Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Т. В. СПИРИНА
Е. А. ТРОИЦКАЯ

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Учебное пособие

В двух частях
Часть 1. Математика

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: 030900.62 – «Юриспруденция», 030600.62 – «История»

Владимир 2013

УДК 51
ББК 22.1
С72

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института
Федеральной службы исполнения наказаний России
А. В. Хорошева

Кандидат технических наук,
доцент кафедры информатики и защиты информации
Владимирского государственного университета
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
Д. А. Полянский

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Спирина, Т. В.

С72 Математика и информатика : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1. Математика / Т. В. Спирина, Е. А. Троицкая ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2013. – 86 с.

ISBN 978-5-9984-0401-6 (Ч.1)
ISBN 978-5-9984-0402-3

Содержит систематизированный материал по основам высшей математики. Во второй части будет изложен материал по основам информатики и информационных технологий.

Предназначено для студентов гуманитарного и социального направлений бакалавриата дневной, заочной и дистанционной форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 30. Библиогр.: 17 назв.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-9984-0401-6 (Ч.1)
ISBN 978-5-9984-0402-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика и информатика – мощные пласты современной культуры, определяющие развитие общества на основе формирования интеллектуального потенциала человека. Математика проникла практически во все области общественной деятельности. Это объясняется, во-первых, тем, что она способна создавать модели изучаемых явлений, а во-вторых, тем, что математика используется для обработки числовых данных (как средство расчета).

Как наука математика имеет определенное математическое мировоззрение, однако для специалистов в области экономики, менеджмента, психологии и юриспруденции она является, прежде всего, мощным инструментарием при проведении необходимых расчетов и исследований, а также фундаментом, на котором строится современное здание высшего профессионального образования.

Первая часть учебного пособия – «Математика» – состоит из семи глав. В них отражены следующие разделы курса: метод координат на плоскости и его простейшие приложения, прямая на плоскости, функции и пределы, производная и дифференциал, приложения производной, неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения, функции нескольких переменных.

В каждой главе приводятся краткие теоретические сведения, подробно рассматриваются примеры, задачи для самостоятельного решения и даются контрольные вопросы.

Глава 1
ВЕКТОРЫ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1. Основные действия над векторами

Все физические величины делятся на скалярные и векторные. Скалярные – это, например, температура, масса, и т.д. К векторным (направленным) величинам относятся, например, скорость, ускорение, сила.

Вектором называется такая величина, которая характеризуется направлением в пространстве и числом, измеряющим ее в некоторых единицах измерения.

Пусть даны две точки $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Символом $\overrightarrow{AB}$ обозначают вектор, модуль которого $|\overrightarrow{AB}|$ равен длине отрезка AB, а направление вектора совпадает с направлением от A до B.

Два вектора называются равными, если:

a) их длины (модули) равны: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

b) оба вектора имеют одинаковое направление в пространстве.

Вектор, длина которого равна 1, называется единичным, или ортом.

Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$ (рис. 1.1).

Начало второго слагаемого вектора находится в конце первого.

В механике сумму двух векторов определяют как диагональ параллелограмма, построенного на слагаемых векторах: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$ (рис. 1.2).

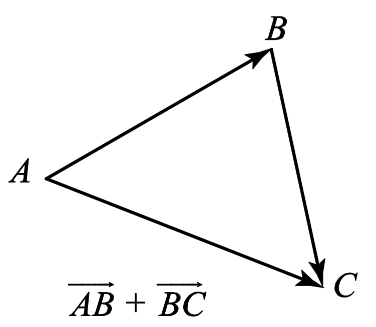


Рис. 1.1

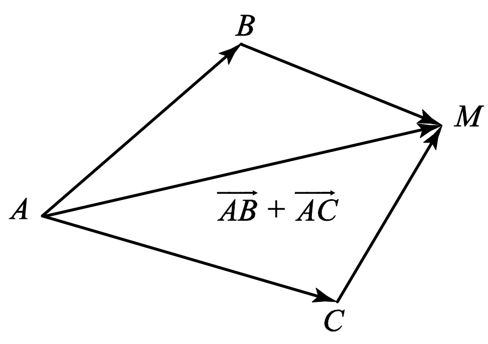


Рис. 1.2

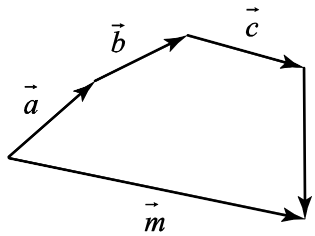
Сложение векторов подчиняется законам сложения чисел:

a) переместительному: $a + b = b + a$;

b) сочетательному: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Исходя из этих законов, можно находить сумму любого числа векторов (рис. 1.3).

Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов называется сумма вектора $\vec{a}$ с вектором $-\vec{b}$, противоположным вектору $\vec{b}$ (рис. 1.4).



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{m}$

Рис. 1.3

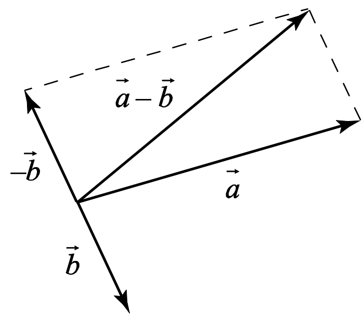


Рис. 1.4

1.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\widehat{\ }\,\vec{b}\right).$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то их скалярное произведение равно 0:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0, \text{ так как } \cos 90°=0.$$

Рассмотрим векторы в пространстве декартовой системы координат (рис. 1.5). Выберем на осях координат единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты. Тогда каждый вектор определяется в этой системе через их проекции на оси *OX, OY, OZ*:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\ , \quad \left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ .$$

Длина вектора определяется по формуле

$$d=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},\ \textit{если} \rightarrow \vec{a}=\overrightarrow{a_x i}+\overrightarrow{a_y j}+\overrightarrow{a_z k}\,,$$

$$a_x=x_b-x_a, \quad a_y=y_b-y_a, \quad a_z=z_b-z_a\,.$$

Можно показать, что скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноимённых координат: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot a_z$,

если $\vec{a}=\left\{\,a_x,a_y,a_z\right\}$, $\vec{b}=\left\{\,b_x,b_y,b_z\right\}$.

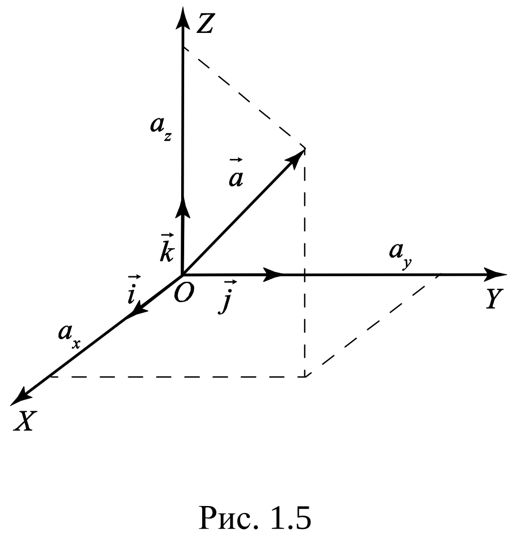


Рис. 1.5

Пример 1.2.1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+4\vec{k}$.

Решение.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-3)+(-3)\cdot 0+1\cdot 4=-2.$$

Пример 1.2.2. Между точками $\vec{A}(-1,3,0)$, $\vec{B}(5,7,6)$, $\vec{C}(-4,6,10)$. получили два вектора $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$. Найти их проекции и вычислить скалярное произведение $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Решение.

$$AB=\{6,4,6\},\quad AC=\{-3,3,10\},$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=6(-3)+4\cdot 3+6\cdot 10=-18+12+60.$$

Если векторы заданы своими координатами, то угол между векторами можно определить по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|b|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Пример 1.2.3. Определить угол ΔABC при вершине A(рис. 1.6), если $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$ и $C(0,0,5)$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Для этого из координат конца вектора вычтем координаты начала:

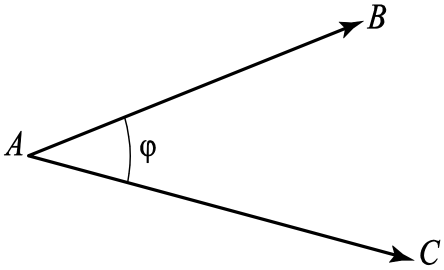


Рис. 1.6

$$\overrightarrow{AC}=\{0-2;\ 0-(-1);\ 5-3\}=\{-2;1;2\};$$

$$\overrightarrow{AB}=\{-1;\ 2;\ -2\};$$

$$\cos\varphi=\cos(\angle BAC)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AB|\cdot|AC|}=$$

$$=\frac{(-1)\cdot(-2)+2\cdot 1+(-2)\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}}=\frac{2+2-4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}=\frac{0}{3\cdot 3}=0.$$

$$\cos\varphi=0,\ \text{следовательно}\ \angle\varphi=90^\circ=\frac{\pi}{2}.$$

Замечание. Если векторы параллельны, то их проекции пропорциональны:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

1.3. Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.7) называется такой вектор $\vec{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) направлен в ту сторону, из которой кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит в направлении против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{c}$.

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

Свойства векторного произведения

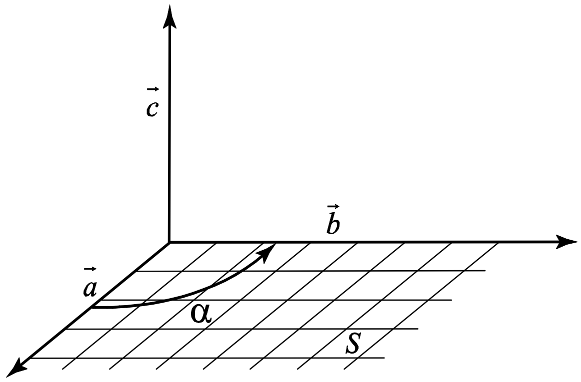
1. При перестановке местами сомножителей векторное произведение меняет знак, а модули их равны:

если $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}$, то $\vec{b}\cdot\vec{a}=-\vec{c}$.

2. Скалярный множитель α можно вынести за знак векторного произведения:

$(\alpha\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\cdot\alpha\cdot\vec{b}=\alpha\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$.

3. Векторное произведение обладает распределительным свойством, т.е. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ – векторное произведение векторов, заданных своими проекциями.



$|\vec{c}\,| = |\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|\sin\alpha$

Рис. 1.7

Пусть даны вектор $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$ и вектор $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$. Можно доказать, что векторное произведение вычисляется определителем 3-го порядка:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\,(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y)-\vec{j}(a_x\cdot b_z-a_z\cdot b_x)+\vec{k}(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x).$$

Так как модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, то векторное произведение применяют для вычисления площадей.

Пример 1.3.1. Вычислить площадь ΔABC с вершинами в точках $A(1,2,3)$; $B(3,4,5)$; $C(2,4,7)$.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет проекции

$$a_x = 3-1;\ b_y = 4-2;\ b_z = 5-3;\ \ \overrightarrow{AB} = \{2;\ 2;\ 2\}.$$

Вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет проекции

$$b_x = 2-1;\ b_y = 4-2;\ b_z = 7-3;\ \ \overrightarrow{AC} = \{1;2;4\}.$$

$$S\Delta = \frac{1}{2}S_{парал} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{matrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|(2\cdot 4-4)\vec{i} - \vec{j}(8-2) + \vec{k}(2\cdot 2 - 2\cdot 1)\right\|.$$

Площадь $\triangle$ равна 1/2 площади параллелограмма, а следовательно 1/2 модуля векторного произведения $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2+(-6)^2+2^2} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14},\ \ S\Delta = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{14} = \sqrt{14}.$$

Пример 1.3.2. Найти площадь S грани $A_1A_2A_3$ (грань пирамиды).

Решение. Задача решается аналогично предыдущей.

Даны декартовы прямоугольные координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3$.

Координаты точек:

$$A_1(2;0;-2),\ A_2(6;2;-6),\ A_3(-2;4;-4).$$

Составим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{6-2;2-0;-6-(-2)\} = \{4;2;-4\},$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \{-2-2;4-0;-4-(-2)\} = \{-4;4;-2\}.$$

Найдем векторное произведение:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 2 & -4\\ -4 & 4 & -2\end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-4-(-16)) - \vec{j}(-8-16) + \vec{k}(16-(-8)).$$

$$S\Delta = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right\| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{12^2+24^2+24^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{144+576+576} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1296} = \frac{1}{2}\cdot 36 = 18.$$

$$S\Delta A_1A_2A_3 = 18\ \text{ед}^2.$$

1.4. Векторно-скалярное произведение векторов

Смешанным (векторно-скалярным) произведением трёх векторов называется число, абсолютная величина которого выражает объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах.

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ – обозначение смешанного произведения векторов.

Эти три вектора некомпланарны, т.е не лежат в одной плоскости. Поэтому, если $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=0$, то это необходимое и достаточное условие компланарности векторов.

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы в координатах, т.е $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$, то смешанное произведение векторов вычисляется через определитель третьего порядка:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример 1.4.1. Найти $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c},$ если $\vec{a}=\{3,4,2\}, \vec{b}=\{3,5,-1\}, \vec{c}=\{2,3,5\}$.

Решение.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=3(25-(-3))-4(15-(-2))+2(9-10)=$$

$$=328-4\cdot 17+2(-1)=84-68-2=14.$$

Пример 1.4.2. Найти объём *V* пирамиды, данной координатами вершин пирамиды $A_1(0, 1, 2)$, $A_2(4, 3, -2)$, $A_3(-4, 5, 0)$.

Решение.

Можно доказать, что объём пирамиды равен $\frac{1}{6}$ модуля векторно-скалярного произведения, составленного из трёх векторов-рёбер, выходящих из одной вершины.

Составим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\{4, 2, -4\}, \overrightarrow{A_1A_3}=\{-4, 4, -2\}, \overrightarrow{A_1A_4}=\{2, 6, 2\}.$$

Найдём $V_{\text{пирамиды}}$:

$$(\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3})\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}4&2&-4\\-4&4&-2\\2&6&2\end{vmatrix}=$$

$$=4(4\cdot2-(-2)\cdot6)-2((-4)\cdot2-(-2)\cdot2)-4(4\cdot6-4\cdot2)=$$

$$=4\cdot20-2\cdot(-4)-4(24-8)=80+8-64=24\text{ куб. ед.}$$

$$V_{\text{пирамиды}}=\frac{1}{6}V_{\text{параллелепипеда}}=$$

$$=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3})\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\frac{1}{6}\cdot24=4\text{ куб. ед.}$$

Пример 1.4.3. Доказать компланарность векторов, проходящих через точки $A(2,-1,-2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,3,0)$, $D(5,0,-6)$.

Решение. Векторы компланарны, если они лежат в одной плоскости (рис. 1.8). Тогда объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен 0, т.е. смешанное произведение равно 0.

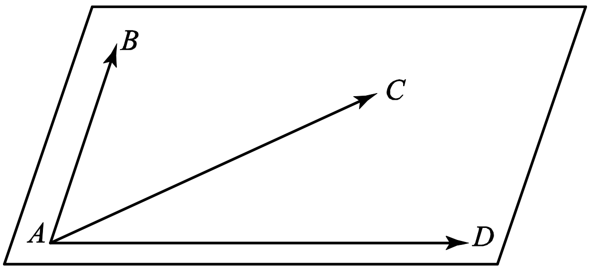


Рис. 1.8

Составим векторы $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB}=\{1-2,2-(-1),1-(-2)\}=\{-1,3,3\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{2-2,3-(-1),0-(-2)\}=\{0,4,2\},$$

$$\overrightarrow{AD}=\{5-2,0-(-1),-6-(-2)\}=\{3,1,-4\}.$$

Смешанное произведение векторов:

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1&3&3\\0&4&2\\3&1&-4\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}4&2\\1&-4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0&2\\3&-4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0&4\\3&1\end{vmatrix}=(-1)(-16-2)-$$

$$-3(0-12)=18+18-36=0.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Как определяются координаты вектора и его длина?
3. Что такое орт?
4. Приведите примеры коллинеарных векторов.
5. Что такое скалярное произведение векторов?
6. Чем определяется векторное произведение векторов?
7. Что определяет векторно-скалярное произведение векторов?
8. Какие векторы называются компланарными?
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие компланарности векторов.

Контрольные задания

1. Даны векторы $\overrightarrow{a_1}=(-2;\ 4)$ и $\overrightarrow{a_2}=(3;\ 1)$. Найти $\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}$; $\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}$; $3\overrightarrow{a_1}$; $-5\overrightarrow{a_2}$.

2. Даны точки $A(3;\ -1)$, $B(0;\ -5)$ и $C(-2;\ 1)$. Найти $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; $\vec{m}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-0{,}5\,\overrightarrow{CA}$.

3.* Даны точки $A(4;\ 0)$, $B(-1;\ 3)$ и $C(5;\ 7)$. Найти $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$; $\vec{m}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-5\,\overrightarrow{AC}$.

4. Найти длины векторов $\vec{a}=(5;\ 2\sqrt{6})$, $\vec{b}=(-5;\ 7)$, $\vec{c}=(-6;\ 8)$, $\vec{d}(7;\ -7)$.

5. Даны точки $A(3;\ 5)$; $B(-3;\ 3)$; $C(5;\ -8)$. Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}$.

6.** Дан треугольник с вершинами $A(7;\ 7)$, $B(4;\ 3)$, $C(3;\ 4)$. Найти его периметр.

7. Найти сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;\ -3;\ -2)$, $\vec{b}=(3;\ 6;\ -1)$.

8. Найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(5;\ 3;\ 2)$, $\vec{b}=(-1;\ 0;\ -1)$.

9. Дан вектор $\vec{a}=(3;\ 2;\ 7)$. Найти $5\vec{a}$; $-3\vec{a}$.

10. Вектор задан точками $A(-3;\ 5;\ 0)$ и $B(2;\ 3;\ -1)$. Найти $3\overrightarrow{AB}, -0{,}5\overrightarrow{AB}$.

11.* Векторы заданы точками $A\ (-3;\ 5;\ 0)$, $B\ (-1;\ 4;\ 2)$, $C\ (0;-3;5)$, $D\ (6;\ -7;\ 8)$. Найти $\overline{AB}+\overline{BC}$; $\overline{AC}-\overline{DC}$; $2\overline{AB}$; $-3\overline{CD}$; $0{,}5\overline{BD}$; $3\overline{AB}+2\overline{BC}-4\overline{AD}$.

