Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

А. Г. Сорокина В. А. Скляренко

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВлГУ

Часть 2

Владимир 2002

ББК 22.1 я72
С65

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
Владимирского государственного педагогического университета
Ю.А. Алхутов

Кафедра геометрии и методики преподавания математики
Владимирского государственного педагогического университета

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

С65 **Сорокина А.Г., Скляренко В.А.**
Пособие по математике для поступающих в ВлГУ. Часть 2 / Владим. гос. ун-т; Владимир, 2002. 60 с.
ISBN

Первая часть пособия, предназначенная для подготовки к письменному вступительному экзамену, вышла в 2001 г. В настоящем издании приведены задачи, предлагавшиеся последние три года абитуриентам Владимирского государственного университета на устных вступительных экзаменах и собеседованиях с медалистами по математике.

Пособие предназначено для преподавателей и слушателей подготовительных курсов и лицеев при ВлГУ.

Ил. 19. Библиогр.: 7 назв.

ISBN

Введение

Настоящий сборник является второй частью Пособия по математике для поступающих в ВлГУ. Первая часть сборника издана в 2001 году и предназначена для подготовки к письменному экзамену по математике. В нее включены примеры и задачи, предлагавшиеся абитуриентам, поступавшим на технические специальности ВлГУ, в 2000–2001 годах. Вторая часть пособия посвящена задачам, которые были включены в билеты устного экзамена по математике на экономический факультет и в программу собеседования с медалистами.

Билет устного экзамена по математике содержал два теоретических вопроса, по алгебре и по геометрии, аналогичных вопросам соответствующих школьных экзаменов и три задачи из различных разделов школьного курса. На собеседовании с медалистами каждому из них предлагалось решить три или четыре задачи, по трудности аналогичные задачам устного экзамена.

Сборник состоит из семи разделов, охватывающих все основные темы школьного курса математики. В каждом разделе содержится достаточное количество задач с подробными их решениями, снабженными, в случае необходимости, рисунками. В конце каждого из разделов приведены списки задач для самостоятельного решения и ответы к ним.

Пособие может быть использовано для самостоятельной подготовки к устному экзамену или собеседованию по математике, а также для преподавателей и слушателей подготовительных курсов и лицеев при ВлГУ.

Авторы

1.. Проценты, пропорции, прогрессии

Пример 1.1. На сколько процентов изменится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 10%, а другое уменьшить на 20%?

Решение. Пусть x, y — заданные числа, их произведение $p_1 = xy$. После преобразований произведение равно

$$p_2 = \left(x + \tfrac{10}{100}x\right) \cdot \left(y - \tfrac{20}{100}y\right) = 1{,}1x \cdot 0{,}8y = 0{,}88xy$$

и изменилось на $p_2 - p_1 = -0{,}12xy$, что в процентах к первоначальному значению произведения составит $\frac{-0{,}12xy}{xy} \cdot 100\% = -12\%$. □

Ответ: -12%.

Пример 1.2. Два числа относятся как $3 : 1$. Первое увеличили на 10%, второе уменьшили на 2%. На сколько процентов изменилась их сумма?

Решение. Пусть заданы числа $3x$ и x, их сумма $S_1 = 4x$. После преобразований

$$S_2 = \left(3x + \tfrac{10}{100} \cdot 3x\right) + \left(x - \tfrac{2}{100} \cdot x\right) = 3{,}3x + 0{,}98x = 4{,}28x$$

сумма изменилась на $S_2 - S_1 = 0{,}28x$, в процентах к первоначальной сумме $\frac{0{,}28x}{4x} \cdot 100\% = 7\%$. □

Ответ: 7%.

Пример 1.3. Сумма n первых членов арифметической прогрессии задана формулой $S_n = 12n^2 + 7n$. Найти десятый член прогрессии.

Решение. Так как $S_1 = a_1$, то при $n = 1$ получим $a_1 = 12 + 7 = 19$. При $n = 2$ $S_2 = a_1 + a_2 = 12 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 48 + 14 = 62$, откуда $2a_1 + d = 62$, $d = 62 - 38 = 24$. По формуле общего члена прогрессии находим $a_{10} = a_1 + 9d = 19 + 9 \cdot 24 = 19 + 216 = 235$.

Второй способ:

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = (12 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10) - (12 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9) =$$
$$= 12(10^2 - 9^2) + 7 = 12 \cdot 1 \cdot 19 + 7 = 235. \quad \square$$

Ответ: 235.

Пример 1.4. Сумма n первых членов геометрической прогрессии задана формулой $S_n = \frac{5^n - (-1)^n}{5^{n-2}}$. Найти четвертый член прогрессии.

Решение.

$$\begin{gathered}
b_1 = S_1 = \tfrac{5-(-1)}{5^{-1}} = 30;\\
b_1 + b_2 = S_2 = \tfrac{25-1}{5^0} = 24;\\
b_1(1+q) = 24;\\
1 + q = \tfrac{24}{30} = \tfrac{4}{5};\\
q = -\tfrac{1}{5};\\
b_4 = b_1 q^3 = 30 \cdot \tfrac{-1}{125} = -\tfrac{6}{25}. \quad \square
\end{gathered}$$

Ответ: $-\frac{6}{25}$.

Пример 1.5. Найти сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

Решение. Такие числа образуют арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 13$, $d = 5$, поэтому формула общего члена прогрессии

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 13 + (n-1)\cdot 5 = 8 + 5n.$$

Определим количество слагаемых из условия:

$$8 + 5n \le 99 \Leftrightarrow 5n \le 91 \Leftrightarrow n \le 18\tfrac{1}{5}.$$

Наибольшее натуральное n, удовлетворяющее этому неравенству $n = 18$, $a_{18} = 8 + 90 = 98$,

$$S_{18} = \tfrac{13+98}{2} \cdot 18 = 111 \cdot 9 = 999. \quad \square$$

Ответ: 999.

Пример 1.6. Найти сумму первых двадцати нечетных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

Решение. Числа образуют арифметическую прогрессию, в которой

$$a_1 = 3, \quad d = 10;$$
$$a_{20} = a_1 + 19d = 3 + 190 = 193;$$
$$S_{20} = \tfrac{3+193}{2} \cdot 20 = 1960. \quad \square$$

Ответ: 1960.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. На сколько процентов изменится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 20%, а другое уменьшить на 20%?

1.2. Числитель дроби увеличили на 26%, а знаменатель уменьшили на 10%. На сколько процентов изменилась дробь?

1.3. Два числа относятся как 2 : 5. Первое число увеличили на 15%, второе — на 8%. На сколько процентов увеличится их сумма?

1.4. Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = 13n^2 + 5n$. Найти a_{16}.

1.5. Сумма n первых членов геометрической прогрессии равна $S_n = \frac{3^n - 2^n}{8 \cdot 3^{n-2}}$, Найти b_3.

1.6. Сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулой $S_n = \frac{5n^2 - n}{2}$. Составить формулу общего члена прогрессии.

1.7. Найти сумму первых двадцати четных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 5.

1.8. Найти сумму первых двадцати четных натуральных чисел, которые при делении на 9 дают в остатке 4.

1.9. Найти сумму первых двадцати нечетных натуральных чисел, которые при делении на 9 дают в остатке 2.

1.10. Найти сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 4.

Ответы:

1.1. -4%. **1.2.** 40%. **1.3.** 10%. **1.4.** 408. **1.5.** $\frac{1}{6}$.
1.6. $a_n = 5n - 3$. **1.7.** 2900. **1.8.** 3500. **1.9.** 3640. **1.10.** 1017.

2.. Алгебраические уравнения

Пример 2.1. Найти целый корень уравнения

$$\frac{2}{\sqrt{x+3}} + \frac{2}{\sqrt{2x+4}} = \sqrt{5-3x}.$$

Решение. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases} x+3>0, \\ 2x+4>0, \\ 5-3x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x>-2, \\ x \leq \frac{5}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \left(-2, \tfrac{5}{3}\right].$$

Этот промежуток содержит три целых числа: -1, 0, 1. Подстановкой находим $x=-1$, так как $\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{8}$. □

Ответ: -1.

Пример 2.2. Решить уравнение

$$\frac{x^2-4x-12}{x-6} = x^2 - x - 22.$$

Решение. Разложим числитель дроби на множители

$$\frac{(x-6)(x+2)}{x-6} = x^2 - x - 22;$$
$$x \neq 6, \quad x + 2 = x^2 - x - 22;$$
$$x^2 - 2x - 24 = 0;$$
$$x_1 = -4, \quad x_2 = 6 \text{ — не входит в ОДЗ.} \quad \square$$

Ответ: -4.

Пример 2.3. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = x + 2.$$

Решение. Домножив обе части уравнения на $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$, получим

$$2x + 3 - (x + 1) = (x + 2)\left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}\right),$$

$x+2 \neq 0$, так как $x=-2$ не входит в ОДЗ, поэтому

$$
\begin{gathered}
\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=1; \\
\sqrt{2x+3}=1-\sqrt{x+1}; \\
2x+3=1-2\sqrt{x+1}+x+1; \\
2\sqrt{x+1}=-x-1; \\
2\sqrt{x+1}+(x+1)=0; \\
\sqrt{x+1}\left(2+\sqrt{x+1}\right)=0; \\
x=-1. \quad \square
\end{gathered}
$$

Ответ: -1.

Пример 2.4. Линии $y=x^3-3x^2+x+2$ и $y=7x+4$ пересекаются в точке $M(-1,-3)$. Найти абсциссы других точек пересечения.

Решение. По условию уравнение $x^3-3x^2+x+2=7x+4$ или $x^3-3x^2-6x-2=0$ имеет корень $x=-1$. Делим многочлен

$x^3 - 3x^2 - 6x - 2$ на $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - 6x - 2 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + \ \ x^2} \qquad\qquad\quad & x^2 - 4x - 2 \\
-4x^2 - 6x \quad\ & \\
\underline{-4x^2 - 4x} \quad\ & \\
-2x - 2 & \\
\underline{-2x - 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Уравнение примет вид

$$(x+1)(x^2 - 4x - 2) = 0;$$
$$x^2 - 4x - 2 = 0;$$
$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}. \quad \square$$

Ответ: $2 \pm \sqrt{6}$.

Пример 2.5. Графики функций $y = 2x^3 - 3x^2 + x + 3$ и $y = 13x + 10$ касаются в точке $M(-1, -3)$. В какой точке они пересекаются?

Решение. По условию уравнение $2x^3 - 3x^2 + x + 3 = 13x + 10$, или $2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = 0$ имеет кратный корень $x = -1$. поэтому левая часть уравнения делится на $(x+1)^2$:

$$\frac{2x^3-3x^2-12x-7}{x^2+2x+1} = 2x-7.$$

Абсцисса точки пересечения $x=\frac{7}{2}$, ордината

$$y = 13\cdot\frac{7}{2}+10 = \frac{111}{2}. \quad \square$$

Ответ: $\left(\frac{7}{2}, \frac{111}{2}\right)$.

