На правах рукописи

ХРИПУНОВА БАЛДЖЫ

Анна Сергеевна

ВАРИАЦИОННАЯ СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАНТОВ С НЕСТАНДАРТНЫМИ УСЛОВИЯМИ КОЭРЦИТИВНОСТИ И РОСТА

Специальность 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Владимир 2013

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики **Пастухова Светлана Евгеньевна**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова **Шапошникова Татьяна Ардолионовна**
	кандидат физико-математических наук, профессор Ковровской государственной технологической академии им. В.А. Дегтярева **Барабанов Олег Олегович**
Ведущая организация	Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Защита диссертации состоится 23 декабря 2013 г. в 16 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.025.08 при Владимирском государственном университете по адресу: г. Владимир, пр-т Строителей, д. 11, ауд. 237.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Владимирского государственного университета.

Автореферат разослан «21» ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических
наук, доцент Наумова С.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В задачах вариационного исчисления требуется найти наименьшее значение функционала, заданного на некотором множестве. Если задана последовательность вариационных задач, то возникает вопрос о корректном определении предельной задачи и предельного функционала. Наиболее естественным языком, описывающим асимптотическое поведение вариационных задач, является так называемая Γ*-**сходимость***. Главная особенность Γ-сходимости состоит в том, что широкие классы интегрантов оказываются компактными относительно этой сходимости.

1. В рамках абстрактной теории вопросы Γ-сходимости были изучены в работах итальянских математиков Э.Де Джорджи [1,2] и его коллег более тридцати лет назад. Л. Карбоне и К. Сбордоне [3] конкретизировали абстрактную теорию для интегральных функционалов вида

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u) dx, \tag{1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ есть ограниченная липшицева область, а интегрант $f(x,\xi) : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ предполагается каратеодориевой, выпуклой по ξ функцией, для которой выполнены стандартные условия коэрцитивности и роста

$$-c_0 + c_1|\xi|^\alpha \leq f(x,\xi) \leq c_2|\xi|^\alpha + c_0\,,\ c_1 > 0,\ c_0 \geq 0,\ 1 < \alpha < \infty.$$

В.В. Жиков в работах [4,5] построил более общую теорию Γ-сходимости интегральных функционалов ***с нестандартными условиями коэрцитивности и роста***

$$-c_0 + c_1|\xi|^\alpha \leq f(x,\xi) \leq c_2|\xi|^\beta + c_0\,,\ c_1 > 0,\ c_0 \geq 0, \quad 1 < \alpha \leq \beta < \infty. \tag{2}$$

Отметим важную особенность функционалов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста (2): *когда показатель нелинейности α, отвечающий за свойство коэрцитивности, строго меньше показателя β, отвечающего за свойство ограниченности, возникает неединственность постановки вариационной задачи, или эффект Лаврентьева.* Эффект Лаврентьева

[1] De Giorgi E., Franzoni T. Su un tipo di convergenza variazionale//Atti Accad.Naz.Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.–1975.–58(8).–p.842-850.

[2] De Giorgi E., Letta G. Une notion generale de convergence faible des fonctions croissantes d'ensemble//Ann. Scuola Sup. Pisa.–1977.–№33.–p.61-99.

[3] Carbone L., Sbordone C. Some properties of Γ-limits of intergral functionsls//Ann. Mat. Pura Appl.–1979.–T.122.–№4.P.1-60.

[4] Жиков В.В. Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления//Изв.Ан СССР.Сер.матем.–1983.–Т.47.–№5.–С.961—998.

[5] Жиков В.В., О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах//Мат. сборник. –1992.– т.183.–№8.–С.47—84.

выражается в неравенстве

$$E_1 = \min_{u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)} \int_\Omega f(x, \nabla u) dx < \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \int_\Omega f(x, \nabla u) dx = E_2, \qquad (3)$$

из которого видно, что с одним и тем же функционалом F можно связать задачи двух типов – E_1 и E_2. В связи с этим В.В. Жиковым было введено два типа Г-сходимости.