---

* – задачи 1-го уровня сложности.

** – задачи 2-го уровня сложности.

12.* Вычислить длины векторов $\vec{a}=\left(5;\ -3;\ \sqrt{2}\right)$; $\vec{b}=\left(-2;\ 3;\ 1\right)$; $\vec{c}=\left(0;\ 12;\ 5\right)$; $\vec{d}=\left(-5;\ 7;\ 2\right)$.

13. Вычислить длину вектора, заданного координатами своих начала и конца: *a*) *A*(5; 3; –1), *B* (4; 5; 1); *b) C* (3; –2; –5), *D* (7; 6; –1).

14.** Найти периметр треугольника с вершинами *A* (3; –2; 8), *B* (–1; 3; –3), *C* (5; 1; –7).

15. Заданы векторы, такие, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=7$, а угол между ними равен $30°$. Найти $(3\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+3\vec{b})$.

16.* Заданы векторы, такие, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, а угол между ними равен $60°$. Найти $(\vec{a}+\vec{b})^2$; $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot 2\vec{a}$.

17. Найти скалярное произведение векторов, заданных своими координатами на плоскости:

a) $\vec{a}$ = (5; 7), $\vec{b}$ = (4; 3); *c)* $\vec{a}$ = (–3; 5), $\vec{b}$ = (16; 1); *e)* $\vec{a}$ = (5; –7), $\vec{b}$ = (7; 5);
b) $\vec{a}$ = (2; 0), $\vec{b}$ = (–3; –7); *d)* $\vec{a}$ = (–3; 1), $\vec{b}$ = (1; –3); *f)* $\vec{a}$ = (2; 0), $\vec{b}$ = (0; –3).

18. Найти угол между векторами, если:

a) $\vec{a}$ = (4; 0), $\vec{b}$ = (2; –2); *c)* $\vec{a}$ = (–2; 3), $\vec{b}$ = (9; 12);
b) $\vec{a}$ = (5; –3), $\vec{b}$ = (3; 5); *d)* $\vec{a}$ = (–2; 3), $\vec{b}$ = (4; –1).

19. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если *A* (1; 6), *B* (1; 0), *C* (–2; 3).

20.* Найти углы треугольника с вершинами *A* (6; 7), *B* (3; 3), *C* (1; –5).

21. Найти скалярное произведение векторов, заданных своими координатами в пространстве:

a) $\vec{a}$ = (1; –3; 6), $\vec{b}$ = (–2; 4; 0); *d)* $\vec{a}$ = (2; 6; 5), $\vec{b}$ = (5; –4; –2);
b) $\vec{a}$ = (0; –3; 5), $\vec{b}$ = (1; –1; –4); *e)* $\vec{a}$ = (5; –5; 8), $\vec{b}$ = (–4; 5; 2);
c) $\vec{a}$ = (2; –5; 3), $\vec{b}$ = (–1; 7; –2); *f)* $\vec{a}$ = (–3; 3; –2), $\vec{b}$ = (6; 1; –6).

22. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если *A*(–1; 2; 5), *B*(1; –4; 3), *C*(2; 5; 3).

23.* Даны точки *A*(1; 0; –2), *B*(4; 3; 7), *C*(2; –3; 5), *D*(–1; 6; 0). Найти угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

24.* Найти углы треугольника с вершинами в точках*A*(2; –2; 0), *B*(7; –3; 1), *C*(1; –1; 5).

25.** Определить, при каком значении *m* векторы $\vec{a}$ (*m*; –3; 2) и $\vec{b}$ (1; 2; –*m*) взаимно перпендикулярны.

Глава 2
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1. Уравнение прямой на плоскости. Различные виды уравнений

На координатной плоскости XOY положение прямой определяется углом α (углом наклона прямой к оси OX) и отрезком «b», который они отсекают на оси OY.

Чтобы написать уравнение этой прямой, возьмём на ней произвольную точку M (x;y) и найдём соотношение между её координатами (рис. 2.1). Из треугольника BMC имеем: $\frac{MC}{BC} = \mathrm{tg}\alpha$, или в координатной форме $\frac{y-b}{x} = \mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{tg}\alpha$ – угловой коэффициент прямой, обозначается k. Отсюда $\frac{y-b}{x} = k$ или $y - b = kx$ => $y = kx + b$ – получили уравнение прямой с угловым коэффициентом.

1. Уравнение прямой через данную точку (рис. 2.2). Возьмем на прямой точки M (x; y), $M_1(x_1; y_1)$. Составим треугольник ΔMM_1C. Из него получим

$$\frac{CM}{M_1C} = \mathrm{tg}\alpha = k .$$

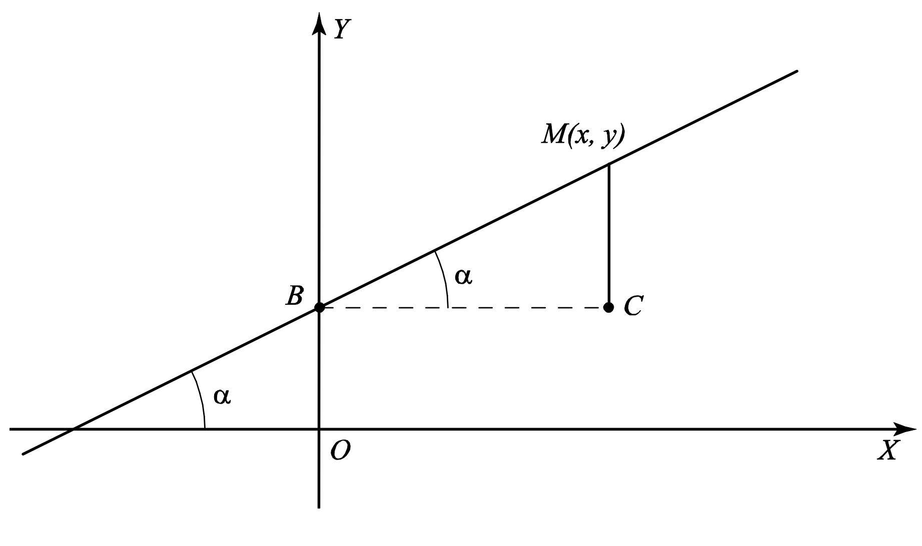


Рис. 2.1

Подставив в это выражение $CM = y - y_1$, $M_1C = x - x_1$, получим $\frac{y-y_1}{x-x_1} = k$ или $y - y_1 = k(x - x_1)$ – уравнение через точку M_1 (см. рис. 2.2).

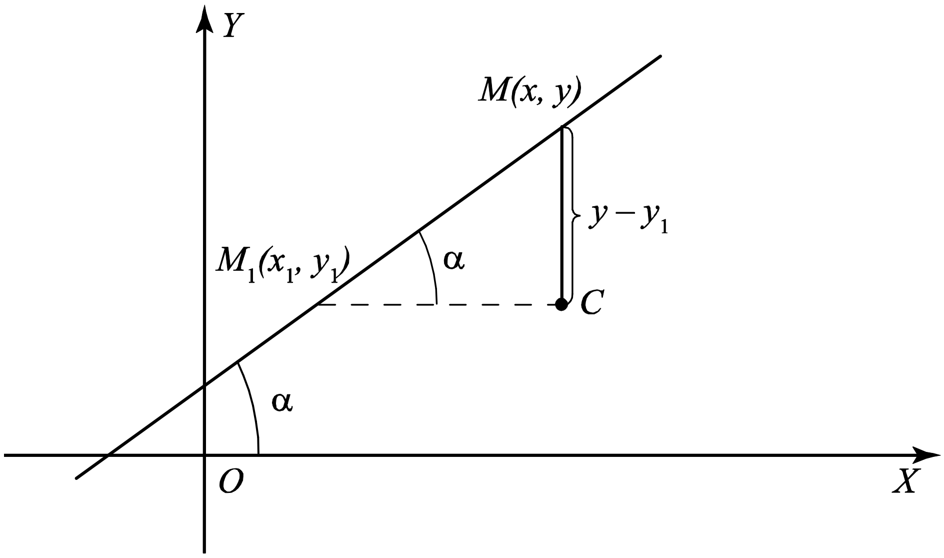


Рис. 2.2

2. Уравнение прямой, проходящей через 2 точки *(*M_1 и M_2) можно вывести аналогично из подобия треугольников ΔMM_1D и ΔM_1M_2C: $\frac{DNM}{CM_2} = \frac{M_1D}{M_1C}$ или $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (рис. 2.3).

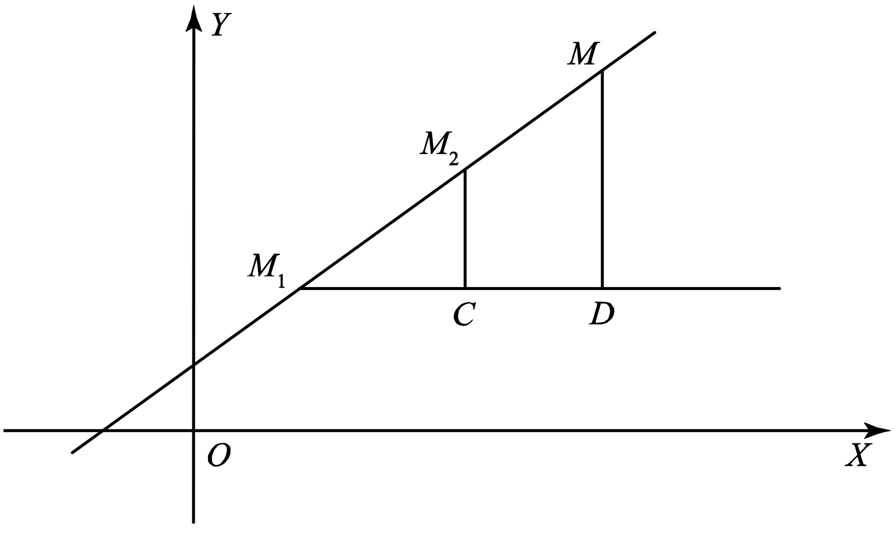


Рис. 2.3

3. Общий вид уравнения прямой. Замечаем, что все полученные уравнения обладают общим свойством: в них координаты текущей (произвольной) точки $M(x; y)$ входят линейно, т.е. в I степени.

Все эти уравнения являются частным случаем уравнения вида $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – произвольные постоянные числа.

Пример. Построить прямую по её общему уравнению $3x - 4y +$ $+12 = 0$.

Решение. В декартовой системе координат найдём две точки, через которые проходит эта прямая.

Положим $x = 0$, $-4 + 12 = 0 \Rightarrow y = 3$, точка $M_1(0; 3)$.

Теперь $y = 0{,}3x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4$, точка $M_2(-4; 0)$.

Если $A = 0$, $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ – прямая, параллельная оси OX.

Если $B = 0$, $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси OY.

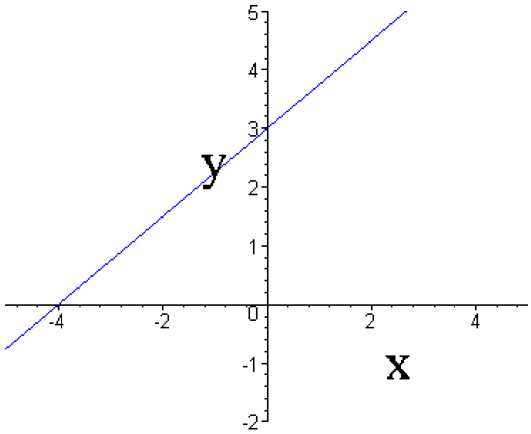


Рис. 2.4

Если $C = 0$, $Ax + By = 0$, $y = -\frac{A}{B}$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат (рис. 2.4).

2.2. Угол между прямыми

Пусть на плоскости XOY даны две непараллельные прямые (рис. 2.5). Эти прямые, пересекаясь, образуют 2 угла в точке M. Определим угол φ между I и II прямыми, если даны их уравнения с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.

По чертежу видим, что α_2 – внешний угол. Угол α_2 равен сумме двух внутренних углов этого треугольника не смежных с ним (см. рис. 2.5): $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi \Rightarrow \varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

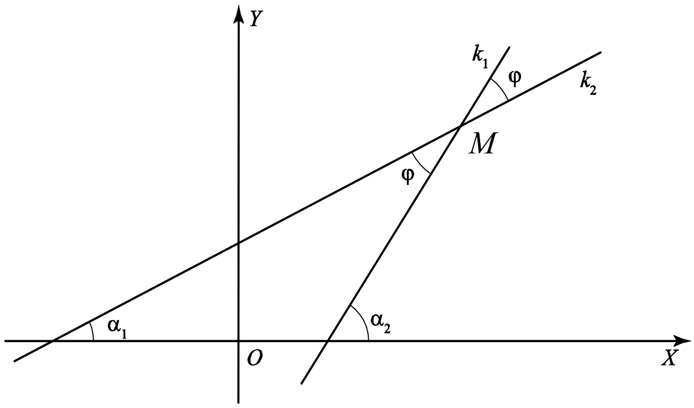


Рис. 2.5

Найдём tg этих выражений:

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1 \times \mathrm{tg}\alpha_2}, \quad \mathrm{tg}\alpha_1 = k_1, \quad \mathrm{tg}\alpha_2 = k_2.$$

Получим формулу $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Пример 2.2.1. Найти угол между прямыми $2x + 3y - 1 = 0$ и $x - 3y + 5 = 0$.

Решение. Приведём уравнение к уравнению с угловыми коэффициентами:

$$3y = 1 - 2x \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3},\ k_2 = -\frac{2}{3},$$

$$-3y = -5 - x \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3},\ k_1 = \frac{1}{3};$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = -\frac{9}{7}, \quad \varphi = -\text{arctg}\frac{9}{7} = -52°,7 \approx 180 - 52°,7.$$

Замечание. Определим условие перпендикулярности и параллельности прямых из формулы $\text{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а $\text{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует. Дробь не существует, когда знаменатель её равен 0, т.е. $1 + k_1 k_2 = 0$ или $k_1 k_2 = -1$, $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ – условие перпендикулярности.

Если прямые параллельны, то, $\varphi = 0$, *а* $\text{tg}0 = 0$, следовательно дробь должна быть равна 0, а это возможно, если $k_2 - k_1 = 0$, т.е. $k_2 = k_1$.

Пример 2.2.2. Дана прямая $3x - 4y + 4 = 0$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку M (2, –1). Прямая: *a*) параллельна данной; *b*) перпендикулярна к ней.

Решение. Приведём уравнение к уравнению с угловым коэффициентом:

$$-4y = -3x - 4;\ y = \frac{3}{4}x + 1;\ k = \frac{3}{4}.$$

Из условия параллельности $k_1 = \frac{3}{4}$. Тогда, используя уравнение прямой через данную точку $y - y_1 = k\,(x - x_1)$:

a) $y + 1 = \frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow 4\ y + 4 = 3\ \ x - 6 \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0;$

b) если $k = \frac{3}{4}$, по условию перпендикулярности

$$y + 1 = \frac{-4}{3}(x - 2);\ 3y + 3 = -4x + 8;\ 4x + 3y - 5 = 0.$$

Пример 2.2.3. Даны 3 точки $A(3; -13)$, $B(21; -1)$, $C(10; -4)$. Доказать, что эти 3 точки не лежат на одной прямой, т.е. образуют треугольник.

Решение. Найдем уравнения всех сторон треугольника по формулам уравнения прямых через 2 точки.

Уравнение *AB:*

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A};\quad \frac{x-3}{21-3}=\frac{y+13}{-1-13};$$

$$\frac{x-3}{18}=\frac{y+13}{12};\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y+13}{2};$$

$$2x-6=3y+39 \Rightarrow 2x-3y-45=0.$$

Уравнение *BC*:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B};\quad \frac{x-21}{10-321}=\frac{y+1}{-4+1};\quad \frac{x-21}{-11}=\frac{y+1}{-3};$$

$$3x-11y-74=0.$$

Уравнение *AC*:

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A};\quad \frac{x-3}{10-3}=\frac{y+13}{-4+13};\quad \frac{x-3}{7}=\frac{y+13}{9};$$

$$9x-27=7y+91;\quad 9x-7y-118=0.$$

Построим эти точки в системе координат. По уравнению линий видим, что угловые коэффициенты их различны, и точка A не принадлежит прямой BC. Подставив координаты точки A в уравнение BC, имеем: $3x-11y-74=0$, $3\cdot 3-11\cdot(-13)-74\neq 0$, следовательно, прямые образуют треугольник.

Найдем $\angle C$ между AC и BC. AC: $9x-7y-118=0$, $k_{AC}=\dfrac{9}{7}$.

BC: $3x-11y-74=0$, $k_{BC}=\dfrac{3}{11}$.

Пусть $k_1=\dfrac{9}{7}$, $k_2=\dfrac{3}{11}$, $\operatorname{tg}\angle ACB=\dfrac{\frac{9}{7}-\frac{3}{11}}{1+\frac{9}{7}\cdot\frac{3}{11}}=\dfrac{78}{50}\approx 1{,}56$, $\angle ACB\approx 57{,}3^\circ$.

Пример 2.2.4. Вычислить периметр треугольника.

Решение. Найдем расстояние между точками A и B, B и C, C и A:

$$d_{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(21-3)^2+(-1-(-13))^2}=$$

$$=\sqrt{18^2+12^2}=\sqrt{324-144}=\sqrt{468}.$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(21-10)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{121+9} = \sqrt{129}.$$

$$d_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-10)^2 + (-13+4)^2} =$$

$$= \sqrt{49+81} = \sqrt{130}.$$

$$\text{P} = \sqrt{468} + \sqrt{129} + \sqrt{130} \approx 21{,}6 + 11{,}4 + 11{,}4 \approx 44{,}4.$$

2.3. Расстояние от точки до прямой. Вывод нормального уравнения прямой

Предположим, что в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ выполняется условие $A^2 + B^2 = 1$. Геометрически это означает, что если провести из начала координат на прямую вектор, то его длина равна 1 (рис. 2.7). Вектор $\vec{n}$ – нормальный (перпендикулярный) единичный вектор прямой, где A и B – проекции этого вектора на оси OX и OY. В этом случае уравнение называем нормальным и записываем так: $A_0x + B_0y + C_0 = 0$. Любое другое уравнение прямой (общее) приведем к нормальному виду, если разделим его левую часть на $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, тогда $N = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ является нормирующим множителем. Иногда это уравнение записывается так: $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ или $x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi + p = 0$, т.е. $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} < 1 = \cos\varphi$ (φ – угол наклона нормального вектора к оси OX); $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi$, $p = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – длина вектора $\vec{n}$.

