием прошлого опыта. Построение графика функций учащиеся могут выполнить самостоятельно по точкам, координаты которых задаются таблицей из учебника. Для большей точности построения необходимо обратить внимание на поведение графика вблизи начала координат. Даётся название графика – кубическая парабола. Термин «парабола» здесь не совсем уместен, так как кубическая парабола в целом совсем не похожа на квадратную (они похожи только для $x \geq 0$), но это название «прижилось» в математике. Важно сопоставить эти графики, выяснить общие и отличительные их особенности. Показать учащимся применение той и другой парабол для приближенного нахождения квадратов и кубов чисел, графического решения простейших уравнений второй и третьей степени. Для быстрого вычерчивания кубической параболы можно использовать шаблон из картона. С опорой на график, таблицу и формулу формулируются свойства функции $y = x^3$. Заметим, что при первом знакомстве с функцией изучаются не все её свойства сразу, они появляются по мере готовности учащихся их воспринять. Целесообразно уже на первых порах сопоставлять изученные свойства функций $y = x^2$ и $y = x^3$. Система упражнений нацелена на формирование у учащихся умения читать графики с проведением небольшого исследования. Имеются упражнения на сравнительный анализ графиков функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$.

Основательно изучаются функции более общего вида $y = kx$ $(k \neq 0)$ и $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, функция $y = ax^3$ $(a \neq 0)$ рассматривается через упражнения.

2. Функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{k}{x}$.

Первая функция – частный случай второй, которая называется обратной пропорциональностью. Изучение этой функции необходимо начать, как это было сделано в отношении прямой пропорциональности, с рассмотрения конкретных зависимостей обратно пропорциональных величин. Затем вспомнить известное из математики определение обратно пропорциональных величин, в основе которого лежит свойство: «при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз», а также факт о том, что «отношение значений одной величины равно обратному отношению соответствующих значений другой величины». Приведенное определение верно только для положительных значений величин. В алгебре оно расширяется и для отрицательных значений с помощью формулы $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, которая задаёт функцию, называемую обратной пропорциональностью. Рассматривая формулу, учащиеся легко установят, что областью определения функции является множество всех (действительных) чисел, отличных от нуля, т. к. выражение $\frac{k}{x}$ при $x = 0$ не имеет смысла. Далее учащиеся переходят к построению графика обратной пропорциональности, вид которого устанавливается эмпирически путем построения его по большому числу точек (10 – 18), чтобы определить расположение в системе координат с достаточной полнотой. Построение графика функции проще всего начать с частного случая при $k = 1$, представляющего зависимость между двумя взаимно обратными числами. Учащиеся должны увидеть важные особенности графика:

1) состоит из двух бесконечных ветвей;
2) одна ветвь расположена над осью абсцисс, вторая – под ней;
3) не пересекает координатные оси;
4) ветви сколь угодно близко подходят к координатным осям (координатные оси являются асимптотами графика);
5) ветви симметричны относительно начала координат.

Построенной кривой дается название – гипербола. Дополнительно можно выяснить, имеет ли гипербола оси симметрии. Путём перегибания листа с её рисунком легко можно убедиться в наличии двух осей симметрии – прямые $y = x$ и $y = -x$.

Для выяснения влияния коэффициента обратной пропорциональности (k) на график функции надо построить ряд графиков для различных значений $k > 0$ и $k < 0$, подметив особенности их расположения относительно осей координат. Особенности графика должны быть хорошо осознаны учащимися, т. к. они помогают упрощать схематическое построение конкретных графиков. Учителю необходимо тщательно следить за рисунками учащихся, выполняемыми на миллиметровой бумаге, чтобы ветви гиперболы по мере удаления от начала координат постепенно приближались к осям координат, но не касались их. Можно провести работу по сопоставлению графиков функций $y = ax^2$ и $y = \frac{k}{x}$.

После тщательного изучения графика обратной пропорциональности происходит знакомство со свойствами функций по мере их появления в соответствующем учебнике. Наиболее полное перечисление свойств уже при первом знакомстве дается в учебнике 8-го класса А.Г. Мордковича и учебнике 9-го класса Ш.А. Алимова и др.

В учебниках М.И. Башмакова и Г.В. Дорофеева и др. учащимся сообщается, что функция $y = \frac{k}{x}$ является одной из стандартных для дробно-линейной функции ($y = \frac{ax+b}{cx+d}$), которая в свою очередь относится к классу рациональных функций. В связи с этим обращается внимание на построение графиков дробно-линейной функции с помощью геометрических преобразований вдоль координатных осей гиперболы $y = \frac{k}{x}$. Графиком дробно-линейной функции, как и обратной пропорциональности, является гипербола.

3. Функции $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

ФГОС по математике предполагает изучение этих функций в основной школе. В учебниках А.Г. Мордковича они подробно представлены соответственно в 8-м и 9-м классе; в ряде других учебников рассматривается только первая, а вторая вводится через систему упражнений; в учебниках Г.В. Дорофеева и др. графики и свойства обеих функций изучаются только через упражнения. Функция $y = \sqrt{x}$, как правило, изучается в теме «Квадратные корни».

Графики функций учащиеся строят по точкам, координаты которых задаются таблицей, взятой из учебника. Обращается внимание на область определения функций и дается обоснование её выбора. Графиком функции $y = \sqrt{x}$ является одна ветвь параболы с началом в точке (0;0), расположенная в первом координатном углу и ориентированная вправо (а не вверх как это было у функции $y = x^2$ при $x \geq 0$). Близкое родство функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ ($x \geq 0$) следует из симметричности их графиков относительно прямой $y = x$. Факт симметричности графиков доказывается в учебнике Ю.Н. Макарычева и др. на основании того, что точки (a,b) и (b,a) симметричны относительно прямой $y = x$ – их координаты меняются местами. Симметричность ветвей параболы можно увидеть на просвет, если перегнуть рисунок (выполненный на кальке) с графиками этих функций по прямой $y = x$. В учебнике М.И. Башмакова функции $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ ($x \geq 0$) называются взаимнообратными. Автор в 9-м классе излагает теорию обратных функций, осуществляя пропедевтическую подготовку учащихся к изучению этого понятия в старшей школе.

Аналогично можно рассматривать и функцию $y = \sqrt[3]{x}$. К кубическому корню из числа можно подвести учеников, предложив задачу: «Объем куба равен 1000 см^3. Найти его ребро». Решая ее составлением уравнения: $x^3 = 1000$, получим x=10. Мы находим число, куб которого равен 1000. Затем даётся определение кубического корня из числа и вводится соответствующая запись. Извлечение кубического корня из числа проводится на калькуляторе. Умея извлекать кубические корни, можно рассматривать график функции $y = \sqrt[3]{x}$. По графику функции можно сформулировать ее свойства. Сопоставление графиков функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^3$ даст возможность установить их сходство. При построении графика функции $y = \sqrt[3]{x}$ мы вновь получим кубическую параболу, но расположенную относительно осей координат иначе. Если их графики изобразить в одной системе координат, то они окажутся симметрическими относительно прямой $y = x$. В этом можно наглядно убедиться, если перегнуть рисунок по указанной прямой.

Графики функций можно использовать для нахождения приближенных значений квадратных и кубических корней, решения уравнений, их систем и др. Построенные графики можно рассматривать как подтверждение существования иррациональных чисел $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{5} \ldots$

4. Функция $y = x^n$, где $n \in N$.

Первоначальное представление об этой функции учащиеся получают в 9-м классе на основе обобщения уже известных им графиков функций $y = x, y = x^2, y = x^3$ и их характерных свойств. Затем повторно она рассматривается в старшей школе в связи с изучением степенной функции общего вида как включенная в её особую группу.

Урок можно начать с актуализации знаний учащихся: двух определений степени с натуральными показателями (при $n \geq 2$ и $n = 1$), графиков и свойств вышеперечисленных функций. Подвести учащихся к тому, что изученные функции можно задать общей формулой $y = x^n$, где $n \in N$. Эту функцию и назвать степенной с натуральным показателем. Целесообразно записать несколько ее частных случаев: $y = x$(т. е. $y = x^1$), $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, $y = x^6$. Чтобы выяснить свойства и особенности графика функции $y = x^n$ при любом натуральном n, необходимо рассмотреть готовые графики частных случаев. Важно уяснить, что вид графика самым существенным образом зависит от четности числа n: в случае четного n график похож на параболу ($y = x^2$), в случае нечетного n>1 – на кубическую параболу ($y = x^3$). Исключение составляет вид графика функции при n = 1 также как и существование специального определения степени для этого случая. Функции $y = x^2$ и $y = x^3$ являются опорными и для выяснения свойств функции $y = x^n$. Можно рекомендовать учащимся основные свойства и особенности графиков оформить в виде табл. 2.3.

Таблица 2.3

$y = x^n$, где $n \in N$		
№ п/п	n – четное число	n – нечетное число
1	$D(y)=R$	
2	$E(y)=[0; +\infty)$	$E(y)=R$
3	Функция четная	Функция нечетная
4	Функция возрастает при $x \geq 0$ и убывает при $x \leq 0$	Функция возрастающая
5	График расположен в I и II координатных углах и проходит через точки (0;0),(1;1), (-1;1)	График расположен в I и III координатных углах и проходит через точки (0,0),(1,1), (-1,-1)
6	График симметричен относительно оси ординат	График симметричен относительно начала координат
7	При m<n на промежутке (0;1) график функции $y = x^n$ лежит ниже графика функции $y = x^m$ и выше при x>1.	

Заметим, что при n>1 графики функций $y = x^n$ называются параболами n-го порядка.

Учащиеся должны хорошо представлять себе примерный вид графика степенной функции в каждом случае.

5. Функция $y = x^{-n}$, где $n \in N$.

Названная функция представлена в теоретической части учебников А.Г. Мордковича и М.И. Башмакова в 9-м классе, хотя ФГОС ее изучение в основной школе не предусмотрено. В большинстве учебников ограничиваются изучением одного частного случая $y = \frac{1}{x}$ (т. е. $y = x^{-1}$). Для индуктивного введения функции $y = x^{-n}$ необходимо рассмотреть хотя бы еще один частный ее случай $y = \frac{1}{x^2}$ (т. е. $y = x^{-2}$), что и делается в названных учебниках. Вводится соответствующее определение: «Функцию, заданную формулой $y = x^{-n}$, где x – независимая переменная, а n – натуральное число, называют степенной функцией с отрицательным целым показателем». Приводятся другие примеры ее частных случаев: $y = x^{-3}$, $y = x^{-4}$, $y = x^{-5}$. Изучая графики конкретных частных случаев функции учащиеся замечают, что вид графика зависит от четности числа n (функции при этом лучше записать в привычном виде: $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2}$): в случае нечетного n график похож на гиперболу ($y = x^{-1}$), в случае четного n график состоит из двух ветвей гиперболы, симметричных относительно оси ординат ($y = x^{-2}$). Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ являются опорными для выяснения свойств функции $y = x^{-n}$. Приведем таблицу свойств и особенностей графика (табл. 2.4).

Таблица 2.4

$y = x^{-n}$, где $n \in N$		
№ п/п	n – четное число	n – нечетное число
1	$D(y)$=(-∞; 0)∪ (0; +∞)	
2	$E(y)$=(0;+∞)	$E(y)$=(-∞; 0)∪ (0; +∞)
3	Функция четная	Функция нечетная
4	Функция убывает при x>0 и возрастает при x<0	Функция убывает при x>0 и при x<0
5	График расположен в I и II координатных углах и проходит через точки (1;1), (-1;1)	График расположен в I и III координатных углах и проходит через точки (1;1), (-1;-1)
6	График симметричен относительно оси ординат	График симметричен относительно начала координат
7	Координатные оси являются асимптотами графика	
8	При увеличении n график функции сильнее прижимается к оси абсцисс при x>1 и слабее прижимается к оси ординат на промежутке (0;1).	

Чтобы можно было говорить о степенной функции с целым показателем, необходимо рассмотреть эту функцию с нулевым показателем: $y = x^0$. Исходя из определения степени с нулевым показателем, ее можно записать иначе: y=1, где $x \neq 0$. Графиком ее будет прямая, параллельная оси абсцисс с выколотой точкой при x=0. Функция $y = x^0$ $(x \neq 0)$ интересна тем, что ее область значений состоит из одного числа, равного 1.

6. Функции $y = x^{\frac{1}{n}}$ и $y = x^{\frac{m}{n}}$, где $n \in N,\ m \in Z$.

ФГОС предполагает обстоятельное изучение функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ в основной школе без отнесения их к степенной функции с дробным показателем. Это делается в старшей школе. Заметим, что исходя из определения степени с дробным показателем, соответствующую степенную функцию определяют только для $x \geq 0$. Поэтому можно записать $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$=$x^{\frac{1}{3}}$ при $x \geq 0$. Получается, что функции $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$ различны, т. к. первая из них определена при всех значениях x , а вторая только при $x \geq 0$. Однако в учебной литературе ранних лет издания можно встретить совпадение графиков функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$ и им подобных с нечетным n, считая, что выражения $\sqrt[3]{x}$ и $x^{\frac{1}{3}}$ тождественны при любом x. Анализ графиков частных случаев позволяет сформулировать свойства функции $y = x^{\frac{1}{n}}$ и установить вид графика (одна ветвь параболы, ориентированная вправо).

Поведение графика функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ зависит от знака показателя степени и вида дроби (правильная, неправильная). Вывод можно сформулировать в таком виде: при положительном дробном показателе график похож на одну ветвь параболы, которая ориентирована вверх при $\frac{m}{n} > 1$ и вправо – при $0 < \frac{m}{n} < 1$; при отрицательном дробном показателе график похож на одну ветвь гиперболы.

7. Функция $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$.

ФГОС не предполагает обобщение понятия степенной функции для действительного показателя в общеобразовательных классах средней школы. Однако, если следовать учебнику А.Н. Колмогорова и др., это можно сделать, определив ее так: «Функция, заданная формулой $y = x^{\alpha}$, называется степенной, где α – фиксированное действительное число». Целесообразно сразу же привести примеры известных частных случаев функции, в том числе с иррациональным показателем ($y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = x^{-\sqrt{2}}$ и др.), сопровождая их готовыми графиками. В общем случае степенная функция рассматривается на промежутке $(0; +\infty)$. В учебнике выводится формула производной степенной функции: $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ и с помощью её она исследуется на монотонность (важное свойство для этой функции); приводится общий вид её первообразных при $\alpha \neq -1$, которые имеют такой вид: $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, а при $\alpha = -1$ первообразной является функция $F(x) = \ln|x| + C$. Умение работать с формулами производной и первообразной степенной функции с любым показателем расширяет запас фигур, площади которых можно находить с помощью интеграла. В качестве прикладного материала учащимся дается приближенная формула $(1 + \Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\Delta x$ для вычисления значений степенной функции, чаще всего для вычисления корней: $\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}$.

В профильных классах с углубленным изучением математики, где степенная функция с действительным показателем рассматривается более широко и основательно, в целях повышения интереса к предмету можно сообщить ученикам, что степенная функция при иррациональном показателе является комплексной для $x < 0$.

Задания для самостоятельной работы

• Составьте таблицу последовательного расширения понятия степени и изучения соответствующих случаев степенной функции в основной и старшей школе по двум-трем учебникам.

• Назовите общефункциональные понятия, которые встречаются впервые при изучении степенной функции и в каком классе.

• Составьте список примеров степенных зависимостей, встречающихся на практике. Какие из них можно использовать при введении понятия степенной функции с различными фиксированными показателями?

• Почему в учебнике А. Н. Колмогорова и др. нарушен традиционный порядок изучения элементарных функций? В каком виде записывается степенная функция при нахождении её производной?

• Приведите примеры функций (включенных в учебники), которые получаются из степенной функции простейшими преобразованиями.

• Составьте перечень свойств обратной пропорциональности по альтернативным учебникам с указанием класса и форм подачи. Предложите методику изучения двух-трех свойств.

• Изучите по учебникам М.И. Башмакова; Г.В. Дорофеева и др. материал, связанный с построением графиков дробно-линейной функции. Опишите алгоритм построения графика и схематично постройте несколько графиков самостоятельно выбранных функций по алгоритму.

• Подберите несколько практических задач для мотивировки введения обратной пропорциональности.

• Составьте историческую справку о гиперболе, открытии её свойств. Приведите примеры использования этой фигуры в астрономии, строительном деле и др.

• Составьте перечень свойств функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Обратите внимание на учебник А.Г. Мордковича, где они наиболее полно представлены на уровне основной школы.

• Изучите материал учебника М.И. Башмакова о взаимно обратных функциях. Выскажите своё мнение о доступности его для учащихся 9-го класса.

• Проанализируйте задачный материал учебников, в которых ознакомление с функциями $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ происходит при выполнении упражнений.

• В каком из учебников происходит расширение и углубление программного материала?

• В практических приложениях часто используют зависимости, сходные с функциями $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$, но усложненные наличием коэффициента при x или перед радикалом. Приведите такие примеры.

• Какие упражнения в учебниках даются на преобразования графиков функций, порождаемых $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$?

• Изучите по учебникам доказательство свойств функции $y = x^n$.

• Напишите конспект урока по изучению темы «Функция $y = x^n$».

• Сравните изложение материала в названных выше учебниках основной школы с учебниками для старшей школы.

• Изобразите эскизно графики нескольких степенных функций с целым показателем, чтобы по ним можно было наглядно показать учащимся особенности их расположения на одном рисунке.

• Как вы считаете, есть ли необходимость включения функции $y = x^{-n}$ в программный материал основной школы? Ответ обоснуйте.

• Изучите по учебнику А.Г. Мордковича (11-й класс) свойства функций $y = \sqrt[n]{x}$ и $y = x^{\frac{m}{n}}$, оформите их в виде таблицы.

• Изучите по учебнику 9-го класса для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики материал, касающийся функции $y = \sqrt[n]{x}$. Выскажите свое суждение о его доступности для учащихся.

• Оформите в виде таблицы эскизы графиков функций $y = \sqrt[n]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{n}}$, $y = x^{\frac{m}{n}}$. Укажите их особенности расположения в системе координат.

• Составьте список различных видов упражнений, которые направлены на практическое использование графиков вышеназванных функций.

• Изучите программный материал о степенной функции в профильных классах с углубленным изучением математики и сравните его с общеобразовательным по глубине и широте его содержания, прикладной направленности, требованиям к уровню подготовки выпускников, основным типам задач и видам учебной деятельности.

• Проанализируйте систему изложения материала о степенной функции в учебниках Ш. А. Алимова и др.(10-й класс), А.Г. Мордковича (11-й класс), М. И. Башмакова (10-й класс).

• Составьте лист опорного сигнала (ЛОС) для сравнения роста логарифмической, показательной и степенной функций. Подвести учащихся к выводу: на бесконечности показательная функция растёт быстрее степенной, а степенная функция растет быстрее логарифмической.