Пример 2.6. Решить уравнение

$$\frac{x^3-1}{|x|+1} - x^2 + x + 9 = 0.$$

Решение. **1-й случай.**

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{x^3-1}{x+1} - x^2 + x + 9 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^3 - 1 - x^3 + x^2 + 9x - x^2 + x + 9 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 10x = -8; \end{cases}$$

$$\emptyset.$$

2-й случай.

$$\left\{\begin{array}{r} x < 0, \\ \frac{x^3-1}{-x+1} - x^2 + x + 9 = 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} x \geq 0, \\ -x^2 - x - 1 - x^2 + x + 9 = 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} x < 0, \\ 2x^2 = 8; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x < 0, \\ x = \pm 2; \end{array}\right.$$

$$x = -2. \quad \square$$

Ответ: -2.

Пример 2.7. Решить уравнение

$$\sqrt{9x - 4 - 2x^2} = (3x - 2)\sqrt{4 - x}.$$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 9x - 4 - 2x^2 \geq 0, \\ 4 - x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2(x-4)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0, \\ 4 - x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4-x)(2x-1) \geq 0, \\ 4 - x \geq 0; \end{cases}$$

$$x \in \left[\tfrac{1}{2}, 4\right].$$

На ОДЗ уравнение эквивалентно

$$\sqrt{(4-x)(2x-1)} - (3x-2)\sqrt{4-x} = 0;$$

$$\sqrt{4-x}\left(\sqrt{2x-1} - (3x-2)\right) = 0;$$

$$4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4;$$

или

$$\sqrt{2x-1} = 3x-2;$$

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0, \\ 2x-1 = 9x^2-12x+4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ 9x^2-14x+5=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x_1 = 1, \quad \left(x_2 = \frac{5}{9} < \frac{2}{3}\right). \end{cases} \qquad \square$$

Ответ: 1, 4.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения

2.1. $\frac{x^2-6x+8}{x-4} = x^2-8x+18.$

2.2. $\frac{x+5}{x+2} + \frac{5x+7}{x^2+5x+6} = 0.$

2.3. $\sqrt{3x-3} - \sqrt{x-3} = \frac{x}{2}.$

2.4. $\sqrt{8-x}-\sqrt{x+2}=\frac{3-x}{2}$.

2.5. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{1-2x}=2x+1$.

2.6. Найти целый корень уравнения $\sqrt{x+4}+\sqrt{-x-2}=x^2-7$.

2.7. Найти целый корень уравнения $\sqrt{2x-11}+\sqrt{8-x}=\frac{\sqrt{x-4}+1}{x-6}$.

2.8. Найти все корни уравнения $4x^3+3x^2-4x-3=0$, если известен один: $x=1$.

2.9. Линии $y=2x^3+2x^2-x$ и $y=-x^2+6x-2$ пересекаются в точке $M(1,3)$. Найти абсциссы других точек пересечения.

2.10. Графики функций $y=2x^3+3x^2-12x-12$ и $y=-12x-11$ касаются в точке $M(-1,1)$. В какой точке они пересекаются?

2.11. Решить уравнение $\frac{x^3-1}{|x|+1}-x^2+x+3=0$.

2.12. Решить уравнение $\sqrt{5x+3-2x^2}=(3x+1)\sqrt{3-x}$.

2.13. Решить уравнение $x^2-4=\sqrt{x^2-4x+4}$.

2.14. Решить уравнение $3x^2-1=\sqrt{x^2+2x+1}$.

Ответы:

2.1. 5. **2.2.** -11. **2.3.** 4. **2.4.** $-1, 3, 7$. **2.5.** $\frac{1}{2}$. **2.6.** -3. **2.7.** 7. **2.8.** $-\frac{3}{4}, \pm 1$. **2.9.** $\frac{-5\pm\sqrt{41}}{4}$. **2.10.** $\left(\frac{1}{2}, -17\right)$. **2.11.** -1. **2.12.** $0, 3$. **2.13.** $-3, 2$. **2.14.** $-\frac{2}{3}, 1$.

3.. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства

Пример 3.1. Решить уравнение

$$\log_2\left(3 - 2^{|x|}\right) = x - 1.$$

Решение. По определению логарифма $3 - 2^{|x|} = 2^{x-1}$.

1-й случай

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 3 - 2^x = \frac{2^x}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \frac{3}{2} \cdot 2^x = 3, \\ x = 1. \end{cases}$$

2-й случай

$$\begin{cases} x < 0, \\ 3 - 2^{-x} = \frac{2^x}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 2 = 0. \end{cases}$$

Замена $2^x = t$, $t^2 - 6t + 2 = 0$; $t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$.
Обратная замена **I.** $2^x = 3 + \sqrt{7} > 1$, $x = \log_2(3 + \sqrt{7}) > 0$.
II. $2^x = 3 - \sqrt{7} < 1$, $x = \log_2(3 - \sqrt{7}) < 0$. □

Ответ: $1, \log_2(3 - \sqrt{7})$.

Пример 3.2. Решить уравнение

$$\log_3^2 27x^2 + \log_3 \frac{x^2}{6} = 8 + \log_3 \frac{1}{2x^4}.$$

Решение. Используя свойства логарифма, имеем

$$(\log_3 27 + 2\log_3 |x|)^2 + (2\log_3 |x| - \log_3 6) = \\ = 8 - (\log_3 2 + 4\log_3 |x|).$$

Пусть $\log_3 |x| = t$.

$$(3+2t)^2 + 2t = 8 + \log_3 \tfrac{6}{2} - 4t;$$
$$9 + 12t + 4t^2 + 6t - 9 = 0;$$
$$2t^2 + 9t = 0;$$
$$t_1 = 0, \quad t_2 = -\tfrac{9}{2};$$
$$\log_3 |x| = 0, \quad |x| = 1, \quad x = \pm 1,$$
$$\log_3 |x| = -\tfrac{9}{2}, \quad |x| = \tfrac{1}{81\sqrt{3}}, \quad x = \pm\tfrac{1}{81\sqrt{3}}. \quad \square$$

Ответ: $\pm 1, \ \pm\frac{1}{81\sqrt{3}}$.

Пример 3.3. Решить уравнение

$$9^{1/x} \cdot 12^{x+3} = 4.$$

Решение. Прологарифмируем обе части равенства по основанию 3.

$$\tfrac{1}{x} \log_3 9 + (x+3) \log_3 (4 \cdot 3) = \log_3 4;$$
$$\tfrac{2}{x} + (x+3)(1 + \log_3 4) = \log_3 4;$$

Пусть $\log_3 4 = a$.

$$2 + (x^2 + 3x)(1 + a) = ax;$$
$$(1 + a)x^2 + (2a + 3)x + 2 = 0;$$
$$D = 4a^2 + 12a + 9 - 8 - 8a = 4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2;$$
$$x_1 = \frac{-2a-3-2a-1}{2(a+1)} = -2;$$
$$x_2 = \frac{-2a-3+2a+1}{2(a+1)} = -\frac{1}{a+1} = -\frac{1}{\log_3 4+1} = -\frac{1}{\log_3 12} = -\log_{12} 3. \quad \square$$

Ответ: $-2, \ -\log_{12} 3$.

Пример 3.4. Вычислить $4^{\frac{x-2}{x-1}} \cdot 6^{x-2}$ при $x = \log_6 3$.

Решение. Найдем $\frac{x-2}{x-1}$ при $x = \log_6 3$.

$$\frac{\log_6 3-2}{\log_6 3-1} = \frac{\log_6 \frac{3}{36}}{\log_6 \frac{3}{6}} = \frac{\log_6 12}{\log_6 2} = \log_2 12,$$

поэтому

$$4^{\frac{x-2}{x-1}} \cdot 6^{x-2} = 4^{\log_2 12} \cdot 6^{\log_6 3} \cdot \frac{1}{36} = 2^{\log_2 144} \cdot \frac{3}{36} = \frac{144}{12} = 12. \quad \square$$

Ответ: 12.

Пример 3.5. Найти целый корень уравнения

$$6^x = \frac{x+2}{3-3x}.$$

Решение. Уравнение имеет решения лишь если

$$\frac{x+2}{3-3x} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-2, 1).$$

Этот промежуток содержит две целые точки $x = -1$ и $x = 0$. Подстановкой убеждаемся, что корень $x = -1$. $\square$

Ответ: -1.

Пример 3.6. Решить неравенство

$$\frac{3^{1/x}+1}{\log_{0,3}(x+4)} \leq 0.$$

Решение. Числитель при всех допустимых x положителен, неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \log_{0,3}(x+4) < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x+4 > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ x > -3; \end{cases}$$

$$x \in (-3,0) \cup (0,\infty). \quad \square$$

Ответ: $(-3,0) \cup (0,\infty)$.

Пример 3.7. Решить неравенство

$$\frac{2^x - 3^x}{\log_2 |x|} \geq 0.$$

Решение. Воспользуемся методом интервалов.

- ОДЗ: $\{|x| \neq 0, |x| \neq 1\} \Leftrightarrow \{x \neq 0, x \neq -1, x \neq 1\}$.
- Корни: $2^x - 3^x = 0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, $x = 0 \notin$ ОДЗ.

- Знаки, (см. рис. 1):

$$f(-2) = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}}{\log_2 2} > 0, \quad f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\log_2 \frac{1}{2}} < 0,$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\log_2 \frac{1}{2}} > 0, \quad f(2) = \frac{4-9}{\log_2 2} < 0. \quad \square$$

Ответ: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

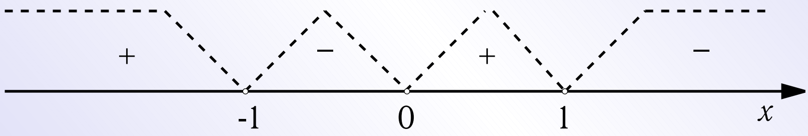

Рис. 1

Пример 3.8. Решить неравенство

$$\log_x \log_{x^2} |8 - 2x| \le 0.$$

Решение. **1-й случай.** Пусть $x \in (0,1)$, тогда обе логарифмические функции являются убывающими.

$$\begin{cases} x \in (0,1), \\ \log_{x^2} |2x-8| \geq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0,1), \\ |2x-8| \le x^2, \\ x \ne 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0,1), \\ 2x-8 \le x^2, \\ 2x-8 \ge -x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0,1), \\ x^2-2x+8 \ge 0 \text{— выполнено при всех } x, \\ x^2+2x-8 \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0,1), \\ (x+4)(x-2) \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0,1), \\ x \in (-\infty,-4] \cup [2,\infty). \end{cases}$$

Система решений не имеет.