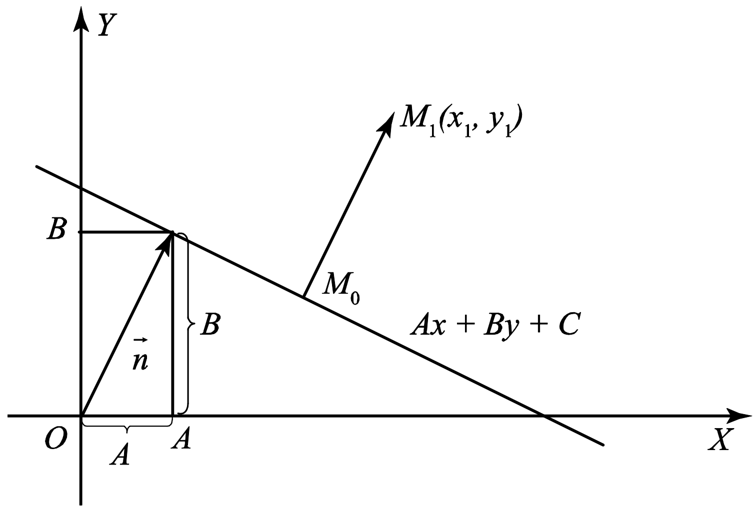


Рис. 2.7

Найдем расстояние от $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$. Приведем уравнение прямой к нормальному виду. Для этого умножим на $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – нормирующий множитель. Получим $A_0x + B_0y + C_0 = 0$ и подставим $M(x_1, y_1)$ в это уравнение. Тогда $A_0x + B_0y + C_0 = d$. $(A_0^2 + B_0^2) = d$, т.к. $A_0^2 + B_0^2 = 1$ для вектора $\vec{n}$. Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ – вектор расстояния от M_1 до прямой. Длина вектора $\overrightarrow{M_0M_1} = |\overrightarrow{M_0M_1}| = |d|$, т.к. $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{n} \cdot d$ (см. рис. 2.7). Следовательно, $|d| = |A_0x + B_0y + C_0|$ – расстояние от M до прямой $Ax +$ $+By + C = 0$ или $|d| = \left|\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

Пример 2.3.1. Найти расстояние от $M(-1; 2)$ до прямой $5x + 12y +$ $+ 8 = 0$.

Решение. Приведем уравнение прямой к нормальному виду, умножив его на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{1}{13}$:

$$\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + \frac{8}{13} = 0.$$

Подставим $x = -1$, $y = 2$ в уравнение:

$$d = \left|\frac{5}{13}(-1) - \frac{12}{13}(2) + \frac{8}{13}\right| = \frac{21}{13}.$$

Пример 2.3.2. Составить уравнение биссектрисы угла для двух прямых $3x - 4y + 12 = 0$ и $12x + 5y - 7 = 0$ (рис. 2.8).

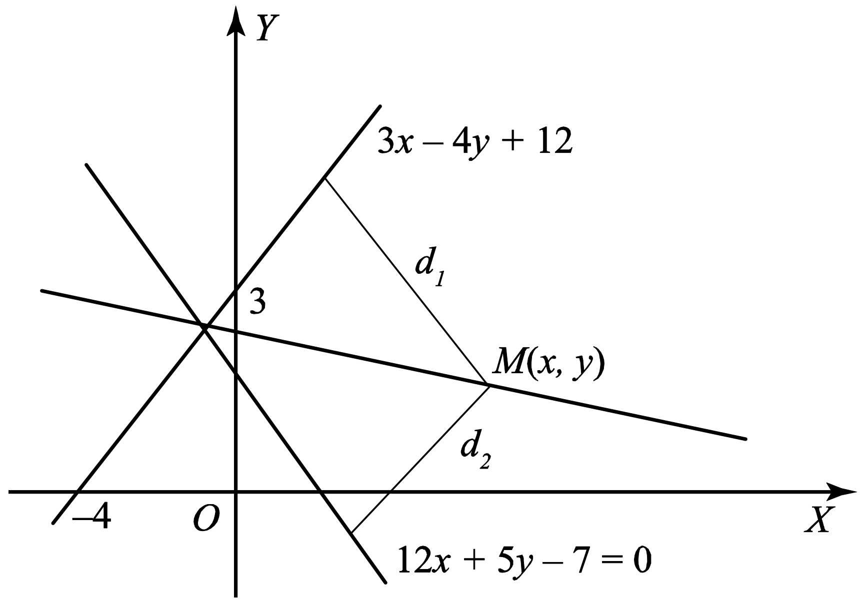


Рис. 2.8

Решение. Выберем на биссектрисе произвольную точку $M(x_0, y_0)$. Найдем расстояния d_1 и d_2 до прямых:

$$d_1 = \left|\frac{3x_0 - 4y_0 + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right|, \quad d_2 = \left|\frac{12x_0 + 5y_0 - 7}{\sqrt{12^2 + (5)^2}}\right|.$$

Свойство точек, лежащих на биссектрисе, – равноудаленность от прямых – используем для получения уравнения биссектрисы $d_1 = d_2$:

$\left|\frac{3x_0 - 4y_0 + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \left|\frac{12x_0 + 5y_0 - 7}{\sqrt{12^2 + (5)^2}}\right|$, получим $\frac{3x_0 - 4y_0 + 12}{\sqrt{25}} = \pm\frac{12x_0 + 5y_0 - 7}{\sqrt{144 + 25}}$, отсюда

$$\frac{3x_0 - 4y_0 + 12}{5} = \frac{12x_0 + 5y_0 - 7}{13} \Rightarrow 39x_0 - 52y_0 + 156 = 60x_0 + 25y_0 - 35.$$

$21x_0 + 77y_0 - 191 = 0$ – искомое уравнение биссектрисы I и $99x_0 - 27y_0 - 121 = 0$ – уравнение биссектрисы II. По чертежу можно определить искомую прямую: $21x_0 + 77y_0 - 191 = 0$; если $x_0 = 0$, то $y_0 = \frac{191}{77} \approx 2{,}5$; если $y_0 = 0$, то $x_0 = \frac{191}{21} \approx 9$ – координаты точек, пересечения с осями совпадают с найденными. Следовательно, искомая биссектриса имеет уравнение $21x_0 + 77y_0 - 191 = 0$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте условие параллельности двух прямых.
2. Как определить величину угла между двумя прямыми?
3. В каком соотношении находятся угловые коэффициенты перпендикулярных прямых?
4. В каком соотношении находятся угловые коэффициенты параллельных прямых?
5. Сформулируйте условие параллельности прямых, заданных их общими уравнениями.
6. Каким равенством выражается условие перпендикулярности прямых, заданных их общим уравнением?

Контрольные задания

1. Найти углы, образуемые с осью Ox прямыми: 1) $2x + 2y - 5 = 0$; 2) $3x - 3y + 1 = 0$; 3) $4y + 5 = 0$; 4) $2x + 9 = 0$.

2. Через точку пересечения прямых $4x - 5y + 2 = 0$, $2x + 7y - 18 = 0$ провести прямую под углом $\varphi = 45^\circ$ к прямой $3x - 5y + 3 = 0$.

3. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x + 4y - 12 = 0$, $4x - 3y + 5 = 0$, $7x + y - 6 = 0$.

4. Даны две стороны параллелограмма $x + y - 2 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$ и точка E (2; 3) пересечения диагоналей. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

5. Написать уравнения прямых, параллельных биссектрисе второго координатного угла и отсекающих на оси Oy отрезки: 1) $b = 4$; 2) $b = -5$; $b = 3{,}5$.

6. Написать уравнения двух перпендикуляров к прямой $2x - 3y - 6 = 0$, восстановленных в точках пересечения ее с осями координат.

7. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с осью Ox соответственно углы: 1) $\alpha = 30^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ$; 3) $\alpha = 120^\circ$.

8. Найти уравнения прямых, отсекающих на оси Oy отрезок $b = 7$ и наклоненных к оси Ox соответственно под углами а) $\alpha = 45^\circ$; б) $\alpha = 60^\circ$; в) $\alpha = 180^\circ$.

9. Определить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $3x + 8y - 24 = 0$.

10. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника с вершинами P (– 4; 2), Q (0; – 1), R (3; 3).

Глава 3
ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Уравнение плоскости в пространстве

Рассмотрим в пространстве декартовой системы координат плоскость, проходящую через произвольную точку $M(x, y, z)$ и перпендикулярную некоторому вектору $\vec{N}\{A, B, C\}$ (рис. 3.1).

Возьмем на плоскости произвольную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и построим вектор $\overrightarrow{M_1M}$. Полученный вектор $\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{N}$ (по свойству: прямая $\perp$ к плоскости, перпендикулярна любой прямой в этой плоскости). Условие перпендикулярности векторов – их скалярное произведение = 0, $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{N} = 0$, вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$ (из координат конца вычесть координаты начала).

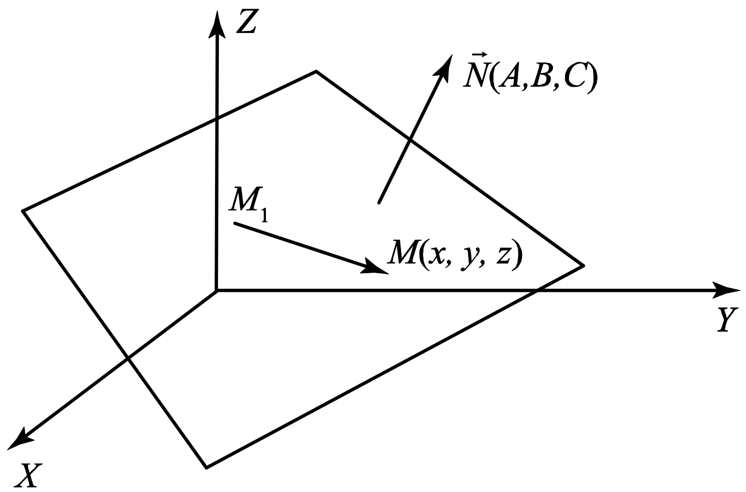


Рис. 3.1

Отсюда $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{N} = (x - x_1)A + (y - y_1)B + (z - z_1)C = 0$ – условие I или $Ax + By + Cz - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = 0$, т.к. $-Ax_1 - By_1 - Cz_1$ – постоянное число, обозначим его D. $Ax + By + Cz + D = 0$ – получим общее уравнение плоскости, где A, B, C – проекции нормального вектора плоскости $\vec{N}\{A, B, C\}$.

Пример 3.1.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через $M_1(2, -1, 3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{N}\{1, 2, -4\}$.

Решение. $1(x - 2) + 2(y + 1) - 4(z - 3) = 0 \Rightarrow x + 2y - 4z + 12 = 0$ – уравнение искомой плоскости.

Пример 3.1.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через M (2, 1, –2) параллельно плоскости π, заданной уравнением $-3x-4y-12z+12=0$.

Решение. Т.к. плоскости параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны, т.е. $\overline{N_1}$ {– 3, – 4, – 12} – вектор первой плоскости π коллинеарен $\vec{N}_2$ для искомой плоскости. Возьмем вектор $\overline{N_2}=\overline{N_1}$, т.е. $\overline{N_2}$ ={–3, –4, –12}, т.к. коэффициент соответственных координат равен 1.

Тогда уравнение плоскости запишется следующим образом:

$$-3(x-2)-4(y-1)-12(z+2)=0,$$

$$-3x-4y-12z+6+4-24=0 \text{ или}$$

$$-3x-4y-12z-14=0.$$

3.2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть плоскость проходит через 3 данные точки, не лежащие на одной прямой: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Любая произвольная точка $M(x, y, z)$ образует с данными точками векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, лежащие в одной плоскости, т.е. векторы компланарные (рис. 3.2).

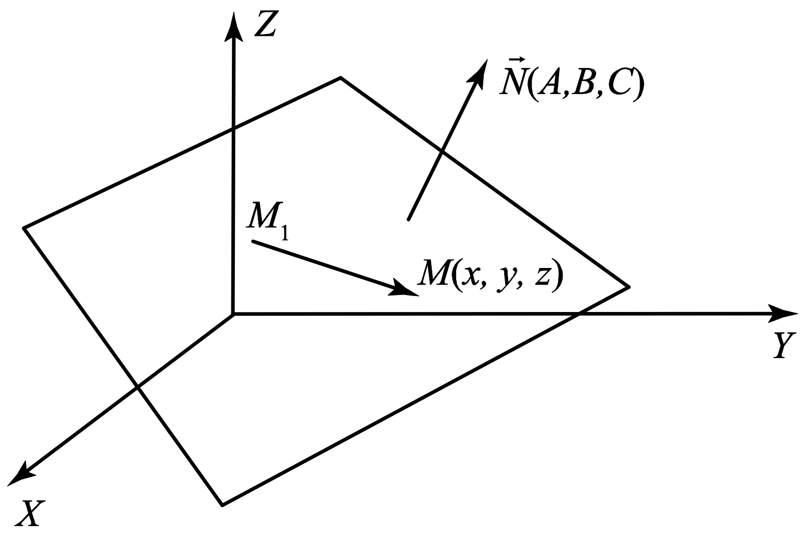


Рис. 3.2

Условие их компланарности будет векторным уравнением плоскости:

$$\overline{M_1M}\cdot\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}=0.$$

Запишем это уравнение в координатной форме, используя условие компланарности векторов, заданных в проекциях:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Записать уравнение плоскости грани η пирамиды, проходящей через точки A_1, A_2, A_3, если $A_1(2,\ 0,\ -2)$, $A_2(6,\ 2,\ -6)$, $A_3(-2,\ 4,\ -4)$.

Решение. Образуем векторы, лежащие в плоскости π. Возьмем произвольную точку $M(x,\ y,\ z)$. Получаем уравнение через определитель III порядка:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+2 \\ 6-2 & 2-0 & -6+2 \\ -2-2 & 4-0 & -4+2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+2 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-2)(-4-16) - y(-8-16) + (z+2)(16+8) = 0,$$

$$(x-2)(-20) - y(-24) + (z+2)(24) = 0 \ \text{(сокращаем на – 4)},$$

$$5(x-2) - 6y - 6(z+2) = 0,$$

$$5x - 6y - 6z - 10 - 12 = 0,$$

$$5x - 6y - 6z - 22 = 0 \ \text{– уравнение плоскости } \pi.$$

3.3. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Аналогично тому, как выводится нормальное уравнение прямой из общего уравнения, так же получается и нормальное уравнение плоскости.

По аналогии запишем $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости, тогда нормирующий множитель $N = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ и

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z +$$
$$+ \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

или $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + p = 0$ – нормальное уравнение плоскости.

α, β, γ – углы, образованные нормальными векторами с осями координат.

Расстояние от точки до плоскости рассчитывается по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

Пример. Дана плоскость $x+4y+8z+26=0$ и точка (1,0,0). Найти расстояние от точки до плоскости.

Решение.

$$d = \left|\frac{x_0+4y_0+8z_0+26}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}}\right| = \left|\frac{1+4*0+8*0+26}{\sqrt{1+4^2+8^2}}\right| = \frac{27}{\sqrt{81}} = \frac{27}{9}.$$

3.4. Угол между плоскостями

Если две плоскости даны уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то их нормальные векторы – $\overrightarrow{N_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\overrightarrow{N_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$.

Пример. Определить угол между плоскостями I и II (рис. 3.3).

Решение. Определение угла между плоскостями сводится к нахождению угла между векторами (см. рис. 3.3). Перенесем $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ в любую точку пространства и определим φ по скалярному произведению двух векторов:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

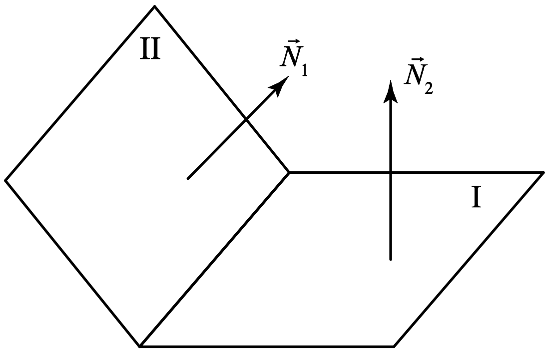


Рис. 3.3

Условие перпендикулярности двух плоскостей: $\cos\varphi = 0$, или $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$, параллельности: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ – const.

3.5. Прямая в пространстве

1. Каноническое уравнение прямой (рис. 3.4).

Пусть прямая проходит через M_1 параллельно данному вектору $\vec{s}\ \{m, n, p\}$.

Напишем уравнение этой прямой. Для этого возьмем на ней произвольную точку $M\ (x, y, z)$. Составим вектор $\overrightarrow{M_1M}$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{\, x - x_1, y - y_1, z - z_1 \,\}.$$

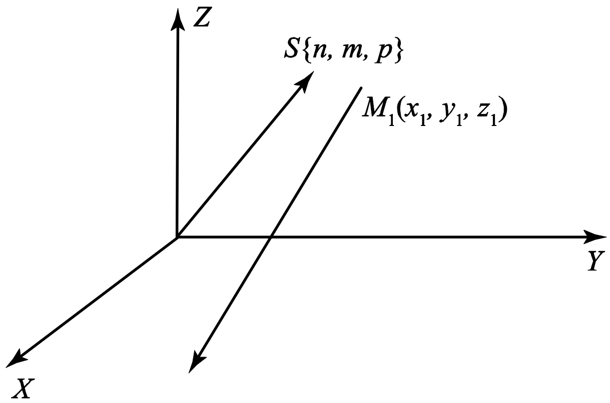


Рис. 3.4

Этот вектор будет коллинеарен вектору $\vec{s}$. По условию коллинеарности векторов можно записать $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ – это уравнение называется каноническим уравнением прямой в пространстве.

Вектор $\vec{s}\{m,\ n,\ p\}$ называется направляющим вектором этой прямой. Если $\vec{s}$ – единичный вектор, т.е. $|\vec{s}| = 1$, то $m = \cos\alpha$; $n = \cos\beta$; $p = \cos\gamma$, где α, β, γ – углы, образуемые вектором $\vec{s}$ с осями OX; OY; OZ.