2.4. Методика изучения показательной функции

Показательная функция, имеющая важное значение во многих отраслях науки и техники при изучении различных процессов и явлений, традиционно представлена в старшей школе. Однако по реформе математического образования, осуществляемой в полном объеме в 1970 – 1980-е гг., первоначальное ознакомление с ней проводилось в последнем классе основной школы на индуктивной и наглядной основе. Затем из-за перегрузки учебным материалом курса алгебры тема была возвращена в курс алгебры и начал анализа. Более раннее изучение показательной функции мотивировалось тем, что она наилучшим образом создает наглядную основу для понимания назначения и свойств дробных показателей степени, обращая внимание на изменение степени при изменении показателя при постоянном основании; исходя их этих соображений показательная функция появлялась даже раньше степенной с действительным показателем. Тем самым мы уже подчеркнули связь показательной функции (подобно степенной функции) с понятием степени. Более того, определенная связь прослеживается между самими функциями, т. к. в основе их определений лежит одно и то же понятие степени. В математике иногда приходится иметь дело с показательно-степенной функцией, у которой аргумент находится и в основании, и в показателе степени (например, $y = x^x, y = 2x^{x+2}$) – такую функцию А.Г. Мордкович назвал «экзотической». По своей природе показательная функция – не алгебраическая; вместе со степенной функцией с иррациональным показателем она является трансцендентной.

В учебной литературе встречаются различные подходы к введению показательной функции. Один из них основан на понятиях и утверждениях математического анализа: решении дифференциальных уравнений и теории степенных рядов. Приведем одно из определений: «Функция, определенная на множестве действительных чисел, называется показательной, если она является решением уравнения $y' = ky (k \neq 0)$ и удовлетворяет начальному условию $y(0) = 1$». Это определение является аксиоматическим (объект задан перечислением трех свойств), а поэтому необходима теорема существования и единственности функции. Другой подход использует уже имеющиеся у учащихся знания на момент введения показательной функции, различные варианты которого представлены в действующих учебниках и основываются на понятии степени и ее свойствах. Наиболее компактное изложение материала содержится в учебниках Ш. А. Алимова и др. (10-й класс), Г. В. Дорофеева и др. (11-й класс), М. И. Башмакова (10 класс), которое достигается за счет предварительного введения понятия степени с действительным показателем. В учебниках А.Н. Колмогорова и др. (11-й класс); А.Г. Мордковича (11-й класс), М.И. Башмакова (10-й класс) принят поэтапный способ изучения: сначала рассматриваются графики и свойства двух ее частных случаев ($y = 2^x$ $и$ $y = 0{,}5^x$) на множестве рациональных чисел; затем эти функции доопределяются в иррациональных точках оси абсцисс с помощью рассуждений по выяснению смысла выражений $2^{\sqrt{2}}, 2^{\sqrt{3}}, \ldots$ (точнее говоря, дается на интуитивном уровне понятие о степени с иррациональным показателем) и получаются непрерывные кривые – графики функций с ранее перечисленными свойствами; наконец определяется показательная функция на множестве действительных чисел. Заметим, что в учебнике 10-го класса М.И. Башмакова в разделе «Заключительная беседа» приводится аксиоматическое определение функции: «Показательная функция $y = f(x)$ – это строго монотонная функция, определенная на всей числовой оси и удовлетворяющая функциональному уравнению $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$». Это определение снимает трудоемкое описание значений функции с помощью рациональных приближений. Существует еще один вариант первого подхода, согласно которому изменяется привычный порядок изучения показательной и логарифмической функций. Вначале определяется логарифмическая функция равенством: $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, затем функция $y = e^x$ как функция обратная $y = \ln x$ и, наконец, показательная: $\alpha^x = e^{x \ln a}$. При таком варианте прослеживается совместное изучение этих функций. Заключая перечисление вариантов двух подходов, надо заметить, что наиболее приемлемые из них те, которые сейчас представлены альтернативными учебниками; они не требуют сообщения дополнительных сведений и дают возможность знакомить учащихся с показательной функцией и ее приложениями как можно раньше. Конечно, второй подход имеет существенный недостаток, который заключается в том, что не все свойства функции могут быть строго логически доказаны (об этом даже сообщается в учебниках) из-за недостаточности знаний, но проводимые рассуждения, основанные на наглядных соображениях, можно считать вполне убедительными и достаточными для школьников. При заключительном повторении учитель может рассказать и о другом подходе к доказательному изложению теории показательной функции, используя учебную литературу, в частности, пробные учебники по алгебре и началам анализа, изданные в 1970-х гг. В них можно найти хорошие приложения показательной функции для проведения семинарско-практического занятия.

Наметившееся пропедевтическое изучение показательной функции в основной школе по реформе 1970-х гг. теперь отсутствует. Однако в учебниках А.Г. Мордковича; М.И. Башмакова авторы нашли возможность опережающего рассмотрения некоторых вопросов на наглядно-интуитивном уровне. В учебнике М.И. Башмакова (9-й класс) в связи с потребностью вычисления степеней возникает проблема возведения числа 2 в степень $\sqrt{2}$. Выписывая несколько десятичных приближений числа $2^{\sqrt{2}}$ $(2^1; 2^{1,4}; 2^{1,41}; 2^{1,414}$ и т. д.$)$, можно проследить за изменением степени с изменением значений числа $\sqrt{2}$, т.е. получить новую функцию $y = 2^x$. Она является частным случаем функции $y = a^x$, которая называется показательной, на рисунке изображается готовый график функции $y = 2^x$ наряду с графиками $y = x^2$ *и* $y = x^3$ для сравнения их скорости роста на бесконечности.

В учебнике А.Г. Мордковича (9-й класс) впервые учащиеся встречаются с показательной функцией натурального аргумента при изучении формулы n-го члена геометрической прогрессии. Эта взаимосвязь позволила автору еще иначе определить геометрическую прогрессию как показательную функцию, заданную на множестве натуральных чисел. Предлагаются графики функций $y = 2^x$ и $y = (\frac{1}{2})^x$ при $x \in N$, состоящие из изолированных точек, лежащих на некоторой кривой, которая называется экспонентой (*exponentis* – показывающий). Приводятся примеры использования показательной зависимости для моделирования реальных процессов: размножения колонии живых организмов, радиоактивного распада, охлаждения тела в окружающей среде, изменения суммы вклада в банке. Попутно отметим, что показательной функцией и соответствующей геометрической прогрессией можно математически описать один и тот же процесс, но с одной лишь разницей: первая описывает его непрерывно, а вторая –

дискретно (учитывает отдельные состояния). Это наглядно можно проследить на графиках.

В дальнейшем будем придерживаться традиционного определения показательной функции, как функции, заданной формулой

$$y = a^x, \text{где } a > 0 \text{ и } a \neq 1.$$

К показательной функции относят и функцию $y = ca^x$, где c – постоянное число ($c \neq 0$). К такому виду можно привести, например, функцию $y = 2^{x+2}$, выполнив преобразование: $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$, и построить ее график с использованием графика функции $y = 2^x$.

Важно сразу же обратить внимание учащихся на смысл ограничений, накладываемых на основание a (рис. 2.3), а также на само название функции.

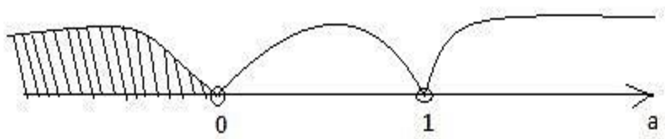


Рис. 2.3

В определении указывается, что основание a – положительное число. Объясняется это тем, что степень с рациональным (действительным) показателем определяется только для положительных оснований и математики предпочитают изучать функции, определенные на сплошных промежутках. Если попытаться все же построить график функции $y = (-2)^x$, то целочисленные точки будут располагаться бессистемно на координатной плоскости в верхней и нижней полуплоскостях, не намечая никакой кривой. При $a = 0$ будем иметь функцию $y = 0^x$ (т. е. $y = 0$), определенную при $x > 0$; при $a = 1$ будем иметь функцию $y = 1^x$ (т. е. $y = 1$), определенную на R – обе функции не представляют особого интереса. Поэтому показательная функция будет рассматриваться на двух промежутках: $0 < a < 1$ и $1 <$ $< a < +\infty$, которые и следуют из определения. На практике очень редко встречаются процессы, описываемые этой функцией при $a < 0$.

Из формулы $y = a^x$ следует, что a – фиксированное постоянное число, x – показатель степени, пробегающий все множество R. Поскольку аргумент находится в показателе степени, то и функцию называют показательной. Часто ее обозначают иначе: $\exp_a$, как сокращение от латинского слова *exponenta*, и за ней закрепилось еще одно название – экспонента (так же называют и ее график). Так что термин «экспонента» используется в двух смыслах. Кроме того, функцию в форме записи $\exp_a(x)$ называют экспоненциальной; выражения a^x и $\exp_a(x)$ тождественны.

В теории показательной функции особо выделяются ее частные случаи с основанием a, равным $\frac{1}{2}, 2, e, 10$. Функции $y = \frac{1}{2} \in (0; 1)$ и $y = 2 \in (1; +\infty)$ являются опорными при формулировании свойств функции при индуктивно-наглядном методе их изучения. Иррациональное число e («неперово число») играет важную роль в математическом анализе и его приложениях, оно представимо в виде суммы: $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \cdots$ или предела $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, приближенно равно 2,7. Практическая значимость функции с основанием 10, являющимся и основанием десятичной системы счисления, станет более понятной учащимся при изучении логарифмов.

Целесообразно изучение показательной функции начать с задач, подводящих к необходимости рассмотрения новой функции. Среди них могут быть задачи, решаемые с помощью геометрической прогрессии, которые послужат повторению изученной темы, а также установлению перспективных связей между этими понятиями.

Задача 1. Масса колонии бактерий, помещенных в питательную среду, равна 1 г. Каждый час она увеличивается вдвое. Какова будет ее масса через 1, 2, 3, 10, n ч после начала наблюдения? Вычислите массу колонии через то же время до начала наблюдения (время будем считать отрицательным). Результат оформите в виде таблицы.

В процессе решения задачи надо уяснить, что в начале наблюдения (т.е. при $t = 0$) масса колонии бактерий равнялась 1г, а затем она удваивалась через каждый час (t =1,2,3,…). Фиксируя массу ежечасно, получаем геометрическую прогрессию: 2, 2^2, 2^3,2^4,…,2^n с первым членом b_1=2 и знаменателем q=2; n-й член прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, т.е. $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Пользуясь формулой, можно заполнить таблицу при t>0, а затем при t<0 (без обращения к геометрической прогрессии):

До начала наблюдения						В ходе наблюдения						
…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	10	20	n
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	1024	1048576	2^n

После оформления решения задачи предложить учащимся записать формулой выявленную зависимость: $m=2^n$, где n может быть как натуральным числом, так и отрицательным целым.

Задача 2. Период полураспада одного из изотопов радона составляет пять дней. Имеется 1г этого вещества. Сколько нераспавшегося вещества останется через одну, две, три, четыре пятидневки, через месяц (30 дней), через n пятидневок? Вычислить массу вещества за те же промежутки времени до начала наблюдения (время отрицательное). Результат представить таблицей.

Проводя аналогичные рассуждения, получим геометрическую прогрессию: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$, знаменателем $q = \frac{1}{2}$, и n-м членом $b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, где n означает число пятидневок. Таблица может иметь вид:

До начала наблюдения						В ходе наблюдения					
…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6	n
	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Выявленная зависимость может быть записана формулой $m=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Здесь же можно сообщить учащимся, что количество нераспавшегося вещества можно узнать по этой формуле и при дробных показателях, например, через 2,5 суток.

Проведенные задачи должны навести учащихся на мысль о желании рассмотреть функции $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ и послужить отправным пунктом для постановки проблемы изучения показательной функции $y=a^x$. Кроме того составленные таблицы могут быть использованы для построения графиков этих функций и выяснения их свойств.

Изложение материала о свойствах функции $y=a^x$ в учебниках проводится по-разному: в одних формулируются свойства с опорой на формулу, задающую функцию, и на свойства степени с действительным показателем; в других – в процессе анализа графиков частных случаев функции, построенных по точкам; в-третьих – используются оба подхода совместно. Важно, чтобы после этой работы учащиеся осознали основные свойства функции и иллюстрировали их на выполненном графике, четко представляли себе без зрительной опоры схематический график для a>1 и 0<a<1 и могли бы читать свойства при конкретных значениях a. Весьма полезно изготовить лекала при a=2;3;$\frac{1}{2}$;$\frac{1}{3}$ (за ед. масштаба брать 1 см) для построения графиков. При выполнении нескольких графиков на одном рисунке лучше изображать каждый различным цветом (также и на доске). Основные свойства показательной функции и особенности поведения графиков можно представить в виде табл. 2.5.

Таблица 2.5

$y=a^x$		
№ п/п	$a>1$	$0<a<1$
1	$D(y)=R$	
2	$E(y)=(0;+\infty)$	
3	Возрастает	Убывает
4	$a^x>0$	
5	Непрерывна	
6	Не является ни четной, ни нечетной	
7	График расположен выше оси абсцисс и проходит через точки (0;1), (1,a); отсутствует симметрия графика; ось абсцисс является асимптотой графика; график непрерывная кривая-экспонента	
8	Графики функций $y=a^x$ и $y=a^{-x}$ симметричны относительно оси ординат	

Свойства функции закрепляются при выполнении упражнений на сравнение числовых выражений (например, $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{2}{5}\right)^{1,5}$), решение показательных уравнений и неравенств, задач практического содержания и др. Представление о показательной функции расширяется в связи с изучением производной и первообразной функции. Можно составить табл. 2.6 для лучшего запоминания.

Таблица 2.6

Функция	e^x	e^{kx}	a^x
Производная	e^x	ke^{kx}	$a^x \ln a$
Первообразная	e^x	$\frac{1}{k}e^{kx}$	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x$

Из таблицы видно, что и производная, и первообразная пропорциональна самой функции.

Учащиеся получают возможность исследовать конкретные функции с помощью производной на монотонность и экстремум, например, такие $y=xe^x$, $y=x^4 0{,}5^x$. Зная первообразную, можно находить площади фигур, ограниченных и графиками показательной функции, например графиками $y=3^x$, $x=-3$, $x=2$, $y=0$. С помощью производной можно найти уравнение касательной к графику функции в избранной точке и угол наклона между касательной и осью абсцисс. Экспонента $y=e^x$ отличается от других тем, что её угол между касательной в точке $x=0$ и осью абсцисс равен 45°, что часто используется при выводе формулы производной показательной функции.

Задания для самостоятельной работы

- Подготовьте материалы для вводной беседы и набор прикладных задач для мотивации изучения показательной функции для различных профильных классов.
- Разработайте семинарское занятие по теме «Приложения показательной функции» с презентацией.
- Ознакомьтесь с пропедевтикой показательной функции в основной школе.
- Проведите сравнительный анализ теоретического материала в действующих учебниках (понятия, теоремы, формулы, доказательства, примеры задач).
- Составьте типологию задач по теме.
- Подготовьте эвристическую беседу по изучению свойств показательной функции.
- Проанализируйте различные подходы к введению показательной функции по материалам альтернативных учебников и статей из журнала «Математика в школе» (1989, № 6; 1991, № 4; 1995, № 1; 2001, № 5).
- Выделите особенности изложения материала о показательной функции в различных учебниках.
- Проанализируйте систему упражнений, приведенную в учебниках А.Г. Мордковича.
- Подготовьте презентацию к лекции по теме «Показательная функция и ее свойства».
- Ознакомьтесь с системой изложения материала по теме «Производная и первообразная показательной функции» по различным учебникам. Какой вариант вам ближе?

2.5. Методика изучения логарифмической функции

Логарифмическая функция, как и показательная, относится к классу трансцендентных функций. В основе определения показательной функции лежит понятие степени с действительным показателем, а логарифмическая функция вводится на основе понятия логарифма, которое близко связано со степенью числа. В новых условиях показатель степени получает иное название – логарифм (от греческих слов «логос» – отношение и «аритмос» – число). Простейшее показательное уравнение $a^x = b$(a>0, a≠1) имеет единственный корень, который называют логарифмом b по основанию a и записывают $x = \log_a b$ – это принятое обозначение для корня уравнения $a^x = b$. Таким образом понятие логарифма числа вводится для того, чтобы уметь решать такие уравнения. Существующая зависимость показателя от степени при фиксированном основании позволяет утверждать, что показатель степени (логарифм числа) есть функция самой степени (числа), ее называют логарифмической и обозначают $y = \log_a x$. Для вычисления ее значений нужно уметь находить логарифмы чисел, т.е. выполнять новое действие – логарифмирование (обратное к возведению в степень с соответствующим основанием).

Более 300 лет логарифмы использовались для облегчения вычислений с помощью специально составленных таблиц, которые помогали осуществить переход от чисел к их логарифмам и обратно. Открытие логарифмов позволило заменить умножение и деление многозначных чисел действиями более низкого порядка – сложением и вычитанием их логарифмов (показателей степеней), что имело огромное значение для практики вычислений. Это достоинство логарифмов было использовано при изобретении счетной логарифмической линейки (XVII в.), которая наряду с таблицами логарифмов использовалась в школе. В эпоху калькуляторов и компьютеров значение логарифмов как инструмента вычислений для пользователей сходит на нет. Однако вычислениями не исчерпывается роль логарифмов, они часто используются в приложениях математики. В частности, сейчас логарифмы широко используются в финансовых операциях для вычисления сложных процентов, определяющих прибыль от вкладов в сбербанке. Поэтому изучение логарифмов предусмотрено ФГОС в старших классах, но с меньшей детализацией, как это было раньше. Теперь им в учебниках отводится вспомогательная роль, снижающая уровень требований к логарифмическим преобразованиям выражений и вычислениям.

На практике рассматриваются логарифмы по различным основаниям, но наиболее употребительны десятичные логарифмы по основанию 10 ($\lg b$) и натуральные логарифмы по основанию e($\ln b$), отсюда возникает необходимость формулы перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (b>0, a>0, a≠1, c>0, c≠1). Так как на калькуляторе есть клавиши lg и ln, то для вычисления логарифма по другим основаниям нужно использовать формулу перехода. Видимо, не случайно были изобретены именно эти два вида логарифмов: натуральные (от латинского слово «натура» – природа) Д. Непером в конце XVI в., десятичные – Г. Бриггсом в начале XVII в. Заметим, что натуральные логарифмы имеют и чисто теоретическое значение в математическом анализе и в школу они были введены недавно в связи с включением начал анализа. Логарифмы позволяют любое положительное число записать в виде степени с данным основанием: $b = a^{\log_a b}$(основное логарифмическое тождество). Одна и та же связь или зависимость между тремя числами a,b и c выражается равенствами $\log_a b = c$ и $a^c = b$, но только первая записана в логарифмической форме, а вторая – в показательной. С помощью логарифмов все степени можно привести к одному основанию ($a^x = 10^{(\lg a)x} = 10^{x\lg a}$).

