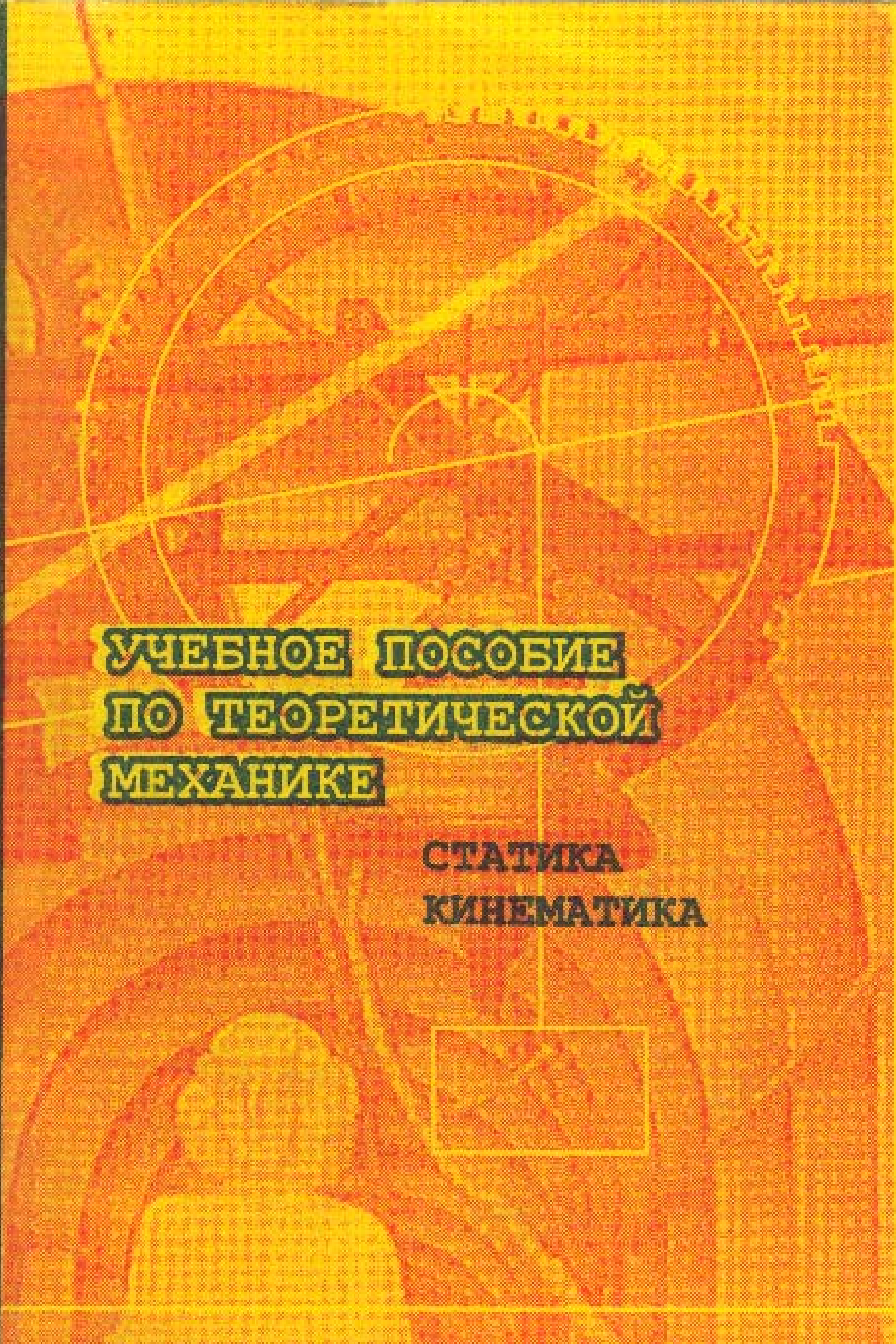


УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

СТАТИКА
КИНЕМАТИКА

Министерство образования Российской Федерации

Владимирский государственный университет

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

СТАТИКА, КИНЕМАТИКА

Под редакцией профессора В.Н. Коровкина,
доцента В.Н. Филимонова

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по оптическому и приборостроительному образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 190100 «Приборостроение»

Владимир 2000

УДК 531.3
У91

Авторы:
В.Н. Коровкин (гл. 4,10), А.П. Шевченко (гл. 1,13),
В.Н. Филимонов (гл. 3, 12), А.В. Крылов (гл. 6, 8),
В.Н. Горбатенко (гл. 7,11), Е.А. Архипова (гл. 5),
Л.Ф. Метлина (гл. 9), И.П. Шеин (гл. 2)

Рецензенты:
Доктор технических наук профессор, заведующий кафедрой измерительных технологий и компьютерной томографии Санкт-Петербургского государственного института точной механики и оптики, председатель НМС УМО по специальности «Приборостроение»
В.А. Иванов
Доктор технических наук профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Нижегородского государственного технического университета
А.Ю. Панов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

У91 **Учебное** пособие по теоретической механике. Статика. Кинематика / В.Н. Коровкин, А.П. Шевченко, В.Н. Филимонов и др.; Под ред. В.Н. Коровкина, В.Н. Филимонова; Владим. гос. ун-т, Владимир, 2000. 152с.
ISBN 5-893 68-197-5

Учебное пособие написано на основе курса лекций, читаемого авторами студентам Владимирского государственного университета. В нем содержится целостное, системное и компактное изложение материала двух разделов теоретической механики соответствующего государственному стандарту высшего профессионального образования по техническим специальностям, в частности по специальности «Приборостроение».

Предназначено для студентов специальности 190100 - приборостроение для очной, вечерней и заочной форм обучения. Может быть полезно преподавателям, аспирантам, инженерам и техникам.

Ил. 94. Табл. 3. Библиогр.: 9 назв.

УДК 531.3

ISBN 5-89368-197-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение последних лет во многих вузах Российской Федерации проводится большая методическая работа по совершенствованию курсов фундаментальных дисциплин в свете требований стандартов специальностей. Эта работа особенно важна вследствие социально-экономических изменений в обществе, поскольку в настоящее время студенты, будущие специалисты, должны иметь уже другую профессиональную подготовку, чем ту, на которую рассчитано большинство существующих учебников и учебных пособий. Последнее обусловливает необходимость внесения изменений и дополнений не только в содержание курсов, но и методы изложения.

Данное учебное пособие написано на основе первой части лекционного курса, читаемого авторами студентам Владимирского государственного университета, и соответствует государственному стандарту высшего профессионального образования по техническим специальностям.

Учебное пособие представляет собой достаточно компактное, но в то же время целостное и логичное изложение теоретических основ двух разделов теоретической механики - статики и кинематики. Сокращение объема курса без ущерба его фундаментальной части достигнуто авторами посредством изложения материала от общего к частному, исключением ряда элементарных понятий и теорем, введением новых доказательств, "сжатием" информации в наглядные блоки (таблицы, схемы).

В этом одно из основных отличий данного учебного пособия от известных учебников по теоретической механике. Не умаляя значения последних, авторы ставили своей целью за короткое время, отводимое учебными планами на изучение статики и кинематики, изложить основные понятия и методы, содержащиеся в этих разделах. Для иллюстрации курса широко используются примеры, которые в ряде случаев дополняют теоретический материал. Предполагается, что некоторые элементарные вопросы, не рассмотренные в данном учебном пособии, будут изучаться студентами самостоятельно, что составляет вареную и необходимую часть профессиональной подготовки современного специалиста.

Авторы выражают глубокую признательность доцентам А.И. Новожилову и М.Е. Блинникову за ряд ценных замечаний и предложений по содержанию книги.

ВВЕДЕНИЕ

Механика - это наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел. Под *механическим движением* понимается изменение положения материальных тел в пространстве с течением времени. *Механическим взаимодействием* называется такое взаимодействие материальных тел, в результате которого происходит изменение их механического движения или формы (деформация). Мерой механического взаимодействия материальных тел является *сила.*

Механика относится к разряду естественных наук, т.е. наук о природе, зарождение которой в Древней Греции (V-IV вв. до н.э.) обусловлено потребностями практики. Наибольшее влияние на развитие механики вплоть до эпохи Возрождения (XIV-XVI вв.) оказали учения Аристотеля (384-322гг. до н.э.) и Архимеда (284-212гг. до н.э.). Яркими представителями эпохи Возрождения, с именами которых связано бурное и успешное развитие механики, являются: Леонардо да Винчи (1452-1519), Н. Коперник (1473-1543), И. Кеплер (1571-1630). К этому же периоду относятся работы Г. Галилея (1564-1642), сумевшего систематизировать отдельные разрозненные сведения по механике, накопленные человечеством на протяжении многих столетий, и впервые сформулировать важнейшие понятия механики: принцип относительности классической механики и принцип инерции вещества, законы падения тел, сложения движений и скоростей, понятие ускорения и т.д.

В 1687 г. вышло в свет знаменитое сочинение И. Ньютона (1642-1727) "Математические начала натуральной философии", в котором он, обобщая опыт и завершая работы своих предшественников, систематически изложил основные законы классической механики. С этого времени механика окончательно сформировалась как наука, которую часто называют механикой Галилея-Ньютона, или классической механикой.

Последующее развитие механики связано с разработкой аналитических методов в трудах Л. Эйлера (1707-1783), Ж. Даламбера (1717-1783), Ж. Лагранжа (1736-1813).

На развитие исследований по механике в России большое влияние оказали работы М. В. Остроградского (1801-1862), П.Л. Чебышева (1821-1894), А.М. Ляпунова (1857-1918), И.В. Мещерского (1859-1935), Н.Е. Жуковского (1847-1921), А.Н. Крылова (1863-1945), С.А. Чаплыгина (1869-1942) и других выдающихся ученых.

В *классической механике* рассматриваются материальные тела, размеры которых много больше межмолекулярных расстояний и которые движутся со скоростями, много меньшими скорости света.

Если объектами исследования механики являются любые реальные тела: деформируемые твердые тела, жидкие, газообразные и др., то в теоретической механике рассматриваются идеализированные материальные объекты такие, как материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело. Данные абстракции, которые, конечно, не существуют

в природе, позволяют выявить наиболее общие законы механического движения и механического взаимодействия, справедливые для любых материальных тел независимо от их конкретных физических свойств.

Наука об общих законах механического движения и механического взаимодействия материальных тел называется *теоретической механикой.* Таким образом, теоретическая механика - это раздел механики, составляющий основу общей механики, которая лежит в основе всех остальных технических дисциплин: сопротивления материалов, деталей машин, теории машин и механизмов, строительной механики, гидромеханики, газодинамики и т.д. Отсюда понятны роль и значение теоретической механики, позволяющей получить необходимые знания о природе посредством обобщенных методов построения математических моделей движений материальных объектов природы и техники.

В теоретической механике движение материальных тел рассматривается в *трехмерном евклидовом пространстве.* Для изучения движения вводят так называемую *систему отсчета,* понимая под ней совокупность тела отсчета (т.е. тела, по отношению к которому изучается движение других тел) и связанных с ним систем координатных осей и часов. Принимается, что время не зависит от движения тел и одинаково во всех точках пространства и системах отсчета (*абсолютное время*). Поэтому, говоря о системе отсчета в теоретической механике, как правило, ограничиваются указанием только тела отсчета и системы координатных осей, связанных с ним.

Тело находится в движении относительно выбранной системы отсчета, если с течением времени происходит изменение координат хотя бы одной его точки, в противном случае тело находится в *покое* по отношению к этой системе отсчета. Таким образом, движение и покои тела по сути дела понятия относительные, зависящие от выбора системы отсчета. Поэтому в задачу теоретической механики входит также изучение равновесия материальных тел. Под *равновесием* понимается состояние покоя тела по отношению к другим материальным телам (телам отсчета). Если движением тела отсчета, по отношению к которому изучается равновесие, можно пренебречь, то равновесие условно называется *абсолютным.* Часто при инженерных расчетах систему отсчета, связанную с Землей, можно условно принять за неподвижную. Возникающие при таком допущении ошибки, как правило, практического значения не имеют. В задачах, в которых нельзя пренебречь вращением Земли, за неподвижную систему отсчета можно принять *гелиоцентрическую систему отсчета* с началом в центре Солнечной системы и осями, направленными на одни и те же далекие «неподвижные» звезды.

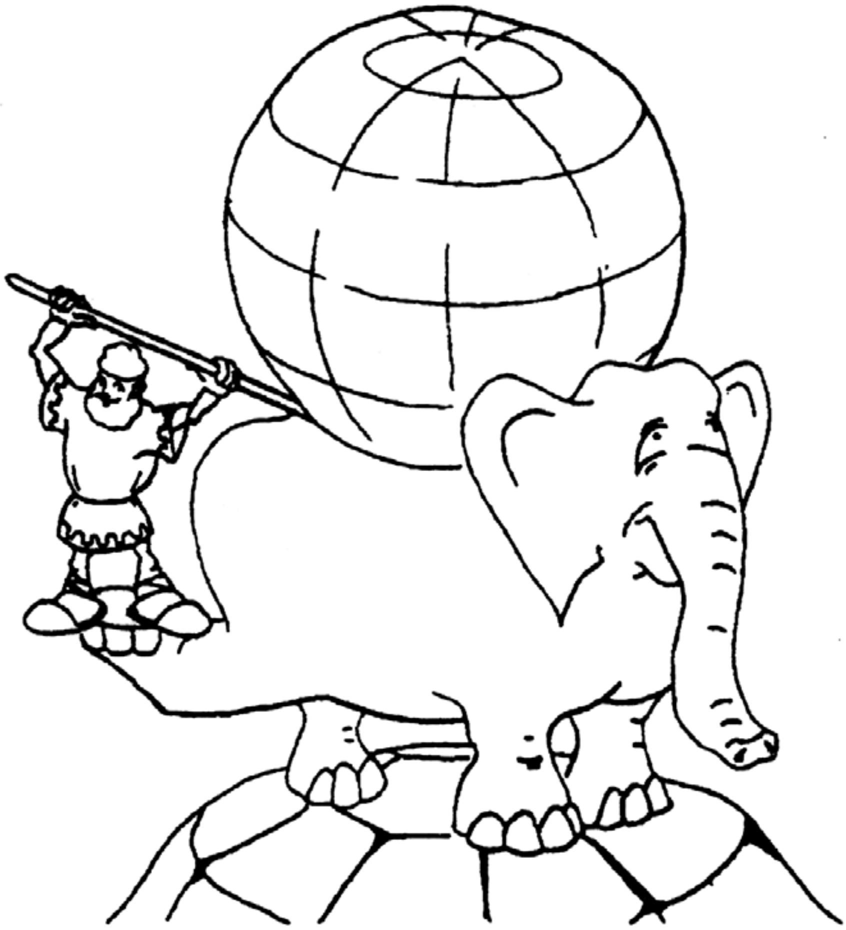
По характеру решаемых задач курс теоретической механики обычно делится натри части: статику, кинематику и динамику. В данной книге излагаются первые две части.

Раздел 1

СТАТИКА

Дай мне, где стать, и я сдвину Землю.

Архимед



1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ

1.1. Основные понятия, определения

Статика - раздел механики, в котором изучаются методы приведения систем сил к простейшему виду и выводятся условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу.

Как во всякой естественной науке, в теоретической механике используются идеализированные понятия, которые служат моделью для построения приближенной теории движения и равновесия реальных физических объектов. К таким понятиям можно отнести материальную точку, абсолютно твердое тело, идеальную жидкость и т.п.

Материальная точка - тело, размеры которого в конкретных условиях можно не учитывать. Материальная точка обладает массой и способностью взаимодействовать с другими телами.

Механическая система - любая совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения всех остальных точек.

Абсолютно твердое тело - механическая система, расстояния между любыми точками которой остаются неизменными при механических воздействиях со стороны других тел. Допущение о неизменяемости формы тел упрощает изучение их равновесия и вместе с тем позволяет решать многие технические задачи с достаточной степенью точности, так как в большинстве случаев деформации тел пренебрежимо малы.

Свободное тело - материальное тело, перемещения которого из данного положения в любом направлении в пространстве не ограничены другими телами.

Одним из основных понятий статики является понятие силы.

Сила - векторная мера механического взаимодействия тел. Она может быть изображена вектором, т.е. направленным отрезком прямой (рис.1.1,а). Одна из точек, ограничивающих вектор, называется началом вектора (точка А), другая - концом. Направление вектора указывается стрелкой на его конце. Силу как величину векторную принято обозначать буквой со знаком вектора над ней, например, $\vec{F}, \vec{P}, \vec{Q}$. Длину вектора называют его *модулем* и обозначают одним из способов $|\vec{F}|, |\vec{P}|, |\vec{Q}|$ или *F,P,Q*. Таким образом, сила $\vec{F}$ характеризуется точкой приложения А, модулем F и направлением.

Прямая, по которой направлена сила, называется линией действия силы.

В международной системе единиц измерения СИ за единицу измерения силы принимается ньютон (Н).

Система сил - любая совокупность сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$, действующих на материальное тело.

Эквивалентные системы сил - такие, которые по отдельности оказывают одинаковое действие на одно и то же твердое тело.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n').$$

Необходимо различать понятия эквивалентности и равенства сил. Силы векторно (или геометрически) равны, если они параллельны, направлены в одну сторону и имеют одинаковые модули (рис. 1.1, б): $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3$, так как $\vec{F}_1 \uparrow\uparrow \vec{F}_2 \uparrow\uparrow \vec{F}_3$ и $F_1 = F_2 = F_3$.

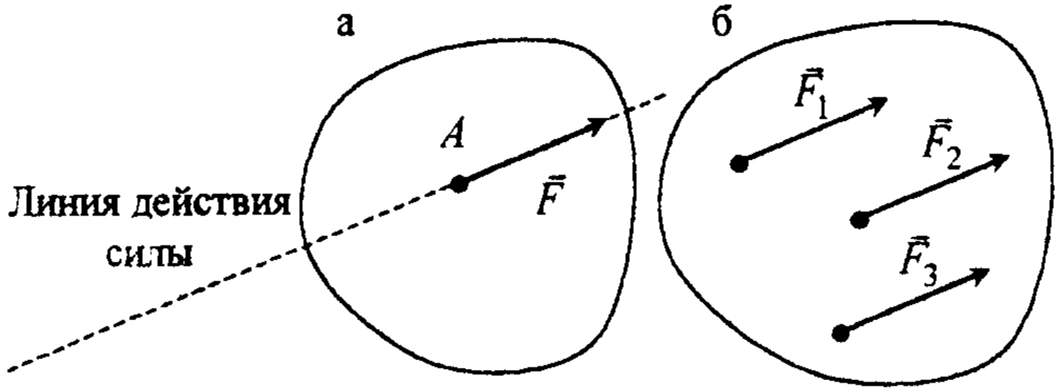


Рис. 1.1

Однако для эквивалентности сил этого недостаточно, т.е. нельзя утверждать, что, например, $\vec{F}_1 \sim \vec{F}_2$. Две силы эквивалентны, если они не только векторно равны, но еще и оказывают одинаковое действие на твердое тело. Это отличает вектор силы от свободного вектора, понятие о котором в математике положено в основу векторного исчисления, занимающегося изучением операций над векторами.

Свободным вектором называется вектор, который характеризуется только модулем и направлением. Он не связан с какой-либо определенной прямой линией или точкой. Начало такого вектора может быть выбрано произвольно (свободно) в любой точке пространства. В механике, кроме свободных, часто рассматриваются векторы скользящие и связанные.

Скользящим вектором называется вектор, расположенный произвольно на своей линии действия. Этот вектор связан с прямой по которой он направлен.

Связанным вектором называется вектор, который характеризуется модулем, направлением и точкой приложения. Этот вектор связан с точкой своего приложения, поэтому называется также приложенным или неподвижным.

Равнодействующая R - сила, эквивалентная некоторой системе сил

$$(\vec{R}) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n).$$

Уравновешенная система сил (или система сил, эквивалентная нулю) - такая, под действием которой свободное твердое тело (материальная точка) находятся в равновесии

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim 0.$$

Уравновешивающая сила заданной системы сил - такая сила, добавление которой к заданной системе дает новую систему, эквивалентную нулю.

Силы, действующие на механическую систему, делятся на силы внешние и внутренние.

Внешние силы - силы, действующие на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе.

Внутренние силы - силы взаимодействия между материальными точками (телами), входящими в состав данной системы.

1.2. Аксиомы статики

В основе изучения статики твердого тела лежат аксиомы, формулировка которых предполагает, что твердое тело или материальная точка в общем случае считаются свободными, имеющими возможность совершать в рассматриваемый момент времени любые перемещения в пространстве.

Аксиома инерции

Изолированная от внешних воздействий материальная точка (тело) находится в состоянии покоя или прямолинейного равномерного движения.

Аксиома равновесия двух сил

Две силы уравновешиваются, если они приложены к одному твердому телу, равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.2).

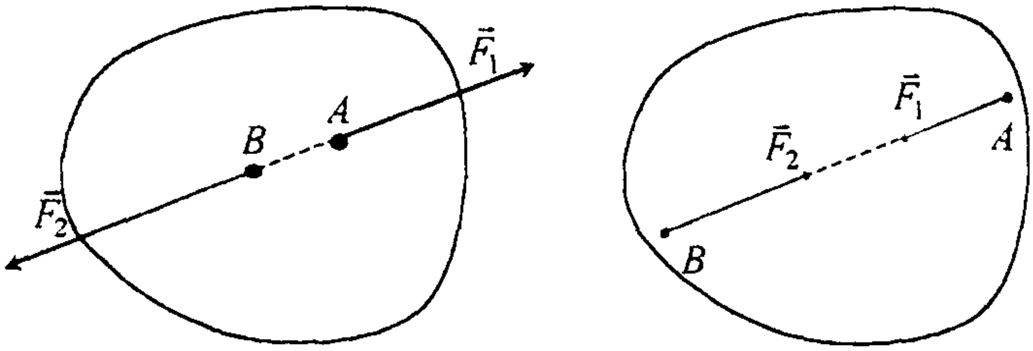


Рис. 1.2

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0; \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

Аксиома о присоединении или исключении уравновешенной системы сил

Если к заданной системе сил присоединить или из нее исключить уравновешенную систему сил, то новая система сил будет эквивалентна заданной (рис. 1.3, 1.4). $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ - заданная система сил.

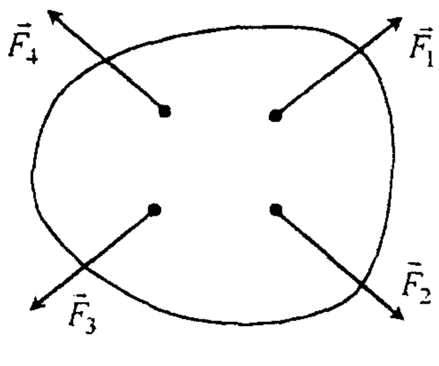


Рис. 1.3

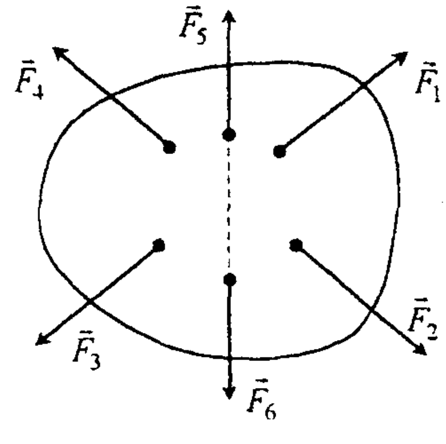


Рис. 1.4

$(\vec{F}_5, \vec{F}_6) \sim 0$ - присоединенная система сил.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6).$$

Следствие. Не изменяя действия на твердое тело, силу можно переносить вдоль ей линии действия в любую другую точку тела

Пусть на твердое тело действует сила $\vec{F}$, приложенная в точке A (рис. 1.5). На линии действия этой силы возьмем произвольную точку B и приложим к ней две уравновешенные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, при этом $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}$. От этого действие силы $\vec{F}$ на тело не изменится. Но силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ также образуют уравновешенную систему, которая может быть исключена. В результате на тело будет действовать сила $\vec{F}_1$, равная $\vec{F}$, но приложенная в точке B на линии действия силы (рис. 1.6).

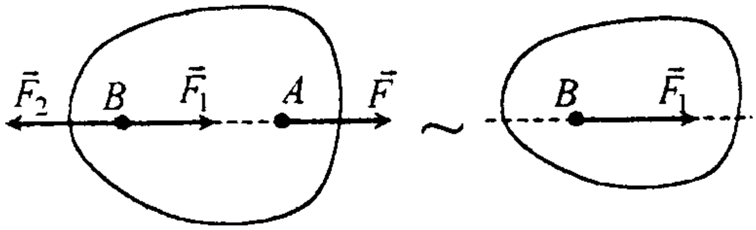


Рис. 1.5 Рис.1.6

На основании этого следствия вектор силы $\vec{F}$ считается скользящим.

Аксиома параллелограмма сил

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке твердого тела, приложена в той же точке, а по величине и направлению определяется диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рис. 1.7).

Замену двух сил одной равнодействующей называют *геометрическим (или векторным) сложением* этих сил, которое математически записывается так:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены по одной прямой в одну или противоположные стороны, то они складываются алгебраически.

Модуль равнодействующей определяют по формуле

$$\vec{R} = \sqrt{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + 2F_1F_2\cos(\vec{F}_1 \hat{,} \vec{F}_2)}.$$

Необходимо отметить, что справедливо и обратное. Одну силу можно разложить последовательно на две, три и т.д. составляющие по заданным направлениям.

Аксиома о равенстве сил действия и противодействия

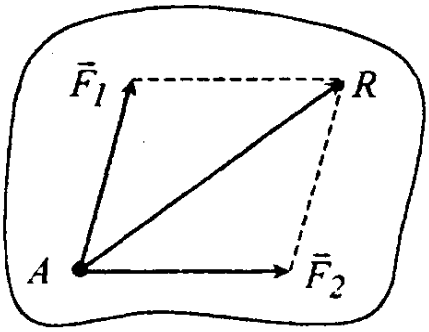


Рис. 1.7

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Эта аксиома утверждает, что силы взаимодействия между двумя телами (точками) равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.8).

Силы $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ не образуют уравновешенную систему, так как они приложены к разным телам. Отметим, что твердые тела или материальные точки, могут взаимодействовать путем соприкосновения или посредством силовых полей, т.е. на расстоянии.

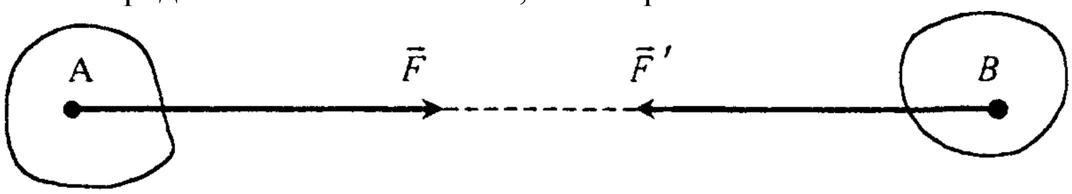


Рис. 1.8

Аксиома затвердевания

Равновесие деформируемого тела, не нарушится при его затвердевании.

Эта аксиома утверждает, что условия равновесия для деформируемого тела, должны выполняться и для абсолютно твердого тела.

Например, равновесие гибкой нити, на которой подвешено тело, не нарушится, если эта нить затвердеет.

Однако для деформируемого тела условия равновесия сил необходимы, но недостаточны. Так, например, для равновесия гибкой нити под действием двух сил, приложенных к ее концам, условия равновесия этих сил не являются достаточными, требуется еще, чтобы приложенные силы были растягивающими.

1.3. Связи. Реакции связей. Аксиома связей

Материальное тело, перемещения которого в пространстве ограничены другими телами, называется *несвободным.*

Связи - материальные объекты (тела), которые ограничивают перемещения данного твердого тела.

Реакция связи - сила, с которой связь действует на тело.

Активные - силы, которые не являются реакциями связей.

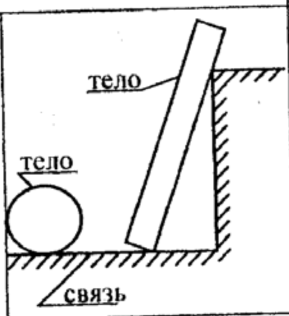
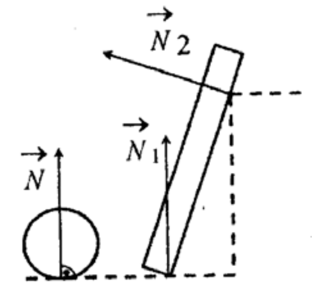
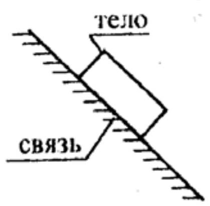
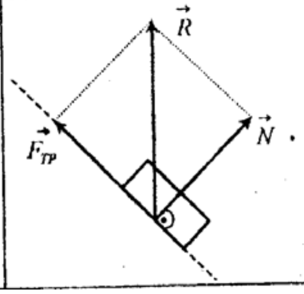
Упомянутые ранее внешние и внутренние силы могут быть активными и реакциями связей.

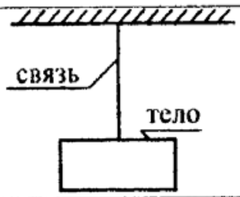
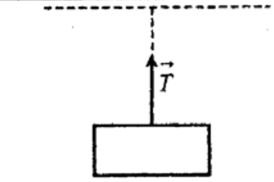
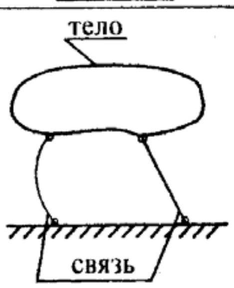
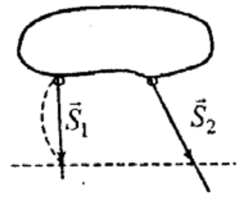
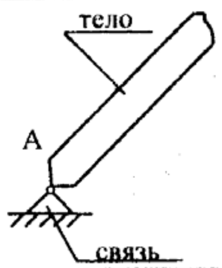
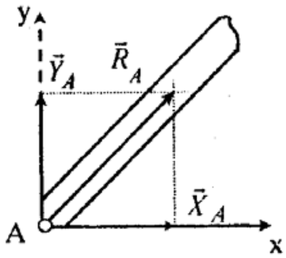
Аксиома связей

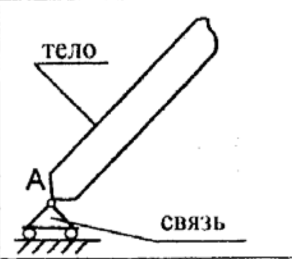
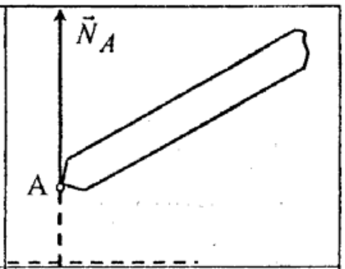
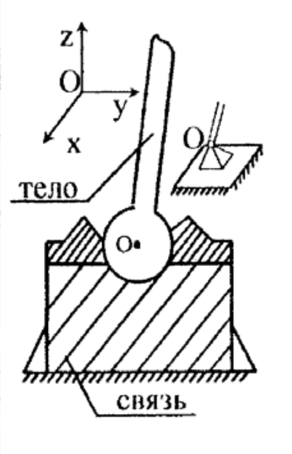
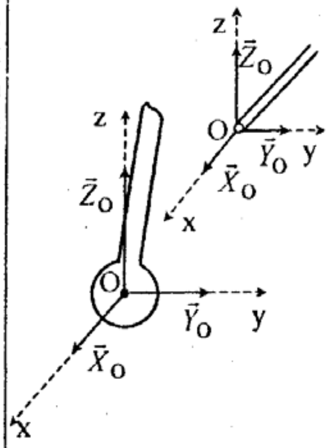
Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если связи условно отбросить и заменить их действие реакциями связей.

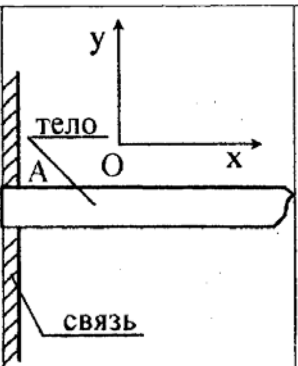
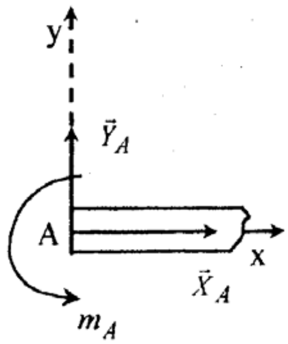
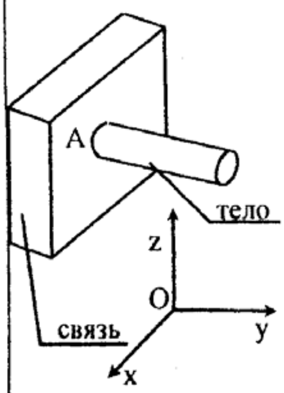
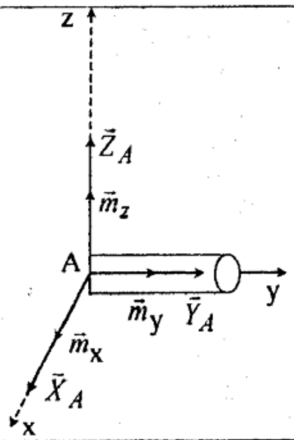
Реакции связей зависят от приложенных к телу активных сил и от вида связей. Поэтому очень важно уметь правильно заменять действие отброшенных связей их реакциями. При этом надо помнить, что реакция связи направлена в сторону, противоположную той, в которую связь препятствует перемещению тела. Если связь препятствует перемещению тела по нескольким направлениям, направление реакции связи неизвестно, ее обычно раскладывают по правилу параллелограмма на составляющие, направленные параллельно осям координат.

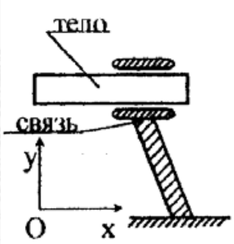
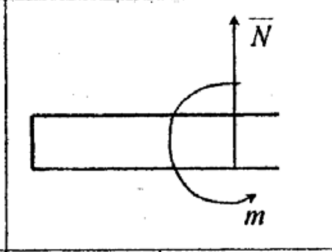
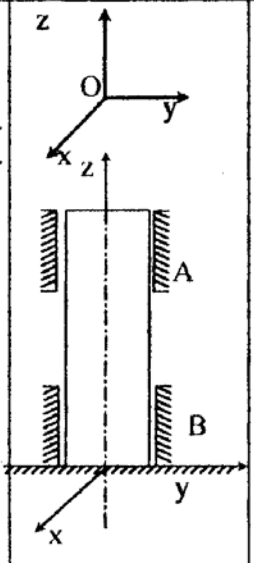
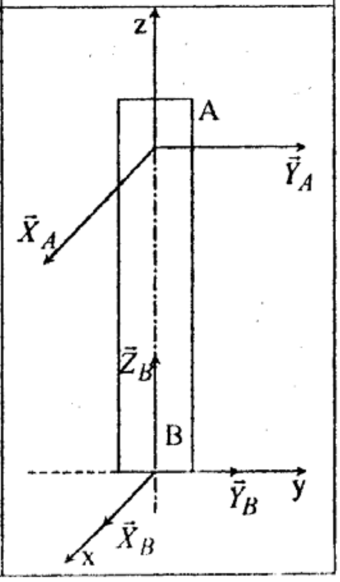
1.4. Основные виды связей и их реакции

Вид связи		Связь препятствует	Схема замены связи реакцией
Гладкая поверхность		перемещению тела по нормали к общей касательной соприкасающихся поверхностей тела и связи. Реакция связи направлена по этой нормали к телу и обозначается буквой $\vec{N}$	
Шероховатая поверхность		перемещению тела по нормали к поверхности и в сторону возможного движения тела. Реакция связи складывается из нормальной $\vec{N}$ составляющей, направленной к телу, и силы трения $\vec{F}_{тр}$, направленной противоположно возможному движению тела	

Гибкая нить		перемещению тела вдоль нити от точки её крепления. Реакция связи направлена вдоль нити от тела к точке крепления нити и обозначается буквой $\vec{T}$	
Невесомый стержень		перемещению тела вдоль прямой, проходящей через центры шарниров стержня. Стержни работают или на сжатие, или на растяжение. Предполагая стержни растянутыми, реакции стержней направляют от тела (от узла) вдоль прямого стержня или вдоль прямой, проходящей через центры шарниров для изогнутого стержня	
Шарнирно-неподвижная опора		перемещению тела в любом направлении по плоскости Oxy. Неизвестную по величине и направлению реакцию цилиндрического шарнира $\vec{R}_A$ раскладывают на две составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, параллельные осям координат	

Шарнир-но-подвиж-ная опора		перемещению тела по нормали к опорной поверхности подвижной шарнирной опоры. Реакция направлена по нормали к опорной поверхности и обозначается буквой $\vec{N}_A$ или $\vec{R}_A$	
Сферический (шаровой) шарнир		перемещению тела в любом направлении в пространстве. Неизвестную по величине и направлению реакцию сферического шарнира раскладывают на три составляющие $\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0$, параллельные осям координат	

Жесткая заделка (плоская схема)		перемещению тела в любом направлении в плоскости Oxy и повороту тела в плоскости Oxy. Реакция заделки состоит из реактивной силы, разложенной на составляющие по осям $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, и реактивной пары с моментом m_A, произвольно направленным в плоскости Oxy	
Жесткая заделка (пространственная схема)		перемещению и повороту тела в любом направлении в пространстве. Реакция жесткой заделки состоит из реактивной силы, разложенной на три составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, параллельные осям координат, и реактивной пары, векторный момент которой раскладывают на три составляющие $\vec{m}_x$, $\vec{m}_y$, $\vec{m}_z$, параллельные осям координат	

Скользящая заделка		перемещению тела по нормали к поверхности скользящей заделки и повороту в плоскости Oxy. Реакция скользящей заделки состоит из реактивной силы $\vec{N}$, направленной по нормали к поверхности заделки, и реактивной пары с моментом m, произвольно направленным в плоскости Oxy	
1.Радиальный подшипник A. 2.Радиально-упорный подшипник (подпятник) B. (пространственная схема)		1. перемещению тела по нормали к поверхности радиального подшипника. Реакция направлена по нормали к поверхности подшипника произвольно в плоскости Oxy и раскладывается на составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$, параллельные осям координат; 2. перемещению тела по нормали к поверхности подшипника (в радиальном направлении) и по нормали к опорной поверхности. Реакция направлена по нормали к поверхности подшипника произвольно в плоскости Oxy и раскладывается на составляющие $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$, параллельные осям координат, а также по нормали к опорной поверхности подпятника к телу, обозначается $\vec{Z}_B$ или $\vec{N}_B$	

2. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

2.1. Приведение системы сходящихся сил к равнодействующей

На материальные тела могут действовать различные системы сил - сходящихся, параллельных, произвольно расположенных на плоскости или в пространстве. Одной из наиболее простых является система сходящихся сил.