2. Параметрическое уравнение прямой.

Положим в канонических уравнениях отношения равными t-параметру: $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} = t$,

тогда получим $\frac{x - x_1}{m} = t$, $\frac{y - y_1}{n} = t$, $\frac{z - z_1}{p} = t$, или $\left.\begin{array}{l} x - x_1 = mt \Rightarrow x = x_1 + mt \\ y - y_1 = nt \Rightarrow y = y_1 + nt \\ z - z_1 = pt \Rightarrow z = z_1 + pt \end{array}\right\}$ – параметрическое уравнение прямой.

Здесь x_1, y_1, z_1 – координаты точки M_1, а m, n, p – проекции направляющего вектора $\vec{s}$.

Пример 3.5.1. Составить каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, 2, 3)$ и параллельно вектору $\vec{s}\{2, -7, 10\}$.

Решение. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-7}=\dfrac{z-3}{10}$ – каноническое уравнение.

$$\frac{x+1}{2}=t \Rightarrow x+1=2t \Rightarrow x=-1+2t;$$

$$\frac{y-2}{-7}=t \Rightarrow y-2=-7t \Rightarrow y=2-7t;$$

$$\frac{z-3}{10}=t \Rightarrow z=3+10t;$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1+2t \\ y=2-7t \\ z=3+10t \end{array}\right\}$$ – параметрическое уравнение прямой.

3. Уравнение прямой, проходящей через 2 точки.

Пусть прямая проходит через 2 точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2.z_2)$.

Составим вектор $\vec{s}$, лежащий на прямой: $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ – это направляющий вектор прямой. Тогда можно записать уравнение прямой через 2 точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пример 3.5.2. Составить уравнение ребра A_1A_4 пирамиды с вершинами $A_1(2,0,-2)$, $A_2(6,2,-6)$, $A_3(-2,4,-4)$, $A_4(-2,-10,-8)$.

Решение. Используем уравнение прямой, проходящей через 2 точки – A_1 и A_4:

$$\frac{x-2}{-2-2}=\frac{y-0}{-10-0}=\frac{z+2}{-8+2} \Rightarrow \frac{x-2}{-4}=\frac{y}{-10}=\frac{z+2}{-6}.$$

Здесь $\{-4, -10, -6\}$ – координаты направляющего вектора прямой – ребра пирамиды $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Контрольные вопросы

1. Чем определяется угловой коэффициент прямой?

2. Каким образом определяется расстояние от точки до плоскости?

3. Как определить угол между двумя плоскостями?

4. Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.

5. Приведите вывод канонического уравнения прямой.

6. Что такое направляющий вектор прямой?

Контрольные задания

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку B (5; 3) и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (5; 0)$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку C (– 3; 3) и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (-3; 2)$.

3.** Составить уравнение высоты *BD* в треугольнике с вершинами *A* (7; 0), *B* (3; 6), *C* (–1; 1).

4.* Составить уравнения диагоналей ромба, заданного точками *A* (2; 2), *B* (3; 5), *C* (4; 2), *D* (3; –1).

5. Составить уравнения сторон квадрата, заданного точками *A* (1; 1), *B* (4; 2), *C* (5; – 1), *D* (2; – 2).

6.** Треугольник задан точками *A*(5; 2), *B*(–1; –4), *C*(–5; –3). Составить уравнение прямой, проходящей через точку *B* параллельно *AC*.

7. Составить уравнения прямых, заданных двумя точками:

a) *A*(1; 3), *B*(4; 1);
b) *C*(–1; 5), *D*(3; –7);
c) *M*(–3; 0), *N*(0; 5);
d) *P*(0; 0), *Q*(–3; 5);
e) *A*(3; –5), *B*(3; 7);
f) *C*(7; –1), *D*(–1; –1).

8.* Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (– 1; 2), *B* (5; 3), *C* (4; – 2).

9.* Составить уравнения диагоналей квадрата *ABCD*, заданного точками *A* (1; 1), *B* (4; 2), *C* (5; –1), *D* (2; –2).

10. Указать, какая пара уравнений соответствует параллельным прямым:

a) $2x - 3y + 5 = 0,$
$6x - 9y + 1 = 0;$

b) $5x - y + 4 = 0,$
$10x - 2y + 1 = 0;$

c) $6x - 3y - 1 = 0,$
$2x - 5y + 5 = 0;$

d) $3x + 2y + 3 = 0,$
$3x - 2y - 1 = 0;$

e) $6x + 10y + 1=0,$
$3x + 5y = 0;$

f) $6x - 3y + 7 = 0,$
$2x + y + 1 = 0.$

11. Указать, какая пара уравнений соответствует перпендикулярным прямым:

a) $2x + 3y - 7 = 0,$
$3x - 2y = 0;$

b) $5x - 2y + 1 = 0,$
$4x + 10y - 1 = 0;$

c) $6x - 4y + 7 = 0,$
$8x - 12y - 1 = 0.$

12.** Составить уравнение высоты *AD* треугольника, заданного точками *A* (–5; 3), *B* (3; 7), *C* (4; –1).

Глава 4
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

4.1. Предел последовательности. Предел функции

Числовой последовательностью называется функция $x_n = f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3, \ldots)$, определённая на множестве натуральных чисел. Каждое значение x_n называется элементом последовательности, а число n – его номером.

Обозначают: $\{x_n\}$ или (x_n).

Число a называют пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $E > 0$ существует такое натуральное число N, что при всех $n > \mathrm{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon . \qquad (*)$$

Обозначают: $\lim x_n = a;\ \ x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Неравенство (*) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < \varepsilon + a$.

Последовательности, имеющие предел, называются сходящимися; если нет предела – расходящимися.

Из определения предела последовательности следует, что предел постоянной равен этой постоянной:

$$\lim c = c \ \ (c - const).$$

Бесконечно малой последовательностью называется $\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Для двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha\}$ и $\{\beta_n\}$ сумма, разность и произведение тоже является бесконечно малыми последовательностями:

1) последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > \varepsilon$, при этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$;

2) число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $S > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначение предела $f(x)$ в точке a:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b;\ f(x)\to b \text{ при } x\to a.$$

Если $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ имеют конечный предел при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\pm f_2(x)+f_3(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x_1)\pm\lim_{x\to a} f_2(x)+\lim_{x\to a} f_3(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)\cdot\lim_{x\to a} f_3(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim f(x)\right)^n;$$

$$\lim_{x\to a}\left(cf_1(x)\right)=c\lim_{x\to a} f(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)},\ \lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0;$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f_1(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f_1(x)}.$$

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, одновременно обращающиеся в ноль при $x=a$, $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$.

Отношение $\dfrac{f(a)}{\varphi(a)}$ теряет смысл при $x=a$. Тогда говорят, что функция $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке a имеет неопределенность $\frac{0}{0}$. Предел указанного отношения может существовать. Задача отыскания предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ называется раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Если при $x\to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремятся к ∞, то говорят, что в точке a функция $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Данная задача раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ называется отысканием предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

Пример 4.1.1. В каких границах меняется x, если $|x-1|<3$?

Решение. Неравенство $|x-1|<3 \sim -3<x-1<3$, откуда $1-3<$ $<x<3+1$; таким образом, $-2<x<4$.

Пример 4.1.2. Показать, что последовательность $X_n=\frac{1}{n}(n=1, 2,\ldots)$ принимает значения: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{n}, \ldots$

Решение. Пусть $\varepsilon = 0{,}001$. Неравенство $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$ будет иметь место, когда $n > 1000 \Rightarrow N = 1000$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что, начиная с некоторого значения n, выполняется неравенство (*). В данном случае $Y_n = \frac{1}{n}$ и $a = 0$.

Неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, или $\frac{1}{n} < \varepsilon$, будет выполняться, когда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве числа N можно взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено $\frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это означает, что X_n имеет пределом нуль, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Пример 4.1.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+4x+5\right)$.

Решение. На основании свойств пределов получим

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2+4x+5\right) = 3\lim_{x\to 2}\left(x^2\right) + 4\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5 =$$

$$= 3\left(\lim_{x\to 2}\right)^2 + 4\lim_{x\to 2} x + 5 = 3\cdot 2^5 + 4\cdot 2 + 5 = 25.$$

Замечание. Предел многочлена $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_n x_n$ при $x \to a$, достаточно вычислить $P_n(a)$, т.е. его значение при $x \to a$.

Пример 4.1.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x+6}{3x+1}$.

Решение. На основании свойств пределов находим:

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x+6}{3x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}(5x+6)}{\lim\limits_{x\to 4}(3x+1)} = \frac{5\lim\limits_{x\to 4} x + \lim\limits_{x\to 4} 6}{3\lim\limits_{x\to 4} x + \lim\limits_{x\to 4} 1} = \frac{5\cdot 4+6}{3\cdot 4+1} = \frac{26}{13} = 2.$$

Пример 4.1.5. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Решение. Числитель и знаменатель данной функции при $x = 3$ образуется в нуль (неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Преобразуем данное выражение, разложив числитель на множители и сократив на $x - 3 \neq 0$:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-2) = 3-2 = 1.$$

Пример 4.1.6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4+x^3+x^2+2x-6}{x^3-1}$.

Решение. При x = 1 числитель и знаменатель обращаются в нуль. Разложим на множители:

$$x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right).$$

$2x^4+x^3+x^2+2x-6=(x-1)\left(2x^3+3x^2+4x+6\right)$ – путем деления на x–1 сокращаем числитель и знаменатель на $(x-1)\neq 0$ и переходя к пределу получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^4+x^3+x^2+2x-6}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+4x+6}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{2\cdot 1^3+3\cdot 1^2+4\cdot 1+6}{1^2+1+1}=\frac{15}{3}=5.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределённость вида $\frac{0}{0}$, заданную отношением двух многочленов, необходимо предварительно и в числителе, и в знаменателе выделить приблизительный множитель (т.е. множитель равный нулю при предельном значении x), сократить на него выражение и затем перейти к пределу.

Пример 4.1.7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$.

Решение. При $x\to\infty$ числитель и знаменатель неограниченно увеличиваются (неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$). Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив числитель и знаменатель на старшую степень x, т.е. на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{6+0+0}{3+0+0}=2.$$

Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{x^2}=0$, $a=const$.

Пример 4.1.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-5}{2x^3+8x^2-9}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на x^3, т. е. на старшую степень y, и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-5}{2x^3+8x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{2+\frac{8}{x}-\frac{9}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{8}{x}-\frac{9}{x^3}\right)}=\frac{0+0+0}{2+0-0}=0.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданную отношением двух многочленов, необходимо предварительно и в числителе, и в знаменателе выделить критический множитель (т.е. множитель равный нулю при предельном значении x), сократить на него выражение и затем перейти к пределу.

Пример 4.1.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

Решение. Заметим, что при x = 3 числитель и знаменатель обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональное выражение $\sqrt{x+1}$. Избавимся от иррациональности, умножив числитель и знаменатель на ($\sqrt{x+1}-2$) и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-2^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}=$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)(\sqrt{3+1}+2)=24.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, в которой числитель и знаменатель содержат иррациональность, необходимо предварительно избавиться от иррациональности.

4.2. Число е

Числом е называется предел

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\text{e или }\lim_{\beta\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\text{e}. \quad (4.1)$$

е – число иррациональное, е ≈ 2,71828… Число е может применяться при раскрытии неопределенности вида 1^∞.

Если угол α выражен в радианах, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \quad (4.2)$$

Пример 4.2.1. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^n$.

Решение. При $n\to\infty$ $(1+\frac{3}{n})\to 1$ получаем неопределенность вида 1^∞. По формуле (4.1) положим $\frac{3}{n}=\alpha$, тогда $n=\frac{3}{\alpha}$.

Если $n\to\infty$, то $\alpha\to 0$. На основании свойства пределов $[\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to a}f(x))^n]$ и (4.1) получаем

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^n=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^3=[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^3=\mathrm{e}^3.$$

Пример 4.2.2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x}{x+2})^x$.

Решение. Имеет место неопределенность 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-2}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)^x=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\alpha\frac{2}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-2}(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}})^{-2}=\mathrm{e}^{-2},$$

т.к. $\alpha\to 0$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-2}=1$.

Пример 4.2.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. <u>*Способ 1.*</u> При $x = 0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Чтобы раскрыть эту неопределенность, положим $3x = \alpha$, тогда $x = \alpha/3$; если $x\to 0$, то $\alpha\to 0$. Подставив в условие данные равенства и используя формулу (2), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/3}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\sin\alpha}{\alpha}=3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=3\cdot 1=3.$$

<u>*Способ 2.*</u> Умножим числитель и знаменатель на 3, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Пример 4.2.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 2/x)^2}{x^2}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия применим формулу (4.1):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/2\sin(x/2)}{1/2x}\lim_{x\to 0}\frac{1/2\sin(x/2)}{1/2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

Пример 4.2.5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$.

Решение. При данном x числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональность. Освободимся от иррациональности и воспользуемся (4.1).

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+4}-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+4}+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+4}+2)=$$

$$=1*(2+2)=4.$$

Пример 4.2.6. Используя второй замечательный предел, найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3-5+5}{n+5}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+5}\right)^{n+4}.$$

Сделаем замену переменной:

$$-\frac{2}{n+5}=\frac{1}{x},\quad -2x=n+5.$$

$$n=-2x-5.$$

Если $n\to\infty$ то $x\to-\infty$, тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x-5+4}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}\cdot[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}]^2=$$

$$=1\cdot \mathrm{e}^{-2}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}.$$

Пример 4.2.7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+2n+3+2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right]^{\frac{4n^2+2n+3}{2n-4}\cdot\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}(1-2n)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-4)(1-2n)}{4n^2+2n+3}}=$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-4-4n^2+8n}{4n^2+2n+3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^2+10n-4}{4n^2+2n+3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{10}{n}-\frac{4}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Что называется пределом числовой последовательности?
3. Какая последовательность называется сходящейся (расходящейся)?
4. Что такое бесконечно малая и бесконечно большая последовательности?
5. Что называется пределом функции?
6. Каким образом раскрывается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$?
7. Сформулируйте правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Контрольные задания

1. В каких границах меняется x, если:

a) $|x| < 2$; *c)* $|x-2| < 5$;

b) $|x+1| < 2$; *d)* $|x+3| < 7$.

2. Найти пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+4)$; *k)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$; *l)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}$;

c) ** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$;

e) * $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-6x+7)$;

g) * $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$;

h) * $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$;

j) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$;

m) * $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+8}{2x^3-x+1}$;

n) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x-1}{2x^3+5x^2}$;

o) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}$;

p) ** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$;

q) ** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-2x+3}}$;

r) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+1}{x^2-2}$;

s) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{3x^3+7x+1}$.

Глава 5
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Область определения. Частные и полные приращения. Непрерывность функции нескольких переменных

Переменная U называется функцией от переменных (x, y, z … t), если в каждой системе значений x, y, z … t области их изменения соответствует определенное значение U.

$U = f(x, y, z \dots t)$ – символическое обозначение.

Для функции 2^x переменных $Z = f(x, y)$ – это совокупность точек плоскости OXY; для трех переменных – совокупность точек пространства.

Пример 5.1.1. Найти область определения функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Решение. Функция определена в тех и только в тех точках плоскости XOY, координаты которой удовлетворяют условию $XY > 0$. Все эти точки лежат внутри 1-го и 3-го координатных углов (открытая область) – т. (0,0) и точки на осях в эту область не входят.

Пример 5.1.2. Найти область определения функции

$$z = \frac{x^2 y}{2x+y}.$$

Решение. Здесь – вся область плоскости XOY, за исключением прямой $2x + y = 0$, т.е. там, где знаменатель обращается в ноль.

Пример 5.1.3. Найти область определения функции $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Решение. Область определения $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ – круг с центром в начале координат и радиусом $r = 1$, включая границу. Графическим изображением функции является полусфера, расположенная над плоскостью XOY (рис. 5.1).

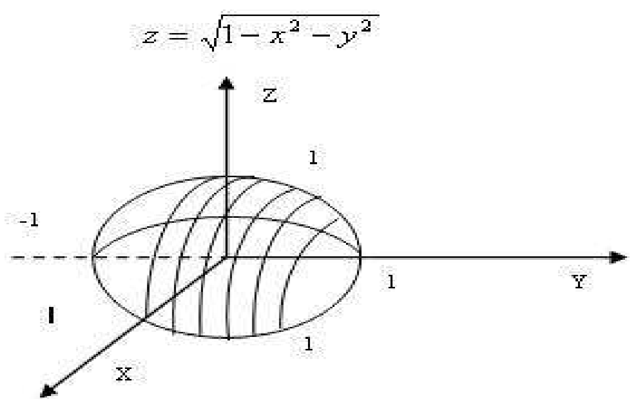


Рис. 5.1

5.2. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных

Функцию $U(x, y, z \ldots t)$ можно дифференцировать по каждому из её аргументов, считая при этом все остальные аргументы постоянными, $\frac{\partial u}{\partial x}$; $U_x{}'$ $U_y{}'$ $U_z{}'$ – варианты обозначения частных производных.

Пример 5.2.1. Найти частные производные от функции:

a) $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$;

b) $u = \frac{x}{y} + \frac{Y}{Z} - \frac{z}{x}$;

c) $z = \sqrt[x]{e^y} \Rightarrow z = e^{\frac{y}{x}}$.

Решение.

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 10yx - 3y^2$;

b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}$;

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$.

Пример 5.2.2. Вычислить значение частных производных в указанной точке

$$Z = \ln(x^2 - y^2);\ x = 2;\ y = -1.$$

Решение. Находим частные производные:

$$Z'_x = \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - y^2};\quad Z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2 - y^2};$$

$$Z'_x(2;-1) = \frac{2 \cdot 2}{2^2 - (-1)^2} = \frac{4}{3};\ Z'_y \pm (2;-1) = \frac{-2(-1)}{2^2 - (-1)^2} = \frac{2}{3}.$$

Пример 5.2.3. Проверить, что функция $z = x \cdot \ln\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = Z$.

Решение. Тождественно преобразуем данную функцию и найдем частные производные по x и y.