Свойства степеней и логарифмов так же тесно связаны между собой. Они фактически выражают одно и то же, только в первом случае внимание обращается на поведение самих степеней, а во втором – на поведение показателей. Вот запись их первого свойства:

$$a^{b_1}a^{b_2} = a^{b_1+b_2}, \log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2.$$

Краткий обзор взаимосвязи двух понятий – степени и логарифма уже предопределяет существующую связь между логарифмической и показательной функциями с одним и тем же основанием. Эти две функции – классический пример взаимно обратных функций, что дает возможность в методическом плане выбирать порядок их изучения в школе. По традиции логарифмическая функция все же изучается после показательной. Существует рекомендация и по совместному их изучению (П.М. Эрдниев), но поскольку детального рассмотрения связи между обратными функциями в школе не предусмотрено, то они изучаются раздельно. Однако симметричность их графиков при одинаковом основании относительно прямой $y=x$ иллюстрируется, что характерно для обратных функций. Поскольку понятия обратной функции вновь включено в ФГОС в раздел «Математический анализ» и в ряде учебников имеется теоретический материал об обратных функциях, но пока как дополнительный, к нему можно обратиться при обобщающем повторении, отметив тесную взаимосвязь свойств и графиков показательной и логарифмической функций как взаимно обратных. В основном тексте учебника Г.В. Дорофеева и др. (11-й класс) логарифмическая функция сразу же определяется как обратная показательной со всеми вытекающими из этого последствиями на основе теоретических знаний о взаимно обратных функциях (10-й класс). Такой подход предполагает предварительное изучение понятий об обратной функции и логарифмах.

В учебной литературе существует и другой подход, согласно которому понятие логарифма вводится на основе логарифмической функции и определяется как ее значение. Это вполне обоснованно, т. к. для нахождения любого значения функции $y = \log_a x$ по аргументу необходимо решить уравнение $a^y = x$; тем самым учащиеся подводятся к привычному определению логарифма как показателя степени. При этом подходе логарифмическая функция первоначально вводится как обратная показательной. Затем изучаются свойства логарифмов и их приложения. В действующих учебниках в полном объеме такой подход не реализуется. Однако в концепции А. Г. Мордковича используется лишь несколько видоизменённый такой порядок изучения: понятие логарифма (на наглядно-графическом уровне), логарифмическая функция (график ее получается с помощью симметрии из графика показательной функции), свойства логарифмов, приложения.

Существует и аксиоматическое введение логарифмической функции, которое определяется тремя условиями: $f(x, y) = f(x) +$ $+ f(y)$ для любых $x > 0$ и $y > 0$; $f(a) = 1$ для любого $a > 1$; $f(x)$ – возрастающая функция.

В методической литературе предлагается еще один подход, основанный на понятиях математического анализа. Исходным определением в построении логарифмической, а затем и показательной функций служит его символическая запись (идущая от Ф. Клейна):

$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Логарифмическая функция может быть представлена в виде степенного ряда: $\ln(1+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$.

В практике обучения логарифмам и их свойствам известны случаи, когда многие учащиеся испытывают серьёзные затруднения в восприятии материала, знания у них поверхностны и формальны, что часто приводит к ошибочным записям: $\lg(x+y) = \lg x + lgy, \lg x{:}\, x =$ $= \lg, \log_4 2 = -2, \lg(x{:}\, y) = \lg x{:} \lg y, \lg x^2 = lg^2 x$. Логарифмическая функция также усваивается учащимися несколько труднее показательной, они часто смешивают их графики. Поэтому полезны подробные и наглядные объяснения. Существенную роль здесь играет система устных упражнений, формирующая полноценное усвоение теоретических вопросов темы. Частично такое положение можно объяснить весьма малым временем, выделяемым на изучение, а также отсутствием пропедевтики в основной школе. По реформе 1970-х гг. в последнем классе основной школы изучались десятичные логарифмы, свойства функции $y=\lg x$ как обратной к функции $y=10^x$, два взаимно обратных преобразования – логарифмирование и потенцирование. Теперь только в учебнике М.И. Башмакова (9-й класс) содержатся первоначальные сведения о логарифмах, т.к. автор считает, что окончить курс основной школы и не узнать, что такое логарифм обидно. А в связи с вычислениями логарифмов чисел знакомит с определением логарифмической функции как обратной показательной с иллюстрацией графиков при основании 2 (часто употребляется в информатике запись:$\log_2 x = \text{lb}\, X$). Приводятся примеры зависимостей, в которых используются логарифмы.

Рассмотрим методические особенности изучения логарифмической функции, которая вводится после изучения логарифмов и без обращения к обратной функции. Логарифмическая функция определяется как функция, заданная формулой $y = \log_a x$, если $a>0$, $a\neq1$. Необходимо сразу же выяснить необходимость наложения жестких условий на основание a. Они связаны с определение логарифма, из которого следует, что отрицательные числа, нуль и единица не берутся в качестве его основания. Можно в этом убедить учеников на примерах логарифмов чисел с такими основаниями. Пусть $a=1$, тогда $\log_1 b = x$ означало бы корень уравнения $1^x=b$. При $b\neq1$ уравнения корней не имеет, а при $b=1$ имеет бесконечное множество, следовательно символ $\log_1 b$ бесполезен. Аналогично можно показать бессмысленность символа $\log_0 b$. Пусть a=-2, тогда при b=16 имели бы $\log_{-2} 16 = x$, т.е. x^{-2}–16, x=4, а при b=9 нет x. При отрицательных a некоторые целые числа все же имеют логарифмы, но на практике они встречаются редко, поэтому в школе их не рассматривают. После таких пояснений важно выписать промежутки, на которых будет исследоваться функция: (1;+∞) и (0;1). Для выяснения вида графика полезно выбрать по одной конкретной функции из обозначенных промежутков: $y = \log_2 x$ и $y = \log_{1/2} x$. По точкам построить их графики на разных рисунках (в качестве значений аргумента x выбираются целые и дробные числа, являющиеся степенями числа 2 или числа ½) и, опираясь на определение логарифма и вид графика, выявить основные свойства в зависимости от основания; убедиться, что графики проходят через точку (1;0). Затем результаты наблюдений, выполненных при активном участии учащихся, необходимо перенести на логарифмическую функцию $y = \log_a x$ при a>1 и при 0<a<1, используя схематические рисунки из учебника. Важно свойства занести в табл. 2.7 и доказать их аналитически. График функции называют логарифмической кривой или логарифмикой.

Таблица 2.7

$y = \log_a x$		
№ п/п	a>1	0<a<1
1	$D(y)$=(0;+∞)	
2	$E(y)$=R	
3	Возрастает	Убывает
4	y>0 при x>1 y<0 при 0<x<1 y=0 при x=1	y>0 при 0<x<1 y<0 при x>1 y=0 при x=0
5	Непрерывна	
6	Не является ни четной, ни нечетной	
7	График расположен правее оси ординат в I и IV координатных углах и проходит через точки (0;1), (a;1); отсутствует симметрия графика; ось ординат является асимптотой графика; график непрерывная логарифмическая кривая	
8	Графики функций $y = \log_a x$ и $y = \log_{1/a} x$ симметричны относительно оси абсцисс	

Свойства функции закрепляются при выполнении разнообразных упражнений на сравнение логарифмических выражений ($\log_2 3$ и $\log_3 4$), решении логарифмических уравнений и неравенств, построении и чтении графиков, решении практических задач и др.

В некоторых учебниках исследование функции проводится без обращения к графическим иллюстрациям. На основе определения и свойств логарифмов формулируются основные свойства функции и доказываются. А затем утверждается, что опираясь на доказанные свойства, нетрудно построить график функции $y = \log_a x$ при a>1 и 0<a<1. Приводится рисунок с готовыми графиками функций по различным основаниям. Кроме того выясняется вопрос о симметричности графиков логарифмической и показательной функций относительно прямой y=x, функции называются взаимно обратными. В учебниках А.Г. Мордковича и М.И. Башмакова симметричность графиков доказывается в основной части теории, а в учебнике А.Н. Колмогорова и др. в дополнительной части. А.Г. Мордкович в связи с этим вопросом говорит и о названии графика логарифмической функции. Считается, что за ним надо оставить то же название, какое было дано графику показательной функции – экспонента, т. к. их графиком является одна и та же кривая, только по-другому расположенная в координатной плоскости. Заметим, что и при этом подходе необходимы графические образы (как построенные самими учащимися, так и готовые), которые наилучшим образом способствуют пониманию и запоминанию свойств функции. Это необходимо для того, чтобы учащиеся в дальнейшем при выполнении упражнений могли свободно представить перед глазами нужный график и прочесть его.

Теперь остановимся на другом подходе к изучению логарифмической функции как обратной к показательной. В этом случае на момент ее введения должно быть известно понятие обратной функции и условие ее существования. Понятие обратной функции сложно для учащихся, поэтому оно то вводилось в программу по алгебре, то исключалось. Считается, что введение функции, обратной данной, представляет определённую трудность и в методическом плане. Учащиеся должны хорошо усвоить следующие вопросы: определения обратной функции, обратимой функции и взаимно обратных функций, условия обратимости функции (каждое свое значение принимает только один раз; монотонная функция обратима – обратное утверждение не верно), прием задания формулой обратной функции (выразить переменную x через y и поменять обозначения местами), прием построения графика обратной функции (график данной функции отразить от прямой y=x симметрично), свойства взаимно обратных функций (области определения и значений меняются местами, обратная к возрастающей (убывающей) функции является возрастающей (убывающей) функцией) и приводить примеры взаимно обратных функций среди изученных. Знание перечисленных вопросов поможет отыскать новую функцию, обратную показательной, и установить ее свойства с большей степенью самостоятельности. Свойства логарифмической функции выводятся из свойств взаимно обратных функций и свойств показательной функции, поэтому они должны быть все обстоятельно воспроизведены в ходе фронтальной устной работы с привлечением графиков известной функции. Поскольку показательная функция y=a^x(a>0, a≠1) на R монотонна и непрерывна, то она обратима, т.е. имеет обратную функцию, которая может быть задана с помощью формулы $y = \log_a x$(она получается из исходной логарифмированием по основанию a>0 и a≠1: $\log_a y = x \log_a a = x, y = \log_a x$). По графику исходной функции можно построить график соответствующей логарифмической функции с одним и тем же основанием. Для ускорения этого процесса можно использовать лекала частных случаев показательной функции. Существующая связь между графиками функций y=2^x и $\log_2 x$, $y = (\frac{1}{2})^x$ и $\log_{1/2} x$ остается в силе и в общем случае для функций y=a^x и $y = \log_a x$(a>0, a≠1), которые называют взаимно обратными. Затем формулируют свойства логарифмической функции.

В ряде учебников для некоторых выражений вводится термин «показательно-логарифмические» и требуется их упростить. Например, $5^{\frac{1}{2}\log_5 49} = 5^{\log_5 \sqrt{49}} = \sqrt{49} = 7$. Предлагается решить уравнение $x^{1-0.25\log_2 x} = 2$, т. к. x>0 то $\log_2 x^{1-0.25\log_2 x} = \log_2 2$, $(1 - 0.25\log_2 x)\log_2 x = 1, \log_2^2 x - 4\log_2 x + 4 = 0, (\log_2 x - 2)^2 = 0, \log_2 x = 2, x = 4$.

Представление о логарифмической функции расширяется в связи с ее дифференцированием: $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Для функции y=$\frac{1}{x}$ существует первообразная функция $\ln|x|$ при x≠0. Отсюда вытекает геометрическое истолкование значения $\ln x$ как площади криволинейной трапеции для кривой $y=1/x(x>0)$.

В прикладных задачах логарифмическая функция повсюду сопутствует показательной функции. Это можно проследить на примерах.

1. Зависимость температуры T остывающего тела от времени t выражается формулой $T=(T_1-T_0)a^t+T_0$, где T_1 – начальная температура тела, T_0 – температура окружающей среды, a – число, зависящее от свойств остывающего тела, его объема, массы и т.д. (формула еще была предложена Ньютоном). Отсюда $a^t=\frac{T-T_0}{T_1-T_0}$ или $t=\log_a\frac{T-T_0}{T_1-T_0}$. Эта формула выражает зависимость времени t от температуры T.

2. Зависимость веса груза P, который можно удержать силой F, от угла обхвата α выражается формулой $P=Fa^{\alpha}$. Отсюда $a^{\alpha}=P/F$ или $\alpha=\log_a P/F$. Эта формула выражает зависимость угла обхвата α от величины отношения веса груза к величине удерживающей силы.

Задания для самостоятельной работы

- Подтвердите высказывание П. Лапласа: «Изобретение логарифмов, сократив работу астрономов, продлило им жизнь».
- Подтвердите или опровергните высказывание: «Логарифмы отжили свой век».
- Подготовьте материал к беседе на тему «Мотивы и история появления логарифмов».
- Почему показатель степени назвали еще и логарифмом?
- Подберите задачи с практическим содержанием по изучаемой теме. Какие функции они выполняют?
- Исследуйте вопрос о сочетании индуктивного и дедуктивного методов при изучении логарифмической функции (определение, график, свойства).
- Укажите базу, необходимую для изучения логарифмической функции при различных подходах.
- Охарактеризуйте различные системы изложения материала о логарифмической функции. Выскажите свое мнение по этому вопросу.
- Исследуйте возможность ознакомления учащихся с интегральным определением логарифмической функции на внеурочных, факультативных занятиях. Каково ваше отношение к этому подходу?

- Проанализируйте методы доказательства монотонности логарифмической функции в различных учебниках.
- Приведите пример задач на усвоение свойств логарифмической функции.
- Какие проблемные ситуации возможно создавать при изучении логарифмической функции?
- Предложите систему упражнений на построение графиков логарифмической функции с модулем.
- Приведите примеры функций, содержащих логарифмы, которые удобно строить, используя геометрические преобразования. Какова методика их построения?

2.6. Методика изучения тригонометрических функций

Тригонометрия – одна из важнейших составных частей школьного курса математики. Слово «тригонометрия» греческого происхождения (от слов «тригоном» – треугольник и «метрео» – измеряю) означает «измерение треугольников». Зарождение тригонометрии история математики относит к глубокой древности. На протяжении многих столетий она понималась и определялась как наука о решении треугольников, чем и объясняется само её название. Основным средством при этом были «тригонометрические величины» – синус, косинус, тангенс и другие и таблицы этих величин, которыми пользовались в вычислениях астрономы, астрологи, картографы, навигаторы, инженеры и т. д. До XVII в. тригонометрия сохраняла геометрический характер. Вычисления в треугольниках являлись истоками тригонометрических функций. «Тригонометрические величины» в связи с созданием математического анализа стали рассматриваться уже не как средство решения соответствующих задач, а как объект самостоятельного изучения, получив общее для всех название «тригонометрические функции». Л. Эйлер представил тригонометрию как науку о тригонометрических функциях, понимая под аргументом как углы, дуги, так и отвлеченные числа. Постепенно формируемое учение о тригонометрических функциях стало одной из глав математического анализа, частью более общего, построенного с единых позиций учения о числовых функциях. Это дало возможность широко использовать тригонометрические функции в механике, физике и технике, особенно при изучении колебательных движений и других периодических процессов, а также соединило их изучение с другими функциями, навсегда покончив с изолированным положением в математике. Расширение и развитие сведений о тригонометрических функциях привело к аналитическим определениям уже независимым от тригонометрических представлений: первоначально созданные для нужд практики, они вошли в математическую теорию и обрели в ней новое значение и новые приложения.

Постепенное развитие теоретической базы тригонометрии привело к изменениям учебных планов и программ математического образования в учебных заведениях. Курс тригонометрии в качестве отдельного предмета, доставшегося нам в наследство от царского периода, по инерции и традиции просуществовал до начала 70-х гг. XX в. Проводимая реформа школьного образования исключила тригонометрию из учебного плана, а материал этого предмета был распределен между геометрией, алгеброй и началами анализа. Г.В. Дорофеев по этому поводу писал, что научно это было правильно, поскольку такого раздела в математической науке нет и изучение тригонометрических функций, как и других числовых функций, является частью математического анализа. Предполагалось в курсе геометрии основной школы сразу же вводить тригонометрические функции углов любой величины и на их основе решать прямоугольные и произвольные треугольники, необходимые для вычисления элементов геометрических фигур на плоскости, а затем и в пространстве. В геометрии такой подход был реализован в учебнике А. Н. Колмогорова и др. (1979 г.). Дальнейшее изучение этих функций уже числового аргумента со свойствами и графиками продолжалось в курсе алгебры основной школы (пропедевтический уровень), а затем в алгебре и началах анализа на основе понятия производной. Однако такой завышенный уровень изучения вскоре был отменен. Сейчас согласно ФГОС тригонометрический материал изучается в двух предметах – геометрии (7 – 9-й классы), алгебры и начал анализа (10 – 11-й классы). В некоторых учебниках алгебры (7 – 9-й классы) все же сохранен материал, обобщающий известные учащимся сведения из курса геометрии и являющийся введением в теорию тригонометрических функций действительного аргумента.

Изучение тригонометрических функций имеет первостепенное образовательное и воспитательное значение: оно расширяет и углубляет систему значений учащихся в области изучения функций, способствуя воспитанию и развитию их функционального мышления; помогает наглядно проиллюстрировать важнейшие общефункциональные свойства (периодичность, четность и нечетность, монотонность); позволяет учащимся теоретические знания и опыт широко использовать в смежных предметах (особенно в физике); даёт возможность осознать практическое применение в деятельности, т. к. они (и их комбинации) – модель многих реальных периодических процессов, провести измерительные работы на местности (измерение высоты предмета и расстояние до недоступной точки).

Отметим некоторую специфику тригонометрических функций. Под термином «тригонометрические» объединены четыре основные функции: синус(sin), косинус(cos), тангенс(tg), котангенс (ctg) и еще редко употребляемые: секанс(sec), косеканс(cosec). Две тригонометрические функции, отличающиеся начальным слогом «ко», называют взаимно дополнительными (но не обратными), или сходными, или кофункциями; углы их в прямоугольном треугольнике в сумме составляют 90 °. Следует заметить, что у следующих пар: $\sin\alpha - \operatorname{cosec}\alpha$, $\cos\alpha - \sec\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$ отношения сторон прямоугольного треугольника с острым углом α – взаимно обратны. Это обстоятельство позволяет использовать на практике не все из них. Более того, зная, что тригонометрические функции при некоторых условиях допускают формульное выражение через одну из них, можно было бы вообще определить и изучать только одну, например синус, и с её помощью решать все вопросы. Однако на практике использование четырех основных функций оказывается более целесообразным (даже в смысле экономии времени и сил). Существуют и обратные им функции именуемые аркфункциями («аркусами») – arcsin (arc –это сокращение от латинского аркус, т.е. «дуга»), arcos и другие, которые изучаются в классах с углубленным изучением математики. В прошлом в школе употреблялось ещё одно написание «аркусов» с заглавной буквы, которые рассматривались как многозначные функции. Функция $y = \arcsin x$ называлась главным значением функции $y = \operatorname{Arcsin} x$. Сейчас бы это противоречило идеи функциональной зависимости – её однозначности.

