

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

М. С. Беспалов В. А. Скляренко

Дискретные функции Уолша и их приложения

Учебное пособие



Владимир 2014

УДК 517.587

ББК 22.16

Б53

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Исследование операций»
Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ)
В. Н. Малоземов

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Алгебра и геометрия»
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых
С. Г. Танкеев

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Беспалов, М. С.

Б53 Дискретные функции Уолша и их приложения : учеб. пособие / М. С. Беспалов, В. А. Скляренко ; Владим. гос. ун-т. им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. — Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014. — 68 с.
ISBN 978-5-9984-0445-0

Приводятся определения, свойства и применение различных вариантов упорядочения дискретных функций Уолша.

Может быть использовано студентами, бакалаврами, магистрантами и аспирантами математических, информационных и радио-технических специальностей, занимающимися вопросами передачи, приема и анализа цифровых сигналов в информационных системах.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 15. Библиогр.: 32 назв.

УДК 517.587

ББК 22.16

ISBN 978-5-9984-0445-0

© ВлГУ, 2014

Предисловие

В данном пособии приведены элементы дискретного двоичного гармонического анализа, который находит широкое применение при цифровой обработке информации. Математическую основу курса цифровой обработки сигналов (ЦОС) составляет дискретный гармонический анализ. В большинстве случаев изложение курса ЦОС базируется на дискретном преобразовании Фурье. В последнее время наметилась тенденция (см., например, учебник [12]) более активного использования дискретных преобразований Уолша. Сфера применений дискретного гармонического анализа обширна и постоянно расширяется, о чем можно судить по книге Л. А. Залмансона [13], в которой приведено порядка тысячи ссылок в основном на работы прикладного характера.

Постоянно расширяющийся интерес специалистов различных областей науки к объектам дискретного двоичного гармонического анализа порождает потребность в преподавании этого курса в учебных заведениях технического профиля. Учебных пособий именно по дискретному двоичному гармоническому анализу, по-видимому, нет. В какой-то степени этот пробел восполняла деятельность семинара по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию «DHA & SAGD» при Санкт-Петербургском государственном университете, материалы которого размещены на сайте <<http://www.dha.spb.ru>>. По инициативе руководителя семинара проф. В. Н. Малоземова подготовлено учебное пособие «Основы дискретного гармонического анализа» [17] (первое издание в 2003 г.). Ранее в качестве учебного пособия по курсу дискретного гармонического анализа выбирали книги [3, 21, 13]. Изложение основ двоичного гармонического анализа приведено в кни-

гах [11, 30]. В этих двух направлениях немного разные подходы к изложению материала и разные обозначения для идентичных понятий.

В книге [13], которую можно считать обзором прикладных результатов, отмечается неустоявшаяся, часто противоречивая терминология в этой области. В частности, термин *дискретные функции Уолша* разные авторы применяют по-разному. Принято рассматривать три нумерации для дискретных функций Уолша: Пэли, Уолша и Адамара. Одни [3, 21] применяют три названия: дискретные функции Пэли, дискретные функции Уолша, дискретные функции Адамара (часто опуская слово дискретные) и соответственно обозначают их: Pal, Wal, Had. Некоторые авторы [11, 30] основной нумерацией считает нумерацию Пэли, а другие [17] нумерацию Адамара и термин *дискретные функции Уолша* применяют для дискретных функций Уолша выбранной нумерации. Будем использовать этот термин как обобщающий не только для этих трех нумераций, но и для других возможных нумераций. Более того, в пособии предлагается определение дискретных функций Уолша, не привязанное к какой-либо нумерации.

В данном пособии предлагается новый подход к изложению основ дискретного двоичного гармонического анализа, удачно сочетающий как прикладной [3, 21, 9, 13, 17], так и математический [11, 30] подходы. Предпринята попытка выработки компромиссных обозначений, позволяющих в полной мере использовать достижения обоих направлений. На основе данного пособия можно построить курс по математическим методам цифровой обработки сигналов для студентов как инженерных специальностей, так и математических. Поэтому и выбран способ изложения материала без приведения доказательств лемм, утверждений, теорем и следствий. Благодаря этому в небольшом по объему пособии размещен большой объем информации. Главная задача при построении курса для математиков, желающих заниматься научными исследованиями в близких областях, — научить студентов работать с объектами дискретного двоичного гармонического анализа. Поэтому в качестве набора задач для математиков предлагается восстановить все пропущенные доказательства. Примеры некоторых доказательств приведены в книгах [7, 17, 21], статьях [5, 6] (доступны через сайт www.mathnet.ru) и на сайте www.dha.spb.ru. При построении курса для прикладников, которым доказательства, как правило,

не интересны, предлагается набор простых (в первой главе) упражнений в конце каждой главы. Эти упражнения сгруппированы по пунктам и снабжены двойной нумерацией, где первый номер соответствует номеру пункта главы.

Первая глава и начало второй главы пособия написаны М. С. Беспаловым, конец второй главы — В. А. Скляренко.

Авторы надеются, что материалы пособия будут интересны и полезны студентам, аспирантам и научным работникам, занимающимся вопросами обработки и анализа цифровых сигналов и компьютерной математикой, и поспособствуют расширению применений новых теоретических результатов в решении прикладных задач.

Данная работа выполнена в рамках НИР по госзаданию «Наука» (Регистрационные номера: 8.3303.2011 и 8.3534.2011 от 23.11.2011), а также в рамках государственного задания Минобрнауки России (задание № 2014/13, код проекта: 3037).

Глава 1

Дискретные функции Уолша

1.1. Две нумерации дискретных функций Уолша

1. Рассмотрим две основные нумерации дискретных функций Уолша. Произвольное целое неотрицательное n допускает единственное двоичное разложение

$$n = n_1 2^0 + n_2 2^1 + \dots + n_m 2^{m-1}, \quad (1.1)$$

где $n_i \in \{0, 1\}$.

Обычно работают в классе сигналов конечной длины, равной степени двойки. Длину сигнала заранее фиксируют $N = 2^m$. При этом показатель степени m будем называть *уровнем* сигнала.

При работе с сигналами переменного уровня для любого натурального n число слагаемых m в формуле (1.1) определяется условием $2^{m-1} \leq n < 2^m$, и тогда $n_m = 1$ в (1.1). Без уточнения числа слагаемых m вместо (1.1) применяют форму записи

$$n = \sum_{l=1}^{\infty} n_l 2^{l-1}, \quad (1.2)$$

где подразумевается конечное число ненулевых слагаемых.

Если фиксируем уровень m рассматриваемых сигналов, то число возможных дискретных функций Уолша равно 2^m . Считаем, что номер функции n и аргумент k пробегают множество $\{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}$, что договоримся обозначать $n, k \in 0 : 2^m - 1$. Набор аргументов можно было бы расширить, полагая 2^m периодом.

Определение 1.1. *Дискретной функцией Уолша в нумерации Адамара уровня m с номером n называется (рис. 1.1)*

$$h_n\{m\}(k) = h_n(k) = (-1)^{\sum_{l=1}^m n_l k_l} = \prod_{l=1}^m (-1)^{n_l k_l}, \quad (1.3)$$

где номер n и аргумент k представлены в виде (1.1).

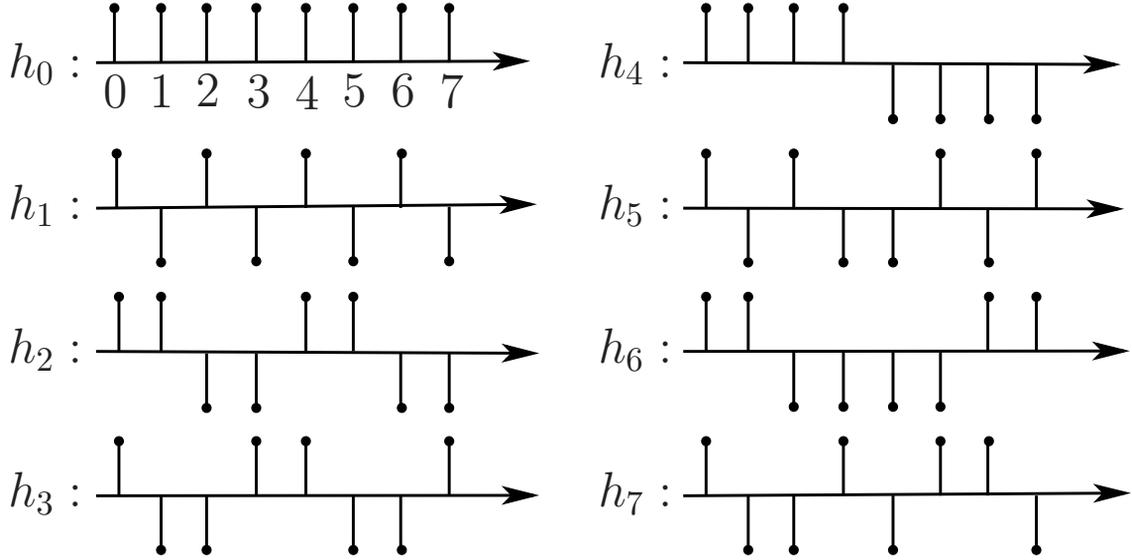


Рис. 1.1. Графики дискретных функций Уолша уровня 3 в нумерации Адамара

Аналогичное определение в случае другой основной нумерации.

Определение 1.2. Дискретной функцией Уолша в нумерации Пэли уровня m с номером n называется

$$w_n\{m\}(k) = w_n(k) = (-1)^{\sum_{l=1}^m n_l k_{m-l+1}} = \prod_{l=1}^m (-1)^{n_l k_{m-l+1}}, \quad (1.4)$$

где номер n и аргумент k представлены в виде (1.1).

2. Взглянем на эти два определения по-другому. Полагаем, что уровень m фиксирован. Тогда любому $n \in 0 : 2^m - 1$ через разложение (1.1) ставится в соответствие: *прямой двоичный код*

$$\tilde{n} = n_m n_{m-1} \dots n_2 n_1, \quad (1.5)$$

который также является записью числа n в двоичной системе счисления; и *обратный двоичный код*

$$\text{rev } \tilde{n} = n_1 n_2 \dots n_{m-1} n_m, \quad (1.6)$$

который воспринимаем как *реверс* прямого кода. Код (1.6) служит прямым кодом некоторого числа, восстановленного по формуле (1.1),

$$rev(n) = n_m 2^0 + n_{m-1} 2^1 + \dots + n_1 2^{m-1} = \sum_{k=1}^m n_{m-k+1} 2^{k-1}. \quad (1.7)$$

Эта формула задает перестановку rev (взаимно-однозначное отображение) на множестве $\{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$, пример которой дан на рис. 1.2.

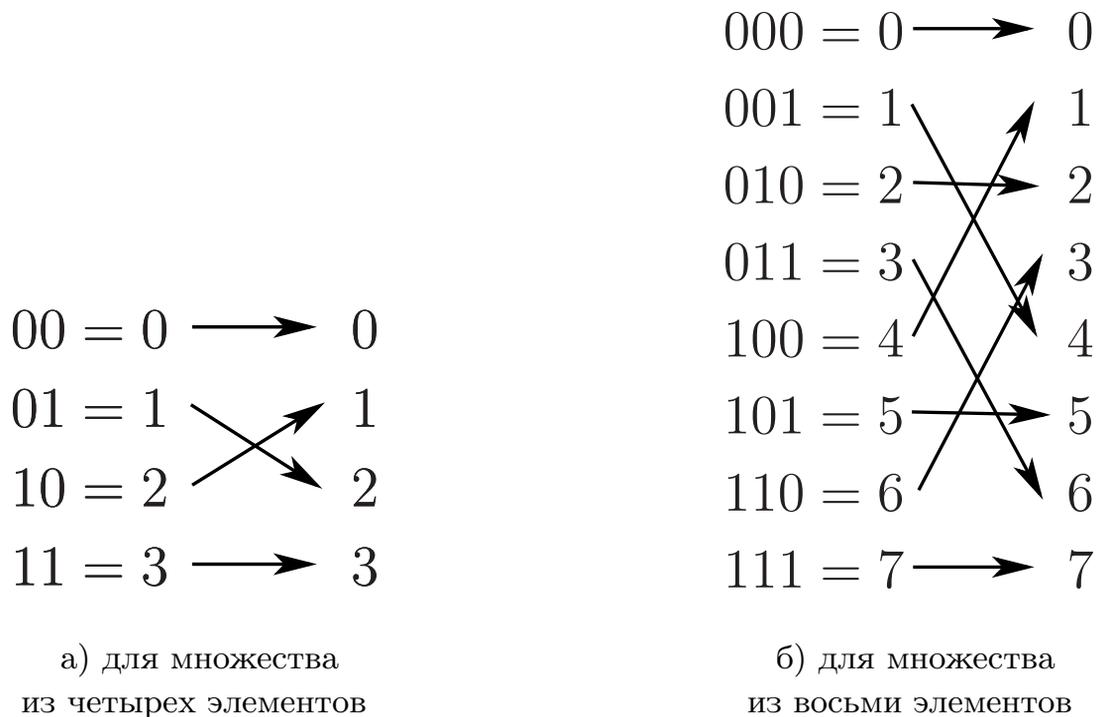


Рис. 1.2. Отображение реверс

Определение 1.3. Элементы множества $\{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$ упорядочены в *реверсном порядке*, если они расположены в порядке возрастания $rev(n)$.

Введем новую бинарную операцию над числами n и k через скалярное произведение двоичных кодов вида (1.5)

$$(n, k) = (\tilde{n}, \tilde{k}) = \sum_{l=1}^m n_l k_l. \quad (1.8)$$

Сумму (1.8) можно рассматривать по модулю 2. В этом случае формула (1.8) совпадает с определением скалярного произведения над полем \mathbf{F}_2 бинарных векторов (рассмотренных в п. 1.6).

Лемма 1.1. *Формулы (1.3) и (1.4) представимы соответственно в виде*

$$h_n(k) = (-1)^{(n,k)}, \quad w_n(k) = (-1)^{(n,rev(k))}.$$

3. Возможен принципиально другой подход к определению дискретных функций Уолша в нумерации Адамара, когда уровень не фиксируется и функция рассматривается как периодическая, а не на конечном интервале. В этом случае аналогом двоичного кода служит *финитная последовательность*, полученная через разложение (1.2)

$$\check{n} = (n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, n_m, 0, 0, \dots). \quad (1.9)$$

На множестве последовательностей (1.9) рассматривается скалярное произведение, аналогичное (1.8). Тогда приходим к следующему определению, которое не будем выделять, так как им мы не будем пользоваться.

Дискретной функцией Уолша в нумерации Адамара с номером n называется функция целочисленного неотрицательного аргумента k , которая для n, k вида (1.2) определяется

$$\tau_n(k) = \prod_{l=1}^{\infty} (-1)^{n_l k_l} = (-1)^{\sum_{l=1}^{\infty} n_l k_l} = (-1)^{(\check{n}, \check{k})}. \quad (1.10)$$

Так как единый реверс, определенный для всех финитных последовательностей (1.9), невозможен, то нет аналогичного (1.10) определения дискретных функций Уолша в случае нумерации Пэли, которая является основной для функций Уолша непрерывного аргумента.

1.2. Построение дискретных функций Уолша через «непрерывные» функции Уолша

1. Многие авторы основным способом определения дискретных функций Уолша считают построение их через функции Уолша непрерывного аргумента, которым посвящена методическая разработка [8].

Для любого $x \in [0, 1)$ возьмем его двоичное разложение

$$x = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x_l}{2^l}, \quad x_l \in \{0, 1\}. \quad (1.11)$$

Полагаем, что для двоично-рациональных чисел выбирается представление с конечным числом единиц в числителях суммы (1.11). С учетом данного замечания представление (1.11) единственно для любого $x \in [0, 1)$.

Определение 1.4. *Функцией Уолша в нумерации Пэли с номером n , представленным в виде (1.1), называется*

$$\psi_n(x) = (-1)^{\sum_{l=1}^m n_l x_l} = \prod_{l=1}^m (-1)^{n_l x_l}, \quad (1.12)$$

где аргумент $x \in [0, 1)$ представлен в виде (1.11).

Приведено определение функции Уолша непрерывного аргумента в нумерации Пэли, отличающееся от предложенного в [8].

Утверждение 1.1. При любом выборе уровня m дискретной функции для всех $n, k \in 0 : 2^m - 1$ имеем

$$w_n\{m\}(k) = \psi_n(x), \quad \text{если } x \in \Delta_m^k = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right). \quad (1.13)$$

2. Полученное соответствие позволяет некоторые основные свойства функций Уолша (1.12) перенести на дискретные функции Уолша (1.13). Так как набор аргументов любой из дискретных функций Уолша уровня m упорядочен, то с ней удобнее работать как с вектором значений дискретной функции Уолша методами линейной алгебры. Для вектора значений дискретной функции Уолша (чтобы избежать громоздкой формы записи) будем использовать прежний термин *дискретная функция Уолша* и прежнее обозначение без указаний аргумента.