Системой сходящихся сил называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

> *Теорема.* Система сходящихся сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна геометрической сумме всех сил и проходит через точку пересечения их линий действия.

Доказательство. Пусть задана система сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, приложенных к твердому телу. Согласно следствию из аксиом перенесем силы по линиям их действия в точку пересечения этих линий (рис.2.1). Складывая силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, на основании аксиомы параллелограмма сил получим их равнодействующую: $\vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, индекс равнодействующей соответствует номеру добавляемой силы. Затем, сложив $\vec{R}_2$ с $\vec{F}_3$, найдем равнодействующую трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$:

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Дойдя, таким образом, до последней силы $\vec{F}_n$, получим равнодействующую $\vec{R}$ всей системы n данных сил:

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k. \tag{2.1}$$

Построение равнодействующей может быть упрощено, если вместо параллелограммов построить силовой многоугольник (рис. 2.2). 0т конца вектора $\vec{F}_1$ отложим вектор $\vec{F}_2$, от его конца отложим вектор $\vec{F}_3$ и т.д. Получим, что вектор, идущий от начала первого $\vec{F}_1$ к концу последнего $\vec{F}_n$, является равнодействующей $\vec{R}$.

Пространственный многоугольник, который получен указанным способом, называется силовым многоугольником. Если для нахождения равнодействующей при помощи силового многоугольника используются правила геометрии, то такой способ нахождения равнодействующей называется геометрическим способом.

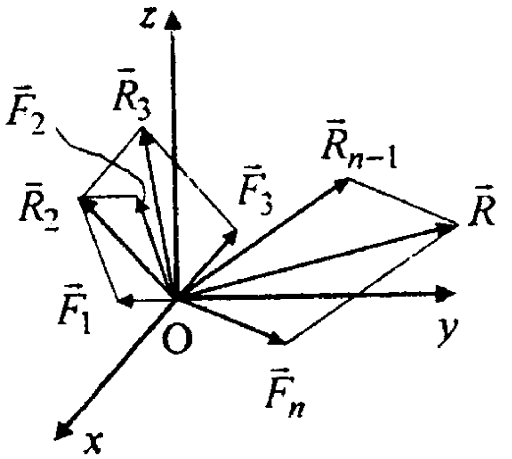


Рис. 2.1

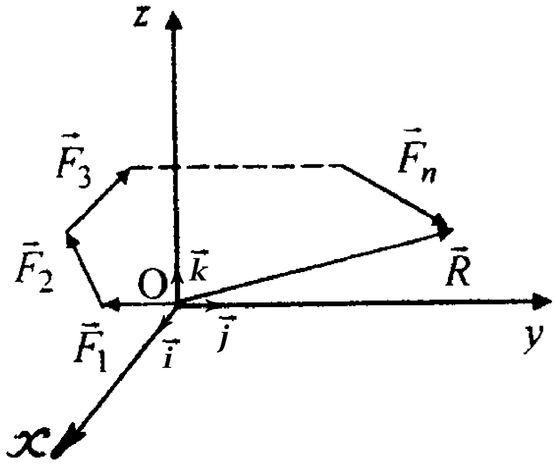


Рис. 2.2

Наиболее общим методом определения модуля и направления равнодействующей является аналитический метод.

Проекция силы на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси. Если этот угол острый, - проекция положительная, если тупой, - отрицательная, а если сила перпендикулярна оси, - ее проекция на ось равна нулю. Так, для сил, изображенных на рис.2.3:

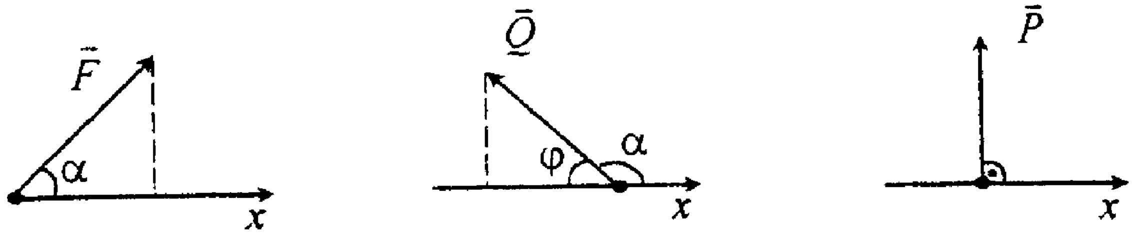


Рис. 2.3

$$F_x = F\cos\alpha; \quad Q_x = Q\cos\alpha = -Q\cos\varphi; \quad P_x = 0.$$

Проекцией силы $\vec{F}$ *на плоскость* Oxy называется вектор $\vec{F}_{xy}$, заключенный между проекциями начала и конца вектора силы $\vec{F}$ на эту плоскость (рис. 2.4).

Таким образом, в отличие от проекции силы на ось проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своим модулем, но и направлением в плоскости Oxy. Модуль $F_x = F\cos\varphi$, где φ - угол между направлением силы $\vec{F}$ и её проекции $\vec{F}_{xy}$.

В некоторых случаях для нахождения проекции силы на ось удобнее найти сначала ее проекцию на плоскость, в которой расположена эта ось, а затем эту проекцию спроектировать на данную ось. Например, в случае, изображенном на рис. 2.4:

$$F_x = F_{xy}\cos\alpha = F\cos\varphi\cos\alpha,$$

$$F_x = F_{xy}\sin\alpha = F\cos\varphi\sin\alpha.$$

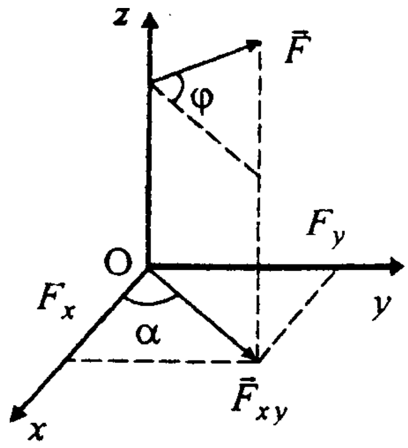


Рис. 2.4

Из курса векторной алгебры известно, что проекция суммы векторов на произвольную ось равна сумме проекций на ту же ось слагаемых векторов. Поместим начало прямоугольной системы координат в точку пересечения линий действия сил (см. рис.2.1), проектируя соотношение (2.1) на оси xyz, получим:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx};\\ R_y &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny};\\ R_z &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} - проекции силы $\vec{F}_k$ на указанные оси, а R_x, R_y, R_z - проекции равнодействующей на те же оси.

Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси.

Используя выражения (2.2), можно найти модуль равнодействующей:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{ky})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{kz})^2}.$$

а её направление в системе координат Оxy определим по направляющим косинусам вектора $\vec{R}$:

$$\cos(\vec{R}\,\hat{,}\,\vec{i}) = R_x / R; \quad \cos(\vec{R}\,\hat{,}\,\vec{j}) = R_y / R; \quad \cos(\vec{R}\,\hat{,}\,\vec{k}) = R_z / R.$$

2.2. Условия равновесия системы сходящихся сил

Ранее было установлено, что система сходящихся сил эквивалентна одной равнодействующей силе $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim R$. Отсюда следует, что

для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая их равнялась нулю:

$$\vec{R} = 0. \qquad (2.3)$$

Следовательно, в силовом многоугольнике уравновешенной системы сходящихся сил конец последней силы должен совпадать с началом первой силы; в этом случае говорят, что *силовой многоугольник замкнут* (рис. 2.5).

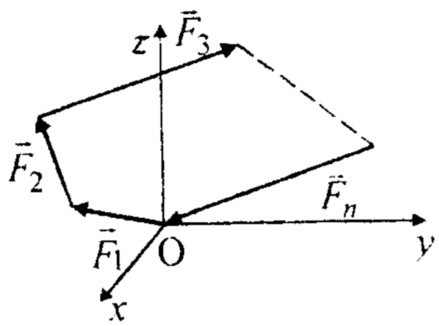


Рис.2.5

Проектируя равенство (2.3) на оси *x,y,z,* получим скалярные равенства:

$$R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0.$$

Принимая во внимание равенства (2.2), получаем аналитические условия равновесия системы сходящихся сил:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0;\\
&\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0;\\
&\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно равенства нулю алгебраических сумм проекций всех сил данной системы на каждую из координатных осей.

Для частного случая плоской системы сходящихся сил, расположенных, например, в плоскости Оxy, третье уравнение (2.4) выполняется тождественно.

При решении задач часто пользуются *теоремой о трех параллельных силах.*

Теорема. Если под действием трех сил тело находится в равновесии и линии действия двух сил пересекаются, то все силы лежат в одной плоскости, и их линии действия пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть на тело действует система трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, причем линии действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ пересекаются в точке А (рис.2.6).

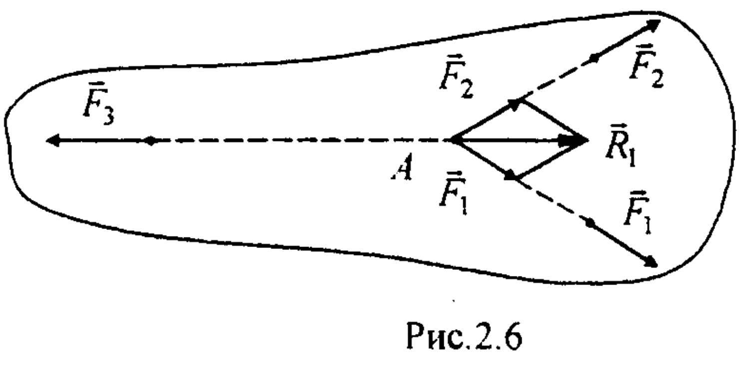


Рис.2.6

Согласно следствию из аксиом силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ можно перенести в точку А, а по аксиоме параллелограмма сил их можно заменить одной силой $\vec{R}_1$, причем $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Таким образом, заданная система сил приведена к двум силам $\vec{R}_1$ и $\vec{F}_3$. По условию теоремы тело находится в равновесии, следовательно, силы $\vec{F}_3$ и $\vec{R}_1$ должны иметь общую линию действия, отсюда следует, что сила $\vec{F}_3$ расположена в той же плоскости, что и силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, и линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке, что и требовалось доказать.

Пример. Шарик *A* весом *P* удерживается в центре параллелепипеда тремя нитями (рис.2.7), прикрепленными к его углам *B, C, D.* Стороны параллелепипеда равны $a = 3$ см, $b = 4$ см и $c = 5$ см. Определить натяжение нитей.

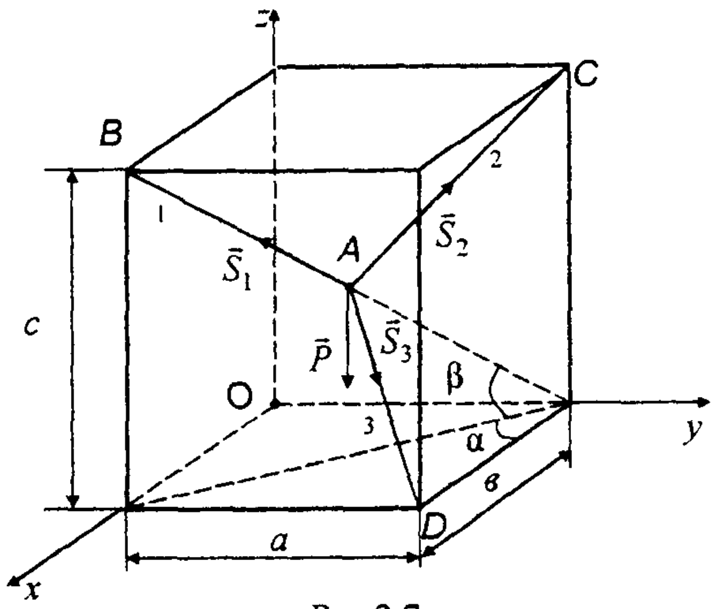


Рис.2.7

Решение:

Введем углы α и β. Угол α - угол между стороной b и диагональю основания. Угол β - угол между диагоналями параллелепипеда и основания.

За объект равновесия возьмем шарик весом *P*. Отбросим мысленно связи, которыми в данной задаче являются нити, и заменим их реакциями. Шарик находится в равновесии под действием четырех сил: веса $\vec{P}$ и реакций связей $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$. Шарик считаем материальной точкой. Выберем систему координат Oxyz и составим уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\; S_1 \cos\beta\cos\alpha - S_2 \cos\beta\cos\alpha + S_3 \cos\beta\cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\; -S_1 \cos\beta\sin\alpha + S_2 \cos\beta\sin\alpha + S_3 \cos\beta\sin\alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;\; S_1 \sin\beta + S_2 \sin\beta - S_3 \sin\beta - P = 0.$$

Заметим, что:

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{4}{5}; \qquad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решая систему уравнений, найдем:

$$S_1 = P\frac{\sqrt{2}}{2};\; S_2 = P\frac{\sqrt{2}}{2};\; S_3 = 0.$$

3. ТЕОРИЯ МОМЕНТОВ

Для решения задачи приведения произвольной системы сил к простейшему виду и задачи о равновесии произвольной системы сил прежде необходимо познакомиться с такими важными понятиями статики, как момент силы относительно точки, момент силы относительно оси, момент пары сил.

3.1. Момент силы относительно точки

Рассмотрим твердое тело, в точке A которого приложена сила $\vec{F}$ (рис.3.1). Проведем из произвольной точки О в точку A радиус-вектор $\vec{r}$.

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно точки* О называется вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$, равный векторному произведению радиуса - вектора $\vec{r}$ точки приложения силы относительно точки О на вектор силы $\vec{F}$

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (3.1)$$

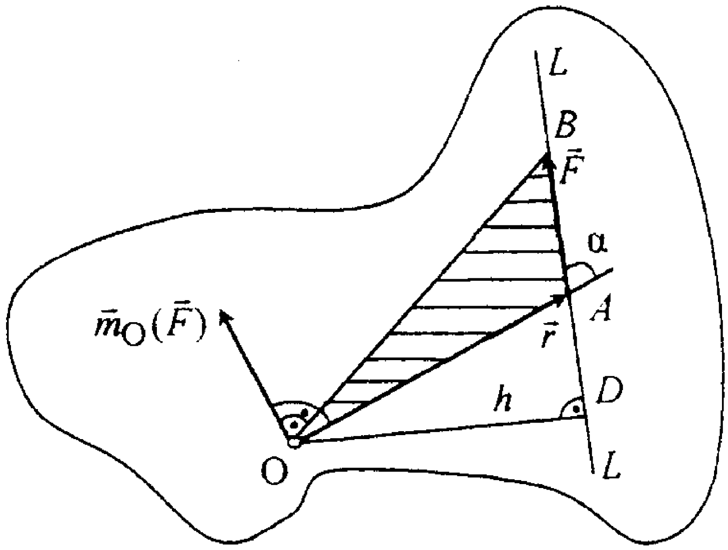


Рис. 3.1

Из определения векторного произведения следует, что

вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через точку О и вектор силы $\vec{F}$, в ту сторону, откуда мы видим, что сила $\vec{F}$ стремится вращать тело вокруг точки О против часовой стрелки.

Модуль вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$ равен модулю векторного произведения (3.1), т.е. произведению модулей $\vec{F}$ и $\vec{r}$ на синус угла между этими векторами

$$m_O(\vec{F}) = F\, r \sin(\vec{r} \,\widehat{,}\, \vec{F}) \qquad (3.2)$$

За угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{r}$, условно приложенными в одной точке, например A (см. рис. 3.1), принимается угол α, не превышающий π.

Проведем прямую LL, на которой лежит вектор силы $\vec{F}$ (линию действия силы), и опустим из точки О на эту прямую перпендикуляр ОD.

Длина перпендикуляра, равная кратчайшему расстоянию от точки О до линии действия силы $\vec{F}$, называется *плечом силы* $\vec{F}$ *относительно точки* O:

$$h = OD = r \sin \alpha .$$

С учетом этого из формулы (3.2) следует, что

> ***модуль момента силы относительно точки*** **равен произведению модуля силы на плечо силы относительно этой точки**

$$m_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = F\ h.$$

Если $F \neq 0$, то $m_{\mathrm{O}}(F) = 0$ только при $h = 0$, т.е. когда линия действия силы проходит через центр момента O. Момент силы измеряется в $\mathrm{Н} \cdot \mathrm{м}$.

Таким образом, по формуле (3.1) однозначно определяются модуль и направление вектора момента силы относительно точки, однако линия действия вектора $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ не определена. Так как модуль момента силы относительно точки O зависит от положения точки O, то для одновременного определения величины момента силы относительно точки O и плоскости, в которой эта точка и сила $\vec{F}$ расположены, будем рассматривать вектор $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ приложенным в точке O, называемой *центром момента.*

В случае, когда на тело действует система сил, расположенных в одной плоскости, векторы моментов сил относительно точки, расположенной в этой же плоскости, параллельны и могут быть направлены перпендикулярно плоскости в ту или иную сторону, что позволяет складывать их между собой алгебраически.

> *Алгебраический момент силы относительно точки* определяется как скалярная величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятому со знаком плюс, если сила стремится повернуть тело вокруг точки против часовой стрелки, и минус - если по часовой стрелке относительно этой точки

$$m_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \pm F\ h. \tag{3.3}$$

Для случая, изображенного на рис. 3.2

$$m_O(\vec{F}_1) = -F_1\ h_1;$$
$$m_O(\vec{F}_2) = F_2\ h_2;$$
$$m_O(\vec{F}_3) = 0.$$

Если совместить с точкой О (центром момента) начало прямоугольной системы координат О*xyz,* осям которой соответствуют векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k},$ то вектор момента силы относительно точки О можно представить в виде суммы его составляющих по осям выбранной системы координат:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = m_{Ox}(\vec{F})\vec{i} + m_{Oy}(\vec{F})\vec{j} + m_{Oz}(\vec{F})\vec{k}, \qquad (3.4)$$

где $m_{Ox}(\vec{F}),\ m_{Oy}(\vec{F}),\ m_{Oz}(\vec{F}))$ - проекции вектора $\vec{m}_O(\vec{F})$ на оси координат.

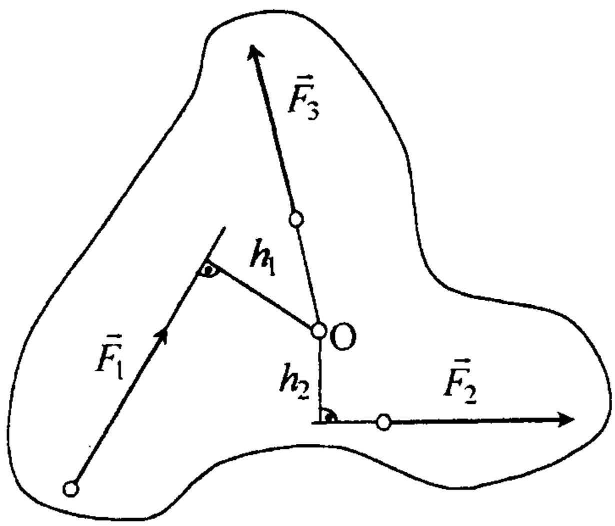


Рис.3.2

Пусть *x, y, z* - координаты точки приложения силы, равные проекциям радиуса' вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси, а F_x, F_y, F_z - проекции вектора силы на те же оси, тогда формулу (3.1) для| момента силы относительно точки О можно записать в виде определителя, раскрыв который по элементам первой строки получим

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \qquad (3.5)$$
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

Приравнивая правые части (3.4) и (3.5), заметим, что проекции вектор $\vec{m}_O(\vec{F})$ на оси координат с началом в точке О будут равны коэффициентам при единичных векторах в правой части равенства (3.5):

$$m_{Ox}(\vec{F}) = yF_x - zF_y; \quad m_{Ox}(\vec{F}) = zF_x - xF_z;$$
$$m_{Ox}(\vec{F}) = xF_y - yF_x \qquad (3.6)$$

3.2. Момент силы относительно оси

Пусть в точке A твердого тела приложена сила $\vec{F}$. Выберем ось z и на ней произвольную точку О (рис. 3.3).

Проведем через точку О плоскость Оxy, перпендикулярную оси z, и спроектируем силу $\vec{F}$ на эту плоскость. Получим вектор силы $\vec{F}_{xy}$, начало A_1 и конец B_1 которого совпадают с проекциями начала A и конца B силы $\vec{F}$ на эту плоскость.

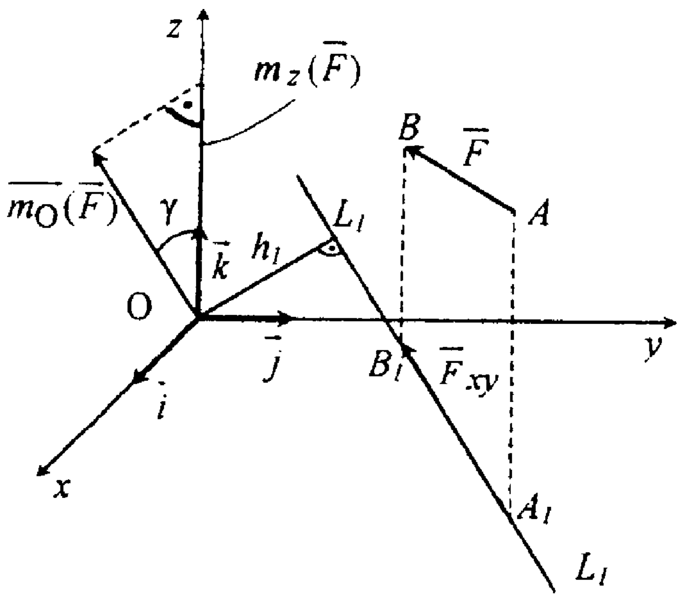


Рис. 3. 3

Моментом силы относительно оси называется момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с плоскостью. Он определяется как скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси на плечо проекции силы относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Обозначим $m_z(\vec{F})$ - момент силы $\vec{F}$ относительно оси z, проходящей через точку О, тогда в соответствии с определением и формулой (3.3)

$$m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} h_1 \qquad (3.7)$$

где F_{xy} - модуль проекции силы $\vec{F}$ на плоскость Оxy, перпендикулярную оси z; h_1 - плечо силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О пересечения оси z с плоскостью Оxy.

Условимся *знак плюс* присваивать в случае, когда, наблюдая с положительного направления оси, мы видим, что сила стремится вращать тело вокруг оси против часовой стрелки, и *знак минус* - если по часовой стрелке.

Очевидно, что при вычислении момента силы относительно оси плоскость, перпендикулярную оси z, можно проводить через любую точку на оси, так как величины, входящие в правую часть равенства (3.7), при этом не изменяются.

Момент силы относительно оси удобно вычислять, придерживаясь следующей последовательности действий:

- выбрать на оси произвольную точку и провести через нее плоскость, перпендикулярную оси;
- спроектировать силу на эту плоскость и вычислить модуль проекции силы;
- опустить перпендикуляр из точки пересечения оси с плоскостью на линию действия проекции силы и найти его длину;
- вычислить момент силы относительно оси по формуле (3.7) и определить его знак.

Из формулы (3.7) следует, что *момент сипы относительно оси равен нулю* либо в случае, когда сила параллельна оси (так как $F_{xy} = 0$), либо, когда линия действия силы пересекает ось (так как $h_1 = 0$). Другими словами момент силы относительно оси равен нулю, когда сила и ось находятся в одной плоскости.

Момент силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки О можно вычислить и по формуле (3.5), положив в ней $z = 0$ и $F_z = 0$ (см. рис. 3.3). Так как координаты x и y точки A_1, в которой приложена сила $\vec{F}_{xy}$, равны соответствующим координатам точки A приложения силы $\vec{F}$, а проекции силы $\vec{F}_{xy}$ на оси x и y - проекциям F_x и F_y силы $\vec{F}$, то

$$\vec{m}_{\text{O}x}(\vec{F}_{xy}) = (xF_y - yF_x)\,\vec{k}. \qquad (3.8)$$

Из (3.8) следует, что вектор $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F}_{xy})$ направлен так же, как вектор $\vec{k}$, т.е. по оси z. Следовательно, величина момента силы $\vec{F}_{xy}$ относительно точки

О равна проекции вектора $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F}_{xy})$ на ось *z,* а согласно (3.6) равна проекции вектора момента силы $\vec{F}$ относительно точки О на ту же ось;

$$m_{\text{O}}(\vec{F}_{xy}) = m_{\text{Oz}}(\vec{F}_{xy}) = m_{\text{Oz}}(\vec{F}) = xF_y - yF_x$$

Отсюда с учетом выражения (3.7) следует еще одно определение момента силы относительно оси:

момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектора момента силы относительно любой точки на оси.

Таким образом, момент силы $\vec{F}$ относительно оси *z,* проведенной через точку О,

$$m_z(\vec{F}) = m_{\text{O}}(\vec{F}_{xy}) = m_{\text{O}z}(\vec{F}) = m_{\text{O}z}(\vec{F})\cos\gamma\,,$$

где $m_{\text{O}}(\vec{F})$ - модуль вектора момента силы $\vec{F}$ относительно точки О; γ - угол между вектором $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})$ и положительным направлением оси (см. рис.3.3).

Аналогично для моментов силы $\vec{F}$ относительно осей *x* и *y* с началом в точке О запишем

$$m_z(\vec{F}) = m_{\text{O}x}(\vec{F}), \quad m_y(\vec{F}) = m_{\text{O}y}(\vec{F})\,.$$

Тогда, воспользовавшись формулами (3.6), можно записать моменты силы относительно осей координат в виде

$$\begin{aligned} m_x(\vec{F}) &= yF_z - zF_y; \\ m_y(\vec{F}) &= zF_x - xF_z; \\ m_z(\vec{F}) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Модуль момента силы $\vec{F}$ относительно начала координат О

$$m_{\text{O}}(\vec{F}) = \sqrt{m_x^2(\vec{F}) + m_y^2(\vec{F}) + m_z^2(\vec{F})}\,. \tag{3.10}$$

Углы, составляемые вектором $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})$ с положительными направлениями осей координат *x*, *y*, *z* (или единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ этих осей), определяются по направляющим косинусам вектора $\vec{m}_{\text{O}}(\vec{F})$:

$$\cos[\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F})\,\hat{,}\,\vec{i}\,] = \frac{m_x(\vec{F})}{m_{\mathrm{O}}(\vec{F})}; \quad \cos[\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F})\,\hat{,}\,\vec{j}\,] = \frac{m_y(\vec{F})}{m_{\mathrm{O}}(\vec{F})};$$

$$\cos[\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F})\,\hat{,}\,\vec{k}\,] = \frac{m_z(\vec{F})}{m_{\mathrm{O}}(\vec{F})}.$$

Пример. В точке A прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b, c приложена сила $\vec{F}$, направленная по диагонали AD передней грани (рис.3.4). Определить модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки О.

Совместим с точкой О начало прямоугольной системы координат Оxyz и вычислим сначала моменты силы $\vec{F}$ относительно осей координат. Для этого воспользуемся формулой (3.7) и рекомендованной последовательностью действий. Выбираем на оси x произвольную точку O_1 и проводим через нее плоскость $ABDO_1$, перпендикулярную оси x. Проектируем силу $\vec{F}$ на эту плоскость и вычисляем модуль проекции силы. В данном случае проекция силы $\vec{F}$ на плоскость $ABDO_1$ (или на любую параллельную плоскость, например Оyz) равна самой силе $\vec{F}_{yz} = \vec{F}$, а ее модуль модулю, силы $F_{yz} = F$. Опускаем из точки O_1 пересечения оси x с плоскостью $ABDO_1$ перпендикуляр на линию действия проекции силы $\vec{F}$ на плоскость $ABDO_1$, которая в нашем случае совпадает с линией действия силы $\vec{F}$, и находим длину этого перпендикуляра $h_1 = c\sin\alpha$, где $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$.

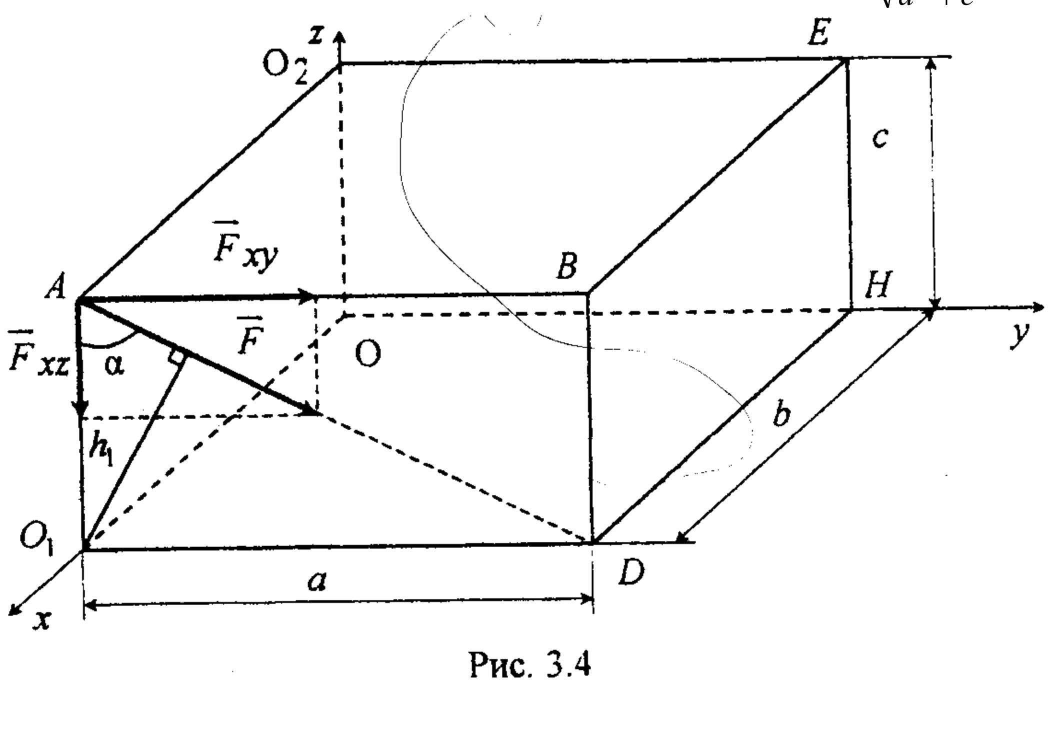


Рис. 3.4

Вычисляем момент силы $\vec{F}$ относительно оси x по формуле (3.7) и устанавливаем, что момент имеет знак минус, так как с положительного направления оси x мы увидим, как сила $\vec{F}$ стремится вращать параллелепипед вокруг оси x по часовой стрелке

$$m_x(\vec{F}) = -F\,h_1 = -F\,c\sin\alpha\,.$$

Аналогично вычисляем моменты силы $\vec{F}$ относительно осей y и z как взятые с соответствующим знаком моменты проекций силы на плоскости AO_1OO_2 $(\vec{F}_{xz})$ и $ABEO_2$ $(\vec{F}_{xy})$ соответственно перпендикулярные осям y и z относительно точек пересечения О и O_2 этих плоскостей с осями y и z

$$m_x(\vec{F}) = -F_{xz}\,b = F\,b\cos\alpha;$$

$$m_z(\vec{F}) = -F_{xy}\,b = F\,b\sin\alpha.$$

Тот же результат получим, используя формулы (3.9). Координаты точки A приложения силы $\vec{F}$

$$x = b;\quad y = 0;\quad z = c.$$

Проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси:

$$F_x = 0;\quad F_y = F\sin\alpha;\quad F_z = -F\cos\alpha\,.$$

После подстановки этих значений в формулы (3.9) находим

$$m_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y = -cF\sin\alpha;$$

$$m_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z = bF\cos\alpha;$$

$$m_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x = bF\sin\alpha.$$

По формуле (3.10) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки О равен

$$m_{\square}(\vec{F}) = \sqrt{m_x^2(\vec{F}) + m_y^2(\vec{F}) + m_z^2(\vec{F})} =$$

$$= \sqrt{F^2c^2\sin^2\alpha + F^2b^2\cos^2\alpha + F^2b^2\sin^2\alpha} =$$

$$= F\sqrt{c^2\sin^2\alpha + b^2} = F\sqrt{\frac{a^2c^2}{a^2 + c^2} + b^2}\,.$$

3.3. Сложение двух параллельных сил. Пара сил

Рассмотрим систему двух параллельных сил, приложенных в точках A и B твердого тела и направленных в одну сторону (рис.3.5).

Можно показать, что равнодействующая такой системы сил параллельна силам и направлена в ту же сторону, а ее модуль равен сумме модулей этих сил.

Линия действия равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил, т.е.

$$R = F_1 + F_2; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

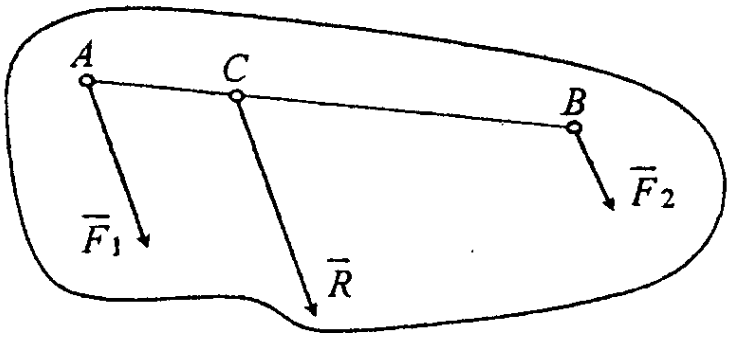


Рис.3.5

Если же к телу приложены две параллельные, противоположно направленные и не равные по модулю силы, например $F_1 > F_2$ (рис. 3.6), то их равнодействующая параллельна силам и направлена в сторону большей силы, а модуль равнодействующей равен разности модулей этих сил. Линия действия равнодействующей делит отрезок между точками приложения сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил, т.е.

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Учитывая, что $BC = AB + AC,$ из последней пропорции получим:

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB. \tag{3.11}$$

Предположим теперь, что модули параллельных и противоположно направленных сил равны: $F_1 = F_2$. Модуль равнодействующей этой системы сил $R = F_1 - F_2 = 0$, а линия действия равнодействующей согласно (3.11) бесконечно удалена от линий действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Очевидно, что такая система сил не может быть заменена одной силой и в то же время не является уравновешенной, так как силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не направлены по одной прямой. Поэтому ее рассматривают как самостоятельный силовой фактор и называют парой сил или просто парой, обозначая $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ (рис. 3.7).

Парой называется совокупность двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил , не лежащих на одной прямой. Наряду с силой пара является таким силовым фактором, упростить который нельзя. Плоскость, в которой расположены силы пары, называется *плоскостью действия пары,* а расстояние между линиями действия сил пары - *плечом d пары.*

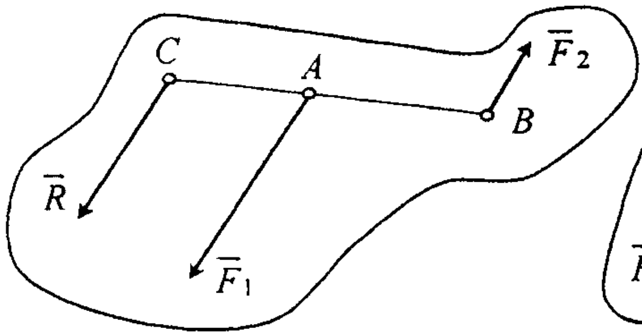


Рис. 3.6

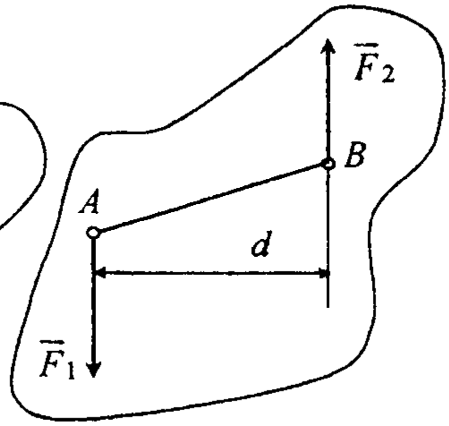


Рис. 3.7

3.4. Теорема о сумме моментов сил пары. Момент пары

Для того чтобы оценить интенсивность воздействия пары $(\vec{F}, \vec{F}')$ на твердое тело, вычислим сумму моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки O пространства (рис. 3.8).