Тригонометрические функции отличаются от других тем, что только они начинают изучаться в курсе геометрии основной школы, чтобы с их помощью установить метрические соотношения между сторонами и углами в треугольнике (прямоугольном и произвольном) – важнейшей фигуре геометрии. Без включения соответствующих понятий и теорем курс геометрии был бы незавершенным. Решение любых треугольников – основной мотив для их изучения. Элементы тригонометрии используются и в других темах курса, например, при изучении скалярного произведения векторов, правильных многоугольников, площадей фигур. Все это способствует пробуждению интереса к новому типу функций и желанию продолжить их изучение в старшей школе наряду с числовыми функциями на другой основе.

Тригонометрические функции отличаются от других функций еще и тем, что они первоначально вводятся как функции угла (сначала острого, затем тупого), т.е. аргументом их служит геометрический объект, которому сопоставляется некоторое число. Говорят о геометрическом их определении. Затем определения вводятся для произвольного угла (обобщенного угла или угла поворота), измеряемого как в градусах, так и в радианах. Радианная система измерения углов позволяет говорить о тригонометрических функциях числового аргумента. Между тригонометрическими функциями угла и числа существует тесная взаимосвязь, например синус числа t считается как синус угла в t радиан. Последние также допускают геометрическое истолкование, чем и отличаются от других числовых функций. Определения, связанные с прямоугольным треугольником, являются частными случаями общих определений, связанных с единичной (числовой, координатной, тригонометрической) окружностью. Следуя установившемуся порядку, тригонометрические функции определяются формулами $y = \sin x$, $y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$, в которых тригонометрические понятия задают геометрически соответствующий закон.

Тригонометрические функции относят к трансцендентным функциям, что затрудняет «ручные» вычисления их частных значений для некоторых значений аргумента, например sin 18°, cos 18°, sin 15°, cos 15° . Использование единичной окружности и графика не обеспечивает необходимую точность. В математике используют косвенные средства для составления таблиц. Тогда можно говорить о табличном способе задания функций. На практике применяется калькулятор.

Тригонометрические функции выделяются среди других видов функций характерным для них свойством периодичности, которое используется для построения графиков, при решении задач. Введение их создает инструмент математического описания и изучения периодических процессов и явлений. У учащихся часто создается ложное представление о том, что периодическими функциями являются только тригонометрические, поэтому учителю необходимо дать готовые графики других периодических зависимостей, а также предложить ученикам их сконструировать самим, поняв смысл повторяющейся закономерности. Тригонометрические функции используются для математического выражения и непериодических процессов, но в этом случае необходимо указывать границы изменения аргумента.

Для первоначального получения их графиков в отличие от других изучаемых функций можно воспользоваться особым приемом, не требующим таблицы значений функции, основанным на использовании тригонометрической окружности; иногда применяют формулы приведения. Заметим, что этот прием годится только для тригонометрических функций.

В научной и учебно-методической литературе имеются различные системы изложения теории тригонометрических функций, в значительной мере обусловленные соответствующими определениями этих функций. Существуют аналитические и геометрические способы построения теории. Аналитическое определение можно дать с помощью степенных рядов ($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots$), дифференциального уравнения $y''+y=0$ ($\sin x$ и $\cos x$ как его решения соответственно при начальных условиях $y|_{x=0}=0$ и $y'|_{x=0}=1$, $y|_{x=0} = 1$ и $y'|_{x=0} = 0$),интеграла ($\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+x^2}$ и $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}}$, а $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ вводятся как обратные к ним), функциональных уравнений (аксиоматическое определение пары функций $\sin x$ и $\cos x$). Ввиду сложности базового аппарата эти логически безупречные варианты пока на уроках не применимы, но могут быть востребованы на факультативных занятиях или элективных курсах в 11-м классе, чтобы показать другой подход к введению этих функций.

Более привычен для общеобразовательной школы геометрический способ, который совершенствовался в методическом отношении многократно. Существуют различные варианты генетических определений тригонометрических функций: через отношение сторон в прямоугольном треугольнике, с помощью тригонометрического круга (круга Эйлера) и «тригонометрических линий», координатное, векторное, с использованием понятия проекции отрезка на прямую и др. В большинстве школьных учебников геометрии, алгебры и начал анализа предпочтение отдается определениям с помощью единичной окружности (именно окружности, а не круга) как наиболее удачным и современным на данном этапе изучения тригонометрических функций. Этот вариант, как показывает школьная практика, отличается большей доступностью и наглядностью; он опирается на известные из геометрии факты (система координат, уравнение и график окружности, преобразование поворота) и определение функции из алгебры. Однако, как считают многие методисты (Г.И. Саранцев, И.М. Смирнова и другие), целесообразно сохранить, следуя истории развития тригонометрии и традициям, первоначальное определение тригонометрических функций для острого угла прямоугольного треугольника через отношение сторон, а затем уже осуществлять расширение их области определения с помощью единичной окружности. В учебниках геометрии А. В. Погорелова; Л. С. Атанасяна и др. не подчеркивается функциональная природа вводимых понятий косинуса, синуса и тангенса угла ($0°<\alpha<90°, 0° \leq \alpha \leq 180°$), т. к. для геометрии важна их прикладная сторона, а не «общефункциональный подход». В учебниках И. М. Смирновой и др.; И. Ф. Шарыгина; А. Д. Александрова и др.; А. Л. Вернера и др. вводится термин «тригонометрические функции». Отметим, что в двух последних учебниках систематически реализуется идея функциональной зависимости, что сближает геометрический и алгебраический материал и идет на пользу тому и другому курсу, создает пропедевтику для изучения тригонометрических функций в старшей школе. В этих учебниках содержится задачный материал для мотивировки введения синуса, косинуса и тангенса, который может быть использован учителем при обучении по любому другому учебнику.

В методической литературе неоднократно поднимался вопрос о порядке изучения тригонометрических функций и о том, какие функции рассматривать в геометрии. В современных учебниках геометрии представлены и три (их вполне достаточно), и все четыре основные функции; ознакомление начинается в одних с синуса, в других – с косинуса, в методической литературе есть рекомендация начинать с тангенса – в каждом случае авторы указывают на некоторое практическое значение (например, построить угол по тангенсу проще, косинус позволяет доходчивее для учащихся доказать теорему Пифагора и раньше её ввести).

Остановимся на вопросах методики введения и изучения свойств и графиков тригонометрических функций. Геометрический этап их изучения подробно рассмотрен в книге Г. И. Саранцева [20] по двум чаще всего применяемым в школе учебникам А. В. Погорелова; Л. С. Атанасяна и др. Отдельные положения следует сверять с действующими программой и учебниками, т. к. после первоначального издания книг в них были внесены изменения. В частности, теперь в обоих учебниках сохраняется традиционный порядок тем: 1) синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника , 2) синус, косинус и тангенс для любого угла от $0°$ до $180°$, изучаемые в различных разделах. В учебнике А. Д. Александрова и др. определение синуса и косинуса дается сразу для любых углов от $0°$ до $180°$, а тангенс вводится через их отношение. В учебнике И. М. Смирновой и др. все четыре функции вводятся одновременно. И. Ф. Шарыгин сходные функции вводит попарно для острого угла.

Поскольку в геометрии рассматриваются углы не больше развернутого, то для них и вводятся эти тригонометрические понятия, которые органично вплетаются в канву дальнейшего изложения курса после ознакомления с ними в 8-м классе. В большинстве учебников первоначальное знакомство с ними связывается с понятием отношения длин отрезков-сторон прямоугольного треугольника. Можно привести примеры практических задач, в которых необходимо вычислять отношения отрезков. В учебнике А. Д. Александрова и др. приводятся задачи о вычислении крутизны подъема при движении по горной дороге, полагая, что крутизна подъема характеризуется отношением высоты подъема к длине пройденного пути. В качестве геометрической модели задачной ситуации будет прямоугольный треугольник, в котором некоторый участок дороги заменяется гипотенузой, подъем – катетом, а наклон дороги относительно горизонта – углом, лежащим против катета. Желательно подобрать несколько числовых данных, чтобы убедиться, что отношение противолежащего катета к гипотенузе не зависит от длины сторон прямоугольных треугольников, если они имеют один и тот же острый угол. Этот важный вывод и может быть положен в основу введения понятия синуса острого угла прямоугольного треугольника. Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса можно ввести и без задачи с помощью рисунка острого угла, на одной из сторон которого отмечают несколько точек и из них проводят перпендикуляры на другую сторону, в полученных прямоугольных треугольниках составляют нужные отношения и убеждаются в их равенстве путем измерений и вычислений. Проведенные вычисления приведут к необходимости введения особых терминов для обозначения названий тех или иных отношений сторон прямоугольного треугольника, формулировке определений в словесной и символической формах. Важным моментом является доказательство факта о том, что в прямоугольном треугольнике введенные понятия (отношение двух сторон) не зависят от его расположения и размеров, а зависят лишь от градусной меры угла. Далее вводятся основные тригонометрические тождества; составляется таблица точных значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ для углов α, равных $30°, 45°, 60°$ и выясняется изменение их при возрастании угла. Целесообразно выяснить функциональный характер этих тригонометрических понятий: каждому значению острого угла соответствует только одно значение синуса (косинуса, тангенса, катангенса) угла; ввести термин «тригонометрические функции» для острого угла прямоугольного треугольника.

На втором этапе в геометрии происходит расширение тригонометрических понятий острого угла на любой угол от 0 до $180°$, включая граничные значения. Желание выразить зависимость между сторонами тупоугольного треугольника также определенно, как и для прямоугольного, и служит мотивировкой такого расширения. Тригонометрические понятия определяются для этих углов по тем же формулам, что и для острого угла, но только в другой редакции. Учащимся предстоит переосмыслить такие термины как катет, гипотенуза на другие, связанные с окружностью радиуса R или единичной окружностью (R=1) и координатами её точек (абсцисса, ордината). Сначала нужно провести рассуждения относительно острого угла, помещенного в систему координат вместе с окружностью (или полуокружностью), а затем уже и тупого угла, осуществляя перенос полученных результатов первого случая. Необходимо разъяснить учащимся назначение точки пересечения окружности как основы всего построения с одной из сторон угла, её происхождение, иначе не будут поняты краткие формулировки типа: «синусом угла α называется ордината y точки М, а косинусом угла α – абсцисса x точки М» (Л. С.Атанасян и др.). Вообще говоря, здесь не достаёт описания процедуры получения точки М, которую должны проговаривать учащиеся. В процессе выполнения упражнений учащиеся продолжают заполнять таблицу значений функций, подмечают, что вычисление значений для тупых углов можно сводить к вычислению острых углов, знакомятся с некоторыми формулами приведения, которые используют в вычислениях. Можно акцентировать внимание на том, что тригонометрические понятия являются функциями угла α, где $0° \leq \alpha \leq 180°$ (для tg α $\alpha \neq 90°$).

Заметим, что в учебнике И. М. Смирновой и др. рассматриваются тригонометрические функции произвольного угла (большего 180 °).

В курсе алгебры и начал анализа продолжается изучение четырех основных тригонометрических функций угла, но слово «угол» понимается не в его привычном геометрическом смысле, а как «угол поворота» – направленная величина, которая может принимать любые значения. Обобщение понятия угла можно сделать, рассматривая вращательное движение, о котором учащиеся знают из курса физики. В частности, им известно, что мерой вращения служит величина угла поворота. Наглядный образ могут дать стрелки часов: отметив положение минутной стрелки в 12 ч, будем рассматривать угол между этим её положением в различные другие моменты: через 15 мин он будет равным 90 °, через 30 мин – 180 °, через час – 360 °, через полтора часа – 540 °, через два часа – 720 ° и т.д. В тригонометрии любой угол рассматривают как результат вращения луча в плоскости вокруг начальной точки. Вращая луч вокруг этой точки от его начального положения до конечного, получим угол, который можно представить как несколько (возможно, ни одного) полных оборотов и часть полного оборота. Поскольку на плоскости имеются два противоположных направления, то возникает необходимость рассматривать положительный и отрицательный углы. По традиции направление любого вращения сравнивают с направлением хода стрелок часов и в зависимости от него считают угол положительным, если вращение происходило против часовой стрелки, и отрицательным – по часовой. Тогда любой угол можно представить в виде $\alpha+360°k$, где $0° \leq \alpha < 360°$ и k – целое число. Предложенный текст не является определением обобщенного угла (любой величины), а служит лишь его описанием. Учащиеся должны понимать, что угол в геометрии и угол в тригонометрии разные понятия, хотя называются одним и тем же словом; угол поворота не геометрическая фигура, а мера угла.

Познакомив учащихся с градусной мерой углов поворота, важно, отметить, что она становится неудобной для описания непрерывного вращения, когда повороты совершаются на сколь угодно большие углы, т. к. с ней трудно связывать другие характеристики движения, например скорость. В связи с этим была введена другая, более удобная мера угла поворота – радианная (радиусная), названная так потому, что за единицу принимается центральный угол, дуга которого равна радиусу. Радианное измерение наиболее трудно усваивается учащимися, но несмотря на это, они должны научиться одинаково свободно обращаться как с градусной, так и с радианной мерой, осуществлять переход от одной меры к другой, помня, что они связаны прямой пропорциональной зависимостью. В методических пособиях перевод радиан в градусы и обратно рекомендуют осуществлять не по формулам, а путем составления пропорции, первой строчкой которой является соотношение π рад – 180 °; по памяти знать радианные меры часто встречающихся углов. У учащихся существует распространенная ошибка, когда они числа $\pi/2$, π, $3/2\ \pi$ ассоциируют только с углами и не осознают их действительными числами с определенной целой и дробной частями. Преодолению такого формального усвоения понятия радиана способствуют упражнения на сравнение чисел: 2π и 6,4; $-\pi/2$ и -1.5; $-1{,}5\ \pi$ и $-\sqrt{10}$.

Важную роль в теории тригонометрических функций играет установление соответствия между множеством действительных чисел и множеством точек единичной окружности, которое позволяет изображать числа на этой окружности. Эта вторая геометрическая модель для множества действительных чисел. Ее главное отличие от первой модели – координатной прямой – заключается в том, что каждой точке на прямой соответствует только одно число, а здесь одной точке окружности соответствует бесконечное множество чисел. Окружность выступает в качестве системы координат, являющейся основой тригонометрии. Для изображения чисел используются углы и их радианная мера. Учащиеся знакомы с понятием единичной окружности в координатной плоскости из курса геометрии, поэтому им проще будет с ней освоиться на новом этапе изучения. Координатная плоскость поможет «расселить» числа на окружности, точно определить их место нахождения. В учебниках для этого выбран удачный прием с помощью понятия поворота точки окружности вокруг начала координат на угол в α радиан, где α – любое действительное число. Этот прием согласуется с наглядным представлением о «наматывании» координатной прямой на окружность (положительная полупрямая – в положительном направлении, отрицательная полупрямая – в отрицательном направлении; координатная прямая располагается вертикально, касаясь окружности в своей точке 0 − начале отсчета). Для установления соответствия на единичной окружности выбирают начало отсчета – точку $P_0(1;0)$, которая является точкой пересечения окружности с положительной полуосью абсцисс, положительное направление движения от точки P_0 по окружности – против часовой стрелки и единицу масштаба, равную радиусу R=1 (одному радиану). Возьмем произвольное число α. Повернув точку P_0 на угол , получим точку P_α , соответствующую числу α. Заметим, что по традиции действительные числа в тригонометрии, как и меры углов в геометрии, обозначают буквами: α, α/3, t и др. Каждая точка окружности имеет и декартовы координаты – абсциссу и ординату. Таким образом, положение точки на окружности можно задать различными способами, что используется при введении определений тригонометрических функций. В связи с этим А.Г. Мордкович замечает, что точку на окружности можно задать, используя две системы координат: «криволинейную» (числу t соответствует на окружности точка $M(t)$; t – криволинейная координата точки М) и «декартову» (у точки М как у всякой точки координатной плоскости есть абсцисса и ордината; $M(x;y)$ привычная для учащихся запись). Учащиеся должны научиться осуществлять переход от одной записи к другой.

Для усвоения понятия поворота точки вокруг начала координат необходимо рассмотреть достаточное число упражнений. Среди них могут быть такие: при повороте точки P(1;0) на угол в 3,5 рад получается точка, расположенная в третьей четверти ($\pi < 3{,}5 < 3/2\pi$), с отрицательной абсциссой и ординатой; при повороте на угол в 7 рад точка совершит полный оборот, т. е. пройдет путь $2\pi \approx 6{,}28$ рад и еще продвинется по дуге окружности, длина которой меньше $\pi/2 \approx 1{,}57$ рад, т. е. будет расположена в первой четверти; точка, прошедшая путь в 13,1 рад, совершит два полных оборота и еще меньше четверти оборота и будет в первой четверти; при повороте на $-17/6\pi$ рад точка совершит полтора оборота (3π рад) в отрицательном направлении и попадает в точку (-1;0), а затем возвратится в положительном направлении на $\pi/6$ и попадет в точку $(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$.

А.Г. Мордкович считает, что авторы учебников недооценивают важность изучения модели «числовая окружность», что затрудняет понимание введения тригонометрических функций. В своем учебнике он довольно подробно рассматривает две модели: «числовая окружность», «числовая окружность на координатной плоскости» с привлечением большого объема иллюстративного материала и игровых ситуаций. Под числовой окружностью он подразумевает единичную окружность с установленным соответствием между числами и ее точками. Отметим еще одну особенность авторской концепции: при первоначальном введении тригонометрических функций он использует не традиционные обозначения: $s=\sin t$, $s=\cos t$, т. к. x и y выполняют другие роли: $x=\cos t$, $y=\sin t$. Это замечание можно отнести и к другим учебникам, в которых только используются другие буквы, но по той же причине. К привычным обозначениям все возвращаются, когда перестают пользоваться вспомогательной окружностью.

После создания такой базы можно переходить к определению тригонометрических функций. Синус и косинус произвольного угла определяются с помощью единичной окружности как ордината или абсцисса точки, полученной поворотом точки P_0 на угол α. Они обобщают определения, данные в геометрии. Тангенс и котангенс произвольного угла определяются через отношения синуса и косинуса. После сообщения ученикам о том, что при решении задач приходится работать не с углами, а с физическими величинами (временем, температурой, скоростью и т.п.), необходимо определить тригонометрические функции для произвольного числа. В самих определениях слово «угол» заменяем словом «число» при радианной системе измерения углов. Рассматривая ту или иную функцию, в определенном смысле безразлично считать ее функцией числового или углового аргумента. В учебнике А.Н. Колмогорова и др. определяется, например синус числа x как синус угла в x радиан и т.д. В учебнике Г.В. Дорофеева и др. говорится, что запись $\cos\alpha$ может быть прочтена как косинус числа α, так и косинус угла α (слова «число» и «угол» как синонимы). В учебнике М.И. Башмакова приводится правило вычисления значения тригонометрической функции для числа t: сначала сопоставляется числу t некоторый угол, а затем с помощью тригонометрии вычисляется значение функции от этого угла. На практике все же по традиции говорят «вычислим синус числа $\frac{13}{6}\pi$ », понимая под этим синус числа $\frac{13}{6}\pi$. При этом числу $\frac{13}{6}\pi$ сопоставляется некоторый угол (или точка на единичной окружности), который совпадает с углом $\frac{\pi}{6}$, а затем для этого угла находится синус (ордината точки). В ответе получаем 0,5.