Утверждение 1.2. Дискретные функции Уолша одного уровня m ортогональны. А именно, *скалярное произведение* различных дискретных функций Уолша (как 2^m -мерных векторов) равно нулю

$$\langle w_n, w_s \rangle = \sum_{k=0}^{2^m-1} w_n(k) \cdot w_s(k) = 0, \quad n \neq s;$$

а скалярный квадрат равен числу координат вектора (длине сигнала): $\langle w_n, w_n \rangle = 2^m$.

1.3. Различные виды произведения матриц

Основная форма представления дискретных функций Уолша – матричная, то есть в виде *дискретных преобразований Уолша*. Для дискретных преобразований Уолша (ДПУ) рассматриваются те же нумерации, что и для дискретных функций Уолша. При работе с основными нумерациями ДПУ встречаются разные виды произведения матриц, на определении и свойствах которых мы и остановимся в этом разделе.

Применяемая техника вычислений будет основана на работе с блочными матрицами [10]. В частности, любую матрицу можно рассматривать как строку, состоящую из столбцов, или как столбец из строк. В данном разделе верхним и нижним индексам будем придавать следующий смысл, обозначая: A_i – строку с номером i матрицы A , A^j – столбец с номером j матрицы A . Степень матрицы будем обозначать немного по-другому.

Как принято при цифровой обработке информации и в информатике, нумерацию элементов матрицы будем начинать с нуля, а не с единицы.

1. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПО АДАМАРУ

Определение 1.5. Если матрицы A и B одинакового размера, то их *произведением по Адамару* называется матрица того же размера

$$C = A \bullet B,$$

элементы которой вычисляются по правилу произведения соответствующих элементов $C[i, j] = A[i, j] \cdot B[i, j]$.

Утверждение 1.3. Произведение по Адамару коммутативно

$$A \bullet B = B \bullet A,$$

ассоциативно

$$(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C),$$

дистрибутивно относительно сложения матриц

$$(A + B) \bullet C = (A \bullet C) + (B \bullet C).$$

В качестве нейтрального элемента $A^{0\bullet}$ выбирается матрица, состоящая из единиц. Если все элементы матрицы A ненулевые, то существует обратная по Адамару матрица $A^{-1\bullet}$.

Следствие 1.1. *Из ассоциативности вытекает корректность определения степени по Адамару*

$$A^{2\bullet} = A \bullet A, \quad A^{3\bullet} = A \bullet A^{2\bullet}, \dots$$

2. ОБЫЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Замечание 1.1. Полагаем определенным скалярное произведение двух векторов одинаковой размерности, которое вычисляется как сумма произведений соответствующих элементов, что в матричном виде записывается как произведение строки на столбец.

Определение 1.6. Если матрица A размера $n \times m$, а матрица B размера $m \times k$, то их *произведением* называется матрица $C = A \cdot B$ размера $n \times k$, элементы которой вычисляются по правилу произведения соответствующей строки первой матрицы на соответствующий столбец второй

$$C[i, j] = A_i \cdot B^j.$$

Согласно этому определению произведение столбца (матрицы размера $n \times 1$) на строку (на матрицу размера $1 \times m$) есть матрица размера $n \times m$, элементы которой получены поэлементным перемножением.

Утверждение 1.4. Если матрица A размера $n \times m$, а матрица B размера $m \times k$, то их произведением называется матрица $C = A \cdot B$ размера $n \times k$, равная сумме произведений столбцов первой матрицы на строки второй с теми же номерами

$$C = \sum_{j=0}^{m-1} A^j \cdot B_j. \quad (1.14)$$

Заметим, что в определении приводится поэлементное вычисление матрицы произведения, что применяется при непосредственном ручном перемножении. Напротив, в утверждении 1.4 предлагается формула (1.14) вычисления сразу всех элементов, что разумно применять при компьютерных вычислениях с использованием методов параллельного вычисления, а также в некоторых случаях аналитических исследований матриц. В качестве иллюстрации справедливости утверждения приведем пример.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} (0 \quad -2) + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} (-1 \quad 3) + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} (1 \quad 0) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -5 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следствие 1.2. *Каждая i -я строка произведения матриц есть линейная комбинация строк второго сомножителя с коэффициентами, указанными в i -й строке первого.*

Каждый j -й столбец произведения матриц есть линейная комбинация столбцов первого сомножителя с коэффициентами, указанными в j -м столбце второго.

Подробнее подход, приведенный в следствии, анализируется в [18].

Утверждение 1.5. Произведение матриц не коммутативно, зато ассоциативно

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

и дистрибутивно относительно сложения матриц

$$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C), \quad C \cdot (A + B) = (C \cdot A) + (C \cdot B).$$

В качестве нейтрального элемента выбирается единичная матрица E соответствующего размера. Если матрица A квадратная и невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1} .

Следствие 1.3. *Из ассоциативности вытекает корректность определения степени на классе квадратных матриц*

$$A^{2\cdot} = A \cdot A, \quad A^{3\cdot} = A \cdot A^{2\cdot}, \dots$$

3. КРОНЕКЕРОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Кронекерово произведение матриц служит примером тензорного (прямого) произведения матриц, при проведении которого размер матрицы существенно увеличивается.

Определение 1.7. Если матрица A размера¹ $(n+1) \times m$, а матрица B размера $s \times k$, то их *кронекерово произведение* $A \otimes B$ есть матрица размера $(n+1)s \times mk$, которую запишем как блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} A[0,0] \cdot B & A[0,1] \cdot B & \dots & A[0,m-1] \cdot B \\ A[1,0] \cdot B & A[1,1] \cdot B & \dots & A[1,m-1] \cdot B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A[n,0] \cdot B & A[n,1] \cdot B & \dots & A[n,m-1] \cdot B \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1.6. Кронекерово произведение матриц не коммутативно, зато ассоциативно

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

и дистрибутивно относительно сложения матриц

¹Число строк взято в таком виде только для того, чтоб запись смотрелась красивее.

$$(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C), \quad C \otimes (A + B) = (C \otimes A) + (C \otimes B).$$

В качестве нейтрального элемента выбирается тривиальная матрица порядка 1 вида (1). Обратная матрица относительно кронекерова произведения не вводится.

Следствие 1.4. Из ассоциативности вытекает корректность определения кронекеровой степени, которую короче назовем k -степенью,

$$A^{2\otimes} = A \otimes A, \quad A^{3\otimes} = A \otimes A^{2\otimes}, \dots$$

Следствие 1.5. Если A — столбец (матрица размера $n \times 1$), а B — строка (матрица размера $1 \times m$), то

$$A \otimes B = A \cdot B.$$

При построении быстрых алгоритмов главную роль играет следующее основное свойство кронекерова произведения.

Утверждение 1.7. Для матриц размеров, при котором возможно указанное произведение, верно

$$(A \cdot C) \otimes (B \cdot D) = (A \otimes B) \cdot (C \otimes D).$$

Следствие 1.6. Для матриц допустимых размеров k -степень произведения равна произведению k -степеней

$$(A \cdot C)^{p\otimes} = A^{p\otimes} \cdot C^{p\otimes}.$$

Утверждение 1.8. Если A размера $n \times m$, а B размера $s \times k$, то:

$$(A \otimes B)_{is+j} = A_i \otimes B_j,$$

(строка с номером $is + j$ кронекерова произведения равна кронекерову произведению i -й строки первого сомножителя на j -ю строку второго);

$$(A \otimes B)^{ik+j} = A^i \otimes B^j.$$

4. НОВЫЙ ВАРИАНТ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Другим примером тензорного (прямого) произведения матриц служит операция, введенная в [7, 26].

Определение 1.8. Если матрица A размера $n \times m$, а матрица B размера $s \times k$, то их b -произведение $A \otimes B$ есть матрица размера $ns \times mk$, которую запишем как следующую блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} A^0 \cdot B_0 & A^1 \cdot B_0 & \cdots & A^{m-1} \cdot B_0 \\ A^0 \cdot B_1 & A^1 \cdot B_1 & \cdots & A^{m-1} \cdot B_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^0 \cdot B_{s-1} & A^1 \cdot B_{s-1} & \cdots & A^{m-1} \cdot B_{s-1} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1.9. Введенное b -произведение матриц не коммутативно, зато ассоциативно

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

и дистрибутивно относительно сложения матриц

$$(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C), \quad C \otimes (A + B) = (C \otimes A) + (C \otimes B).$$

В качестве нейтрального элемента выбирается тривиальная матрица (1). Обратная матрица относительно b -произведения не вводится.

Следствие 1.7. Из ассоциативности вытекает корректность определения b -степени

$$A^{2\otimes} = A \otimes A, \quad A^{3\otimes} = A \otimes A^{2\otimes}, \dots$$

Следствие 1.8. Если A — столбец (матрица размера $n \times 1$), а B — строка (матрица размера $1 \times m$), то

$$A \otimes B = A \cdot B.$$

Следствие 1.9. Формулу (1.14) можно переписать в виде

$$A \cdot B = \sum_{j=0}^{m-1} A^j \otimes B_j = \sum_{j=0}^{m-1} A^j \otimes B_j.$$

Приведем основное свойство b -произведения.

Утверждение 1.10. Для матриц размеров, при котором возможно указанное произведение, верно

$$(A \cdot C) \otimes (B \cdot D) = (A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (B \otimes A) \cdot (C \otimes D).$$

Следствие 1.10. Для матриц допустимых размеров b -степень произведения равна как произведению b -степени на k -степень, так и произведению k -степени на b -степень

$$(A \cdot C)^{p \otimes} = A^{p \otimes} \cdot C^{p \otimes} = A^{p \otimes} \cdot C^{p \otimes}.$$

Утверждение 1.11. Если A размера $n \times m$, а B размера $s \times k$, то:

$$(A \otimes B)_{i+nj} = A_i \otimes B_j,$$

(строка b -произведения с номером $i + nj$ равна кронекерову произведению i -й строки первого сомножителя на j -ю строку второго);

$$(A \otimes B)^{ik+j} = B^j \otimes A^i.$$

Квадратную матрицу P , полученную перестановкой строк единичной матрицы, назовем *пермутатором* (перестановочной матрицей).

Следствие 1.11. Кронекерово произведение можно получить перестановкой строк b -произведения или перестановкой столбцов взятого в другом порядке b -произведения. А именно, существует пермутатор P , что $A \otimes B = P \cdot (A \otimes B)$; существует пермутатор P , что $B \otimes A = (A \otimes B) \cdot P$.

Данное следствие и то, что оба вида тензорного произведения некоммутативны, проиллюстрируем примерами с матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 3a & 3b \\ 2c & 2d & 3c & 3d \\ 4a & 4b & 5a & 5b \\ 4c & 4d & 5c & 5d \end{pmatrix}, \quad B \otimes A = \begin{pmatrix} 2a & 3a & 2b & 3b \\ 4a & 5a & 4b & 5b \\ 2c & 3c & 2d & 3d \\ 4c & 5c & 4d & 5d \end{pmatrix};$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 3a & 3b \\ 4a & 4b & 5a & 5b \\ 2c & 2d & 3c & 3d \\ 4c & 4d & 5c & 5d \end{pmatrix}, \quad B \otimes A = \begin{pmatrix} 2a & 3a & 2b & 3b \\ 2c & 3c & 2d & 3d \\ 4a & 5a & 4b & 5b \\ 4c & 5c & 4d & 5d \end{pmatrix}.$$

1.4. Дискретные преобразования Уолша

1. Если зафиксировать уровень m , то число 2^m возможных дискретных функций Уолша (любой выбранной нумерации) равно числу аргументов 2^m . Как уже отмечалось, основным способом записи всех дискретных функций Уолша фиксированного уровня служит матричная запись, при которой все дискретные функции Уолша данного уровня в соответствии с выбранной нумерацией размещают построчно в квадратную матрицу порядка $N = 2^m$. Данная матрица задает линейный оператор в N -мерном пространстве, который и называется *дискретным преобразованием Уолша*. Соответствующая матрица называется *матрицей дискретного преобразования Уолша* соответствующей нумерации.

Определение 1.9. Матрица порядка $N = 2^m$, в строках которой записаны дискретные функции Уолша уровня m в нумерации Адамара, называется *матрицей дискретного преобразования Уолша уровня m в нумерации Адамара* и обозначается² H_m .

Матрица порядка $N = 2^m$, в строках которой записаны дискретные функции Уолша уровня m в нумерации Пэли называется *матрицей дискретного преобразования Уолша уровня m в нумерации Пэли* и обозначается W_m .

Теорема 1.1. *Матрица дискретного преобразования Уолша уровня m в нумерации Адамара есть m -я кронекерова степень матрицы*

²Обозначение произошло от написания фамилии Hadamard. Так как нумерацию Пэли считаем основной, то более привычное обозначение от фамилии Walsh оставили для матрицы в этой нумерации. В качестве нижнего индекса здесь и далее указываем уровень матрицы. Во многих книгах [3, 13, 21] указывают порядок матриц, что влечет более громоздкие обозначения.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

что записывается

$$H_m = H^{m \otimes}.$$

Следствие 1.12. *Рекуррентная формула вычисления матриц дискретного преобразования Уолша — Адамара: $H_1 = H$,*

$$H_{m+1} = \begin{pmatrix} H_m & H_m \\ H_m & -H_m \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Теорема 1.2. *Матрица дискретного преобразования Уолша уровня m в нумерации Пэли есть m -я b -степень матрицы (1.15)*

$$W_m = H^{m \otimes}.$$

2. Заметим, что матрица (1.15) есть матрица дискретного преобразования Уолша (матрица ДПУ) уровня 1 любой нумерации. Приведем все возможные матрицы ДПУ уровня 2, которые получаются друг из друга перестановкой строк, не затрагивая строку с номером 0.

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица U_2 есть матрица ДПУ в нумерации Уолша³, а матрица B_2 есть матрица ДПУ в нумерации, предложенной в [5]. Матрицы J и J^T не являются симметричными и не соответствуют какой-либо выделенной нумерации.

3. В [8] доказано, что все функции Уолша в нумерации Пэли можно упорядочить по числу перемен знака на интервале $[0, 1)$. С помощью утверждения 1.12 данный результат переносится на дискретные функции Уолша.

Утверждение 1.12. Все дискретные функции Уолша фиксированного уровня можно упорядочить по числу перемен знака.

Определение 1.10. Матрицей дискретного преобразования Уолша в нумерации Уолша называется квадратная матрица, в строках которой дискретные функции Уолша, упорядоченные по числу перемен знака.

Матрицу ДПУ в нумерации Уолша порядка 2^m будем обозначать U_m .

Утверждение 1.13. Матрицы ДПУ-Адамара H_m и ДПУ-Пэли W_m , элементы которых заданы формулами (1.3) и (1.4), а также матрицы ДПУ-Уолша U_m являются симметричными.

4. В книге [21] поставлена задача описания новых (помимо нумераций Адамара, Пэли и Уолша) матриц ДПУ, а также описание и перечисление всех симметричных матриц ДПУ. К решению второй задачи вернемся позднее. А первую задачу уточним. Новой нумерацией ДПУ признается только такая, которая обладает каким-либо характерным свойством.

Утверждение 1.14. Любая дискретная функция Уолша (она же строка матрицы ДПУ) является либо *симметричной* (то есть элементы, симметрично расположенные относительно центра строки, совпадают), либо *антисимметричной* (то есть элементы, симметрично расположенные относительно центра строки, различаются знаком).

³Обозначение выбрали от русского написания фамилии Уолш.

Для описания процесса симметричного отражения применим обозначения и операцию из первого раздела, но не для двоичных кодов, а для строк или столбцов матрицы. Обозначим: A^{rev} матрицу, полученную из матрицы A записью всех ее столбцов в обратном порядке (*реверс столбцов*); A_{rev} матрицу, полученную из матрицы A записью всех ее строк в обратном порядке (*реверс строк*).

Определение 1.11. Матрицей дискретного преобразования Уолша в нумерации, предложенной в [5], уровня $t + 1$ называется

$$B_{m+1} = \begin{pmatrix} B_m & (B_m)^{rev} \\ (B_m)_{rev} & -(B_m)_{rev}^{rev} \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Утверждение 1.15. Все строки верхней половины матрицы B_m симметричны, а строки нижней половины матрицы B_m антисимметричны. Матрица B_m симметрична.

Менее очевидно, чем предыдущее, доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1.16. Строки матрицы (1.17) — перестановка строк матрицы (1.16).

Возможные перестановки ДПУ, естественно, не исчерпываются четырьмя приведенными, но и не ограничиваются только симметричными.

1.5. Линейные перестановки дискретных преобразований Уолша

1. Венгерский математик Ф. Шипш ввел [25] понятие *линейной перестановки системы функций Уолша*. Перенесем это понятие на случай дискретных функций Уолша уровня t . Дискретные функции Уолша полученной нумерации будем обозначать $v_k = v_k\{t\}$ и записывать в виде строк матрицы дискретного преобразования Уолша (ДПУ) $V = V_t$ уровня t .