1. $Z = x(\ln y - \ln x)$; $\frac{\partial z}{\partial x} = -\ln x - \ln y - 1 = \ln\frac{y}{x} - 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{1}{y} = \frac{x}{y}$;

2. Подставим найденные значения z'_x и z'_y в данное выражение:

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = Z\ ;$$

$$x\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) + y \cdot \frac{x}{y} = x \cdot \ln\frac{y}{x} - x + x = x \cdot \ln\frac{y}{x} = Z\ ,$$

$$\text{т.е. } x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = Z\ .$$

Частным дифференциалом функции $u = f(x, y, z, \dots t)$ по x называется главная часть частного приращения

$$\Delta_x u = f\left(x + \Delta x, y, z, \dots t\right) - f(x, y, z, \dots t)\ .$$

Обозначение частного дифференциала функции – $d_x u,\ d_y u, \dots d_t u$.

Из определения частных производных следует, что

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx;\ \ d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy;\ \ d_t u = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt.$$

Полный дифференциал du функции u равен сумме всех ее частных дифференциалов:

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \dots\ d_t u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \dots \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt.$$

Пример 5.2.4. Найти полные дифференциалы функций:

a) $Z = 3x^2 y^5$;

b) $u = 2x^{y2}$.

Решение.

<u>*Способ 1.*</u> 1. Находим частные производные: $Z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 15x^2 y^4$.

2. Умножая частные производные на дифференциалы соответствующих аргументов, получим частные дифференциалы:

$$d_x z = 6xy^5 dx\ ;\ d_y z = 15x^2 y^4 dy\ .$$

Полный дифференциал найдем как сумму частных дифференциалов функции:

$$d_z = d_x z + d_y z = bxy^5 dx + 15x^2 y^4 dy\ .$$

<u>*Способ 2.*</u>

$$u'_x = 2 - yzx^{yz-1};\ u'_y = 2zx^{yz} \ln x\ ;\ u'_z = 2yx^{yz} \ln x\ ;$$

$$d_x u = 2yzx^{yz-1} dx\ ;\ \ d_y = 2zx^{yz} \ln x dy\ ;$$

$$d_z u = 2yx^{yz} \ln x dz\ ;$$

$$du = 2x^{yx}\left(\frac{yz}{x}dx + z\ln dy + y\ln xdz\right).$$

Пример 5.2.5. Вычислить значение полного дифференциала функции $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, при $x = 1$, $y = 3$, $dx = 0{,}01$, $dy = -0{,}05$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}\ \Bigg|\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2+x^2};$$

$$dxZ = \frac{dZ}{dx}dx = \frac{y}{x^2+y^2}dx\ ;\quad dyZ = \frac{dZ}{dy}\ dy = -\frac{x}{x^2+y^2}dy\ ;$$

$$dZ = \frac{y}{x^2+y^2}dx\ - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

Подставим значения переменных x, y, dy, dx; получим полный дифференциал:

$$dZ = \frac{3\cdot 0{,}01 - 1(-0{,}05)}{1^2+3^2} = \frac{0{,}03+0{,}05}{1+9} = \frac{0{,}08}{10} = 0{,}008\ .$$

Пример 5.2.6. Вычислить приближенно $1{,}08^{3,96}$.

Решение. Замещаем приращение функции ее полным дифференциалом:

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy + \ldots + f'_t(M_0)dt.$$

Полагая, что $1{,}08^{3,96}$ есть частное значение функции $f(x,y) = x^y$ в точке M_1 (1,08; 3,96) и что вспомогательная точка будет M_0 (1; 4), получим:

$$f(M_0) = 1'' = 1;\quad f'_x(M_0) = y\cdot x^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 4\cdot 1^{4-1} = 4;$$

$$f'_y(M_0) = x^y\ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 0\text{, так как } \ln 1 = 0;$$

$$dx = 1{,}08 - 1 = 0.08;\quad dy = 3{,}98 - 4 = -0{,}04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}08^{3,96} \approx f(M_0) + f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy =$$

$$= 1 + 4 * 0{,}08 + 0 * (-0{,}04) \approx 1{,}32.$$

5.3. Дифференцирование сложных функций

Функция Z называется **сложной функцией от независимых переменных** $x, y,\ldots, t$, если она задана через промежуточные аргументы $u, v, .., w$:

$$z = f(u, v, .., w);\ u = f(x, y, .., t);$$
$$v = \gamma(x, y, .., t);\ w = \tau(x, y, .., t).$$

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по независимой переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots.$$

Если все аргументы $u, v, .., w$ зависят от одной независимой переменной x, то z – сложная функция от x. Тогда производная сложной функции называется полной и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Пример 5.3.1. Дана сложная функция $y = u^2 \cdot e^v$, $u = \ln x$, $v = \cos x$. Найти частные производные.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2ue^v\cos x + u^2e^v(-\ln x).$$
$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\ln x\cdot e^{\cos x}\cdot\cos x + \ln^2 x\cdot\cos x\cdot e^{\cos x}(-\ln x) =$$
$$= 2\ln x\cdot e^{\cos x}\cdot\cos x - \ln^3 x\cdot\cos x\cdot e^{\cos x}.$$

Пример 5.3.2. Дана сложная функция $z = u^v$, $u = \ln(x-y)$, $v = e^{\frac{x}{y}}$. Найти частные производные.

Решение. Здесь z зависит от u и v, а сами u и v зависят от x и y. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1}\cdot\frac{1}{x-y} + u^v\ln u\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1}\cdot\frac{1}{y-x} - u^v\ln u\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x}{y^2}.$$

5.4. Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ первого порядка обычно зависят от тех же аргументов, и каждую из них можно дифференцировать по каждому аргументу. Обозначения: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{xx}$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{yy}$.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=u''_{xy}$ – смешанная частная производная.

Аналогично определяются производные III, IV,… порядков.

Пример 5.4.1. Найти частные производные второго порядка $z=x^3-2x^2y+3y^2$.

Решение. $z'_x=3x^2-2y\cdot 2x=3x^2-4xy$; $z'_y=-2x^2+6y$;

$$z''_{xx}=6x-4y;\quad z''_{xy}=z''_{yx}=-4x;\quad z''_{yy}=6.$$

Пример 5.4.2. Проверить, что $z''_{xy}=z''_{yx}$, если $z=\cos(ax-by)$.

Решение. $z''_x=-a\sin(ax-by)$; z'_x теперь по y: $z''_{xy}=ab\cos(ax-by)$.

Дифференцируем в другом порядке. Сначала z по y: $z'_y=b\sin(ax-by)$; затем z'_y по x: $\left(z'_y\right)'_x=z''_{yx}=ba\cos(ax-by)=ab\cos(ax-by)$.

Сравнивая результаты, видим: $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Пример 5.4.3. Проверить, что $z''_{xy}=z''_{yx}$., если $z=\ln\left(x^2+y^2+1\right)$,

Решение.

$$z'_x=\frac{2x}{x^2+y^2+1};\ z''_{xy}=-\frac{2\cdot 2yx}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}.$$

$$z'_y=\frac{2y}{x^2+y^2+1};\ z''_{yx}=-\frac{2\cdot 2yx}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}.$$

5.5. Экстремумы функций многих переменных

Функция многих переменных может иметь минимум и максимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функций.

Необходимое условие существования экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0\,, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\,. \end{cases}$$

Находим критические точки.

Достаточные условия: $\Delta = AC - B^2$, где $A=\dfrac{\partial^2 z}{dx^2}(M)$; $C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M)$ и $B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M)$.

Если $\Delta > 0$, то M – точка экстремума.

При A < 0 (или C < 0) M – точка максимума.

При A > 0 (C > 0) M – точка минимума.

Если $\Delta < 0$ – нет экстремума.

Если $\Delta = 0$ – требуются дополнительные условия для нахождения экстремума.

Пример. Найти экстремум $Z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Решение.

$$Z'_x = 3x^2 - 6y, \qquad Z'_x = 0 \qquad \left\{ \left(\dfrac{3x^2-6y=0}{24y^2-6x=0} \right) \right. .$$
$$Z'_y = 24y^2 - 6x\,, \qquad Z'_y = 0$$

Решая систему, получаем $M_1(0;\,0)$ и $M_2(1;\,1/2)$ – обе точки критические, т.к Z определена на всей OXY.

Исследуем критические точки:

$$Z''_{xx} = A = 6x, \quad Z''_{yy} = B = -6, \quad Z''_{yy} = 48y.$$

Для $M_1\,(0;\,0) = A = 0,\ B = -6,\ C=0,\ \Delta(M_1)=AC - B^2 < 0$.

Для $M_2\,(1;\tfrac{1}{2}) = A = 6,\ B = -6,\ C = 24,\ \Delta(M_2) > 0$.

$$Z_{\min} = Z(M_2) = 4.$$

5.6. Применение производной к исследованию функций

План исследования функции:

1) область определения функции, область значения, четность-нечетность, интервалы знакопостоянства, точки пересечения с осями координат;

2) точки разрыва функции;

3) интервалы возрастания, убывания, экстремумы;

4) интервалы вогнутости, выпуклости, точки перегиба;
5) асимптоты графика функции;
6) построение графика.

Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}.$, начертить её график

Решение.

1. *a)* функция определена всюду, кроме $x=\pm\sqrt{3}.$;

b) область значения: $y\in(-\infty;+\infty).$;

c) $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+3}=-\dfrac{x^3}{x^2-3}=-y(x)$ – четная => график функции симметричен относительно начала координат;

d) точки пересечения с осями: если $x = 0$, $y = 0$, то точка пересечения с осями – $M(0; 0)$;

e) интервалы знакопостоянства:

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$\left(-\sqrt{3};0\right)$	$(0;\sqrt{3})$	$\left(\sqrt{3};+\infty\right)$
y	– ниже оси X	+ выше оси $У$	– ниже оси X	+ выше оси X

2. Точки разрыва. В точках $x=\pm\sqrt{3}$ функция не определена => в точках может быть разрыв.

Условие непрерывности – функция определена в x_0:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, где x_0 – точки на оси OX.

Вычисляем пределы слева и справа при стремлении к x_0. В нашем случае $\left\{\dfrac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3-0})^2-3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{0}\right\}$, справа

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty,$$

слева

$$\lim f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}+0} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2-0}=\frac{3\sqrt{3}}{0}=+\infty.$$

Слева и справа пределы бесконечные – это говорит о том, что здесь разрыв II рода.

Замечание. Разрыв I рода, когда слева и/или справа пределы конечные, но неравные (рис. 5.2).

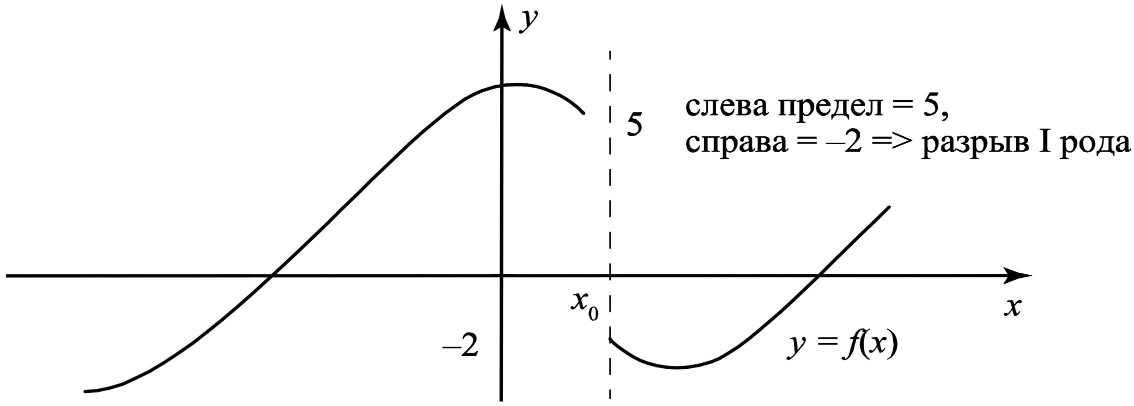


Рис. 5.2

Разрыв II рода будет в нашем случае и при $x = -\sqrt{3}$. (рис. 5.3).

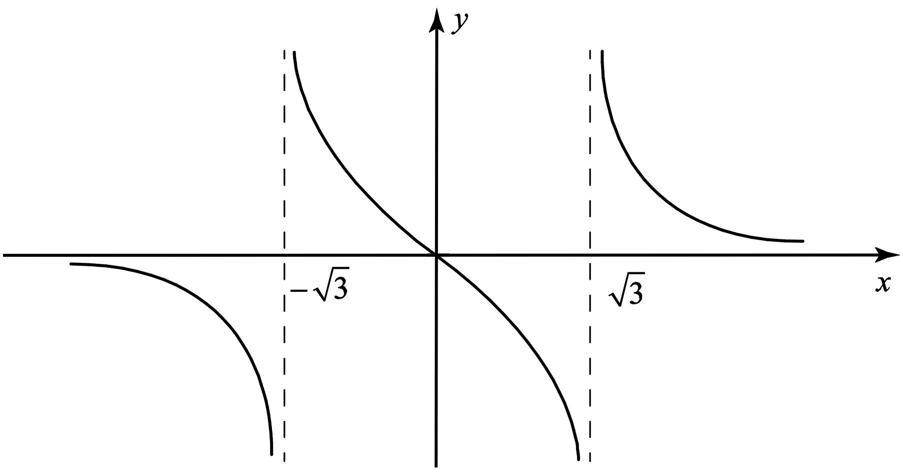


Рис. 5.3

3. Интервалы возрастания и убывания. Точки экстремума:

$$y' = 0, \quad y' = \frac{x^4 - 9\cdot x^2}{(x^2-3)^2}; \quad x_1 = 0, \quad x^2 - 9 = 0, \quad x_{1,2} = \pm 3.$$

Учитывая точки экстремума и точки разрыва, получаем следующую таблицу:

x	$(-\infty; 3)$	-3	$(-3;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3; +\infty)$
y'	+ ↗	max	− ↘	т. разр.	− ↘	Нет экст.	− ↘	т. разр.	− ↘	min	+ ↗

Определяем значение функции в точке экстремума: $y(-3)=-\frac{9}{2}$; $y(3)=\frac{9}{2}$.

4. Интервалы выпуклости, вогнутости, точки перегиба.

$y''=\frac{6\cdot x^3+54\cdot x}{(x^2-3)^3}$; $y''=0$ – max условие точки перегиба.

$6x^3+54x=0$ $\quad x_1=0$

$x^3+9x=0$ $\quad x^2+9\neq 0$, т. $x=0$ – точка, подозреваемая на перегиб.

Интервалы выпуклости, вогнутости: $y''=\frac{x(6x^2+54)}{(x^2-3)^3}$.

$(-\infty;-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};+\infty)$
– $\cap$	+ $\cup$	т. перегиба	– $\cap$	+ $\cup$

В интервале $x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$ функция имеет выпуклый характер. При $x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty)$ функция вогнута.

Точка перегиба $x=0$, т. к. здесь меняется знак y'' с + на –, точки $x=\pm\sqrt{3}$ – точки разрыва графика функции.

5. Асимптоты графика.

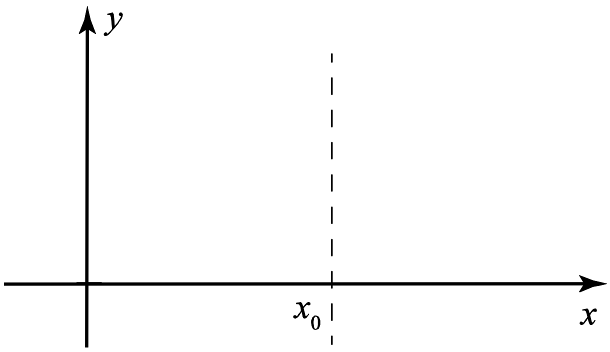


Рис. 5.4

a) Вертикальные асимптоты (рис. 5.4): если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, то $x=x_0$ – вертикальная асимптота.

b) Наклонная асимптота ищется по формуле $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Если пределы существуют и конечны, то функция имеет наклонную асимптоту. В нашем примере

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\left(x^2-3\right)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{3}{x^2}}=1;\ k=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3-3x}{x^2-3}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x^2}}=0;\ b=0.$$

Уравнение асимптоты: $y=x$.

Вертикальные асимптоты бывают в точках разрыва: $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} f(x)=\pm\infty$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\pm\infty \Rightarrow$ в точке $=\pm\sqrt{3}$ – вертикальная асимптота.

6. Строим график (рис. 5.5).

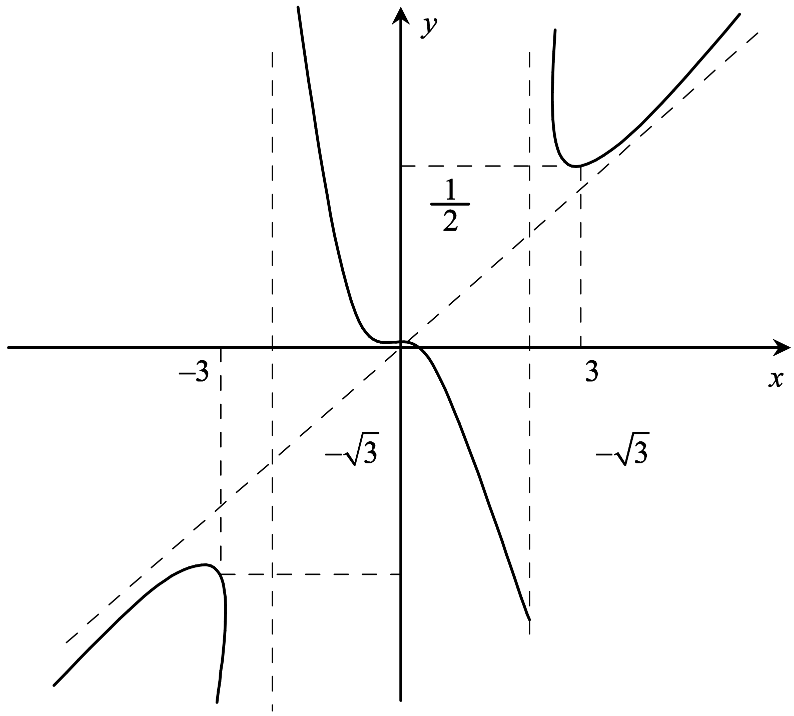


Рис. 5.5

Контрольные вопросы

1. Что называется частным дифференциалом функции?

2. Что такое полный дифференциал функции нескольких переменных?

3. Чему равна частная производная функции нескольких аргументов?

4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции.

5. Приведите план исследования функции.