Учащиеся часто путают такие выражения как sin 1 ° и sin 1, sin 2 ° и sin 2, что говорит о непонимании смысла этих выражений. Надо предлагать упражнения на сравнение, например sin 5 и sin 6. Числа 5,6 ϵ ($\frac{3}{2}\pi$;2π); значения $\sin t$ увеличиваются с увеличением t, следовательно, sin 6>sin 5.

Единичная окружность широко применяется при ознакомлении со свойствами тригонометрических функций, доказательстве их, построении графиков, вычислении значений функций, доказательстве ряда формул, решении простейших уравнений и неравенств, знакомстве с тригонометрическими линиями (синусов, тангенсов и др.) и т.п. При отходе от этой геометрической модели при исследовании функций в учебниках вводятся более привычные для учащихся обозначения функции и аргумента: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, которые являются числовыми функциями. Поскольку выражения sin x, cos x, tg x и ctg x – действительные числа, записанные в тригонометрической форме, то считают, что все тригонометрические формулы, которым уделено в учебниках большое место, выражают определенные свойства тригонометрических функций. Например, формула $\sin(-x) = -\sin x$ выражает свойство нечетности синуса, равенство $\sin(x+2\pi k)=\sin x$ при $k \in Z$ свидетельствует о периодичности синуса, неравенство $|\sin x|\leq 1$ говорит о множестве значений синуса и др. Можно рассматривать весь тригонометрический материал в курсе алгебры и начал анализа как единое целое, объединенное идеей изучения соответствующих числовых функций. Поэтому не случайно в учебнике М.Я. Пратусевича весь материал сосредоточен в одной главе под названием «Тригонометрия», которая начинается введением синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа, и лишь затем, после изучения большого числа формул, выполнения упражнений, связанных с преобразованиями, изучаются тригонометрические функции.

Исследованием функций, как правило, завершают изучение материала. В учебнике А.Н. Колмогорова и др. приведена сводная таблица свойств всех четырех функций, позволяющая провести их сравнительный анализ. До этого каждому свойству посвящается отдельный параграф (пункт), в котором даются формулировка, доказательство, упражнения, иллюстрации, указания для использования при построении графиков применительно к каждой функции. Построение графиков проводится либо при первоначальном ознакомлении с функцией, либо на этапе исследования. Учебники различаются по способу построения графиков: по точкам, с помощью единичной окружности или ее части. При построении схематических графиков используются уже известные свойства, а иногда и выявляются дополнительные. График функции, являющийся наглядной геометрической интерпретацией ее свойств, позволяет решать простейшие уравнения и неравенства, особенно заданные на определенном промежутке. Учащиеся должны хорошо усвоить построение графиков функций $y = \sin x$(синусоида) и $y = \operatorname{tg} x$(тангенсоида), т. к. графики функций $y = \cos x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, а также многие другие получаются из названных путем различных геометрических преобразований. В ряде учебников изучение функций происходит параллельно с помощью единичной окружности и графика.

Очень полезно рассмотреть наглядное изображение чисел $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ с помощью единичной окружности путем введения традиционных тригонометрических линий (отрезков), как это сделано в учебнике А.Н. Колмогорова и др. Обозначим эти линии: синусов − это отрезок [-1;1] оси ординат, с помощью которого находятся значения синуса; косинусов − это отрезок[-1;1] оси абсцисс, с помощью которого находятся значения косинуса; тангенсов − это прямая x=1, которая является касательной к окружности в точке $P_0(1;0)$, с помощью которой находят значения тангенсов для чисел $\alpha \neq \pi/2+\pi k$, где $k \in Z$; котангенсов − это прямая y=1, которая является касательной к окружности в точке P(0; π/2), с помощью которой находят значения котангенсов для чисел $\alpha \neq \pi k$, где $k \in Z$. Необходимо подчеркнуть, что касательные нужно рассматривать как координатные прямые и показать, что ординаты их точек соответственно будут tgα или ctgα при указанных выше исключениях. Линия тангенсов вместе с единичной окружностью дает возможность построить сколь угодно много точек на тангенсоиде, не вычисляя специальных значений функции. В учебнике А.Н. Колмогорова и др. синусоида и тангенсоида строятся именно этим способом в системе координат *XOY*, «разматывая» окружность соответственно на ось ординат или на линию тангенсов на отрезке

[0; 2π] или на интервале ($-\pi/2;\pi/2$) с последующим переносом на координатную плоскость. Графики строятся в одном и том же масштабе для обеих осей, чтобы не получить деформированные кривые. По свойству периодичности функций график можно продолжить влево и вправо.

Использование «школьного шаблона» способствует повышению эффективности уроков, посвященных изучению свойств и графиков тригонометрических функций, обеспечивает эстетику записей и графических работ учащихся (см.: Математика в школе. 1971. № 2).

В процессе выполнения упражнений учащиеся поэтапно на конкретных примерах, постепенно усложняя функцию, учатся строить графики тригонометрических функций вида $y=\mathrm{A}\cos(\omega x+\varphi)$. Чтобы учащиеся не допускали ошибок при построении графиков, им необходимо пользоваться равенством $\mathrm{A}\cos(\omega x+\varphi)=\mathrm{A}\cos(\omega(x+\frac{\varphi}{\omega}))$. По построенным графикам функций учащиеся должны уметь устанавливать их свойства, т. е. читать графики.

Закрепляет знания учащихся о свойствах тригонометрических функций решение тригонометрических уравнений и неравенств. Они дают богатый материал для применения всех тригонометрических формул, создают возможность для развития творческой деятельности учащихся, находят широкое применение в прикладных задачах. Решение простейших уравнений (неравенств) есть не что иное, как нахождение угла (числа) по заданному значению тригонометрической функции. Подобные задачи решались в курсе геометрии при решении треугольников. Теперь их решение рассматривается с помощью единичной окружности; вводятся понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа, которые выступают в качестве имени главного угла, для которого та или иная функция имеет заданное значение. Знакомство с ними осуществляется лишь постольку, поскольку это необходимо для компактной записи решения уравнения или неравенства. Основополагающим положением при решении тригонометрических уравнений является то, что если оно имеет решение, то их бесконечное множество. В этом состоит основное отличие их от алгебраических уравнений. Учащихся, проявляющих повышенный интерес к изучению математики, можно ознакомить с обратными тригонометрическими функциями, их свойствами и графиками.

На заключительном этапе изучения тригонометрических функций применяются дифференциальное и интегральное исчисления к решению задач и, в первую очередь, к их исследованию. Этот материал рассредоточен по соответствующим главам. Имеющийся временной разрыв с основным блоком в определенной степени предопределяет методику изучения этих вопросов: на уроке необходимо повторять основные моменты пройденного, устанавливать аналогию с ранее изученными алгебраическими функциями, рассматривать новые взаимосвязи и зависимости, осознавать универсальность изучаемых методов и др. Основные теоретические факты, полученные при изучении материала, можно занести в табл. 2.8:

Таблица 2.8

Функция	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Производная	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
Первообразная	$-\sin x$	$\sin x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\ln\lvert\sin x\rvert$

Учащиеся знакомятся через систему упражнений с простейшими тригонометрическими функциями, которые можно исследовать с помощью производной, а также вычислять площади фигур и решать задачи физического содержания.

Задания для самостоятельной работы

- Проведите сравнительный анализ тригонометрического материала в альтернативных учебниках геометрии. Оцените его объем. Соответствует ли он ФГОС? Сопоставьте уровни строгости изложения. Выскажите своё предпочтение авторским замыслам.
- Подготовьте материал для беседы об истории тригонометрии, обратив особое внимание на первоначальное толкование названия.
- На основе анализа задачного материала выделите основные типы тригонометрических упражнений.
- Ознакомьтесь по книге Г. И. Саранцева [20] с самодельными моделями, которые он рекомендует использовать при изучении тригонометрических понятий. В чем состоит их назначение?
- Подберите задачи с практическим содержанием, для решения которых используются элементы тригонометрии.

- Какие свойства тригонометрических функций можно подметить на геометрическом этапе их изучения? Как помочь учащимся их открыть?
- Разработайте фрагмент урока введения определений sin α (cos α, tg α) для острого и тупого углов.
- Сравните учебный материал о радианной системе измерения углов из геометрии и алгебры и начал анализа. Приведите другие системы измерения углов поворота в зависимости от вида практической деятельности.
- Предложите фрагмент урока по построению графика одной из тригонометрических функций с помощью единичной окружности. В чем состоит общий принцип построения графиков этим способом? В чем различаются учебники в его применении?
- Согласны ли вы с предложением одновременного построения графиков всех четырех основных функций?
- Предложите методику использования прибора «тригонометр» при изучении тригонометрических функций. Каково его назначение? О нем можете прочесть у Н.М. Рогановского [19].
- Как осуществить переход от тригонометрических функций любого угла к функциям числового аргумента?
- Охарактеризуйте возможные системы изложения материала о тригонометрических функциях. Выделите основные этапы их изучения.
- Составьте перечень свойств тригонометрических функций по трем-четырем учебникам и укажите способ их доказательства (аналитический, геометрический). Какому вы отдадите предпочтение при изучении в старшей школе?
- Разработайте методику изучения характерного свойства – периодичности. Обратите внимание на пропедевтику, определение, аналитическую и геометрическую интерпретации, применение при построении графиков и вычислении значений функции.
- Проиллюстрируйте процесс «наматывания» координатной прямой на единичную окружность.
- Проанализируйте один из вариантов ЕГЭ на предмет включения тригонометрических заданий. В чем могут возникнуть трудности у учащихся?

- Сформулируйте алгоритм построения графика гармонического колебания. Приведите примеры его использования.
- Составьте опорный сигнал по взаимосвязи формул тригонометрии.

2.7. Методика изучения числовых последовательностей и прогрессий

Понятие последовательности является важным в общеобразовательном плане и в то же время базовым для введения арифметической и геометрической прогрессий – частных случаев числовых последовательностей, изучаемых в курсе алгебры 9-го класса. Прогрессии – наиболее распространённый тип числовых последовательностей, заданных рекуррентным способом (прибавлением постоянного числа и умножением на постоянное число), подробно рассматриваются в этой теме, включая серию задач на практическое применение в физике, геометрии, арифметике, банковском деле, повседневной жизни. Понятия последовательности и ее предела в качестве основных понятий математического анализа находят важные применения в различных вопросах школьных курсов в старших классах. Тема дает благодатный материал для знакомства с понятием бесконечности, которое достаточно сложно усваивается учащимися, т. к. не имеет геометрического аналога. Целесообразно обращать особое внимание на бесконечное число членов последовательности, запись с многоточием для бесконечных последовательностей, графическую интерпретацию свойств последовательности, новую связь между номером и членом последовательности, стремление к нулю или бесконечности и др.

В большинстве учебников алгебры общие сведения о последовательностях даются в том объеме, в котором они необходимы для изучения прогрессий: последовательность, член последовательности, порядковый номер члена, конечная и бесконечная, способы задания. В объяснительном тексте раскрывается содержание понятия последовательности на конкретных примерах (определение не приводится). М.И. Башмаков считает, что необходимо расширить материал о последовательностях, дающих понятие о бесконечных процессах, в которых переменная изменяется дискретно (скачками), так что для каждого ее значения можно указать непосредственно за ним следующие; значения такой переменной и образуют последовательность. Он предлагает последовательность определять как функцию натурального аргумента и исходя из этого изучать ее свойства (монотонности, ограниченности) на основе общего понятия функции. На наглядной основе учащиеся знакомятся с понятием предела последовательности, с суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, методом математической индукции. Функциональный характер последовательности прослеживается и в учебниках алгебры 9-го класса К.С. Муравина и др., А.Г. Мордковича и др., но в более умеренном объеме. В учебнике А.Г. Мордковича и др. рассматривается графический способ изображения последовательностей и устанавливается связь прогрессий с соответствующими функциями на множестве натуральных чисел: арифметическая – линейная, геометрическая – показательная (на уровне опережающего знакомства). Изучение прогрессий связано с изучением функций, отражающих два важных закона изменения величин.

Хотя в учебниках первоначальные заголовки посвящены числовым последовательностям, необходимо подчеркнуть, что кроме них имеются последовательности и другой природы. Так, в геометрии рассматриваются различные последовательности геометрических фигур, в физике – последовательности положений физического тела в различные моменты времени. Однако в алгебре для краткости речи под термином «последовательность» понимается именно «числовая последовательность», членами которой являются только числа. М.И. Башмаков считает, что очень важно знакомить учащихся с последовательностями как можно раньше, т. к. знания о них необходимы в информатике и в повседневной жизни. Анализ учебников показывает, что к началу изучения последовательностей учащиеся не раз встречались с ними: натуральный ряд чисел, последовательность квадратов чисел, последовательность четных (нечетных) чисел, последовательность простых чисел, последовательность обратных чисел к натуральным, последовательность чисел, делящихся на 4 и так далее; угадывали возможную формулу общего члена; с иррациональными числами связывали различные последовательности десятичных приближений и многое другое. В пропедевтическом плане важен не только набор различных последовательностей, а их характерные свойства, сам процесс построения ее членов.

Несмотря на то, что основное внимание в учебниках сосредоточенно на прогрессиях, можно показать ученикам существование разнообразных числовых последовательностей, не являющихся прогрессиями. Особый интерес представляют последовательности, имеющие определенную историю, сюжет и целый ряд свойств. Например, последовательность чисел Фибоначчи (задача о кроликах), первые два члена которой – единицы, а каждый последующий член получается путем сложения двух предшествующих ему членов (см.: учебники К.С. Муравина и др.; М.И. Башмакова; Г.В. Дорофеева и др.), последовательность перемещений колец Ханойской башни (головоломка), последовательность факториалов Л. Эйлера (см.: учебник М.И. Башмакова). Попутно в целях привития интереса к прогрессиям можно привести два исторических факта из многих существующих перед изучением сумм первых n членов известных прогрессий: рассказ об устном счете К. Гаусса, который в 3-м классе быстро сумел сложить все натуральные числа от 1 до 100 (арифметическая прогрессия), легенду о награде индийского принца изобретателю шахмат (геометрическая прогрессия), которые смогут подсказать учащимся метод доказательства соответствующих формул. Значительный интерес у учащихся вызывают исторические задачи, которые имеются в учебниках. Некоторые из них допускают интересные геометрические трактовки последовательностей. Полезно привести геометрические иллюстрации некоторых свойств обеих прогрессий, геометрические способы нахождения суммы их членов. При решении практико-ориентированных задач, включая задачи на сложные проценты, рекомендуется использовать калькулятор.

Первый блок посвящен общим вопросам числовых последовательностей и с различной полнотой раскрывает их содержание в учебниках алгебры. Изучение материала начинается с записи известных учащимся примеров числовых последовательностей, которые могут быть как бесконечные, так и конечные, возрастающие и убывающие, постоянные (стационарные); вводится соответствующая терминология и символика. В результате их анализа учащиеся знакомятся с соответствующими понятиями. Последовательность рассматривается как некоторый упорядоченный (занумерованный) набор (ряд) чисел. Для нумерации членов последовательностей используются числа натурального ряда, который сам является последовательностью. Соответствие натуральных чисел и членов любой другой бесконечной последовательности можно проиллюстрировать стрелочками:

$1; 2; 3; 4; 5; \ldots; n; \quad n+1; \ldots$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1; 4; 9; 16; 25; \ldots; n^2; (n+1)^2; \ldots$

Это поможет учащимся осознать, что индекс n указывает порядковый номер члена a_n – n-й (общий) член бесконечной последовательности (a_n): a_1 ; a_2; ... ; a_n; ... . В записи последовательности бесконечность показывается с помощью многоточия, в котором «спрятаны» числа. На примерах учащиеся убеждаются, что члены последовательности зависят от их порядковых номеров, т. е. последовательность можно понимать как функцию натурального аргумента. Поэтому вполне естественно определить ее через дискретный вариант функции и обозначить $y = f(n)$, где $n \in N$, тогда ее n-й член $a_n = f(n)$ – значение функции при аргументе, равном n (число n является одновременно аргументом функции и порядковым номером члена последовательности).

С помощью конкретных примеров учащиеся знакомятся со способами задания последовательности, которые позволяют найти любой ее член с определенным номером. Среди них особенно тщательно изучаются два способа задания: формулой n-го члена и рекуррентный (индуктивный). Последний способ является специфическим для последовательностей и название свое получил от слова рекурсия, что означает «возврат». Вычисляя очередной член последовательности, мы как бы возвращаемся назад, к уже вычисленным, предыдущим членам. Он состоит в том, что задается один-два первых члена последовательности и формула, позволяющая выразить n-й член через предыдущий. Среди рекуррентно заданных последовательностей самые простые – изучаемые в алгебре прогрессии. Поэтому учащиеся должны хорошо усвоить этот способ задания, понять, что способ включает два обязательных условия (одна формула не определяет последовательность, т. к. первые члены не могут быть по ней вычислены). В ряде учебников приводятся и другие способы задания: словесный – описанием членов последовательности, если не существует формула (например, a_n – это простое число, a_n – это цифра, стоящая на n-м месте в десятичной записи числа π); табличный (для конечных последовательностей), графический (дискретное множество точек, расположенных справа от оси ординат). Среди упражнений ценными являются на подбор формулы общего члена последовательности по нескольким первым членам. Учитель должен сообщить ученикам, что, зная конечное число членов последовательности, нельзя однозначно установить формулу. Иногда такая ситуация возникает в практической деятельности по результатам измерений величины.

Заметим, что в учебниках, избравших функциональный подход к последовательностям, рассматриваются их свойства. Один из пунктов учебника М.И. Башмакова называется «Обсуждаем свойства последовательностей». Следует обратить внимание на формулировку пункта, которая определит и выбор методики изучения вопроса.