Теорема. Сумма моментов сил, составляющих пару, относительно точки не зависит от выбора точки и равна моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

Доказательство. Проведем из точки O радиусы-векторы $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ точек приложения сил пары, а из точки B радиус-вектор $\vec{r}$ точки A. В соответствии с определением момента силы относительно точки

$$\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F} \text{ и } \vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}') = \vec{r}_B \times \vec{F}'.$$

Тогда сумма моментов сил пары относительно точки O равна

$$\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) + \vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}') = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F}'.$$

Так как $\vec{F}' = -\vec{F}$, то $\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) + \vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}') = (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$.

Учитывая, что $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$, окончательно получим

$$\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) + \vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}') = \vec{r} \times \vec{F}.$$

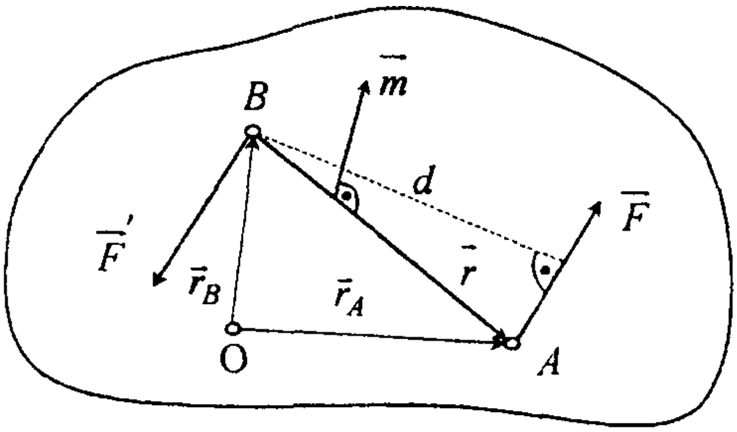


Рис. 3. 8

Моментом пары называется вектор $\vec{m}$, равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$ точки приложения одной из сил пары относительно точки приложения другой на вектор силы:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{или} \quad \vec{m} = \vec{r}\,' \times \vec{F}'$$

где $\vec{r}\,' = \overline{AB}$ на рис. 3.8 не показан.

Момент пары сил относительно любой точки равен моменту $\vec{m}$ этой пары.
Из определения векторного произведения следует, что вектор $\vec{m}$ направлен перпендикулярно плоскости действия пары (см. рис. 3.8) в ту сторону, откуда мы видим, что пара стремится вращать тело против хода часовой стрелки, а его модуль равен произведению модуля одной из сил пары на плечо *d* пары

$$m = F\, r \sin(\vec{r} \,\hat{,}\, \vec{F}) = F\, d.$$

Вектор момента пары ($\vec{m}$) полностью характеризует действие пары на твердое тело, так как направление вектора $\vec{m}$ определяет плоскость действия пары и направление, в котором пара стремится вращать тело, а модуль вектора $\vec{m}$ определяет интенсивность воздействия пары на тело.

Из определения момента пары следует, что вектор $\vec{m}$ может быть проведен перпендикулярно плоскости действия пары через любую точку этой плоскости, т.е. линия действия вектора момента пары не определена. Такие векторы называются свободными векторами. Таким образом,

вектор момента пары $\vec{m}$ свободный вектор.

С учетом этого, не доказывая другие известные теоремы о парах, сформулируем почти очевидные свойства пар.

3.5. Свойства пар

1. Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.
2. Не изменяя действия пары на твердое тело, её можно переносить в плоскости действия пары и в параллельную ей плоскость в пределах этого тела. Это следует непосредственно из определения момента пары как свободного вектора, который параллельно самому себе можно переносить в любую точку тела.
3. Пары эквивалентны, если их моменты векторно равны

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1) \sim (\vec{F}_2, \vec{F}_2), \text{ если } \vec{m}_1 = \vec{m}_2.$$

Это очевидно, так как, не изменяя состояния свободного твердого тела, действующую на него пару $(\vec{F}_1, \vec{F}_1)$ можно заменить парой $(\vec{F}_2, \vec{F}_2)$, которая при условии $\vec{m}_1 = \vec{m}_2$ имеет ту же (или параллельную ей) плоскость действия и стремится вращать тело в ту же сторону, с той же интенсивностью, как и пара $(\vec{F}_1, \vec{F}_1)$.

Отсюда, в свою очередь, следует, что не изменяя действия пары на твердое тело, можно поворачивать пару в плоскости ее действия на произвольный угол, а также менять одновременно плечо и силы пары, оставляя неизменным момент пары.

4. Произвольная система пар эквивалентна одной паре с моментом, равным векторной сумме моментов пар системы:

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + ... + \vec{m}_n .$$

Действительно, векторы моментов произвольной системы пар составляют произвольную систему свободных векторов ($\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n$). Перенося каждый из этих векторов параллельно самому себе в произвольную точку тела (рис.3.9), получим эквивалентную систему сходящихся векторов. Складывая последовательно каждую пару векторов по правилу параллелограмма, найдем результирующий вектор $\vec{m} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k$

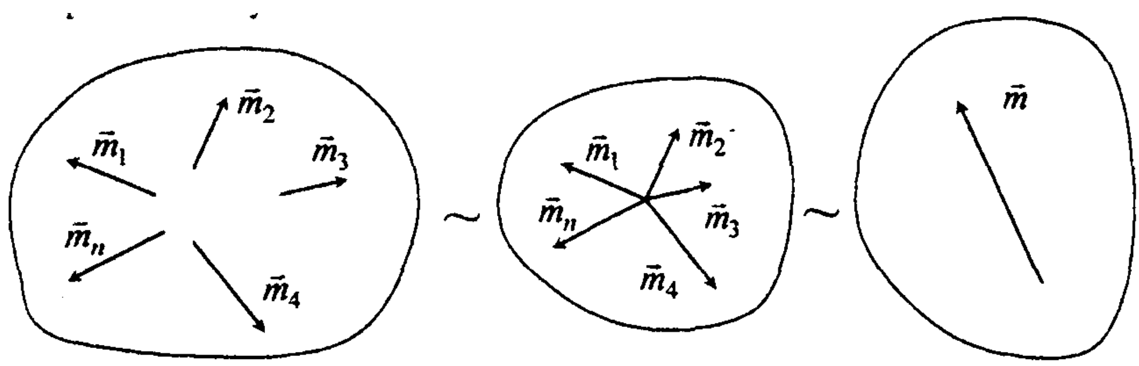


Рис. 3.9

5. Для равновесия твердого тела под действием произвольной системы пар необходимо и достаточно, чтобы векторная сумма моментов пар системы равнялась нулю.

Это следует из предыдущего. Так как произвольная система пар эквивалентна одной паре с моментом $\vec{m}$, полностью определяющим действие результирующей пары на твердое тело, то условия, при которых эта пара эквивалентна нулю, сводятся к одному векторному равенству

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k = 0 .$$

Проектируя последнее векторное равенство на оси прямоугольной системы координат, запишем условия равновесия произвольной системы пар в виде трех скалярных равенств

$$\sum_{k=1}^{n} m_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_{kz} = 0 ,$$

где m_{kx}, m_{ky}, m_{kz} - проекции вектора момента k - й пары соответственно на оси x, y, z.

Когда пары расположены в одной плоскости, векторы моментов пар, направленные перпендикулярно этой плоскости в ту или другую сторону, оказываются параллельными. В этом случае моменты пар можно складывать алгебраически.

Алгебраический момент пары вычисляется как произведение модуля одной из сил пары на плечо пары, взятое со знаком плюс, если мы видим, что пара стремится вращать тело против часовой стрелки, и минус, если по часовой стрелке $m = \pm Fd$.

Пару сил часто изображают дуговой стрелкой соответствующего направления, расположенной в плоскости пары (рис.3.10).

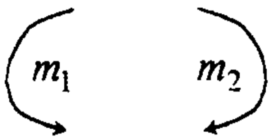


Рис. 3.10

Тогда из пп. 4 и 5, очевидно следуют пп. 6 и 7.

6. Система пар, расположенных в одной плоскости, эквивалентна одной паре с моментом, равным алгебраической сумме моментов пар системы:

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

7. Для равновесия твердого тела под действием системы пар, расположенных в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы равнялась нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = 0$$

4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Приведение системы сил к силе и паре сил

Пусть на твердое тело действует произвольная пространственная система сил ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$) Чтобы выявить характер её действия на объект, заменим эту систему сил более простой эквивалентной системой. Для этого воспользуемся методом, предложенным Пуансо (L. Poinsot, 1777 - 1859) в 1804 г. Пусть в точке A_1 твердого тела приложена сила $\vec{F}_1$ (рис. 4.1,а). Возьмем некоторую точку О в теле - будем называть ее центром приведения - и приложим к ней две силы $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_1''$ (рис. 4.1,б), равные по величине $\vec{F}_1$, имеющие линию действия, параллельную линии действия $\vec{F}_1$, и направленные в противоположные стороны. Тогда $\vec{F}_1 \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_1'')$, поскольку $(\vec{F}_1', \vec{F}_1'') \sim 0$.

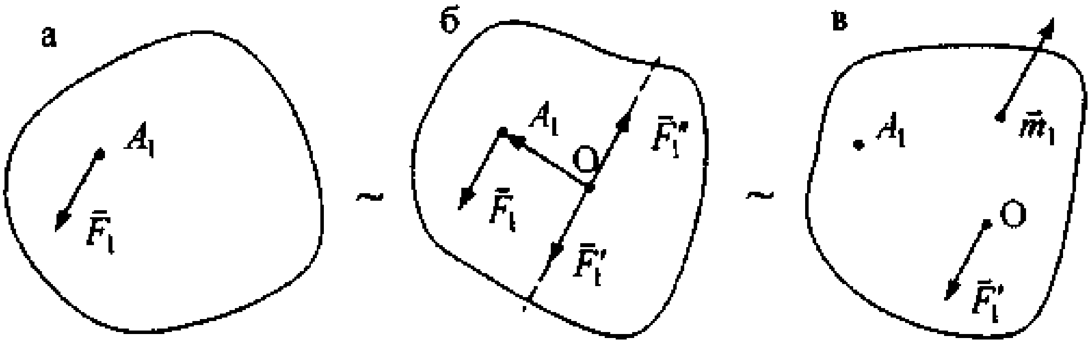


Рис. 4.1

Но, с другой стороны, совокупность сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_1'')$ мы можем рассматривать как силу $\vec{F}_1'$, приложенную к точке O, и пару сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1'')$, момент которой равен $\vec{m}_1 = \overrightarrow{OA_1} \times \vec{F}_1$ (рис. 4.1,в). Таким образом мы установили, что

сила, действующая на твердое тело, эквивалентна такой же силе, имеющей другую линию действия, и паре сил, момент которой равен произведению любой из сил, образующих пару, на расстояние между линиями действия сил.

Далее, поступая аналогичным образом с силами $\vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$, мы вместо системы сил, приложенных к различным точкам тела (рис. 4.2,а), получим сходящуюся в точке O систему сил $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$ и совокупность присоединенных пар (рис. 4.2,б), моменты которых $\vec{m}_1, \vec{m}_2, ..., \vec{m}_n$, соответственно равны моментам сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, относительно точки O. Система сил $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$ эквивалентна одной силе $\vec{F} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + ... + \vec{F}_n'$, линия действия которой проходит через точку O (рис. 4.2, в), или, что все равно с точки зрения построения векторного многоугольника,

$$\vec{F} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + ... + \vec{F}_n' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k .$$

Вектор $\vec{F}$ называют *результирующим (главным) вектором системы сил* $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$. Отметим, что вектор $\vec{F}$ не является равнодействующей заданной системы сил, поскольку одна сила $\vec{F}$ не может заменить действие на тело системы сил $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$. Система присоединенных пар эквивалентна одной паре с моментом, равным векторной сумме моментов слагаемых пар

$$\vec{M}_O = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + ... + \vec{m}_n =$$

$$= \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + ... + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k)$$

или векторной сумме моментов всех сил относительно центра приведения (рис. 4.2, в).

Вектор $\vec{M}_O$ называется *результирующим (главным) моментом системы сил* $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$ относительно центра приведения.

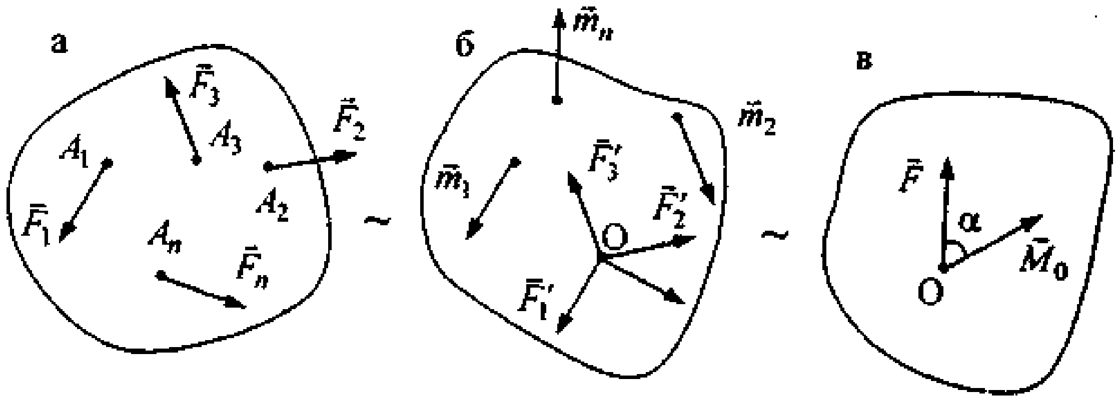


Рис. 4.2

Следовательно, действующую на тело систему сил можно заменить более простой, состоящей из трех сил, одна из которых проходит через произвольную, наперед заданную точку, а две другие представляют собой пару сил. Причем новая система оказывает такое же действие на тело, как и первоначальная.

Заданная произвольная пространственная система сил эквивалентна одной силе, приложенной в произвольной точке тела и равной векторной сумме сил, действующих на тело, и паре сил, момент которой равен векторной сумме моментов сил системы относительно той же точки.

Чтобы определить величину и направление $\vec{F}$ и $\vec{M}_{\mathrm{O}}$, воспользуемся декартовой системой координат, начало которой совместим с точкой О (центром приведения). Тогда

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \quad \vec{M}_{\mathrm{O}} = \vec{M}_{\mathrm{O}x}\vec{i} + \vec{M}_{\mathrm{O}y}\vec{j} + \vec{M}_{\mathrm{O}z}\vec{k};$$

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz};$$

$$M_{\mathrm{O}x} = m_x(\vec{F}_1) + m_x(\vec{F}_2) + ... + m_x(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k);$$

$$M_{\mathrm{O}y} = \sum_{k=1}^{n} m_y(F_k); \quad M_{\mathrm{O}z} = \sum_{k=1}^{n} m_z(F_k);$$

$$\cos(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{i}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{j}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\vec{F}\,\hat{,}\,\vec{k}) = \frac{F_z}{F};$$

$$\cos(\vec{M}_{\mathrm{O}}\,\hat{,}\,\vec{i}) = \frac{\vec{M}_{\mathrm{O}x}}{\vec{M}_{\mathrm{O}}}; \quad \cos(\vec{M}_{\mathrm{O}}\,\hat{,}\,\vec{j}) = \frac{\vec{M}_{\mathrm{O}y}}{\vec{M}_{\mathrm{O}}}; \quad \cos(\vec{M}_{\mathrm{O}}\,\hat{,}\,\vec{k}) = \frac{\vec{M}_{\mathrm{O}z}}{\vec{M}_{\mathrm{O}}};$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad M_{\mathrm{O}} = \sqrt{M_{\mathrm{O}_x}^2 + M_{\mathrm{O}_y}^2 + M_{\mathrm{O}_z}^2}.$$

Выясним теперь, как будут меняться главный вектор и главный момент при изменении центра приведения. Естественно, поскольку $\vec{F}$ представляет собой векторную сумму сил, приложенных к телу, то он не зависит от выбора и будет один и тот же для любого центра приведения. Говорят, что главный вектор $\vec{F}$ инвариантен относительно выбора центра приведения. Что касается $\vec{M}_{\mathrm{O}}$, то здесь ситуация другая: при переносе центра приведения из точки О, например, в точку О' произойдет изменение главного момента на момент присоединенной пары, т.е. на $\vec{m}_{\mathrm{O}'}(\vec{F}) = \overline{\mathrm{O'O}} \times \vec{F}$. Следовательно, главный момент относительно нового центра приведения определяется так:

$\vec{M}_{\mathrm{O}'} = \vec{M}_{\mathrm{O}'} + \vec{m}_{\mathrm{O}'}(\vec{F}) = \vec{M}_{\mathrm{O}} + \overline{\mathrm{O'O}} \times \vec{F}$.

Главный момент системы сил относительно нового центра приведения равен векторной сумме главного момента той же системы сил относительно старого центра и момента главного вектора этой системы сил, приложенного в старом центре, относительно нового центра.

4.2. Уравнения равновесия системы сил

Из последней формулы следует, что если для некоторой точки О мы получим $\vec{F}=0$ и $\vec{M}_{\mathrm{O}}=0$, то аналогичные результаты будут иметь место и для всех других центров приведения. Эти векторные равенства представляют собой условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

> *Теорема.* Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы равнялись нулю.

Таким образом, нужно доказать, что для равновесия произвольной системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\vec{F}=0; \quad \vec{M}_{\mathrm{O}}=0.$$

Необходимость. Предположим, что система сил находится в равновесии. Тогда $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n \sim 0$. Заменим систему $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, действующую на твердое тело, эквивалентной, состоящей из результирующей силы $\vec{F}$, линия действия которой проходит через точку О, и результирующей пары $\vec{P}, -\vec{P}$ с моментом $\vec{M}_{\mathrm{O}}$ (рис. 4.3,а). Учитывая, что момент пары - вектор свободный, организуем ее так, чтобы линия действия одной из сил, составляющих пару, проходила через точку О. Тогда в точке О получим две силы $\vec{F}$ и $\vec{P}$, которые эквивалентны одной силе $\vec{Q}$, равной векторной сумме $\vec{F}$ и $\vec{P}$ (рис. 4.3,6). Тогда заданная система сил привелась к двум не параллельным и не пересекающимся в пространстве силам: $\vec{Q}=\vec{F}+\vec{P}$, приложенной в точке О, и $-\vec{P}$, приложенной в некоторой точке О' (рис.4.3,в).

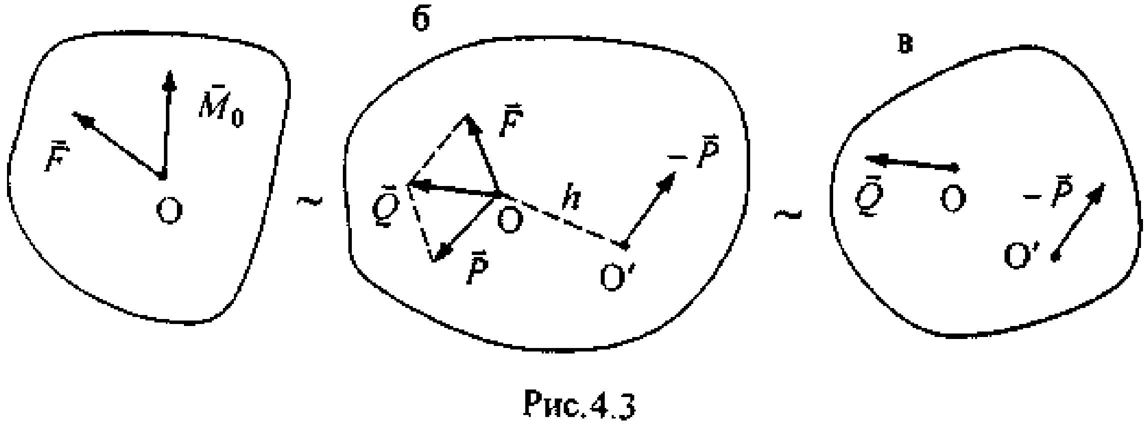


Рис.4.3

Поскольку $(\vec{Q},-\vec{P}) \sim (\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$, то $(\vec{Q},-\vec{P}) \sim 0$. Это условие выполняется лишь в том случае, если две силы равны по величине, лежат на одно прямой и направлены в противоположные стороны. Последнее имеет мест при $h=0$ $(\vec{M}_{\mathrm{O}}=0)$ и $\vec{Q}=\vec{P}$ $(\vec{F}=0)$.

Достаточность. Нужно показать, что при выполнении условий $\vec{F}=0$ и $\vec{M}_{\mathrm{O}}=0$ система сил $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$ будет находиться в равновесии. Поскольку $\vec{F}=0$ и $\vec{M}_{\mathrm{O}}=0$, то заключаем, что главный вектор и главный момент этой системы сил при всевозможных положениях центра приведения равны нулю. Следовательно, исходная система сил эквивалентна нулю Теорема доказана.

Векторные равенства $\vec{F}=0$, $\vec{M}_{\mathrm{O}}=0$ могут быть приведены к шести скалярным уравнениям; для этого необходимо воспользоваться формулами которыми аналитически определяются главный вектор и главный момент.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}=0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky}=0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz}=0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k)=0.$$

Следует отметить, что приведенная форма аналитических уравнений равновесия (три уравнения проекций сил на оси *x, y, z* и три уравнения моментов сил относительно тех же осей) не является единственно возможной. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил обеспечиваются выполнением четырех вариантов систем шести уравнений:

- три уравнения проекций сил на оси η_1,η_2,η_3 и три уравнения моментов относительно осей ζ_1,ζ_2,ζ_3;

- два уравнения проекций на оси η_1,η_2 и четыре уравнения моментов относительно осей $\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6$;

- одно уравнение проекций на ось η_1 и пять уравнений моментов относительно осей $\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6$;

- шесть уравнений моментов относительно осей $\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4,\zeta_5,\zeta_6$.

Ограничения, которые накладываются на выбор осей проекций и моментов в этих вариантах, представлены в [1].

Использование различных видов уравнений равновесия дает возможность строить систему слабо связанных и совсем несвязанных между собой уравнений, что облегчает решение задач статики.

Для частных систем сил число уравнений равновесия уменьшается, поскольку некоторые из шести уравнений могут выполняться тождественно. Отметим важнейшие из этих частных случаев.

1. Сходящаяся система сил. Выбирая точку, где сходятся линии действия сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ за центр моментов, получаем, что число уравнений равновесия сокращается до трех уравнений проекций на оси координат

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0.$$

2. Плоская система сил. Расположим ось z перпендикулярно плоскости действия сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Тогда из шести уравнений остаются три:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k) = 0.$$

3. Пространственная система параллельных сил. Направим ось z параллельно линиям действия сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, тогда уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_y(\vec{F}_k) = 0$$

будут служить уравнениями равновесия этой системы сил.

4.3. Критерии статической определимости задач статики

При рассмотрении различных систем сил (сходящейся, плоской, пространственной) речь шла о системах сил, приложенных к твердому телу. На практике мы в основном имеем дело с несвободными телами, опирающимися на другие тела или закрепленными на них. Поэтому в число сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ в уравнения равновесия войдут также неизвестные реакции связей.

Задача отыскания реакций связей будет статически определимой, если число искомых величин в уравнениях равновесия равно их количеству и определитель системы уравнений отличен от нуля. Причем в качестве неизвестных могут выступать как сами реакции (или их составляющие), так и геометрические параметры (углы, расстояния). Если число неизвестных в уравнениях больше числа уравнений равновесия, то задача отыскания реакций считается *статически неопределимой*. Очевидно, что в этом случае все неизвестные не могут быть найдены из уравнений равновесия; при решении задачи нужно учитывать обусловленные внешними нагрузками изменения формы тела.

В случае системы, состоящей из N твердых тел, соединенных между собой и имеющей связи, число уравнений равновесия увеличивается а столько раз, сколько тел входит в рассматриваемую систему. Последнюю принято называть статически определимой, если выполняется соотношение $kN-(m+L)=0$ и определитель ее системы уравнений равновесия отличен от нуля. Здесь m - число неизвестных сил взаимодействия между телами входящими в состав системы; L - число неизвестных составляющих ее реакций и k - параметр, равный 6 для пространственной задачи и 3 для плоской. При $kN-(m+L)>0$ система имеет недостаточное количество связей и является механизмом. При $kN-(m+L)<0$ система имеет избыточное количество связей и статически неопределима. Определитель системы уравнений равновесия зависит от геометрических параметров (размеров тел, и взаимного расположения, расположения связей) и при некоторых их значениях может обратиться в нуль. В этом случае статически определимая система превращается в статически неопределимую, или подвижную, хотя условие $kN-(m+L)=0$ не нарушается.

4.4. Инварианты системы сил. Приведение системы сил к канонической форме. Динамический винт. Центральная ось

Вновь возвратимся к вопросу о замене системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ более простой эквивалентной системой. Выше было установлено, что приводя $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ к произвольной точке O, получим результирующий вектор $\vec{F}$ и результирующую пару сил с моментом $\vec{M}_{\text{O}}$.

Проведем через центр приведения прямую L, параллельную вектору $\vec{F}$, и выберем на ней некоторую точку A. Имеем $\vec{F}=\vec{F}$, $\vec{M}_A=\vec{M}_{\text{O}}$. Отсюда следует, что прямая L является геометрическим местом точек, где результирующие векторы и моменты результирующих пар геометрически равны. Этим свойством не обладает никакая другая прямая, проходящая через точку O. При приведении $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ к точкам, принадлежащим к другим прямым, параллельным L, главные моменты будут различны. Причем, из множества этих прямых в теле существует одна прямая L^*, характеризующаяся тем свойством, что при выборе центра приведения на ней мы получим минимальный главный момент системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$. С этой целью рассмотрим инвариантные величины по отношению к изменению точки приведения системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$.

Первым статическим инвариантом является результирующий вектор $\vec{F} = \overrightarrow{\text{const}}$.

Вторым - скалярное произведение момента результирующей пары на результирующий вектор. Действительно, поскольку

$$\vec{M}_{\text{O}'} = \vec{M}_{\text{O}} + \overline{\text{O}'\text{O}} \times \vec{F}, \text{ то}$$

$$\vec{M}_{\text{O}'}(\vec{F}) = (\vec{M}_{\text{O}} + \overline{\text{O}'\text{O}} \times \vec{F})\vec{F} = \vec{M}_{\text{O}}\vec{F} + (\overline{\text{O}'\text{O}} \times \vec{F})\vec{F}.$$

Так как вектор $\overline{\text{O}'\text{O}} \times \vec{F} \perp \vec{F}$ - их скалярное произведение равно нулю и $\vec{M}_{\text{O}'}\vec{F} = \vec{M}_{\text{O}}\vec{F} = \text{const}$.

Из формулы $\vec{M}_{\text{O}'}\vec{F} = M_{\text{O}}F\cos(\vec{M}_{\text{O}} \,\hat{,}\, \vec{F})$ следует, что проекция момента результирующей пары на направление результирующего вектора также инвариант $\vec{M}_1 = M_{\text{O}}\cos(\vec{M}_{\text{O}} \,\hat{,}\, \vec{F}) = \text{const}$. Поскольку проекция вектора на любую ось всегда не больше модуля проектируемого вектора, то $\vec{M}_1 = \vec{M}_{\min}$. В аналитической форме указанные статические инварианты для заданной системы сил имеют вид

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \text{const};$$

$$\vec{M}_{\text{O}}\vec{F} = \vec{M}_{\text{O}x}\vec{F}_x + \vec{M}_{\text{O}y}\vec{F}_y + \vec{M}_{\text{O}z}\vec{F}_z = \text{const};$$

$$M_{\min} = \frac{\vec{M}_{\text{O}x}\vec{F}_x + \vec{M}_{\text{O}y}\vec{F}_y + \vec{M}_{\text{O}z}\vec{F}_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \text{const}.$$

Поскольку при изменении точки приведения системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ не изменяется величина проекции вектора $\vec{M}_{\text{O}}$ на направление вектора $\vec{F}$, представим момент результирующей пары $\vec{M}_{\text{O}}$ в виде векторной суммы Двух векторов $\vec{M}_{\text{O}} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, из которых один $\vec{M}_1$ параллелен главному вектору $\vec{F}$, а $\vec{M}_2$ ему ортогонален (рис. 4.4, а).

Эта операция эквивалентна разложению пары сил с моментом $\vec{M}_{\text{O}}$ на Две пары, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к векторам $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$.

Выберем силы, составляющие пару с моментом $\vec{M}_2$ равными по величине вектору $\vec{F}$, и направим одну из них вдоль прямой L противоположно $\vec{F}$ (рис. 4.4, б). Так как $(\vec{F},\vec{F}') \sim 0$, то эта система сил может быть отброшена. Тогда остаются вектор $\vec{F}''$, лежащий на произвольной прямой L^* и пара сил с моментом $\vec{M}_1$. Но момент $\vec{M}_1$ - свободный вектор и его можно перенести в любую точку прямой L^* (рис. 4.4, б).

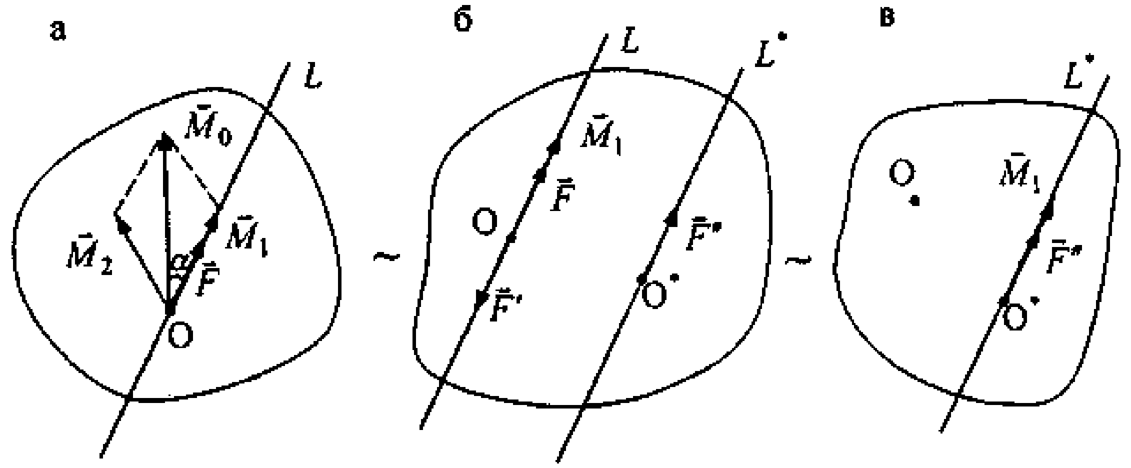


Рис.4.4

Таким образом, если за центр приведения системы сил $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n)$ выбрать точки прямой L^*, то момент результирующей пары сил окажется параллельным результирующему вектору.

Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется *динамическим винтом, или динамой*.

Приведение произвольной пространственной системы сил к динаме называется приведением к простейшей (канонической) форме, которая полностью характеризуется инвариантами. Из условия коллинеарности векторов $\vec{F}$ и $\vec{M}_1$ ($p\vec{F} = \vec{M}_1$) получим

$$\frac{M_{1x}}{F_x} = \frac{M_{1y}}{F_y} = \frac{M_{1z}}{F_z}$$

где скаляр $p = \vec{M}_O\vec{F} / \vec{F}^2$ называется параметром динамы. Этот параметр будет положительным, если $\vec{F}$ и $\vec{M}_1$ направлены в одну сторону (правый динамический винт), и отрицательным, если в разные стороны (левый динамический винт). Далее, пользуясь векторным равенством

$\vec{M}_1 = \vec{M}_O - \vec{M}_2 = \vec{M}_O - (\overrightarrow{OO^*} \times \vec{F})$ и выбрав начало системы координат в точке O, пишем окончательно

$$\frac{M_{Ox} - (yF_z - zF_y)}{F_x} = \frac{M_{Oy} - (zF_x - xF_z)}{F_y} = \frac{M_{Oz} - (xF_y - yF_x)}{F_z}.$$

Полученное уравнение определяет прямую, параллельную линии действия вектора $\vec{F}$ и проходящую через точку O* с координатами *x, y, z*. Эта прямая (т.е. геометрическое место точек в теле) называется центральной осью системы сил. Поскольку векторы $\vec{F}$ и $\vec{M}_1$ можно перенести в любую точку центральной оси, координаты *x, y, z* по сути дела являются текущими координатами точек, при приведении к которым момент результирующей пары будет коллинеарен результирующей силе.

4.5. Частные случаи приведения системы сил. Условия существования равнодействующей системы сил

В заключение рассмотрим частные случаи приведения системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ к простейшему виду, которые представлены в таблице.

Из таблицы видно, что если при приведении системы сил к некоторому центру O результирующий вектор $\vec{F}$ и результирующий момент $\vec{M}_O$ взаимно перпендикулярны, то исходная система сил эквивалентна одной силе, называемой равнодействующей и направленной вдоль центральной оси.

Другими примерами систем сил, приводящих к равнодействующей, могут служить плоская система сил ($\vec{F} \neq 0$), система сходящихся сил и система параллельных сил.

Аналитическими условиями существования равнодействующей системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ служат равенства

$$F_x M_{Ox} + F_y M_{Oy} + F_z M_{Oz} = 0;$$

$$F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0.$$

Уравнения

$$M_{Ox} - yF_z + zF_y = 0;$$

$$M_{Oy} - zF_x + xF_z = 0;$$

$$M_{Oz} - xF_y + yF_x = 0.$$

Значение параметров системы			Эквивалентная замена
Главный вектор	Главный момент	Скалярное произведение гл.вектора на гл. момент	
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$ $\left(\vec{M}_O \hat{,} \vec{F}\right) \neq \frac{\pi}{2}$	$\vec{M}_O \vec{F} \neq 0$	Динамический винт (динама): - с осью, смещенной относительно центра приведения на $M_O \sin\left(\vec{M}_O \hat{,} \vec{F}\right) \Big/ F$
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$ $\vec{M}_O \parallel \vec{F}$	$\vec{M}_O \vec{F} \neq 0$	- с осью, проходящей через центр проведения
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$ $\vec{M}_O \perp \vec{F}$	$\vec{M}_O \vec{F} = 0$	Равнодействующая сила: - проходящая через точку,смещенную относительно центра приведения на M_O / F
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O = 0$	$\vec{M}_O \vec{F} = 0$	- проходящая через центр приведения
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O \neq 0$	$\vec{M}_O \vec{F} = 0$	Пара сил
$\vec{F} \neq 0$	$\vec{M}_O = 0$	$\vec{M}_O \vec{F} = 0$	- система сил, эквивалентная нулю

определяют прямую линию, при приведении ко всем точкам которой система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ будет эквивалентна результирующему вектору $\vec{M}_O$. Эта прямая называется линией действия равнодействующей. Таким образом, равнодействующая (если она существует) заменяет систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ и имеет определенную линию действия в теле.

4.6. Теорема Вариньона

В том случае, когда система $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ приводится к равнодействующей, имеет место теорема Вариньона.

Теорема. Момент равнодействующей силы относительно произвольной точки равен векторной сумме моментов составляющих сил относительно этой же точки.

Доказательство. Пусть система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \sim \vec{R}$, приложенной в точке О. Поскольку $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O - (\overrightarrow{OO'} \times \vec{R}) = 0$, где центр приведения О есть произвольная точка, то $\vec{m}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k)$, что и доказывает теорему.

5. ПРОUЗВОЛЬНАЯ ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Система сил, линии действия которых расположены в одной плоскости произвольно, называется *произвольной плоской системой сил*.

Рассмотрим систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$, произвольно расположенных в одной плоскости. Возьмем произвольную точку О плоскости и по аналогии с предыдущим параграфом приведем заданные силы к этой точке.

В результате получим главный вектор $\vec{F} = \sum\limits_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ и пару сил с моментом

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k).$$

Поскольку в этом случае все силы и центр моментов - точка О лежат в одной плоскости, то ни одна из них не может дать проекцию на ось z, а также момент относительно осей x и y. Тогда:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}, \qquad \vec{M}_{\mathrm{O}} = \vec{M}_{\mathrm{O}z}\vec{k}$$

Следовательно, для плоской системы сил векторы $\vec{F}$ и $\vec{M}_{\mathrm{O}}$ всегда перпендикулярны друг другу, и их скалярное произведение равно нулю $\vec{M}_{\mathrm{O}}\vec{F} = 0$

Для произвольной плоской системы сил второй статический инвариант всегда равен нулю.

Учитывая, что произвольная плоская система сил есть частный случай произвольной пространственной системы сил, для нее будут справедливы все частные случаи приведения произвольной пространственной системы сил, когда второй статический инвариант равен нулю.

Далее рассмотрим условия равновесия произвольной плоской системы сил. В этом случае сумму моментов всех сил относительно оси z $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} m_z(\vec{F}_k)\right]$ можно заменить алгебраической суммой моментов этих сил относительно точки О $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} m_{\mathrm{O}}(\vec{F}_k)\right]$.

Основная форма уравнений равновесия примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_{\mathrm{O}}(\vec{F}_k) = 0.$$

Вместо точки О можно брать любую другую точку в плоскости действия сил.

Выполнение двух первых условий гарантируется тем, что система сил не имеет равнодействующей. Выполнение третьего условия означает, что система не имеет результирующей пары.