Контрольные задания

1. Найти производные следующих функций:

a) $y = 3x^{-2}$;

b) $y = 4x^{-3}$;

c) $y = 2x^{\frac{1}{4}}$;

d) $y = 5x^{-\frac{3}{5}}$;

e) $y = 5\sqrt[5]{x^2}$;

f) $y = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$;

g) $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}$;

h) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$;

i) $y = \dfrac{x^5}{\sqrt{x}}$;

*j)** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$;

*k)** $y = \dfrac{6\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$.

2. Найти производные следующих функций:

a) $y = (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)$;

b) $y = (x^2 + 1)(x^3 - x)$;

c) $y = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$;

d) * $y = (x^3 - x + 1)(2x^3 + 1)$;

e) $y = (x^4 - 3)(x^2 + 2)$;

f) $y = (x + 2)(2x^3 - x)$.

3. Найти производные следующих функций:

a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

b) $y = \dfrac{3 - x}{x^2}$;

c) $y = \dfrac{1 + x^2}{3x}$;

*d)** $y = \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2}$;

e) $y = \dfrac{1 - x^5}{1 + x^5}$;

f) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$;

g) $y = \dfrac{2 + x^3}{2x}$;

h) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

4. Найти производные следующих сложных функций:

a) $y = (9 - x^2)^4$;

b) $y = (x^4 - x - 1)^4$;

c) $y = \sqrt{x^3 + 1}$;

*d)** $y = \sqrt[3]{(1 - x^2)^2}$;

e) $y = x^3 - \dfrac{1}{x^2} + x\sqrt[3]{x}$;

f) $y = x^3 + 2^{3x}$;

*g)*** $y = 3^{\sin x} - 2^{2x} + x^2$;

*h)*** $y = 2^{7\cos^2 5x}$;

i) $y = 4^{\sin 9x}$;

j) $y = e^{x^2}$.

5. Найти производные следующих сложных функций:

a) $y=\sin 5x$;

b) $y=\sin^2 3x$;

c) $y=2\cos^3 5x$;

d) $y=\ln^2 \cos 2x$;

e) $y=\ln \sin^3 5x$;

f) $y=\ln \sqrt{2x-1}$;

g) $y=\ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

h) $y=\log_5 x$;

i) $y=\log_3 4x$;

j) $y=\log_{0,5} x^5$;

k) $y=\log_3(x^2+3x-1)$;

*l)** $y=\log_5 \cos 7x$;

*m)** $y=\log_7 \sin \sqrt{1+x}$;

n) $y=x^3 \sin x$;

o) $y=\sin(x^2-3x+5)$;

*p)*** $y=\mathrm{tg}^4\left(\frac{1}{3}x^3-\sqrt{x}+3^{4x+2}\right)$;

q) $y=\sin^2 3x-\cos^3 2x$;

r) $y=\mathrm{ctg}^3(5x+4)$;

s) $y=\arccos x^2$;

*t)*** $y=4\arcsin \ln x^3$;

u) $y=\mathrm{arctg}\frac{2x}{1\text{-}x^2}$;

v) $y=\frac{x^2}{\mathrm{arctg}\ x}$;

w) $y=\mathrm{arcctg}\, e^{3x}$;

*x)*** $y=\mathrm{arcctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}+3x-2e^{\cos 3x}\right)$.

6. Исследовать функции и построить их графики:

a) $y=x^2+2x-3$;

b) $y=x^3-12x+4$;

c) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$;

d) $y=8-2x-x^2$;

e) $y=2x^3-6x$;

f) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$;

g) $y=4x^2-x^4-3$;

h) $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+2$;

*i)** $y=2\sin 2x$;

*j)*** $y=\frac{1}{9}x(x-4)^3$;

*k)*** $y=\frac{2x^2}{1+x^2}$;

*l)** $y=\frac{x}{1+x^2}$.

Глава 6
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Свойства неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования

Отыскание функции $F(x)$ по известному дифференциалу $d(F(x)) = f(x)dx$, т.е. действие, обратное дифференцированию, называется интегрированием, а исконная функция $F(x)$ называется первообразной функцией от $f(x)$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ меняет бесчисленное множество различных первообразных, которое отличается постоянным слагаемым; если $F(x)$ есть первообразная от $f(x)$, то $F(x)+c$, где c – произвольная постоянная, также является первообразной от $f(x)$, так как $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$.

Неопределенный интеграл – это совокупность всех первообразных от функции $f(x)$. Он обозначается $\int$: $\int f(x)dx = F(x)+c$, если $d[f(x)=c] = f(x)dx.$

Свойства неопределенного интеграла:

1) $d\int f(x)dx == f(x)dx$;

2) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, т.е. постоянный множитель можно вынести за знак интеграла;

3) $\int f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$, т.е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

Основные формулы интегрирования:

1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$;

2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$;

3) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$;

4) $\int e^u du = e^u + c$;

7) $\int \frac{du}{u^\alpha + a^\alpha} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c$;

8) $\int \frac{du}{u^\alpha - a^\alpha} = \frac{1}{2a}\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$;

9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$;

5) $\int \sin u du = -\cos u + c$;

6) $\int \cos u du = \sin u + c$;

10) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right| + c$.

Рассмотрим несколько примеров применения формул интегрирования:

1) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$ по 1-й формуле;

2) $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$ по 3-й формуле;

3) $\int \frac{dt}{t^2+3} = \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + c$ по 7-й формуле;

4) $\int \frac{du}{\sqrt{\varphi^2 - 5}} = \ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 5}\right| + c$ по 10-й формуле;

5) $\int \frac{2xdx}{x^2+7} = \int \frac{(x^2+7)'}{x^2+7} = \int \frac{d(x^2+7)}{x^2+7}$ представляет 2-ю формулу, где $u = x^2 + 7$. По этой формуле $\int \frac{d(x^2+7)}{x^2+7} = \ln\left|x^2+7\right| + c.$;

6. $\int 5\sin 5tdt = \int \sin 5td(5t)$ – представляет 5-ю формулу при $u = 5t$. Поэтому $\int \sin 5td(5t) = -\cos 5t + c.$;

7. $\int e^{\ln\varphi}\cos\varphi d\varphi = \int e^{\ln\varphi}d(\ln\varphi),$ т.к. $\cos\varphi d\varphi = d(\ln\varphi)$ по 4-й формуле, где $u = \sin\varphi$ получим $\int e^{\ln\varphi}d(\sin\varphi) = e^{\ln\varphi} + c.$;

Правильность вычисления можно проверить дифференцированием.

Приведем несколько примеров:

1) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = c - \frac{1}{2x^2}$ по 1-й формуле, где $u = x$, $n = -3$.

Проверка. $d\left(c - \frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(x^{-2}\right)' dx = -\frac{1}{2}(-2)x^{-3}dx = \frac{dx}{x^3}$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + c$ по 9-й формуле, где $u = x$, $a^2 = 2$.

Проверка. $$d(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+c)=(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}})'\,dx=\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dx}{\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}}=\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$$

3) $\int 15^t dt=\frac{15^t}{\ln 15}+e$, по 3-й формуле.

Проверка. $d(\frac{15^t}{\ln 15}+c)=\frac{1}{\ln 15}15^t\ln 15dt=15^t\,dt$ по 8-й формуле.

6.2. Интегрирование разложением подынтегральных функций на слагаемые

Рассмотрим интегрирование разложением подынтегральных функций на слагаемые на примерах:

1) $\int\left(1+e^x\right)^2dx-$ возведем в квадрат и образуем сумму :

$$\int\left(1+2e^x+e^{2x}\right)dx=\int dx+2\int e^x dx+\frac{1}{2}\int e^{2x}d\,2x=x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+e.;$$

2) $\int\frac{2x+3}{x^2-5}dx$ – разложим дробь на две слагаемые дроби:

$$=\int\frac{2x}{x^2-5}dx+3\int\frac{dx}{x^2-5};$$

$2xdx=d(x^2-5)$, $u=x^2-5$

по формуле (2) имеем $\int\frac{du}{u}=\int\frac{d(x^2-5)}{x^2-5}+3\int\frac{dx}{x^2-5}=$

$$=\ln\left|x^2-5\right|+3\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+c.$$

3) $\int(2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{2x})dx=\int 2x^{\frac{1}{5}}dx-\int 2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}dx=2\frac{x^{\frac{1}{5}}+1}{\frac{1}{5}+1}-\frac{2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1+c}=$

$$=\frac{2}{\frac{6}{5}}x^{\frac{6}{5}}-\frac{2^{\frac{1}{3}}}{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}+c=\frac{10}{6}\sqrt[5]{x^6}-\frac{3}{4}2^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x^4}+c.;$$

4) $\int\frac{x^2-2}{x+2}dx=\int\frac{x^2-4+2}{x+2}dx=\int\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}dx+2\int\frac{dx}{x+2}=$

$$=\int(x+2)dx+2\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\frac{1}{2}(x+2)^2+\ln(x+2)+c.;$$

5) $\int(1+e^x)dx$ – возведем в квадрат и образуем сумму:

$$=\int(1+2e^x+e^{2x})dx=\int dx+2\int e^x dx+\frac{1}{2}\int e^{2x}d2x=$$

$$=x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+c.;$$

6) $\int\frac{2x+3}{x^2-5}dx$ – разложим дробь на две дроби:

$$=\int\frac{2x}{x^2-5}dx+3\int\frac{dx}{x^2-5};$$

$2xdx + d(x^2–5)$, $u = x^2 – 5$, по 2-й формуле имеем

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{d(x^2-5)}{x^2-5}+3\int\frac{dx}{x^2-5}=\ln\left|x^2-5\right|+3\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+c.;$$

7) $\int(2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{2x})dx=\int 2x^{\frac{1}{5}}dx-2\int 2x^{\frac{1}{3}}dx=$

$$=2\frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}-2^{\frac{1}{3}}\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c=\frac{2}{\frac{6}{5}}x^{\frac{6}{5}}-\frac{2^{\frac{1}{3}}}{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}+c=\frac{10}{6}\sqrt[5]{x^6}-\frac{3}{4}2^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x^4}+c.;$$

8) $\int\frac{x^2-2}{x+2}dx=\int\frac{x^2-4+2}{x+2}dx=\int\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}dx+2\int\frac{dx}{x+2}=$

$$=\int(x+2)dx+2\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\frac{1}{2}(x+2)^2+2\ln(x+2)+c.$$

6.3. Интегрирование посредством замены переменной

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ можно заменить переменную x переменной t, связанной формулой $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ и получить $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \int F(t)dx$ – полученный интеграл преобразуем к переменной x.

Решим несколько примеров, где путем интегрирования посредством замены переменной нужно найти интеграл:

1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \Big|$ замена $x = t^2$, тогда $dx = 2tdt$, $t = \sqrt{x}$;

$= \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{tdt}{1+t}$ – получим неправильную дробь. Выделим целую часть, добавив в числитель 1, и вычтем 1: $= 2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt$. Разбиваем на два слагаемых: $2\int \frac{t+1}{t+1}dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln|1+t| + c =$

$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + c.$;

2) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = \Big| 1+2\cos x = t;\ -2\sin x dx = dt\ \sin x dx = \frac{dt}{-2}$;

$$= \int \frac{dt}{-2\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1+2\cos x} + c.;$$

3) $\int \frac{2xdx}{x^4+3} = \Big| x^2 = t;\ 2xdt = dt;\ = \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}} + c.$

6.4. Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения $d(U'V) = UdV + VdU$ интегрированием обеих частей равенства получается формула интегрирования по частям: $\int UdV = UV - \int VdU.$

В этой формуле отыскание интеграла $\int UdV$ сводится к решению другого интеграла $\int VdU.$

За dV всегда выбирается такое выражение, содержащее dx, из которого интегрированием можно найти V; за U принимается формула, которая при дифференцировании упрощается (например, arcsin$x$, ln$x$, x^3).

Рассмотрим несколько примеров интегрирования по частям:

1) $\int x\cos xdx = \left| U = x;\ dv = \cos xdx;\ du = dx; \right.$

$V = \int \cos xdx = \sin x \left| = x\cdot\sin x - \int \sin xdx = x\cdot\sin x + \cos x + c.; \right.$

2) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left| \ln x = U; dU = \frac{dx}{x}; V = \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = \right.$

$\frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{2x^2}; dV = \frac{dx}{x^3} \left| = -\frac{\ln x}{x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = \right.$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2x^2}) + c = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c.$

3) $\int x\mathrm{arctg}xdx = \left| V = \frac{x^2}{2};\ xdx = dV;\ U = \mathrm{arctg}x;\ dU = \frac{dx}{1+x^2} \right|$

$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctgx} - \int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} =$ Интеграл вычислим отдельно. Выделим целую часть дроби, прибавив в числителе 1 и вычтя 1:

$$= \int\frac{x^2dx}{1+x} = \int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int\frac{x^2+1}{1+x^2}dx - \int\frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int\frac{dx}{1+x^2} = = x - \mathrm{arctg}x;$$

окончательно получаем: $\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + c.;$

4) $\int \arcsin xdx = \left| U = \arcsin x;\ dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ dV = dx;\ V = x \right|$

$= x\cdot\arcsin x - \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) + c =$

$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$

5) $\int x^2e^{3x}dx = \left| U = x^2;\ e^{3x}dx = dV;\ dU = 2xdx;\ V = \int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3} \right|$

$= x^2\frac{e^{3x}}{3} - \int\frac{e^{3x}}{3}2xdx$ – к последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям:

$$-\frac{2}{3}\int e^{3x}xdx = \left| \; x=U; dU=dx; e^{3x}dx=dV; V=\frac{1}{3}e^{3x} \right| =$$

$$=-\frac{2}{3}\left(x\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}dx \right)=-\frac{2}{3}x\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{3x}+c=$$

$$=-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+c.$$

6) $\int\frac{x}{\cos^2}dx = \left| \; x=U; \frac{dx}{\cos^2 x}=dV; dU=dx; V=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x \; \right| =$

$$= x\mathrm{tg}x-\int tgxdx = xtgx-\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=xtgx+\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=$$

$$= xtgx+\ln(\cos x)+c.$$

7) $\int (x^2+1)e^{-2x}dx = \left| \; x^2+1=U; dU=2xdx;\ e^{-2x}dx=dv; \right.$

$$\left. V=\int e^{-2x}dx=\frac{e^{-2x}}{-2} \; \right| =(x^2+1)\frac{e^{-2x}}{-2}-\int\frac{e^{-2x}}{-2}2xdx=$$

$=-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x}+\int e^{-2x}xdx$ – к последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям: $x = U;\ dU = dx;\ \ dV = e^{-2x}dx;\ V=\frac{e^{-2x}}{-2};$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}x-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x}-\int\frac{e^{-2x}}{-2}dx=-\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-2x}-$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2x}x+\frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{-2}+c=-\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}x-\frac{1}{4}e^{-2x}+c.$$

6.5. Интегрирование рациональных функций

Интегралы от функций $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx,$ например $\int\frac{(a_1x^2+a_2x^3)dx}{b_1x^5+b_2x^3+bx}$, можно найти путём разложения на слагаемые, которые всегда приводят к формулам интегрирования. Например, таким:

1) $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|$;

2) $\int\frac{dx}{(x-a)^m}=\int(x-a)^{-m}dx=\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+c$, $m\neq 1$;

3) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c.$

Если степень числителя выше степени знаменателя или равна ей, то дробь называют неправильной, и в этом случае всегда нужно выделять целую часть, т.е. представлять дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Например: $\int \frac{x^5+6x^2+1}{x^4+3x^2}dx$, степень числителя равна 5, а знаменателя 4. Дробь неправильная. Выделим целую часть, для чего поделим углом числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{|ll} x^5+6x^2+1 & \quad x^4+3x^2. \\ \hline x^5+3x^3 & \end{array}$$

В частном получим *x*-целую часть, в остатке $-3x^3+6x^2+1$ – числитель неправильной дроби:

$$\int \frac{x^5+6x+1}{x^4+3x^2}dx = \int x dx + \int \frac{-3x^3+6x^2+1}{x^4+3x^2}dx.$$

Для вычисления правильной дроби используем основную теорему алгебры; правильную дробь можно разложить на сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами: $\frac{-3x^3+6x^2+1}{x^4+3x^2} = \frac{-3x^2+6x^2+1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$. Найдем A, B, C, D – неопределенные коэффициенты: $\frac{-3x^3+6x^2+1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+3)}$ – привели к общему знаменателю.

Уравняем коэффициенты при одинаковых степенях левой и правой части:

$$-3x^3+6x^2+1 = Ax^2+3A+Bx^3+3Bx+Cx^3+Dx \quad ,$$

x^3	$-3=B+C$	$A=\frac{1}{3}$
x^2	$6=A+D$	$6=\frac{1}{3}+D \Rightarrow D=\frac{17}{3}$.
x^1	$0=3B$	$B=0$
x^0	$1=3A$	$C=-3$

Подставим найденные значения A, B, C, D в разложение и вычислим интегралы:

$$\int \frac{x^5+6x^2+1}{x^4+3x^2}dx=\int xdx+\int \frac{dx}{3x^2}+\int \frac{0dx}{x}+\int \frac{-3x+\frac{17}{3}}{x^2+3}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\frac{x^{-1}}{-1}-$$

$$-3\int \frac{xdx}{x^2+3}+\frac{17}{3}\int \frac{dx}{x^2+3}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3x}-\frac{3}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+3}+\frac{17}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3x}-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+3\right|+\frac{17}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$$

Рассмотрим интегрирование рациональных функций на примерах:

1) $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$;

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{3x^2+8}{x(x^2+4x+4)}=\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2},$$

разлагаем на простейшие:

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+2},$$

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx+Cx(x+2),$$

$$3x^2+8=Ax^2+4Ax+4A+Bx+Cx^2+2Cx,$$

$$\begin{array}{l|l|l} x^2 & 3=A+C & A=2 \\ x^1 & 0=4A+B+2C & C=1 \\ x^0 & 8=4A & 0=4\cdot 2+B+2\Rightarrow B=-10, \end{array}$$

$$\int \frac{(3x^2+8)dx}{x^3+4x^2+4x}=\int \frac{2}{x}dx+\int \frac{-10dx}{(x+2)^2}+\int \frac{dx}{x+2}=$$

$$=2\ln|x|-10\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+\ln|x+2|+c=2\ln|x|+\frac{10}{x+2}+\ln|x+2|+c;$$

2) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^4-2x^3+x^2}$.