Второй блок посвящен традиционному для школы материалу – прогрессиям. Слово «прогрессия» имеет латинское происхождение, буквально означает «движение вперед» (сравните со словом прогресс). К слову «прогрессия» добавляются два эпитета «арифметическая» и «геометрическая». Получаем во многом родственные прогрессии, что и позволило в учебнике К.С. Муравина и др. излагать все их узловые вопросы одновременно. М.И. Башмаков совместно только раскрывает построение обеих прогрессий, а в остальном изучает последовательно. Последовательное изучение обеих прогрессий наблюдается в большинстве учебников. Однако сопоставление прогрессий возможно при изучении второй из них или при обобщающем повторении. Ознакомление с каждой прогрессией начинается с практической задачи, мотивирующей ее изучение. Как объем, так и уровень доступности теоретического материала дают возможность организовывать учебно-познавательную деятельность учащихся дифференцированно с большой долей самостоятельности. В теории о прогрессиях можно выделить следующие узловые вопросы: определение, формула n-го члена, характеристическое свойство, формула суммы n членов. В ходе изучения учащиеся должны твердо усвоить предлагаемые формулировки, распознавать прогрессии при разных способах задания, выводить формулы и решать задачи с их применением, приводить примеры из реальной жизни. Приведем обобщающую таблицу для сравнения прогрессий (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Название	Арифметическая прогрессия (a_n)	Геометрическая прогрессия (b_n)
Обозначение	$\div a_1$; a_2; a_3;…; a_n; … d-разность(первая буква французского слова difference-разность)	$\div\div b_1$;b_2;b_3;…;b_n;… q-знаменатель (первая буква французского слова quotient-частное)
Определение	$a_{n+1} = a_n + d$, d=$a_{n+1} - a$	$b_{n+1} = b_n \cdot q$, $b_n \neq 0$, $q \neq 0$, $q = b_{n+1}/b_n$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, $n > 1$	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n > 1$, (если все члены положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$
Формула суммы n членов	$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$, $S_n = \frac{2 \cdot a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, $q \neq 1$ $S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q}$, $q \neq 1$

Отметим удобные символы ÷ и ÷÷, которые используются в ряде учебников для замены соответствующего названия прогрессии. Как правило? определения, похожие по редакции, даются словесно через описание рекуррентной формулы, а затем записываются символически. Сообщается, что прогрессия (a_n) задается полностью первым членом a_1 и разностью d, прогрессия (b_n) – первым членом b_1 и знаменателем q, а любой член можно вычислить по формуле n-го члена. Следует указать учащимся, что любая постоянная последовательность может быть названа арифметической прогрессией с разностью $d = 0$ и одновременно геометрической прогрессией со знаменателем $q = 1$. Обратить внимание на зависимость характера поведения членов прогрессии от ее разности (знаменателя). Например, арифметическая прогрессия будет возрастающей при $d > 0$ и убывающей при $d < 0$. Геометрическую прогрессию также можно рассмотреть на монотонность при различных q: $q > 1$, $0 < q < 1$, $q < -1$, $-1 < q < 0$, $q = 1$, $q = -1$. Полезно сообщить учащимся, что названия прогрессий объясняются характеристическими свойствами их членов (средним арифметическим, средним геометрическим), а сходные формулы обеих прогрессий (кроме суммирования) отличаются лишь знаками действий и простая замена их позволяет из одной получить другую, что приводит к уменьшению запоминания (например, из формулы

n-го члена арифметической прогрессии можно получить формулу для геометрической прогрессии простой заменой сложения умножением и умножения – возведением в степень). Прогрессии имеют еще множество замечательных свойств, которые можно открыть, решая задачи-исследования (см.: учебник Г.В. Дорофеева и др.), выполняя сюжетные серии и исследовательские работы (см.: учебник М.И. Башмакова).

Остановимся на доказательствах формул. Опыт показывает, что они не вызывают затруднений у учащихся. Формула n-го члена прогрессий выводится методом неполной индукции на основании соответствующего определения. Естественно, что рассуждения, основанные на нескольких частных случаях, не являются доказательством. Корректный вывод формул возможен после ознакомления с методом математической индукции, что и делается дополнительно в нескольких учебниках. Выводу формулы суммы n членов прогрессии предшествуют соответствующие задачи, в которых на конкретном примере приводятся рассуждения, аналогичные используемым уже в общем виде при доказательстве. Поэтому важно обратить внимание учеников при решении задачи на идею, которая поможет найти искомую сумму, а возможно и самостоятельно доказать формулу.

В ряде учебников алгебры 9-го класса для ознакомления учащихся излагается материал о бесконечной убывающей геометрической прогрессии и пределе числовой последовательности, который сейчас исключен из основной школы. В наиболее компактном виде он представлен в учебниках М.И. Башмакова; К.С. Муравина и др. Объясняется происхождение названия прогрессии: при $|q| < 1$ b_n становится сколько угодно малым, «бесконечно убывает», стремится (приближается) к нулю. Изложение материала строится с опорой на наглядно-интуитивные представления учащихся о бесконечном процессе. Можно вспомнить из курса геометрии вывод формул длины окружности и площади круга. Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии сложно для усвоения учащимися основной школы. Они впервые задумываются о существовании прогрессии, которая убывает бесконечно. В объяснительном тексте учебников изложение материала начинается с практической задачи (разрезание пирога на части: пополам, одну половину еще пополам и т.д.), геометрических задач (единичный квадрат делится на квадраты с уменьшающимися в два раза сторонами, на прямоугольники с уменьшающимися в два раза площадями и штрихуются из них те, которые не делятся).

Выписывая полученные три числовые последовательности, являющиеся геометрическими прогрессиями с $|q| < 1$, формулируется определение. Затем выясняется формула нахождения суммы этой прогрессии: $S = \frac{b_1}{1-q}$. Важно отметить, что полученная формула позволяет найти «сумму всех членов прогрессии», а поэтому и отличается от формулы суммы n членов той же прогрессии. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что говорить о сумме всех членов бесконечной прогрессии можно только условно, т. к. невозможно сложить бесконечно много чисел – такой процесс сложения никогда не закончится. Математики нашли выход из положения, разрешив осторожно пользоваться этой терминологией, но только в ситуациях, когда бесконечная сумма отличается от ее конечной части из n слагаемых исчезающе мало. В некоторых методических рекомендациях указывается, что находится не сама бесконечная сумма, а предел суммы n членов, когда $n \to \infty$ и записывают $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. При рассмотрении примеров этой прогрессии важно, чтобы учащиеся интуитивно прочувствовали стремление к нулю дробей при неограниченном возрастании числа n. Термин «предел», как правило не вводится и не определяется. Его заменяют словами «стремление к числу $\frac{b_1}{1-q}$ при $n \to \infty$». В учебнике К.С. Муравина и др. приводится текст: «В жизни люди часто стремятся к некоторому идеалу – он обычно недостижим, но целеустремленный человек может к нему как угодно близко подойти». В качестве примера использования формулы может быть обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную, решение софизма древних об Ахиллесе и черепахе.

Заметим, что в школе не рассматриваются суммы бесконечных геометрической прогрессии при $|q| \geq 1$ и арифметической прогрессии, т. к. их суммы n членов при $n \to \infty$ не стремятся ни к какому числу (они не имеют суммы).

Задания для самостоятельной работы

- Выпишите тематику вопросов, подлежащих изучению в различных учебниках алгебры 9-го класса, и сопоставьте их с ФГОС.
- Выпишите из учебников различные определения числовой последовательности. Какое из них вы предпочтёте для учащихся 9-го класса и почему?

• Приведите примеры нечисловых последовательностей.

• Ознакомьтесь с последовательностью чисел Фибоначчи и отберите наиболее интересные свойства, докажите их.

• Приведите примеры исторических задач из учебников и решите их.

• Изложите методику изучения прогрессий различными способами. Какому варианту вы отдадите предпочтение?

• Ознакомьтесь с выводом формул, связанных с прогрессиями. В каком классе вы познакомили бы учащихся с методом математической индукции и почему?

• Подберите задачи-исследования и выясните, какие затруднения могут возникнуть у учащихся при их решении.

• Приведите примеры различных типов абстрактных задач, решаемых с помощью формул обеих прогрессий.

• Какие типовые задачи включаются при проведении письменного экзамена за курс алгебры основной школы? Приведите их формулировки и решения.

• Составьте итоговые математические диктанты по каждой прогрессии.

• Подберите задачи на банковские расчёты и решите их.

• Подберите задачи геометрического содержания на прогрессии и решите их. Оцените уровень трудности таких задач.

• Выберите наиболее трудные и интересные, на ваш взгляд, задачи на прогрессии. Продумайте методику работы с учащимися над поиском путей решения этих задач.

• Продумайте, как можно реализовать межпредметные связи геометрии и алгебры при ознакомлении с конструкцией предельного перехода на примере формирования у учащихся интуитивного представления о пределе числовой последовательности.

• Приведите примеры обращения обыкновенной дроби в десятичную, используя учебник 9-го класса К. С. Муравина и др.

• Как вы думаете, с какой целью М. И. Башмаков в учебнике 9-го класса приводит цитату из «Войны и мира» Л. Н. Толстого, описывающую софизм древних об Ахиллесе и черепахе? Как софизм разрешается?

• Какая идея используется в геометрии при выводе формул длины окружности и площади круга? Как разумно на этом материале «обыграть» межпредметные связи?

Глава 3
МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1. Общие замечания

В старшей школе учащиеся приступают к систематическому изучению основ раздела математики, который называют «математический анализ» (или просто «анализ»), который обогащает идейное содержание функциональной линии и расширяет ее прикладную сторону. Эта ветвь математики, оформившаяся в XVIII в., включает в себя дифференциальное и интегральное исчисления. В школе ограничиваются изучением лишь начал (элементов) анализа. Это первое знакомство учащихся с серьезным разделом высшей математики. Вопрос о включении начал анализа в старшую школу имеет свою историю. Первая попытка была осуществлена в начале XX в. в выпускных классах реальных училищ (1916 г.), затем были периоды исключения и вновь возрождения в более или менее скромных объемах по разным причинам. Программа по математике, введенная в 1970-е гг., включала весь спектр понятий начал анализа, а именно: предел числовой последовательности, предел функции (на бесконечности и в точке), непрерывность, производная, первообразная, интеграл. Одновременно в курсе геометрии интеграл стал применяться для вычисления объемов тел. Каждое понятие снабжалось широким спектром применений, показывая практическое значение данного раздела. Начала анализа нашли широкое применение в физике. Предварительно программные вопросы были апробированы на факультативных занятиях, проведение которых было начато в 1967 г.

Дальнейшее усовершенствование программы в целях нормализации нагрузки учащихся начиная с 1981 г. привело к исключению теории пределов как объекта изучения всеми учащимися и было рекомендовано вводить производную и интеграл без использования понятия предела, следуя историческому пути возникновения этих понятий. Как известно, в математике вначале были сформированы понятия производной и интеграла, а позднее как обобщение этих понятий было выработано точное определение предела функции. Эта рекомендация привела к отступлению от современной трактовки понятий через предел функции в точке. Такое в школьной практике общеобразовательных классов наблюдается ввиду соблюдения принципа доступности. Однако исключение не относится к профильным классам с углубленным изучением математики. А. Г. Мордкович излагает свою точку зрения: выпускник средней школы должен иметь представление о всех трёх видах предела и об их применении для исследования явлений реального мира. Понятие предела и производной он относит к основным понятиям того языка, на котором говорит природа, называя их золотым фондом общечеловеческой культуры. Относительно интегрального исчисления у него такой уверенности нет. В его учебнике присутствуют все вышеназванные понятия прежней программы с различной степенью формализации и привлечением наглядно-графических образов [13]. Ю.М. Колягин предпочитает наглядно-интуитивный уровень усвоения материала в 11-м классе на пропедевтическом уровне для общего развития учащихся с ориентацией на подготовку к продолжению математического образования в высшей школе [25].

Во всех методических руководствах по началам анализа подчеркивается общеобразовательное, мировоззренческое и прикладное значение содержания материала, включающего основные понятия, утверждения, методы, в объеме, который позволяет исследовать элементарные функции и решать простейшие алгебраические, геометрические, физические, экономические и другие практические задачи. Изучение материала должно быть ориентировано на содержательное раскрытие понятий, утверждений и методов, выявление их практической значимости, на организацию активной самостоятельной познавательной деятельности учащихся с привлечением наглядных соображений, интуиции, сообразительности, опыта и предшествующих знаний. Техника дифференцирования и интегрирования доводится лишь до уровня, достаточного для исследования элементарных функций и решения разнообразных прикладных задач. Учитель должен иметь в виду, что не весь материал, изложенный в учебниках, необходимо формировать на уровне проверки самостоятельного его воспроизведения учащимися. Поэтому необходимо руководствоваться требованиями к уровню подготовки выпускников, установленными нормативными документами. Организуя процесс обучения, учителю необходимо разумно сочетать лекционно-семинарский метод с традиционными, что позволяет повысить качество усвоения учащимися принципиально новых вопросов, которые не встречались даже на пропедевтическом уровне в основной школе. Это создаёт дополнительные трудности в усвоении начал анализа наряду с особенностями самого материала, требующего более высокого уровня абстрактно-логического мышления. Переход от конечного к бесконечному, от дискретного к непрерывному создает определенную трудность в изучении теоретического материала, что приводит к формальному его усвоению. Прямое перенесение представлений о конечном на бесконечное – источник ошибочных суждений. Практические приложения начал анализа (вычисления производных и первообразных элементарных функций, исследование в простейших случаях функций и построение их графиков, решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке, вычисление площади криволинейной трапеции с использованием первообразной) в отличие от вопросов теории не вызывают особых затруднений у учащихся, о чем сообщают учителя.

Можно констатировать, что ввиду имеющихся разногласий по поводу отбора содержания материала, его объема, уровня строгости изложения в учебниках и на уроках алгебры и начал анализа до сих пор еще не выработана единая концепция относительно изучения этого раздела высшей математики в средней школе. Авторы современных учебников предлагают свои возможные варианты ответов на поставленные вопросы. Больше всего разногласий по изучению элементов теории пределов, которые проникли в школу ещё в XIX в. и долгое время прочно в ней удерживались в курсах алгебры и геометрии. Ещё В. М. Брадис в 1954 г. писал о том, что раздел «Пределы» – один из трудных, и борьба между стремлением к научности изложения и стремлением сделать его максимально доступным и наглядным привела к созданию многих вариантов его изложения. В ФГОС второго поколения фундаментальное ядро математического содержания общего образования понятия предела не содержит [26, с. 35 – 39]. Поскольку формулировки «ядерных» вопросов весьма общие, то, видимо, они будут конкретизироваться в программе и, возможно, круг понятий расширится за счет включения вспомогательных понятий, к которым можно отнести и предел – опорное понятие, на котором строятся дифференциальное и интегральное исчисления. Авторские коллективы могут помещать и дополнительный материал в отдельный модуль для учащихся, интересующихся математикой, чтобы сохранить логику современного изложения этих вопросов в вузовском курсе математического анализа. Однако следует заметить, что и в вузовских курсах появляются различные варианты, отличающиеся порядком введения понятий и содержанием материала (интеграл раньше производной, непрерывность до предела функции, производная и первообразная одновременно), в целях совершенствования методики изложения материала.

В школьных учебниках по алгебре и началам анализа первостепенное значение уделяется центральным понятиям раздела – производной и первообразной, которые снабжаются разнообразными содержательными задачами разной степени трудности. Отдельные задачи включаются в ЕГЭ. Другие понятия раскрываются в дополнительных пунктах, которые изучаются в профильных классах или предназначены для учащихся, которые проявляют повышенный интерес к математике. Заметим, что все вопросы раздела в той или иной мере излагаются в соответствующих главах методик [9 – 11, 19, 22], предназначенных для студентов педагогических вузов, а также в книгах для учителя [1, 3, 4, 13 – 15, 25]. Поэтому нет необходимости пересказывать этот материал подробно. Самостоятельное изучение учебников и методических руководств вооружит студентов знанием различных подходов и даст возможность сформулировать свой взгляд на проблему. В процессе изучения необходимо обратить внимание на год издания руководства, чтобы на занятии или зачете (экзамене) не предлагать материал, потерявший на сегодняшний день свою актуальность. Учебный материал должен быть соотнесен с действующими учебниками. Остановимся лишь на отдельных вопросах методики изучения начал анализа и сформулируем задания для самостоятельного выполнения.

3.2. Предел числовой последовательности и предел функции в точке

Эти два важнейших понятия начал анализа на наглядно-интуитивном уровне с привлечением графических иллюстраций вводятся в учебнике А. Г. Мордковича. Он формирует представление не только о пределе функции в точке, но и о пределе функции на бесконечности. Запись $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ геометрически интерпретирует как существование у графика функции $y = f(x)$ горизонтальной асимптоты $y = b$; рассматривает процесс остывания нагретого чайника до комнатной температуры, который моделируется с помощью предела на бесконечности. Об этих понятиях говорится и в учебнике Ш. А. Алимова, причем второму пределу дается строгое определение на языке "$\varepsilon - \delta$" с пояснением на примере. В учебниках М.И. Башмакова; А. Н. Колмогорова и др. описывается операция предельного перехода (вместо понятия предела) – нахождение числа L для функции f, которая стремится к нему при x, стремящемся к a, если разность $f(x) - L$ сколь угодно мала. Конечно, это определение проще, чем для понятия предела функции в точке. Нас все равно интересует поведение функции при приближении аргумента к некоторому его значению. Предельный переход ими сразу же применяется при введении производной и непрерывности функции.

Заметим, что операция предельного перехода имеет топологический характер, а не алгебраический. Ситуации, связанные с этой операцией, разнообразны и в каждом случае опираются на «свое» определение предела (предела функции в точке, левого и правого предела, предела функции на бесконечности, предела последовательности и других разновидностей). В геометрии предельный переход используется для целей измерения – длины окружности, площади круга, объема тела и др. Ученикам приходится по-настоящему иметь дело с бесконечными процессами.

Существуют различные равносильные определения понятия предела функции в точке: на языке "$\varepsilon - \delta$" (по Коши), на языке абсолютной погрешности, на языке последовательностей (по Гейне), на языке понятия окрестности (топологическое). В общеобразовательных классах, как показал опыт, учащиеся затрудняются в усвоении любого из определений. Поэтому сущность свойства «функция имеет предел в точке» необходимо разъяснить на наглядно-интуитивном уровне, рассматривая графики функций, иллюстрирующих всевозможные случаи наличия и отсутствия предела в точке. Анализируя графики, учащиеся объясняют, к какому числу стремится (приближается, подходит) значение функции, когда x стремится к указанному числу a, т.е. каков предел $f(x)$ при $x \to a$. В ряде учебников вводится знак $\lim$ – сокращенная запись латинского слова «лимес», в переводе означающего «предел». Запись: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$

учащиеся должны уметь иллюстрировать на графиках, показывать существование пределов вида: $\lim_{x\to 1}(2x+3)=5$, $\lim_{x\to 1}x^2=1$, $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$. Важно обратить внимание учащихся, что в точке $x=a$ функция может быть не определена или принимать любое значение – это не повлияет на существование предела и на его значение.

В методической литературе кроме геометрического подхода описывается и алгебраический, основанный на языке приближенных вычислений. Запись $\lim_{x\to a} f(x)=b$ в этом случае получает смысл: приближенное равенство $f(x)\approx b$ можно получить при $x\approx a$ (и $x\neq a$) с любой степенью точности, которую можно сделать как угодно большой за счет приближения x к a.