2-й случай. Пусть $x > 1$, тогда обе логарифмические функции возрастают.

$$\begin{cases} x > 1, \\ \log_{x^2} |2x - 8| \le 1, \\ \log_{x^2} |2x - 8| > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ |2x - 8| \le x^2, \\ |2x - 8| > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ 2x - 8 \leq x^2, \\ 2x - 8 \geq -x^2, \\ 2x - 8 > 1 \text{ или } 2x - 8 < -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 2x + 8 \geq 0 \text{— выполнено при всех } x, \\ x^2 + 2x - 8 \geq 0, \\ x > \frac{9}{2} \text{ или } x < \frac{7}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (1, \infty), \\ x \in (-\infty, -4] \cup [2, \infty), \\ x \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, \infty\right); \end{cases}$$

$$x \in \left[2, \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, \infty\right). \quad \square$$

Так как в первом случае решений нет, то получаем ответ.

Ответ: $\left[2, \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{9}{2}, \infty\right)$.

Пример 3.9. Решить неравенство

$$\log_{|x-2|}(3 - |2x + 1|) \leq 0.$$

Решение. Найдем ОДЗ выражения.

$$\begin{cases} 3-|2x+1|>0, \\ |x-2|\neq 0, \\ |x-2|\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+1| < 3, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 < 2x+1 < 3, \\ x \neq 1, 2, 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x < 1, \\ x \neq 1, 2, 3; \end{cases}$$

$$x \in (-2, 1).$$

Тогда на ОДЗ $|x-2| = 2-x > 1$ и исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \in (-2, 1), \\ 3 - |2x + 1| \leq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-2, 1), \\ \left[\begin{array}{l} 2x + 1 \geq 2, \\ 2x + 1 \leq -2; \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-2, 1), \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \leq -\frac{3}{2}; \end{array} \right. \end{cases}$$

$$x \in \left(-2, -\tfrac{3}{2}\right] \cup \left[\tfrac{1}{2}, 1\right). \quad \square$$

Ответ: $\left(-2, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

3.1. $\log_3(4 - 3^{|x|}) = x$.

3.2. $16^{\frac{x}{x+1}} \cdot 3^{3x} = 6.$

3.3. $\log_2^2 \frac{x^2}{2} + \log_4^2 x^4 = \log_2 \frac{2}{x^6}.$

3.4. $\log_2^2 \frac{x}{\sqrt{2}} + \log_4 x^3 = \frac{7}{4}.$

3.5. Найти целый корень уравнения $2^x + \frac{x+5}{8x+16} = 0.$

3.6. Вычислить $2^{x+2} \cdot 3^{\frac{2x+1}{x-1}}$ при $x = \log_2 \frac{2}{3}.$

Решить неравенства:

3.7. $\frac{x^2-4x}{\log_{0,1}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} \geq 0.$

3.8. $\log_{|x+1|}(|3x+1|-8) \leq 1.$

3.9. $\log_{x-2} \log_{2x} |2x-9| \leq 0.$

3.10. $\frac{\sqrt{16-2^{|x|}}}{2^x-3^x} \geq 0.$

Ответы:

3.1. $\log_3 2$, $\log_3(2-\sqrt{3})$. **3.2.** $\frac{1}{3}$, $-\log_3 6$. **3.3.** ± 1, $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.
3.4. 2, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **3.5.** -4. **3.6.** 3. **3.7.** $(0,4]$. **3.8.** $[-4,-3)\cup\left(\frac{7}{3},4\right]$.
3.9. $\left(2,\frac{9}{4}\right]\cup(3,4)\cup(5,\infty)$. **3.10.** $[-4,0)\cup\{4\}$.

4.. Тригонометрия

Пример 4.1. Решить уравнение

$$\frac{\cos x-\cos 5x}{\sin 3x}+1=0$$

на промежутке $[0,\pi]$.

Решение. Применим формулу, преобразующую разность косинусов в произведение.

$$\frac{-2\sin 3x\sin(-2x)}{\sin 3x}+1=0;$$

$$\begin{cases} \sin 3x\neq 0, \\ 2\sin 2x=-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3x\neq 0, \\ x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

При $n = 0$ $x = -\frac{\pi}{12} \notin [0, \pi]$; при $n = 1$ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12} \in [0, \pi]$; при $n = 2$ $x = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12} \in [0, \pi]$; при $n \geq 3$ $x > \pi$, при $n \leq -1$ $x < 0$. □

Ответ: $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$.

Пример 4.2. Решить неравенство

$$\log_{|\sin x|}(\sin x + \sqrt{3}) \leq 1$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Решение. ОДЗ неравенства $|\sin x| \neq 0$, $|\sin x| \neq 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0$, $\sin x \neq \pm 1$. Поэтому неравенство решаем отдельно на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Так как $|\sin x| < 1$, логарифмическая функция убывает, поэтому

$$\sin x + \sqrt{3} \geq |\sin x|;$$

$$\begin{cases} \sin x \leq \sin x + \sqrt{3}, \\ \sin x \geq -\sin x - \sqrt{3}; \end{cases}$$

$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Это неравенство выполнено в I и II четверти, а в IV четверти при $-\frac{\pi}{3} \leq x < 0$. □

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Пример 4.3. Решить неравенство

$$\log_{2\sin x} |2\cos x| \geq 1$$

на промежутке $[-\pi, \pi]$.

Решение. ОДЗ:

$$\begin{cases} 2\sin x > 0, \\ 2\sin x \neq 1, \\ 2\cos x \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin x \neq \frac{1}{2}, \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$$

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right).$$

Решаем неравенство на промежутках. Если $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$, то $\sin x < \frac{1}{2}$, $2\sin x < 1$, неравенство примет вид $|2\cos x| \leq 2\sin x$. На $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ $\cos x > 0$, на $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$ $\cos x < 0$, получим совокупность двух систем.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \\ \cos x \leq \sin x; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right), \\ -\cos x \leq \sin x. \end{cases} \end{array}\right.$$

В первой подсистеме неравенство делим на $\cos x > 0$, во второй на $\cos x < 0$, получим

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \\ \operatorname{tg} x \geq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right), \\ \operatorname{tg} x \leq -1. \end{cases}\end{array}\right.$$

Обе подсистемы решений не имеют. Если $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$, то $2\sin x > 1$, неравенство примет вид $|2\cos x| \geq 2\sin x$ и распадается на системы

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \cos x \geq \sin x; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \\ -\cos x \geq \sin x; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg} x \leq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg} x \geq -1; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right], \\ x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right). \quad \square \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

Пример 4.4. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + 2\cos 2x} = \sqrt{2}\sin x.$$

Решение. Перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x \geq 0, \\ 1 + 2\cos 2x = 2\sin^2 x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 1 + 2 - 4\sin^2 x = 2\sin^2 x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.5. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos x + 2} + \sqrt{2}\sin x = 0.$$

Решение.

$$\begin{cases} \sin x \le 0, \\ \cos x + 2 = 2\sin^2 x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \le 0, \\ 2\cos^2 x + \cos x = 0; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \le 0, \\ \cos x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x \le 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \end{array} \right. \qquad n \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Пример 4.6. Решить неравенство

$$\cos x + \cos 2x \ge 0$$

на промежутке $[0, 2\pi]$.

Решение. Используя формулу косинуса двойного угла, получим неравенство

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0.$$

Разложим левую часть на множители

$$(\cos x + 1)(2\cos x - 1) \geq 0.$$

Первый сомножитель всегда неотрицателен, поэтому

$$\cos x = -1 \quad \text{или} \quad \cos x \geq \tfrac{1}{2}.$$

Первое условие выполнено только при $x = \pi \in [0, 2\pi]$, а второе на $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ и $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$. □

Ответ: $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \{\pi\}$.

Пример 4.7. Найти область значений функции

$$y = \sin^2 x + 3\cos 2x + \cos x.$$

Решение. Преобразуем функцию

$$y = (1 - \cos^2 x) + 3(2\cos^2 x - 1) + \cos x = 5\cos^2 x + \cos x - 2$$

и выделим полный квадрат

$$y = 5\left(\cos^2 x + \tfrac{1}{5}\cos x\right) - 2 =$$
$$= 5\left(\cos^2 x + 2\cdot\tfrac{1}{10}\cdot\cos x + \tfrac{1}{100}\right) - \tfrac{1}{20} - 2 = 5\left(\cos x + \tfrac{1}{10}\right)^2 - \tfrac{41}{20}.$$

Наименьшее значение для $\left(\cos x + \frac{1}{10}\right)^2$ ноль $\left(\text{при } \cos x = -\frac{1}{10}\right)$, наибольшее значение $\frac{121}{100}$ (при $\cos x = 1$), следовательно,

$$y_{\max} = 5\cdot\tfrac{121}{100} - \tfrac{41}{20} = 4,$$
$$y_{\min} = 5\cdot 0 - \tfrac{41}{20} = -\tfrac{41}{20}. \quad \square$$

Ответ: $\left[-\frac{41}{20}, 4\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Решить неравенство $\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} > 0$ на $[0, 2\pi]$.

4.2. Решить уравнение $\sqrt{4\sin x - 1} + \sqrt{3}\cos x = 0$.

4.3. Решить уравнение $\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\cos 2x} = 1$ на промежутке $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.4. Решить неравенство $\log_{|\sin x|}(\cos^2 x + 0{,}5) \geq 2$ на $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

4.5. Решить неравенство $\sin 2x + 2\cos^2 x \geq 0$.

4.6. Найти область значений функции $y = 4\sin x + 5\cos 2x$.

Ответы:

4.1. $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$. **4.2.** $\pi - \arcsin\frac{2}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$. **4.3.** $-\pi,\ 0$.
4.4. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$. **4.5.** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.
4.6. $\left[-9, \frac{27}{5}\right]$.

5.. Задачи с параметром

Пример 5.1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{2ax - 12} = 2 - x \qquad (*)$$

имеет единственный корень.

Решение. Возведем обе части равенства в квадрат при условии $2-x \geq 0$ или $x \leq 2$. Получим квадратное уравнение

$$x^2 - 2(a+2)x + 16 = 0. \qquad (**)$$

Найдем $\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 16 = (a-2)(a+6)$. При $(a-2)(a+6) \geq 0$ квадратное уравнение (**) имеет хотя бы один корень, но при $a = 2$ этот корень $x = 4$ не является корнем исходного уравнения (*), а при $a = -6$ $x = -4$ является единственным корнем (*). Значит, $a = -6$ входит в ответ.