В частном случае *плоской системы параллельных сил* число уравнений равновесия сводится к двум (рис. 5.1), а именно:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_{\mathrm{O}}(\vec{F}_k) = 0.$$

Для произвольной плоской системы сил существуют еще две другие эквивалентные формы уравнений равновесия.

Вторая форма уравнений равновесия имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_C(\vec{F}_k) = 0.$$

При этом точки *A, B* и *C* не должны лежать на одной прямой. Выполнение этих условий означает, что плоская система сил не приводится к паре сил. Она также не может иметь и равнодействующей, так как в этом случае, согласно теореме Вариньона, должны одновременно соблюдаться условия

$$m_A(\vec{R}) = 0; \quad m_B(\vec{R}) = 0; \quad m_C(\vec{R}) = 0.$$

Последнее невозможно, так как линия действия равнодействующей силы не может пройти одновременно через три точки, не лежащие на одной прямой.

Для плоской системы параллельных сил вторая форма уравнений равновесия примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) = 0.$$

При этом прямая *AB* не должна быть параллельна силам, иначе при наличии равнодействующей, проходящей через точки *A* и *B,* равновесие невозможно.

Третья форма уравнений равновесия:

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0.$$

Здесь ось *x* не должна быть перпендикулярна прямой *AB* (рис. 5.2). Выполнение первых двух условий означает, что система сил не приводится к паре сил. Выполнение этих условий при наличии равнодействующей возможно, если линия действия равнодействующей совпадает с прямой, проходящей через точки *A* и *B*. Но тогда равнодействующая будет иметь проекцию на ось *x* и не будет выполняться третье условие.

Таким образом, при одновременном выполнении всех трех условий система сил не приводится ни к паре сил, ни к равнодействующей силе и находится в равновесии.

Пример. На балку *ABCDEL* (рис. 5.3), удерживающуюся в равновесии с помощью шарнирно-неподвижной опоры *A* и шарнирно-подвижной опоры *D*,действуют пара сил с моментом $m = 4\ Нм$, сосредоточенная сила $F = 2H$

под углом 30° к горизонту, на участке *BE* равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью $q_1 = 1\, Н/м$, на участке *CD* распределенная нагрузка, изменяющаяся по закону треугольника с интенсивностью $q_{2\,max} = 4\, Н/м$.

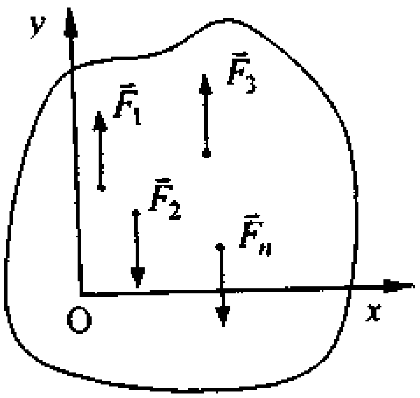


Рис. 5.1

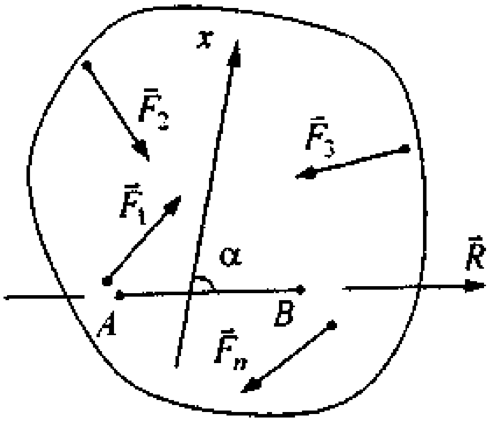


Рис. 5.2

Определить реакции опор в точках *A* и *D*.

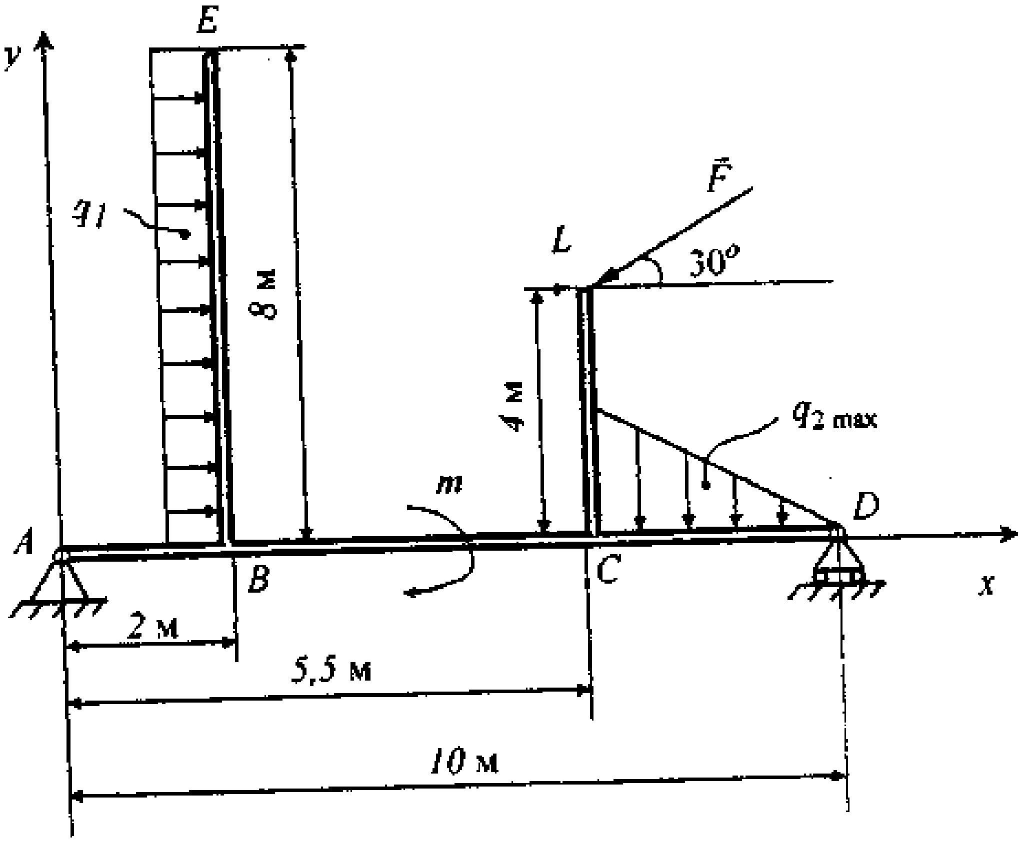


Рис.5.3

Решение:

Заменим действие распределенной нагрузки сосредоточенной силой на участках *BE* и *CD*.

$$Q_1 = q_1\, l_{BE} = 1 \cdot 8 = 8H$$

(приложена сила $\vec{Q}_1$ в середине участка *BE*).

$$Q_1 = \frac{q_1\, l_{CD}}{2} = \frac{4 \cdot 4{,}5}{2} = 9H$$

(линия действия силы $\vec{Q}_2$ отстоит от вертикальной части балки *CL* на $\frac{1}{3} l_{CD} = 1{,}5\text{м}$).

Выберем в качестве объекта равновесия всю балку *ABCDEL* (рис. 5.4). Покажем активные силы $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{F}$ и пару сил с моментом *m*. Заменяя связи соответствующими реакциями, покажем реакции связей в точке $A - \vec{X}_A, \vec{Y}_A$ и в точке $D - \vec{R}_D$.

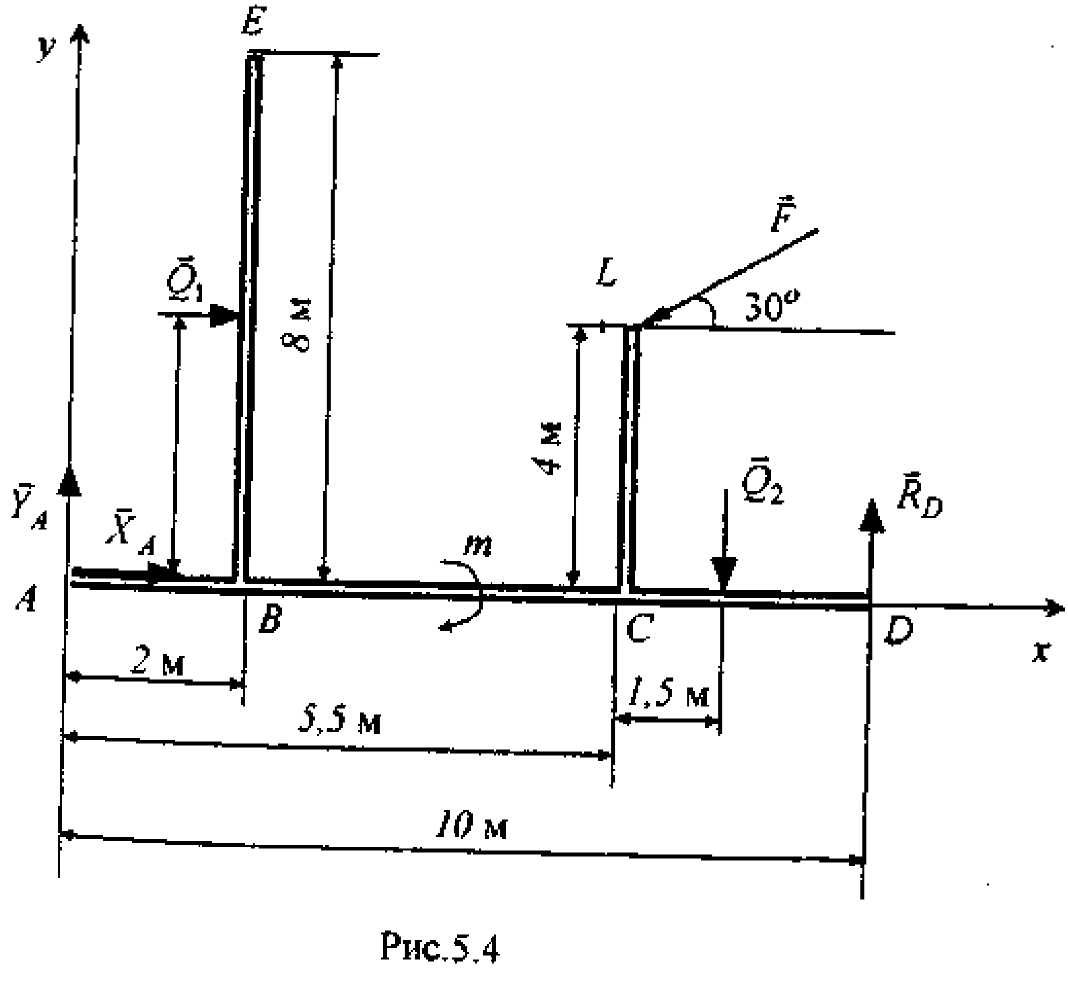


Рис.5.4

На объект действует произвольная плоская система сил. Условие равновесия, включающее три уравнения, можно составить в любой из приведенных выше форм, но наиболее целесообразной будет та, в которую войдут уравнения равновесия, содержащие по одной неизвестной величине.

Три уравнения равновесия позволят определить три неизвестные реакции $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_D$. Составим их в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_A + Q_1 - F \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0;$$

$$-Q_1 \cdot 4 - m - F \cdot \sin 30^\circ \cdot 5{,}5 + F \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 - Q_2 \cdot 7 + R_D \cdot 10 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_A - F \cdot \sin 30^\circ - Q_2 + R_D = 0.$$

Из первого уравнения находим $X_A = -6{,}27 H$, из второго уравнения $R_D = 9{,}76 H$, из третьего $Y_A = 0{,}24 H$. Знак "-" у реакции $\vec{X}_A$ означает, что истинное направление этой реакции противоположно указанному на рис. 5.4.

Проверка решения. Составим какое-либо уравнение равновесия, в которое войдут найденные неизвестные. Например, уравнение моментов относительно точки L

$$\sum_{k=1}^{n} m_L(\vec{F}_k) = 0, \quad -Y_A \cdot 5{,}5 + X_A \cdot 4 - m - Q_2 \cdot 1{,}5 + R_D \cdot 4{,}5 = 0. \qquad (5.1)$$

Подставим в уравнение (5.1) значения найденных реакций $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_D$

$$0{,}24 \cdot 5{,}5 + (-6{,}27) \cdot 4 - 4 - 9 \cdot 1{,}5 + 9{,}76 \cdot 4{,}5 = 0$$

Реакции найдены правильно. I

Пример. Две балки (рис. 5.5) *AB* и *BC* связаны между собой шарниром *B*. На балке *BC* находится шар весом *P*, удерживаемый нитью *CO*. В точке *A* балка *AB* жестко закреплена, а балка *BC* опирается на опору *D*.

Попытаемся определить реакции в точках *A* и *D* ($\vec{P}$, – $\vec{P}$), рассматривая в качестве объекта равновесия всю систему тел в целом (шар и две балки). На объект будет действовать произвольная плоская система сил, условие равновесия для нее включает три уравнения, которых недостаточно для поиска четырех неизвестных реакций.

Однако учитывая, что отдельные тела системы связаны между собой различными связями, можно заменить эти связи соответствующими реакциями и получить новые объекты равновесия, которые позволят составить дополнительные уравнения равновесия.

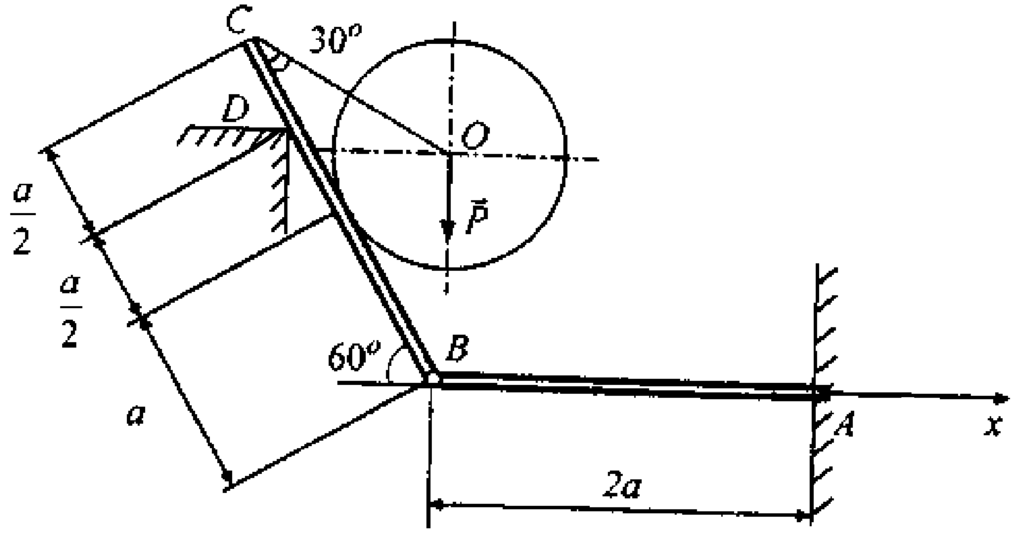


Рис.5.5

Согласно аксиоме действие равно противодействию. Поэтому силы взаимодействия между отдельными частями конструкции или телами, входящими в систему тел, равны по модулю и направлены противоположно.

Анализ задачи на статическую определенность рациональнее делать на стадии выделения объектов равновесия, выбрав для всех объектов единую систему координат и составив единую систему уравнений равновесия. После этого можно приступать к поиску неизвестных.

Определим в условиях данной задачи реакции внешних связей опоры D и заделки A, а также реакции промежуточного шарнира B, нити OC и балки BC.

Для этого рассмотрим равновесие шара (рис. 5.6), балки BC (рис. 5.7) и балки AB (рис. 5.8), учитывая, что $\vec{S} = -\vec{S}',\ \vec{N} = -\vec{N}'$.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,\quad N\cos 30^\circ - \cdot S\cos 30^\circ = 0. \tag{5.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0,\quad -N\sin 30^\circ - \cdot S\sin 30^\circ + P = 0. \tag{5.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_B(\vec{F}_k) = 0,\quad N'\cdot a - R_D\cdot 1.5a - S'\cdot 2a\sin 30^\circ = 0. \tag{5.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_B - N' \cos 30^\circ + R_D \cos 30^\circ + S' \cos 30^\circ = 0. \tag{5.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_B + N' \sin 30^\circ - R_D \sin 30^\circ + S' \sin 30^\circ = 0. \tag{5.6}$$

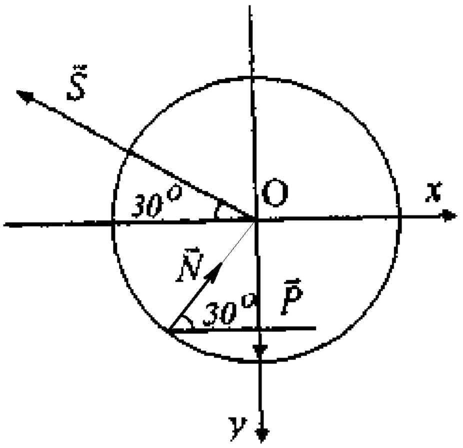


Рис.5.6

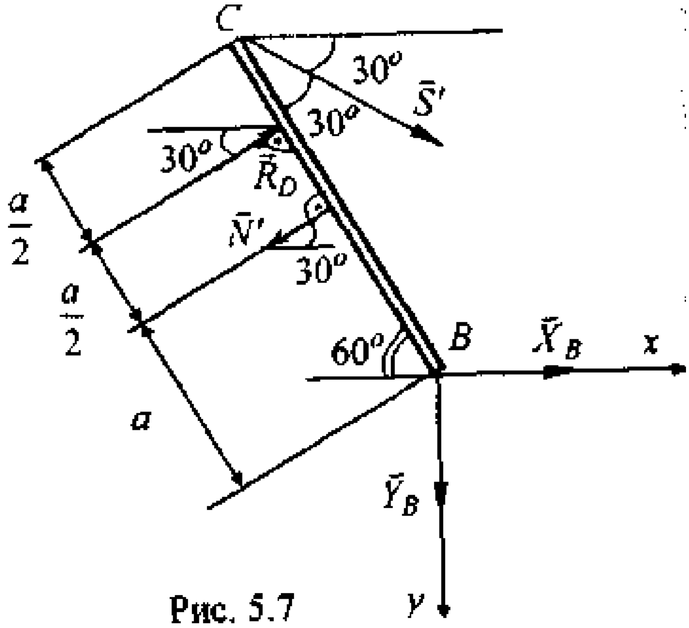


Рис. 5.7

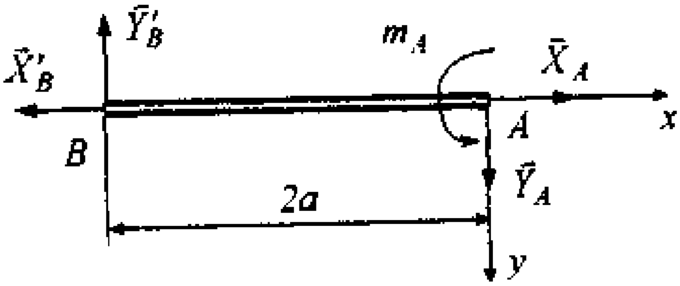


Рис.5.8

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad -Y'_B \cdot 2a + m_A = 0. \tag{5.7}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad -Y'_B + Y_A = 0. \tag{5.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_A - X'_B = 0. \tag{5.9}$$

Получена система из восьми уравнений, в которые входят следующие 8 неизвестных: реакции опоры D ($\vec{R}_D$), шарнира B ($\vec{X}_B, \vec{Y}_B$), заделки A ($\vec{X}_A, \vec{Y}_A, m_A$), нити OC ($\vec{S}$) и нормальная реакция балки BC ($\vec{N}$).

Из уравнения (5.2) имеем $N = S$, подставляя в уравнение (5.3), получим: $N = S = P$. Полученные значения N и S подставим в выражение (5.4), тогда $R_D = 0$.

Подставляя в уравнение (5.5) значение $R_D = 0$, находим, что $X_B = 0$. Далее из уравнения (5.6) выражаем $Y_B = -P$. Делаем подстановку значения $Y_B (Y'_B = Y_B)$ уравнение (5.7), из которого получим $m_A = -P \cdot 2a$ a. Учитывая, что $X'_B = X_B$, из уравнений (5.8) и (5.9) получаем $Y_A = -P$, $X_A = 0$.

Отрицательные знаки при неизвестных Y_A, Y_A, m_A свидетельствуют о том, что истинное направление соответствующей реакции противоположно указанному на схеме.

При необходимости как и в предыдущем примере можно сделать проверку правильности решения задачи.

6. ТРЕНИЕ

6.1. Понятие о трении покоя и трении движения (скольжения)

Опыт показывает, что при стремлении двигать одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая силой трения скольжения.

Возникновение трения обусловлено прежде всего шероховатостью поверхностей, создающей сопротивление перемещению, наличием сцепления у прижатых друг к другу тел, деформацией тел и т. д.

Изучение всех особенностей явления трения представляет собой довольно сложную физическую проблему, рассмотрение которой выходит за Рамки курса теоретической механики.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем общих закономерностей, называемых законами трения, которые с Достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления трения.

Основные законы трения при покое можно сформулировать следующим образом:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого. В плоскости соприкосновения тел возникает сила трения (или сила сцепления), которая может принимать любые значения от 0 до $\left(F_{тр}\right)_{пр}$, называемой *предельной силой трения.*

2. Предельная сила трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление или нормальную реакцию $\left(F_{тр}\right)_{пр} = f_0 N$.

Статический коэффициент трения f_0 - величина безразмерная. Он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел, чистоты обработки и т.д.

3. Величина предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров (площади) соприкасающихся поверхностей.

Из первых двух законов следует, что при покое

$$F_{тр} \le \left(F_{тр}\right)_{пр} \text{ или } F_{тр} \le f_0 N.$$

Все изложенное выше относится к силе трения при покое. При движении тела сила трения равна произведению динамического коэффициента трения на нормальное давление $F_{тр} \le fN$. Эта сила называется силой трения скольжения.

Динамический коэффициент трения скольжения f $(f < f_0)$, как и f_0, является величиной безразмерной и определяется опытным путем. Значение коэффициента зависит не только от материала и состояния поверхностей, но и от скорости движущихся тел. В большинстве случаев с увеличением скорости коэффициент *f* сначала убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение.

6.2. Реакция шероховатой поверхности. Угол трения

Реакция шероховатой поверхности слагается из двух составляющих: из нормальной реакции $\vec{N}$ и перпендикулярной ей силы трения $\vec{F}_{тр}$ (рис.6.1). Следовательно, реакция поверхности $\vec{R}$ будет отклонена от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до $\left(F_{тр}\right)_{пр}$ угол μ между $\vec{R}$ и нормалью изменяется от нуля до некоторого предельного значения μ_0. Этот угол μ_0 называется *углом трения.* Из рисунка видно, что

$$\operatorname{tg}\mu_0 = \frac{(F_{mp})_{np}}{N} = f_0.$$

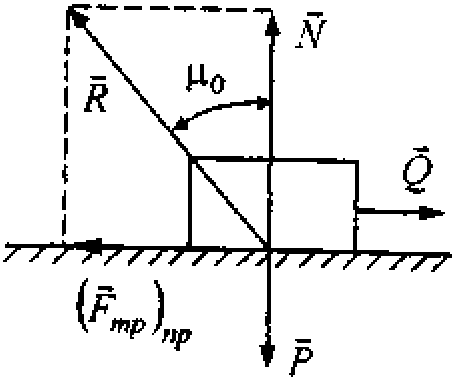


Рис.6.1

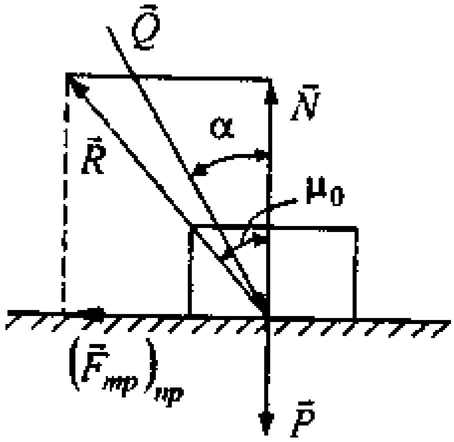


Рис.6.2

Если на тело действуют несколько сил (рис. 6.2), равнодействующая которых $\vec{Q}$ направлена под углом α к нормали, то для скольжения тела необходимо, чтобы $Q\sin\alpha \geq (F_{mp})_{np}$. Так как $(F_{mp})_{np} = f_0 N = Q f_0 \cos\alpha$, то $Q\sin\alpha \geq Q f_0 \cos\alpha$ или $tg\,\alpha \geq f_0$; $tg\,\alpha \geq tg\,\mu_0$; Откуда $\alpha \geq \mu_0$, следовательно,

если сила действует внутри угла трения, то как бы ни была велика по модулю эта сила, скольжение тела по плоскости не произойдет.

Этим условием объясняется явление *самозаклинивания* или *самоторможения* тел.

6.3. Равновесие тел при наличии трения

Изучение равновесия тел с учетом сил трения сводится обычно к рассмотрению предельного положения равновесия, когда сила трения достигает своего наибольшего значения. При этом реакция шероховатой поверхности представляется двумя составляющими $-\vec{N}$ и $\vec{F}_{mp}$. Затем составляют обычные условия равновесия статики, подставляют в них вместо F_{mp} величину $f_0 N$ и, решая полученные уравнения, определяют искомые величины.

Если в задаче требуется определить все возможные положения равновесия тел, то для решения необходимо также рассмотреть предельное положение равновесия и из соответствующих уравнений равновесия найти значения искомых величин в предположении, что сила трения изменяется от нуля до предельного своего значения $\left(F_{mp}\right)_{np}$.

Заметим, что в положениях равновесия, которые не являются предельными, сила трения $F_{mp} < \left(F_{mp}\right)_{np}$ и ее величина должна определяться из уравнений равновесия как неизвестная.

Пример. По лестнице (рис. 6.3), длина которой l, приставленной к вертикальной стене под углом α, поднимается человек весом P. Пренебрегая весом лестницы, определить, на какое максимальное расстояние ***a*** он может подняться по лестнице? Коэффициент трения лестницы о стену f_1, о пол f_2.

За объект равновесия выбираем лестницу с человеком. На этот объект действуют силы: $\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{N}_B$ и силы трения $\vec{F}^*_{mp}, \vec{F}_{mp}$, направленные против возможного перемещения концов лестницы A и B. Причем

$$-\vec{F}^*_{mp} = f_1 N_A; \quad F_{mp} = f_2 N_B.$$

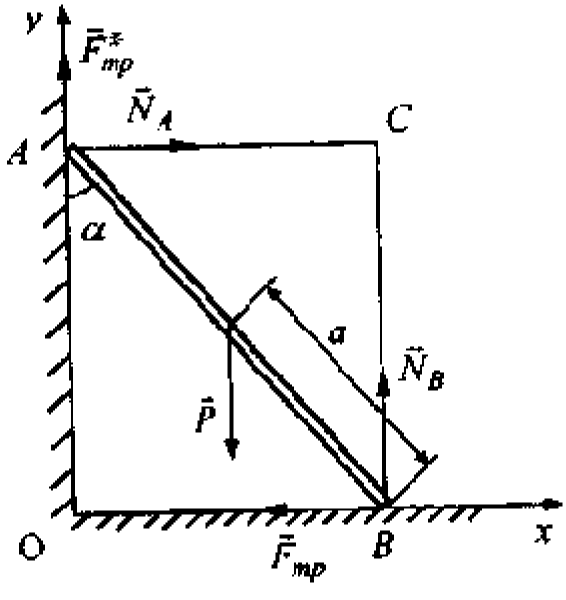


Рис. 6.3

Составим уравнения равновесия

$$\sum_{k=1}^{n} m_C(F_k) = 0; \; -F^*_{mp} \cdot l \sin\alpha + P a \sin\alpha - F_{mp} l \cos\alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad N_A - F_{mp} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad F^*_{mp} - P + N_B = 0$$

$$-f_1 N_A l \sin\alpha + Pa \sin\alpha - f_2 N_B l \cos\alpha = 0,$$

или
$$N_A - f_2 N_B = 0;$$
$$f_1 N_A - P + N_B = 0$$

Из этих уравнений получаем

$$N_A = P\frac{f_2}{1+f_1 f_2}; \qquad N_B = \frac{P}{1+f_1 f_2};$$

$$a = l\frac{f_2}{1+f_1 f_2}(f_1 + ctg\alpha).$$

6.4. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим круглый цилиндрический каток (рис. 6.4,а) радиусом *R* и весом *P,* лежащий на горизонтальной негладкой (шероховатой) плоскости. Приложим к оси катка силу $\vec{Q}$, меньшую $(F_{тр})_{пр}$).

Тогда в точке касания *A* возникает сила трения $\vec{F}_{тр}$ по модулю равная $\vec{Q}$, которая будет препятствовать скольжению цилиндра по плоскости. Если считать нормальную реакцию $\vec{N}$ тоже приложенной в точке *A,* то она уравновесит силу $\vec{P}$, а силы $\vec{Q}$ и $\vec{F}_{тр}$ образуют пару, вызывающую качение цилиндра. При такой схеме качение должно начаться, как видим, под действием любой, сколь угодно малой силы $\vec{Q}$.

Истинная картина, как показывает опыт, выглядит иначе. Объясняется это тем, что фактически вследствие деформаций тел касание катка с поверхностью происходит вдоль некоторой площадки *AB* (рис.6.4,б).

При действии силы $\vec{Q}$ интенсивность давления у края *A* убывает, а у края *B* возрастает. В результате реакция $\vec{N}$ оказывается смещенной в сторону действия силы $\vec{Q}$. С увеличением $\vec{Q}$ это смещение растет до некоторой предельной величины *k.* Таким образом, в предельном положении равновесия на каток будет действовать пара ($\vec{Q}^*, \vec{F}_{тр}$) с моментом $Q^* \cdot R$ и уравновешивающая ее пара ($\vec{N}, \vec{P}$) с моментом $N \cdot k$.

Из равенства моментов находим $Q^{*}R = N\,k$ или $Q^{*} = \dfrac{k}{R}N.$

Пока $Q < Q^{*}$ каток находится в покое; при $Q > Q^{*}$ начинается качение.

Параметр k, называемый *коэффициентом трения качения,* имеет размерность длины. Значение коэффициента k зависит от материала тел и определяется опытным путем. Отношение $\dfrac{k}{R}$ для большинства материалов значительно меньше статического коэффициента трения f_0. Поэтому в технике, когда это возможно, стремятся заменить скольжение качением (колеса, катки, шариковые подшипники и т.д.).

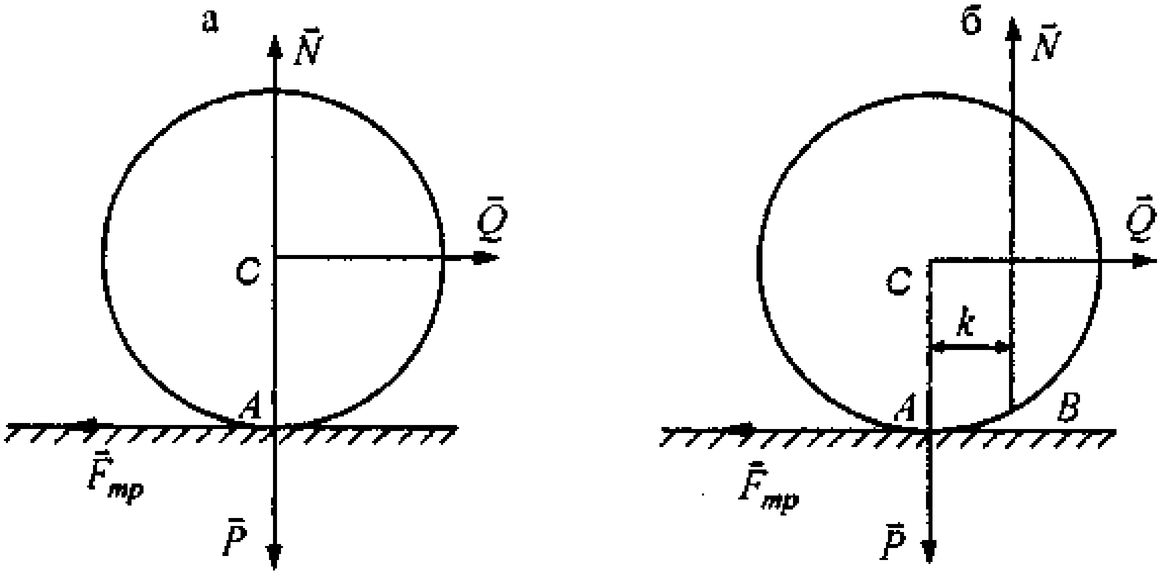


Рис.6.4

7. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ ТЕЛ

7.1. Центр параллельных сил

Пусть к твердому телу приложена система параллельных сил $\{F_k\},\ k = \overline{1,n}.$

Выберем единичный вектор $\vec{e}, e = 1$ такой, что $\vec{F}_k = F_k^{*}\vec{e},\ k = \overline{1,n}$. Очевидно, $F_k^{*} = \vec{F}_k\vec{e}$ - проекция вектора $\vec{F}_k$ на направление, определяемое вектором $\vec{e}$.

Допустим, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{F}_k \neq 0$. Тогда система параллельных сил приводится к равнодействующей $\vec{R}$.

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k = \vec{e}\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,*}\right),$$

приложенной в любой точке тела, принадлежащей прямой L - линии действия равнодействующей (рис. 7.1).

Теперь введем понятие центра параллельных сил.

Точка $C \in L$ называется *центром параллельных сил,* если при повороте всех сил $\left\{\vec{F}_k\right\}$ вокруг точек приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол α равнодействующая приложенная в точке *C,* также повернется на угол α и в том же направлении.

> *Теорема.* Если система параллельных сил приводится к равнодействующей, то центр параллельных сил существует, принадлежит прямой L и определен радиусом-вектором $\vec{r}_c$.

$$\vec{r}_c = \left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,*}\vec{r}_k\right)\Bigg/\left(\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{\,*}\right) \tag{7.1}$$

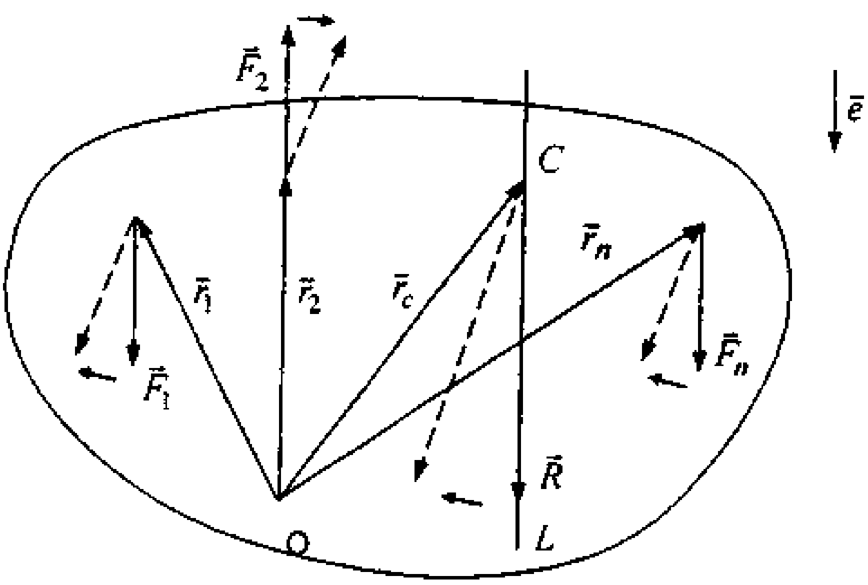


Рис. 7.1

Доказательство. Опирается на теорему Вариньона: если для заданной системы сил существует равнодействующая, то ее момент относительно произвольной точки О равен векторной сумме моментов исходных сил относительно этой же точки.

В данном случае, по предположению, равнодействующая существует и

$$\vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{R}) = \vec{r}_c \times \vec{R} = \vec{r}_c \times \vec{e}\left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,*}\right);$$

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \vec{F}_k^{\,*}\right) \times \vec{e}.$$

Следовательно,

$$\left[\vec{r}_c\left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,*}\right) - \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \vec{F}_k^{\,*}\right] \times \vec{e} = 0. \qquad (7.2)$$

Поскольку направление вектора $\vec{e}$ произвольное (поворачиваем силы на угол α), то соотношение (7.2) справедливо только в случае

$$\vec{r}_c\left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,*}\right) - \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \vec{F}_k^{\,*} = 0.$$

Отсюда и получаем формулу (7.1).

Таким образом, на линии действия равнодействующей существует только одна точка *C,* удовлетворяющая определению центра параллельных сил.

7.2. Центры тяжести тел

Из практического опыта известно, что каждое тело имеет центр тяжести и задача заключается в нахождении радиуса-вектора этой точки тела.

Если разбить тело весом P на n элементарных объемов с весами $\{\Delta P_k\}$, $k = \overline{1\, n}$ и пренебречь размерами тела по сравнению с размерами Земли, то силы тяжести, действующие на каждый элементарный объем, можно считать параллельными друг другу. Иначе говоря, для каждого разбиения тела получаем систему пространственно распределенных параллельных сил тяжести, для которой будет определен центр параллельных сил - точка C_n.