Отмеченные выше результаты относились к интегральным функционалам F вида (1), зависящим от градиента ∇u, но не от самой функции u. Представляет интерес рассмотреть функционалы, которые зависят не только от градиента ∇u, но и невыпуклым образом от самой функции u. Последнее обстоятельство отмечалось в качестве нерешенной проблемы в работах A. Braides[6] и В.В. Жикова[5] более 20 лет назад.

Рассмотрим интегральные функционалы вида

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx.$$

Интегрантами являются каратеодориевы (с непрерывностью по s и ξ), выпуклые по ξ функции $f(x, s, \xi) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, для которых имеют место

• нестандартные условия коэрцитивности и роста

$$-c_0 + c_1|\xi|^\alpha \le f(x, s, \xi) \le -c_0 + c_2|\xi|^\beta + 1\,,\ c_1 > 0,\ c_0 \ge 0, \quad 1 < \alpha \le \beta < \infty; \qquad (4)$$

• свойство непрерывности по второму аргументу:

$$f(x, s', \xi) - f(x, s, \xi) \le \omega(|s - s'|) f(x, s, \xi) \qquad (5)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^d$, $s, s' \in \mathbb{R}$ и п.в. $x \in \Omega$, где $\omega(t) : [0, \infty) \to [0, m]$ – непрерывная функция такая, что $\omega(0) = 0$.

Предполагается доказать теоремы компактности относительно Г-сходимости в классе (4)-(5) при некоторых дополнительных условиях на показатель α.

2. Много задач на усреднение связано со степенными интегрантами вида

$$f(x, \xi) = \frac{|\xi|^{p(x)}}{p(x)}, \quad 1 < \alpha \le p(x) \le \beta < \infty. \qquad (6)$$

Степенной интегрант (6) принадлежит классу (2), является строго выпуклым и дифференцируемым по аргументу ξ. Возникает вопрос, сохраняются ли

[6]Braides, A. Defranceschi,A. Homogenization of Multiple Integrals — Clarendon Press: Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 12, 1998. — 298 p.

эти свойства при Г-сходимости степенных интегрантов. Заметим, что сама степенная структура в пределе теряется.

3. Во многих вопросах важно выяснить, когда слабый предел произведения $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$, где w_ε – соленоидальный вектор, равен произведению слабых пределов $w \cdot \nabla u$. По классической *лемме о компенсированной компактности* Тартара – Мюра,[7] w_ε и ∇u_ε должны быть ограничены во взаимносопряженных лебеговых пространствах. Предполагается сформулировать подобные условия ограниченности в более общих терминах, в которых участвует Г-сходимость интегрантов.

Цели работы. Настоящая работа посвящена Г-сходимости интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста:

доказательству теоремы компактности относительно Г-сходимости класса интегрантов $f(x, s, \xi)$, заданного условиями (4)-(5);

изучению свойств Г-пределов последовательностей степенных интегрантов;

получению новых вариантов леммы о компенсированной компактности.

Методы исследования. В диссертации используются методы математического анализа, функционального анализа, теории функций, вариационного исчисления, выпуклого анализа и теории усреднения.

Научная новизна. Перечислим основные результаты диссертации.

1. Доказана теорема компактности для нестандартного класса (4)-(5), если показатель α, отвечающий за свойство коэрцитивности, см.(3), строго больше размерности пространства d. Установлен достаточный признак сходимости энергий и минимизантов вариационных задач Дирихле;

2. Показано, что присущие степенным интегрантам свойства строгой выпуклости и дифференцируемости сохраняются при переходе к Г-пределу;

3. Получены новые варианты леммы о компенсированной компактности с условиями ограниченности в терминах Г-сходимости интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и могут быть использованы в различных областях теории дифференциальных уравнений в частных производных, вариационного исчисления, теории усреднения, теории монотонных операторов. Результаты диссертационной работы являются частью научно-исследовательских работ, проводимых при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 11-01-00331,13-01-90700 и гранта-субсидии Мин. обр. и науки РФ ѓк14.В37.21.0362.