Потребуем, чтобы корни уравнения (**) удовлетворяли условию $x_1 \leq 2 < x_2$. Тогда только один из них является корнем (*) и условия задачи будут выполнены.

$$\begin{cases} x_1 - 2 \leq 0, \\ x_2 - 2 > 0; \end{cases}$$

равносильно

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) \leq 0;$$
$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \leq 0.$$

Используя теорему Виета для уравнения (**), получим

$$16 - 2 \cdot 2(a+2) + 4 \leq 0;$$
$$12 - 4a \leq 0;$$
$$a \geq 3. \quad \square$$

Ответ: $\{-6\} \cup [3, +\infty)$.

Пример 5.2. Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{2ax - 8} = x - 1$$

имеет два различных корня.

Решение. Возведем уравнение в квадрат при условии $x - 1 \geq 0$, получим

$$x^2 - 2(a+1)x + 9 = 0.$$

Найдем

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 9 = (a-2)(a+4).$$

Квадратное уравнение имеет два различных корня, если $D > 0$, но эти корни будут корнями исходного уравнения, если выполнены условия

$$\begin{cases} x_1 - 1 \geq 0, \\ x_2 - 1 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 \geq 0, \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \geq 0; \end{cases}$$

или по теореме Виета

$$\begin{cases} 2a + 2 - 2 \geq 0, \\ 9 - 2a - 2 + 1 \geq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a \geq 0, \\ -2a \geq -8; \end{cases} \iff a \in [0, 4].$$

Учитывая что $D > 0$, $(a - 2)(a + 4) > 0$, $a \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$, получим $a \in (2, 4]$. □

Ответ: $(2, 4]$.

Пример 5.3. Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{ax + 9} = x - 2$$

не имеет корней.

Решение. После возведения в квадрат получим

$$x^2 - (a + 4)x - 5 = 0.$$

Это уравнение имеет два различных корня: $D = (a + 4)^2 + 20 > 0$

при всех a. Исходное уравнение не имеет корней, если

$$\begin{cases} x_1 - 2 < 0, \\ x_2 - 2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4 < 0, \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 4 - 4 < 0, \\ -5 - 2(a+4) + 4 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0, \\ -2a > 9; \end{cases}$$

$$a < -\tfrac{9}{2}. \quad \square$$

Ответ: $(-\infty, -\frac{9}{2})$.

Пример 5.4. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_{x+3}(x^2 + 2ax) = 1 + \log_{x+3}(2 - x)$$

имеет два различных корня.

Решение. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ 2-x>0, \\ x^2+2ax=(x+3)(2-x); \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(-3,-2)\cup(-2,2), \\ 2x^2+(2a+1)x-6=0. \end{cases}$$

Квадратный трехчлен $y=2x^2+(2a+1)x-6$ имеет два различных корня разных знаков, так как $D>0$ при всех a и $x_1x_2=-3$. Так как $y(0)=-6$, то, чтобы корни попали в множество $(-3,-2)\cup(-2,2)$, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\begin{cases} y(-3)>0, \\ y(-2)\neq 0, \\ y(2)>0; \end{cases} \iff \begin{cases} 18-6a-3-6>0, \\ 8-4a-2-6\neq 0, \\ 8+4a+2-6>0; \end{cases} \iff \begin{cases} a<\frac{3}{2}, \\ a\neq 0, \\ a>-1; \end{cases}$$

откуда $a\in(-1,0)\cup\left(0,\frac{3}{2}\right)$. □

Ответ: $(-1,0)\cup\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

Пример 5.5. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_x(x-2ax)=\log_x(4-x^2)$$

имеет единственный корень.

Решение. Перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 4 - x^2 > 0, \\ x - 2ax = 4 - x^2; \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (0,1) \cup (1,2), \\ x^2 - (2a-1)x - 4 = 0. \end{cases}$$

Квадратный трехчлен $y = x^2 - (2a-1)x - 4$ имеет строго положительный дискриминант при всех a и корни разных знаков. Для того, чтобы положительный корень попал в $(0,1) \cup (1,2)$, достаточно потребовать

$$\begin{cases} y(2) > 0, \\ y(1) \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} 4 - 4a + 2 - 4 > 0, \\ 1 - 2a + 1 - 4 \neq 0; \end{cases} \iff \begin{cases} a < \frac{1}{2}, \\ a \neq -1. \end{cases} \quad \square$$

Ответ: $(-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Пример 5.6. Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{8a\cos x - 4\sin^2 x - 7} = 4\cos x + 1$$

не имеет решений.

Решение. Пусть $\cos x = t \in \left[-\frac{1}{4}, 1\right]$, тогда уравнение примет вид

$$8at - 4 + 4t^2 - 7 = 16t^2 + 8t + 1;$$
$$3t^2 + 2(a-1)t + 3 = 0.$$

Исходное уравнение не имеет решений, если дискриминант квадратного трехчлена

$$y = 3t^2 + 2(a-1)t + 3$$

отрицателен

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 9 = (a-4)(a+2) < 0 \Leftrightarrow a \in (-2, 4)$$

или корни трехчлена не принадлежат $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$.

Так как произведение корней уравнения равно 1, то корни имеют одинаковые знаки и не могут быть оба больше 1. Следовательно,

$$\begin{cases} t_1 < -\frac{1}{4}, \\ t_2 < -\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \frac{1}{2} < 0, \\ t_1 t_2 + \frac{1}{4}(t_1 + t_2) + \frac{1}{16} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2a-2}{3} + \frac{1}{2} < 0, \\ 1 + \frac{a-1}{6} + \frac{1}{16} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < \frac{1}{4}, \\ a > -\frac{43}{8}; \end{cases}$$

$$a \in \left(-\frac{43}{8}, \frac{1}{4}\right).$$

Объединив этот промежуток с $(-2, 4)$, получим $a \in \left(-\frac{43}{8}, 4\right)$. □

Ответ: $\left(-\frac{43}{8}, 4\right)$.

Пример 5.7. Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{3\cos^2 x + 2a\sin x - 11} = 3\sin x - 2$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Пусть $\sin x = t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, тогда уравнение примет вид

$$3 - 3t^2 + 2at - 11 = 9t^2 - 12t + 4$$

или

$$6t^2 - (a+6)t + 6 = 0.$$

Корни трехчлена $y = 6t^2 - (a+6)t + 6$ имеют одинаковые знаки и располагаются либо по разные стороны от точки $t = 1$, либо по разные стороны от точки $t = -1$, так как их произведение равно 1. Таким образом, задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ \frac{2}{3} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-6)(a+18) \geq 0, \\ y\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0, \\ y(1) \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty, -18] \cup [6, \infty), \\ 6 \cdot \frac{4}{9} - (a+6) \cdot \frac{2}{3} + 6 \geq 0, \\ 6 - a - 6 + 6 \leq 0; \end{cases}$$

$$a \in [6, 7]. \quad \square$$

Ответ: $[6, 7]$.

Пример 5.8. При каких значениях a уравнение

$$|3\sin x + 2| = a \sin x$$

сводится к одному уравнению вида $\sin x = A \in [-1, 1]$.

Решение. Пусть $\sin x = t$, уравнение примет вид

$$|3t + 2| = at$$

и задача сведется к тому, чтобы это уравнение имело единственный корень на промежутке $[-1, 1]$.

Решим эту задачу методом, (рис. 2). Построим график функции $y_1 = |3t + 2|$. График функции $y_2 = at$ пересекает линию y_1 на промежутке $[0, 1]$, если $a \in [5, \infty)$, и на промежутке $[-1, 0]$, если $a \in (-\infty, -1)$ или $a = 0$. □

Ответ: $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup [5, \infty)$.

Пример 5.9. При каких значениях a уравнение

$$\big||x - 2| - 2\big| = ax$$

имеет три корня.

Решение. Построим график функции $y_1 = \big||x-2| - 2\big|$, (рис. 3). График функции $y_2 = ax$ будет иметь с графиком y_1 три общие точки, если $a \in (0, 1)$. □

Ответ: $(0, 1)$.

Пример 5.10. При каких значениях a уравнение

$$|x+1| + |x-2| = ax$$

имеет ровно два корня.

Решение. Построим график, (рис. 4) функции

$$y_1 = |x+1| + |x-2| = \begin{cases} 1-2x & \text{при } x \le -1, \\ 3 & \text{при } -1 \le x \le 2, \\ 2x-1 & \text{при } x \ge 2. \end{cases}$$

График функции $y_2 = ax$ пересекает график функции y_1 в двух точках, если $a \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. □

Ответ: $a \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Найти все a, при которых уравнение $\sqrt{2ax+3} = x-2$ не имеет корней.

5.2. Найти все a, при которых уравнение $\sqrt{2ax-8} = x+1$ не имеет корней.

5.3. Найти все a, при которых уравнение $\sqrt{2x^2 + ax + 5} = 2 - x$ имеет единственный корень.

5.4. Найти все a, при которых уравнение $\sqrt{ax + 3} = 2 - x$ имеет два различных корня.

5.5. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_{x+2}(2 - ax) = \log_{x+2}(1 - x) + \log_{x+2}(4 - 2x)$$

имеет единственный корень.

5.6. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_{4-x}(ax - 2a + 2) = \log_{4-x}(x - 1) + \log_{4-x}(2x)$$

имеет два различных корня.

5.7. Найти все a, при которых уравнение

$$\log_{x-1}(x^2 - 2ax) = \log_{x-1}(9 - 3x)$$

не имеет корней.

5.8. Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{10a\sin x - 5\cos^2 x - 6} = 5\sin x + 3$$

не имеет корней.

5.9. Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{2a\sin x - \cos^2 x} = 3\sin x - 1$$

не имеет корней.

5.10. Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{3\sin^2 x + 4a\cos x} = 3\cos x + 1$$

сводится к двум разным уравнениям вида $\sin x = A \in [-1, 1]$.

5.11. Найти все a, при которых уравнение $|5\cos x - 2| = a\cos x$ сводится к одному уравнению вида $\cos x = A \in [-1, 1]$.

5.12. Найти все a, при которых уравнение $x - |x+3| = ax$ имеет единственный корень.

5.13. Найти все a, при которых уравнение $|x+3| - |x-2| = ax$ имеет единственный корень.

5.14. Найти все a, при которых уравнение $\big||2x-4|-3\big| = ax$ имеет 4 корня.