Центром тяжести тела будем называть предел, если он существует, последовательности точек $\{C_n\}$ при $n \to \infty$, т.е. точка $C = \lim\limits_{n\to\infty} \{C_n\}$ - центр тяжести тела. Для заданного разбиения тела имеем согласно формуле (7.1) радиус-вектор

$$\vec{r}_c^{(n)} = \left(\sum_{k=1}^{n} P_k \vec{r}_k\right) \Bigg/ \left(\sum_{k=1}^{n} \Delta P_k\right).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ (элементарный объем стягивается в точку), получаем радиус-вектор центра тяжести тела (при условии существования предела)

$$\vec{r}_c = \lim_{n\to\infty} \vec{r}_c^{(n)} = \frac{1}{p} \iiint\limits_D \vec{r}\, dP,$$

где D - область, ограничивающая тело; $\vec{r}$ - радиус-вектор точки тела; $dP = gdm$; g - ускорение силы тяжести; $dm = \gamma dV$; γ - плотность распределения массы; dV - дифференциал объема.

В проекциях на оси координат $\vec{r}_c(x_c, y_c, z_c)$,

$$x_c = \frac{1}{p} \iiint\limits_D x\, dP; \quad y_c = \frac{1}{p} \iiint\limits_D y\, dP; \quad z_c = \frac{1}{p} \iiint\limits_D z\, dP; \qquad (7.3)$$

где $\quad P = \iiint\limits_D dP;.$

В частности, для однородной пластины, находящейся в плоскости О*xy*, координаты центра тяжести находятся по формулам:

$$x_c = \frac{1}{S} \iint\limits_D x dS; \quad y_c = \frac{1}{S} \iint\limits_D y dS.$$

Так как $P = g\gamma S$, dP - $g\gamma\, dS$, S - площадь пластины.

Пример. Найти координаты центра тяжести однородной пластины в форме полукруга радиусом *r* (рис. 7.2).

В силу симметрии фигуры относительно оси Оy, $x_c = 0$ а $y_c = \frac{1}{S} \iint\limits_D y dS$. Здесь $S = \frac{\pi r^2}{2}$; $y = \rho \sin\varphi$; $dS = \rho d\rho d\varphi$ - дифференциал площади в полярной системе координат.

Имеем: $y_C = \frac{2}{\pi r^2}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{r}\rho^2 d\rho = \frac{2}{\pi r^2}2\frac{r^3}{3} = \frac{4}{3\pi}r$.

В итоге получим $x_C = 0;\ y_C = \frac{4}{3\pi}r$ - координаты центра тяжести.

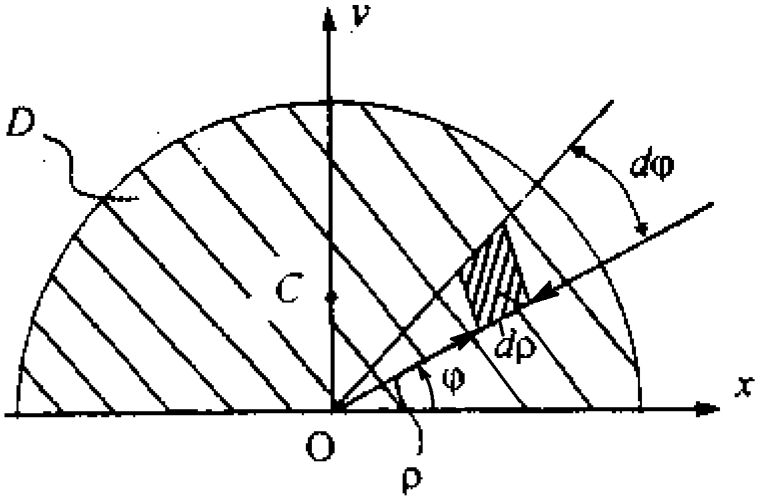


Рис. 7.2

7.3. Метод отрицательных весов

На практике часто приходится находить центры тяжести тел с вырезами (например сложных деталей) и поэтому вычисления по формулам (7.3) весьма трудоемки. Рассмотрим способ, позволяющий существенно упростить процедуру нахождения координат центра тяжести однородного тела с вырезами.

Пусть однородное тело весом P имеет m, $m>1$ вырезов (пустот) и им соответствуют области $\{D_k\}, k=\overline{1,m}$ (рис. 7.3). Допустим, что вырезов нет, тогда гипотетическое тело имеет вес

$$P_0 = P + \sum_{k=1}^{m} P_k,$$

где P_k - вес, соответствующий области D_k.

Найдем радиус-вектор центра тяжести такого тела

$$\vec{r}_C^{\,0} = \frac{1}{P_0}\left[\vec{r}_C P + \sum_{k=1}^{m}\vec{r}_k P_k\right], \tag{7.4}$$

где $\vec{r}_c$ - искомый радиус-вектор центра тяжести тела с вырезами; $\vec{r}_c^{\,0}$ - радиус-вектор центра тяжести тела без вырезов; $\vec{r}_k$ - радиус-вектор центра тяжести области D_k.

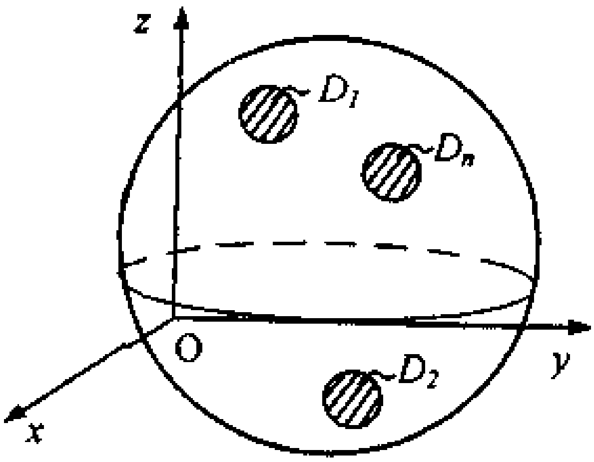


Рис. 7.3

Из формулы (7.4) находим

$$\vec{r}_c = \frac{1}{P_0}\left[\vec{r}_c^{\,0} P_0 + \sum_{k=1}^{m} \vec{r}_k P_k\right] \tag{7.5}$$

Порядок вычислений:

- считая пустоты заполненными, находим центры тяжести областей $\{D_k\}$, т.е. $\{\vec{r}_k\}$;
- вычисляем вес тела без вырезов P_0

$$P_0 = P + \sum_{k=1}^{m} P_k$$

и находим $\vec{r}_c^{\,0}$. По формуле (7.5) находим $\vec{r}_c$.

Пример. Необходимо найти координаты центра тяжести круговой однородной пластины с прямоугольным вырезом (рис.7.4). Точка A - центр тяжести прямоугольного выреза, которая имеет координаты

$$x_A = \frac{a_1 + a_2}{2}; \qquad y_A = \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

$P_1 = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)\gamma g$ - вес выреза, а $P_0 = S_0 g\gamma$ - вес пластины без выреза, где $S_0 = \pi r^2$.

Поскольку $\vec{r}_c^{\,0} = (0,0)$ □ $P = P_1 = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)\gamma g$ пластины с вырезом, то

$$x_c = \frac{1}{P}\left[0P_0 - x_A P_1\right] = -x_A\,\frac{P_1}{P} = -\frac{\left(a_2^2 - a_1^2\right)\left(b_2 - b_1\right)}{2\left(\pi r^2 - \left(a_2 - a_1\right)\left(b_2 - b_1\right)\right)};$$

$$y_c = \frac{1}{P}\left[0P_0 - y_A P_1\right] = -y_A\,\frac{P_1}{P} = -\frac{\left(a_2 - a_1\right)\left(b_2^2 - b_1^2\right)}{2\left(\pi r^2 - \left(a_2 - a_1\right)\left(b_2 - b_1\right)\right)}.$$

координаты точки C - центра тяжести пластины с вырезом.

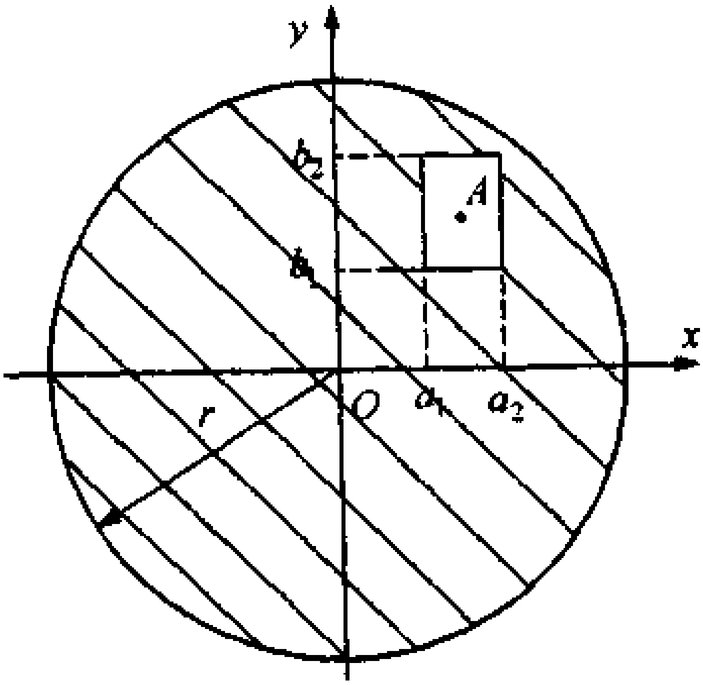


Рис. 7.4

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К РАЗДЕЛУ "СТАТИКА"

1. Основные понятия и аксиомы

1. Что изучается в статике?
2. Что называется материальной точкой?
3. Что называется механической системой?
4. Какое материальное тело называется абсолютно твердым?
5. Мерой чего является сила?
6. Чем характеризуется сила?
7. Какие системы сил называются эквивалентными?
8. Какая сила называется равнодействующей?
9. Какая система сил называется уравновешенной?
10. Какие силы относятся к внешним, а какие к внутренним?
11. Как формулируются аксиомы статики?
12. На каком основании вектор силы считается скользящим?
13. В чем отличие свободного материального тела от несвободного?
14. Что называется связью?
15. Что называется реакцией связи?
16. Какие силы относятся к активным?
17. Какие основные виды связей вы знаете?
18. Как направлены реакции основных видов связей?

2 . Система сходящихся сил

1. Какая совокупность сил называется системой сходящихся сил?
2. В чем заключается геометрический способ сложения сходящихся сил?
3. Чему равна проекция силы на ось?
4. Что называется проекцией силы на плоскость?
5. Чему равны проекции равнодействующей на координатные оси?
6. Как аналитически определяются модуль и направление равнодействующей?
7. В чем заключается условие равновесия системы сходящихся сил в геометрической форме?
8. Как формулируются аналитические условия равновесия системы сходящихся сил?

9. Как формулируется теорема о трех непараллельных силах?

3 . Теория моментов

1. Что называется моментом силы относительно точки?
2. Как направлен вектор момента силы относительно точки?
3. Что называется плечом силы относительно точки?
4. Как определяется алгебраический момент силы относительно точки?
5. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
6. Что называется моментом силы относительно оси?
7. В какой последовательности следует вычислять момент силы относительно оси?
8. Когда момент силы относительно оси равен нулю?
9. Какой зависимостью связаны момент силы относительно оси и момент силы относительно произвольной точки на оси?
10. Как вычисляются моменты силы относительно осей прямоугольной системы координат?
11. Какая система сил называется парой?
12. Что называется моментом пары?
13. Как направлен вектор момента пары?
14. На каком основании вектор момента пары считается свободным?
15. Чему равен алгебраический момент пары?
16. Как формулируются основные свойства пар?

4 . Произвольная система сил в пространстве

1. Что следует добавить к силе после ее параллельного переноса в другую точку тела, чтобы не изменить действие силы на тело?
2. Чему равен главный вектор системы сил?
3. Чему равен главный момент системы сил относительно центра приведения?
4. Чем отличается главный вектор произвольной системы сил от равнодействующей?
5. В чем заключается закон эквивалентной замены произвольной системы сил более простой системой сил?
6. Как изменится главный вектор системы сил при изменении центра приведения?
7. Как изменится главный момент системы сил при изменении центра приведения?

8. Как формулируются необходимые и достаточные условия равновесия произвольной системы сил?
9. В каких формах могут быть записаны аналитические условия равновесия произвольной системы сил?
10. Какой вид имеют условия равновесия пространственной системы параллельных сил?
11. Какие задачи статики называются статически определимыми, какие статически неопределимыми?
12. Какие вы знаете статические инварианты?
13. Какая совокупность сил называется динамой?
14. При каких условиях система сил приводится к равнодействующей?
15. Как формулируется теорема Вариньона о моменте равнодействующей?

5. Произвольная плоская система сил

1. Может ли произвольная плоская система сил быть приведена к динаме?
2. Какой вид имеет каждая из трех форм уравнений равновесия произвольной плоской системы сил?
3. Какой вид имеет каждая из двух форм уравнений равновесия плоской системы параллельных сил?
4. Какие ограничения и в каких формах уравнений равновесия накладываются на выбор соответствующих осей и точек?

6. Трение

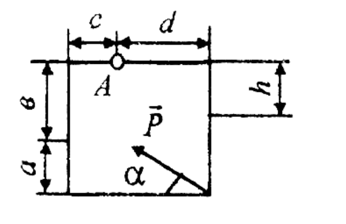
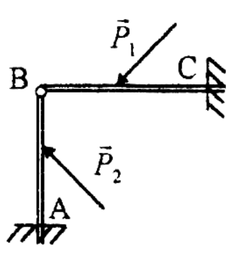
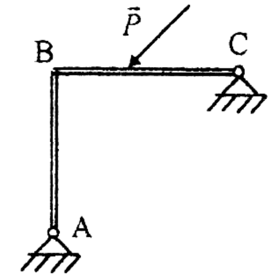
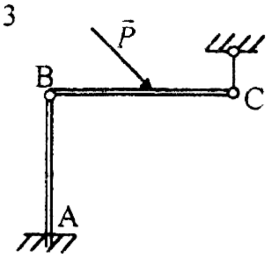
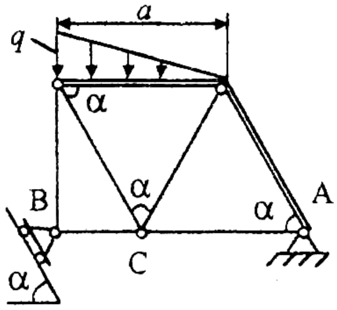
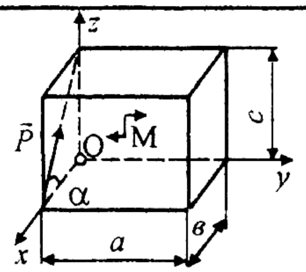
1. В каких пределах изменяется сила трения при покое?
2. Какой угол называется углом трения?
3. Чем объясняется явление самоторможения тел?
4. В каких единицах измеряется коэффициент трения качения?

7. Центр параллельных сил. Центры тяжести тел

1. Каким свойством обладает центр параллельных сил?
2. По какой формуле вычисляется радиус-вектор центра параллельных сил?
3. Какая точка называется центром тяжести тела?
4. По каким формулам вычисляются декартовы координаты центра тяжести тела?
5. В чем заключается идея метода отрицательных весов?

ТЕСТ К РАЗДЕЛУ «СТАТИКА»

К каждому заданию даны три ответа, один из которых верный

C1	Определить момент силы $\vec{P}$ относительно точки A			
		1 $M_A(\vec{P}) =$ $= P\cos\alpha\cdot d -$ $- P\sin\alpha(a+в)$	2 $M_A(\vec{P}) =$ $= P\sin\alpha\cdot d -$ $- P\cos\alpha(a+в)$	3 $M_A(\vec{P}) =$ $= P\cos\alpha\times$ $\times(a+в+c)$
C2	Указать статически определимую конструкцию			
	1 	2 	3 	
C3	Определить усилие в стержне ВС от действия распределенной нагрузки интенсивностью q, $\alpha = 60^o$			
		1 $S = \frac{q\cdot a\cdot 2}{3\sqrt{3}}$	2 $S = -\frac{7q\cdot a}{18}\sqrt{3}$	3 $S = -\frac{2q\cdot a}{3}$
C4	Определить модуль главного момента системы сил, состоящей из $P = 3H$ и пары сил с моментом $M = 4H\cdot м$ относительно центра приведения O. Угол $\alpha = 30^0$, $a = 3м$, $в = 2м$			
		1 $M_0 = \sqrt{10}H\cdot м$	2 $M_0 = 5H\cdot м$	3 $M_0 = 3H\cdot м$

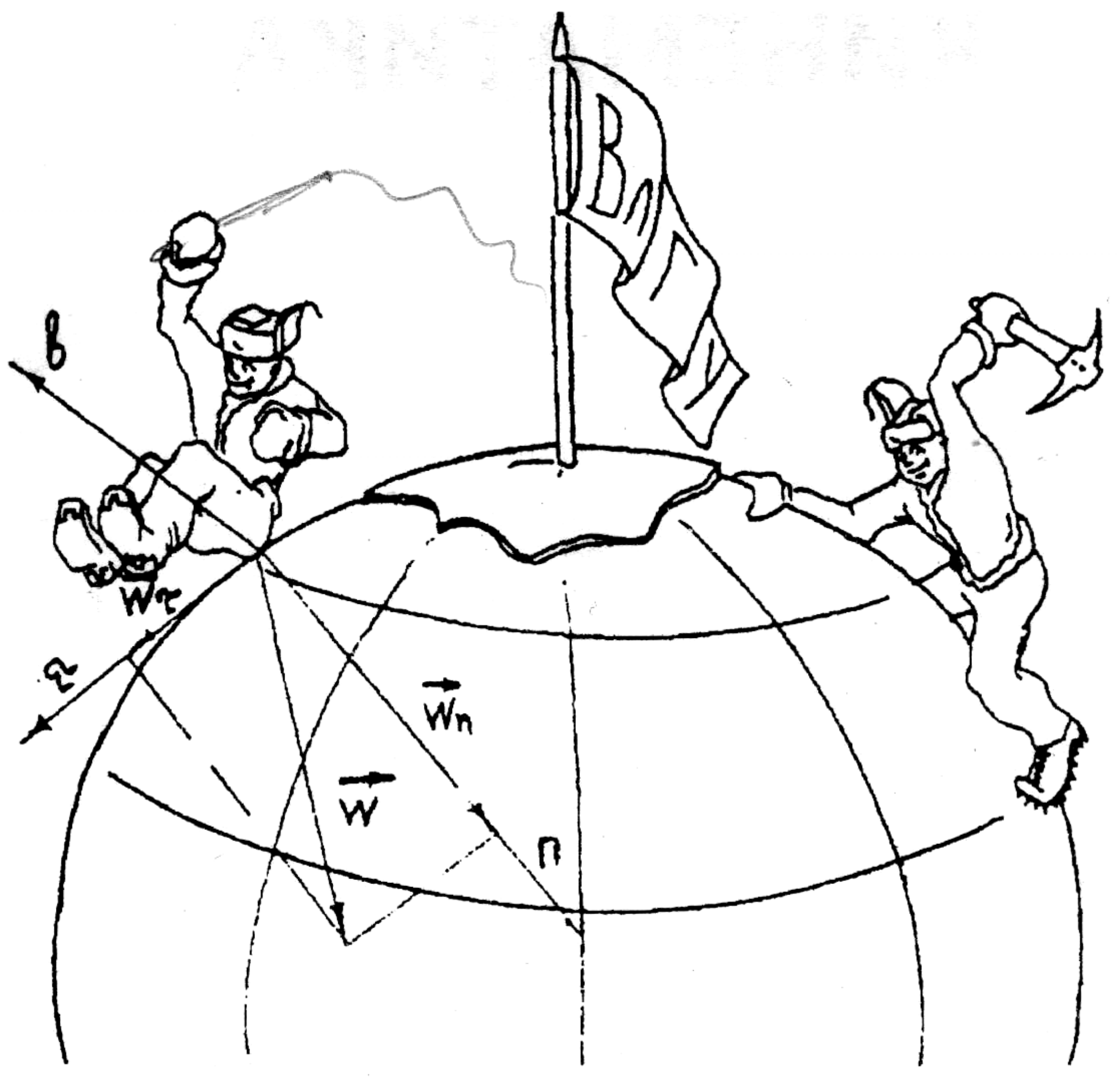
Ответы приведены на странице 147

Раздел 2

КИНЕМАТИКА

Кто не знаком с законами движения,
тот не может понять природу.

Г.Галилей.



8. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

8.1. Способы задания движения точки

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются механические движения материальных точек и тел с чисто геометрической точки зрения вне зависимости от действующих на них сил.

В кинематике решаются *две основные задачи*:

1. Установление математических способов задания движения точек и тел.

2. Определение по заданному закону движение всех основных кинематических характеристик таких, как траектория движения, скорость и ускорение точки, угловые скорости и угловые ускорения тел.

При движении тела его точки в общем случае могут двигаться по различным траекториям, например, при качении колеса по прямому рельсу центр колеса движется по прямой линии, а точки обода по циклоидам. Поэтому изучение этого раздела начнем с изучения движения точки, т.е. с кинематики точки.

Задать движение точки означает найти способ определения ее положения в пространстве в любой момент времени. К основным способам задания движения относятся: естественный, координатный и векторный.

Естественный способ задания движения точки. Чтобы определить положение точки естественным способом, должны быть известны (рис.8.1):

а) траектория движения точки M (линия, которую описывает в пространстве точка при своем движении);

б) начало отсчета криволинейной координаты S - точка O;

в) направление положительного отсчета криволинейной координаты (указывается стрелкой или знаком “+”, “-”);

г) закон изменения криволинейной координаты в зависимости от времени $S = S(t)$

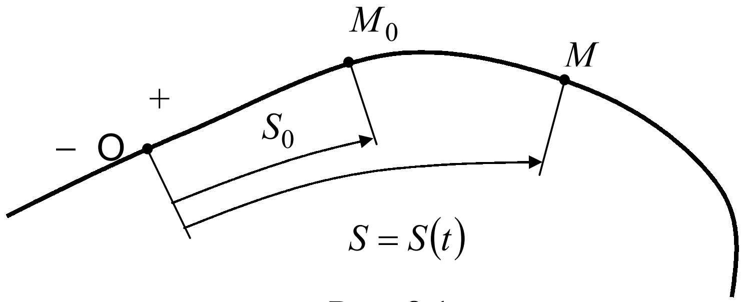


Рис. 8.1.

В начале движения при t =0 точка М может находиться не в начале отсчета О, а на некотором расстоянии S_0 от него. Это положение точки M_0 будем называть начальным положением точки.

Отсюда следует, что S не пройденное расстояние точкой за время t , а расстояние от точки М до начала отсчета О .

Пример. Точка движется по прямой линии по закону $S = 2t^2 - 3$(см). Определить положение точки через 2 с после начала движения.

Выбрав начало отсчета в точке О и положив в законе движения t =0, найдем расстояние $S_0 = -3$ см, определяющее начальное положение точки M_0 (рис. 8.2.). Через две секунды $S_1 = 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$ см и точка будет находиться в положении M_1.

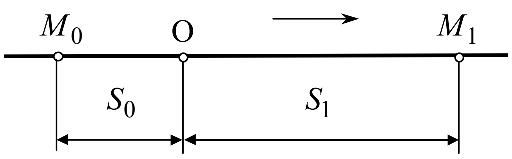


Рис.8.2

Очевидно, что за 2 с точка пройдет расстояние в 8 см.

Координатный способ задания движения точки. Положение точки в пространстве можно определить с помощью декартовой системы координат О*xyz* (рис.8.3). При движении точки ее координаты будут меняться. Если известны законы изменения координат

$$x = x(t);$$
$$y = y(t); \qquad (8.1)$$
$$z = z(t).$$

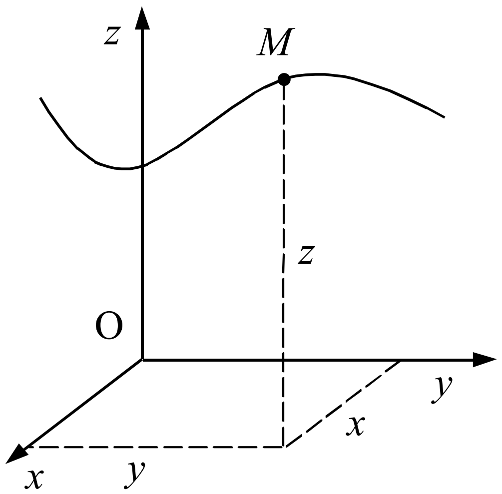


Рис. 8.3

то можно в любой момент времени определить положение точки.

Уравнения (8.1) называются уравнениями движения точки в декартовых координатах.

Если точка движется в плоскости или по прямой линии, то при соответствующем выборе координатной системы, ее движение может быть задано в первом случае двумя уравнениями, во втором - одним.

Уравнения (8.1) представляют собой одновременно уравнения траектории точки в параметрической форме. Исключив из них параметр t (время), можно найти уравнение траектории в координатной форме.

Пример. Найти траекторию движения точки, если ее движение описывается уравнениями:

$$x = 3t^2 + 2;$$

$$y = 6t^2,$$

где x, y - выражены в сантиметрах, t - в секундах.

Определим траекторию движения точки. Из второго уравнения находим $t^2 = \frac{y}{6}$. Подставив это значение в первое уравнение, получим

$$x = \frac{1}{2}y + 2 \qquad \text{или} \qquad 2x - y = 4.$$

Это уравнение прямой линии (рис.8.4).

При t =0 точка имеет координаты x_0=2, y_0=0. Из уравнения движения видно, что с течением времени координаты точки увеличиваются. Следовательно, точка движется вверх по прямой M_0M. Например, через две секунды точка будет иметь координаты x_2=14 см, y_2=24 см.

Векторный способ задания движения точки. Если провести вектор из некоторой неподвижной точки O в точку M (рис.8.5), то данный вектор будет определять положение точки M.

Закон изменения этого вектора является векторным уравнением движения точки

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

При движении точки радиус-вектор будет менять свою величину (длину) и направление. Конец радиуса-вектора будет описывать некоторую кривую (траекторию точки M), которая называется годографом этого вектора.

Если начало декартовой системы координат Oxyz поместить в точку O, то радиус-вектор

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где x(t), y(t), z(t) координаты точки M.

Эта формула устанавливает связь между координатным и векторным способами задания движения.

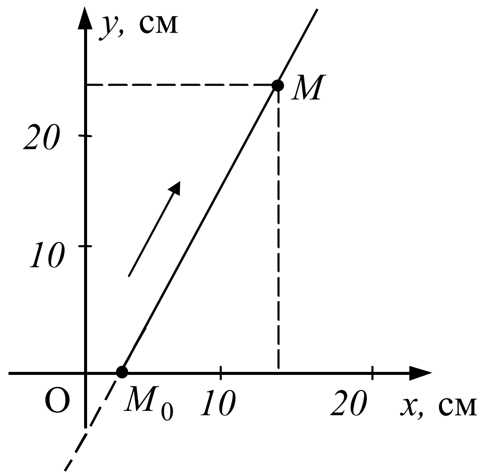


Рис. 8.4

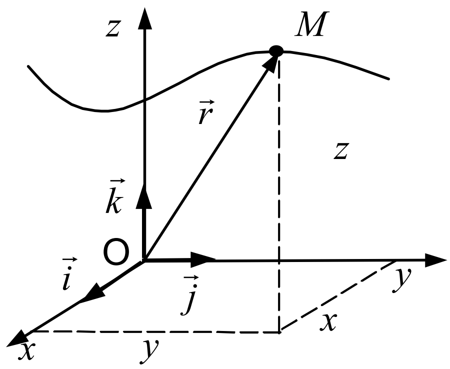


Рис. 8.5

8.2. Скорость точки

Определение скорости точки при векторном способе задания движения.

Пусть точка движется по закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (рис.8.6). В момент t она находится в положении М, определяемом радиусом-вектором $\vec{r}$. Через время Δt точка займет положение M_1 и будет иметь радиус-вектор $\vec{r}_1$.

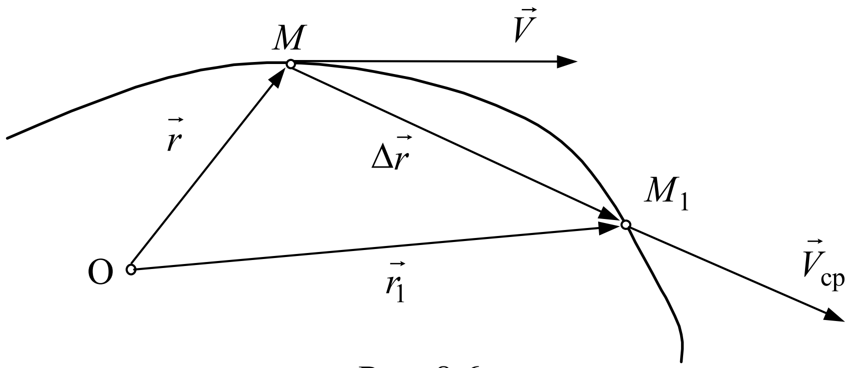


Рис. 8.6

Тогда средняя скорость точки М $\vec{V}_{ср} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, где $\Delta\vec{r}$ - приращение радиуса-вектора за промежуток времени. Δt Вектор средней скорости направлен так же, как вектор $\Delta\vec{r}$ (см. рис. 8.6).

Если $\Delta t \to 0$, то средняя скорость $\vec{V}_{ср}$ будет стремиться к скорости точки в момент времени t . В пределе будем иметь

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0} \vec{V}_{ср} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Скорость точки равна производной от радиуса-вектора этой точки по времени.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Так как предельным направлением вектора $\Delta\vec{r}$ является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону движения.

Определение скорости точки при координатном способе задания движения

Так как $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\ . \qquad (8.2)$$

Вектор скорости, как и всякий вектор, можно разложить на составляющие по осям координат

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\ . \qquad (8.3)$$

Сравнивая (8.2) и (8.3), замечаем, что *проекции скорости точки на координатные оси.*

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ \ V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\ \ V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Зная проекции скорости точки на оси, можно определить ее модуль и направление по формулам

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{V};\ \ \cos\beta = \frac{\dot{y}}{V};\ \ \cos\gamma = \frac{\dot{z}}{V},$$

где α,β,γ - углы между вектором скорости и положительными направлениями осей соответственно x, y, z.

Определение скорости точки при естественном способе задания движения

Пусть за время Δt радиус-вектор точки получил приращение $\Delta\vec{r}$, а криволинейная координата приращение ΔS. Тогда $\vec{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Умножив и разделив правую часть на ΔS, разобьем предел на два предела:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \frac{dS}{dt}\frac{d\vec{r}}{dS}.$$

Модуль вектора $d\vec{r}/dS$ равен единице как предел отношения длины бесконечно малой хорды к длине стягиваемой ею дуги. Поскольку предельное положение хорды совпадает с направлением касательной к кривой в данной точке, то вектор $\frac{d\vec{r}}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta S} = \vec{\tau}_0$ представляет собой единичный вектор касательный к кривой в данной точке, направленный в сторону положительного отсчета координаты S.

Следовательно, *вектор скорости точки*

$$\vec{V} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau}_0 = \dot{S}\vec{\tau}_0 = V_\tau\vec{\tau}_0, \qquad (8.4)$$

где $\dot{S} = V_\tau$ - *проекция вектора скорости точки на касательную ось к ее траектории.*

Вектор скорости, как было установлено ранее, направляется по касательной к траектории движения. На ось τ он проектируется в натуральную величину, поэтому дальше индекс τ будем опускать, т. е. будет считать, что $V_\tau = V$.

8.3. Ускорение точки

Определение ускорения точки при векторном способе задания движения

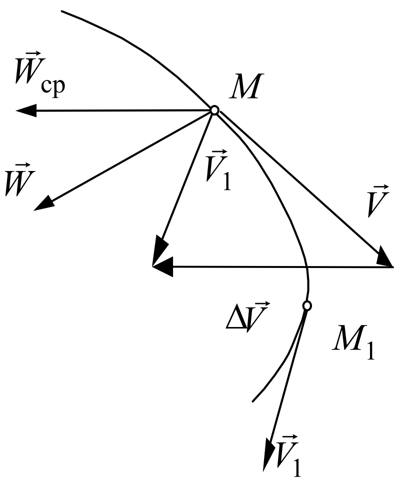


Рис. 8.7

Пусть в момент t скорость точки равна $\vec{V}$, а при $t+\Delta t$ стала равной $\vec{V}_1$. Изменение скорости за время Δt будет $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$. Тогда среднее ускорение $\vec{W}_{ср} = \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$. Как видно из этой формулы, вектор $\vec{W}_{ср}$ направляется так же, как вектор $\Delta\vec{V}$ (рис.8.7).

Ускорение точки в момент t находим как предельное значение $\vec{W}_{ср}$ при $\Delta t \to 0$

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t\to 0} \vec{W}_{ср} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (8.5)$$

Ускорение точки есть первая производная по времени от вектора скорости или вторая производная от радиуса-вектора точки.

Определение ускорения точки при координатном способе задания движения

Так как $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то

$$\vec{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad \text{или} \quad \vec{W} = W_x\vec{i} + W_y\vec{j} + W_z\vec{k} .$$

Сравнивая последние два равенства, замечаем:

$$W_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};\; W_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y};\; W_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z},$$

т. е. *проекции ускорения точки на оси координат* равны вторым производным по времени от соответствующих уравнений движения.

Если известны проекции вектора ускорения, можно найти его модуль:

$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$ и направление

$$\cos\alpha = \frac{\ddot{x}}{W};\; \cos\beta = \frac{\ddot{y}}{W};\; \cos\gamma = \frac{\ddot{z}}{W},$$

где α, β, γ - углы между вектором ускорения $\vec{W}$ и положительными направлениями осей *x,y,z* соответственно.

Пример. Движение точки задано уравнениями $x = 3t,\; y = -4t^2 + 10$, где x, y - выражены в сантиметрах, а t - в секундах. Определить ускорение точки. Исключив время t, получим уравнение траектории: $y = -\frac{4}{9}x^2 + 10$. Это уравнение параболы (рис.8.8).

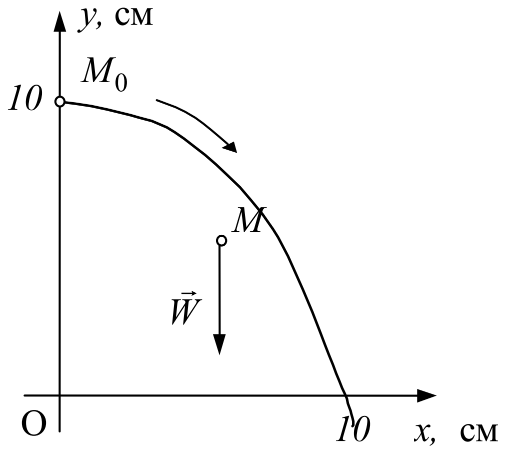


Рис. 8.8

Находим проекции вектора ускорения на оси

$W_x = \ddot{x} = 0,\; W_y = \ddot{y} = -8$ см/с^2.

Тогда модуль ускорения W=8 см/с^2. Так как проекция вектора ускорения на ось x равна нулю, а на ось y отрицательна, то $\vec{W}$ направлен вертикально вниз.

Определение ускорения точки при естественном способе задания движения.

Прежде чем приступить к определению ускорения, познакомимся с некоторыми понятиями из дифференциальной геометрии.

Естественная система координат

Пусть имеется некоторая пространственная кривая (рис.8.9). Возьмем на этой кривой две близкие точки М и M_1. Проведем в этих точках касательные τ и τ_1. Через касательную τ проведем плоскость, параллельную касательной τ_1.

Если точку M_1 приближать к точке М, плоскость, оставаясь параллельной касательной τ_1, будет поворачиваться вокруг τ. И в момент, когда точка M_1 совпадает с точкой M, плоскость займет определенное положение I. Плоскость I называется *соприкасающейся плоскостью* кривой в точке M. Если кривая плоская, то вся кривая будет лежать в соприкасающейся плоскости.

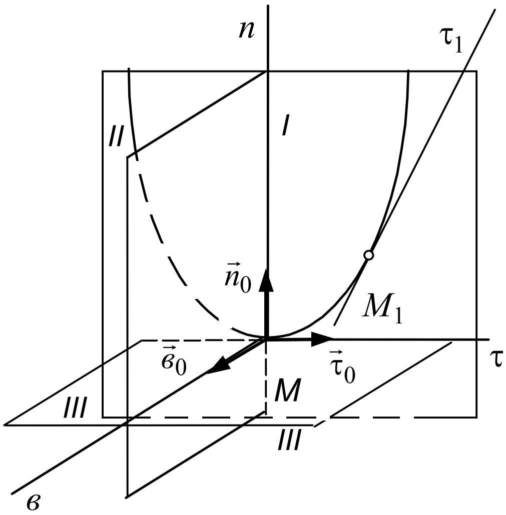


Рис. 8.9

Проведем, затем, плоскость II через точку M, перпендикулярную касательной τ. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью*. Линия пересечения соприкасающейся плоскости и нормальной плоскости называется *главной нормалью* кривой в точке M. Обозначим ее n. Нормаль, перпендикулярная главной нормали n и касательной τ, называется *бинормалью* b.

Плоскость III, проведенная через b и τ, является *касательной плоскостью* к кривой в точке M.

Таким образом, мы получим систему осей τ, n, b, которая называется естественной системой координат, где $\vec{\tau}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0$ ее орты.

Если точка M движется по кривой, то эти оси также будут двигаться вместе с точкой, меняя свое направление в пространстве.

Кривизна и радиус кривизны линии

Введем еще одно понятие - понятие о кривизне и радиусе кривизны линии. Возьмем на кривой две близкие точки M и M_1. (рис.8.10) и проведем в этих точках касательные τ и τ_1. Угол между этими касательными называется *углом смежности* $\Delta\varphi$.