[7] Murat, F. Compacité par compensation//Ann. Scuola norm. super. Pisa, Cl. Sci. Fis. Mat.–1978.–5:3.–p.89-107.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010, 2012), обсуждались на научном семинаре по дифференциальным уравнениям под руководством профессора В.В. Жикова во Владимирском государственном университете имени А.Г. и Н.Г. Столетовых.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в работах 1—5. Из них работы 1, 2 опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов кандидатской диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитированной литературы. Объем диссертации составляет страниц машинописного текста.

Краткое содержание работы

1. Приведем некоторые факты и определения из абстрактной теории Г-сходимости. Пусть X – метрическое пространство. Будем рассматривать функции (функционалы) F, $F_n : X \to [-\infty, +\infty]$.

Определение 1. *Функция F называется* Г-*пределом последовательности F_n, если*

1) выполнено условие полунепрерывности снизу

$$\liminf_{n\to\infty} F(u_n) \geq F(u) \text{ как только } u_n \to u;$$

2) для любого $u \in X$ существует последовательность u_n, такая что

$$u_n \to u, \quad \lim_{n\to\infty} F_n(u_n) = F(u).$$

Справедлив следующий принцип выбора: *из каждой последовательности функций F_n, заданных на сепарабельном метрическом пространстве X, можно извлечь* Г-*сходящуюся подпоследовательность.*

2. Дадим абстрактное описание *эффекта Лаврентьева*, который играет существенную роль при изучении Г-сходимости интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста. Пусть функционал F полунепрерывен снизу на X и S есть плотное в X множество. Определим релаксационный функционал равенством

$$\overline{F}(u) = \inf_{u_n \in S} \lim_{u_n \to u} F(u_n).$$

Релаксационный функционал $\overline{F}$ также полунепрерывен снизу на X и $F \leq \overline{F}$ на X. Эффектом Лаврентьева называют не только неравенства вида $E_1 < E_2$, см. (3), но и саму ситуацию, когда $F \neq \overline{F}$. Если для допредельных функционалов F_n имеет место эффект Лаврентьева, то с последовательностью функционалов F_n можно связать два в общем случае не совпадающих предельных объекта

$$\Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n \quad \text{и} \quad \Gamma\text{-}\lim_{n\to\infty} \overline{F}_n. \tag{7}$$

Первый из них далее обозначается как $\Gamma_1\text{-}\lim F_n$, а второй – $\Gamma_2\text{-}\lim F_n$.

3. Рассмотрим функционалы $F(u)$ на соболевском пространстве $W^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 1$, для которых выполнено неравенство коэрцитивности

$$F(u) \geq c\|\nabla u\|^{\alpha}_{L^{\alpha}(\Omega)} - 1, \quad c > 0. \tag{8}$$

Для этого класса предпочтительнее использовать определение Γ-предела в терминах слабой сходимости в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, подробное изложение приведено в §1 диссертации.

Определение 2. *Функция χ есть* Γ-*предел последовательности F_n на $W^{1,\alpha}(\Omega)$, если*

1) выполнено условие полунепрерывности снизу

$$\liminf_{n\to\infty} F_n(u_n) \geq \chi(u), \ \text{как только} \ u_n \rightharpoonup u \ \text{в} \ W^{1,\alpha}(\Omega);$$

2) для любого $u \in W^{1,\alpha}(\Omega)$ найдется последовательность u_n такая, что

$$u_n \rightharpoonup u \in W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{n\to\infty} F_n(u_n) = \chi(u).$$

Нетрудно показать, что оценка (8) сохраняется при переходе к Γ-пределу. Применяя результаты абстрактной теории Γ-сходимости, получаем следующий результат о компактности:
класс функционалов, подчиненных оценке (8), *компактен относительно* Γ-*сходимости, понимаемой в смысле определения 2.*

4. Начнем с определений Γ-сходимости интегрантов (функционалов) класса (2), введенных В.В. Жиковым в работах[4,5].