Определение 1.12. Матрицей линейной перестановки дискретного преобразования Уолша называется матрица V , в строках которой записаны дискретные функции Уолша $w_k = w_k\{m\}$, упорядоченные по следующему правилу построения по пачкам: $v_0 = w_0$; в качестве начальной для пачки (она же образующая для пачки) дискретной функции v_{2^n} выбирается любая дискретная функция Уолша $w_l = w_l\{m\}$, отличная от ранее построенных $\{v_0, v_1, \dots, v_{2^n-1}\}$. Остальные строки пачки строятся по правилу

$$v_{2^n+k} = v_{2^n} \bullet v_k, \quad \text{где } k < 2^n. \quad (1.18)$$

Замечание 1.2. Строки матрицы есть ничто иное, как векторы. Поэтому с ними работаем как с векторами, хотя и продолжаем называть их (дискретными) функциями. При работе с функциями вынуждены указывать аргументы в (1.18), представляя ее в виде $v_{2^n+k}(s) = v_{2^n}(s) \cdot v_k(s)$. Если же понадобится в формулу еще добавить и указание уровня, то последний вариант записи становится громоздким.

Определение 1.12 служит также определением *линейной перестановки дискретных функций Уолша* фиксированного уровня.

2. Произвольная линейная перестановка дискретных функций Уолша (лпДФУ) однозначно определяется набором своих образующих $\{v_{2^n}\}_{n=0}^{m-1}$.

Дискретные функции Уолша в нумерации Пэли принято определять по формуле (1.13) через функции Уолша — Пэли, для которых роль образующих играют (см. [8]) функции Радемахера. По аналогии введем *дискретные функции Радемахера*

$$r_n = w_{2^n},$$

которые согласно утверждению 1.1 не зависят от выбора уровня. Тогда все образующие функции лпДФУ удобно выражать через дискретные функции Радемахера.

В частности, образующими для дискретных функций Уолша в нумерации Пэли служат дискретные функции Радемахера в прямом порядке $\{r_0, r_1, \dots, r_{m-1}\}$.

Утверждение 1.17. Образующими для дискретных функций Уолша в нумерации Адамара фиксированного уровня m служат дискретные функции Радемахера, взятые в обратном порядке $\{r_{m-1}, \dots, r_1, r_0\}$.

Утверждение 1.18. Образующими для дискретных функций Уолша в нумерации Уолша служат

$$u_1 = r_0, \quad u_{2^n} = r_{n-1} \bullet r_n \quad \text{при } n > 0. \quad (1.19)$$

Утверждение 1.19. Образующими для дискретных функций Уолша в новой нумерации, предложенной в [5], (строк матрицы B_m) фиксированного уровня m служат:

$$b_1 = r_{m-1} \bullet r_{m-2}, \quad b_{2^n} = r_{m-n} \bullet r_{m-n-2} \quad \text{при } n \in 1 : m-2, \quad b_{2^{m-1}} = r_1.$$

Следствие 1.13. Так как матрицы H_m , W_m , U_m , B_m симметричны, то тот же набор дискретных функций Уолша является образующим для столбцов этих матриц.

Во многих книгах [13, 17, 21] существенная роль отводится переводу номеров из одной системы в другую. Переход от нумерации Пэли к нумерации Уолша (1.19) осуществляется с помощью перестановки по коду Грея, а к нумерации Адамара — реверсным кодом.

3. Основной нумерацией как для дискретных, так и для функций непрерывного аргумента считаем нумерацию Пэли. Образующие для приведенных нумераций ДПУ выразим через дискретные функции Уолша — Пэли и укажем номера полученных образующих:

нумерация Пэли — 1, 2, 4, 8, ..., 2^{m-1} ;

нумерация Адамара — 2^{m-1} , 2^{m-2} , ..., 4, 2, 1;

нумерация Уолша — 1, 3, 6, 12, ..., $3 \cdot 2^{m-2}$;

новая нумерация (при $m > 2$) — $3 \cdot 2^{m-2}$, $5 \cdot 2^{m-2}$, ..., $5 \cdot 2$, 5, 2.

Упорядоченный набор этих номеров назовем *десятичным кодовым словом* нумерации. Кодовые слова удобнее представлять в двоичной системе счисления и записывать в виде *кодовой матрицы*. Укажем кодовые матрицы всех ДПУ уровня 2, приведенных в п. 1.4:

$$K(H_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K(W_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K(U_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K(B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K(J) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K(J^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Номера образующих записаны построчно сверху вниз, в каждой строке номер в двоичной системе счисления (простой код номера дискретной функции Уолша—Пэли).

Отметим, что в качестве кодовых матриц перечислены все возможные невырожденные бинарные матрицы второго порядка.

1.6. Бинарные векторы и матрицы

1. *Бинарными матрицами* называются [15] матрицы над полем \mathbf{F}_2 , то есть с элементами 0, 1. В [16] эти матрицы названы *булевыми*. Можно применять и это название, но помнить, что часто в качестве булевых матриц предлагаются матрицы с элементами из другого двухбуквенного алфавита.

Строки бинарной матрицы есть *бинарные векторы*. Набор бинарных векторов одинаковой длины считается *линейно зависимым* (над полем \mathbf{F}_2), если в нем возможно выделение поднабора таких векторов, что их сумма (покоординатное сложение по модулю 2) дает нулевой вектор.

Замечание 1.3. Сложение в поле $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$ отличается от обычного сложения только тем, что $1 + 1 = 0$. Умножение производится по обычным правилам.

При построении линейной комбинации коэффициенты берутся из этого поля \mathbf{F}_2 : коэффициент 0 означает отсутствие данного слагаемого, а коэффициент 1 — его наличие. Поэтому и рассматриваем поднаборы при анализе возможных линейных комбинаций.

Бинарная матрица называется *невырожденной*, если ее строки линейно независимы над полем \mathbf{F}_2 .

Утверждение 1.20. Если бинарная матрица невырождена, то:

- 1) ее столбцы линейно независимы;
- 2) ее определитель, вычисленный по обычным правилам, равен нечетному числу, а вычисленный по правилам поля \mathbf{F}_2 (то есть по модулю 2), равен 1.

Утверждение 1.21. Число различных невырожденных бинарных матриц порядка m равно

$$(2^m - 1)(2^m - 2)(2^m - 4) \dots (2^m - 2^{m-1}).$$

В частности: $sb(2) = 6$, $sb(3) = 168$, $sb(4) = 20160$, $sb(5) = 9999360$, где $sb(m)$ — число невырожденных бинарных матриц порядка m .

2. В общем случае бинарные векторы и бинарные матрицы есть векторы и матрицы в алфавите из двух элементов. Формы записи этих элементов могут быть разные и операции над ними разные. В предыдущем пункте рассмотрена основная форма записи в случае аддитивного представления бинарных векторов.

Утверждение 1.22. Множество m -мерных бинарных векторов относительно операции \oplus покоординатного сложения по модулю 2 составляет абелеву группу $\mathbb{Z}_2^m = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$. При добавлении внешней операции умножения на элементы поля \mathbf{F}_2 эта группа превращается в m -мерное векторное пространство.

Другое основное представление аддитивной абелевой группы \mathbb{Z}_2^m — мультипликативное. К этому представлению перейдем одновременной заменой элементов по правилу: $1 \rightarrow -1$, $0 \rightarrow 1$, и операции: $\oplus \rightarrow \bullet$.

Утверждение 1.23. Множество m -мерных бинарных векторов в алфавите $\{1, -1\}$ относительно операции \bullet умножения по Адамару составляет мультипликативно представленную абелеву группу, изоморфную аддитивной группе \mathbb{Z}_2^m .

Эту мультипликативно представленную абелеву группу также можно превратить в изоморфное \mathbb{Z}_2^m векторное пространство. В качестве внешней операции рассматривается выделение поднаборов (подмножеств) из всего множества 2^m векторов. Линейной комбинацией считается произведение по Адамару элементов поднабора. Нейтральным элементом служит элемент, состоящий из одних единиц. Линейно независимым объявляется набор, произведение по Адамару любого непустого поднабора которого не дает нейтрального элемента.

Теорема 1.3. Множество дискретных функций Уолша уровня t образует подгруппу мультипликативно представленной абелевой группы \mathbb{Z}_2^N (где $N = 2^m$) с операцией \bullet покомпонентного умножения и нейтральным элементом $h_0\{t\} = (1\ 1\ \dots\ 1\ 1)$, изоморфную абелевой группе \mathbb{Z}_2^m .

3. Поясним смысл раздела про линейно независимые бинарные векторы.

Утверждение 1.24. Требование того, что очередная образующая линейной перестановки ДПУ не встречается среди ранее построенных векторов лДПУ равносильно тому, что прямые коды (1.5) номеров образующих векторов (дискретных функций Уолша) линейно независимы.

Следствие 1.14. Каждая невырожденная бинарная матрица задает матрицу линейной перестановки ДПУ, так как в ее строках закодирован упорядоченный набор образующих.

Следствие 1.15. Число различных матриц линейных перестановок ДПУ уровня t равно

$$(2^m - 1)(2^m - 2)(2^m - 4) \dots (2^m - 2^{m-1}).$$

1.7. Определение дискретных функций Уолша

1. Ранее были приведены определения дискретных функций Уолша четырех нумераций⁴. Как отмечено в предыдущем разделе, для дискретных функций Уолша уровня 3 возможных нумераций ровно 168, в случае уровня 4—более 20 тыс., а уровня 5—почти 10 млн.

Предложим определение дискретных функций Уолша, не привязанное к какой-либо нумерации. Напомним, что продолжаем употреблять термин дискретные функции Уолша для векторов, состоящих из значений этих функций и представленных в виде строк матрицы ДПУ.

⁴Формула (1.17) задает нумерацию не только матрицы ДПУ, но и ее строк, то есть дискретных функций Уолша.

Определение 1.13. Дискретными функциями Уолша уровня один будем называть следующие два вектора (матрицы, состоящие из одной строки) $S = (1 \ 1)$ и $A = (1 \ -1)$. Дискретной функцией Уолша уровня n назовем любое кронекерово произведение матриц S и A в количестве n сомножителей.

Следующие леммы доказывают корректность этого определения. Но сначала отметим, что дискретные функции Уолша уровня 1 любой из рассмотренных нумераций и есть эти векторы

$$h_0\{1\} = w_0\{1\} = u_0\{1\} = b_0\{1\} = S, \quad h_1\{1\} = w_1\{1\} = u_1\{1\} = b_1\{1\} = A.$$

Лемма 1.2. Дискретные функции Уолша в нумерации Пэли разного уровня связаны следующими соотношениями, где $0 \leq j < 2^n$, $l \in \{0, 1\}$,

$$w_{l2^n+j}\{n+1\} = w_j\{n\} \otimes w_l\{1\}, \quad w_{2j+l}\{n+1\} = w_l\{1\} \otimes w_j\{n\}.$$

Лемма 1.3. Дискретные функции Уолша — Адамара разного уровня связаны следующими соотношениями, где $0 \leq j < 2^n$, $l \in \{0, 1\}$,

$$h_{l2^n+j}\{n+1\} = h_l\{1\} \otimes h_j\{n\}, \quad h_{2j+l}\{n+1\} = h_j\{n\} \otimes h_l\{1\}.$$

Лемма 1.4. Дискретные функции Уолша — Уолша разного уровня связаны соотношениями, где $0 \leq j < 2^n$, $l \in \{0, 1\}$,

$$u_j\{n+1\} = u_j\{n\} \otimes S,$$

$$u_{2j+l}\{n+1\} = \begin{cases} S \otimes u_j\{n\}, & \text{если } j+l \text{ четное,} \\ A \otimes u_j\{n\}, & \text{если } j+l \text{ нечетное.} \end{cases}$$

2. Множество дискретных функций Уолша, которые введены с помощью определения 1.13, есть множество бинарных векторов в алфавите $\{S, A\}$ с разделительным значком \otimes в записи слов. Относительно операции \bullet это множество дискретных функций Уолша уровня m образует абелеву группу, изоморфную \mathbb{Z}_2^m . Нейтральным элементом группы служит $w_0\{m\} = S \otimes S \otimes \dots \otimes S$. Действие операции в группе иллюстрирует следующая лемма.

Лемма 1.5. Если u, v есть дискретные функции Уолша одинакового уровня, то

$$(A \otimes u) \bullet (A \otimes v) = (S \otimes u) \bullet (S \otimes v) = S \otimes (u \bullet v),$$

$$(A \otimes u) \bullet (S \otimes v) = (S \otimes u) \bullet (A \otimes v) = A \otimes (u \bullet v).$$

Утверждение 1.25. Образующими элементами в абелевой группе \mathbb{Z}_2^m , представленной в алфавите $\{S, A\}$ с разделительным значком \otimes относительно операции \bullet , служат дискретные функции Радемахера.

Дискретной функцией Радемахера называем кронекерово произведение векторов S и A , в котором сомножитель A присутствует один раз:

$$r_0 = w_1 = A \otimes S \otimes S \otimes \dots \otimes S, \quad r_1 = w_2 = S \otimes A \otimes S \otimes \dots \otimes S,$$

$$r_2 = w_4 = S \otimes S \otimes A \otimes S \otimes S \dots \otimes S, \dots$$

Число сомножителей равно уровню дискретной функции Радемахера.

Существует два лексикографических порядка записи всех слов в фиксированном алфавите: слева направо и справа налево. Лексикографические порядки записи слов в алфавите $\{S, A\}$ с разделительным значком \otimes соответствуют дискретным функциям Уолша в порядке Пэли и Адамара (с дискретными функциями Радемахера в качестве образующих).

Утверждение 1.26. Образующие линейной перестановки дискретных функций Уолша являются также образующими абелевой группы \mathbb{Z}_2^m , которую можно рассматривать как группу слов в алфавите $\{S, A\}$ с разделительным значком \otimes относительно операции \bullet .

1.8. Упражнения

Первая цифра в номере упражнения соответствует номеру пункта.

1.1. Запишите все 16 векторов, с номерами $n \in 0 : 15$, которые являются дискретными функциями Уолша в нумерации Адамара $h_n\{4\}$ уровня 4.

1.2. Запишите все 16 векторов, которые являются дискретными функциями Уолша в нумерации Пэли $w_n\{4\}$ уровня 4.

1.3. Приведите перестановку реверс на множестве $\{0, 1, \dots, 15\}$.

1.4. Докажите, что при любом заданном m отображение rev (реверс) на множестве $M_m = \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$ биективно.

1.5. Сколько элементов множества $M_m = \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$ при отображении реверс остается на месте.

1.6. Найдите обратное отображение к отображению реверс.

1.7. Обозначим rev_m отображение реверс на множестве M_m . Выразите отображение rev_{m+1} на множестве M_{m+1} через отображение rev_m .

2.1. Докажите эквивалентность определения 1.4 определениям функций Уолша — Пэли, приведенным в [8], через функции Радемахера.

2.2. Формулу (1.13) можно рассматривать как формулу перевода дискретных функций Уолша в нумерации Пэли w_n в функции Уолша $\psi_n(x)$. По аналогичному правилу $\mu_n(x) = h_n\{m\}(k)$, если $x \in \Delta_m^k$, постройте функции Уолша $\mu_n(x)$ в случае уровня 2 и отдельно в случае уровня 3. Сравните полученные наборы функций и сделайте вывод о корректности предложенной формулы.

3.1. Вычислите $H^{-1\bullet}$ для матрицы (1.15).

3.2. Проверьте справедливость формулы (1.14) на следующих примерах: вычисление по этой формуле квадрата матрицы H вида (1.15), произведения $B \cdot A$ для матриц, для которых в тексте вычислено произведение $A \cdot B$ по этой формуле.

3.3. С помощью следствия 1.2 покажите, что в случае пермутатора P произведение $P \cdot A$ задает перестановку строк матрицы A , а произведение $A \cdot P$ задает перестановку столбцов матрицы A .

3.4. Вычислите кронекерово произведение $H \otimes E$ и $E \otimes H$, где H вида (1.15), а E — единичная матрица второго порядка.

3.5. Вычислите кронекерову степень $H^{4\otimes}$. Сравните строки и столбцы полученной матрицы с векторами из упражнения 1.1.

3.6. Докажите, что кронекерова степень единичной матрицы есть единичная матрица.

3.7. Вычислите следующие b -степени единичной матрицы второго порядка: $E^{2\otimes}$, $E^{3\otimes}$, $E^{4\otimes}$. Докажите, что каждая из этих матриц задает перестановку реверс.

3.8. Вычислите b -степени $H^{3\otimes}$ и $H^{4\otimes}$. Сравните строки и столбцы полученных матриц с векторами из упражнения 1.2.

3.9. Проверьте равенство $H^{3\otimes} = E^{3\otimes} \cdot H^{3\otimes} = H^{3\otimes} \cdot E^{3\otimes}$ непосредственным вычислением матриц и операций.

4.1. Запишите матрицы U_3, B_3, U_4, B_4 . Являются ли они симметричными?

4.2. Приведите перестановки, переводящие строки W_3 в строки U_3 (код Грея), а также переводящие строки W_3 в строки B_3 . Вычислите для них обратные перестановки. Запишите соответствующие перестановочные матрицы.

4.3. Докажите, что матрица B_m любого уровня m симметрична.