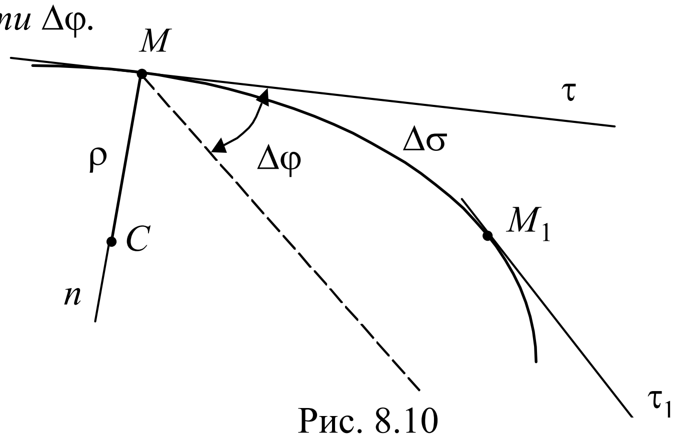


Рис. 8.10

Отношение угла смежности к длине дуги $\Delta\sigma = MM_1$ называется средней кривизной линии $K_{ср}$ в точке M

$$K_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma}.$$

Предел этого отношения при $\Delta\sigma \to 0$ называется *кривизной линии в точке* М:

$$K = \lim_{\Delta\sigma\to 0} K_{\text{ср}} = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma}.$$

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны линии в точке* М $\rho = \frac{1}{K}$.

Если отложить с из точки М по главной нормали в сторону вогнутости линии, получим точку С, которая называется *центром кривизны*.

Теперь можно приступить к определению ускорения точки. Пусть точка М движется по некоторой пространственной линии и имеет скорость $\vec{V}$ (рис.8.11).

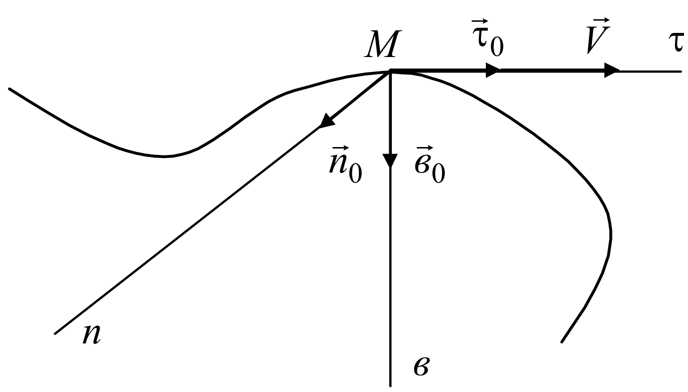


Рис. 8.11

Подставим выражение вектора скорости (8.4) в формулу (8.5):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{\tau}_0) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}_0 + V\frac{d\vec{\tau}_0}{dt}.$$

Очевидно, ускорение состоит из двух составляющих. Первая составляющая направлена вдоль касательной τ в сторону положительного отсчета S при

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\dot{S}}{dt} = \ddot{S} > 0$$

и в противоположную сторону при $\ddot{S} < 0$. Чтобы определить модуль и направление второго слагаемого, рассмотрим производную $\dfrac{d\vec{\tau}_0}{dt}$. Поскольку $\vec{\tau}_0$ является вектором с постоянным модулем, то его производная по времени представляет собой вектор, перпендикулярный $\vec{\tau}_0$ и равный:

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\vec{n}_0,$$

где $\vec{n}_0$- единичный вектор главной нормали к траектории точки.

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{dS}{dt}K = \frac{\dot{S}}{\rho}, \text{ то } \frac{d\vec{\tau}_0}{dt} = \frac{\dot{S}}{\rho}\vec{n}_0 = \frac{V}{\rho}\vec{n}_0.$$

Таким образом, ускорение точки

$$\vec{W} = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}_0 + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}_0.$$

Итак, ускорение точки состоит из двух составляющих. Одна составляющая направлена по касательной к траектории и называется *касательным ускорением*. Его проекция на ось τ

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}.$$

Вторая составляющая направлена по главной нормали в сторону вогнутости траектории, называется *нормальным ускорением*, а его модуль

$$W_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Очевидно, что составляющая ускорения по бинормали $\vec{W}_b = 0$.

При естественном способе задания движения ускорение точки находим как векторную сумму двух взаимно перпендикулярных векторов касательного и нормального ускорений

$$\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n.$$

Модуль ускорения $W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}$.

Частные случаи:

- точка движется по прямой линии с переменной скоростью.

Ускорение точки

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} \neq 0; \quad W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{\infty} = 0; \quad \vec{W} = \vec{W}_\tau;$$

- точка движется по кривой с постоянной по величине скоростью.

Ускорение точки

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = 0; \; \mathrm{W}_n = \frac{V^2}{\rho} \neq 0; \; \vec{W} = \vec{W}_n.$$

В первом случае скорость точки изменялась только по величине, и ее ускорение равно касательному ускорению. Во втором случае скорость точки менялась по направлению, и ускорение равно нормальному ускорению. Поэтому касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине, а нормальное - по направлению.

Пример. Точка движется по заданной кривой по закону $S = t^2 - 5t + 10$ м. Определить ускорение точки при t_1=2с и t_2=3с (рис.8.12).

Скорость точки $V = \dfrac{dS}{dt} = 2t - 5$. При t_1 =2с V_1= -1м/с При t_2 =3с V_2=1м/с. Следовательно, при t_1 =2с скорость точки направлена по касательной в сторону отрицательных значений криволинейных координат, а при t_2=3с - в сторону положительных значений координат.

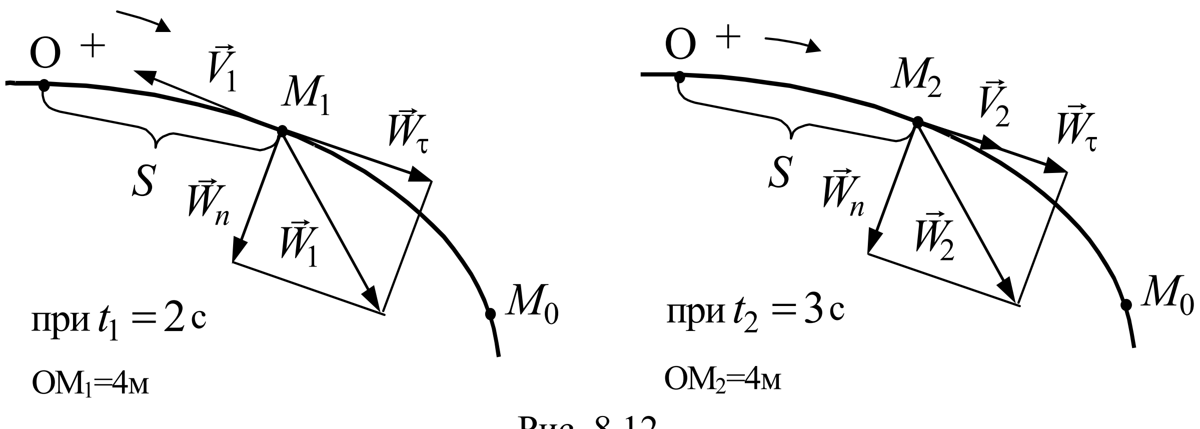


Рис. 8.12

Величина касательного ускорения точки $W_\tau = \dfrac{dV}{dt}$=2 м/с (постоянная, не зависит от времени). Так как $W_\tau > 0$, вектор $\vec{W}_\tau$ направлен по касательной в сторону положительного направления оси τ.

Нормальное ускорение:

при t_1=2с $W_n = \dfrac{V_1^2}{R} = 0{,}2$ м/с^2; при t_2=3с $W_n = \dfrac{V_2^2}{R} = 0{,}2$ м/с^2.

Так как составляющие равны по модулю, то ускорения точки в заданные моменты времени будут равны

$$W_1 = W_2 = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} \cong 2 \text{ м/с.}$$

При t_1=2с направление касательного ускорения противоположно скорости, а при t_2=3с оба вектора имеют одинаковое направление. Следовательно, в момент t_1=2с движение точки замедленное, в момент t_2=3с – ускоренное.

9. ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

К простейшим движениям твердого тела относятся поступательное движение и вращательное.

9.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во время движения параллельной своему начальному положению.

Пусть твердое тело движется поступательно относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$. Свяжем жестко с телом подвижную систему координат $Axyz$. Пусть $\vec{r}_A$ - радиус-вектор точки A, $\vec{r}_B$ - радиус-вектор точки B, а $\bar{\rho}$ - радиус-вектор, определяющий положение точки B в подвижной системе координат (рис.9.1).

Так как рассматриваемое тело абсолютно твердое и оно движется поступательно, то $\bar{\rho} = const$. Из рисунка следует

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho} \tag{9.1}$$

Пусть в момент времени t тело занимало положение I, а в момент $(t + \Delta t)$ - положение II. Тогда $\Delta\vec{r}_A$ будет вектором перемещения точки A, а

$\Delta\vec{r}_B$ - вектором перемещения точки B за промежуток времени Δt.

Поскольку $\bar{\rho} = \overline{const}$, то отрезки A_0B_0 и AB равны и параллельны и, следовательно, фигура A_0B_0BA - параллелограмм. Таким образом, $\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B$.

Из равенства (9.1.) и условия постоянства вектора $\bar{\rho}$ следует, что

траектории всех точек тела, движущегося поступательно, одинаковы.

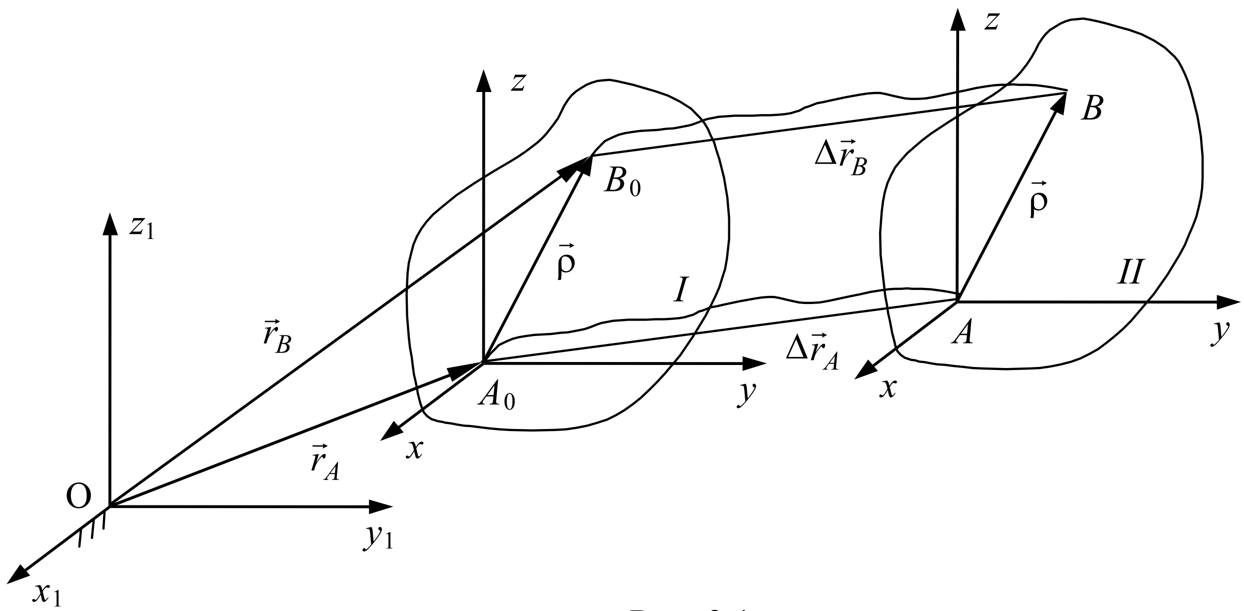


Рис. 9.1

Заметим, что траекториями поступательно движущегося тела могут быть самые разнообразные кривые. Например, кузов автомобиля на прямолинейном горизонтальном участке дороги движется поступательно. При этом траектории его точек будут прямые линии. А спарник AB (рис. 9.2) при вращении OA и O_1B $\left(OA = O_1B\right)$ также движется поступательно (любая проведенная в нем прямая остается параллельной ее начальному положению). Точки же спарника движутся при этом по окружностям относительно неподвижной системы отсчета.

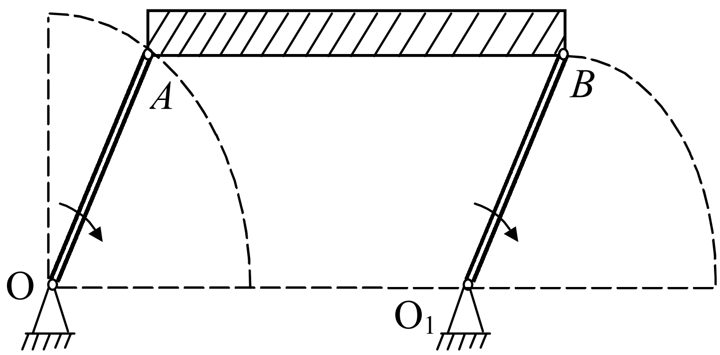


Рис. 9.2

Так как две произвольные точки тела за время Δt имеют геометрически равные перемещения, то

при поступательном движении все точки тела имеют в данный момент времени равные скорости и ускорения

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B, \quad \vec{W}_A = \vec{W}_B.$$

Поэтому для изучения поступательного движения твердого тела достаточно изучить движение одной (любой) его точки (например центра тяжести C). В соответствии с этим уравнения

$$x_C = x_C(t);$$

$$y_C = y_C(t);$$

$$z_C = z_C(t)$$

будут характеризовать не только движение точки C, но и движение тела в целом.

9.2. Вращательное движение твердого тела

Вращательным называется движение твердого тела, при котором во все время движения остаются неподвижными две его точки, расположенные на некоторой прямой, называемой осью вращения. Каждая точка вращающегося тела, кроме точек, расположенных на оси вращения, движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения и имеющей центр на оси.

Положение вращающегося тела может быть определено взятым с соответствующим знаком углом φ между двумя полуплоскостями, проходящими через ось вращения, одна из которых I - неподвижна, другая II, жестко связана с телом (рис. 9.3). Для определения знака φ совмещают с осью вращения координатную ось A_z и считают, что $\varphi > 0$, если для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси A_z угол φ виден отложенным от неподвижной полуплоскости против часовой стрелки.

Движение, вращающегося вокруг неподвижной оси тела в любой момент времени t определяется уравнением

$$\varphi = \varphi(t),$$

которое называется уравнением вращения. Угол поворота измеряется в радианах: $1 рад = 57°17'44''$.

Главными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость и угловое ускорение.

Пусть за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ угол φ изменится на величину $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. *Средняя угловая скорость* тела за данный промежуток времени $\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Предел, к которому стремится $\omega_{ср}$ при Δt, стремящемся к нулю, называется угловой скоростью тела в данный момент времени t, или просто *угловой скоростью*.

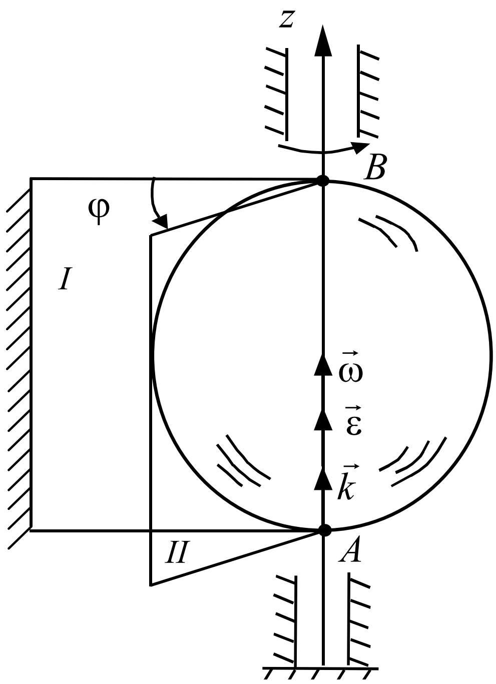


Рис. 9.3

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi .$$

Знак угловой скорости определяется знаком приращения $\Delta\varphi$, если $\Delta\varphi > 0$, то $\omega > 0$, и наоборот.

Поскольку угол φ измеряется в радианах, а время в секундах, то единица измерения угловой скорости радиан в секунду (рад/с) или с$^{-1}$.

В технических расчетах часто вместо угловой скорости пользуются понятием числа оборотов в минуту n. Зависимость между ω и n определяется формулой $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$.

Пусть за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Величина $\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ называется *средним угловым ускорением* за промежуток времени Δt. Предел, к которому стремится $\varepsilon_{ср}$ при Δt, стремящемся к нулю, называется *угловым ус-*

корением в данный момент времени t, или просто угловым ускорением. $\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \varphi$. Единица измерения углового ускорения радиан на секунду в квадрате. Если $\Delta\omega > 0$, то $\varepsilon > 0$, если $\Delta\omega < 0$, то $\varepsilon < 0$. В том случае, когда знаки угловой скорости ω и углового ускорения ε совпадают ($\dot\varphi\,\ddot\varphi > 0$), вращательное движение является ускоренным, а когда противоположны ($\dot\varphi\,\ddot\varphi < 0$) - замедленным.

Вектором угловой скорости твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, будем называть вектор, равный производной угла поворота тела по времени и направленный вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки

$$\bar\omega = \frac{d\varphi}{dt}\vec k = \omega\,\vec k\ .$$

Вектором углового ускорения будем называть вектор, равный производной по времени от вектора угловой скорости

$$\bar\varepsilon = \frac{d\bar\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\vec k = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec k = \varepsilon\ \vec k\ .$$

Из формулы видно, что вектор $\bar\varepsilon$ расположен как и вектор $\bar\omega$ на оси вращения. Величины ω и ε представляют проекции векторов угловой скорости $\bar\omega$ и углового ускорения $\bar\varepsilon$ на ось Oz.

9.3. Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Как уже раньше отмечалось, траекторией любой точки M вращающегося тела (кроме точек, расположенных на оси вращения) является дуга окружности, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки до оси вращения $O_1M = R$ (рис. 9.4)

Если отсчитывать дуговую координату S точки M от ее начального положения M_0 в направлении возрастания угла φ, то закон движения точки M по дуге окружности радиуса R будет иметь вид

$$S(t) = R \cdot \varphi(t).$$

В этом случае проекция вектора скорости на касательную определяется по формуле $V = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{d}{dt}(R\varphi) = R\dfrac{d\varphi}{dt} = R\dot{\varphi}$; $\vec{V} = R\dot{\varphi}\,\vec{\tau}$. Величина скорости точки V определяется по формуле $V = \omega R$.

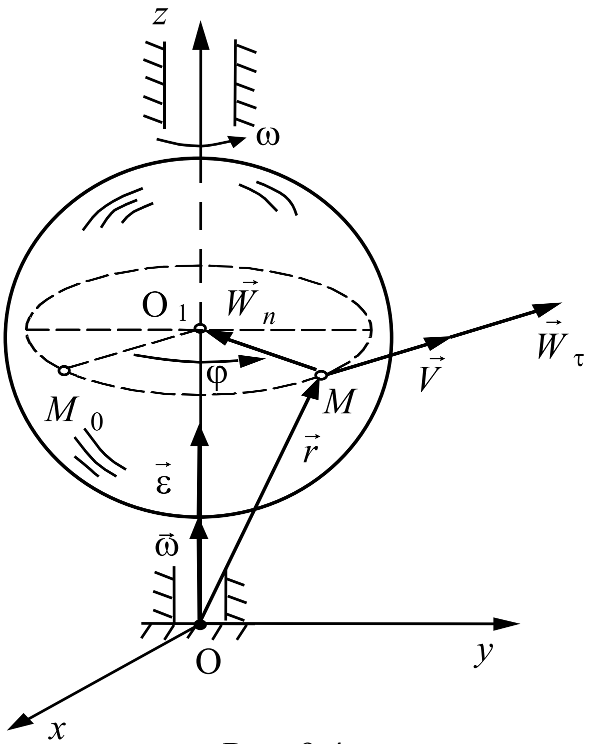


Рис. 9.4

Найдем касательное, нормальное и абсолютное ускорения точки M . Как известно из кинематики точки

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\varphi = \varepsilon R; \qquad \vec{W}_\tau = R\varphi\vec{\tau};$$

$$W_n = \frac{V^2}{R} = R\varphi^2 = R\omega^2; \qquad \vec{W}_\tau = \varphi^2 R\vec{n};$$

$$\vec{W} = \vec{W}_n + \vec{W}_\tau.$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории в сторону вектора скорости $\vec{V}$, если движение ускоренное, и в противоположную, если замедленное. Нормальное ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения.

Модуль абсолютного ускорения точки M будет равен

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = \sqrt{\omega^4 R + \varepsilon^2 R^2};$$

$$W = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

9.4. Векторные выражения скорости и ускорения точек тела при вращении вокруг неподвижной оси

Докажем, что скорость $\vec{V}$ любой точки M (рис.9.5) можно представить как векторное произведение

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{9.2}$$

Модуль векторного произведения равен $V = \omega r \sin\alpha$, а $r\sin\alpha = R$ и $V = \omega R$. Направление скорости $\vec{V}$ совпадает с направлением векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$ (см. рис.9.5).

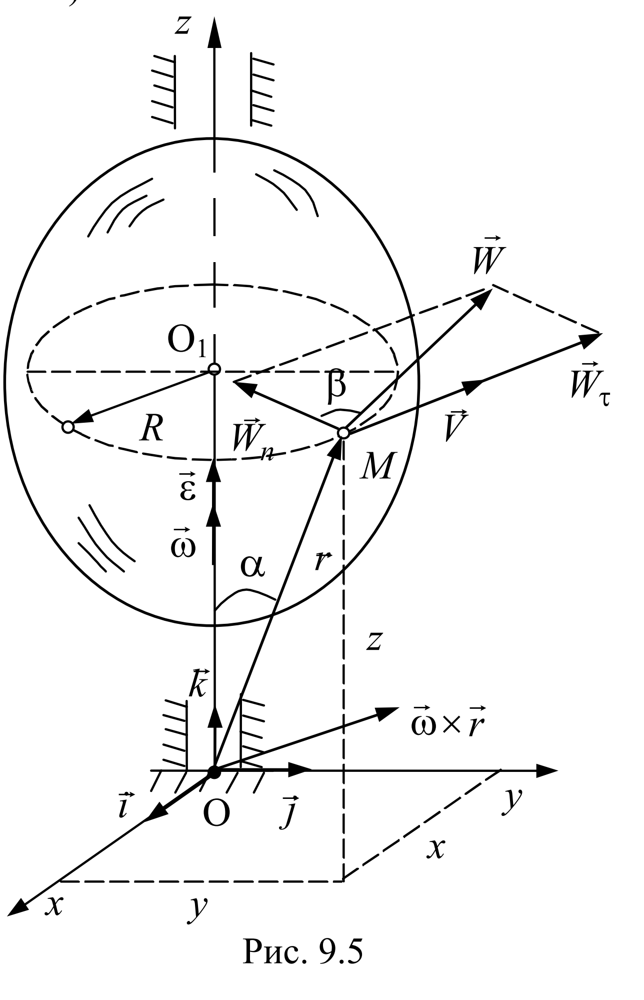


Рис. 9.5

Так как $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ и вектор $\vec{r}$ изменяется со временем только по направлению, то $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}$. Пусть ось O$z$ в системе Oxyz совпадает с осью вращения, тогда имеем

$$\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

или $V_x = -\omega_z y, \quad V_y = \omega_z x, \quad V_z = 0.$

Последние равенства дают проекции вектора скорости точки $M(x, y, z)$ вращающегося твердого тела на выбранные оси координат.

Выражение для абсолютного ускорения $\vec{W}$ можно получить, дифференцируя равенство (9.2):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Так, как

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}; \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V};$$

то

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{V}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ направлен по касательной к траектории точки и будет совпадать по направлению с вектором скорости, если векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ сонаправлены, и противоположен $\vec{V}$, если $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ направлены в противоположные стороны. Эта составляющая ускорения называется вектором касательного ускорения, т.е. $\vec{W}_\tau = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}$. Величина этого ускорения равна

$$W_\tau = \varepsilon R.$$

Векторное произведение $\vec{\omega}\times\vec{V}$ представляет собой вектор, расположенный в плоскости, перпендикулярной оси вращения и направленный по радиусу R от точки M к точке O_1, т.е. по нормали к траектории. Величина этого ускорения равна $W_n = \omega V \sin 90^o = \omega V = \omega^2 R$. Вектор $\vec{W}_n = \vec{\omega}\times\vec{V}$ как по величине, так и по направлению выражает собой нормальное ускорение. Учитывая, что $\vec{W}_n \perp \vec{W}_\tau$, модуль абсолютного ускорения точки M будет

$$W = \sqrt{W_n^2 + W_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Направление $\vec{W}$ определяется углом β (рис. 9.5)

$$tg\beta = \frac{W_\tau}{W_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \beta \le \frac{\pi}{2}.$$

10. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

10.1. Уравнения плоскопараллельного движения

Среди разнообразных движений твердого тела одним из самым распространенным в технике является движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной (реальной или воображаемой) плоскости. Такой вид движения в механике называется *плоскопараллельным*, или *плоским*. Простейшим примером является перемещение книги по поверхности стола: все точки тела (книги) движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости (крышке стола).

Проанализируем произвольное плоскопараллельное движение твердого тела, определим его особенности и установим основные расчетные формулы. Пусть все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных плоскости Оxy (рис. 10.1,а).

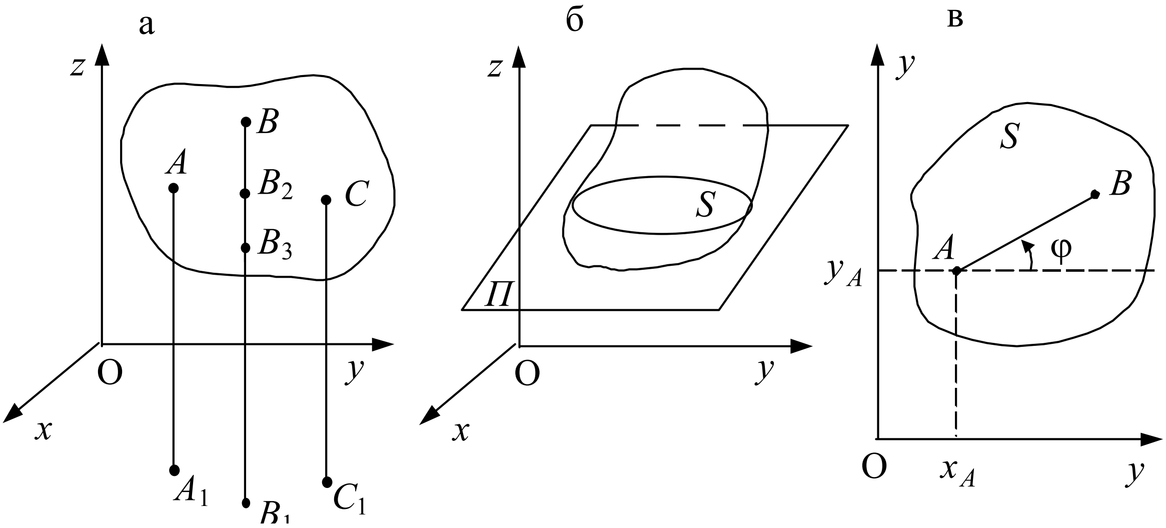


Рис. 10.1

Тогда, согласно определению, расстояния от произвольных точек тела A, B, C до плоскости Оxy остаются во все время движения неизменны-

AA_1, BB_1, CC_1 движутся поступательно, и точки тела, расположенные на одном перпендикуляре к плоскости Оxy (точки B_1, B_2, B_3), будут описывать одинаковые траектории, иметь одинаковые скорости и ускорения. Следовательно, задачу изучения движения тела в трехмерном пространстве можно заменить задачей исследования движения плоской фигуры S, полученной в результате сечения тела плоскостью $\Pi \parallel \mathrm{O}xy$, в ее плоскости Π (рис. 10.1,б). По известному движению этой фигуры можно будет судить о движении твердого тела в целом. Далее положение плоской фигуры в ее плоскости определяется положением двух любых ее точек или прямой, принадлежащей этой фигуре. Поэтому положение плоской фигуры относительно опорной системы координат Оxy однозначно определяется заданием трех величин координат x_A, y_A точки A и угла φ (рис. 10.1,в). Следовательно, функциональные зависимости

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad \varphi = \varphi(t)$$

являются уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела. Так как число уравнений три, то в общем случае тело имеет три степени свободы. В частных случаях тело, участвующее в плоскопараллельном движении, может иметь две или одну степени свободы.

10.2. Распределение скоростей при плоскопараллельном движении

Пусть $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$ радиусы-векторы произвольных точек плоской фигуры A и B, проведенные из некоторого центра О. Из рис. 10.2, а следует, что $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA}$. Продифференцировав это равенство во времени, запишем $d\vec{r}_B / dt = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$. Здесь $\dot{\vec{r}}_B = \vec{V}_B$ - скорость точки B, $\dot{\vec{r}}_A = \vec{V}_A$ - скорость точки A и $\dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{V}_{BA}$. Поскольку $|\vec{r}_{BA}| = \mathrm{const}$, то $\dot{\vec{r}}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{BA}$.

Вектор $\vec{V}_{BA}$ называется вращательной скоростью точки B вокруг точки A, которую будем считать полюсом, а $\vec{\omega}_A$ - угловая скорость этого вращательного движения. В силу определения плоскопараллельного движения векторы $\vec{V}_B, \vec{V}_A$ и $\vec{V}_{BA}$ лежат в плоскости движущейся плоской фигуры, а $\vec{\omega}_A$ перпендикулярен этой плоскости. Выберем три произвольные точки плоской фигуры A, B и C (рис. 10.2,б). В силу полученного выше векторного равенства имеем $\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{CA}$. Аналогично, приняв за полюс точку B, пишем $\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{CB}$ или $\vec{V}_c = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{BA} + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{CB}$. Учитывая, что $\vec{r}_{CA} = \vec{r}_{BA} + \vec{r}_{CB}$ и вычитая из предпоследнего равенства последнее, имеем $(\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times \vec{r}_{CB} = 0$. Очевидно, что уравнению удовлетворяет только условие $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$. Последовательно присоединяя к трем рассматриваемым точкам другие, получим, что это условие распространяется на любые точки плоской фигуры $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}_C = \ldots = \vec{\omega}$. Следовательно, $\vec{\omega}$ является угловой скоростью плоской фигуры.

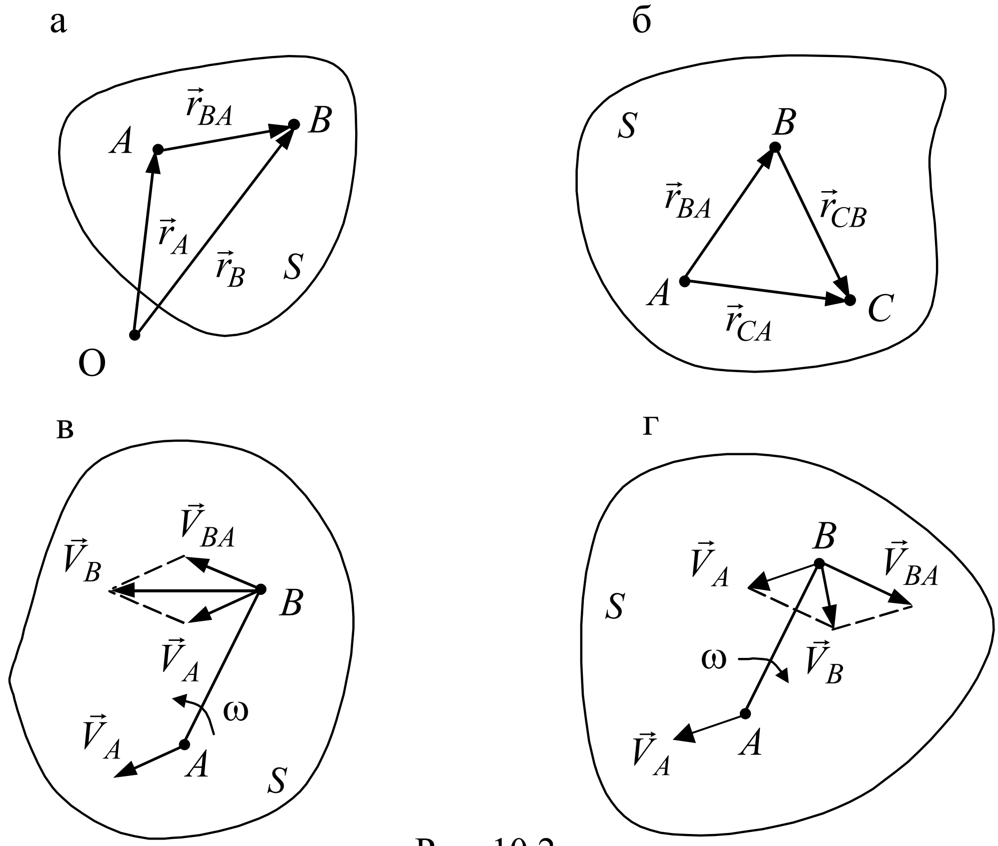


Рис. 10.2

Итак, *формула распределения скоростей* точек твердого тела для точек плоской фигуры A и B имеет вид

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}, \quad \text{где } \overrightarrow{AB} = \vec{r}_{BA}. \tag{10.1}$$

Вращательная скорость точки B вокруг полюса перпендикулярна $\overrightarrow{AB}$ и ее модуль равен $V_{BA} = \omega AB$. На рис. 10.2, в, г показано как, зная скорость точки A и угловую скорость ω, можно найти скорость точки B.

Скорость любой точки плоской фигуры равна векторной сумме скорости полюса и скорости исследуемой точки при вращении фигуры вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через полюс.

Таким образом, плоскопараллельное движение можно рассматривать как наложение двух движений: поступательного, зависящего от выбора полюса, и вращательного, в котором угол и направление поворота от выбора полюса не зависят.

Из формулы (10.1) можно сделать следующие выводы:

- проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой (рис. 10.3,а);
- концы векторов скоростей прямолинейного отрезка расположены на одной прямой (рис. 10.3,б);
- если известна скорость одной точки плоской фигуры, то можно построить годограф возможных скоростей другой точки (рис.10,в), которые полезны для изучения плоскопараллельного движения.

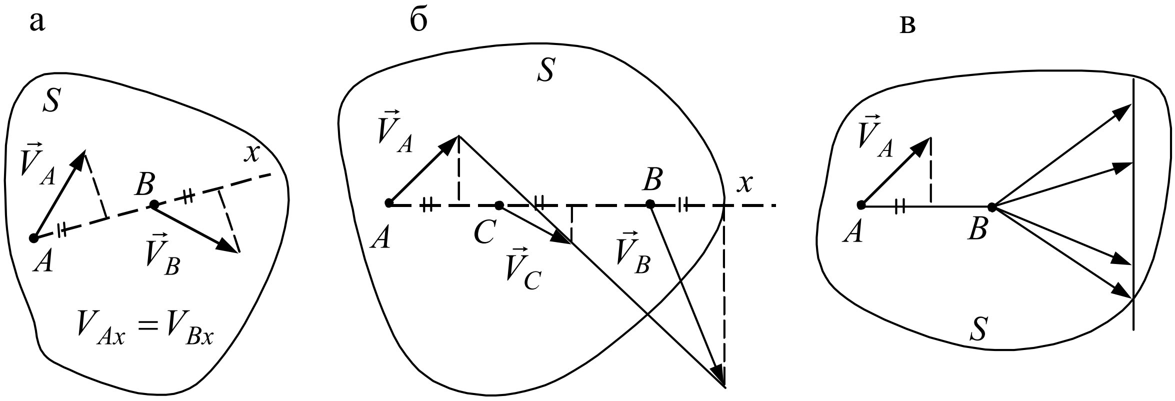


Рис. 10.3

10.3. Мгновенный центр скоростей

Значительного упрощения в понимании картины распределения скоростей при плоскопараллельном движении твердого тела можно получить, если в качестве полюса выбрать точку, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется движущаяся точка, проходящая в каждый момент времени через точку тела (плоской фигуры), скорость которой в этот момент равна нулю.

> *Теорема*. Во всяком непоступательном движении плоской фигуры в ее плоскости в каждый момент существует точка, скорость которой в этот момент обращается в нуль и эта точка будет единственной.

Доказательство. Пусть в некоторый момент времени $\vec{\omega}$ - угловая скорость плоской фигуры, а $\vec{V}_A$ - скорость ее точки, которую считаем известной (рис. 10.4, а).

Выполним геометрическое построение: из точки A проведем прямую AL в направление вектора $\vec{V}_A$ и повернем ее на угол $\pi/2$ в сторону вращения плоской фигуры. На полученном луче отложим отрезок $AC_V = V_A/\omega$. Для точки C_V будем иметь $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A + \vec{V}_{C_V A}$ Вектор $\vec{V}_{C_V A}$ направлен противоположно $\vec{V}_A$. Его модуль равен $V_{C_V A} = \omega \cdot AC_V$. Следовательно, $\vec{V}_{C_V A} = -\vec{V}_A$ и $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A - \vec{V}_A = 0$, т.е. точка C_V является МЦС. Совершенно очевидно, что эта точка единственная. Действительно, если, например, точка C также мгновенный центр скоростей, то приняв ее за полюс, получим скорость точки C_V $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CC_V} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{CC_V} \neq 0$, что противоречит доказанному выше.