Ответы:

5.1. $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$. **5.2.** $(-4, 4)$. **5.3.** $\left(-\infty, -\frac{13}{2}\right] \cup \{-6\} \cup \{-2\}$. **5.4.** $(-\infty, -6) \cup \left(-2, -\frac{3}{2}\right]$. **5.5.** $(-\infty, 2) \cup [11, \infty)$. **5.6.** $(10, 11)$. **5.7.** $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\} \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$. **5.8.** $\left(-\frac{23}{15}, 7\right)$. **5.9.** $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. **5.10.** $[2, 4]$. **5.11.** $(-\infty, -7] \cup \{0\} \cup (3, \infty)$. **5.12.** $(-\infty, 0] \cup \{1\} \cup (2, \infty)$. **5.13.** $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$. **5.14.** $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

6.. Применение производных

Пример 6.1. К графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ в точке максимума проведена касательная. Найти координаты точки ее пересечения с графиком.

Решение. Найдем производную функции и определим ее знаки (рис. 5).

$$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2).$$

Точкой максимума является $x = -1$. Так как касательная в точке экстремума параллельна оси Ox, то ее уравнение

$$y = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 2;$$
$$y = 9.$$

Найдем точку пересечения линий $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ и $y = 9$, зная, что они касаются при $x = -1$.

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = 9;$$
$$2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = 0.$$

Левая часть равенства делится на $(x+1)^2$, частное от деления $2x-7$. Поэтому абсцисса точки пересечения $x = \frac{7}{2}$, ордината $y\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{129}{2}$. $\square$

Ответ: $\left(\frac{7}{2}, -\frac{129}{2}\right)$.

Пример 6.2. К графику функции $y = x^3 - 2$ из начала координат проведена касательная. Найти точку пересечения касательной и графика.

Решение. Составим уравнение касательной. Пусть x_0 — абсцисса точки касания, тогда

$$y = x_0^3 - 2 + 3x_0^2(x - x_0);$$
$$y = 3x_0^2 x - 2x_0^3 - 2.$$

Так как касательная проходит через начало координат, то

$$0 = -2x_0^3 - 2 + 0;$$
$$x_0^3 = -1;$$
$$x_0 = -1.$$

Поэтому уравнение касательной $y = 3x$. Решим уравнение $x^3 - 2 = 3x$, зная, что $x = -1$ является его корнем.

$$x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0;$$

$x = 2$ — абсцисса точки пересечения, ордината $y = 8 - 2 = 6$. □

Ответ: $(2, 6)$.

Пример 6.3. Найти область значений функции $y = 3\sqrt{x} + \sqrt{4-x}$.

Решение. Найдем ОДЗ функции.

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 4 - x \geq 0; \end{cases}$$
$$x \in [0, 4].$$

Задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}};$$
$$\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = 0;$$
$$3\sqrt{4-x} = \sqrt{x};$$
$$36 - 9x = x;$$
$$x = \frac{18}{5} \in [0, 4].$$

Вычислим

$$y(0) = \sqrt{4} = 2; \quad y(4) = 3\sqrt{4} = 6;$$
$$y\left(\frac{18}{5}\right) = 3\sqrt{\frac{18}{5}} + \sqrt{4 - \frac{18}{5}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{10}.$$

Наименьшее значение 2, наибольшее $2\sqrt{10}$. □

Ответ: $[2, 2\sqrt{10}]$.

Пример 6.4. Найти значение функции $y = 2^{x+1} - 8^x$ в точке экстремума.

Решение. Найдем точки экстремума функции.

$$y' = 2^{x+1}\ln 2 - 8^x \ln 8 = 2^x \ln 2(2 - 3\cdot 2^{2x});$$
$$2 - 3\cdot 2^{2x} = 0;$$
$$2^{2x} = \tfrac{2}{3};$$
$$x = \log_2 \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Получена единственная критическая точка — точка минимума функции.

$$y\left(\log_2 \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 2\cdot 2^{\log_2 \sqrt{\frac{2}{3}}} - 2^{3\log_2 \sqrt{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^3 = \tfrac{4\sqrt{6}}{9}. \quad \square$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{9}$.

Пример 6.5. Найти значение функции $y = 3^x - 6^x \cdot \log_6 9$ в точке экстремума.

Решение.

$$y' = 3^x \ln 3 - 6^x \ln 6 \log_6 9 = 3^x(\ln 3 - 2^x \ln 6 \log_6 9);$$
$$\ln 3 - 2^x \ln 6 \log_6 9 = 0;$$
$$2^x = \frac{\ln 3}{\ln 6 \log_6 9} = \frac{\log_6 3}{\log_6 9} = \log_9 3 = \frac{1}{2};$$
$$x = -1.$$
$$y(-1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\log_6 9 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log_6 3 = \frac{1-\log_6 3}{3} = \frac{1}{3}\log_6 2 = \log_6 \sqrt[3]{2}. \quad \square$$

Ответ: $\log_6 \sqrt[3]{2}$.

Пример 6.6. Найти область значений функции

$$y = 2\cos 6x + \cos^2 3x - \sin 3x.$$

Решение. Преобразуем функцию.

$$y = 2(1 - 2\sin^2 3x) + 1 - \sin^2 3x = -5\sin^2 3x - \sin 3x + 3.$$

Пусть $\sin 3x = t \in [-1, 1]$. Задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции $y = -5t^2 - t + 3$ на отрезке $[-1, 1]$. Найдем критическую точку.

$$-10t - 1 = 0;$$
$$t = -\frac{1}{10} \in [-1, 1].$$

Вычислим $y(-1) = -5 + 1 + 3 = -1$; $y(1) = -5 - 1 + 3 = -3$; $y\left(-\frac{1}{10}\right) = -\frac{5}{100} + \frac{1}{10} + 3 = \frac{61}{20}$. $\square$

Ответ: $\left[-3, \frac{61}{20}\right]$.

Пример 6.7. Найти область значений функции

$$y = \sin 9x \sin 3x + 3\cos 6x.$$

Решение. Преобразуем функцию

$$y = \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 12x) + 3\cos 6x =$$
$$= \frac{7}{2}\cos 6x - \frac{1}{2}(2\cos^2 6x - 1) = -\cos^2 6x + \frac{7}{2}\cos 6x + \frac{1}{2}.$$

Пусть $\cos 6x = t \in [-1, 1]$. Найдем критическую точку функции $y = -t^2 + \frac{7}{2}t + \frac{1}{2}$.

$$y' = -2t + \frac{7}{2};$$
$$-2t + \frac{1}{2} = 0;$$
$$t = \frac{7}{4} \notin [-1, 1].$$

Значит, наибольшее и наименьшее значения функция принимает на концах отрезка $[-1, 1]$.

$$y(-1) = -1 - \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -4; \quad y(1) = -1 + \frac{7}{2} + 1 = 3. \quad \square$$

Ответ: $[-4, 3]$.

Пример 6.8. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет максимальный объем при заданной площади полной поверхности $S_{\text{полн.}} = 4\pi$.

Решение. Пусть x — радиус основания, y — образующая конуса. Тогда высота конуса и его объем равны соответственно

$$H = \sqrt{y^2 - x^2} \quad \text{и} \quad V = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{y^2 - x^2}.$$

Нужно найти максимум объема при условии, что площадь полной поверхности $S_{\text{полн.}} = \pi x^2 + \pi x y = 4\pi$. Выразим отсюда y через x: $y = \frac{4-x^2}{x}$ и подставим в формулу объема.

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{\left(\frac{4-x^2}{x}\right)^2 - x^2} = \frac{2\pi}{3} x \sqrt{4 - 2x^2};$$

$$V' = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{4 - 2x^2} + x\frac{-4x}{2\sqrt{4-2x^2}}\right) = \frac{8\pi(1-x^2)}{3\sqrt{4-2x^2}};$$

производная $V' = 0$ при $x = \pm 1$. Легко убедиться, что $x = 1$ является точкой максимума функции V. При этом образующая конуса равна $y = \frac{4-1}{1} = 3$, а его высота $H = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$. □

Ответ: $1,\ 2\sqrt{2}$.

Пример 6.9. Найти сторону основания и высоту правильной четырехугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $V = \frac{9}{\sqrt{2}}$.

Решение. Обозначим x — сторона квадрата, лежащего в основании пирамиды, y — высота пирамиды. Тогда апофема пирамиды

$$h = \sqrt{y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 + x^2},$$

а площадь боковой поверхности

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 + x^2} = x\sqrt{4y^2 + x^2}.$$

Нужно найти минимум этой функции при условии, что объем пирамиды $V = \frac{1}{3}x^2 y = \frac{9}{\sqrt{2}}$, откуда $y = \frac{27}{\sqrt{2}x^2}$. Подставляя в функцию S, получим

$$S = x\sqrt{\frac{4 \cdot 27^2}{2x^4} + x^2} = \frac{\sqrt{1458 + x^6}}{x};$$

$$S' = \frac{\frac{6x^6}{2\sqrt{1458+x^6}} - \sqrt{1458 + x^6}}{x^2} = \frac{3x^6 - 1458 - x^6}{x^2\sqrt{1458+x^6}} = \frac{2(x^6 - 729)}{x^2\sqrt{1458+x^6}}.$$

$S' = 0$ при $x = \pm 3$, точка $x = 3$ является точкой минимума функции S. Тогда высота пирамиды $y = \frac{27}{9\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. □

Ответ: $3, \ \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. К графику функции $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 7$ в точке минимума проведена касательная. Найти точку ее пересечения с графиком.

6.2. К графику функции $y = |x|(x-2)+4$ из начала координат проведена касательная. Найти точку ее пересечения с графиком.

6.3. К графику функции $y = \frac{3}{x^2} - 1$ из начала координат проведена касательная с положительным угловым коэффициентом. Найти точку ее пересечения с графиком.

6.4. Найти значение функции в точке экстремума:

(a) $y = 5 \cdot 3^{x+1} + 3^{-x}$;

(b) $y = 2^x - 10^x \lg 32$;

(c) $y = 32^x - 5 \cdot 8^x$;

(d) $y = 6^x \log_6 16 - 8^x$;

(e) $y = 9^x - 3^{x+1}$.

6.5. Найти область значений функции:

(a) $y = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+2}$;

(b) $y = 3\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$;

(c) $y = \sin 5x + \cos^2 5x + \cos 10x$;

(d) $y = \sin^2 x + 7\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

6.6. Найти радиус основания и высоту конуса, который имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $V = \frac{4\pi}{3}$.

6.7. Найти сторону основания и высоту правильной треугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади боковой поверхности $S_{\text{бок.}} = \frac{27}{4}$.

6.8. Найти сторону основания и высоту правильной треугольной пирамиды, которая имеет минимальную площадь боковой поверхности при заданном объеме $V = \frac{9}{4\sqrt{2}}$.

6.9. Найти сторону основания и высоту правильной четырехугольной пирамиды, которая имеет максимальный объем при заданной площади боковой поверхности $S_{\text{бок.}} = 36\sqrt{3}$.