Определение 3. *Интегрант f есть* Γ_1-*предел последовательности f_n, если*

1) выполнено неравенство

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x, \nabla u_n)dx \geq \int_\Omega f(x, \nabla u)dx,$$
$$\text{как только } u_n \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega);$$

2) для любого $u\in W^{1,\beta}(\Omega)$ *найдется последовательность* $u_n\in W^{1,\alpha}(\Omega)$ *(называемая* Γ_1*-реализующей), такая что*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad u_n - u\in W_0^{1,\alpha}(\Omega),$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x,\nabla u_n)dx = \int_\Omega f(x,\nabla u)dx.$$

В определении Γ_2-сходимости требуется принадлежность аппроксимирующей последовательности u_n пространству $W^{1,\beta}(\Omega)$. Два варианта Г-сходимости интегрантов соответствуют двум абстрактным предельным объектам, см. (7). Известны примеры[8] несовпадения Γ_1 и Γ_2-пределов.

Пример 1. Пусть $f(y,\xi)$ – периодический по $y\in\mathbb{R}^d$ интегрант, $\Box = [0,1)^d$– ячейка периодичности. Положим $f_\varepsilon(x,\xi) = f\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi\right)$, $\varepsilon > 0$, и определим усредненные интегранты

$$\begin{aligned} f_1^{\text{hom}}(\xi) &= \inf_{u\in W^{1,\alpha}_{per}(\Box)}\int_\Box f(x,\xi+\nabla u)dx, \\ f_2^{\text{hom}}(\xi) &= \inf_{u\in W^{1,\beta}_{per}(\Box)}\int_\Box f(x,\xi+\nabla u)dx, \end{aligned} \tag{9}$$

где $W^{1,\gamma}_{per}(\Box)$ – соболевское пространство периодических функций. Как известно, задача усреднения представляет собой частный случай нахождения Г-предела, при этом

$$\Gamma_1\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = f_1^{\text{hom}}, \quad \Gamma_2\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = f_2^{\text{hom}}.$$

В работе[8] построен пример интегранта, для которого выполнено строгое неравенство $f_1^{\text{hom}} < f_2^{\text{hom}}$.

Имеет место следующий принцип компактности, доказанный В.В. Жиковым в работе[5].

Принцип компактности. *Для всякой последовательности* f_n *интегрантов из класса* (2) *найдется подпоследовательность* $f_{n'}$ *и интегрант* f *из класса* (2) *такие, что* $f_{n'} \xrightarrow{\Gamma_1} f$ *в любой липшицевой подобласти области* Ω. *Аналогичное утверждение верно для случая* Γ_2*-сходимости.*

Далее, говоря о Г-сходимости f_n в области Ω, предполагаем, что $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$ в любой липшицевой подобласти области Ω. В таком случае нетрудно показать единственность Γ_1- и Γ_2-предела. Именно это свойство единственности позволяет говорить о сходимости интегрантов, а не только о сходимости интегральных функционалов.

[8] Жиков В.В. Эффект Лаврентьева и усреднение нелинейных вариационных задач// Дифференциальные уравнения.– 1991.–т.27.–N1.–с.42-50.

5. Перейдем к классу интегрантов (4)-(5). Соответствующий функционал $F(u)$ считаем заданным на всем соболевском пространстве $W^{1,\alpha}(\Omega)$, где он может принимать значение $+\infty$. Имеет место вложение $W^{1,\beta}(\Omega)\subset \mathrm{dom}F$, где $\mathrm{dom}F = \{u\in W^{1,\alpha}(\Omega),\ F(u) < \infty\}$. Функционал $F(u)$ слабо полунепрерывен снизу на $W^{1,\alpha}(\Omega)$, сильно непрерывен на пространстве $W^{1,\beta}(\Omega)$ и коэрцитивен на $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$.

Определение 4. *Интегрант f есть Γ_1-предел последовательности f_n, если*

1) выполнено неравенство

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x, u_n, \nabla u_n)dx \geq \int_\Omega f(x, u, \nabla u)dx,$$

$$\text{как только } u_n \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega);$$

2) для любого $u\in W^{1,\beta}(\Omega)$ найдется последовательность $u_n\in W^{1,\alpha}(\Omega)$ (называемая Γ_1-реализующей), такая что

$$u_n \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad u_n - u\in W_0^{1,\alpha}(\Omega),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x, u_n, \nabla u_n)dx = \int_\Omega f(x, u, \nabla u)dx.$$

В определении Γ_2-сходимости требуется принадлежность аппроксимирующей последовательности u_n пространству $W^{1,\beta}(\Omega)$.