Теоремы о пределах (правилах предельного перехода) даются учащимся без доказательства; необходимость их обусловлена дальнейшим использованием в выводе формул дифференцирования.

Задания для самостоятельной работы

- Какое из определений предела числовой последовательности (функции), на ваш взгляд, более приемлемо для классов с углубленным изучением математики?
- Подберите конкретный материал для введения понятия предела числовой последовательности. Какой способ изображения последовательности более нагляден при введении понятия предела?
- Последовательность задана формулой n-го члена $a_n=\frac{n-1}{n}$. Ученику было предложено вычислить ее предел. Он поступил так: $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}(n-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}(n-1)\cdot 0=0$. Прав ли он?
- Охарактеризуйте возможные подходы к введению в старших классах понятия предела функции в точке [9, 10, 22].
- Составьте план урока по введению понятия предела функции в точке индуктивным методом.

3.3. Непрерывность функции

Непрерывность – одно из основных для математического анализа свойств функции; требование непрерывности присутствует в большинстве важнейших теорем анализа. Происхождение этого термина чисто геометрическое – в период зарождения анализа функция считалась непрерывной, если ее график представлял собой непрерывную (сплошную) линию (кривую), которую можно провести, не отрывая карандаш от бумаги. Таким интуитивным понятием непрерывности функции учащиеся широко пользовались при построении графиков в курсе алгебры основной школы. Нанося на координатную плоскость некоторое число точек, они соединяли их плавной линией. И не задумывались, а всегда ли мы можем так поступать. В старших классах и решается эта проблема: прежде построения графика надо выяснить, является ли данная функция непрерывной и дифференцируемой (график не будет содержать угловых точек), а для этого нужно иметь соответствующие определения и алгоритмы.

В некоторых действующих учебниках алгебры вводятся термины «непрерывная функция», «точка разрыва», «разрыв функции», «функция с «выколотой» точкой», которые наглядно иллюстрируются на графиках. В учебниках С. М. Никольского и др. (8-й класс), М. И. Башмакова (9-й класс) говорится, что для непрерывной функции малое изменение аргумента вызывает малое изменение функции.

Понятие непрерывности функции, тесно связанное с понятием предела, сначала рассматривается в точке, а затем на промежутке. Обратившись к графикам функций, которые были предложены учащимся при введении понятия предела функции в точке, необходимо взглянуть на них с другой точки зрения – акцент сделать на понятие непрерывности функции в точке. После анализа графиков можно подвести учащихся к краткому (но вполне строгому) определению: «Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если выполняется соотношение $\lim\limits_{n \to a} f(x) = f(a)$». При работе с определением важно выделить три существенных признака: 1) функция $f(x)$ должна быть определена в точке $x = a$; 2) функция $f(x)$ должна иметь предел в точке $x = a$; 3) предел функции должен быть равен значению функции в точке $x = a$. Затем сообщить ученикам, что точки, в которых нарушается по крайней мере один из признаков, называют точками разрыва функции. Необходимо предложить учащимся для анализа графики функций, имеющих разрывы, включая кусочные. Желательно привести примеры функций $y = [x]$, $y = \{x\}$, $y = \mathrm{sign}\, x$, не являющихся непрерывными на своей области определения.

В учебниках встречаются и другие определения непрерывности функции в точке. Например, в учебнике А. Н. Колмогорова и др. «функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$». При этом малым изменениям аргумента в точке $x = a$ соответствуют малые изменения значений функции при ссылке на операцию предельного перехода. М. И. Башмаков вводит понятие принципа непрерывности, который на языке приращений формулирует так: «Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$». Этот принцип отражает непрерывность элементарных функций во всех точках области их определения, что доказывается в курсах математического анализа.

Существует в методической литературе подход к введению понятия непрерывности функции в точке без обращения к понятию предела на языке $\varepsilon - \delta$ [9].

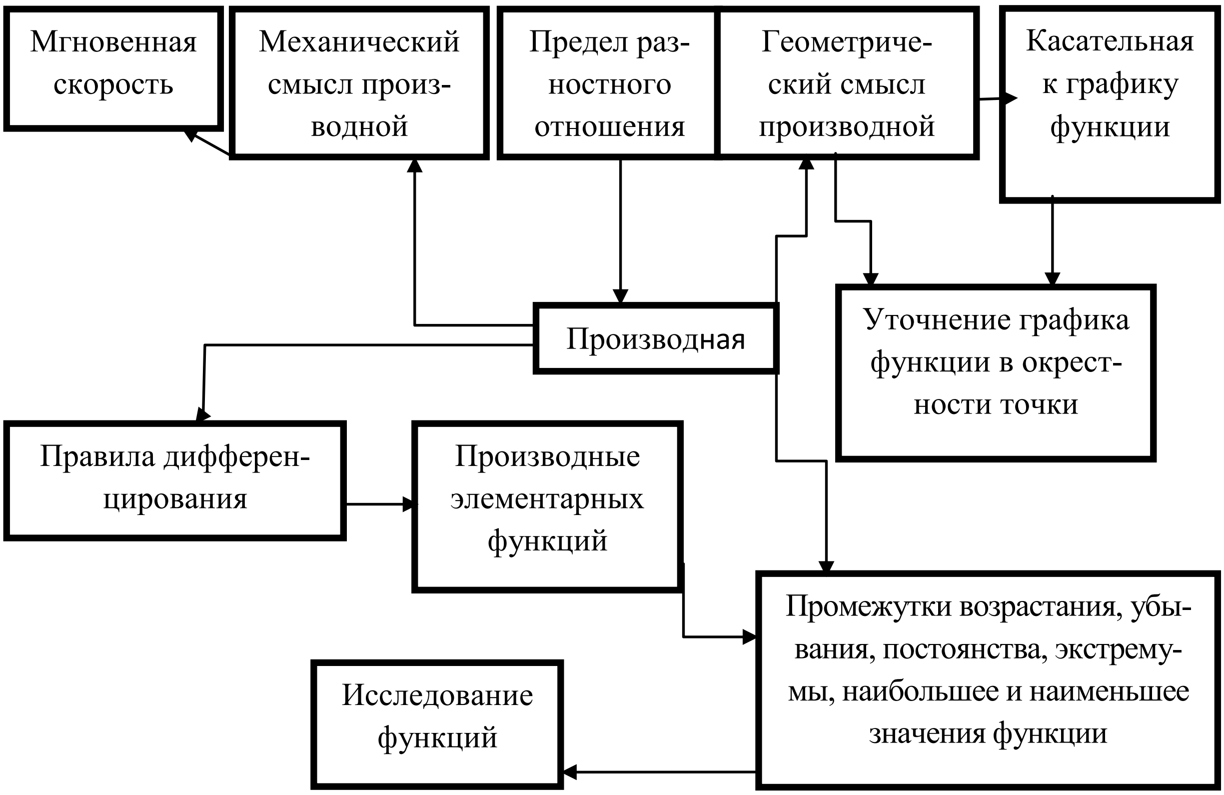
Задания для самостоятельной работы

- Выясните роль и значение понятия непрерывности функции в точке при изучении алгебры и начал анализа в школе.
- Какие свойства непрерывной функции рассматриваются в учебниках и как они используются в дальнейшем? Обратите внимание на свойство, на котором основан метод интервалов.
- В каком из учебников, на ваш взгляд, наиболее удачно изложен материал по теме?
- Спланируйте работу над усвоением определения непрерывности функции в точке в общеобразовательном классе и профильном.
- Можно ли считать такую формулировку определением:
  – Если функция не имеет точек разрыва, то ее называют непрерывной?
  – Если малое изменение аргумента влечет малое изменение функции, то функция называется непрерывной в точке?
- Ознакомьтесь с подходом к понятию непрерывности функции в точке на основе приближенных вычислений по учебнику Н. Я. Виленкина и др.

3.4. Производная и ее применения

Понятие производной функции (или просто производной) – важнейшее понятие математического анализа. Раздел, в котором излагается производная и ее приложения, называется дифференциальным исчислением. Г. В. Дорофеев и др. в учебнике 11-го класса поясняют это название таким образом: «Буква Δ для обозначения приращения выбрана как греческий аналог первой буквы слова «difference» (по-английски и по-французски – разность). Оба приращения (аргумента и функции) являются разностями, а разность указывает на происхождение названия – дифференциальное исчисление». Метод дифференциального исчисления носит общенаучный смысл, ибо производная используется не только в математике, но и в физике, химии, биологии, социологии, экономике и т. д. Ее значение в момент времени – это скорость протекания процесса в данный момент, важнейшая локальная (условная) характеристика процесса. Производная – математическая модель многих реальных ситуаций.

Структурный анализ содержания темы позволяет его понятийный аппарат представить в виде схемы основных понятий и связей между ними, которые необходимы для усвоения учащимися:



Введению понятия производной необходима подготовительная работа, которая нужна для актуализации ранее изученного материала в алгебре (свойства функций), геометрии (секущая, касательная), физике (средняя и мгновенная скорость движения) с последующим уточнением и обогащением. В ряде учебников алгебры основной школы уже вводятся понятия приращения аргумента и приращения функции, дается их геометрическая иллюстрация на графике конкретной функции, чаще всего $y = x^2$, и на основе этих понятий даже определяется возрастание и убывание функции. Теперь важно перенести усвоенные знания на общий вид и закрепить их. Если материал не изучался, то необходимо качественно это сделать, т. к. он лежит в основе формирования понятия производной. При этом следует подчеркнуть, что приращение Δx рассматривается относительно фиксированной точки x и оно может быть как положительным, так и отрицательным числом, а приращение функции может быть и нулем.

М. И. Башмаков считает необходимым уже в 9-м классе провести беседу с учащимися о дифференциале, производной рациональной функции и познакомить их с алгоритмом нахождения производной, который применялся еще в XVIII в. без обращения к пределу. В приведенной беседе он формулирует две классические задачи, приведшие к открытию дифференциального исчисления: о проведении касательной к кривой (Г. Лейбниц) и о мгновенной скорости механического движения (И. Ньютон), и намечает способ их решения.

Остановимся на основных этапах в изучении темы. Опыт показал, что лучше всего понятие производной начинать формировать на основе вышеназванных двух исторических задач, процесс решения которых и приведет учащихся к «открытию» новой математической модели. Наиболее доступна для учащихся вторая задача, известная из физики, поэтому ее лучше рассмотреть первой. Физическая задача может быть сформулирована в общем виде, задав закон движения формулой $s = s(t)$, или для конкретного вида движения, например свободного падения ($s = \frac{gt^2}{2}$). Геометрическая задача также может быть предложена двояко: в качестве кривой может быть выбран график конкретной функции, например $y = x^2$, или произвольно начерченный. Обращается внимание на сам процесс и результат при решении обеих задач, различных по содержанию. Можно ход решения оформить в виде таблицы, чтобы нагляднее были видны действия, совершаемые учащимися, и легче сравнивать их последовательность. В учебнике А. Н. Колмогорова и др. приводится обобщающая задача – вычисление скорости изменения любой функции в точке, которая также сводится к необходимости вычислить предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Его и называют значением производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$ или y'. Символическая запись определения может различаться, но является эквивалентной: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Определение можно сформулировать и в словесной форме. Учащиеся должны уяснить алгоритмичность определения и суметь выделить действия, входящие в алгоритм по вычислению производной функции в заданной точке. Полезен анализ определения, позволяющий выделить существенные признаки понятия. Кроме того необходимо обратить внимание на следующие факты: x_0 – фиксированная точка, функция определена в ней и ее окрестности, значение $x_0 + \Delta x$ принадлежит той же окрестности, существует предел разностного отношения – при соблюдении этих условий можно ставить задачу нахождения производной в точке; производная функции в точке, если она существует, является числом.

Затем необходимо ввести понятие производной на промежутке: если в каждой точке некоторого промежутка функция имеет производную, то она называется дифференцируемой на данном промежутке. Производная на промежутке, в свою очередь, сама является функцией, которая «произведена» из данной функции $(f(x) \to f'(x))$. Дифференцирование, или нахождение производной, – новая операция в математике, связанная с предельным переходом. Следует заметить, что не всякая функция, даже непрерывная, имеет производную в каждой точке области определения. В качестве примера можно привести две функции $y = |x|$ и $y = \sqrt[3]{x^2}$, которые в точке $x = 0$ непрерывны, но недифференцируемы. На графиках в точке $x = 0$ («точка стыка») имеется заострение («углы»). После такого замечания уместно сообщить учащимся, что все изучаемые в школе элементарные функции имеют производные при всех допустимых значениях аргумента.

Обратившись к двум задачам, приводящим к понятию производной, можно объяснить физический (механический) и геометрический смысл ее (или говоря иначе, истолковать производную с физической и геометрической точек зрения). Коротко физический смысл формулируют так: производная есть скорость движения материальной точки в определенный момент времени, а геометрический – производная есть угловой коэффициент касательной к графику функции. Последнее истолкование дает возможность сделать вывод о дифференцируемости и недифференцируемости функции по её графику. Положительный ответ основывается на существовании касательной в точке, и при этом она не должна быть перпендикулярной оси абсцисс. В некоторых учебниках производная истолковывается на языке приближенного равенства: $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ при $\Delta x \to 0$.

Следующий этап в изучении темы связан с вычислениями производных. Учащиеся знакомятся с теоремами (правилами) дифференцирования, формулами, позволяющими находить производные ряда простейших функций (табличные производные), доказательство которых производится исходя из определения, а точнее алгоритма отыскания производной, которое следует из него. Знакомство с формулами производных других функций происходит по мере их изучения. Опыт показывает, что учащиеся легко осваивают технику дифференцирования. Однако это может заслонить от них смысл производной и широкие возможности ее практического применения. Необходимо разнообразить упражнения. При выполнении упражнений необходимо следить, чтобы учащиеся не путали формулы дифференцирования (для конкретных функций) и правила дифференцирования (упрощающие процесс нахождения производной суммы, произведения, частного функций). При вычислении производных (например, $y = x^5 + \cos x$) сначала применяют одно из правил, а затем – нужную формулу. Заметим, что в общеобразовательных классах не предусмотрено изучение известных из анализа правил дифференцирования сложной и обратной функции. Однако в учебнике А. Н. Колмогорова и др. имеется соответствующее правило для сложной функции, в учебниках М. И. Башмакова; А. Г. Мордковича рассматривается лишь частный случай – производная функции $y = f(kx + b)$, в учебнике Г. В. Дорофеева и др. предложены оба правила в общем виде.

Наконец, обратимся к вопросу о приложениях производной. Среди них важное место занимает исследование функций и построение графиков. В этом блоке рассматриваются необходимые теоремы и задачный материал, помогающий их усвоению, а затем применению при исследовании функций. Общая схема исследования функции, введенная ранее, предполагала нахождение промежутков возрастания и убывания, точек максимума и минимума (экстремумов), наибольшего и наименьшего значений на отрезке элементарными приемами, которые имели частный и порой искусственный характер, что затрудняло их применение к более сложным функциям. Дифференциальное исчисление дает достаточно простой и универсальный метод решения, что должны почувствовать учащиеся на конкретных примерах. Теоретическая часть – основа метода – во всех учебниках одинакова. Различие наблюдается в подходе к вопросу доказательства теорем: доказательства не проводятся, а дается их геометрическая или физическая интерпретация; показывается схема доказательств; формула Лагранжа дается без доказательства, а на ее основе выполняются доказательства. Выбор подхода за учителем. Важно, чтобы учитель сообщил ученикам, что формальные доказательства всех теорем даются в вузовском курсе математического анализа, а в школе порой ограничиваются лишь наглядными представлениями и правдоподобными рассуждениями. Необходимо отмечать практическую значимость теорем в исследовании функций, что создает мотивационный настрой при изучении материала.

Для общеобразовательных классов важно подвести учащихся к формулированию теорем с использованием геометрического смысла производной и записи $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. Целесообразно предложить учащимся график функции, имеющий разный характер монотонности, и расположение касательных в точках, принадлежащих к промежуткам возрастания и убывания, а также в точках экстремума. Анализируя расположение касательных по отношению к положительному направлению оси абсцисс (точнее, какие углы образуют эти касательные с осью абсцисс) и определяя тем самым знаки значений производной, учащиеся подводятся к самостоятельному формулированию нужных признаков. Удобно пользоваться упрощенными формулировками теорем в виде:

1. Если $\frac{f'(x)>0}{f'(x)<0}$ в каждой точке интервала J, то функция f $\frac{\text{возрастает}}{\text{убывает}}$ на J (достаточные признаки).

2. В точке экстремума $f'(x_0) = 0$ (необходимый признак).

3. Если в точке x_0 производная меняет знак с $\frac{+}{-}$ на $\frac{-}{+}$, то x_0 есть точка $\frac{\text{максимума}}{\text{минимума}}$ (достаточные признаки).

Сформулированные теоремы позволяют установить связь между знаком производной и поведением функции во внутренних точках области определения и на ее промежутках. При решении задач для наглядности запись оформляется кратко в виде таблицы с выделением x, $f'(x)$, $f(x)$, $f_{\text{экстр.}}$ и использованием соответствующей символики и обозначений. Необходимо обратить внимание учащихся на следующие факты: характер поведения функции в области ее определения может изменяться не только в точках, в которых производная равна нулю, но и в точках, в которых она не существует; если функция непрерывна в каком-либо из концов промежутка монотонности, то эту точку присоединяют к нему; экстремумы функции надо искать в точках, в которых производная равна нулю или не существует; производная при переходе через критическую точку, вообще говоря, может и не менять знака – в этой точке нет ни минимума, ни максимума (точка перегиба); характер точки экстремума удобно определять на основе условия монотонности; при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке сравнивают значения функции в точках экстремума с ее значениями на концах отрезка.

Задания для самостоятельной работы

- Проанализируйте содержание темы в различных учебниках алгебры и начал анализа. Сравните общеобразовательный подход с профильным.
- Подготовьте вступительную беседу к изучению понятия производной с презентацией.
- Сравните содержание материала в учебниках для общеобразовательных классов и профильных различного направления.
- Как показать ученикам необходимость введения определения касательной к кривой в данной на ней точке? Какова связь определений касательной к кривой и окружности?
- Как вы считаете, нужна ли теорема Лагранжа в школьном курсе? Если нужна, то ответ обоснуйте.
- Используется ли алгоритмический подход при изучении темы? Если да, то приведите примеры алгоритмов.
- Проанализируйте систему задач на применение производной. Приведите задачи различные по предметному содержанию (физические, химические, геометрические, экономические и т. п.).