4.4. Покажите примерами для уровней $m = 2, 3$ и 4 , что по формуле, аналогичной (1.14), дискретные функции Уолша в нумерации Уолша, составляющие строки матриц U_2, U_3, U_4 , переводятся в функции Уолша в нумерации Уолша (см. §3 в [8]) с сохранением номера функций независимо от уровня.

5.1. Выпишите все дискретные функции Радемахера уровня 5.

5.2. Приведите кодовые матрицы для матриц H_3, W_3, U_3, B_3 , а также для матриц H_4, W_4, U_4, B_4 и для матриц H_5, W_5, U_5, B_5 .

5.3. Перечисленные в пункте 3 наборы десятичных кодовых слов для четырех основных нумераций произвольного уровня вычислите через формулы утверждений (1.17)–(1.19).

6.1. Приведите примеры вырожденной и невырожденной бинарных матриц порядка 2 и 3.

6.2. Составьте алгоритм и напишите программу проверки квадратной бинарной матрицы произвольного порядка на невырожденность.

6.3. Составьте алгоритм и напишите программу проверки квадратной мультипликативно представленной бинарной матрицы произвольного порядка на невырожденность.

7.1. Запишите все 8 дискретных функций Уолша уровня 3 в символах определения 1.13 (то есть в алфавите S, A, \otimes). Упорядочите эти функции в четырех рассмотренных нумерациях.

7.2. Выполните предыдущее упражнение для дискретных функций Уолша уровня 4.

7.3. Выберите три любые дискретные функции Уолша уровня 4 из предыдущего упражнения и вычислите их попарные произведения.

Глава 2

Применение функций Уолша в математическом моделировании

2.1. Генерирование матриц дискретного преобразования Уолша

1. Естественный вопрос, возникающий при анализе результатов первой главы, такой. Почему среди всех возможных перестановок строк матрицы дискретного преобразования Уолша остановились только на матрицах линейных перестановок ДПУ? Оказывается этот выбор не случаен.

В чем состоит основной принцип цифровой обработки информации? Исходный сигнал в виде вектор-столбца X обрабатывают с помощью ортогонального преобразования с матрицей V и получают сигнал на выходе $Y = VX$. Вычисление Y еще называют операцией *анализа* сигнала. Выходной сигнал Y передается по каналу связи, что принимающей стороне позволяет восстановить исходный сигнал по формуле $X = V^{-1}Y$. Восстановление X еще называют операцией *синтеза* сигнала. Класс ортогональных сигналов характеризуется тем, что¹

$$V \cdot V^T = \alpha E \quad (2.1)$$

произведение матрицы преобразования на транспонированную матрицу отличается от единичной матрицы лишь на числовой множитель. Отсюда вытекает, что $V^{-1} = \frac{1}{\alpha} V^T$. Итак, в классе ортогональных сигналов анализ проводится через строки матрицы преобразования, а синтез через ее столбцы. Чтобы обе операции анализа и синтеза проводились в одном классе дискретных функций Уолша, предлагается новое понятие.

¹В классе комплекснозначных преобразований второй сомножитель в этой формуле V^* , а не V^T . То есть кроме транспонирования добавляют еще комплексное сопряжение.

Определение 2.1. Назовем W -матрицей такую, все строки которой есть различные дискретные функции Уолша, а также все столбцы есть различные дискретные функции Уолша.

Теорема 2.1. Множество матриц линейных перестановок дискретного преобразования Уолша уровня t совпадает с множеством W -матриц уровня t .

2. Доказательство сформулированной теоремы об эквивалентности понятий матрицы лцДПУ и W -матрицы можно провести, опираясь на следующий принцип генерирования W -матриц (или матриц линейных перестановок дискретного преобразования Уолша).

Зададим матрицы C_n размера $n \times 2^n$ рекуррентными соотношениями

$$C_1 = (0 \ 1), \quad C_n = \begin{pmatrix} C_{n-1} & C_{n-1} \\ 0_{n-1} & 1_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где блоки $0_{n-1} = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$, $1_{n-1} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$ есть строки длины 2^{n-1} . В столбцах матрицы C_n вида (2.2) приведены инверсии простых двоичных кодов (1.1) набора чисел от 0 до $2^n - 1$ в естественном порядке. Строки матрицы C_n составляют дискретные функции Радемахера в обратном порядке в аддитивной записи (то есть после замены $1 \rightarrow 0$, $-1 \rightarrow 1$). Произвольная невырожденная бинарная матрица B порядка n задает (где операции в поле \mathbf{F}_2) матрицу

$$A = C_n^T \cdot B \cdot C_n. \quad (2.3)$$

Обратной перекодировкой $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow -1$ всех элементов матрицы A переводим ее в W -матрицу V с кодовой матрицей $B = K(V)$.

3. Опишем обратный процесс выделения кодовой матрицы $K(V)$ из произвольной W -матрицы V . Рассмотрим выборку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ из множества $\{0, 1, \dots, N - 1\}$, которая упорядочена $\alpha_k < \alpha_{k+1}$. Для матрицы A порядка N ее главной подматрицей, выделенной выборкой $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, называется [23] матрица, составленная из элементов строк и столбцов матрицы A , указанных в выборке α .

Утверждение 2.1. Для произвольной W -матрицы V уровня n перекодировкой $1 \rightarrow 0, -1 \rightarrow 1$ получаем бинарную матрицу A , главная подматрица которой, выделенная выборкой $\alpha = (1, 2, 4, \dots, 2^{n-1})$, и будет являться кодовой матрицей $K(V)$ для матрицы V .

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{-1} & \boxed{1} & -1 \\ 1 & \boxed{1} & \boxed{-1} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow 21 \\
 \\
 U_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & \boxed{-1} & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \boxed{1} & \boxed{-1} & -1 & \boxed{-1} & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \boxed{-1} & \boxed{-1} & 1 & \boxed{1} & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow 136
 \end{aligned}$$

Рис. 2.1. Примеры выделения кодовой матрицы и кодового слова для матриц дискретного преобразования Уолша в нумерации Адамара уровня 2 и в нумерации Уолша уровня 3

Поясним это утверждение примерами матриц уровня 2 и 3, показанными на рис. 2.1. В пункте 2 п. 1.4 приведены все 6 возможных матриц ДПУ второго уровня. Выборкой $\alpha = (1, 2)$ из каждой матрицы выделяется главная подматрица, состоящая из четырех центральных элементов. Перекодировкой $1 \rightarrow 0, -1 \rightarrow 1$ эта подматрица превращается в кодовую подматрицу. Все 6 кодовых матриц, полученных этим методом, перечислены в пункте 3 п. 1.5. В случае уровня 3 выделение главной подматрицы осуществляем выборкой $\alpha = (1, 2, 4)$.

Утверждение 2.2. Произвольная W -матрица V симметрична тогда и только тогда, когда симметрична ее кодовая матрица $K(V)$.

2.2. Собственные подпространства симметричных матриц дискретного преобразования Уолша

1. Для произвольной симметричной W -матрицы V уровня m соотношение (2.1) переписывается в виде

$$V^2 = 2^m \cdot E. \quad (2.4)$$

Введем в обозначение число $\lambda = \sqrt{2^m}$. Тогда соотношение (2.4) перепишем в виде

$$(V - \lambda E)(V + \lambda E) = 0. \quad (2.5)$$

Теорема 2.2. Числа $\lambda = \sqrt{2^m}$ и $-\lambda = -\sqrt{2^m}$ суть собственные числа любого из операторов ДПУ с симметричной матрицей V уровня m . Столбцы матрицы $V + \lambda E$ есть собственные векторы этого оператора, отвечающие числу λ , а столбцы матрицы $V - \lambda E$ есть собственные векторы этого оператора, отвечающие числу $-\lambda$.

2. Линейная оболочка столбцов матрицы $V + \lambda E$ (то есть все возможные линейные комбинации этих столбцов) составляет *собственное подпространство*, которое обозначим R_+ , так как оно отвечает положительному собственному числу λ . Линейная оболочка столбцов матрицы $V - \lambda E$ составляет собственное подпространство R_- , так как оно отвечает *собственному числу* $-\lambda$. Очевидно, что столбцы каждой из матриц $V + \lambda E$ и $V - \lambda E$ линейно зависимы.

Утверждение 2.3. Первые 2^{m-1} столбцов каждой из двух матриц $H_m + \lambda E$ и $H_m - \lambda E$ (а также каждой из матриц $B_m + \lambda E$ и $B_m - \lambda E$) линейно независимы и составляют *базисы* собственных подпространств R_+ и R_- соответственно.

В случае ДПУ нумераций Пэли и Уолша базисы собственных подпространств находятся сложнее. Приведем одну из формулировок соответствующего утверждения, наиболее употребимую на практике. Напомним, что в определении 1.3 формулой (1.7) введено понятие реверсного порядка.

Утверждение 2.4. Для случая дискретного преобразования Уолша в нумерации Пэли четного уровня $2m$ все 2^{2m} столбцов каждой из матриц $W_{2m} + \lambda E$ и $W_{2m} - \lambda E$ (где $\lambda = 2^m$) разобьем подряд на 2^m групп по 2^m столбцов в каждой, и в каждой из групп упорядочим эти столбцы в реверсном порядке. В базис из собственных векторов пространства R_+ включаем всю начальную группу столбцов матрицы $W_{2m} + \lambda E$ и в базис из собственных векторов пространства R_- включаем $2^m - 1$ начальных столбцов начальной группы матрицы $W_{2m} - \lambda E$ (исключили последний в реверсном порядке столбец). Далее отдельно для каждого подпространства из каждой следующей группы в базис включаем на один вектор меньше, чем из предыдущей группы, оставляя первые в реверсном порядке столбцы группы (пример приведен на рис. 2.2).

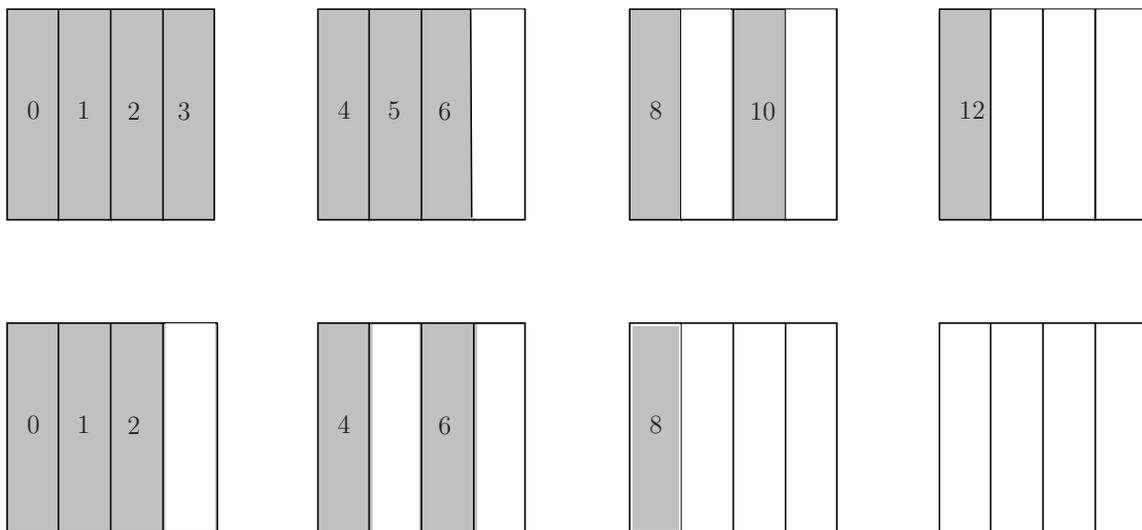


Рис. 2.2. Столбцы матрицы $W_4 + 4E$ (вверху) и $W_4 - 4E$ (внизу), составляющие базис собственных подпространств R_+ и R_-

Теорема 2.3. Если на главной диагонали симметричной кодовой матрицы B порядка t встречается хотя бы одна единица, то размерности собственных подпространств R_+ и R_- оператора ДПУ с матрицей V , построенной по правилу (2.3) с перекодировкой, совпадают и равны 2^{m-1} .

Если же на главной диагонали симметричной кодовой матрицы

В порядка t встречаются только нули, то для оператора ДПУ с матрицей V , построенной по правилу (2.3), размерности собственных подпространств: $\dim R_+ = 2^{m-1} + \sqrt{2^m}$, $\dim R_- = 2^{m-1} - \sqrt{2^m}$.

Следствие 2.1. На главной диагонали невырожденной симметричной бинарной матрицы нечетного порядка встретится хотя бы одна единица.

Следствие 2.2. Для операторов ДПУ в нумерациях Адамара, Уолша и в новой нумерации (1.17), а также в случае ДПУ-Пэли нечетного уровня размерности собственных подпространств R_+ и R_- совпадают.

Для оператора ДПУ в нумерации Пэли четного уровня t размерности собственных подпространств равны

$$\dim R_+ = 2^{m-1} + \sqrt{2^m}, \quad \dim R_- = 2^{m-1} - \sqrt{2^m}.$$

3. Симметричный оператор дискретного преобразования Уолша нормировкой (делением матрицы оператора уровня t на $\lambda = \sqrt{2^m}$) превращается в инволютивный оператор: $J = \frac{1}{\lambda}V$. Из (2.4) вытекает $J^2 = E$, что согласно [10, с. 81] есть определение оператора инволюции. Соотношение (2.5) перейдет в $(J-E)(J+E) = 0$, откуда вытекает, что собственные числа действительного оператора инволюции равны 1 и -1 .

Теорема 2.4. Относительно действительного инволютивного оператора с матрицей J все евклидово пространство разлагается на прямую сумму двух ортогональных собственных подпространств R_+ и R_- таких, что $Jx = x$ для $x \in R_+$ и $Jx = -x$ для $x \in R_-$. Проекторы на собственные подпространства:

$$P_+ = \frac{1}{2}(E + J), \quad P_- = \frac{1}{2}(E - J).$$

В данной теореме сформулировано утверждение о спектральном разложении оператора инволюции (см. спектральное разложение самосопряженного оператора в [14, с. 141]). Оператору инволюции соответствует следующее разложение единицы (представление тождественного оператора в виде суммы проекторов)

$$P_+ + P_- = E$$

и спектральное разложение оператора

$$J = P_+ - P_-.$$

Прямое выражение для матриц ортогональных проекторов, приведенное в теореме 2.4, и обратное соотношение в виде спектрального разложения коротко представляются через матрицу (1.15):

$$\begin{pmatrix} P_+ \\ P_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2}H \cdot \begin{pmatrix} E \\ J \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E \\ J \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} P_+ \\ P_- \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

2.3. Классификация матриц дискретного преобразования Уолша

1. Несимметричный оператор дискретного преобразования Уолша аналогичной нормировкой переводится в *действительный унитарный (ортогональный) оператор*: $J = \frac{1}{\lambda}V$. Ортогональный оператор характеризуется тем, что: $J \cdot J^T = J^T \cdot J = E$. Следовательно, $\det(J) = \pm 1$. Унитарный оператор определяется условием $J^* \cdot J = J \cdot J^* = E$, где операция *сопряжения* для матрицы оператора есть транспонирование матрицы плюс комплексное сопряжение всех элементов.

Характерное свойство ортогонального оператора означает, что все строки (и отдельно все столбцы) матрицы оператора *ортонормированы*: скалярное произведение различных строк равно нулю, а скалярный квадрат равен 1.

Так как в качестве V рассматриваем несимметричные W -матрицы, то столбцы матрицы J повторяют строки матрицы J , но в другом порядке. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.5. Квадрат любой несимметричной нормированной W -матрицы $J = \frac{1}{\lambda}V$ есть перестановочная матрица (полученная перестановкой столбцов единичной матрицы).

Утверждение 2.6. Для несимметричной нормированной W -матрицы $J = \frac{1}{\lambda}V$ существует такое четное число p , что $J^p = E$.

Назовем *периодом* оператора J минимальное положительное p из утверждения 2.6.

Следствие 2.3. *Для любой несимметричной нормированной W -матрицы $J = \frac{1}{\lambda}V$ все ее нечетные степени есть нормированные W -матрицы, а все ее четные степени есть перестановочные матрицы.*

Поэтому все W -матрицы фиксированного уровня можно классифицировать, сгруппировав их нормированные варианты по различным цепочкам нечетных степеней $J, J^3, \dots, J^{(p-1)}$.

2. Приведем подобную классификацию для ДПУ уровня 2. Для матриц будем использовать те обозначения, что предложены в пункте 2 п. 1.4. Нормировка состоит в делении на 2.

Так как $(\frac{1}{2}J)^6 = E, (\frac{1}{2}J)^3 = \frac{1}{2}W_2, (\frac{1}{2}J)^5 = \frac{1}{2}J^T$, то одна цепочка нечетных степеней

$$\frac{1}{2}J, \frac{1}{2}W_2, \frac{1}{2}J^T.$$

Три других цепочки тривиальны: $\frac{1}{2}H_2, \frac{1}{2}U_2$ и $\frac{1}{2}B_2$.