6. Нашей целью является доказательство теоремы о компактности относительно Γ_1 и Γ_2-сходимости для класса интегрантов (4)-(5). Основным вспомогательным средством будет Γ-сходимость при "замороженном" параметре $s\in\mathbb{R}$. Обозначим этот промежуточный тип сходимости через $\Gamma(s)$.

Определение 5. *Интегрант f есть $\Gamma_1(s)$-предел последовательности f_n, если*

1) выполнено условие полунепрерывности снизу

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x, s, \nabla u_n)dx \geq \int_\Omega f(x, s, \nabla u)dx, \quad \forall s\in\mathbb{R},$$

$$\text{как только } u_n \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega);$$

2) *для любых $u\in W^{1,\beta}(\Omega)$ и $s\in\mathbb{R}$ найдется последовательность $u_n\in W^{1,\alpha}(\Omega)$ такая, что*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad u_n - u\in W_0^{1,\alpha}(\Omega),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x, s, \nabla u_n)dx = \int_\Omega f(x, s, \nabla u)dx.$$

Определение $\Gamma_2(s)$-предела отличается от определения $\Gamma_1(s)$-предела тем, что в условиях 1) и 2) аппроксимирующая последовательность u_n принадлежит пространству $W^{1,\beta}(\Omega)$.

Для каждого фиксированного s по принципу компактности Жикова из последовательности интегрантов $f_n(\cdot, s, \cdot)$ можно извлечь Γ_1-сходящуюся подпоследовательность. Используя диагональный процесс, найдем последовательность $\{n'\}\subset\{n\}$ и интегрант $f(x, s, \xi)$, такие что $f_{n'}(\cdot, s, \cdot) \xrightarrow{\Gamma_1} f(\cdot, s, \cdot)$ для любого рационального $s \in \mathbb{Q}$. Предельный интегрант $f(x, s, \xi)$ наследует свойства (4), (5), в которых пока $s \in \mathbb{Q}$. По непрерывности Γ_1-предельный интегрант продолжается на все множество $s \in \mathbb{R}$. Построенный таким образом предельный объект принадлежит классу (4)-(5). Доказан следующий результат о компактности: *из каждой последовательности f_n интегрантов класса* (4)-(5) *можно извлечь* $\Gamma_1(s)$*- и* $\Gamma_2(s)$*-сходящуюся подпоследовательность.*

Оказывается, что при условии на показатель $\alpha>d$ последовательность $\Gamma_1(s)$-сходящихся интегрантов класса (4)-(5) будет Γ_1-сходящиейся в смысле определения 4. Аналогичное утверждение верно относительно Γ_2-сходимости.

Основной результат первой главы составляет

Теорема 1.1 *Рассмотрим класс каратеодориевых интегрантов* $f(x, s, \xi)$, *для которых выполнены*

i) условие выпуклости по ξ;

ii) нестандартные условия коэрцитивности и роста, см. (4)*;*

iii) свойство типа липшицевости по второму аргументу, см.(5);

iv) дополнительное ограничение на показатель: $\alpha > d$.

Тогда $\Gamma_1(s)$*-сходящаяся последовательность интегрантов является* Γ_1*-сходящейся. Аналогичное утверждение справедливо и для* Γ_2*-сходимости*

Следствием теоремы 1.1 является следующий принцип компактности.

Теорема 1.2 *Класс выпуклых по ξ интегрантов, удовлетворяющих условиям* (4)-(5) *при $\alpha>d$, компактен относительно* Γ_1*- и* Γ_2*- сходимости.*

Заметим, что условие $\alpha>d$ является существенным в наших рассмотрениях. Оно позволяет эффективно использовать свойство непрерывности (5). Без условия $\alpha>d$ доказательство компактности остается открытой проблемой.