Выделим целую часть:

$\frac{2x^3-x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}=\frac{2x^3-x^2+1}{x^2(x^2-2x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$, 1-я целая часть равна единице, $\frac{2x^3-x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}$ – остаток разложения на простейшие

$$2x^3 - x^2 + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + Cx^2 + Dx(x-1),$$

$$2x^3 - x^2 + 1 = Ax^2 - 2Ax - A + Bx^3 - 2Bx^2 + Bx + Cx^2 + D_x{}^2 - Dx,$$

x^3	$2 = B$	$A=1, B=2$
x^2	$-1 = A - 2B + C + D$	$-1 = 1 - 4 + C + D,\ C = 2$
x^1	$0 = -2A + B - D$	
x^0	$1 = A$	$0 = -2 + 2 - D,\ D = 0,$

$$\int \frac{(x^4+1)dx}{x^4 - 2x^3 + x^2} = \int 1dx + \int \frac{A}{x^2}dx + \int \frac{B}{x}dx + \int \frac{C}{(x-1)^2}dx + \int \frac{Ddx}{x-1} =$$

$$= x + \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx = x - \frac{1}{x} + 2\ln|x| - \frac{2}{x-1} + c.$$

3) $$\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx = \int \frac{x^4+1-1+1}{x^4-1}dx = \int \frac{x^4-1}{x^4-1}dx + 2\int \frac{dx}{x^4-1}dx =$$

$$= \int dx + 2\int \frac{dx}{x^4-1}.$$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1};$$

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1);$$

$$1 = A(x^3+x^2+x+1) + B(x^3-x^2+x-1) + Cx^3 + Dx^2 - Cx - D;$$

$$1 = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 + Dx^2 - Cx - D;$$

x^3	$0 = A + B + C$	$\begin{cases} 0 = 2A + 2B \\ 1 = 2A - 2B \end{cases}$
x^2	$0 = A - B + D$	$4A = 1, A = \frac{1}{4}, 0 = A + B, B = -A = -\frac{1}{4}, C = 0$
x^1	$0 = A + B - C$	
x^0	$1 = A - B - D$	$D = -\frac{1}{2},$

$$\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx = x + 2\int \frac{\frac{1}{4}dx}{x-1} + 2\int \frac{-\frac{1}{4}dx}{x+1} + 2\int \frac{-\frac{1}{2}dx}{x^2+1} = x + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \operatorname{arctg} x + c.$$

6.6. Интегрирование тригонометрических функций

Чаще всего встречаются интегралы следующих функций:

I. $\int \sin^k x dx$, $\int \cos^k x dx,$ где k – чётное число.

II. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx,$ где n и m – нечётные числа.

III. $\int R(\sin x, \cos x) dx,$ где R – рациональная функция от sin x и cos x.

Решение I типа. Интеграл от чётной степени $\sin x$ или $\cos x$ можно найти путём понижения степени по формулам

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t), \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t).$$

Так, например, $\int \sin^2 3x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx =$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 6x}{6} + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c.$

Решение II типа. Отделим от нечётной степени один множитель, например $\sin^5 x = \sin^4 x \cdot \sin x$, и заменим cos x на t, тогда

$$\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2, \text{ а } \sin x dx = -d(\cos x).$$

Делаем замену $\cos x = t$, тогда $\sin x dx = -dt$,

$$\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx =$$

$$= \int (1-t^2)^2(-dt) = -\int (1-t^2)^2 dt = -\int (1-2t^2+t^4)dt =$$

$$= -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c.$$

Решение III типа. Рассмотрим пример использования метода универсальной тригонометрической постановки:

$\int \frac{dx}{5+4\cos x}$. $tg\frac{x}{2} = z$, тогда $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}; dx = \frac{2dz}{1+z^2}; \sin x = \frac{2z}{1+z^2};$

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5+4\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{5+5z^2+4-4z^2} = \int \frac{2dz}{9+z^2} =$$

$$= 2\int \frac{dz}{9+z^2} = \frac{2}{3}\text{arctg}\frac{z}{3} + c = \frac{2}{3}\text{arctg}\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{3}\right) + c.$$

Рассмотрим другие примеры на различные типы функций:

1) $$\int \cos^4 x dx = \int (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}) dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8}\int dx +$$

$$+\frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + c =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.;$$

2) $$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x dx =$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x dx = [\sin x = z; dz = \cos x dx] =$$

$$= \int (1 - 2z^2 + z^4) dz = \int dz - 2\int z^2 dz + \int z^4 dz = z - \frac{2}{3}z^3 + \frac{z^5}{5} + c =$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + c.;$$

3) $$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \left(\sin x \cdot \cos x\right)^2 dx =$$

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4} dx = \frac{1}{8}(\int \sin^2 2x dx - \int \sin^2 x \cdot \cos 2x dx).:$$

a) первый интеграл:

$$\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{4 \cdot 2} + c = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + c.$$

b) второй интеграл берём как от нечётной степени $\cos 2x$:

$$\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = [\sin 2x = z, \text{ тогда } \cos 2x dx = \frac{1}{2}dz, \text{ т.к.}$$

$$(\sin 2x)' dx = dz;\ \cos 2x \cdot 2dx = dz;\ \cos 2x dx = \frac{dz}{2}\Bigg] =$$

$$= \int \frac{z^2}{2} dz = \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + c = \frac{z^3}{6} + c.$$

Окончательно: $$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \frac{1}{8}(x - \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin^3 2x}{6}) + c =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + c.;$$

4) $\int \frac{\cos x}{1-\cos x}dx = [$ Применяя универсальную тригонометрическую подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=z;\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2};\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}\Big] =$, получим

$$=\int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}-2\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{(1-z^2)2dz}{((1+z^2)+(1-z^2))(1+z^2)} =$$

$$=2\int \frac{(1-z^2)dz}{(1+z^2+(-z^2))(1+z^2)} = 2\int \frac{(1-z^2)dz}{2(1+z^2)} = -\int \frac{z^2+1-2}{1+z^2}dz,$$

Выделим целую часть от неправильной дроби:

$$=-\int dz + 2\int \frac{dz}{1+z^2} = -z + 2\mathrm{arctg}z + c = -\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 2\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\frac{x}{2}) + c -$$

$$-\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 2\frac{x}{2} + c = x - tg\frac{x}{2} + c.;$$

5) $$\int \frac{dx}{3+5\cos x} = \left[tg\frac{x}{2} = z; \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}; dx = \frac{2dz}{1+z^2} \right] =$$

$$=\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3+5\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{3(1+z^2)+5(1-z^2)} = \int \frac{2dz}{8-2z^2} = \int \frac{dz}{4-z^2} =$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+z}{2-z}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right| + c.;$$

6) $$\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{(1+z^2)(\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2})^2} = \int \frac{(1+z^2)}{2}dz =$$

$$=\frac{1}{2}\int dz + \frac{1}{2}\int z^2 dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + c = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\mathrm{tg}^3\frac{x}{2} + c.;$$

7) $\int \frac{dx}{\sin x} = \left[tg\frac{x}{2} = z; \sin x = \frac{2z}{1+z^2}; dx = \frac{2dz}{1+z^2} \right] =$

$$= \int \frac{2dz}{(1+z^2)\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c.$$

8) $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{2dz}{(1+z^2)(\frac{2z}{1+z^2})^3} = \frac{1}{4}\int \frac{(1+z^2)dz}{z^3} =$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(1+2z^2+z^4)dz}{z^3} = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^3} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} + \frac{1}{4}\int zdz = \frac{1}{4}\frac{z^{-2}}{(-2)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{4}\frac{z^2}{2} + c = -\frac{1}{8z^2} + \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{8}z^2 + c = -\frac{1}{8\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + c = -\frac{1}{8}\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + c.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое первообразная функция?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
4. Какие методы интегрирования вы можете назвать?
5. Приведите формулу интегрирования по частям.
6. Функция какого вида называется дробно-рациональной?
7. Какой метод применяется при нахождении интегралов от дробно-рациональных функций?

Контрольные задания

1. Вычислить неопределенные интегралы и проверить результаты дифференцированием:

a) $\int x^6 dx$;

j) $\int \frac{x^3}{x^4+2}$;

b) $\int \frac{3dx}{x^5}$;

c) $\int \sqrt{x}dx$;

d) $\int (5x^3 - 2x^2 - 8)dx$;

e) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x})dx$;

f) $\int (2x-1)^3 dx$;

g) $\int (2x-1)^3 dx$;

h) $\int \frac{(3x+1)^2}{x} dx$;

i) $\int e^{3x} dx$;

k) $\int (e^x + 5x)dx$;

l) $\int \frac{x^2 + x + 5}{2x} dx$;

m)* $\int \frac{2xdx}{1+x^2}$;

n) $\int (2x - 4^x)dx$;

o) $\int e^{-4x} dx$;

p) $\int (2x - 4^x)dx$;

q) $\int \left(\frac{2}{x} + 8e^x + 5^x \right) dx$.

2. Вычислить неопределенные интегралы и проверить результаты дифференцированием:

a) $\int 5\cos\, xdx$;

b) $\int (7x^2 + 3\cos\, x - \sqrt[3]{x})dx$;

c) $\int (\sin x + \cos x + e^x)dx$;

d) $\int \frac{\sin 2x}{\sin\, x} dx$;

e) $\int 4\cos\, 3xdx$;

f) $\int \sin(-4x)dx$;

g) $\int \cos\,(5-2x)dx$;

h)** $\int x\sin x^2 dx$;

i) $\int \frac{dx}{5\cos^2 x}$;

j)* $\int \frac{\cos^2 x + 3}{\cos^2 x} dx$;

l)** $\int \frac{\cos 2x + 3}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$;

m)* $\int \frac{\cos^2 x + 3}{\cos^2 x} dx$;

n)* $\int \sin x \cos x dx$;

o) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$;

p) $\int \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$;

q)* $\int \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3-3x^2} dx$;

r)** $\int \frac{1+x^2+3\cos^2 x}{(1+x^2)\cos^2 x}$;

k) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$;

*s)*** $\int \frac{x^4 dx}{\cos^2(x^5+2)}$.

3. Найти неопределенные интегралы:

a) $\int (7-2x)^3 dx$;

b) $\int (5x-1)^3 dx$;

c) $\int (1+x^5)^7 x^4 dx$;

d) $\int (9-2x^3)^4 x^2 dx$;

e) $\int \sqrt{x+1} dx$;

*f)** $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2} dx$;

g) $\int \sqrt[4]{5x+6} dx$;

h) $\int \sqrt{1+x^3} x^2 dx$;

*i)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

j) $\int \frac{\sqrt{3+\ln x}}{5x} dx$;

*k)** $\int \sin^2 x \cos x dx$;

l) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$;

*m)*** $\int x^3 4 \sin 3x^4 dx$;

*n)*** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$;

o) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$;

*p)*** $\int \frac{(\arcsin x)^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Глава 7
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

7.1. Формула Ньютона – Лейбница

Определённым интегралом называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{i=m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ при условии, что число промежуточных точек неограниченно возрастает, а длина частных сегментов (отрезков) $[x_{k-1}; x_k]$ стремится к 0.

Определенный интеграл обозначается как $\lim \sum_{i=1}^{i=m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$ $= \int_a^b f(x)dx$.

Вычислять определённый интеграл нужно с помощью неопределённого интегрирования. Если $F(x)$ есть любая первообразная функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) = F(a) - F(b). \qquad (7.1)$$

Формула (1) – формула Ньютона – Лейбница.

Определённый интеграл равен разности значений неопределённого интеграла при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Рассмотрим несколько примеров:

1) $\int_2^3 3x^2 dx = 3\int_2^3 x^2 dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 = (3)^3 - (2)^3 = 19.$;

2) $\int_0^4 (1 + \ell^{\frac{x}{4}})dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 \ell^{\frac{x}{4}} dx = x\Big|_0^4 + \frac{\ell^{\frac{x}{4}}}{\frac{1}{4}}\Bigg|_0^4 = 4 + 4\ell^1 - 4\ell^0 =$

$4 + 4\ell - 4 = 4\ell.$

В данных примерах применялись свойства неопределённого интеграла:

1) интеграл от суммы функций равен сумме интегралов;

2) постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

В определенном интеграле также применяется интегрирование по частям:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Рассмотрим несколько примеров:

1) $\int_0^{\frac{\hbar}{2}} (x+3)\sin x dx = \begin{bmatrix} u = x+3; dv = \sin x \\ du = dx; v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} = -(x+3)\cos x\Big|_0^{\frac{\hbar}{2}} +$

$+\int_0^{\frac{\hbar}{2}} \cos x dx = -(x+3)\cos x\Big|_0^{\frac{\hbar}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\hbar}{2}} = -(\frac{\hbar}{2}+3)\cos\frac{\hbar}{2} + (0+3)\cos 0 +$

$+\sin\frac{\hbar}{2} - \sin 0 = 3\cdot 1 + 1 = 4.$

2) $\int_0^1 xe^x dx = \begin{vmatrix} x=u; du=dx \\ e^x dx=dv; v=e^x \end{vmatrix} = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 =$

$= (1\cdot e^1 - 0) - e^1 + e^0 = e - e + 1 = 1.$

7.2. Замена переменной в определенном интеграле

При вычислении многих интегралов полезно заменить переменную интегрирования.

Если $\int_b^a f(x)dx$ преобразуется при помощи подстановки $x = \varphi(t)$ в другой интеграл с новой переменной t, то заданные пределы интегрирования $x_1 = a$, $x_2 = b$ заменяются новыми пределами $t_1 = \alpha$, $t_2 = \beta$, которые определяются из исходной подстановки:

$$\int_b^a f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\,\varphi' dt.$$

Рассмотрим метод универсальной подстановки на примерах

$$1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{l} tgx = z; \\ \cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}; \\ dx = \dfrac{2dz}{1+z^2}; \\ x=0; z=0 \\ x=\dfrac{\pi}{2}; z=1 \end{array} \right| = 2\int_0^1 \left(\frac{dz}{z^2+3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{z}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

$$2)\ \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ x=2\sin t;\ \sin t=\dfrac{1}{2};\ t_1=\dfrac{\pi}{6}; \\ dx=2\cos t;\ \sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ t_2=\dfrac{\pi}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(8\sin^3 t+1)\cdot 2\cos t dt}{4\sin^2 t \cdot \sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(8\sin^3 t+1)\cdot 2\cos t dt}{4\sin^2 t \cdot 2\cos t} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin t dt + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t} t = 2(-\cos t)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{4}\operatorname{ctg} t\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right) = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1.$$

7.3. Геометрические приложения

1. Площадь плоской фигуры (рис. 7.1):

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

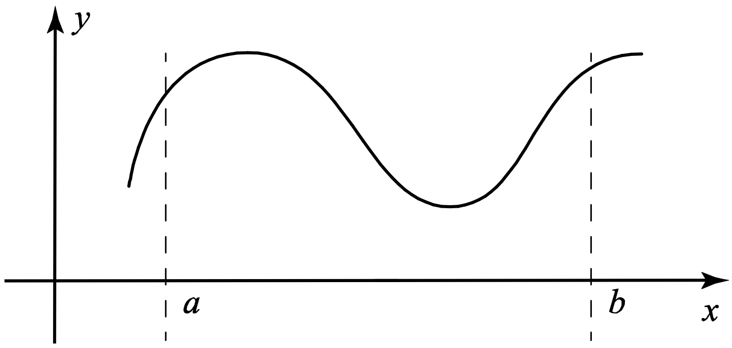


Рис. 7.1

Пример 7.3.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y = x^2 + 1$, прямой $x = 4$ и осями координат.

Решение. $S = \int (x^2 + 1)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 + x\Big|_0^4 = \frac{4^3}{3} + 4 = \frac{76}{3}.$

Пример 7.3.2. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение. Определяем точки пересечения парабол: $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}.$

$4 - x^2 = x^2 - 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x^2 - x - 2 = 0,$

$x_1 = -1;\;\; x_2 = 2;$

$y_1 = 3;\;\;\; y_2 = 0.$

Видим, что искомую площадь S можно найти как алгебраическую сумму площади трапеции:

$$S = S_{A'ACB} + S_{ODB} - S_{A'AO}.$$

Отдельно найдем каждую площадь:

$$S_{A'ACB} = \int_{-1}^{2} (4 - x^2)\mathrm{dx} = \left.\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 9;$$

$$S_{ODB} = \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\mathrm{dx} = \left.\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\right|_{0}^{2} = \frac{8}{3} - 4 = \frac{4}{3};$$

$$S_{A'AO} = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\mathrm{dx} = \left.\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\right|_{-1}^{0} = \frac{4}{3};$$

$$S = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9.$$

2. Длина дуги плоской кривой. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то формула длины дуги:

$$\mathrm{L} = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1+(y')}\,dx.$$

Пример 7.3.3. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x-1)^3$ между точками $A(2; -1)$ и $B(5; -8)$.

Решение. Разрешим уравнение относительно y и найдем y':

$$y = t(x-1)^{3/2}, \quad y' = t\left(\frac{3}{2}\right)(x-1)^{\frac{1}{2}};$$

$$\mathrm{L} = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}((x-1)^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{9x-5}\,dx = \frac{1}{18}\int_2^5 (9x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(9x-5) = (9x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5 \approx 7,63.$$

Пример 7.3.4. Найти длину дуги кривой $y = e^x$ между точками $A(0; 1)$ и $B(1; e)$.

Решение.

$$\mathrm{L} = \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx = \left|\begin{array}{l} \text{замена} \\ 1+e^{2x} = t^2 \\ e^{2x} = t^2-1 \\ 2e^{2x}dx = 2tdt \\ dx = \dfrac{tdt}{e^{2x}} = \dfrac{tdt}{t^2-1} \\ x=0; t=\sqrt{2}; \\ x=1;\ t=\sqrt{1+e^2} \\ y_1 = -2 \end{array}\right| =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \sqrt{t^2}\cdot\frac{tdt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2dt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1} =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{dt}{t^2-1} = t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} =$$

$$= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| =$$

$$=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)^2}{1+e^2-1}-\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=$$

$$=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+1+\ln(\sqrt{1+e^2}-1)-\ln(\sqrt{2}-1).$$

7.4. Длина дуги кривой

Длина дуги кривой $y=f(x)$ ($a\le x\le b$) вычисляется по формуле

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx \quad \text{или} \quad l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx. \qquad (7.2)$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически: $x=\varphi_1(t)$, $y=\phi_2(t)$, $t_1\le t\le t_2$, определяется формулой

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt \quad \text{или} \quad l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi_1'^2(t)+\varphi_2'^2(t)}dt. \qquad (7.3)$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах: $r=r(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$, то

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}dr. \qquad (7.4)$$

Пример 7.4.1. Вычислить длину дуги линии $y=\ln\sin x$ между точками, для которых $x_1=\frac{\pi}{3}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Искомую длину вычисляем по формуле (7.2).