Если бы не было условных обозначений для шести возможных матриц ДПУ уровня 2, то полная запись матриц четвертого порядка была бы громоздкой. Можно было бы ее сократить, перейдя к кодовым матрицам из пункта 3 п. 1.5, указав их в качестве данной цепочки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запись можно еще сократить, если в этих четырех цепочках вместо кодовых матриц использовать кодовые слова:

$$31 \rightarrow 12 \rightarrow 23; \quad 21; \quad 13; \quad 32.$$

Цепочка из трех кодовых слов и три цепочки по одному кодовому слову представляют собой полную квалификацию матриц ДПУ уровня 2 по степеням матриц.

Дополнительно можно было бы добавить перестановочные матрицы, равные второй и четвертой степени матрицы $\frac{1}{2}J$ в развернутом или закодированном виде (в виде перестановки).

3. Приведем подобную классификацию для ДПУ уровня 3.

Все 168 возможных W -матриц уровня 3 разбиваются на группы по периоду. Из них 28 симметричных матриц, 56 матриц периода 6 и 84 матрицы периода 8. Первые 28+56 матриц составляют 28 цепочек по 3 матрицы в каждой цепочке. Остальные 84 матрицы (периода 8) составляют 21 цепочку по 4 матрицы в каждой. Напомним, что в случае уровня 3 нормировочный множитель $\lambda = 2\sqrt{2}$.

Перечислим все 28 цепочек с образующими матрицами периода 6, указывая кодовые слова вместо кодовых матриц:

142–421–214, 425–124–521, 647–136–751, 175–652–327 (симметричные матрицы в этих цепочках соответствуют выделенным нумерациям, то есть H_3 , W_3 , U_3 и B_3 соответственно), 147–432–315, 153–524–217, 157–537–317, 163–756–235, 165–745–325, 172–641–236, 265–764–361, 267–516–371, 274–413–362, 276–673–372, 423–412–431, 436–137–532, 453–273–613, 457–364–713, 461–241–621, 476–345–732, 526–517–534, 543–376–615, 546–261–714, 562–357–634, 574–253–726, 643–672–651, 654–125–742, 746–765–754.

Приведем примеры цепочек, состоящих из матриц периода 8:

126–135–127–134, 173–637–573–237, 143–475–723–215, 354–375–367–346.

Естественно, что данные цепочки получены с помощью компьютерной программы генерирования нормированных W -матриц и вычисления их степеней.

2.4. Проекторы на собственные подпространства несимметричных матриц ДПУ

1. Как отмечено в утверждении 2.6, любая несимметричная нормированная W -матрица $J = \frac{1}{\lambda}V$ обладает четным периодом p , то есть $J^{p \cdot} = E$.

Теорема 2.5. *Проекторы на собственные подпространства нормированной W -матрицы $J = \frac{1}{\lambda}V$ периода p вычисляются по формулам*

$$P_k = \frac{1}{p}(E + \omega^k J + \omega^{2k} J^2 + \dots + \omega^{(p-1)k} J^{(p-1)}), \quad (2.7)$$

где $k \in 0 : p-1$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Степени исходного оператора восстанавливаются по формулам ($l \in 0 : p-1$)

$$J^l = P_0 + \omega^{-l} P_1 + \omega^{-2l} P_2 + \dots + \omega^{-(p-1)l} P_{p-1}. \quad (2.8)$$

Собственное подпространство $R_k = \text{Im}(P_k)$ отвечает собственному числу $\lambda_k = \omega^{-k}$, так как

$$JP_k = P_k J = \omega^{-k} P_k.$$

Собственные подпространства ортогональны: $P_k P_s = 0$ при $k \neq s$.

При $l = 0$ формула (2.8) дает разложению единицы $E = \sum_{k=0}^{p-1} P_k$ (см. [14]), а при $l = 1$ из (2.8) получаем спектральное разложение оператора $J = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k P_k$.

Вычисление проекторов (2.7) через степени оператора J осуществляется по формуле прямого дискретного преобразования Фурье (ДПФ), а формула (2.8) восстановления степеней оператора есть формула обратного ДПФ. Отметим, что (2.6) есть частный случай (2.7) и (2.8).

2. В качестве примера рассмотрим нормированную (сравни с матрицей из пункта 2 п. 1.4) несимметричную матрицу ДПУ уровня 2

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для нее период равен 6. Поэтому $\omega = e^{\frac{\pi i}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$. По формуле (2.7) вычисляем проекторы

$$P_0 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 & \omega^4 \\ 0 & \omega^4 & \omega^2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 0 & \omega^4 & 1 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & \omega^4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = 0.$$

Отметим, что $P_4 = \overline{P_2}$.

Проекторы P_0, P_2, P_3, P_4 одномерные, так как след каждого проектора равен 1. По одномерным проекторам легко вычисляется базис из собственных векторов $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, которые представим в виде столбцов. Собственному числу $\lambda_1 = 1$ отвечает действительноезначный вектор $(f_1)^T = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3 \ 1 \ 1 \ 1)$, так как

$$f_1 \cdot (f_1)^T = P_0.$$

Собственному числу $\lambda_3 = -1$ отвечает вектор $(f_3)^T = \frac{1}{2}(1-1-1-1)$, так как

$$f_3 \cdot (f_3)^T = P_3.$$

Собственному числу $\lambda_2 = \omega^4$ отвечает вектор $(f_2)^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \ 1 \ \omega^2 \ \omega^4)$, так как (напомним, что операция сопряжения $*$ есть транспонирование плюс комплексное сопряжение)

$$f_2 \cdot (f_2)^* = P_2.$$

Собственному числу $\lambda_4 = \omega^2$ отвечает комплекснозначный вектор $(f_4)^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \ 1 \ \omega^4 \ \omega^2)$, так как

$$f_4 \cdot (f_4)^* = P_4.$$

Оператору J соответствуют разложение единицы

$$E = P_0 + P_2 + P_3 + P_4$$

и спектральное разложение оператора

$$J = 1 \cdot P_0 + \omega^2 \cdot P_2 + (-1) \cdot P_3 + \omega^4 \cdot P_4.$$

Действие этого оператора J становится нагляднее при разложении исходного сигнала в базисе из собственных векторов f_1, f_2, f_3, f_4 .

3. Отсюда вычисляются собственные числа $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = \lambda_4^3 = 1$, $\lambda_3^3 = -1$ оператора J^3 с матрицей в виде $\frac{1}{2}W_2$ и с теми же собственными векторами. Неудобство представляет то, что векторы f_2 и f_4 комплекснозначные.

Опишем возможный переход к действительному базису.

Сумма двух комплексных проекторов дает проектор на инвариантное двумерное подпространство

$$P_2 + P_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из этого подпространства легко подбирается нормированный действительный вектор $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \ 0 \ 1 \ -1)^T$, ортогональный векторам f_1 и f_3 . Вычисляем одномерный проектор $Q_2 = \varphi_2 \cdot (\varphi_2)^T$, а потом одномерный проектор $Q_4 = (P_2 + P_4) - Q_2$. По формуле $Q_4 = \varphi_4 \cdot (\varphi_4)^T$ вычисляем последний элемент действительного базиса из собственных векторов $\varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \ 2 \ -1 \ -1)^T$.

Можно было бы, наоборот, начать с $\varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \ 2 \ -1 \ -1)^T$ как нормированного столбца матрицы $P_2 + P_4$. Отсюда по аналогичной схеме вычисляется $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \ 0 \ 1 \ -1)^T$.

Отметим, что полученный базис $\{f_1, \varphi_2, \varphi_4, f_3\}$ отличен от ранее предложенного базиса из собственных векторов матрицы W_2 .

Если обозначим $Q = P_0 + P_2 + P_4$, то разложение единицы (сокращенное, так как трехмерный проектор Q не разложен на сумму одномерных действительных) для оператора $\frac{1}{2}W_2$ следующее:

$$E = Q + P_3,$$

а спектральное разложение этого оператора

$$\frac{1}{2}W_2 = 1 \cdot Q + (-1) \cdot P_3.$$

2.5. Матрицы Адамара

Рассмотренные W -матрицы относятся к более широкому классу матриц Адамара, популярных в комбинаторике [22] и теории кодиро-

вания [19].

Определение 2.2. Матрицей Адамара порядка N называется матрица V с элементами только 1 и -1, удовлетворяющая соотношению

$$V \cdot V^T = N \cdot E. \quad (2.9)$$

Если при этом начальная строка и столбец матрицы V состоят только из единиц, то матрица Адамара называется *нормализованной*.

Согласно этому определению все W -матрицы являются нормализованными матрицами Адамара. Основным представителем этих матриц в виде матрицы H_m дискретного преобразования Уолша в нумерации Адамара (1.16) в комбинаторике и теории кодирования известна (см. [20]) под названием матрицы *Адамара-Сильвестра* (или матрицы Адамара типа Сильвестра), так как первым исследованием этих матриц начал [31] Дж. Сильвестр в 1867 г. Матрица (1.15) есть пример единственной нормализованной матрицы Адамара порядка 2. Легко доказывается [22] следующая теорема.

Теорема 2.6. Если A есть матрица Адамара порядка $N > 2$, то N делится на 4.

Гипотеза (на данный момент недоказанная). Для любого N , которое делится на 4, существует матрица Адамара порядка N .

Для $N = 4p$, где p простое, максимальный порядок, для которого доказано существование матрицы Адамара, по-видимому, $N = 764$.

Из (2.9) вытекает

$$(\det V)^2 = N^N, \quad |\det V| = N^{\frac{N}{2}}.$$

Теорема 2.7. Если A действительная квадратная матрица порядка N с элементами $-1 \leq A[i, j] \leq 1$, то $|\det A| \leq N^{\frac{N}{2}}$.

Из этой теоремы Адамара вытекает, что (на классе действительных матриц с указанным ограничением на элементы) матрицы Адамара обладают экстремальным свойством *максимальности определителя*.

2.6. Быстрые алгоритмы

1. Революционный скачок в сфере применения ортогональных преобразований при цифровой обработке информации вызван появлением быстрых алгоритмов их реализации. При непосредственном вычислении ортогонального преобразования с матрицей порядка N выполняется N^2 операций, так как элементов матрицы N^2 .

Принцип быстрого алгоритма состоит в замене одной полностью заполненной матрицы преобразования на произведение большого числа слабозаполненных матриц, у которых большинство элементов нули. Наиболее просто и наглядно этот принцип выводится и демонстрируется на примере матрицы дискретного преобразования Уолша в нумерации Адамара (матрицы Сильвестра—Адамара), равной кронекеровой степени матрицы H вида (1.15). В основе этого принципа лежит, предложенная Гудом [27] идея факторизации матрицы кронекерова произведения (утверждение 1.7).

Теорема 2.8. *Матрица дискретного преобразования Уолша в нумерации Адамара H_m представима в виде произведения t матриц*

$$H_m = T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_m,$$

где $T_k = E^{(k-1)\otimes} \otimes H \otimes E^{(m-k)\otimes}$, E — единичная матрица порядка 2.

При этом матрицы T перестановочны: $T_i \cdot T_j = T_j \cdot T_i$.

Отметим, что матрица $E^{s\otimes}$ в формулировке теоремы — суть единичная матрица порядка 2^s . Предложена форма записи известного быстрого алгоритма, близкая к форме записи следующей теоремы. Отличие только в замене в одном месте операции k -произведения на b -произведение.

Теорема 2.9. *Матрица дискретного преобразования Уолша в нумерации Пэли W_m представима в виде произведения t матриц*

$$W_m = T_1 \cdot T_2 \cdot \dots \cdot T_m, \quad (2.10)$$

где $T_k = E^{(k-1)\otimes} \otimes (H \otimes E^{(m-k)\otimes})$, E — единичная матрица порядка 2.

При этом матрицы T неперестановочны.

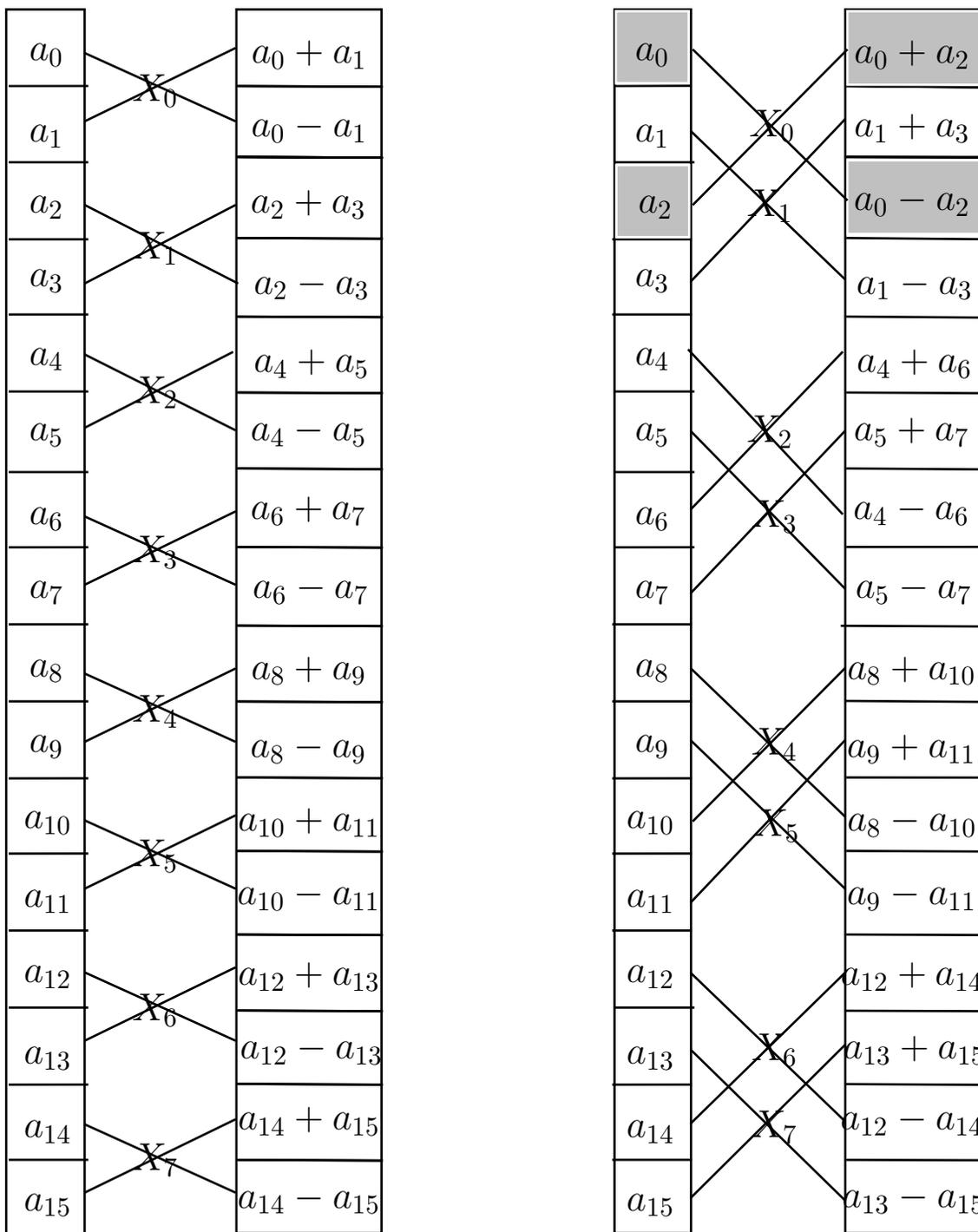


Рис. 2.3. Графическое представление быстрого алгоритма ДПУ в нумерации Адамара (часть 1)