Ответы:

6.1. $(-4, -11)$. **6.2.** $(-2, -4)$. **6.3.** $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$. **6.4.** (a) $2\sqrt{15}$; (b) $\lg\sqrt{5}$; (c) $-6\sqrt{3}$; (d) $6\log_6 16 - 8$; (e) $-\frac{9}{4}$. **6.5.** (a) $[\sqrt{3}, \sqrt{15}]$;

(b) $[\sqrt{3}, \sqrt{30}]$; (c) $\left[-2, \frac{25}{12}\right]$; (d) $[-9, 7]$. **6.6.** $\sqrt{2}$, 2. **6.7.** 3, $\sqrt{3/2}$. **6.8.** 3, $\sqrt{3/2}$. **6.9.** 6, $3\sqrt{2}$.

7.. Геометрические задачи

Пример 7.1. Один из углов треугольника равен 60°, а высота, опущенная из вершины этого угла, делит сторону на части в отношении $1 : 6$. Найти тангенс меньшего угла треугольника.

Решение. Пусть (рис. 6), угол $\beta = \angle ABC = 60^\circ$, $\beta_1 = \angle ABD$, $\beta_2 = \angle DBC$, требуется найти тангенс угла $\gamma = \angle ACB$. Обозначим $BD \perp AC$, $|AD| : |DC| = 1 : 6$, $|AD| = x$, $|DC| = 6x$, $BD = a$. Тогда

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{x}{a} = y, \quad \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{6x}{a} = 6y,$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\beta_1 + \beta_2) = \sqrt{3} = \frac{y+6y}{1-6y^2} = \frac{7y}{1-6y^2}.$$

Решая квадратное уравнение

$$6\sqrt{3}y^2 + 7y - \sqrt{3} = 0,$$

находим $y_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. ($y_2 = -\frac{3}{2\sqrt{3}}$ — посторонний корень.)

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{6x} = \frac{1}{6y} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 7.2. Медиана, проведенная к одному из катетов прямоугольного треугольника, равна 6 см и образует с гипотенузой угол $\arcsin \frac{1}{3}$. Найти площадь треугольника.

Решение. Обозначим (рис. 7) $\alpha = \angle BAD = \arcsin \frac{1}{3}$, $\beta = \angle CBA$, $\delta = \angle CDA$, $\angle ACB = 90°$, $|CD| = |DB|$, $|AD| = 6$, $\operatorname{tg} \delta = y$. Так как $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2} y$ и $\delta = \alpha + \beta$, то $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ или $y = \frac{0{,}5y + \operatorname{tg} \alpha}{1 - 0{,}5y \operatorname{tg} \alpha}$. Подставим сюда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{3} \Big/ \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, получим квадратное уравнение относительно y,

$$y^2 - 2\sqrt{2}y + 2 = 0,$$

которое имеет единственное решение $y = \operatorname{tg} \delta = \sqrt{2}$.

Так как $|CD| = |AD| \cos \delta$, $|AC| = |CD| \operatorname{tg} \delta$, то площадь $\triangle ABC$

$$S = |AC| \cdot |CD| = |AD|^2 \cos^2 \delta \operatorname{tg} \delta = $$
$$= |AD|^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = 36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{1+2} = 12\sqrt{2}. \quad \square$$

Ответ: $12\sqrt{2}$.

Пример 7.3. Большая диагональ прямоугольной трапеции является биссектрисой ее прямого угла, а длины оснований трапеции относятся как $2:3$. Найти тангенс тупого угла трапеции.

Решение. Углы $\angle ABD$ и $\angle CBD$ равны по условию, а угол $\angle ADB$ и угол $\angle BDA$ равны как внутренние накрест лежащие, (см.рис. 8). Поэтому $\triangle BAD$ равнобедренный $|AD| = |AB|$. Опустим $CE \perp AD$. Пусть $|BC| = 2x$, тогда $|AD| = |AB| = 3x$, $|ED| = |AD| - |AE| = x$. Если $\delta = \angle EDC$, $\gamma = \angle BCD = 180^\circ - \delta$, то $\operatorname{tg}\delta = \frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3x}{x} = 3$, $\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\delta = -3$. $\square$

Ответ: -3.

Пример 7.4. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника равна 3 см и делит катет на части в отношении $1:3$. Найти площадь треугольника.

Решение. Пусть (рис. 9)

$$\angle CAB = \alpha, \quad \angle CAD = \angle DAB = \frac{\alpha}{2}, \quad |CD| = x,$$

тогда $|DB| = 3x$. По свойству биссектрисы

$$|AC| : |AB| = x : 3x = 1 : 3,$$

значит

$$\cos\alpha = \tfrac{1}{3} \quad \text{и} \quad \sin\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\tfrac{1-1/3}{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

Из $\triangle CAD$

$$x = |AD|\sin\tfrac{\alpha}{2} = 3\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$
$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 - |CD|^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6};$$
$$S_{\triangle ABC} = \tfrac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC| = \tfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = 6\sqrt{2}. \quad \square$$

Ответ: $6\sqrt{2}$.

Пример 7.5. Биссектриса прямого угла треугольника равна 3 см и делит гипотенузу на части в отношении 1 : 3. Найти площадь треугольника.

Решение. Обозначим (см. рис. 10) $\beta = \angle ABC$, $|DB| = x$, тогда $|DA| = 3x$. Если $|CB| = y$, то по свойству биссектрисы $|AC| = 3y$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{3y}{y} = 3$; $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Из $\triangle DCB$ по теореме синусов

$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{|CD|}{\sin\beta}, \quad x = \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}{2\cdot 3} = \sqrt{5}.$$

Тогда $|AB| = 4x = 4\sqrt{5}$. Из $\triangle\, ACB$ получим

$$3y = |AB| \sin\beta = 4\sqrt{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = 6\sqrt{2} \quad \text{и} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot y\cdot 3y = 12. \quad \square$$

Ответ: 12.

Пример 7.6. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\arccos\frac{1}{8}$, а биссектриса этого угла равна 12 см. Найти длину основания треугольника.

Решение. Пусть (см. рис. 11)

$$\angle BAC = \angle ACB = \alpha, \quad \angle DAC = \frac{\alpha}{2}.$$

Проведем $DK \perp AC$. Из $\triangle\, DKA$ находим

$$|AK| = |AD|\cos\frac{\alpha}{2} = 12\sqrt{\frac{1+\frac{1}{8}}{2}} = 9;$$

$$|DK| = |AD|\sin\frac{\alpha}{2} = 12\sqrt{\frac{1-\frac{1}{8}}{2}} = 3\sqrt{7}.$$

Из $\triangle\, DKC$ получаем

$$|KC| = |DK|\operatorname{ctg}\alpha = 3\sqrt{7}\cdot\left(\frac{1}{8}\Big/\sqrt{1-\frac{1}{64}}\right) = 1;$$

$$|AC| = |AK| + |KC| = 9 + 1 = 10. \quad \square$$

Ответ: 10.

Пример 7.7. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к боковой стороне, равна 9 см и образует с основанием угол $\arccos\frac{2}{3}$. Найти боковую сторону треугольника.

Решение. Проведем (см. рис. 12) $DK \perp AC$ и обозначим $\alpha = \angle DAC$. Из $\triangle\, DKA$

$$|DK| = |AD| \sin\alpha = 9\sqrt{1-\tfrac{4}{9}} = 3\sqrt{5}; \quad |AK| = |AD|\cos\alpha = 9\cdot\tfrac{2}{3} = 6.$$

Тогда $|KC| = \frac{1}{3}|AK| = 2$. Из $\triangle\, DKC$ по теореме Пифагора

$$|DC| = \sqrt{|KC|^2 + |DK|^2} = \sqrt{45+4} = 7; \quad |BC| = 2|DC| = 14. \quad \square$$

Ответ: 14.

Пример 7.8. Один из углов треугольника равен 120°, а биссектриса этого угла делит сторону на части в отношении 1 : 4. Найти тангенс меньшего угла треугольника.

Решение. Пусть (рис. 13) $|AD| = x$, $|DC| = 4x$, угол $\angle ACB = \gamma$. Тогда угол $\angle BAC = 180^\circ - 120^\circ - \gamma = 60^\circ - \gamma$. Применяя теорему синусов в $\triangle BDC$ и $\triangle ABD$, получим

$$\frac{4x}{\sin 60^\circ} = \frac{|BD|}{\sin\gamma} \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{|BD|}{\sin(60^\circ - \gamma)}.$$

Поделим первое соотношение на второе, $4 = \frac{\sin(60^\circ-\gamma)}{\sin\gamma}$, откуда получим

$$4\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma - \frac{1}{2}\sin\gamma; \quad \frac{9}{2}\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\gamma; \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{9}. \quad \square$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Пример 7.9. Одна из медиан треугольника равна 3 см. и делит угол на части 15° и 45°. Найти площадь треугольника.

Решение. Обозначим (см. рис. 14) $\angle BAC = \alpha$, $|AD| = |DC| = x$, $|BC| = y$. По теореме синусов в $\triangle\ ABD$ $\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin\alpha}$, а в $\triangle\ ABC$ $\frac{2x}{\sin 60^\circ} = \frac{y}{\sin\alpha}$. Поделив первое соотношение на второе, найдем $y = 2\sqrt{6}$. Так как медиана делит треугольник на два равновеликих, то

$$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle BDC} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot|BD|\cdot|BC|\cdot\sin 15^\circ =$$
$$= 3\cdot 2\sqrt{6}\sin(60^\circ - 45^\circ) = 6\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 9 - 3\sqrt{3}. \quad \square$$

Ответ: $9 - 3\sqrt{3}$.

Пример 7.10. Одна из высот треугольника равна $\sqrt{2}-1$ и делит угол на части $82{,}5^\circ$ и $37{,}5^\circ$. Найти площадь треугольника.

Решение. Пусть (рис. 15) $\beta_1 = \angle CBD = 82{,}5^\circ$, $\beta_2 = \angle ABD = 37{,}5^\circ$, высота $h = |BD| = \sqrt{2}-1$. Из $\triangle\, BDA$ и $\triangle\, BDC$ $|AD| = h\operatorname{tg}\beta_2$, $|DC| = h\operatorname{tg}\beta_1$, тогда

$$|AC| = h(\operatorname{tg}\beta_1 + \operatorname{tg}\beta_2) = h\frac{\sin\beta_1\cos\beta_2+\sin\beta_2\cos\beta_1}{\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2} =$$
$$= 2h\frac{\sin(\beta_1+\beta_2)}{\cos(\beta_1+\beta_2)+\cos(\beta_1-\beta_2)} = 2h\frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ+\cos 45^\circ} = 2h\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} = 2\sqrt{3}.$$

Отсюда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1) = \sqrt{6}-\sqrt{3}$. □

Ответ: $\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

Пример 7.11. Из точки, лежащей на окружности, проведены диаметр и две хорды по одну сторону от него. Найти диаметр окружности, если длины хорд равны 2 и $3\sqrt{3}$ см, а угол между ними равен 30°.