7. В абстрактной теории устанавливается, что Г-сходимость функционалов при определенных условиях влечет сходимость минимумов и минимизантов (см., например, A. Braides[9]). Для изучаемых нами интегральных функционалов этот вопрос требует отдельного рассмотрения из-за эффекта Лаврентьева. Изучим эту ситуацию подробнее на примере задачи Дирихле. Рассмотрим вариационные задачи

$$E_1 = \min_{W_0^{1,\alpha}(\Omega)} \int_\Omega f(x, u, \nabla u)dx, \quad E_2 = \inf_{C_0^\infty(\Omega)} \int_\Omega f(x, u, \nabla u)dx. \tag{10}$$

Отметим одно различие задач E_1 и E_2. Минимум в задаче E_1 достигается по теореме Вейерштрасса – Тонелли, поскольку интегральный функционал

[9]Braides A. Г-convergence for beginners. — Oxford University Press, 2002 — 218 p.

слабо полунепрерывен снизу и коэрцитивен на $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. В задаче E_2 минимум может не достигаться, но в этом случае по определению инфимума существуют так называемые ε-минимизанты.

Для интегрантов f_n рассмотрим задачи двух типов

$$E_1^{(n)} = \min_{W_0^{1,\alpha}(\Omega)} \int_\Omega f_n(x,u,\nabla u)dx, \quad E_2^{(n)} = \inf_{C_0^\infty(\Omega)} \int_\Omega f_n(x,u,\nabla u)dx.$$

Если $f = \Gamma_1\text{-}\lim f_n$, то возникает вопрос о сходимости энергий $E_1^{(n)}$. Идеальным ответом была бы сходимость

$$\lim_{n\to\infty} E_1^{(n)} = E_1. \tag{11}$$

В ряде случаев указанная сходимость энергий, действительно, наблюдается. Однако, в общем случае можно говорить лишь о неравенствах

$$E_1 = \min_{W_0^{1,\alpha}(\Omega)} F(u) \le \liminf_{n\to\infty} E_1^{(n)} \le \limsup_{n\to\infty} E_1^{(n)} \le \inf_{C_0^\infty(\Omega)} F(u) = E_2. \tag{12}$$

Из неравенств (12) следует, что для сходимости энергий $E_1^{(n)}$ достаточно равенства энергий двух типов в задачах (10) с Γ_1-предельным интегрантом f. Это приводит к следующему определению регулярного интегранта.

Определение 6. *Назовем интегрант f регулярным, если для любого $u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, такого что $F(u)<\infty$, существует последовательность $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$, для которой*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ в } W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,u_n,\nabla u_n)dx = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)dx.$$

Из определения видно, что в случае регулярного интегранта задачи первого и второго типа в (10) совпадают, поэтому имеет место сходимость энергий (11).

8. Глава 2 посвящена изучению Г-сходимости степенных интегрантов вида (6). Определим класс $S(\alpha,\beta)$ как Г-замыкание множества степенных интегрантов вида (6). Заметим, что интегранты класса $S(\alpha,\beta)$, вообще говоря, ***не обязательно сохраняют степенную структуру***.

Пример 2. Рассмотрим задачу усреднения для последовательности интегрантов $f(y,\xi) = \frac{|\xi|^{p(x/\varepsilon)}}{p(x/\varepsilon)}$, где $f(y,\xi)$ периодическая по y функция с ячейкой периодичности $\square = [0,1)^d$. Известно, что в одномерном случае ($d=1$) имеет место представление

$$(f^{\mathrm{hom}})^*(\xi) = \int_0^1 \frac{|\xi|^{p'(y)}}{p'(y)}dy, \quad f^*(x,\eta) = \sup_\xi\{\xi\cdot\eta - f(x,\xi)\}.$$

Возьмем кусочно-постоянный показатель $p(y)$, принимающий значения p_1 и p_2. Тогда интегрант $(f^{\mathrm{hom}})^*(\xi)$ есть сумма степенных интегрантов с разными показателями p_1' и p_2'. Отсюда видно, что сам усредненный интегрант $f^{\mathrm{hom}}(\xi)$ не является степенным.