- Как решается задача на составление уравнения касательной в различных учебниках?
- Существует ли различие между понятием график движения и траектория движения?
- Предложите методику изучения одного из признаков монотонности функции с помощью индуктивного метода.
- Составьте методическую схему изучения теоремы Ферма. Какова ее роль в школьном обучении?
- Какова роль теоремы Вейерштрасса в школьном курсе начал анализа? Во всех ли учебниках она имеется?
- Предложите методику решения текстовой задачи из учебника на оптимизацию.
- Найдите в учебниках упражнения: по графику функции построить график производной, по графику производной восстановить функцию, распределить графики парами «функция – производная».

3.5. Первообразная и интеграл

В заголовок пункта вынесены два важных понятия математического анализа, которые тесно взаимосвязаны. Связь между ними открыли Г. Лейбниц и И. Ньютон и она выражена в известной формуле, носящей их имена. Раздел, в котором излагаются названные понятия и их приложения, называется интегральным исчислением, которое возникло из потребности вычислять площади любых фигур и поверхностей, а также объемы произвольных тел. Предистория интегрального исчисления восходит к глубокой древности, еще к «методу исчерпывания» Архимеда (III в. до н. э.). Появление интегрального исчисления, как и связанного с ним дифференциального исчисления, в настоящем смысле этого слова относится к последней трети XVII в. Его основная операция интегрирования – нахождение первообразной по данной функции – является обратной к операции дифференцирования – нахождение производной для данной функции. Первообразная – значит первоначальная, т. е. та, из которой образуется (путем дифференцирования) функция f (первичный образ). В термине «первообразная» иногда делают ударение на втором звуке «о», опираясь на коренное слово первообраз, но в соответствии со словарем русского языка ударение ставится на звуке «а», о чем необходимо сообщить учащимся. Термин «интеграл» имеет латинское происхождение и переводится как «приводить в прежнее состояние, восстанавливать (операция интегрирования «восстанавливает» функцию, дифференцированием которой получена подинтегральная функция) или объединять в одно целое (нахождение площади фигуры по ее частям)». Заметим, что в анализе рассматриваются разные виды интегралов. Назовем лишь два: неопределенный интеграл от функции f, который обозначает множество всех первообразных данной функции f; определенный интеграл от функции f, в котором указаны пределы интегрирования и он напрямую связан с площадью криволинейной трапеции («настоящий» интеграл, вполне определенный). Вычисление первообразных названо интегрированием, поскольку это есть вычисление неопределенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница устанавливает связь между поиском первообразной и измерением площадей.

В учебниках встречается различный порядок изложения вопросов интегрального исчисления, особенно это касается первообразной и определенного интеграла (сначала первообразная, затем интеграл или наоборот); разные формулировки определений понятий, например, определенный интеграл как приращение первообразной, как предел интегральных сумм (так он исторически возник), как площадь криволинейной трапеции (или подграфика) – все три названные характеристики интеграла включил в свой учебник М. И. Башмаков, считая их основой для его приложений; в определение первообразной не все авторы включают промежуток, на котором рассматривается первообразная; не во всех учебниках встречается весь перечень понятий темы, например, не используется неопределенный интеграл, а определенный интеграл называется просто интегралом и др. Учебники отличаются и объемом материала, предложенного для изучения. В общеобразовательных классах он сведен к минимуму и предполагает ознакомление только с понятием первообразной и применением ее к вычислению площади криволинейной трапеции, опираясь на интуицию и опыт учащихся. Существенную помощь окажет использование метода аналогии, его использование обусловлено тем, что операции дифференцирования и интегрирования «похоже» устроены (обе операции взаимно обратные). В методической литературе даже существует рекомендация совместного изучения этих операций.

Изучение первообразной целесообразно начать с беседы о взаимно обратных операциях (действиях), уже известных учащимся, а затем на нескольких примерах вспомнить операцию дифференцирования – для функции $f(x)$ найти ее производную $f'(x)$ и поставить вопрос об обратной операции – по производной $f'(x)$ найти (восстановить) функцию $f(x)$, которую дифференцировали, воспользовавшись соответствующими табличными записями, и выяснить как проверить. Ввести терминологию и символику без штрихов (введя запись $F(x)$ для первообразной), тогда будем иметь: $F(x)$ первообразная для данной функции $f(x)$. Дается определение с использованием обозначений $F'(x) = f(x)$. Эту символическую запись можно прочесть поразному: $f(x)$ – производная функции $F(x)$ или $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$. Следует обратить внимание учащихся, что в отличие от производной, которая сначала определялась в точке, а затем на промежутке, первообразная сразу определяется на промежутке. Следующий шаг состоит в том, чтобы показать, что операция интегрирования в отличие от операции дифференцирования не однозначна – существует бесконечное множество (семейство) первообразных для данной функции, отличающихся друг от друга на величину действительной константы C. Например, первообразной для функции $y = 3x^2$ будет любая функция вида $y = x^3 + C$, так как $(x^3 + C)' = 3x^2$.

Первообразная функции есть функция, поэтому можно говорить о ее аналитическом и графическом способах задания. В учебниках такие графики обычно даются в абстрактном виде. Поэтому лучше привести конкретный пример для графиков первообразных функции $y = x^2$ – их графики получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси ординат. Для функции можно выделить конкретную первообразную $F(x)$, график которой проходит через данную точку. В этом примере первообразная $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$ пройдет через точку $(3; 7)$.

Для отыскания первообразной заданной функции нужно хорошо знать таблицу производных и уметь применять ее в обратной последовательности. Можно составить таблицу первообразных для возможных простых случаев. В общем случае операция интегрирования заметно сложнее операции дифференцирования: вычисление производных – задача алгоритмическая, а вычисление первообразных (неопределенное интегрирование) иногда называют предметом «высокого искусства». Продифференцировать можно любую элементарную функцию и в результате получить элементарную функцию, но не для всякой элементарной функции первообразная есть элементарная функция (например, $y = \frac{\sin x}{x}$, $y = \frac{1}{\ln x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$); в ряде случаев первообразную даже нельзя вычислить. При отыскании первообразных, как и при нахождении производных, используются правила, но только три: для первообразной суммы, о постоянном множителе, первообразной для функции $y = f(kx + b)$. Сопоставление правил интегрирования и дифференцирования значительно облегчает процесс их усвоения и запоминания. Правил о произведении и частном нет для отыскания первообразной.

При вычислении первообразной желательно предлагать задачи с физическим содержанием (например, на свободное падение тел), которые могут предшествовать введению понятия в целях его мотивации.

Центральным вопросом в изучении темы является вычисление площадей плоских фигур. Основной фигурой здесь считается криволинейная трапеция. Приступая к изучению этого материала, целесообразно повторить с учащимися из курса геометрии понятие площади, вычисление площадей фигур, ограниченных отрезками прямых (треугольник, параллелограмм, трапеция и т. д.) и окружностью или ее частью (круг, сектор, сегмент). Практика требует умения вычислять площади фигур, ограниченных криволинейным контуром (произвольными кривыми линиями). Возникает проблема: «Как вычислять площади фигур?» Предварительно у учеников должно быть создано представление о криволинейной трапеции как о фигуре, ограниченной в координатной плоскости графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a, b]$ знака функции $f(x)$, отрезком $[a, b]$ и прямыми $x = a,\ x = b$. Это достигается с помощью рассмотрения различных рисунков криволинейных трапеций, подчеркивающих их особенности расположения на координатной плоскости. Среди них должны быть и частные случаи, когда графиком является прямая или отрезок, длины перпендикулярных отрезков к оси абсцисс равны нулю. Привести контрпримеры. После этого уже можно перейти к задаче на нахождение площади криволинейной трапеции с помощью понятия первообразной. Задачу можно вначале сформулировать для конкретной функции (например, $y = x^2$ или $y = x^2 + 2$) и решить ее, а затем решить ее в общем виде для функции $y = f(x)$, которая и приведет нас к формуле $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$. В учебниках чаще всего сразу же рассматривают задачу в общем виде и формулируют ее в виде теоремы, доказательство которой не считается обязательным для всех учащихся. Методическая разработка теоремы приведена в книге Н. М. Рогановского [19, с. 168 – 171].

После знакомства с теоремой она применяется в упражнениях на вычисление площадей. Необходимо обращать внимание учащихся на правильное выполнение рисунка криволинейной трапеции в соответствии с условием задачи, выделяя ее штриховкой. Наглядная иллюстрация помогает понять, а затем решить задачу. В ответе следует указывать размерность в квадратных единицах.

Другой подход к задаче вычисления площади криволинейной трапеции (не связанный с первообразной) приводит к понятию определенного интеграла (или просто интеграла) и его геометрической иллюстрации (интеграл – площадь). Решение задачи сводится к замене криволинейной трапеции так называемой «ступенчатой фигурой», состоящей из n прямоугольников, площадь (S_n) которой является приближенным значением площади (S) криволинейной трапеции: $S \approx S_n$. Сумму S_n в некоторых учебниках называют интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Число, к которому стремится S_n при $n \to \infty$, называют интегралом и обозначают $\int_a^b f(x)dx$. Ответом к задаче будет запись $S = \int_a^b f(x)dx$.

При сравнении двух формул, полученных при различных подходах к решению задачи о площади криволинейной трапеции, получается новая, называемая формулой Ньютона – Лейбница. Вычисляя по ней интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку. Необходимо помнить, что формула справедлива для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$. Важно отработать в первую очередь навыки применения формулы к решению несложных упражнений на вычисление интегралов и площадей криволинейных трапеций. Постепенно идет усложнение упражнений на вычисление площадей по направлениям, изложенным в учебном пособии [9, с. 222 – 224]. Кроме задач на вычисление площадей в учебнике А.Н. Колмогорова и др. рассматривается вычисление объемов тел, исходя из наглядных соображений. Выводится формула объема тела $V = \int_a^b S(x)dx$, где $S(x)$ – площадь любого сечения, перпендикулярного некоторой оси OX. Эта формула верна для всех тел, встречающихся в «школьной» геометрии. Предлагаются и другие конкретные задачи, решая которые учащиеся знакомятся с применением интеграла в физике (работа переменной силы, центр масс, сила давления жидкости, электрический заряд и др.). Практические приложения интеграла целесообразно рассмотреть на уроке-семинаре.

Задания для самостоятельной работы

- Разработайте методику изучения в 11-м классе понятия первообразной.
- Разработайте сценарий деловой игры по введению понятия первообразной.
- Сравните различные варианты изучения материала, связанного с первообразной.
- Проанализируйте систему упражнений по изучению первообразной в различных учебниках.
- Предложите методику работы над теоремой о площади криволинейной трапеции. Очевиден ли факт существования площади криволинейной трапеции?
- Объясните целесообразность вводимой символики в теме «Первообразная и ее применения».

- Какую функцию необходимо взять, чтобы криволинейная трапеция превратилась в обычную? Вычислите ее площадь, используя формулу Ньютона – Лейбница.
- Сравните уровни знаний и умений, которые должны быть сформулированы у учащихся при изучении первообразной в классах разного профиля.
- Охарактеризуйте различные подходы к введению определенного интеграла [9, 10].
- Какова система задач на вычисление площадей плоских фигур с помощью интеграла? Носят ли они алгоритмический характер?
- Разработайте план урока-семинара по приложениям интеграла в физике.
- Насколько широко используется интеграл в школьном курсе физики?
- Предложите исторический материал для беседы о создании интегрального исчисления, в виде презентации.
- Выскажите свои соображения по поводу включения основ интегрального исчисления в курс алгебры и начал анализа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Усвоение содержания теоретических основ методики обучения школьников функциональному материалу и формирование соответствующих профессиональных умений происходит во время разнообразных видов аудиторных занятий и самостоятельной познавательной деятельности студентов. В пособие включены вопросы и задания, помогающие студентам наиболее эффективно организовать самостоятельную деятельность, в основу которой нами положен личностно-ориентированный подход, создающий условия для саморазвития и самовыражения личности будущего учителя. Эта практическая часть пособия позволяет устанавливать важные связи между математическим содержанием школьного учения о числовых функциях и выбором соответствующих методов (приемов), средств и форм организации деятельности учащихся, необходимых для усвоения современного содержания и обеспечивающих развитие познавательной активности школьников.

В пособии рассматривается общекультурное, мировоззренческое и прикладное значение избранной содержательно-методической линии, которая позволяет знакомить учащихся с идеей всеобщей связи, идеей непрерывности, бесконечности, интерполяции (приближения); способствует развитию функционального мышления, отвечающего за виденье зависимостей между изменяющимися объектами различной природы. Именно понятие функции отражает эти зависимости и владение ее свойствами помогает изучению закономерностей окружающего мира. Начала математического анализа, включенные в ФГОС, расширяют эти возможности школьников. Систематическое изучение функции как математической модели реальных процессов и явлений (инструмента познания) элементарными средствами алгебры и с привлечением аппарата математического анализа составляет основную задачу школьного курса математики, что нашло отражение в данном пособии для студентов, необходимость появления которого была обоснована ранее.

Автор надеется, что пособие поможет студентам более качественно на современном уровне развития школьного математического образования, психолого-педагогических и методических знаний овладеть методико-математической и методико-процессуальной основами изучения функциональной линии в основной и старшей школе с соблюдением организационного принципа преемственности, последовательности и систематичности, а затем успешно применить их в реальном учебно-воспитательном процессе в ходе педагогической практики.

В заключение еще раз обратим внимание на вынесенное в начало пособия высказывание, которое всегда должны помнить будущие учителя. Оно принадлежит немецкому математику Феликсу Клейну (1849 – 1925), стоявшему у истоков международного движения за реформу содержания и преподавания математики в средней школе, в частности, считавшего понятие функции – центральным в курсе, знакомство с которым должно происходить очень рано на наглядной основе с использованием графических иллюстраций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра и начала анализа в 9 – 10 классах : пособие для учителя / Л. О. Денищева [и др.]. – М. : Просвещение,1988.– С.10 – 180.

2. *Башмаков, М. И.* Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / М. И. Башмаков. – М. : Просвещение, 2007. – С.131 – 134, 139 – 146. – ISBN 5-09-014123-1.

3. *Башмаков, М. И.* Математика. 10 класс (базовый уровень) : кн. для учителя : метод. пособие / М. И. Башмаков. – М. : Академия, 2008. – С. 85 – 110. – ISBN 978-5-7695-5328-8.

4. Вопросы преподавания алгебры и начал анализа в средней школе : сб. ст. / сост. Е. Г. Глаголева, О. С. Ивашев-Мусатов. – М. : Просвещение, 1980. – С. 165 – 229.

5. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / Ю. М. Колягин [и др.]. – М. : Просвещение, 2004. – С.80 – 89, 160 – 179, 217 – 265. – ISBN 5-09-013101-7.

6. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей пед. ин-тов / Е. И. Лященко [и др.] ; под. ред. Е. И. Лященко.– М. : Просвещение, 1988. – 223 с. – ISBN 5-09-000600-8.

7. *Макарычев, Ю. Н.* Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, С. Б. Суворова. – М. : Просвещение, 2006. –С. 18 – 30, 147 – 158, 172 – 194. – ISBN 5-09-015463-5.

8. Математика. 7 класс : метод. пособие к учеб. комплекту под ред. Г. В. Дорофеева «Математика 7» / С. Н. Кадилова, Т. В. Колесникова, А. Н. Тернопол ; под ред. С. Б. Суворовой. – М. : Дрофа, 2000. – С. 92 – 98. – ISBN 5-7107-3816-6.

9. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. специ-

альностям / А. Я. Блох [и др.] ; сост. В. И. Мищин. − М. : Просвещение, 1987. – С. 43 – 44, 151 – 227.

10. Методика преподавания математики в средней школе: частные методики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю. М. Колягин [и др.] − М. : Просвещение, 1977. − С.111 – 145, 285 – 369.

11. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. − М. : Дрофа, 2005. − С. 256 – 267, 370 – 395. − ISBN 5-7107-7414-6.

12. *Мордкович, А. Г.* Алгебра. 7 – 9 класс : метод. пособие для учителя / А. Г. Мордкович. − М. : Мнемозина, 2000. − С. 8 – 35, 47 – 55, 69 – 74, 110 – 119. − ISBN 5-87441-170-4.

13. *Мордкович, А. Г.* Алгебра и начала анализа. 10 – 11 класс : метод. пособие для учителя / А. Г. Мордкович. − М. : Мнемозина, 2000. – С. 4 – 59. – ISBN 5-87441-172-0.

14. *Муравин, Г. К.* Алгебра и начала анализа. 10 класс : метод. пособие к учеб. / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. − М. : Дрофа, 2010. – 240 с. – ISBN 978-5-358-07775-1.

15. *Муравин, Г. К.* Алгебра и начала анализа. 11класс : метод. пособие к учеб. / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – М. : Дрофа, 2008.− 302 с. − ISBN 978-5-358-01762-7.

16. Планирование обязательных результатов обучения математике / Л. О. Денищева [и др.] ; сост. В. В. Фирсов. − М. : Просвещение, 1989. − С. 39 – 40, 62 – 68, 84 – 93.

17. Преподавание алгебры в 6 – 8 классах : сб. ст. / сост.: Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. − М. : Просвещение,1980. − С. 63 – 76, 208 – 213, 219 – 221.

18. Примерные программы по учебным предметам. Математика. 5 – 9 классы : проект. − М. : Просвещение, 2011. − 64 с. – (Стандарты второго поколения). − ISBN 978-5-09-025245-4.

19. *Рогановский, Н. М.* Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие / Н. М. Рогановский. − Минск : Высш. шк.,1990. − С. 139 – 175.

20. *Саранцев, Г. И.* Методика преподавания геометрии в девятилетней школе : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Г. И. Саранцев. − Саранск : Изд-во СГПИ,1992. − С. 106 – 118.

21. Сборник нормативных документов. Математика / сост.: Э. Д. Днепров, А. Г. Аркадьев. − М. : Дрофа, 2008. − 128 с. − ISBN 978-5-358 -04767-9.

22. *Столяр, А. А.* Педагогика математики : учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А. А. Столяр. − Минск : Высш. шк., 1986. − С. 259 – 280, 296 – 330.

23. Теоретические основы обучения математике в средней школе : учеб. пособие / Т. А. Иванова [и др.] ; под ред. проф. Т. А. Ивановой. − Н. Новгород : НГПУ, 2003. − 320 с. − ISBN 5-85219-087-Х.

24. Федеральный перечень учебников математики на 2013/14 учебный год // Российская газета. – 2013. – 8 февр. – № 27.

25. *Федорова, Н. Е.* Изучение алгебры и начал анализа в 10 – 11 классах : кн. для учителя / Н. Е. Федорова, М. В . Ткачева. − М. : Просвещение, 2004. − С. 10 – 12, 19 – 24, 37 – 41, 51 – 60, 69 – 79, 125 – 200. − ISBN 5-09-013333-6.

26. Фундаментальное ядро содержания общего образования / под ред. В. В. Козлова, А. М. Кондакова. − М. : Просвещение, 2011. − 59 с. − (Стандарты второго поколения). − ISBN 978-5-09-025234-8.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПОКРОВСКИЙ Владимир Павлович

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ:
ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 18.04.14.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 8,37. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.