Возможны и другие варианты представления сомножителей в фор-

муле (2.10). На практике формулы этих двух теорем реализуются для

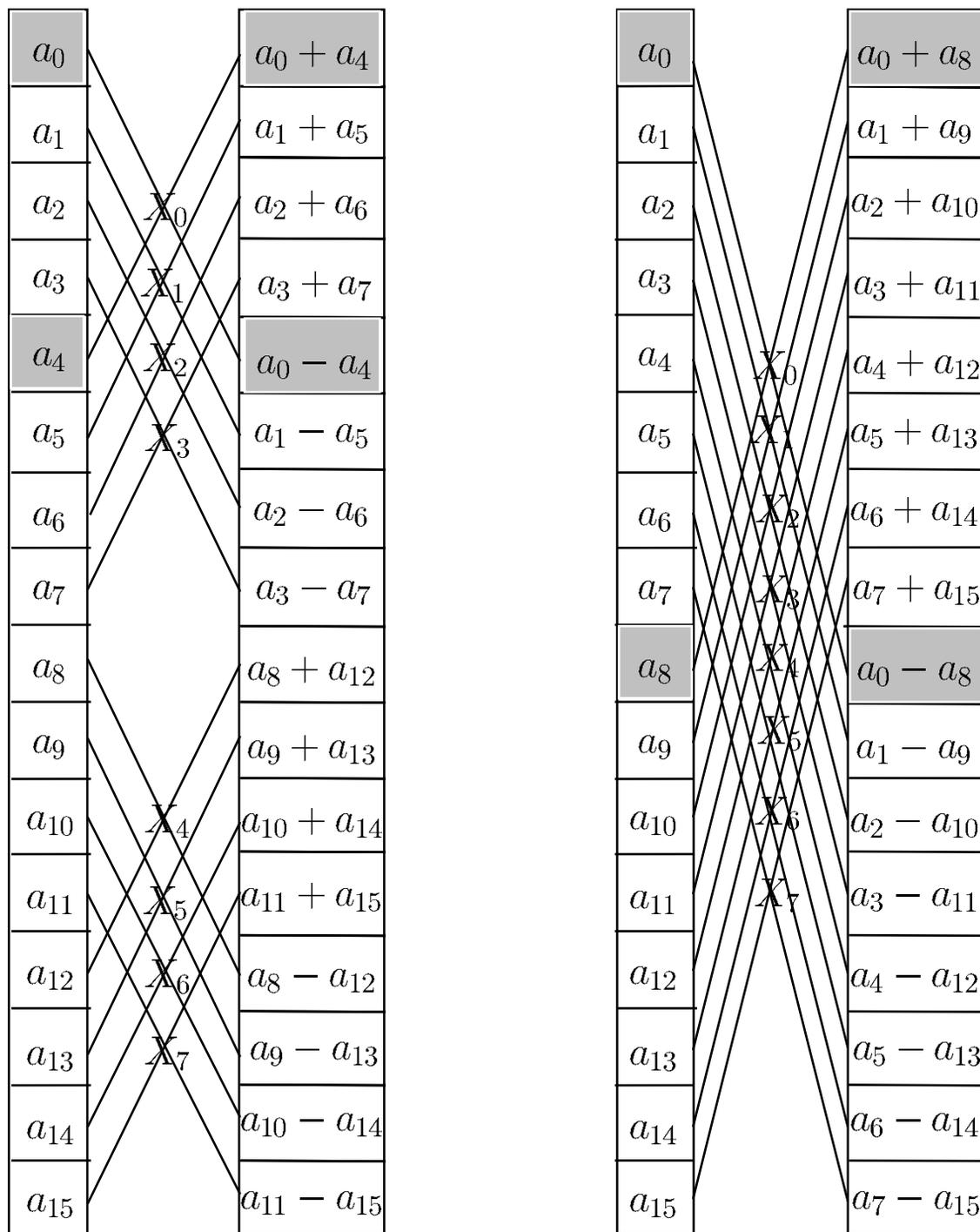


Рис. 2.4. Графическое представление быстрого алгоритма ДПУ в нумерации Адамара (часть 2)

вычисления спектральных характеристик исходного сигнала x по формулам $H_m \cdot x$ и $W_m \cdot x$ соответственно. Поэтому в формулах типа (2.10)

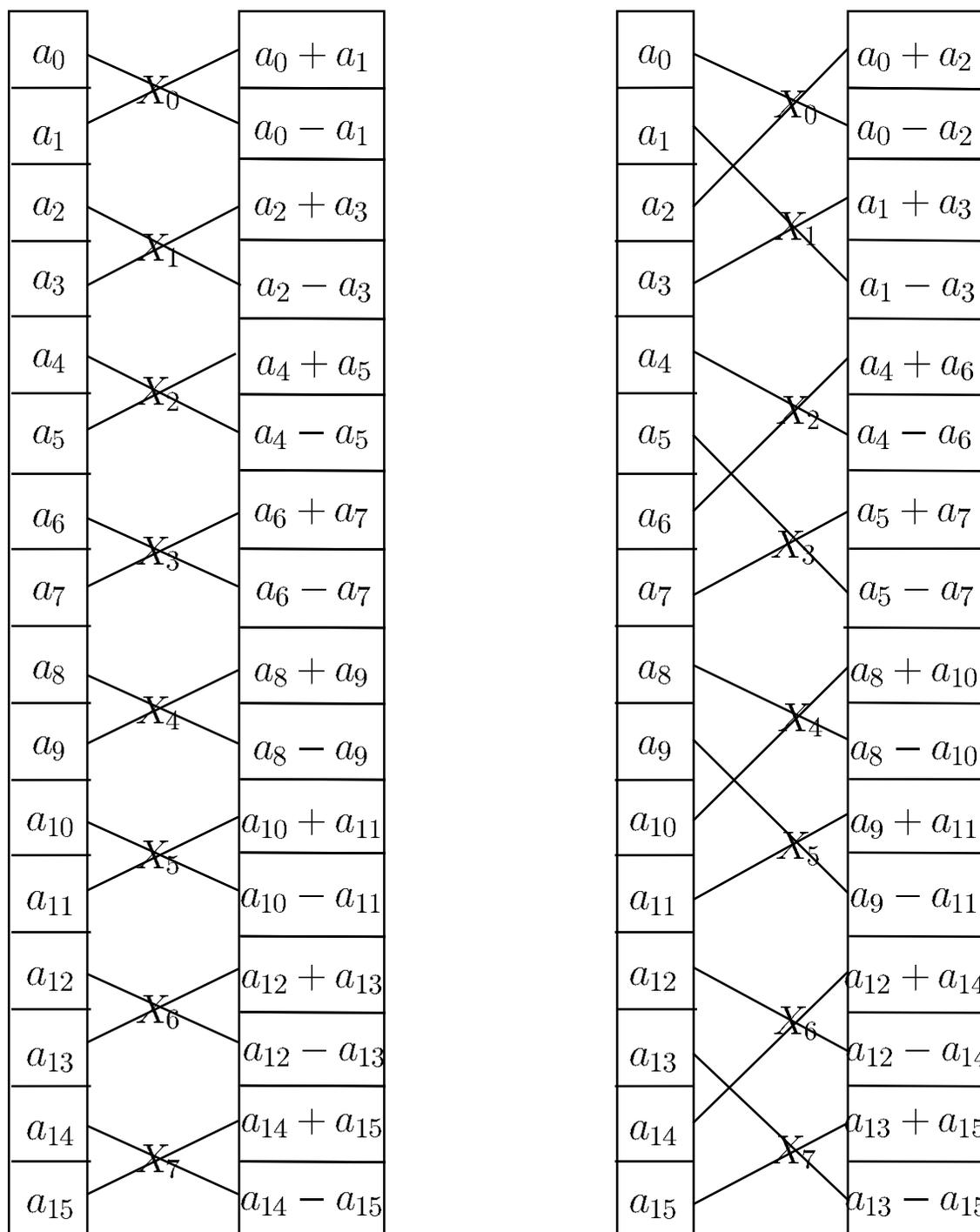


Рис. 2.5. Графическое представление быстрого алгоритма ДПУ в нумерации Пэли (часть 1)

данное вычисление идет справа налево в последовательности: $T_m \cdot x$
 $T_{m-1} \cdot x T_{m-2} \cdot x \dots$

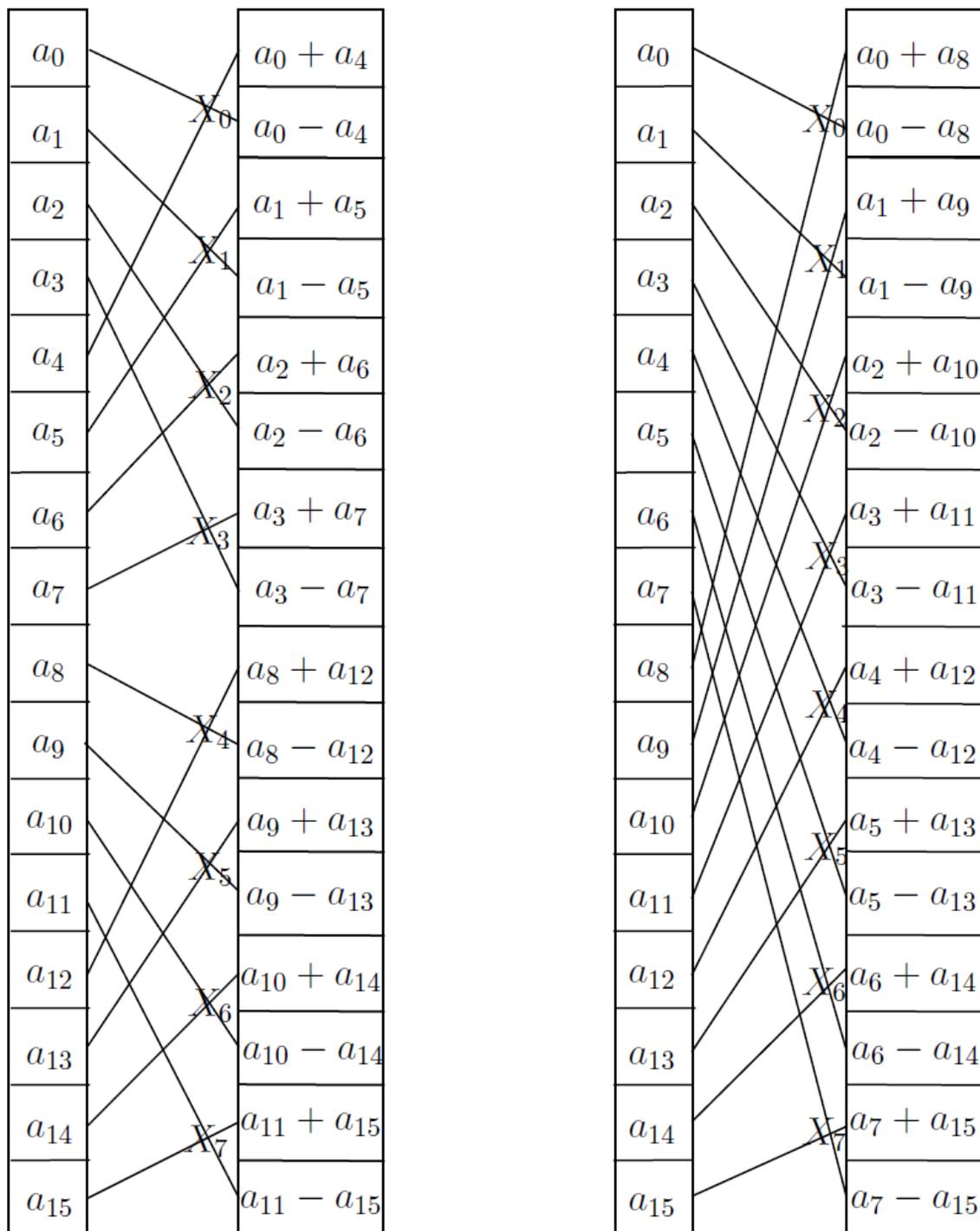


Рис. 2.6. Графическое представление быстрого алгоритма ДПУ в нумерации Пэли (часть 2)

2. Перейдем от матричного представления быстрых алгоритмов реализации ДПУ к их алгоритмической записи.

Введем для произвольного сигнала x длины 2^m (то есть уровня m) понятие *подсигнала* длины 2 с *уровнем прореживания* k , который указывает на шаг при выборе координат подсигнала.

То есть исходный сигнал x при каждом заданном k будем разбивать на 2^{m-1} непересекающихся подсигнала (дизъюнктивное разбиение).

Если $k = 0$, то прореживание отсутствует. Тогда определим

$$x_j[0] := (x_{2j} \ x_{2j+1}) \quad \text{для } j \in 0 : 2^{m-1} - 1.$$

Координаты в подсигнал брали с шагом $2^0 = 1$.

В общем случае прореживания уровня k координаты в подсигнал берем с шагом 2^k и организуем сквозную нумерацию подсигналов так, что сигнал с меньшими координатами получает меньший номер:

$$x_{j2^k+i}[k] := (x_{j2^{k+1}+i} \ x_{j2^{k+1}+i+2^k}) \quad \text{для } j \in 0 : 2^{m-k-1} - 1, i \in 0 : 2^k - 1.$$

Теорема 2.10. *Алгоритмический вид быстрого алгоритма дискретного преобразования Уолша в нумерации Адамара уровня m :*

для k от 0 до $m - 1$ выполняем

$$\text{(для } j \text{ от } 0 \text{ до } 2^{m-1} \text{ выполняем } x_j[k] := H \cdot x_j[k]).$$

Поясним, что результат выполнения операции $H \cdot x$, примененной к сигналу $x = (a \ b)^T$, есть сигнал $y = (a + b \ a - b)^T$. Это есть примитивный случай *дискретного преобразования Хаара* (см. [7]). В теореме 2.10 каждый раз результат применения дискретного преобразования Хаара к подсигналу преобразуемого сигнала помещаем в ячейки того же подсигнала. Результат выполнения преобразования $H_m \cdot x^T$ или $x \cdot H_m$ замещает исходный сигнал x . Графическая иллюстрация данного алгоритма для сигнала длиной 16 приведена на рис. (см. 2.3–2.4).

В следующей теореме результат применения дискретного преобразования Хаара к подсигналу помещаем в другие ячейки. Поэтому вводим новый рабочий сигнал y той же длины 2^m для результатов промежуточных вычислений. Графическая иллюстрация данного алгоритма для сигнала длиной 16 приведена на рис. (см. 2.5–2.6).

Теорема 2.11. *Алгоритмический вид быстрого алгоритма реализации дискретного преобразования Уолша в нумерации Пэли уровня m :*

для k от 0 до $m - 1$ выполняем

(для j от 0 до 2^{m-1} выполняем $y_j[0] := H \cdot x_j[k]; \quad x := y$).

3. При практической реализации часто встречаются двумерные и многомерные ортогональные преобразования. Быстрые алгоритмы распространяются и на них.

Теорема 2.12. *Если $m = 2n$, то для матриц ДПУ-Адамара и ДПУ-Пэли верны представления*

$$H_m = (H_n \otimes E^{n \otimes}) \cdot (E^{n \otimes} \otimes H_n),$$

$$W_m = (W_n \otimes E^{n \otimes}) \cdot (E^{n \otimes} \otimes W_n).$$

Если в этой теореме взять $m = 2^s$, то приведенный алгоритм рассматривается как каскадный, где каждое ДПУ в правой части формулы вычисляется по тому же самому алгоритму.

Для работы с ДПУ большого порядка удобнее следующая форма записи алгоритма теоремы 2.12. При $m = 2n$ сигнал x (или y) в виде столбца длиной 2^m удобнее выдавать в виде квадратной матрицы X (или соответственно Y) порядка 2^n . Сигнал x разбиваем на 2^n подряд идущих секций длиной 2^n и помещаем в матрицу X по столбцам. Если же помещать по строкам, то получим транспонированную матрицу X^T . Подобное соответствие сигнала и матрицы будем обозначать как $x \sim X$.

Теорема 2.13. *Пусть $m = 2n$; сигналы x и y (в виде столбцов) длины 2^m и матрицы X и Y порядка 2^n таковы, что $x \sim X$ и $y \sim Y$.*

Верно $y = H_m \cdot x$ тогда и только тогда, когда $Y = H_n \cdot X \cdot H_n$.

Верно $y = W_m \cdot x$ тогда и только тогда, когда $Y = W_n \cdot X^T \cdot W_n$.

Эту теорему можно трактовать как эквивалентность одномерного ДПУ и двумерного ДПУ.

2.7. Распространение пакетов данных в динамических телекоммуникационных сетях

Настоящий пункт посвящен одному из применений дискретных функций Уолша в задачах техники — анализу свойств динамических сетей (подробнее см. [1]). Под сетью понимается набор узлов, в каждом из которых в течение некоторого времени может находиться (или не находиться) пакет данных, а также связей между некоторыми парами узлов, которые могут в зависимости от момента времени быть активными или пассивными. По этим связям пакет может быть передан далее по сети, связи действуют по определенным правилам, и интерес представляет возможность передачи пакета из одной точки в другую за определенный промежуток времени.

Положим в основу такую характеристику сети, как «концентрация активных связей» — доля активных связей по отношению к их общему количеству в сети в данный момент времени $t \in [0, 1]$. Работающую динамическую сеть естественно представлять как набор доменов (домен — множество связей, активность которых меняется по единому закону). Обозначим через $0 < C(t) < 1$ концентрацию активных связей в момент времени t . Делается предположение о существовании λ такого, что при $C(t) > \lambda$ пакет данных проходит через сеть почти наверное (λ — порог перколяции). Для проверки этого предположения рассматривается следующая модель.

Дан набор $M \times M$ объектов, расположенных в узлах квадратной решетки. Кусочно-постоянную функцию $\tilde{C}(t) = 2C(t) - 1$ раскладываем по функциям Уолша: $\tilde{C}(t) = a_0 h_0(t) + \sum_{i=1}^m a_i h_i(t)$. Весь массив связей между узлами случайным образом разбиваем на $m + 1$ кластер так, что в i -м в момент времени t все связи активны если $h_i(t) = 1$ и пассивны, если $h_i(t) = -1$.

Интерес представляет глубина проникновения пакета данных и устойчивость значения этой глубины при различных способах разбиения на кластеры.

Рассмотрим частный случай этой модели. Каждый домен c_i , $i \neq 1$ объемом $|c_i| = 2n_i$ делим случайным образом на две равные части так, что одна из этих частей активна в соответствии с h_i , а вторая с $-h_i$. Домен c_0 разбивается на неравные части так, что объем постоян-

но активных связей меньше, чем объем постоянно пассивных. Таким образом, $\tilde{C}(t) < 0 - \text{const}$.