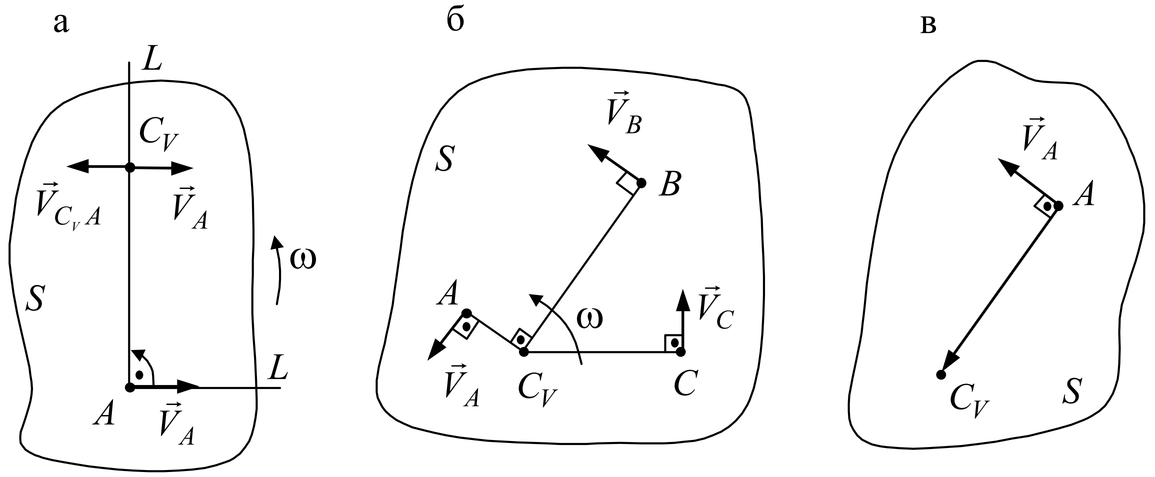
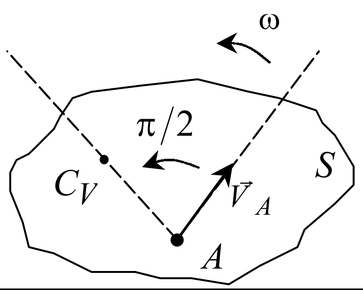
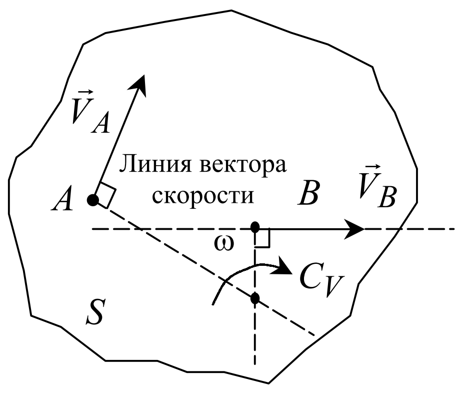


Рис. 10.4

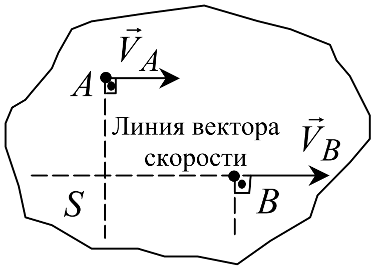
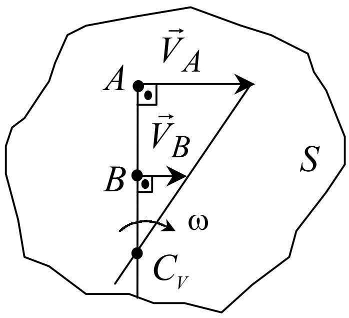
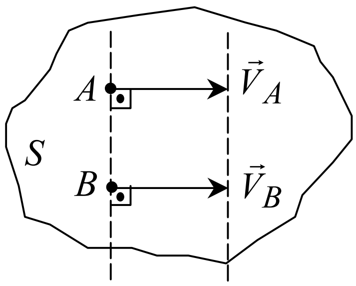
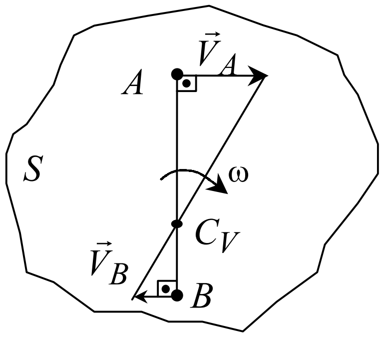
Теперь, принимая за полюс МЦС, будем иметь для любых точек плоской фигуры $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Отсюда следует, что распределение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении в каждый момент точно такое же, как и при вращательном движении. Роль неподвижной оси играет прямая, проходящая через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения, которая называется *мгновенной осью вращения тела* (рис. 10.4, б). Другими словами, в каждый момент времени движение представляет собой вращение вокруг мгновенной оси. Таким образом, скорость любой точки плоской фигуры перпендикулярна радиусу-вектору, соединяющему эту точку с МЦС, и направлена в сторону вращения фигуры. Можно показать, что радиус-вектор точки C_V, проведенный из полюса A, определяется по формуле $\vec{r}_{AC_V} = \vec{\omega} \times \vec{V}_A / \omega^2$ (рис. 10.4,в).

Различные способы определения положения мгновенного центра скоростей показаны в табл. 1.

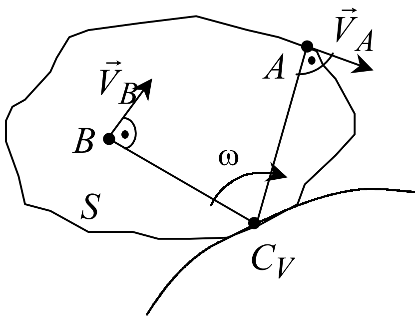
Таблица 1

Известные параметры	Способы нахождения МЦС	Расчетная формула
Величина и направление скорости какой – либо точки плоской фигуры и угловая скорость		$AC_V = \dfrac{V_A}{\omega}$
Величина и направление скорости одной точки и линии вектора скорости другой точки плоской фигуры – $\vec{V}_A \,\|\|\, \vec{V}_B$		$\dfrac{V_A}{AC_V} = \dfrac{V_B}{BC_V} = \omega$

Продолжение табл. 1

Известные параметры	Способы нахождения МЦС	Расчетная формула
– $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$		$V_{\text{A}} = V_{\text{B}}$, $\omega = 0$
Величины и направления скоростей двух точек плоской фигуры, точки расположены на прямой, перпендикулярной скоростям		
- скорости направлены в одну сторону и неравны		$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega$ $\omega = \frac{V_A - V_B}{AB}$
- скорости направлены в одну сторону и равны		$\omega = 0$
- скорости направлены в разные стороны		$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega$ $\omega = \frac{V_A + V_B}{AB}$

Окончание табл. 1

Известные параметры	Способы нахождения МЦС	Расчетная формула
Плоская фигура катится без проскальзывания по неподвижной поверхности		$\frac{V_A}{AC_V} = \frac{V_B}{BC_V} = \omega$

Геометрическое место последовательных положений МЦС относительно неподвижной системы координат называется *неподвижной центроидой*, а относительно системы координат, жестко связанной с телом, - *подвижной центроидой*. Можно показать, что при движении тела подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения.

10.4. Распределение ускорений при плоскопараллельном движении

Для определения ускорения произвольной точки плоской фигуры воспользуемся полученным выше выражением скорости точки B $\vec V_B = \vec V_A + \vec\omega \times \vec r_{BA}$ и найдем ускорение точки B как производную по времени от скорости $\vec V_B$

$$\vec W_B = \frac{d\vec V_B}{dt} = \frac{d\vec V_A}{dt} + \vec\omega \times \frac{d\vec r_{BA}}{dt} + \frac{d\vec\omega}{dt} \times \vec r_{BA}.$$

Вводя обозначения, последнее равенство можно переписать так:

$$\vec W_B = \vec W_A + \vec W_{BA}^{\text{вр}} + \vec W_{BA}^{oc},$$

где $\vec W_A = d\vec V_A / dt$ - ускорение полюса,

$\vec W_{BA}^{\text{вр}} = \frac{d\vec\omega}{dt} \times \vec r_{BA} = \vec\varepsilon \times \vec r_{BA}$ - вращательное ускорение точки B,

$\vec W_{BA}^{oc} = \vec\omega \times \frac{d\vec r_{BA}}{dt} = \vec\omega \times \vec V_{BA} = \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r_{BA})$ - осестремительное (или центростремительное) ускорение точки B.

Ускорение любой точки плоской фигуры равно векторной сумме трех ускорений: ускорения полюса, осестремительного и вращательного ускорений исследуемой точки при вращении плоской фигуры вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через полюс.

В силу определения плоскопараллельного движения $\bar{\omega} \perp \vec{r}_{BA}$ и $\bar{\varepsilon} \perp \vec{r}_{BA}$. Поэтому все векторы $\vec{W}_B, \vec{W}_A, \vec{W}_{BA}^{\text{вр}}$ и $\vec{W}_{BA}^{oc}$ лежат в плоскости движущейся фигуры. На рис.10.5 показано геометрическое построение вектора $\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}$, где $\vec{W}_{BA} = \vec{W}_{BA}^{\text{вр}} + \vec{W}_{BA}^{oc}$.

Вращательное ускорение $\vec{W}_{BA}^{\text{вр}} \perp \overline{AB}$, его величина $W_{BA}^{\text{вр}} = \varepsilon\, AB$. Осестремительное ускорение $\vec{W}_{BA}^{oc}$ направлено по AB от точки B к точке A, его модуль $W_{BA}^{oc} = \omega^2 AB$. Очевидно, что

$$W_{BA} = \sqrt{\left(W_{BA}^{\text{вр}}\right)^2 + \left(W_{BA}^{oc}\right)^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

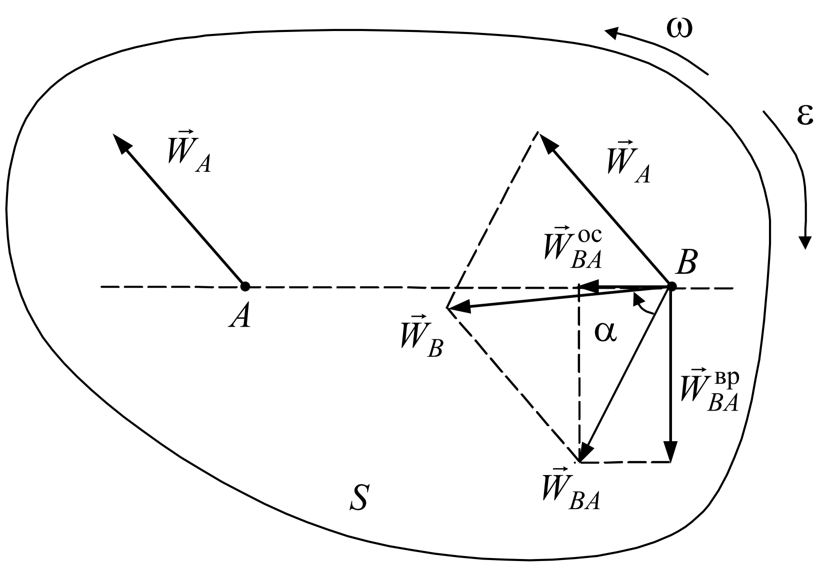


Рис. 10.5

10.5.Мгновенный центр ускорений

Введем в рассмотрение угол α, образованный $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{W}_{BA}$ и откладываемый от вектора $\vec{W}_{BA}$ в направлении углового ускорения. Из рис. 10.5 видно, что

$$tg\alpha = \frac{W_{BA}^{\text{вр}}}{W_{BA}^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

угол не зависит от выбора полюса и в каждый момент времени он одинаков для всех точек фигуры. Далее введем понятие мгновенного центра ускорений.

Мгновенным центром ускорений (МЦУ) называется движущаяся точка, проходящая в каждый момент времени через точку тела (плоской фигуры), ускорение которой в этот момент равно нулю.

Теорема. При плоскопараллельном движении тела в случае, когда $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ не равны одновременно нулю, в каждый момент времени можно найти точку плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю и эта точка будет единственной.

Доказательство. Пусть $\vec{W}_A$- ускорение одной из точек плоской фигуры (рис. 10.6, а).

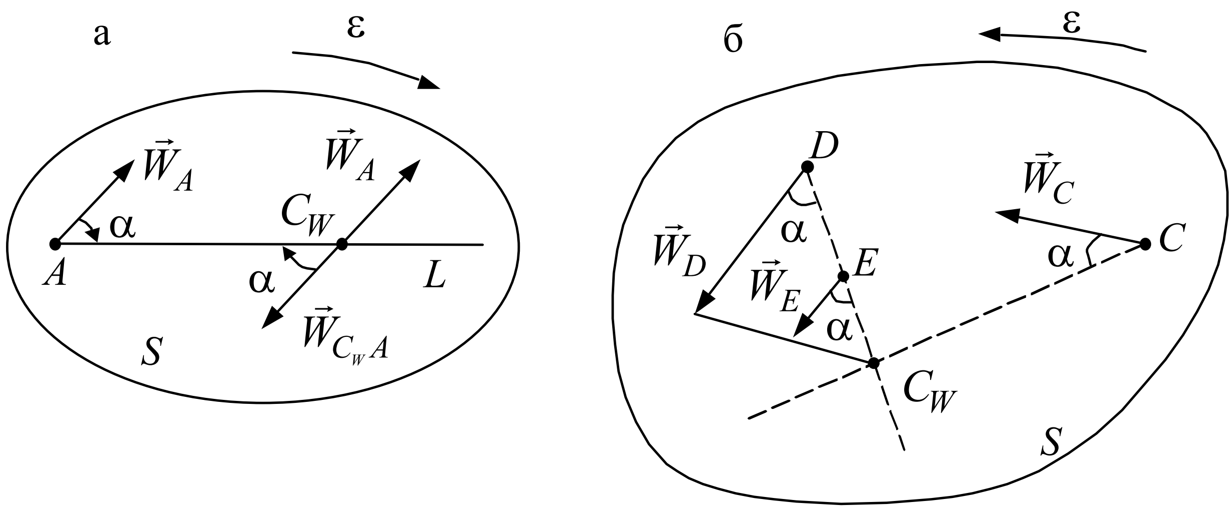


Рис. 10.6

Проведем через точку A полупрямую AL под углом $\alpha = arctg\,\varepsilon/\omega^2$, отсчитываемым от $\vec{W}_A$ в направлении углового ускорения. Далее отложим на AL отрезок $AC_W = W_A / \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Найдем ускорение точки C_W. Выбрав за полюс точку A, запишем $\vec{W}_{C_W} = \vec{W}_A + \vec{W}_{C_W A}$.

Поскольку $W_{C_W A} = C_W A\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_A$, а векторы $\vec{W}_A, \vec{W}_{C_W A}$ составляют с AL одинаковый угол, равный α, то $\vec{W}_{C_W A} = -\vec{W}_A$ и, следовательно, $\vec{W}_{C_W} = 0$.

Вычислим теперь ускорение произвольной точки, приняв $\vec{W}_{C_W}$ за полюс. Так как, $\vec{W}_{C_W} = 0$ то

$$\vec{W}_C = \vec{W}_{CC_W}; \quad W_C = C_W C\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\vec{W}_D = \vec{W}_{DC_W}; \quad W_D = C_W D\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\vec{W}_E = \vec{W}_{EC_W}; \quad W_E = C_W E\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

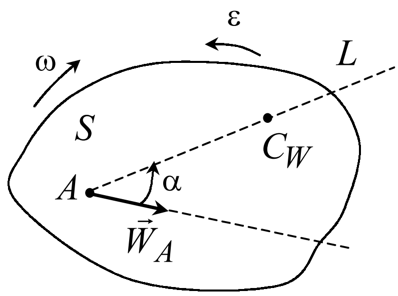
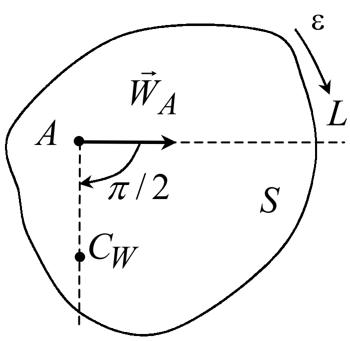
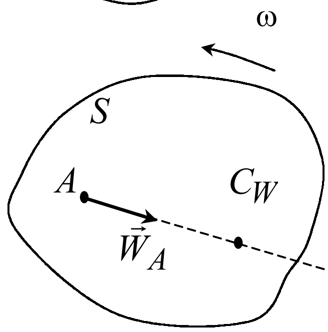
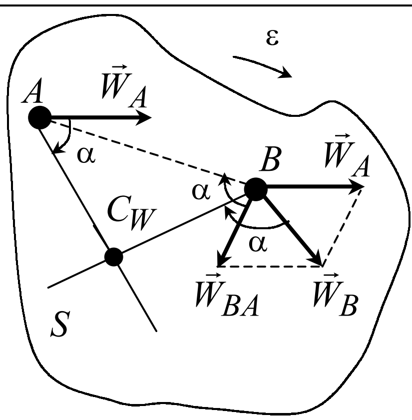
а направления ускорений определяются углом $\alpha = arctg\,\varepsilon/\omega^2$ (рис. 10.6, б). Таким образом, если в качестве полюса принять мгновенный центр скоростей, то ускорение любой точки тела найдется по тому же правилу, что и ускорение точки при вращательном движении. Роль неподвижной оси играет прямая, перпендикулярная плоскости движения и проходящая через МЦУ. Следовательно, зная положение МЦУ и ускорение какой-нибудь одной точки плоской фигуры, можно построить векторы ускорений всех ее точек. Основные способы определения положения МЦУ показаны в табл.2.

10.6. Некоторые кинематические свойства мгновенных центров скоростей и ускорений

Не следует смешивать понятия мгновенных центров скоростей и ускорений - это, вообще говоря, разные точки. Также надо различать скорость $\vec{V}^*_{C_V}$ и ускорение $\vec{W}^*_{C_W}$ движение МЦС и скорость $\vec{V}_{C_V}$ и ускорение $\vec{W}_{C_W}$ точки плоской фигуры (как известно $V_{C_V} = 0$), с которой в данный момент времени совпадает мгновенный центр. Аналогичные рассуждения имеют место и для МЦУ. Найдем скорость, с которой МЦС движется относительно опорной системы координат.

Таблица 2

<table>
<tr><th>Известные параметры</th><th>Способы нахождения МЦУ</th><th>Расчетная формула</th></tr>
<tr><td>Величина, и направление ускорения какой либо точки плоской фигуры и ее угловая скорость и угловое ускорение

– $\varepsilon \neq 0,\ \ \omega \neq 0$</td><td>
</td><td>$AC_W = \dfrac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$
$\alpha = arctg\,\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$</td></tr>
<tr><td>– $\varepsilon \neq 0,\ \ \omega = 0$</td><td>
</td><td>$AC_W = \dfrac{W_A}{\varepsilon}$</td></tr>
<tr><td>– $\varepsilon = 0,\ \ \omega \neq 0$</td><td>
</td><td>$AC_W = \dfrac{W_A}{\omega^2}$</td></tr>
<tr><td>Величины и направления ускорений двух точек плоской фигуры</td><td>
</td><td>$\dfrac{W_A}{AC_W} = \dfrac{W_B}{BC_W}$</td></tr>
</table>

Для этого продифференцируем по времени векторное равенство $\vec{r}_{C_V} = \vec{r}_A + \vec{r}_{C_V A} = \vec{r}_A + \dfrac{\vec{\omega}\times\vec{V}_A}{\omega^2}$ (рис. 10.7). В результате получим

$$\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A + \frac{\vec{\omega}\times\vec{W}_A - \vec{\varepsilon}\times\vec{V}_A}{\omega^2}\ . \qquad (10.2)$$

Пользуясь произволом в выборе точки A, предположим, что в некоторый момент времени точка A плоской фигуры совпадает с МЦС. Тогда

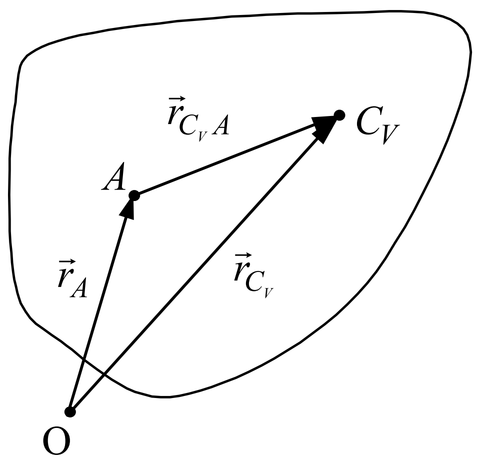


Рис. 10.7

$\vec{V}_A = \vec{V}_{C_V} = 0$, $\vec{W}_A = \vec{W}_{C_V}$ и $\vec{V}^*_{C_V} = \vec{\omega}\times\vec{W}_{C_V}\big/\omega^2$ или $\vec{W}_{C_V} = \vec{V}^*_{C_V}\times\vec{\omega}$. Последняя формула определяет величину и направление ускорения точки плоской фигуры, которая в данный момент времени является МЦС. Интересно отметить, что $\vec{W}_{C_V}$ не зависит от углового ускорения плоской фигуры. Вновь вернемся к формуле (10.2) и положим, что точка A совпадает с МЦУ. В силу $\vec{V}_A = \vec{V}_{C_W}$, $\vec{W}_A = \vec{W}_{C_W} = 0$ пишем $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_{C_W} - \vec{\varepsilon}\times\vec{V}_{C_W}\big/\omega^2$ или

$$\vec{V}_{C_W} = \frac{\omega^2\left[\omega^2\vec{V}^*_{C_V} + \vec{\varepsilon}\times\vec{V}^*_{C_V}\right]}{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

Если $\varepsilon = 0\ (\omega \neq 0)$ то $\vec{V}_{C_W} = \vec{V}^*_{C_V}$. Следовательно, при равномерном вращении скорость той точки плоской фигуры, которая в данный момент времени совпадает с МЦУ, векторно равна скорости движения МЦС.

11. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

11.1. Параметры движения

Движение твердого тела с одной неподвижной точкой называется *сферическим.*

На рис. 11.1 изображено тело с одной неподвижной точкой O (в точке O сферический шарнир). При произвольном допустимом движении тела (вращении) вокруг точки O любая точка тела (например точка A) будет перемещаться по поверхности сферы радиусом OA.

Отсюда следует и название указанного движения тела - сферическое. Выясним, сколько степеней свободы имеет тело при таком движении, т.е. сколько независимых параметров следует задавать для однозначного определения сферического движения тела. С этой целью введем две системы координат с началом в точке O. Пусть система координат $Ox_0y_0z_0$ неподвижна, а $Oxyz$ - подвижная, жестко связана с телом.

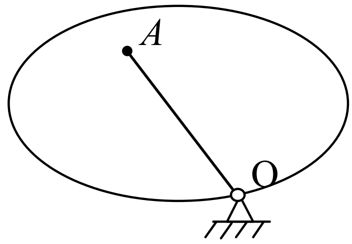


Рис. 11.1

На рис.11.2 координатные плоскости Ox_0y_0 и Oxy пересекаются по прямой *ON,* называемой линией узлов. Показаны также *углы Эйлера* φ, θ, ψ, где φ -угол собствен-ного вращения, θ -угол нутации, ψ -угол прецессии.

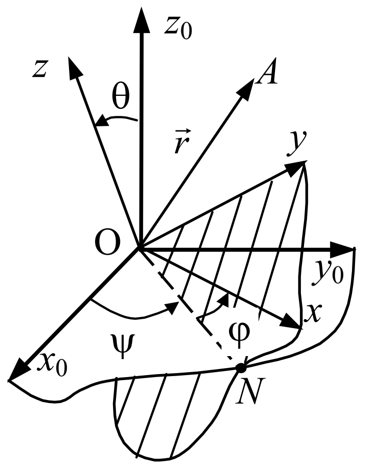


Рис. 11.2

Покажем, что путем проведения трех последовательных поворотов на углы φ, θ, ψ можно совместить подвижную систему координат с неподвижной. Это будет означать возможность перевести тело из любого положения в требуемое за три поворота. Повернем подвижную систему координат $Oxyz$ на угол φ до совмещения оси Ox с линией узлов (поворот вокруг оси Oz_0). Второй поворот - на угол и (вокруг линии узлов) до совмещения осей Oz, Oz_0.

Третий поворот – на угол ψ (вокруг оси Oz) до полного совмещения системы координат $Oxyz$ с $Ox_0y_0z_0$. Как видим, независимо от углов φ, θ, ψ всегда можно совместить подвижную систему $Oxyz$ с неподвижной $Ox_0y_0z_0$ путем проведения трех последовательных поворотов. Следовательно, при сферическом движении тело имеет три степени свободы и в качестве независимых параметров движения можно взять углы Эйлера φ, θ, ψ или другие (корабельные, самолетные и т.д.).

11.2. Распределение скоростей

Рассмотрим способ нахождения вектора скорости точки тела при его сферическом движении. Снова рассмотрим подвижную систему координат, связанную с телом. Эта система координат вращается вместе с телом и поэтому $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ меняют свои направления со временем. Введем радиус--вектор точки A тела, где $\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; x, y, z - const.
Очевидно,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \qquad (11.1)$$

Проекции вектора скорости на оси подвижной системы координат находим по формулам $V_x = \vec{V}\,\vec{i};\ V_y = \vec{V}\,\vec{j};\ V_z = \vec{V}\,\vec{k}$.

Умножая соотношение (11.1) скалярно на $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, получаем:

$$\begin{aligned} V_x &= x\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{i} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\vec{i} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\vec{i}; \\ V_y &= x\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\vec{j} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\vec{j}; \\ V_z &= x\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{k} + y\frac{d\vec{j}}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\vec{k}. \end{aligned} \qquad (11.2)$$

Поскольку $\vec{i}^{\,2} \equiv 1,\ \vec{j}^{\,2} \equiv 1,\ \vec{k}^{\,2} \equiv 1,$ то

$$\vec{i}\,\frac{d\vec{i}}{dt} \equiv 0;\ \vec{j}\,\frac{d\vec{j}}{dt} \equiv 0;\ \vec{k}\,\frac{d\vec{k}}{dt} \equiv 0$$

Далее $\vec{i}\ \vec{j} \equiv 0$ и потому $\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{j} = -\vec{i}\,\frac{d\vec{j}}{dt}$. Соответственно

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\vec{k} = -\vec{i}\,\frac{d\vec{k}}{dt};\ \frac{d\vec{j}}{dt}\vec{k} = -\vec{j}\,\frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Учитывая полученные результаты, заменим в уравнениях системы (11.2) коэффициенты при *x, y, z* соответственно. В итоге получим:

$$
\begin{aligned}
V_x &= z\left(\vec{i}\,\frac{d\vec{k}}{dt}\right) - y\left(\vec{j}\,\frac{d\vec{i}}{dt}\right);\\
V_y &= x\left(\vec{j}\,\frac{d\vec{i}}{dt}\right) - z\left(\vec{k}\,\frac{d\vec{j}}{dt}\right);\\
V_z &= y\left(\vec{k}\,\frac{d\vec{j}}{dt}\right) - x\left(\vec{i}\,\frac{d\vec{k}}{dt}\right).
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

Если теперь ввести вектор $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, где

$$
\omega_x = \vec{k}\,\frac{d\vec{j}}{dt}; \quad \omega_y = \vec{i}\,\frac{d\vec{k}}{dt}; \quad \omega_z = \vec{j}\,\frac{d\vec{i}}{dt}, \tag{11.4}
$$

то в системе (11. 3) получим

$$
\begin{aligned}
V_x &= z\omega_y - y\omega_z;\\
V_y &= x\omega_z - z\omega_x;\\
V_z &= y\omega_x - x\omega_y.
\end{aligned}
\tag{11.5}
$$

Однако, рассмотрев векторное произведение

$$
\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(z\omega_y - y\omega_z\right) + \vec{j}\left(x\omega_z - z\omega_x\right) + \vec{k}\left(y\omega_x - x\omega_y\right).
$$

мы видим, что соотношения (11. 5) можно записать в виде

$$
\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}\,. \tag{11.6}
$$

При изучении вращательного движения тела вокруг неподвижной оси была получена аналогичная формула, где $\vec{\omega}$- вектор угловой скорости был направлен вдоль оси вращения тела.

В данном случае проекции вектора $\vec{\omega}$ на оси подвижной системы определены соотношениями (11.4), и этот вектор будем называть *вектором абсолютной угловой скорости при сферическом движении тела.* Из соотношений (11.3) следует, что со временем изменяется как модуль, так и направление этого вектора.

Следствие: вектор абсолютной скорости точки тела находится по формуле $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ и он ортогонален плоскости векторов $\vec{\omega}, \vec{\rho}$.

Модуль скорости равен $V = \omega\, h$, где $\omega = |\vec{\omega}|$, $h = |\vec{\rho}| \sin\alpha$;

если $\vec{\rho} = \lambda\, \vec{\omega}$, то есть точка A принадлежит прямой Ω (рис. 11.3), то $\vec{V} = \vec{\omega} \times \lambda\, \vec{\omega} = 0$.

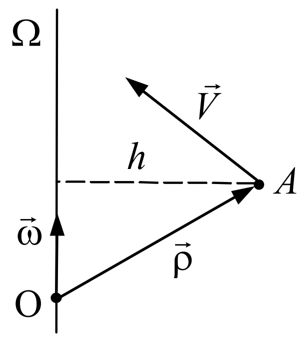


Рис. 11.3

Следовательно, любая точка прямой Ω имеет нулевую скорость в данный момент времени. Поэтому прямая Ω, проходящая через неподвижную точку O и по которой направлен вектор $\vec{\omega}$, *называется мгновенной осью вращения тела.* С течением времени положение соответственно в подвижной и неподвижной системах координат этой прямой меняется так, что множество таких прямых образует две поверхности: *подвижный и неподвижный аксоиды.*

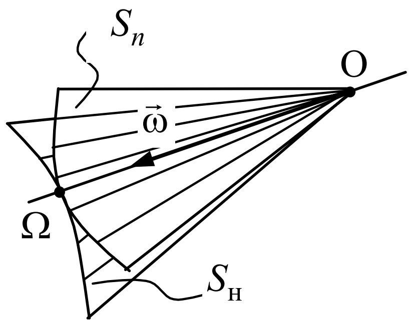


Рис. 11.4

Подвижный аксоид "перекатывается" по неподвижному (рис. 11.4), а их пересечение - мгновенная ось вращения - Ω.

Пример. Подвижный конус перекатывается по неподвижной плоскости так, что вершина его точка O остается неподвижной (рис. 11.5). При этом точка B при вращении конуса делает n оборотов в минуту вокруг оси Oz. Необходимо найти абсолютную угловую скорость вращения конуса, а также вектор скорости точки A в положении, указанном на чертеже. Вращение конуса вокруг точки O получается наложением двух вращений: вращением оси симметрии OB конуса вокруг оси Oz (переносное вращение) и вращением конуса вокруг оси OB (относительное вращение). На рис.11.5 показаны соответствующие векторы угловых скоростей $\vec{\omega}_e, \vec{\omega}_r$ и по условию задачи

$$\omega_e = \frac{\pi\, n}{30} c^{-1}.$$

Поскольку все точки прямой Ω, принадлежащие как конусу, так и плоскости R, имеют нулевую скорость, то Ω - мгновенная ось вращения и вектор абсолютной угловой скорости $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$ должны принадлежать Ω.

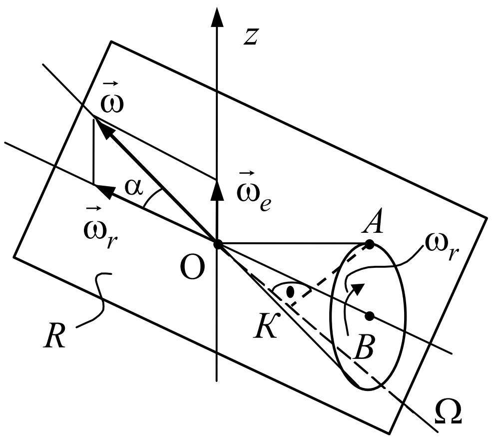


Рис. 11.5

Из рис.(11.6) видим, что $\omega = \omega_e \dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{\pi n}{30\sin\alpha}\ (c^{-1})$ и

$\omega_r = \omega_e \cdot ctg\alpha = \dfrac{\pi n}{30} ctg\alpha\ (c^{-1})$. Очевидно, в данном случае неподвижная плоскость - неподвижный аксоид, а поверхность конуса - подвижный аксоид.

Теперь найдем скорость точки A. По формуле (11.5) получаем

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \overline{OA},\ V_A = \omega \cdot OA \sin(\pi - 2\alpha),\ \text{т.е.}\ V_A = \omega \cdot AK,\ \ AK = OA \sin 2\alpha.$$

11.3. Распределение ускорений

При нахождении вектора ускорения точки тела, совершающего сферическое движение, будем исходить из формулы (11.6):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{11.7}$$

Очевидно, $\dfrac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, а для вектора $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$, определяющего быстроту изменения со временем вектора угловой скорости, введем обозначение $\vec{\varepsilon}$ - вектор углового ускорения тела. Тогда формула (11.7) перепишется так:

$$\vec{W} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}). \tag{11.8}$$

Введем обозначения: $\vec{W}^{oc} = \vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ - *осестремительное ускорение;* $\vec{W}^{вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$ - *вращательное ускорение.* Таким образом,

$$\vec{W} = \vec{W}^{oc} + \vec{W}^{вр}. \tag{11.9}$$

На рис.(11.6) показаны векторы $\vec{W}^{oc}$ и $\vec{W}^{вр}$ для точки A.
При этом $\vec{W}^{oc}$ всегда направлен по перпендикуляру к мгновенной оси вращения Ω и $W^{oc} = \omega^2 h$. Однако вращательное ускорение $\vec{W}^{вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$ не обязано быть ортогональным осестремительному $\vec{W}^{oc}$, как это имело место, например, при вращении тела вокруг фиксированной оси.

В примере (см. рис. 11.5) найдем угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{W}_A$.

Из рис. (11.7) видно, что вектор $\vec{\omega}$ вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$. Поэтому точка D (конец вектора $\vec{\omega}$) имеет скорость $\vec{V}_D = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{OD} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}$. Одновременно

$$\vec{V}_D = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$$

поэтому $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}$. Модуль этого вектора, как и $\vec{\omega}$, остается постоянным $\varepsilon = \omega_e \times \omega$.

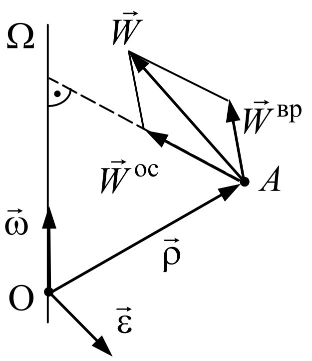


Рис. 11.6

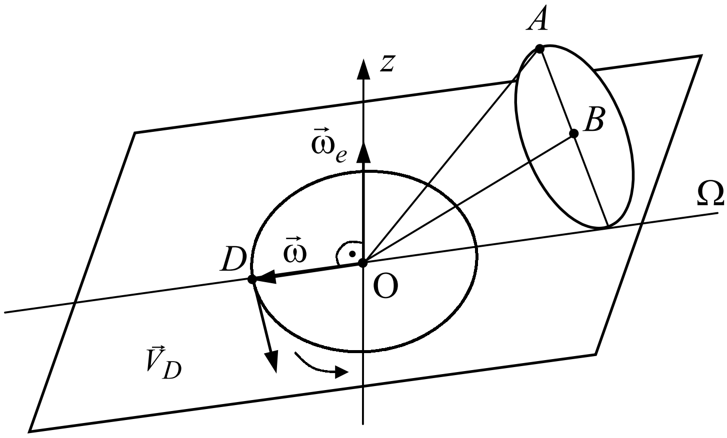


Рис. 11.7

Найдем теперь $\vec{W}^{вр}$, $\vec{W}^{oc}$. Очевидно, $\vec{W}^{oc}$ направлено из точки A по перпендикуляру к прямой Ω и равно $W^{oc} = \omega^2 \cdot AK$.

Вращательное ускорение $\vec{W}^{вр}$ лежит в плоскости чертежа (рис.11.8), ортогонально OA и равно $W^{вр} = \varepsilon \cdot OA$. Абсолютное ускорение точки A $\vec{W} = \vec{W}^{вр} + \vec{W}^{oc}$ также лежит в плоскости чертежа.

Таким образом, формулы (11.6) и (11.9) позволяют находить скорость и ускорение точек тела в конкретных задачах.