Решение. Пусть (см. рис. 16) угол $\alpha = \angle CAD = 30^\circ$, $\beta = \angle BAC$, $\gamma = \angle BAD$, $|AC| = 2$, $|AD| = 3\sqrt{3}$, $|AB| = x$. Из прямоугольных треугольников $\triangle\, ABC$ и $\triangle\, ABD$

$$\cos\beta = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2}{x}; \quad \cos\gamma = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{3\sqrt{3}}{x};$$
$$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}; \quad \sin\gamma = \sqrt{1-\frac{27}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-27}}{x}.$$

Тогда

$$\cos\alpha = \cos 30^\circ = \cos(\beta - \gamma); \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{x}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-27}}{x}$$

или

$$2\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x^2-27} = \sqrt{3}(x^2-12).$$

После возведения в квадрат получим $x^4 - 52x^2 = 0$, откуда находим $x = 2\sqrt{13}$. □

Ответ: $2\sqrt{13}$.

Пример 7.12. Через точку, которая делит диаметр круга на отрезки 1 и 9 см проведена хорда под углом $\arccos\frac{\sqrt{7}}{4}$ к диаметру. Найти длину хорды.

Решение. Диаметр круга 10, (рис. 17) радиус: 5, $|BO| = 5 - 1 = 4$. Проведем $OK\perp FD$. Из $\triangle KOB$

$$|KO| = |OB|\sin\alpha = 4\sqrt{1-\frac{7}{16}} = 3.$$

По теореме Пифагора из $\triangle KOB$:

$$|KD| = \sqrt{|OD|^2 - |OK|^2} = \sqrt{25-9} = 4; \quad |FD| = 2|KD| = 8. \quad \square$$

Ответ: 8.

Пример 7.13. Найти площадь области, заданной условиями

$$\begin{cases} \log_2(x^2 - 2x + 9) \le \log_2(2y - y^2 + 8), \\ \log_3 x \le \log_3 y. \end{cases}$$

Решение. С учетом ОДЗ перейдем к эквивалентной системе.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 9 > 0, \\ x^2 - 2x + 9 \le 2y - y^2 + 8, \\ 0 < x \le y. \end{cases}$$

Первое неравенство выполнено при всех x, второе равносильно $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$ и ему удовлетворяют точки круга (см. рис. 18) с центром в $(1, 1)$ и радиуса 1. Условие $x > 0$ выполнено для всех точек круга, неравенство $x \le y$ — для полукруга, его площадь $S = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$. □

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 7.14. Найти периметр области, заданной неравенствами

$$\begin{cases} \log_3(2^y - 1) \le 1, \\ \log_2(y + 2x) \le 1. \end{cases}$$

Решение. Перейдем к эквивалентной системе.

$$\begin{cases} 0 < 2^y - 1 \le 3, \\ 0 < y + 2x \le 2; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 < 2^y \le 4, \\ -2x < y \le 2 - 2x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < y \le 2, \\ -2x < y \le 2 - 2x. \end{cases}$$

Построим (рис. 19) графики функций $y = -2x$, $y = 2 - 2x$, $y = 0$, $y = 2$. Областью является параллелограмм $OABC$, в котором $|OC| = |AB| = 1$, $|OA| = |BC| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $P = 2 + 2\sqrt{5}$. □

Ответ: $2 + 2\sqrt{5}$.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Найти площадь области, заданной условиями:

$$\begin{cases} \log_2 (x + y) \le 2, \\ \log_{0,2}(y - 1) \le \log_{0,2} x. \end{cases}$$

7.2. Найти площадь области, заданной условиями:

$$\begin{cases} \log_2 y \geq \log_2(2 - |x|), \\ 4^y \leq 32. \end{cases}$$

7.3. Диагональ параллелограмма перпендикулярна одной из его сторон, а угол между диагоналями равен 45°. Найти периметр параллелограмма, если его большая сторона равна 5 см.

7.4. Область, заданная условиями

$$\begin{cases} \log_2(y - 1) < \log_2(2y + x), \\ 3^x \leq 1, \qquad 2^y \leq 8, \end{cases}$$

вращается вокруг оси Oy. Найти объем полученного тела вращения.

7.5. Одна из высот треугольника равна $\sqrt{6} + 1$ и делит угол на части 37,5° и 7,5°. Найти площадь треугольника.

7.6. Одна из медиан треугольника равна 5 и делит угол на части 45° и 90°. Найти площадь треугольника.

7.7. Основания равнобедренной трапеции равны 2 и 6, а острый угол трапеции равен 60°. Найти площадь трапеции.

7.8. Острый угол прямоугольного треугольника равен $22{,}5^\circ$, а высота треугольника, опущенная из вершины его прямого угла равна $3\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника.

7.9. Через точку, которая делит диаметр круга на отрезки 1 см и 11 см, проведена хорда под углом $\arccos \frac{\sqrt{37}}{10}$ к диаметру. Найти длину хорды.

7.10. Из точки, лежащей на окружности, проведены диаметр и две хорды, по одну сторону от диаметра. Найти диаметр окружности, если длины хорд равны 3 см и 5 см, а угол между ними равен 60°.

7.11. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к боковой стороне, равна 6 см и образует с основанием угол $\arccos \sqrt{\frac{5}{8}}$. Найти длину боковой стороны треугольника.

7.12. Величина угла при основании равнобедренного треугольника $\arccos \frac{17}{32}$, а биссектриса этого угла равна 28 см. Найти длину основания треугольника.

7.13. Биссектриса прямого угла треугольника равна $2\sqrt{6}$ см и делит гипотенузу на части в отношении $2 : 3$. Найти площадь треугольника.

Ответы:

7.1. $\frac{9}{4}$. **7.2.** 6. **7.3.** $10+2\sqrt{5}$. **7.4.** 12π. **7.5.** $3\sqrt{6}-2$. **7.6.** 50. **7.7.** $8\sqrt{3}$. **7.8.** $18\sqrt{2}$. **7.9.** 9. **7.10.** $\sqrt{57}$. **7.11.** 8. **7.12.** 33. **7.13.** 25.

*Список литературы

1. *Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х.* Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 1972. 640 с.

2. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / *Н.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.*; Под общей ред. *М.И. Сканави*. Минск, 1990. 432 с.

3. *Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. М., 1980. 480 с.

4. *Королева Т.М., Маркарян Е.Г., Нейман Ю.М.* Пособие по математике в помощь участникам централизованного тестирования. М., 1999. 128 с.

5. Математика. Активный курс подготовки в университет / *М.С. Беспалов, А.Г. Беспалова, Е.В. Филинова и др.* Владимир, 1999. 100 с.

6. *Буланкина Л.А., Трубина О.И.* Неравенства. Логарифмические и показательные уравнения. Владимир, 2000. 136 с.

7. *Сорокина А.Г., Скляренко В.А.* Пособие по математике для поступающих в ВлГУ. Владимир, 2001. 100 с.

Оглавление

Введение 6

1. Проценты, пропорции, прогрессии 8

2. Алгебраические уравнения 12

3. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства 20

4. Тригонометрия 32

5. Задачи с параметром 40

6. Применение производных 53

7. Геометрические задачи 63

Список литературы 76

Учебное издание

СОРОКИНА Александра Георгиевна
СКЛЯРЕНКО Василий Алексеевич

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВлГУ
часть 2

Редактор Е.П. Викулова
ЛР № 020275. Подписано в печать .
Формат $60\times84/16$. Бумага для множит. техники.
Гарнитура AntiquaPSCyr. Печать офсетная.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 300. Заказ .
Редакционно-издательский центр
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.
E-mail: rio-m2@vpti.vladimir.su