Продвижение пакета данных с ожиданием происходит за счет локальных перестроек. Процесс передачи обрывается в двух случаях:

- когда время моделирования превысит 1;
- пакет данных достигает конечного узла.

Эксперимент проводился на разработанном ранее параллельном сетевом симуляторе (далее ПСС), установленном на высокопроизводительной кластерной системе [24]. ПСС реализован по модульному принципу, причём ядро ПСС выполняет лишь некоторые базовые функции, поэтому для проведения с его помощью каких-либо экспериментов требуется разработка соответствующих модулей расширения, реализующих требуемую логику модели. Модули расширения ПСС представляют собой динамически загружаемые библиотеки с унифицированным интерфейсом, поэтому для создания собственных модулей расширения программисту не требуется исходный код ядра ПСС и каждый модуль расширения может разрабатываться и тестироваться независимо от других. Более того, при наличии всех необходимых модулей расширения, проведение совершенно другого эксперимента требует всего лишь редактирования конфигурационных файлов ядра ПСС (в первую очередь *modules.conf*) и при необходимости файлов конфигурации модулей расширения.

Для эксперимента были разработаны следующие модули расширения.

- Разбиение сети на кластеры по правилам, определенным используемой моделью.
- Определение связей между объектами (генерация топологии).
- Пересылка пакетов данных по правилам, определенным используемой моделью.

Модуль инициализации

НАЗНАЧЕНИЕ

Данный модуль был разработан для проведения эксперимента на плоской квадратной решетке размера $M \times M$, объекты которой принадлежат одному из кластеров c_i . Каждой связи случайным образом присваивается номер кластера и режим (прямой/инверсионный), так как это описано в модели.

ОПИСАНИЕ ВХОДНЫХ ДАННЫХ

m — количество кластеров,

$WOPerc$ — относительный размер кластера c_0 (вводится в процентах от общего количества связей),

$WOCoeff$ — относительное количество связей кластера c_0 , работающих в прямом режиме (вводится в процентах от общего количества связей в кластере c_0).

ОПИСАНИЕ РАБОТЫ

Модуль запускается только на первом шаге моделирования. Архитектура ПСС не предусматривает хранения номера кластера и режима как свойств объекта узла. Для хранения дополнительных свойств, не предусмотренных начальной архитектурой, в каждом объекте содержится хеш-таблица. В ходе работы модуль добавляет в хеш-таблицу каждого узла параметры $WalshRegime$ и $WalshRegimeSign$ для каждого соседнего узла. Данные параметры хранят номера кластера и режим. Для каждой связи выполняется инициализация по следующим правилам:

1. Случайным образом выбирается величина $R1$, равномерно распределенная на отрезке $[0, 100]$. Если $R1$ меньше, чем $WOPerc$, то связь принадлежит кластеру c_0 .
2. Если узел принадлежит кластеру c_0 , то случайно выбирается величина $R2$, равномерно распределенная на отрезке $[0, 100]$. Если $R2$ меньше, чем $WOCoeff$, то связь работает в прямом режиме, иначе в обратном.
3. Если связь не принадлежит кластеру c_0 , то случайно выбирается целая величина $R3$, равномерно распределенная на отрезке $[1, I]$. $R3$ является номером кластера для текущей связи. Прямой и обратный режимы выбираются поочередно для каждого кластера для соответствия модели.

Алгоритм работы данного модуля представлен на рис. 2.7.



Рис. 2.7. Алгоритм работы модуля инициализации координат

Модуль генерации топологии сети

НАЗНАЧЕНИЕ

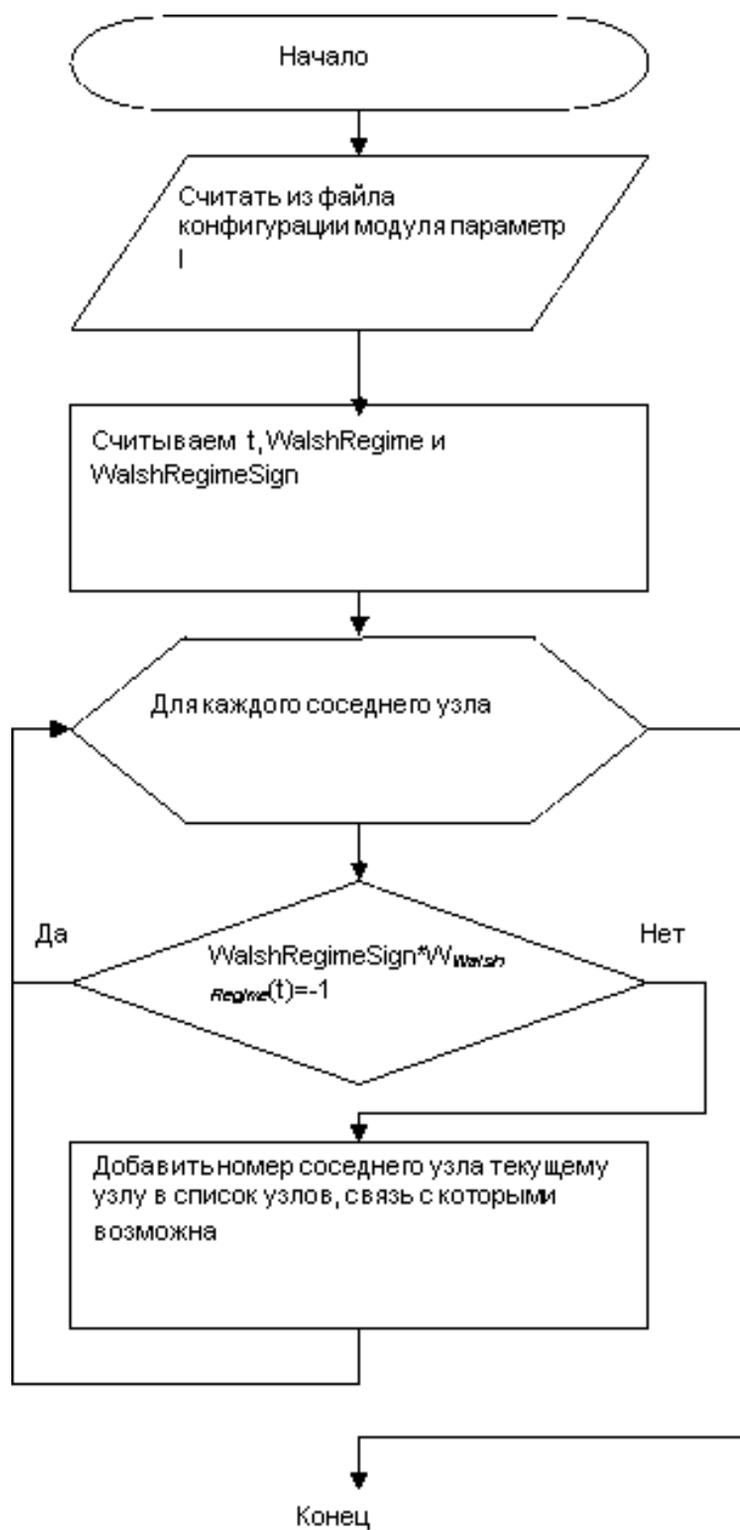


Рис. 2.8. Алгоритм работы модуля генерации топологии сети

Данный модуль для каждого узла задает список текущих соседей. Описание входных данных m — количество кластеров.

ОПИСАНИЕ РАБОТЫ

Данный модуль выполняется только на каждом шаге моделирования. В ходе работы для каждого узла проверяется условие возможности связи с соседними узлами: проверяется значение

$$WalshRegimeSign * WWalshRegime(t),$$

где t — текущее время моделирования. Если значение равно 1, то связь возможна, если -1 , то связи нет. Если условие выполнено, то для узла A соседний узел B добавляется к списку узлов, связь с которыми возможна.

Алгоритм работы данного модуля представлен на рис. 2.8.

Основной модуль

НАЗНАЧЕНИЕ

Реализует пересылку пакетов в соответствии с поставленной задачей. Описание входных данных M — количество узлов в одном слое.

ОПИСАНИЕ РАБОТЫ

На каждом шаге моделирования каждый узел проверяет буфер входящих пакетов. Если буфер не пуст, то для каждого соседнего узла V_i , связь с которым возможна, создается пакет, который будет доставлен ему на следующем шаге моделирования. Для этого получателем пакета назначается узел V_i и пакет помещается в буфер исходящих пакетов.

В данном модуле предусмотрено, что после пересылки узлы исключают друг друга из списка соседей. Это реализовано, так как связь между двумя узлами может быть использована только один раз согласно модели. Модуль проверяет условия окончания моделирования:

- пакет доставлен на последний слой; считаем проход успешным;
- невозможно передать ни один пакет.

Алгоритм работы данного модуля представлен на рис. 2.9.

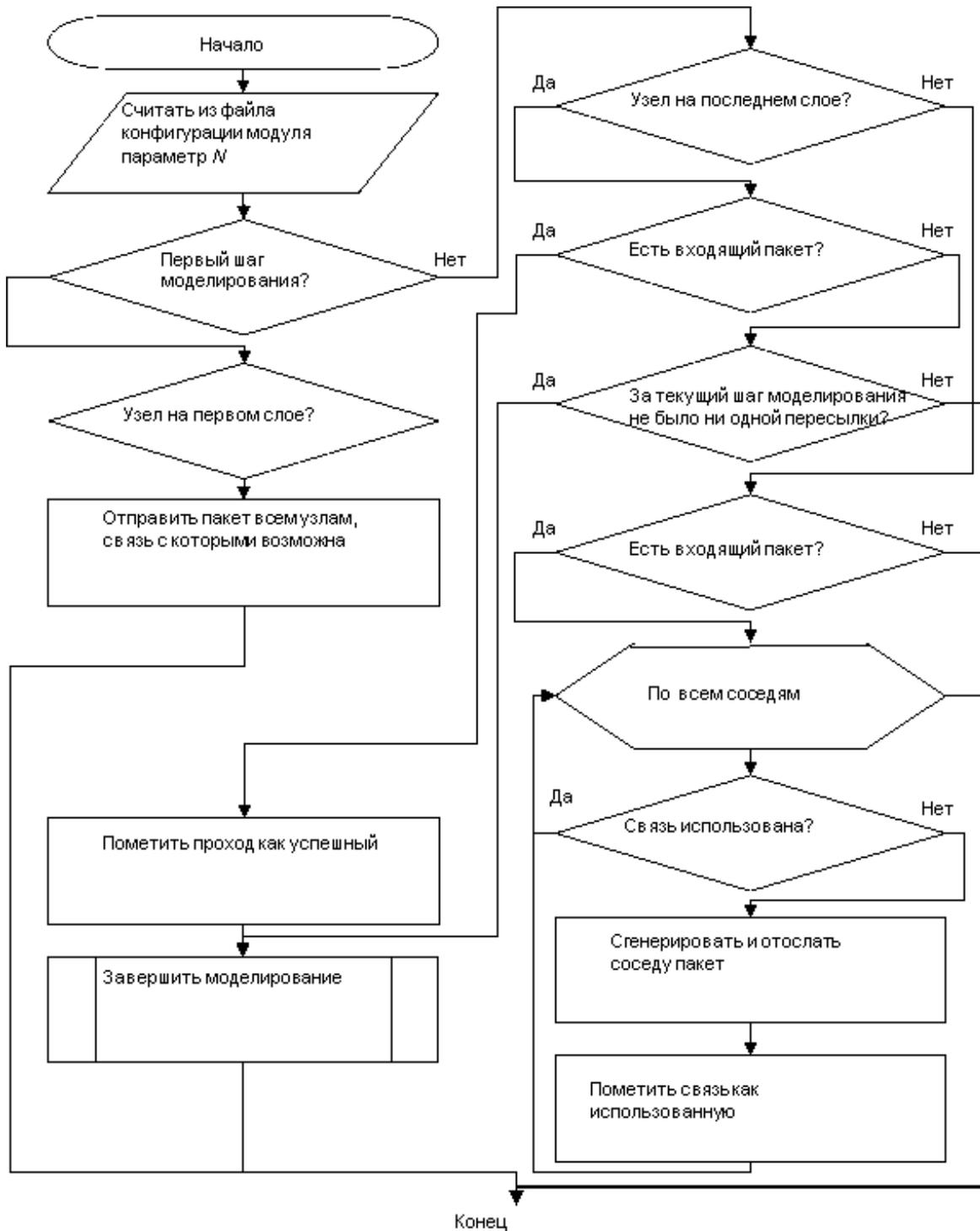


Рис. 2.9. Алгоритм работы основного модуля

Методика экспериментов

Моделируется процесс прохождения пакетов данных через систему («запуск»); при этом делаются некоторые предположения. Каждый объект системы интерпретируется как узел, принимающий/отправляющий пакеты данных. Считается, что связь между двумя узлами может быть использована только один раз.

При неизменном значении набора входных параметров производится несколько запусков, но при этом при каждом повторном запуске случайным образом меняется структура кластеров. Процесс передачи обрывается в двух случаях:

- когда время моделирования превысит 1;
- пакет данных достигает конечного узла.

Для каждой серии были получены последовательности t_n — среднее время, за которое был достигнут слой n , и последовательности k_n — количество испытаний из общего числа испытаний R , в которых пакет побывал на n -м слое, где $i = 1, 2, \dots, M$ и последовательности относительных частот $p_n = \frac{k_n}{M}$.

Анализ полученных значений времени и вероятности прохождения пакетов данных в системе, связи которой определены функциями Уолша

Эксперимент проведен для квадратной решетки размером 300×300 . Входные параметры, используемые в эксперименте: размер кластера c_0 — 40 % от всех связей, количество кластеров 8. На рис. 2.10, 2.11 рассмотрены два случая: количество прямых связей в нулевом кластере 20 % и 25 % от количества связей в c_0 . Количество запусков эксперимента для сбора статистики — 1000.

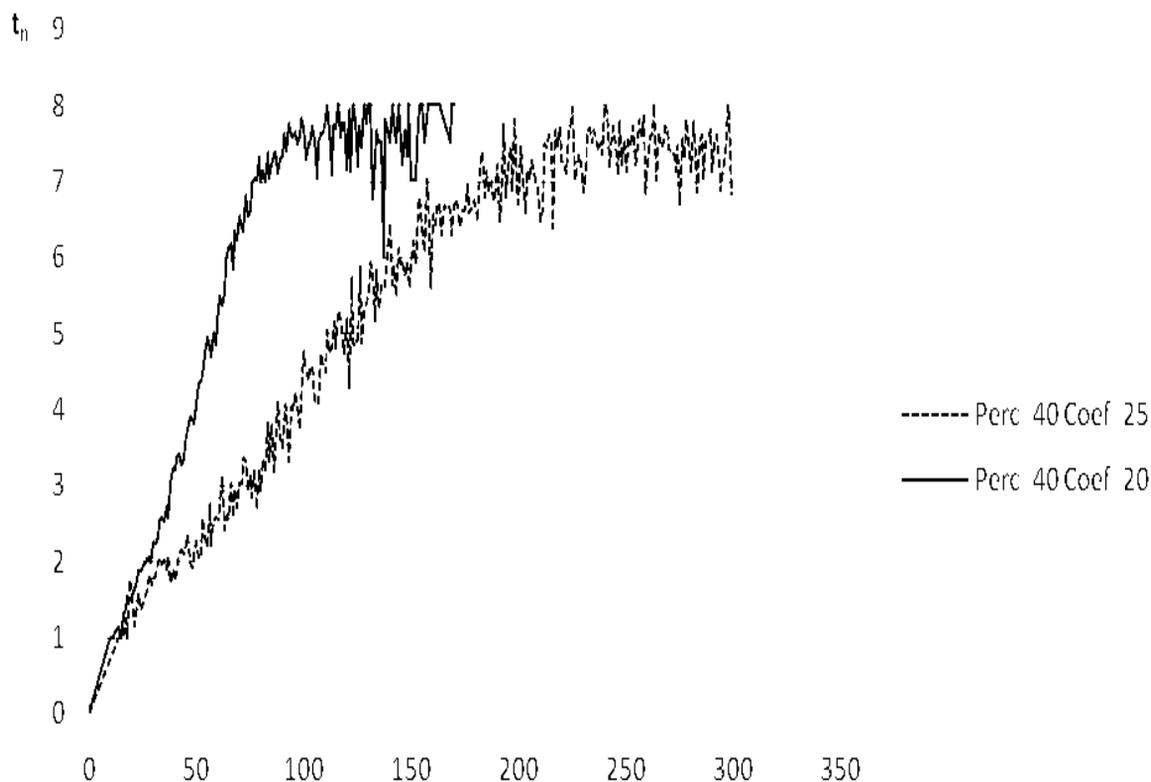


Рис. 2.10. Время t_n , за которое достигнут слой n

В результате численного эксперимента были получены зависимости достигнутого слоя от времени (см. рис. 2.10) и вероятности прохождения пакетов данных через систему (см. рис. 2.11). Рассмотрен граничный случай, т.к. начиная с 27 % прямых связей в нулевом кластере пакеты данных проходили через систему (наблюдалась перколяция).