Пример 3. Степенной интегрант очевидно изотропен, то есть зависит только от $|\xi|$. Изотропия не сохраняется при переходе к Г-пределу, что показывают примеры усреднения в случае квадратичного интегранта. Действительно, при $d = 2$ рассмотрим интегранты

$$f_\varepsilon(x, \xi) = a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)|\xi|^2,$$

где $a(y_1) > 0$ – непрерывная периодическая функция, $\langle a\rangle$ – среднее по периоду. Из теории усреднения известно (см.[10] стр.12), что

$$\Gamma\text{-}\lim f_\varepsilon = \langle a\rangle\xi_1^2 + \langle a^{-1}\rangle^{-1}\xi_2^2,$$

откуда видно, что предельный интегрант не изотропен.

К важнейшим свойствам степенных интегрантов относятся
- Δ_2-условие: $f(x, \pm 2\xi) \le cf(x, \xi) + 1$;
- строгая выпуклость по ξ;
- дифференцируемость по ξ.

Наша цель состоит в проверке этих свойств для интегрантов класса $S(\alpha, \beta)$. Сформулируем центральные результаты второй главы.

Теорема 2.1 *Интегранты $f(x, \xi)$ класса $S(\alpha, \beta)$ строго выпуклы по ξ для п.в. $x \in \Omega$, то есть*

$$f\left(x, \frac{\xi + \eta}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(x, \xi) + f(x, \eta)), \quad \forall \xi, \eta,\ \xi \ne \eta.$$

Теорема 2.2 *Интегранты $f^*(x, \eta)$, сопряженные по Юнгу к интегрантам класса $S(\alpha, \beta)$, строго выпуклы по η для п.в. $x \in \Omega$.*

Из теорем 2.1 и 2.2, а также общих свойств выпуклых функций следует, что Г-предельный интегрант дифференцируем по ξ. Действительно, выпуклая функция $f(\xi)$ не обязательно дифференцируема, можно говорить лишь о существовании субградиента в точке. Напомним, что вектор $\eta_0 \in \mathbb{R}^d$ называют субградиентом $f(\xi)$ в точке $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$, если

$$f(\xi) - f(\xi_0) \ge \eta_0 \cdot (\xi - \xi_0) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Из выпуклого анализа известно, что функция $f(\xi)$ является дифференцируемой в точке, если ее субградиент единственен, что в свою очередь выполнено

[10] Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.

в случае строгой выпуклости сопряженной функции $f^*(\xi)$. Из этих соображений и теоремы 2.2 следует

Теорема 2.3 *Интегранты $f(x,\xi)$ класса $S(\alpha,\beta)$ и сопряженные к ним дифференцируемы по ξ.*

Еще один результат, касающийся равномерной выпуклости, удалось получить только в случае $\alpha \geq 2$. Справедлива следующая теорема.

Утверждение 2.4 *Для интегрантов класса $S(\alpha,\beta)$, $2 \leq \alpha \leq p(x) \leq \beta$, выполнено свойство равномерной выпуклости*

$$f\left(x, \frac{\xi+\eta}{2}\right) + f\left(x, \frac{\xi-\eta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x,\xi) + f(x,\eta)).$$

9. Часто требуется найти предел произведения $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ соленоидального вектора w_ε и градиента ∇u_ε, слабо сходящихся в $L^\alpha(\Omega)^d$ и $L^{\beta'}(\Omega)^d$ соответственно, при этом $1 < \alpha \leq \beta$. В классической *лемме о компенсированной компактности* Тартара – Мюра установлена сходимость

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \varphi w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_\Omega \varphi w \cdot \nabla u dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

при условии $\alpha = \beta$. В Главе 3 диссертации доказаны новые варианты леммы о компенсированной компактности, в которых $\alpha < \beta$. Отправной точкой послужили недавние результаты В.В.Жикова и С.Е. Пастуховой[11,12]. В этих работах устанавливается слабая сходимость в смысле мер произведения $w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ к произведению слабых пределов $w \cdot \nabla u$ с точностью до сингулярной компоненты

$$w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup d\mu, \quad d\mu = w \cdot \nabla u dx + d\mu^s,$$

где μ^s – сингулярная (относительно меры Лебега dx) мера. Примеры показывают, что сингулярная компонента может быть нетривиальной. Наша цель – найти такие случаи, когда сингулярная компонента отсутствует.