Так как $y=\ln\sin x$, $y'=\frac{\cos x}{\sin x}$, то

$$l=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\frac{\cos x}{\sin x})^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+ctg^2x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2x}}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{\sin^2x}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos t}{\cos^2t-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ln 3\approx 0,5493.$$

Пример 7.4.2. Найти длину дуги линии $x = 4(\cos t + t\sin t)$, $y = 4(\sin t - t\cos t)$ ($0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$).

Решение. Применяя формулу (7.3), полагаем в ней $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Так как $x_t' = 4(-\sin t + \sin t + t\cos t) = 4t\cos t$,

$$y_t' = 4(\cos t - \cos t + t\sin t) = 4t\sin t,$$

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{16t^2\cos^2 t + 16t^2\sin^2 t} = 4t,$$

то $$l = \int_0^2 4t\,dt = 2t^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}9348.$$

Пример 7.4.3. Найти длину всей линии, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2(1 + \cos\varphi)$.

Решение. 1. Используем формулу (7.4). Для этого возведём в квадрат функцию $r = 2(1 + \cos\varphi)$. Получаем: $r^2 = 4(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)$. Тогда $r' = -2\sin\varphi$; $r'^2 = 4\sin^2\varphi$.

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{4(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) + 4\sin^2\varphi} =$$

$$= 2\sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 2\sqrt{2 + 2\cos\phi} = 4\cos\frac{\varphi}{2}.$$

2. Находим длину дуги кривой для данной функции:

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} 4\cos\frac{\phi}{2}\,d\phi = 2\cdot 4\sin\frac{\phi}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} \; 8\sin\frac{\phi}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 16.$$

7.5. Объём тела вращения

I. Объём тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции *AabB* (рис. 7.2), где *AB* – дуга кривой $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx \quad \left[V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx \right]. \qquad (7.5)$$

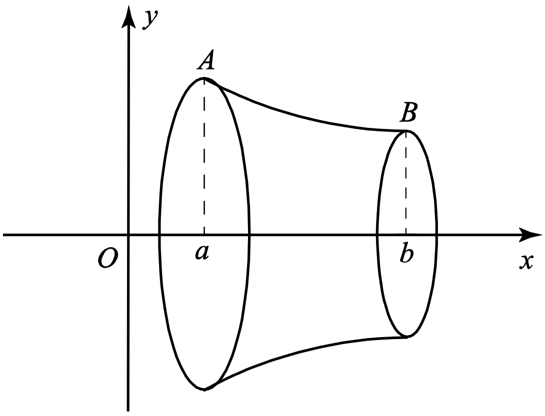


Рис. 7.2

II. Объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $CcdD$ (рис. 7.3), где CD дуга кривой $x = \varphi(y)$, определяется формулой

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy . \tag{7.6}$$

Пример 7.5.1. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = x^6$, прямой $x = 2$ и осью Oy.

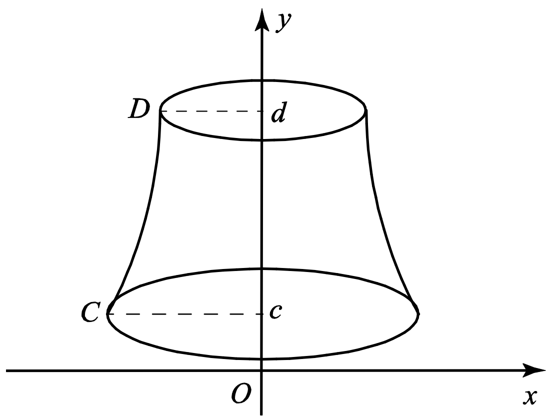


Рис. 7.3

Решение. В соответствии с условием задачи находим пределы интегрирования $a = 0$, $b = 2$.

По формуле (7.5) получаем

$$V_x = \pi \int_0^2 6x dx = 3\pi x^2 \Big|_0^2 = 12\pi \approx 37,6992.$$

Пример 7.5.2. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной параболой $x^2 = 4y$, прямой $y = 4$ и осью Oy (рис. 7.4).

Решение. Пределы интегрирования: $c = 0$, $d = 4$.

По формуле (7.6) находим

$$V_y = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 4y dy = 2\pi\, y^2 \Big|_0^4 = 32\pi \approx 100,5312.$$

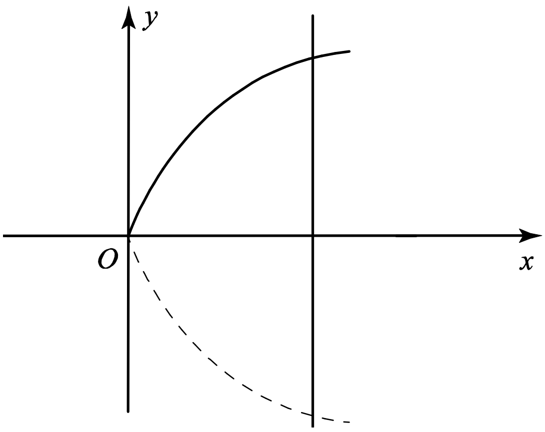


Рис. 7.4

Пример 7.5.3. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 6$, прямыми $y = 1$, $y = 6$ и осью Ox (рис. 7.5).

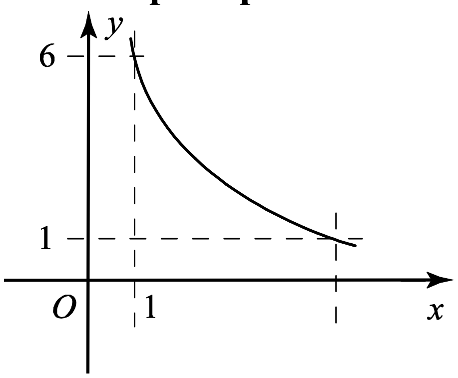


Рис. 7.5

Решение. Из уравнения кривой $xy = 6$ находим

$$x = \frac{6}{y}; \ x^2 = \frac{36}{y^2}.$$

Так как $c = 1$; $d^6 = 6$, по формуле (7.6) получаем

$$V_y = \pi\int_1^6 \frac{36}{y^2}dy = 36\pi\int_1^6 \frac{1}{y^2}dy = -\frac{36}{y}\Bigg|_1^6 = -36\pi(\frac{1}{6}-1) = 30\pi.$$

Пример 7.5.4. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной фигуры, ограниченной параболой $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямыми $x = \pm a$.

Решение. Применим формулу (7.5). Выражение для y^2, входящее в эту формулу, определяется из уравнения гиперболы $\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{x^2}{a^2}$;

$$y^2 = b^2 + \frac{x^2b^2}{a^2} = b^2(1+\frac{x^2}{a^2}).$$

Искомый объём

$$V_y = \pi\int_a^b x^2dy = \pi\int_{-a}^{a} b^2(1+\frac{x^2}{a^2})dx = \pi b^2\int_{-a}^{a} dx + \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a} x^2dx = \pi b^2 x\Bigg|_{-a}^{a} +$$

$$+\frac{\pi b^2 x^3}{3a^2}\Big|_{-a}^{a} = \pi\text{b}^2(a-(a)) + \frac{\pi b^2}{3a^2}\,(a^3-(-a^3)) = 2\pi ba + \frac{\pi b^2}{3a^2}2a^3 =$$

$$=\frac{6\pi b^2 a + 2\pi b^2 a^3}{3a^2} = \frac{8\pi b^2 a^2}{3}.$$

Пример 7.5.5. Вычислить объём тела, полученного вращением эллипса $b^2x^2 + a^3y^3 = a^3\,b^2$ вокруг оси Ox (рис. 7.6).

Решение. Из условия эллипса находим выражение для y^2:

$$y^2 = b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2}.$$

По формуле (7.6) получаем

$$V_x = \pi\int_{-a}^{a}(b^2 - \frac{x^2b^2}{a^2})dx = \pi b^2\int_{-a}^{a}dx - \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2dx = \pi\text{b}^2 x\Big|_{-a}^{a} -$$

$$-\frac{\pi b^2 x^3}{3a^2}\Big|_{-a}^{a} = \pi\text{b}^2(a-(a)) - +\frac{\pi b^2}{3a^2}(a^3-(-a^3)) =$$

$$=2\pi\text{b}^2 a - \frac{2\pi b^2 a}{3} = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

При $a = b = R$ получаем $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

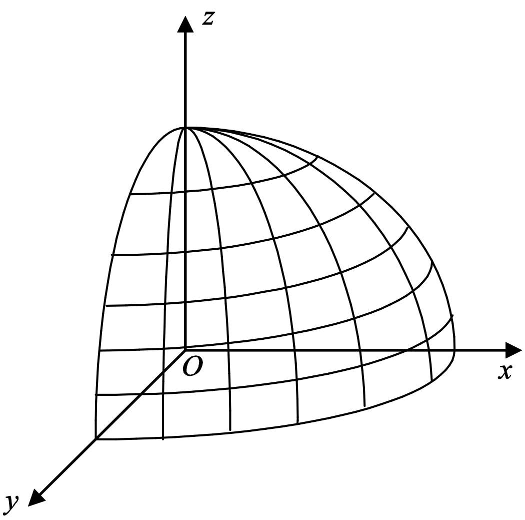


Рис. 7.6

Пример 7.5.6. Найти объём тела, полученного вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox.

Решение. Движущаяся точка описывает одну арку циклоиды, когда t меняется от 0 до 2π, x при этом меняется от 0 до $2\pi a$.

Т.к. $x = a(t - \sin t)$, то $dx = a(t - \sin t)_t'dt = a(1 - \cos t)dt$.

Следовательно

$$V_x = \pi\int_{a}^{2\pi a} y^2dx = \pi\int_{0}^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,a(1-\cos t)dt =$$

$$=\pi a^3\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt = \pi a^3\int_{0}^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt =$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left[1-3\cos t+3\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)-(1-\sin^2 t)\cos t\right]dt=$$

$$=\pi a^3\left(\int_0^{2\pi}\frac{5}{2}tdt-4\int_0^{2\pi}\cos tdt+\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\cos 2td(2t)+\int_0^{2\pi}\sin^2 td(\sin t)=\right.$$

$$=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t\Big|_0^{2\pi}-4\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{3}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}+\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}\right)=\pi a^3\frac{5}{2}2\pi=5a^3\pi^2.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется интегральной суммой функции?
2. Что называется определенным интегралом?
3. Перечислите свойства определенного интеграла?
4. Сформулируйте теорему Ньютона – Лейбница.

Контрольные задания

1. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1. $2y^2 = x^3$, $x = 4$ [32π];
2. $y^2 = 2px$, $x = p$ [πp^3];
3. $y = \sin x$, $y = 0$ (1 полуволна) [$\pi^2/2$].

2. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1. $y^3 = 4x^2$, $y = 2$ [π];
2. $x2 + y4 = y^2$ [$\pi р^3$];
3. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ [19, 2π].

3. Вычислить определенные интегралы, используя определение и их свойства:

a) $\int_3^5 dx$; *j)* $\int_1^3 8x^3dx$;

b) $\int_{0}^{1} xdx$;

c) $\int_{0}^{2} 3x^2 dx$;

d) $\int_{-1}^{1} (2x+1)dx$;

e) $\int_{0}^{2\pi} \cos xdx$;

f) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x}$;

g) $\int_{-1}^{2} x^3 dx$;

h) $\int_{0}^{1} (x^4 - 3x^2 + 2x + 7)dx$;

i) $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^2}{4} - 2\sin x + 13 \right) dx$;

k) $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x} dx$;

l) $\int_{-1}^{1} (2x + 3x^2 + 4x^3)dx$;

m) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x^2} dx$;

n) $\int_{0}^{9} (3\sqrt{x} - x)dx$;

o) $\int_{0}^{1} e^{2x} dx$;

p)** $\int_{1}^{4} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;

q)* $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$;

r)* $\int_{0}^{2} \frac{2x}{1 + x^4} dx.$

4. Вычислить определенные интегралы, используя определение, их свойства и метод подстановки:

a) $\int_{1}^{2} (2x+1)^3 dx$;

b) $\int_{1}^{2} \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}$;

i)* $\int_{0}^{4} 6x^2 \sqrt{x^3 - 1} dx$;

j)* $\int_{1}^{e} \frac{3\ln^2 xdx}{x}$

c) $\int_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}dx$;

d) $\int_0^2 5\sqrt[3]{(x-2)^2}dx$;

*e)** $\int_1^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx$

*f)** $\int_0^3 6x^3(3x^4-1)^2 dx$;

*g)** $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{5x^4+1}$;

h) $\int_0^1 (e^x-1)^2 e^x dx$;

*k)** $\int_{-1}^2 \frac{6x^2 dx}{(x^3-5)^2}$;

*l)*** $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

m) $\int_{2\pi}^0 \sin^3 x \cos x dx$;

*n)*** $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x dx}{3-\cos x}$;

*o)** $\int_0^{\pi/6} e^{\sin x}\cos x dx$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курс «Математика и информатика» является одним из главных в цикле естественнонаучных дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для бакалавров гуманитарного направления. Он призван дать представление о тесной взаимосвязи математики и информатики, единых методах решения практических задач, а также систематизировать и обобщить знания студентов в данных предметных областях.

В первой части учебного пособия «Математика» представлен системный курс по основам высшей математики. Каждая из тем пособия включает в себя перечень ключевых понятий, вопросов и заданий, а также методические материалы для практического овладения студентами навыками самостоятельной работы с математической информацией.

Содержание пособия обеспечивает студентам гуманитарных направлений бакалавриата формирование знаний, умений и навыков в области профессионального использования математического аппарата на уровне требований Федерального государственного образовательного стандарта по дисциплине «Математика и информатика».

В части второй данного учебного пособия «Информатика» будут изложены теоретические основы информатики, рассмотрены вопросы, связанные с терминологическим аппаратом, основными понятиями и идеями информатики. Также предполагается уделить особое внимание методам и алгоритмам решения задач аналитико-синтетической переработки информации, разработанных в рамках информатики.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б е р м а н т , А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Аранович. – М. : Наука, 1969. – 202 с.

2. Б у г р о в , Я . С . Высшая математика / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Дрофа, 2003. – 198 с. – ISBN 5-222-00222-5.

3. Б у л д ы к , Г . М . Сборник задач и упражнений по высшей математике / Г. М. Булдык. – Минск : Юнипресс, 2002. – 231 с.

4. В ы г о д с к и й , М . Я . Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : ДЖАНГАР ; Большая медведица, 2001. – 178 с. – ISBN 5-7102-0197-9.

5. Г р е с , П . В . Математика для гуманитариев / П. В. Грес. – М. : Логос, 2009. – 288 с. – ISBN 978-5-98699-113-9.

6. Г у с а к , А . А . Справочное пособие к решению задач по математике / А. А. Гусак. – Минск, 1998. – 272 с.

7. Д у б р о в и н , Н . И . Задания к типовым расчетам по высшей математике / Н. И. Дубровин. – Владимир : Изд-во ВПИ, 1993. – 45 с.

8. Е ф и м о в , В . А . Сборник задач по математике для втузов / В. А. Ефимов, Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1981. – 165 с.

9. К л и о т - Д а ш и н с к и й , М . И . Алгебра матриц и векторов / М. И. Клиот-Дашинский. – СПб. : Лань, 2001. – 189 с. – ISBN 5-8114-0429-8.

10. К у р о ш , А . Г . Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : ГИФМЛ, 1962. – 220 с.

11. М а к с и м о в , Ю . Д . Курс высшей алгебры для гуманитарных специальностей / Ю. Д. Максимов. – СПб. : Спец. лит., 1999. – 178 с.

12. М а р к о в, Л. Н. Высшая математика. В 2 ч. Ч. 1. Элементы линейной и векторной алгебры. Основы аналитической геометрии / Л. Н. Марков, Г. П. Размыслович. – Минск : Амалфея, 2003. – 350 с. – ISBN 985-441-228-8:5525-00.

13. М ы ш к и с, А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 150 с.

14. Н е м ы ц к и й, В. А. Курс математического анализа / В. А. Немыцкий. – М. : ГИТТЛ, 1957. – 254 с.

15. Общая алгебра / под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – М. : Наука, 1990. – 154 с.

16. П и с к у н о в, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1964. – 233 с.

17. П о д о л ь с к и й, В. А. Сборник задач по высшей математике / В. А. Подольский, А. М. Суходольский. – М. : Высш. шк., 1974 – 134 с.

Учебное издание

СПИРИНА Татьяна Венедиктовна
ТРОИЦКАЯ Елена Анатольевна

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Учебное пособие

Часть 1. Математика

Подписано в печать 12.12.13.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,11. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ЗОЛОТОЙ ФОНД ОТЕЧЕСТВЕННОЙ НАУКИ

ЛУЧШЕЕ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ В ОТРАСЛИ

ДИПЛОМ

ЛАУРЕАТА
ВСЕРОССИЙСКОЙ ВЫСТАВКИ

Москва, 2012

Троицкая Е.А., Спирина Т.В.

Электронное учебное издание

«ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ В ОБРАЗОВАНИИ. ЧАСТЬ1 ДИДАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ»

Издательство Владимирского государственного университета, 2012.

ПРЕЗИДЕНТ *М.Ю.ЛЕДВАНОВ*

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ * МОСКВА * ДЛЯ ДИПЛОМОВ

http://www.rae.ru/ru/DIPLOM/

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

ЗОЛОТОЙ ФОНД ОТЕЧЕСТВЕННОЙ НАУКИ

СЕРТИФИКАТ

УЧАСТНИКА ВСЕРОССИЙСКОЙ ВЫСТАВКИ-ПРЕЗЕНТАЦИИ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ ИЗДАНИЙ (Москва, 2012)

Троицкая Е.А., Спирина Т.В.

Электронное учебное издание

«ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ В ОБРАЗОВАНИИ. ЧАСТЬ1 ДИДАКТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ»

Издательство Владимирского государственного университета, 2012.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ * МОСКВА * ДЛЯ ДИПЛОМОВ

ПРЕЗИДЕНТ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

академик РАЕ М.Ю.Ледванов **WWW.RAE.RU**