Также в результате эксперимента были получены гистограммы распространения фронта волны для каждого момента времени. На гистограммах показано количество запусков k_n , для которых пакеты данных в момент времени t остановились на слое n . На рис. 2.12, 2.13 показаны гистограммы для времени $t = 2$ и $t = 5$.

Из полученных результатов можно сделать вывод, что вероятность прохождения пакетов данных резко увеличивается при сравнительно небольшом увеличении связей, которые постоянно активны. Прохождение пакетов данных через систему наблюдается даже в случаях, ко-

гда порог перколяции для квадратной решетки не достигнут.

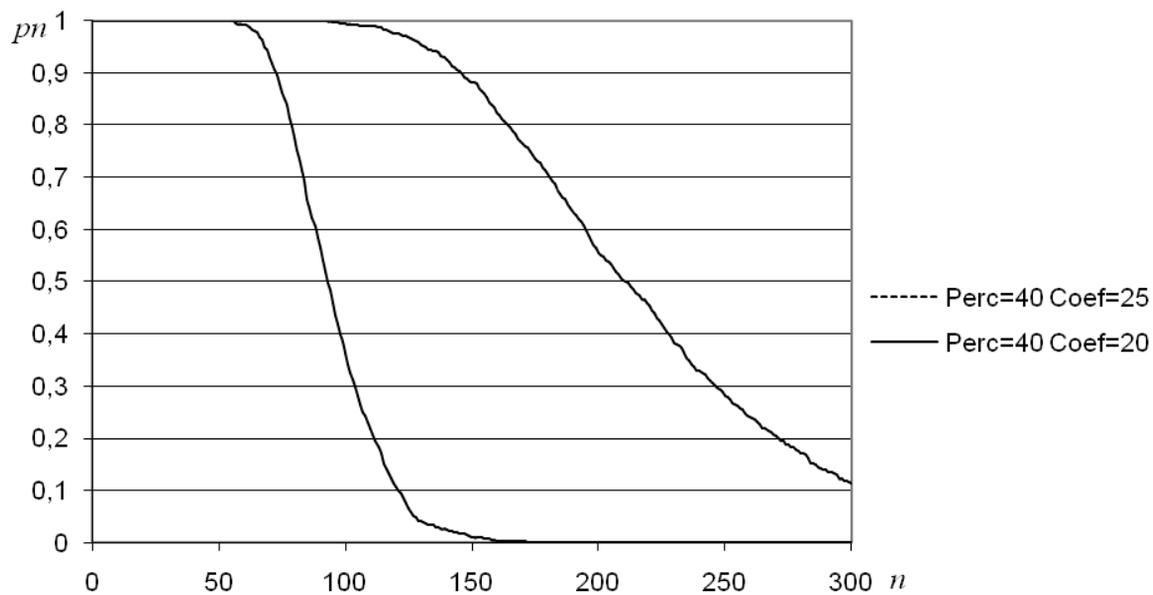


Рис. 2.11. Вероятность p_n , с которой достигнут слой n

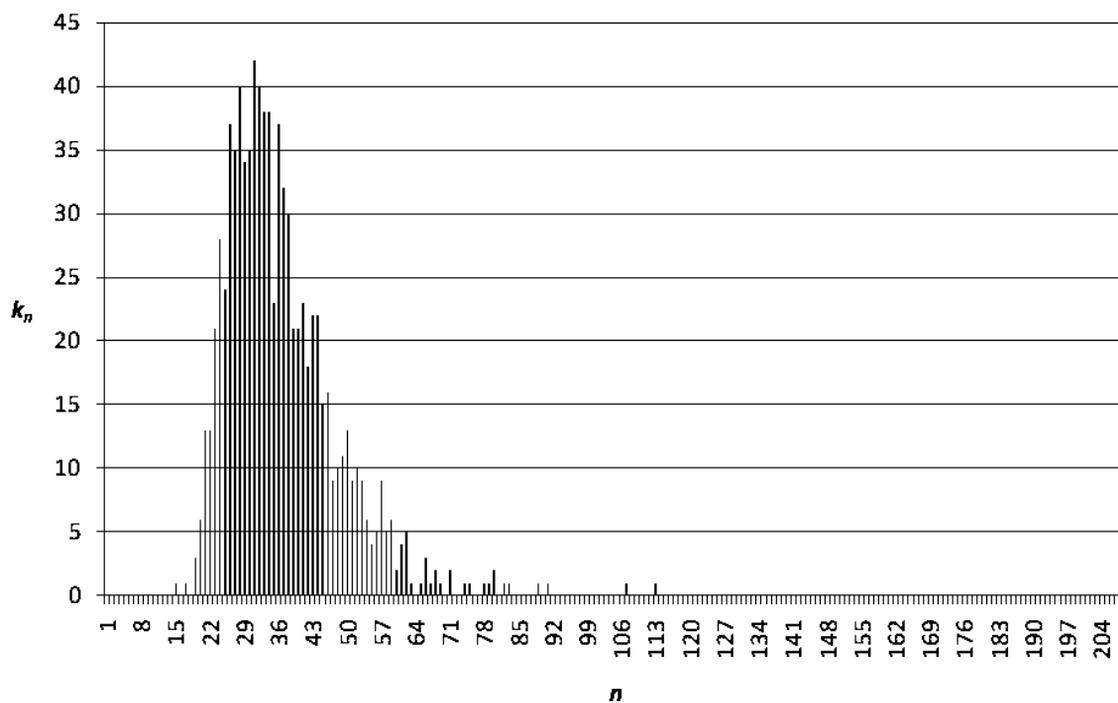


Рис. 2.12. Гистограмма распространения фронта волны при $t = 2$

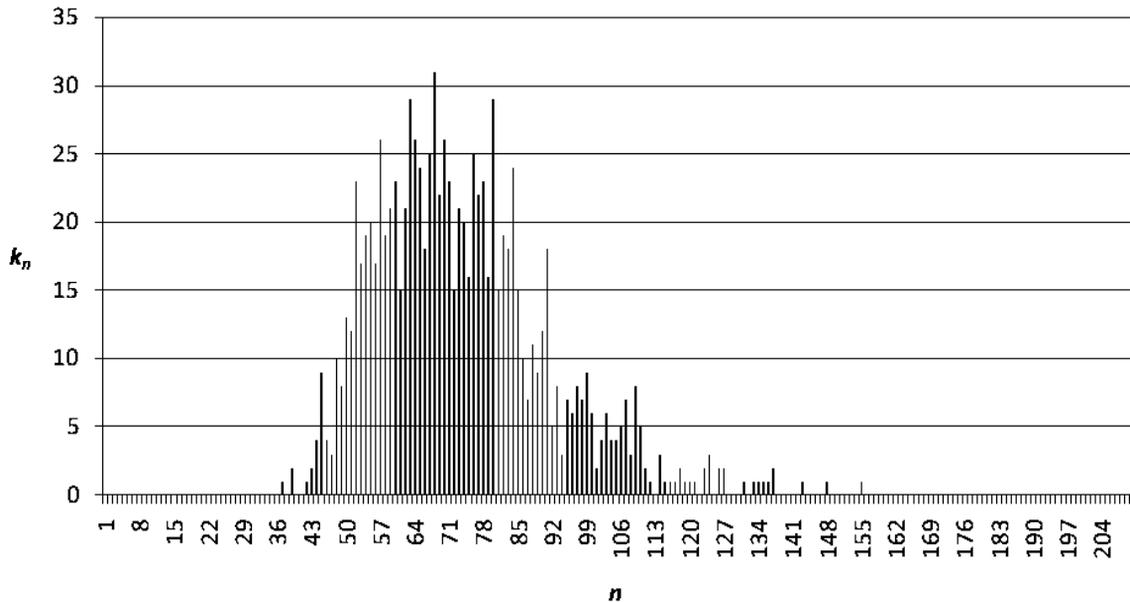


Рис. 2.13. Гистограмма распространения фронта волны при $t = 5$

2.8. Упражнения

Первая цифра в номере упражнения соответствует номеру пункта.

1.1. Вычислите матрицы C_3 и C_4 , заданные рекуррентными соотношениями (2.2).

1.2. Для каждой из шести невырожденных бинарных матриц порядка 2 (приведены в пункте 3 п. 1.5) в качестве кодовой матрицы B вычислите по формуле (2.3) бинарную матрицу порядка 4 и перекодировуйте ее в W -матрицу.

1.3. Выполните обратные операции к операциям упражнения 5.2 предыдущей главы. А именно, для каждой из четырех бинарных матриц порядка 3, служащей кодовой матрицей для H_3, W_3, U_3, B_3 соответственно, по формуле (2.3) с перекодировкой восстановите матрицы H_3, W_3, U_3, B_3 .

1.4. Выполните упражнения 5.2 предыдущей главы с помощью утверждения 2.1.

1.5. Докажите симметричность матрицы U_m (см. утверждение 1.13) с помощью утверждения 2.2.

2.1. Проверьте справедливость утверждений 2.3 и 2.4 для уровней 2 и 4 непосредственным вычислением.

2.2. Для матрицы H_2 постройте унитарную матрицу S , столбцы которой составлены из ортонормированных собственных векторов, составляющих базис, и вычисленных в предыдущем упражнении. Приведите матрицу H_2 к диагональному виду по формуле $S^{-1} \cdot H_2 \cdot S$.

2.3. Аналогично приведите к диагональному виду матрицы W_2 и B_2 .

2.4. Вычислите проекторы на собственные подпространства для случая матриц H_2, U_2, W_2 и B_2 .

3.1. Для матрицы $\frac{1}{2}J$, где J есть несимметричная матрица дискретного преобразования Уолша уровня 2 (приведена в пункте 2 п. 1.4), вычислите её степени до шестой включительно. Сравните третью степень этой матрицы с матрицей $\frac{1}{2}W_2$.

3.2. Постройте произвольную несимметричную невырожденную бинарную матрицу порядка 3 в качестве начальной кодовой матрицы. Для нее по формуле (2.3) с перекодировкой восстановите матрицу дискретного преобразования Уолша уровня 3 и пронормируйте (поделите на $2\sqrt{2}$). Определите период матрицы (6 или 8) последовательным возведением в степень. Для каждой из нечетных степеней, представляющих собой нормированную матрицу дискретного преобразования Уолша уровня 3, восстановите ее кодовую матрицу. Выпишите полученную цепочку кодовых матриц (бинарных матриц третьего порядка) и соответствующую цепочку кодовых слов (значения строк как чисел в восьмеричной системе счисления).

4.1. Используя результаты предыдущего упражнения, вычислите проекторы на собственные подпространства предложенного вами в упражнении 3.2 оператора. Выпишите соответствующее разложение единицы и спектральное разложение оператора и его степеней.

4.2. Для оператора с матрицей $\frac{1}{2}W_2$, рассмотренного в пункте 3 п. 2.4, запишите подробное разложение, представив проектор Q в виде суммы трех одномерных действительных ортопроекторов.

5.1. Вычислите определители всех шести матриц дискретного преобразования Уолша уровня 2. Вычислите определители матриц H_3, U_3, W_3 и B_3 . Проверьте для них справедливость утверждения о максимальности модуля определителя.

5.2. Попробуйте предложить вариант матрицы Адамара порядка 12.

- 5.3. Попробуйте доказать теорему Адамара (см. стр. 27 книги [2]).
- 6.1. Для матрицы H_3 выпишите явный вид матриц T_1 , T_2 и T_3 быстрого алгоритма теоремы 2.8.
- 6.2. Для матрицы W_3 выпишите явный вид матриц T_1 , T_2 и T_3 быстрого алгоритма теоремы 2.9.
- 6.3. Предложите другой вариант сомножителей T_1 , T_2 и T_3 для быстрого алгоритма реализации оператора с матрицей W_3 .
- 6.4. Попробуйте предложить варианты быстрого алгоритма реализации оператора с матрицей U_3 или B_3 .

Список использованной литературы

1. **Аракелян С. М. и др.** Методы и программные средства исследования особенностей распространения пакетов данных в динамических телекоммуникационных сетях / С. М. Аракелян, М. Ю. Звягин, В. В. Прокошев, В. А. Скляренко. — Владимир: ВлГУ, 2012. 91 с.
2. **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
3. **Ахмед Н., Рао К. Р.** Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М.: Связь, 1980. 248 с.
4. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц, М.: Наука. 1969. 368 с.
5. **Беспалов М. С.** Новая нумерация матриц Уолша // Проблемы передачи информации. — 2009. — Т. 45, № 4. — С. 43–53.
6. **Беспалов М. С.** Собственные подпространства дискретного преобразования Уолша // Проблемы передачи информации. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 60–79.
7. **Беспалов М. С.** Математические методы в информатике и вычислительной технике. В 2-х ч. Ч. 2. Введение в прикладной гармонический анализ. — Владимир: ВлГУ, 2007. 244 с.
8. **Беспалов М. С., Скляренко В. А.** Функции Уолша и их приложения. — Владимир: ВлГУ, 2012. 35 с.
9. **Блейхут Р.** Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. — М.: Мир. 1989. 448 с.
10. **Гантмахер Ф. М.** Теория матриц. — М.: Наука, 1966. 576 с.
11. **Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.** Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: Наука, 1987. 344 с. (Изд. второе. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 352 с. ISBN 978-5-382-00611-6)
12. **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
13. **Залманзон Л. А.** Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применения в управлении, связи и других областях. — М.: Наука, 1989. 496 с.
14. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Линейная алгебра. — М.: Наука, 1984. 294 с.

15. **Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения.** М.: Наука, 1982. 368 с.
16. **Кофман А.** Введение в прикладную комбинаторику. — М.: Наука, 1975. 480 с.
17. **Малоземов В. Н., Машарский С. М.** Основы дискретного гармонического анализа. — СПб.: Лань, 2012. 304 с.
18. **Малоземов В. Н.** Линейная алгебра без определителей. Квадратичная функция. — СПб.: Изд. СПб. ун-та, 1997. 80 с.
19. **Питерсон У., Уэлдон Э.** Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976. 596 с.
20. **Сачков В. Н.** Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977. 319 с.
21. **Трахтман А. М., Трахтман В. А.** Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. — М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
22. **Холл М.** Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. 424 с.
23. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. 656 с.
24. **Шамин П. Ю.** Параллельный сетевой симулятор / А.С. Голубев, Д.С. Милованов, П.Ю. Шамин // Зарегистрированная программа ЭВМ. — Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2009610991, Дата регистрации в Реестре программ для ЭВМ — 13 февраля 2009 г.
25. **Шипп Ф.** О некоторых перестановках рядов по системе Уолша // Матем. заметки. — 1975. — Т.18, № 2. — С. 193–201.
26. **Bespalov M. S.** Construction and properties of discrete Walsh transform matrices // Walsh and Dyadic Analysis. Proceedings of the Workshop Dedicated to the Memory of J.Edmund Gibbs, October 18–19, 2007, Nis, Serbia, edited by Radomir S. Stancovic. Nis: Elektronski fakultet, 2008. — P. 195–208.
27. **Good I. J.** The interaction algorithm and practical Fourier analysis// J. Royal Stat. Soc. Ser.B. 1958. — V. 20. P. 361-372.
28. **Hadamard J.** Resolution d'une question relative aux determinants // Bull. Sci. Math., Ser.2. 1893. — Part 1. V. 17. P. 240-246.
29. **Paley R. E. A. C.** On Orthogonal Matrices // J. Math. Phys. 1933. — V. 12. P. 311-320.

30. **Schipp F., Wade W. R., Simon P.** Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. Budapest: Acad. Kiado, 1990. 560 p.
31. **Sylvester J. J.** Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous simg-successions, and tessalated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers // Phil. Mag., 1867.— V. 34. P. 61–475.
32. **Walsh J. L.** A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923.— V. 45. P. 5–24.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Дискретные функции Уолша	6
1.1. Две нумерации дискретных функций Уолша	6
1.2. Построение дискретных функций Уолша через «непрерывные» функции Уолша	9
1.3. Различные виды произведения матриц	11
1.4. Дискретные преобразования Уолша	18
1.5. Линейные перестановки дискретных преобразований Уолша	21
1.6. Бинарные векторы и матрицы	24
1.7. Определение дискретных функций Уолша	26
1.8. Упражнения	28
Глава 2. Применение функций Уолша в математическом моделировании	31
2.1. Генерирование матриц дискретного преобразования Уолша	31
2.2. Собственные подпространства симметричных матриц дискретного преобразования Уолша	34
2.3. Классификация матриц дискретного преобразования Уолша	37
2.4. Проекторы на собственные подпространства несимметричных матриц ДПУ	39
2.5. Матрицы Адамара	42
2.6. Быстрые алгоритмы	44
2.7. Распространение пакетов данных в динамических телекоммуникационных сетях	51
2.8. Упражнения	61
Список использованной литературы	64

Учебное издание

БЕСПАЛОВ Михаил Сергеевич
СКЛЯРЕНКО Василий Алексеевич

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Подписано в печать 11.03.14.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 3.95. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.