Предположим, что

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega),\ w_\varepsilon \rightharpoonup w \text{ в } L^{\beta'}(\Omega)^d,\ \mathrm{div} w_\varepsilon = 0. \tag{13}$$

Имеющееся в лемме Тартара – Мюра условие ограниченности множителей ∇u_ε, w_ε во взаимно сопряженных лебеговых пространствах заменим на более общее условие вида

$$\int_\Omega f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx, \quad \int_\Omega f_\varepsilon^*(x, w_\varepsilon) dx \leq C < \infty, \tag{14}$$

[11] Жиков В.В. К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях, // Функциональный анализ и его приложения. — 2009.—43.—2.—с.19-38.

[12] Жиков В.В., Пастухова С.Е. О принципе компенсированной компактности //Докл. РАН. — 2010. — 433. — 5. — с.590-595.

где интегранты f_ε удовлетворяют нестандартным условиям коэрцитивности и роста с показателями α, β, такими, что

$$1 < \alpha \le \beta < \alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha d}{d-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha < d, \\ +\infty, & \text{если} \quad \alpha \ge d. \end{cases} \tag{15}$$

Теорема 3.1 *Пусть f_ε– интегранты класса* (2), *для которых требуем регулярность, равномерное по ε Δ_2-условие и сходимость $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} f$, где f – регулярен. Тогда, в предположениях* (13)-(15) *имеет место слабая сходимость мер*

$$w_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx \rightharpoonup w \cdot \nabla u dx.$$

Приведем примеры, в которых предположения теоремы 3.1 выполнены.
Пример 4. Пусть f_ε=f и $f = f(\xi)$ – выпуклый интегрант, удовлетворяющий Δ_2-условию и оценке (2). Тогда условие (14) принимает вид

$$\int_\Omega f(\nabla u_\varepsilon)dx, \quad \int_\Omega f^*(w_\varepsilon)dx \le C < \infty.$$

Регулярность выпуклого интегранта $f(\xi)$ хорошо известна[13]. В случае $f(\xi) = |\xi|^\alpha$ получается классический результат Тартара – Мюра.
Пример 5. Пусть $f_\varepsilon(x,\xi)$=$|\xi|^{p_\varepsilon(x)}$ – степенной интегрант, где $p_\varepsilon(x)$= $p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ и $p(y)$ – периодическая функция на $\mathbb{R}^d$, 1<α≤$p(y)$≤β<∞, удовлетворяющая логарифмическому условию X.Fan – Жикова[14]:

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{k}{\ln \frac{1}{|x-y|}}, \quad x, y \in \Omega, \ |x-y| \le \frac{1}{4}.$$

Это условие обеспечивает регулярность интегранта f_ε. Предельный интегрант f является регулярным, так как не зависит от пространственной переменной: $f(x,\xi) = f^{\mathrm{hom}}(\xi)$, см. (9).

В работе 1 доказаны более общее результаты, в которых функционалы из условия (14) не являются регулярными.

В заключении автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору С.Е. Пастуховой за постановку задач, руководство и постоянное внимание к работе.

[13]Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир. 1979.
[14]Жиков В.В. Об эффекте Лаврентьева// Докл. РАН.– 1995.– т.345.–N1.– с.10-14.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях из перечня ВАК

1. Пастухова С.Е., Хрипунова А.С. Некоторые варианты принципа компенсированной компактности // Математический сборник, 2011, т. 202, № 9, с.135-160.

2. Pastukhova S.E., Khripunova A.S. Gamma–closure of some classes of nonstandard convex integrands // Journal of Mathematical Sciences, 2011, Volume 177, Issue 1, p. 83-108.

Публикации в прочих изданиях

3. Пастухова С.Е., Хрипунова А.С. Некоторые варианты принципа компенсированной компактности // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов, 2010, с.63.

4. Хрипунова А.С. О равномерной выпуклости Г-предельного элемента дл последовательности степенных интегрантов //Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов, 2012, с.74.

5. Пастухова С.Е., Хрипунова А.С. О Гамма-компактности одного класса интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста// Проблемы математического анализа, 2013, т.74, с.

Подписано в печать 15.11.13.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 0,93. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.