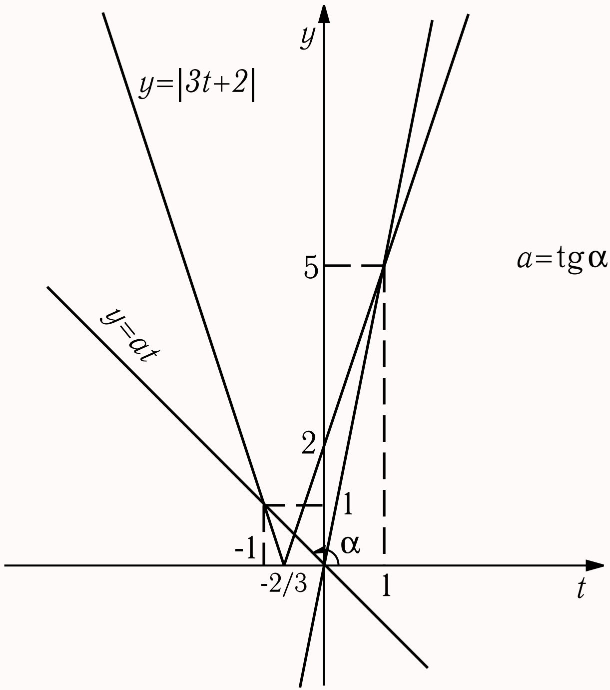

Рис. 2

Home Page
Title Page
Contents
Page 89 of 88
Go Back
Full Screen
Close
Quit

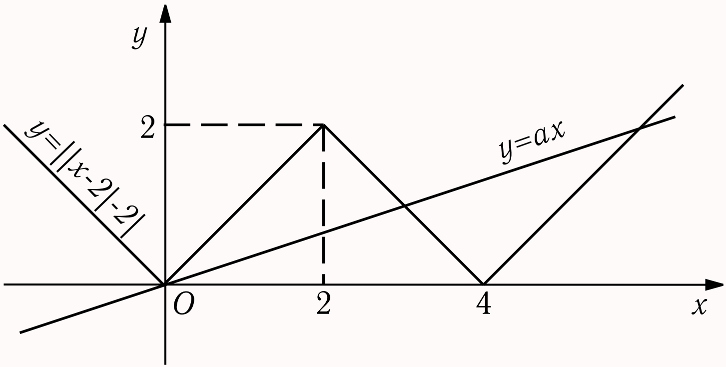

Рис. 3

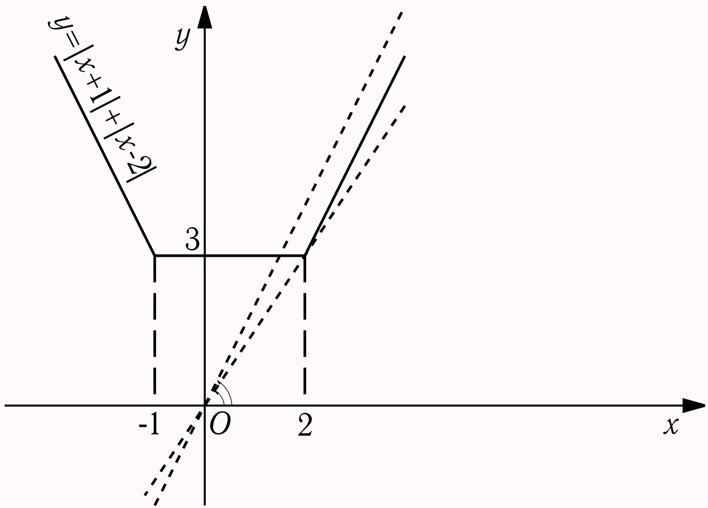

Рис. 4

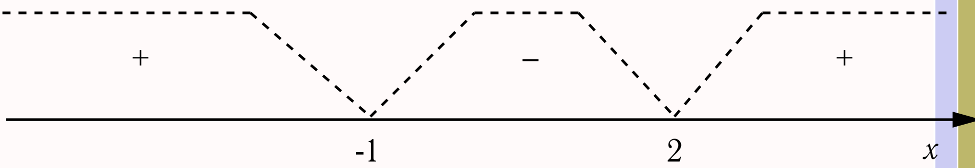

Рис. 5

Home Page
Title Page
Contents
Page 92 of 88
Go Back
Full Screen
Close
Quit

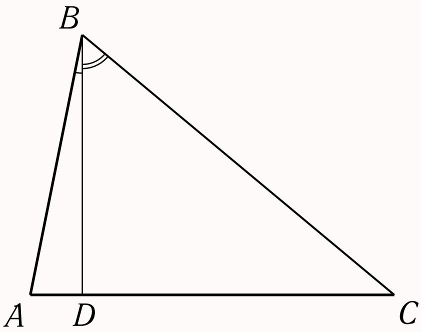

Рис. 6

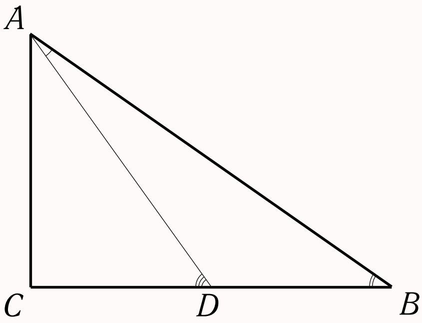

Рис. 7

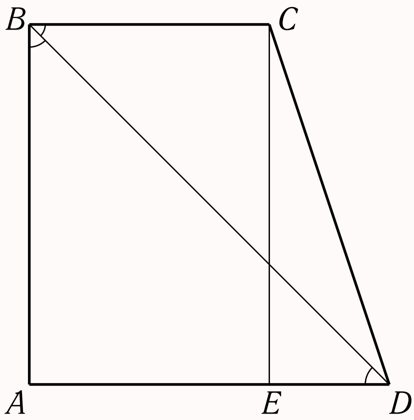

Рис. 8

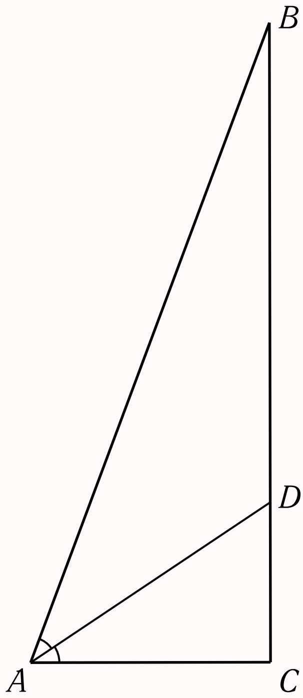

Рис. 9

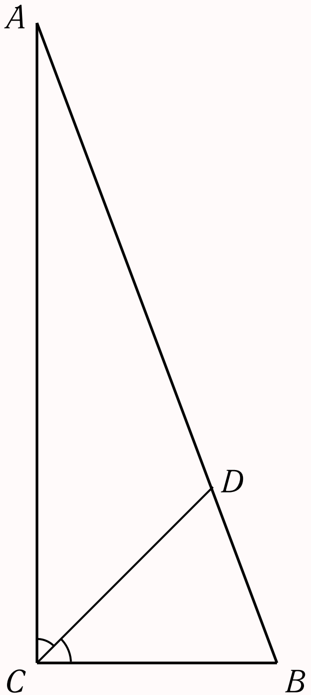

Рис. 10

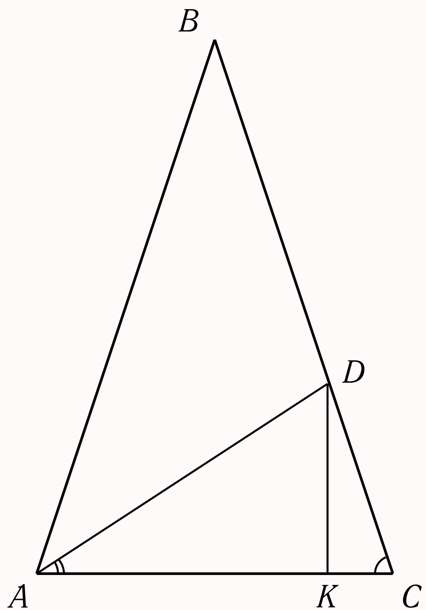

Рис. 11

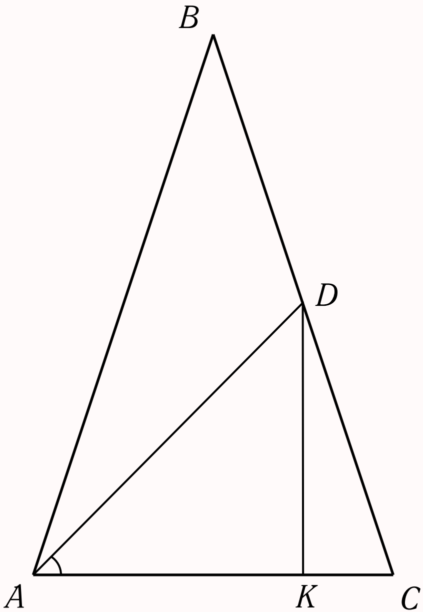

Рис. 12

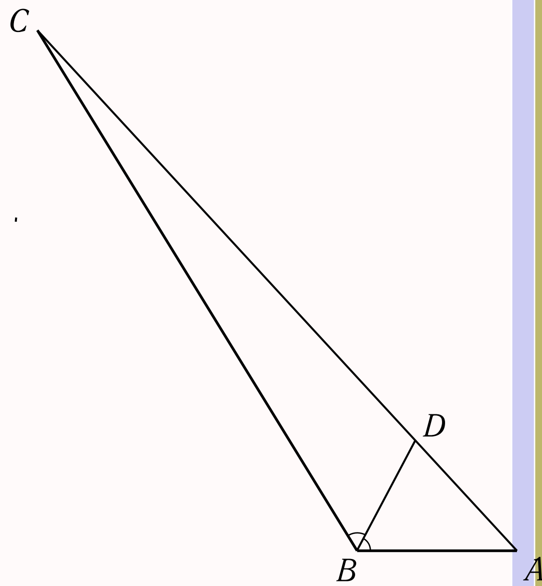

Рис. 13

Home Page
Title Page
Contents
Page 96 of 88
Go Back
Full Screen
Close
Quit

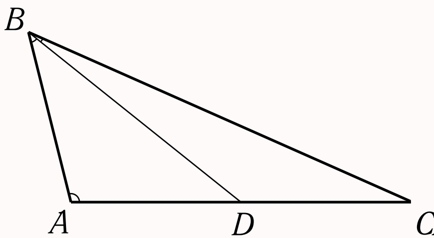

Рис. 14

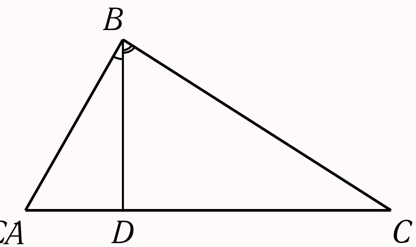

Рис. 15

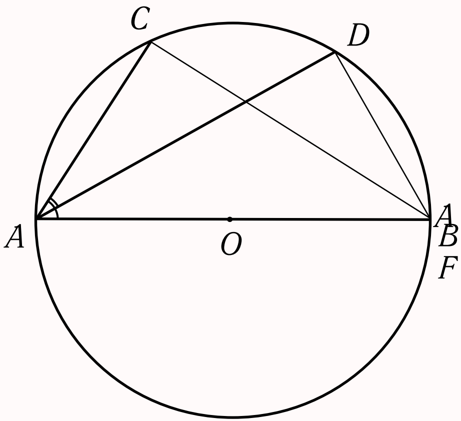

Рис. 16

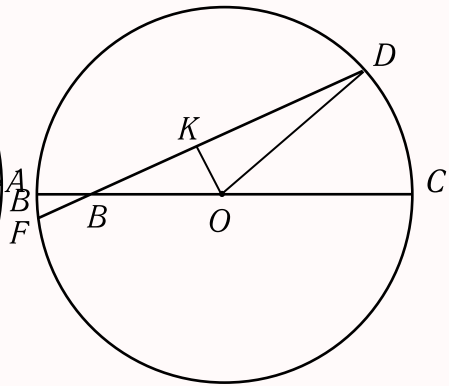

Рис. 17

Home Page
Title Page
Contents
Page 98 of 88
Go Back
Full Screen
Close
Quit

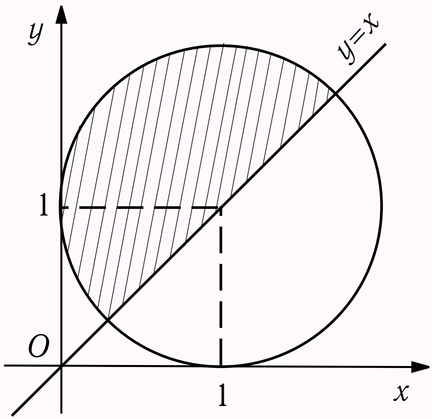

Рис. 18

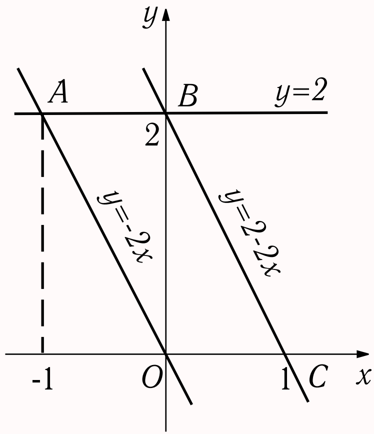

Рис. 19