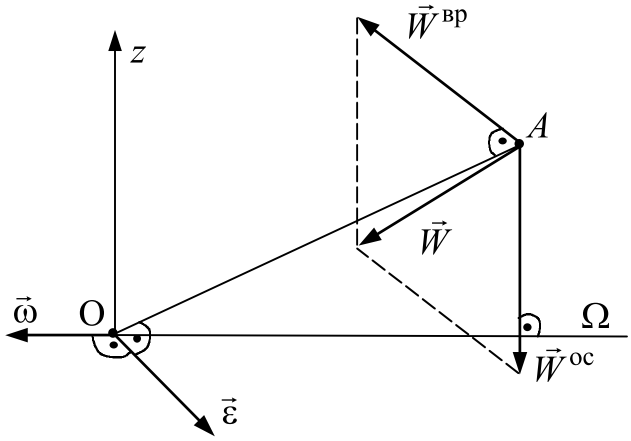


Рис. 11.8

12. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

12.1. Абсолютное и относительное движения точки. Переносное движение

В разделе 8 изучалось движение точки относительно условно неподвижной системы отсчета, за которую в большинстве прикладных задач принималась система координат, связанная с Землей. Часто в задачах механики движения точки относительно неподвижной системы отсчета удобно рассматривать состоящими из нескольких, как правило, более простых движений. При этом движение точки изучается одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых движется по заданному закону относительно системы отсчета, принимаемой за неподвижную (основную). Например, сложное движение груза, поднимаемого башенным краном при одновременном повороте стрелы крана, относительно неподвижной системы координат, связанной с Землей, можно считать состоящим из двух более простых движений: из прямолинейного движения груза относительно подвижной системы координат, связанной с вращающейся стрелой крана, и движения груза по дуге окружности вследствие вращательного движения стрелы крана относительно неподвижной системы координат. Или движение шарика М (рис. 12.1) по прямолинейной трубке, которая одновременно вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку О, дает сложную траекторию - спираль. Аналогично могут быть представлены движения человека, идущего по вагону движущегося поезда, относительно неподвижного перрона, движение каждого из поршней двигателя внутреннего сгорания движущегося автомобиля относительно неподвижной дороги, движение пловца, переплывающего реку, относительно неподвижного берега и т.д. Движения любых объектов по поверхности Земли простые с точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле, покажутся сложными наблюдателю, находящемуся, например, на неподвижной звезде.

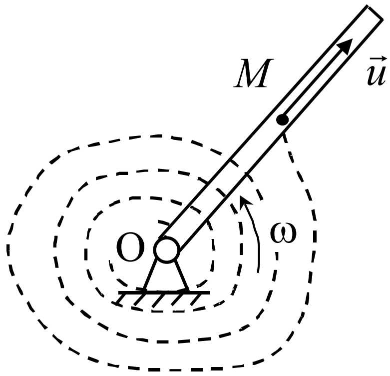


Рис. 12.1

Сложным движением точки называется движение точки, рассматриваемое одновременно в неподвижной и подвижной системах отсчета. При этом движение точки относительно неподвижной (основной) системы отсчета называется *абсолютным.* Скорость и ускорение точки в этом движении называется абсолютной скоростью и абсолютным ускорением и обозначаются соответственно $\vec{V}$ и $\vec{W}$.

Относительным движением точки называется движение точки относительно подвижной системы отсчета. Скорость и ускорение точки в этом движении называются относительной скоростью $\vec{V}_r$ и относительным ускорением $\vec{W}_r$ точки.

Переносным движением называется движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета. Переносной скоростью $\vec{V}_e$ и переносным ускорением $\vec{W}_e$ называется скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка. В примере на рис.12.1 переносная скорость и ускорение шарика равны скорости и ускорению точки М трубки, в которой в данный момент времени находится шарик.

Если условно остановить относительное движение, то неподвижный наблюдатель увидит только переносное движение и, наоборот, если условно остановить переносное движение, то увидит относительное движение.

Этот прием позволяет установить вид относительного и переносного движения. Например, условно останавливая вращение трубки (переносное движение), увидим относительное движение шарика (см. рис.12.1). Это будет прямолинейное движение шарика вдоль трубки. Условно останавливая движение шарика вдоль трубки (относительное движение), увидим переносное движение. Это вращательное движение трубки вокруг неподвижной оси, проходящей через точку О. Заметим, что переносная скорость и переносное ускорение точки зависят от ее расположения в подвижной системе отсчета, которая как бы переносит на себе эту точку. Например, от расположения шарика в трубке зависит радиус окружности, которую описывает шарик при вращении трубки, а, следовательно, переносные скорость и ускорение шарика.

Если абсолютное, переносное и относительное движения заданы, то соответствующие скорости и ускорения определяются уже известными методами кинематики точки (разд. 8) и твердого тела (разд. 9-11). Однако часто бывают заданы лишь относительное и переносное движения, при этом возникает задача определения абсолютной скорости $\vec{V}$ и абсолютного ускорения $\vec{W}$ точки. Следовательно, необходимо установить зависимости между кинематическими характеристиками абсолютного, относительного и переносного движений.

12.2. Теорема сложения скоростей

Рассмотрим движение точки М (рис.12.2) относительно двух систем координат $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$. Пусть система координат $O_1x_1y_1z_1$ движется относительно условно неподвижной системы координат $Oxyz$ по заданному закону и движение точки М относительно подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ задано уравнениями $x_1 = x_1(t),\ y_1 = y_1(t),\ z_1 = z_1(t)$.

Проведем радиусы-векторы $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_{01}$, как показано на рис.12.2. Радиус-вектор $\vec{r}$ определяет положение точки М относительно неподвижной системы координат Оxyz, а его изменение характеризует абсолютное движение точки М. Радиус-вектор $\vec{r}_1$ определяет положение точки М относительно подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, а его изменение характеризует относительное движение точки М. Радиус-вектор $\vec{r}_{01}$ определяет положение точки O_1 относительно неподвижной системы координат Оxyz, а его изменение характеризует абсолютное движение начала O_1 подвижной системы координат. Из рис. 12.2 очевидно, что в любой момент времени справедлива зависимость

$$\vec{r} = \vec{r}_{01} + \vec{r}_1 \tag{12.1}$$

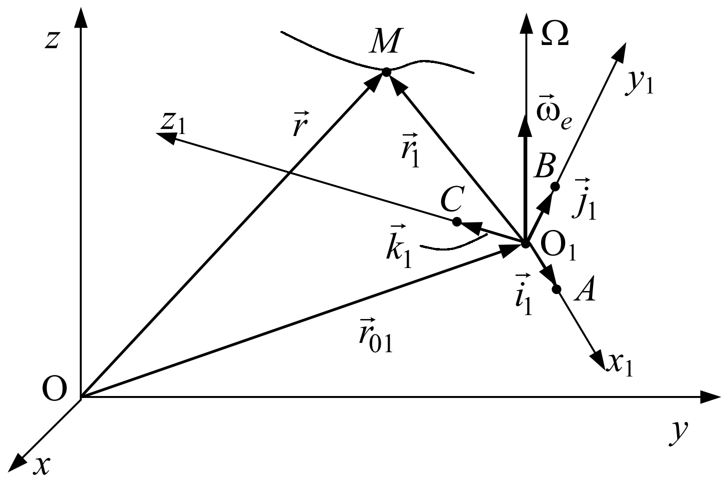


Рис. 12.2

Разложим вектор $\vec{r}_1$ на составляющие по осям подвижной системы координат

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \tag{12.1}$$

где $\vec{i}_1\vec{j}_1\vec{k}_1$ - орты подвижной системы координат; x_1, y_1, z_1 - координаты точки М в подвижной системе координат, равные проекциям радиуса-вектора $\vec{r}_1$ на оси этой системы.

Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_{01} + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \tag{12.3}$$

Все величины, входящие в (12.3), переменные: $\vec{r}$, так как точка М движется относительно неподвижной системы координат O*xyz;* x_1, y_1, z_1, так как точка М движется относительно подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$; $\vec{r}_{01}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$,- так как система координат $O_1x_1y_1z_1$ движется произвольно относительно системы координат O*xyz*. Взяв производную по времени от равенства (12.3), учитывая, что $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$ - абсолютная скорость точки М, получим:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}_{01}}{dt}+\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1+\frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1+\frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1+x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt}+y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt}+z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}. \qquad (12.4)$$

Если условно остановить переносное движение, т.е. закрепить систему координат $O_1x_1y_1z_1$, то из формулы (12.4), полагая в ней $\vec{r}_{01},\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1$ постоянными величинами, определим относительную скорость точки М:

$$\vec{V}_r=\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1+\frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1+\frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1. \qquad (12.5)$$

Для определения переносной скорости точки М условно остановим относительное движение точки, закрепив ее в подвижной системе координат $O_1x_1y_1z_1$, тогда, полагая в (12.4) $x_1y_1z_1$ постоянными, получим

$$\vec{V}_e=\frac{d\vec{r}_{01}}{dt}+x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt}+y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt}+z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}. \qquad (12.6)$$

Здесь $\dfrac{d\vec{r}_{01}}{dt}=\vec{V}_{01}$ - абсолютная скорость точки O_1. Орты $\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1$ можно рассматривать как радиусы-векторы точек *A, B, C* - находящихся на осях *x,y,z* соответственно (см.рис.12.2). Тогда производные по времени от $\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1$ представляют собой скорости точек *A, B* и С:

$$\vec{V}_A=\frac{d\vec{i}_1}{dt};\quad \vec{V}_B=\frac{d\vec{j}_1}{dt};\quad \vec{V}_C=\frac{d\vec{k}_1}{dt}.$$

Но векторы $\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1$ вместе с подвижными осями $x_1y_1z_1$ в переносном движении вращаются вокруг мгновенной оси Ω с переносной угловой скоростью $\vec{\omega}_e$, поэтому скорости точек *A, B* и *C* можно определить по формулам Пуассона

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt}=\vec{\omega}_e\times\vec{i}_1;\quad \frac{d\vec{j}_1}{dt}=\vec{\omega}_e\times\vec{j}_1;\quad \frac{d\vec{k}_1}{dt}=\vec{\omega}_e\times\vec{k}_1. \qquad (12.7)$$

После подстановки (12.7) в (12.6) получим

$$\vec{V}_e=\vec{V}_{01}+x_1\vec{\omega}_e\times\vec{i}_1+y_1\vec{\omega}_e\times\vec{j}_1+z_1\vec{\omega}_e\times\vec{k}_1=\vec{V}_{01}+\vec{\omega}_e\times\left(x_1\vec{i}_1+y_1\vec{j}_1+z_1\vec{k}_1\right)$$

или с учетом (12.2)

$$\vec{V}_e=\vec{V}_{01}+\vec{\omega}_e\times\vec{r}_1, \qquad (12.8)$$

т.е. переносная скорость точки М определяется в общем случае как скорость точки твердого тела, движущегося поступательно со скоростью полюса O_1 и одновременно совершающего сферическое движение относительно этого полюса.

Таким образом, подставляя (12.5) и (12.6) в (12.4) окончательно получим:

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \tag{12.9}$$

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме ее переносной и относительной скоростей.

Из формулы (12.9) следует, что абсолютная скорость точки $\vec{V}$ определяется диагональю параллелограмма, построенного на векторах переносной $\vec{V}_e$ и относительной $\vec{V}_r$ скоростей, а ее модуль может быть найден по теореме косинусов

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_eV_r \cos\left(\vec{V}_e \hat{,} \vec{V}_r\right)}. \tag{12.10}$$

12.3. Теорема сложения ускорений

В соответствии с определением абсолютное ускорение точки М $\vec{W} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Возьмем производную по времени от равенства (12.4):

$$\begin{gathered}\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_{01}}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2} + \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \\ + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1 + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right).\end{gathered} \tag{12.11}$$

Чтобы найти относительное ускорение точки, достаточно условно остановить переносное движение, т.е. положить $\vec{r}_{01}, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ постоянными величинами, тогда из формулы (12.11)

$$\vec{W}_r = \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1. \tag{12.12}$$

Для определения переносного ускорения точки М условно остановим относительное движение точки, тогда из формулы (12.11), полагая $x_1 y_1 z_1$ постоянными величинами, получим:

$$\vec{W}_e = \frac{d^2\vec{r}_{01}}{dt^2} + x_1\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2} + y_1\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2} + z_1\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}. \qquad (12.13)$$

Сравнивая (12.11), (12.12) и (12.13) заметим, что абсолютное ускорение точки при сложном движении складывается из трех составляющих, последняя из которых

$$\vec{W}_c = 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\vec{i}_1}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right). \qquad (12.14)$$

и называется ускорением Кориолиса. Подставляя (12.12), (12.13), (12.14) в (12.11), окончательно получим:

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c \qquad (12.15)$$

Абсолютное ускорение точки равно векторной *сумме* переносного, относительного ускорений и ускорения Кориолиса.

Доказанная теорема называется также теоремой Кориолиса по имени французского ученого Гаспара Кориолиса (1792-1843), разработавшего теорию сложного движения точки (1831).

Модуль абсолютного ускорения точки равен

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$$

Проекции абсолютного ускорения W_x, W_y, W_z на оси прямоугольной системы координат O*xyz* найдем, проектируя равенство (12.15) на эти оси:

$$W_x = W_{ex} + W_{rx} + W_{cx},$$

$$W_y = W_{ey} + W_{ry} + W_{cy},$$

$$W_z = W_{ez} + W_{rz} + W_{cz}.$$

Углы, которые образует вектор абсолютного ускорения $\vec{W}$ с положительными направлениями осей *x,y,z* (или, что то же, с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ этих осей), можно определить по направляющим косинусам вектора $\vec{W}$:

$$\cos\left(\vec{W} \,\hat{,}\, \vec{i}\right) = \frac{W_x}{W}; \quad \cos\left(\vec{W} \,\hat{,}\, \vec{j}\right) = \frac{W_y}{W}; \quad \cos\left(\vec{W} \,\hat{,}\, \vec{k}\right) = \frac{W_z}{W}.$$

Перепишем уравнение (12.14) с учетом (12.7) в виде

$$\vec{W}_c = 2\left(\frac{dx_1}{dt}\vec{\omega}_e \times \vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{\omega}_e \times \vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{\omega}_e \times \vec{k}_1\right) =$$
$$2\,\vec{\omega}_e \times \left(\frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1\right). \qquad (12.16)$$

Но в соответствии с формулой (12.5) выражение в скобках уравнения (2.16) есть относительная скорость точки $\vec{V}_r$, следовательно

$$\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}r. \qquad (12.17)$$

Ускорение Кориолиса равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки.

Оно характеризует изменение абсолютной скорости точки, обусловленное: а) влиянием относительного движения точки на переносную скорость, так как при $\vec{V}_r \neq 0$ переносная скорость точки изменяется за счет изменения положения точки в подвижной системе координат; б) влиянием переносного движения на относительную скорость точки, так как при $\vec{\omega}_e \neq 0$ вектор $\vec{V}_r$ поворачивается вместе с подвижной системой координат относительно неподвижной системы координат. Вклад каждой из указанных причин в величину ускорения Кориолиса одинаков и равен $\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$.

Из определения векторного произведения и формулы (12.17) следует, что модуль ускорения Кориолиса равен

$$W_c = 2\omega_e V_r \sin\left(\vec{\omega}_e \,\widehat{,}\, \vec{V}_r\right). \qquad (12.18)$$

Отсюда очевидно, что ускорение Кориолиса равно нулю в трех случаях:

1) если $\vec{\omega}_e = 0$, т.е., в частности, при поступательном переносном движении;

2) если $\vec{V}_r = 0$, т.е. в те моменты времени, когда относительная скорость точки равна нулю;

3) если $\sin\left(\vec{\omega}_e \,\widehat{,}\, \vec{V}_r\right) = 0$, т.е. когда угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$ равен нулю или 180°, другими словами, $\vec{\omega}_e$ параллелен $\vec{V}_r$.

Направляется вектор $\vec{W}_c$ перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$, в ту сторону, чтобы с конца вектора $\vec{W}_c$ можно было бы видеть поворот вектора $\vec{\omega}_e$ на совмещении к вектору $\vec{V}_r$ на наименьший угол против хода часовой стрелки.

Так как вектор $\vec{W}_c$ приложен в точке М, совершающей сложное движение, то при определении его направления удобно вектор переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, направленный по мгновенной оси Ω, условно перенести в точку М (рис. 12.3).

Пример. По трубке *OA* (рис. 12.4), вращающейся в вертикальной плоскости вокруг неподвижной оси, проходящей через точку О по закону $\varphi = t^2$ (φ - в радианах, t - в секундах), движется шарик М по закону $OM = 3t - t^2$ (*OM* - в метрах). Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение шарика в момент времени $t = 1c$.

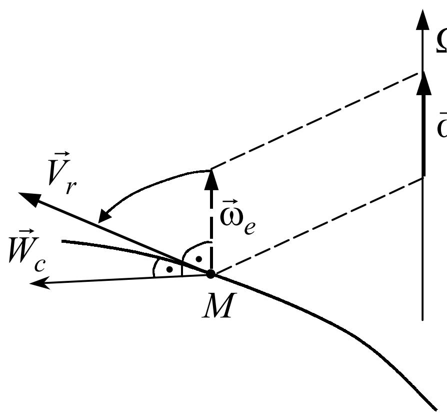


Рис. 12.3

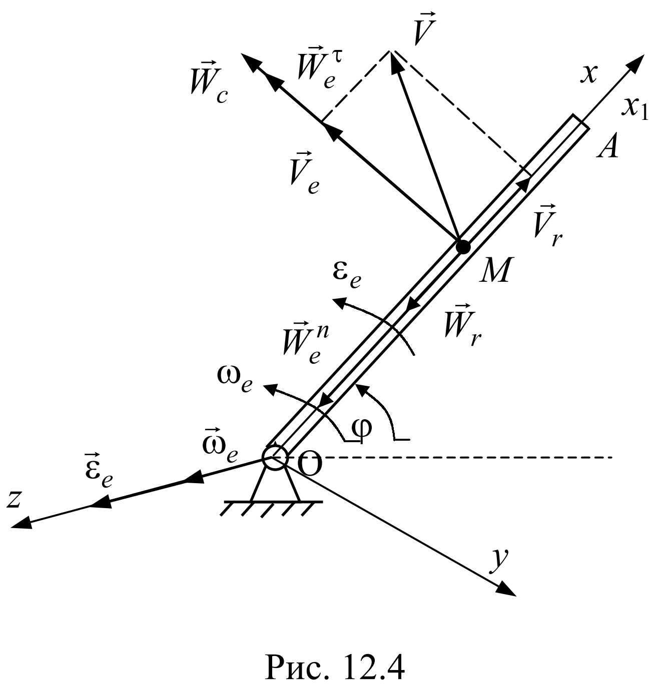


Рис. 12.4

Для заданного момента времени $t = 1c$ определим угол поворота трубки $\varphi = t^2 = 1^2 = 1\,(\text{рад})$ и расстояние $OM = 3t - t^2 = 3 - 1 = 2$ (м). Изобразим трубку и шарик при этих значениях φ и *OM*. Для определения вида переносного и относительного движения введем подвижную и неподвижную системы координат с началом в точке О.

Подвижную систему координат, как правило, связывают с движущимся телом, поэтому подвижную ось x_1 свяжем с вращающейся трубкой и направим ее вдоль трубки OA. Ось z неподвижной системы координат направим по оси вращения трубки, ось y - перпендикулярно трубке в плоскости движения трубки, а ось x - вдоль трубки (в данный момент времени она совпадает с подвижной осью x_1). Ранее было установлено, что при таком выборе подвижной системы координат относительным движением шарика будет прямолинейное движение вдоль трубки по закону $x_1 = OM = 3t - t^2$, а переносным движением будет вращательное движение трубки вокруг неподвижной оси z по закону $\varphi = t^2$.

В соответствии с теоремой сложения скоростей $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. Условно останавливая переносное движение (вращение трубки) определяем относительную скорость шарика в прямолинейном движении вдоль трубки

$$V_r = \dot{x}_1 = 3 - 2t.$$

При $t = 1c$ $V_r = 3 - 2 = 1$ м/с. Так как $V_r > 0$, то вектор $\vec{V}_r$ направлен вдоль трубки в положительном направлении отсчета координаты x_1.

Условно останавливая относительное движение, определим переносную скорость шарика как скорость той точки М вращающейся трубки, с которой шарик совпадает в данный момент времени t = 1с (когда $OM = 2$м). Переносная угловая скорость $\omega_e = \dot{\varphi} = 2t$ и при $t = 1$ $\omega_e = 2$ рад/с. Так как $\bar{\omega}_e > 0$, то вращение трубки происходит в сторону увеличения угла φ, т.е. против хода часовой стрелки, а вектор $\bar{\omega}_e$ направлен по оси вращения z в положительном направлении отсчета координаты z. Тогда переносная скорость шарика $V_e = \omega_e(OM) = 2t \cdot 2 = 4t$. При $t = 1$ $V_e = 4$ м/с. Вектор $\vec{V}_e$ направлен перпендикулярно радиусу OM в сторону вращения трубки. Так как векторы $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$ взаимно перпендикулярны, то модуль абсолютной скорости шарика в момент времени t = 1с равен

$$V = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{16 + 1} = 4{,}12 \text{ м/с}.$$

Вектор абсолютной скорости изображаем диагональю прямоугольника, построенного на векторах $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$.

В соответствии с теоремой сложения ускорений абсолютное ускорение шарика

$$\vec{W} = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_c .$$

В случае переносного вращательного движения трубки переносное ускорение шарика найдем как векторную сумму нормального и касательного ускорений той точки трубки, с которой в данный момент времени t = 1с совпадает шарик

$$\vec{W}_e = \vec{W}_e^n + \vec{W}_e^\tau$$

Переносное нормальное ускорение

$$W_e^n = \omega_e^2 (OM) = (2t)^2\, 2 = 8t^2 \text{ и при } t = 1\text{с} \;\; W_e^2 = 8\,\text{м}/\text{с}^2 .$$

Вектор $\vec{W}_e^n$ направлен из точки М по кратчайшему расстоянию к оси вращения, т.е. к точке О. Переносное касательное ускорение $W_e^\tau = \varepsilon_e (OM)$, где переносное угловое ускорение $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \ddot{\varphi} = 2\,\text{рад}/\text{с}^2$ - постоянное. Так как $\varepsilon_e > 0$ и $\omega_e > 0$, то векторы $\vec{\varepsilon}_e$ и $\vec{\omega}_e$ направлены по оси вращения z в одну сторону, а переносное вращательное движение трубки - равноускоренное против хода часовой стрелки. При t = 1с $W_e^\tau = 4\,\text{м}/\text{с}^2$, а вектор $\vec{W}_e^\tau$ расположен в плоскости вращения трубки и направлен перпендикулярно ОМ в направлении углового ускорения ε_e, т.е. совпадает по направлению с вектором переносной скорости $\vec{V}_e$.

При прямолинейном относительном движении шарика вдоль трубки относительное ускорение шарика

$$W_r = \ddot{x}_1 = \dot{V}_r = -2\,\text{м}/\text{с}^2 .$$

Так как $W_r < 0$, а $V_r > 0$, то движение шарика вдоль трубки является равнозамедленным и вектор $\vec{W}_r$ направлен в сторону, противоположную $\vec{V}_r$, т.е. в сторону, противоположную положительному отсчету координаты x_1

Ускорение Кориолиса равно $\vec{W}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$.

Так как векторы $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$ взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения Кориолиса при t = 1с

$$W_c = 2\omega_e V_r \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 4\ \text{м/с}^2.$$

Вектор $\vec{W}_c$ перпендикулярен векторам $\vec{\omega}_e$ и $\vec{V}_r$, т.е. плоскости Оxy, а значит расположен в плоскости чертежа и направлен в сторону противоположную положительному направлению оси y, так как в этом случае с конца вектора $\vec{W}_c$ поворот вектора $\vec{\omega}_e$ к вектору $\vec{V}_r$ на наименьший угол мы увидим происходящим против хода часовой стрелки.

Для определения модуля абсолютного ускорения шарика спроектируем векторное уравнение (12.15) на оси неподвижной системы координат Oxyz и найдем проекции абсолютного ускорения при t = 1с

$$W_x = -W_e^n - W_r = -8 - 2 = -10\,\text{м}/\text{с}^2\,;$$

$$W_y = -W_e^\tau - W_c = -4 - 4 = -8\,\text{м}/\text{с}^2;$$

$$W_z = 0.$$

Тогда модуль абсолютного ускорения при t = 1 с равен

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{100 + 64} = 12{,}81\ \text{м}/\text{с}^2\,.$$

Очевидно, что вектор $\vec{W}$ расположен в плоскости Oxy.

13. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

13.1. Постановка задачи. Некоторые понятия, определения

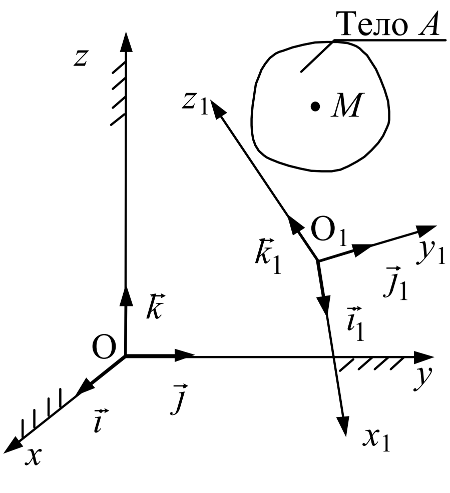


Рис. 13.1

Сложным движением твердого тела называется такое движение, при котором оно одновременно участвует в нескольких движениях, происходящих в основной системе координат, принятой за неподвижную, и подвижных системах координат.

Остановимся на рассмотрении простейшего случая сложного движения твердого тела, состоящего из двух движений. При этом тело A (рис. 13.1) движется относительно подвижной системы координат $\mathrm{O}_1x_1y_1z_1$, а последняя совершает заданное движение относительно основной системы координат Oxyz, принимаемой за неподвижную. Примерами такого движения могут быть: движение колеса 2 (сателлита) планетарного конического зацепления (рис.13.2), движение сателлита 2 по неподвижному колесу 1 (рис.13.3) и др.

При сложном движении тела следует различать:

абсолютное движение тела, происходящее относительно неподвижной системы координат Oxyz. Кинематические характеристики движения тела и его точек при этом движении называются абсолютными:

$\vec{\omega}$ - абсолютная угловая скорость тела;

$\vec{\varepsilon}$ - абсолютное угловое ускорение тела;

$\vec{V}$ - абсолютная скорость точки М;

$\vec{W}$ - абсолютное ускорение точки М.

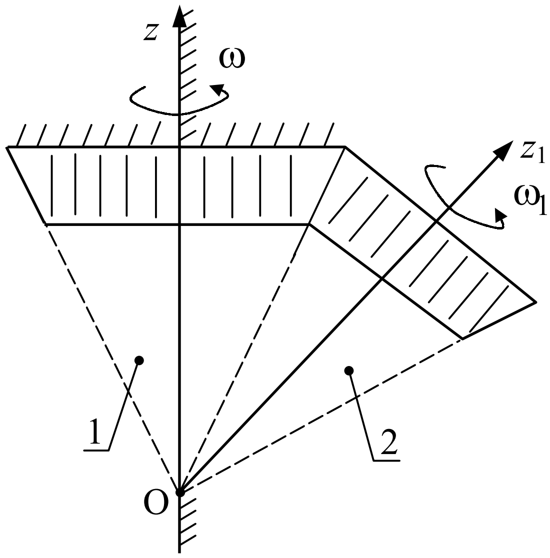


Рис.13.2

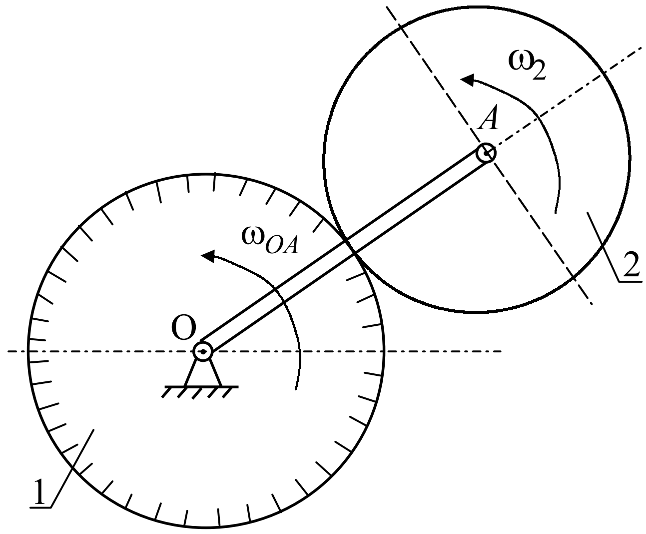


Рис. 13.3

Относительное движение тела, происходящее относительно подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Кинематические характеристики движения тела $\vec{\omega}_r, \vec{\varepsilon}_r$ и его точек $\vec{V}_r, \vec{W}_r$ при этом движении называются относительными.

Переносное движение - движение подвижной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ (среды) относительно неподвижной системы координат O*xyz.* Мгновенная угловая скорость $\vec{\omega}_e$ и мгновенное угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_e$ подвижной системы координат (среды) относительно неподвижной называется угловой скоростью и угловым ускорением переносного движения. Скорость и ускорение той точки подвижной среды, с которой в данный момент совпадает точка М тела, называются переносной скоростью $\vec{V}_e$ и переносным ускорением $\vec{W}_e$ точки М.

Задача заключается в нахождении зависимости между основными кинематическими характеристиками составляющих движений и абсолютного движения.

Движение твердого тела может складываться из следующих двух движений:

1) переносное движение - поступательное,
 относительное движение - поступательное;
2) переносное движение - поступательное,
 относительное движение - вращение вокруг оси;
3) переносное движение - вращение вокруг неподвижной оси,
 относительное движение - вращение вокруг оси;
4) переносное движение - поступательное,
 относительное движение - вращение вокруг точки.

и другие.

13.2. Сложение поступательных движений

Пусть в относительном движении тело движется поступательно со скоростью $\vec{V}_r$ (рис. 13.4), а в переносном - поступательно со скоростью $\vec{V}_e$, тогда все точки тела в относительном движении имеют скорости $\vec{V}_r$, а в переносном - $\vec{V}_e$. Значит, по теореме о сложении скоростей все точки тела будут иметь в каждый момент времени геометрически равные скорости

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

Поэтому *абсолютное движение тела будет поступательным.*

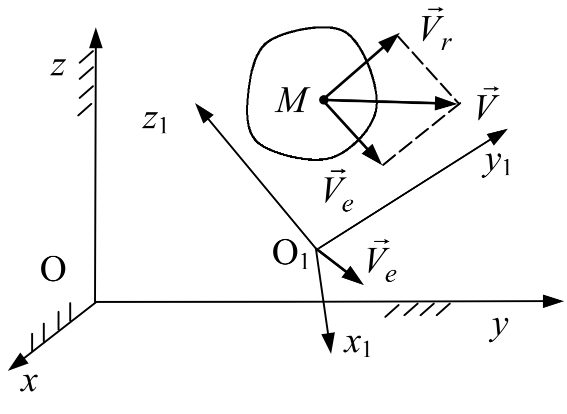


Рис. 13.4

13.3. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Рассмотрим случай сложения вращений вокруг двух пересекающихся осей.

Пусть твердое тело участвует в двух вращательных движениях: переносном с угловой скоростью $\vec{\omega}_e$, вокруг неподвижной оси z и относительном с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$ вокруг подвижной оси z_1. Оси вращательных движений пересекаются в некоторой точке О (рис. 13.5). Векторы угловых скоростей как скользящие векторы перенесены в точку О.

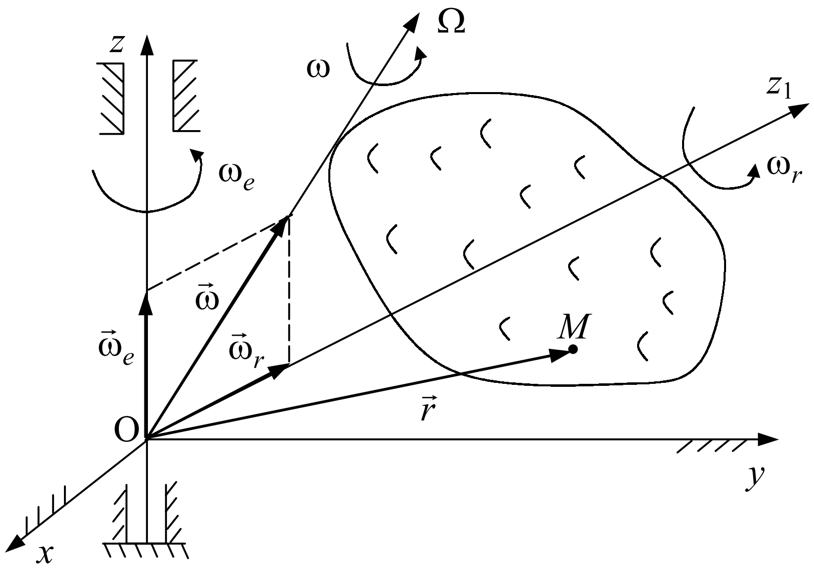


Рис.13.5

Точка О, находящаяся одновременно на неподвижной оси z и подвижной z_1 остается неподвижной во все время движения тела. Следовательно. *результирующее (абсолютное) движение тела будет сферическим,* т.е. движением вокруг неподвижной точки. Значит, в каждый момент времени представляет собой вращение вокруг мгновенной оси Ω, проходящей через точку О с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Определим направление мгновенной оси и вектор угловой скорости абсолютного движения тела.

Найдем абсолютную скорость произвольной точки М тела

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e.$$

В относительном и переносном движениях точка М имеет скорости,

$$\vec{V}_r = \vec{\omega}_r \times \vec{r}; \quad \vec{V}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки.

Тогда получим

$$\vec{V} = \vec{\omega}_r \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{r} = (\vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e) \times \vec{r}.$$

Скорость точки в абсолютном движении относительно мгновенной оси вращения Ω равна $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Приравнивая правые части последнего и предпоследнего уравнений. получим

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e \qquad (13.1)$$

Из формулы (13.1) следует:

- угловая скорость абсолютного вращения равна векторной сумме относительной и переносной угловых скоростей;
- мгновенная ось вращения направлена вдоль вектора $\vec{\omega}$, т.е. по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{\omega}_r$ и $\vec{\omega}_e$.

В случае $\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_e$ из формулы (13.1) следует, что $\omega = 0$.

Совокупность двух вращательных движений вокруг одной и той же оси с одинаковыми по модулю и противоположно направленными угловыми скоростями эквивалентна покою.

Если тело участвует одновременно в n вращательных движениях вокруг нескольких пересекающихся осей, то последовательное применение правила сложения вращательных движений вокруг двух пересекающихся осей позволяет заменить любое количество вращательных движений вокруг пересекающихся осей одним вращением, угловая скорость которого равна геометрической сумме угловых скоростей составляющих вращательных движений

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \ldots + \vec{\omega}_n = \sum_{j=1}^{n} \vec{\omega}_j.$$

Пример. Рассмотрим планетарное коническое зацепление (рис. 13.6). При заданных углах 2α и 2β, а также переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$ вращения подвижной оси Oz_1 вокруг неподвижной оси Oz определить абсолютную угловую скорость $\vec{\omega}$ и относительную угловую скорость $\vec{\omega}_r$ колеса 2.

Пусть подвижная ось Oz_1 вращается вокруг неподвижной оси Oz с переносной угловой скоростью ω_e, направленной против хода часовой стрелки. Тогда вектор $\vec{\omega}_e$ направлен вдоль оси Oz из точки O пересечения осей Oz и Oz_1 вверх по оси Oz, при этом с его конца будем видеть вращение оси Oz_1 вокруг Oz против хода часовой стрелки.

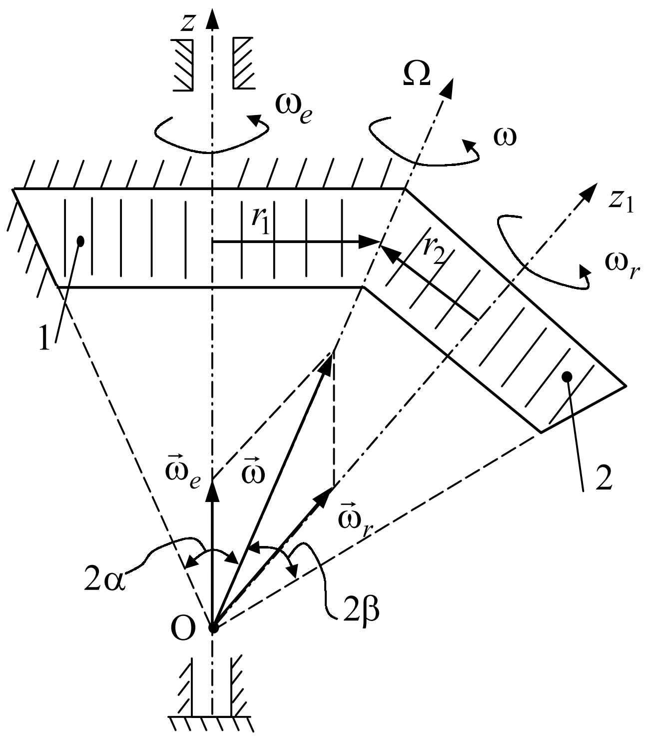


Рис.13.6

В относительном движении колесо 2 будет вращаться вокруг подвижной оси Oz_1 против хода часовой стрелки с относительной угловой скоростью ω_r, вектор которой направлен из точки O вверх по оси Oz_1. Мгновенная ось вращения Ω проходит через неподвижную точку O и совпадает с линией контакта колес 1 и 2. Вектор $\vec{\omega}$ будет направлен вдоль этой оси. Зная величину и направление переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$, а также направления относительной $\vec{\omega}_r$ и абсолютной $\vec{\omega}$ угловых скоростей, построим параллелограмм (см. рис. 13.6). Из векторного треугольника по теореме синусов найдем

$$\omega = \omega_e \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}; \quad \omega_r = \omega_e \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Через радиусы конических зубчатых колес r_1 и r_2 относительная угловая скорость определится зависимостью $\omega_r = \omega_e\, r_1/r_2$.

13.4. Сложение вращений вокруг параллельных осей

Пусть относительное вращение тела А (рис. 13.7) с угловой скоростью ω_r происходит вокруг оси O_1z_1, а переносное движение с угловой скоростью ω_e вокруг неподвижной оси Оz, параллельной оси O_1z_1.

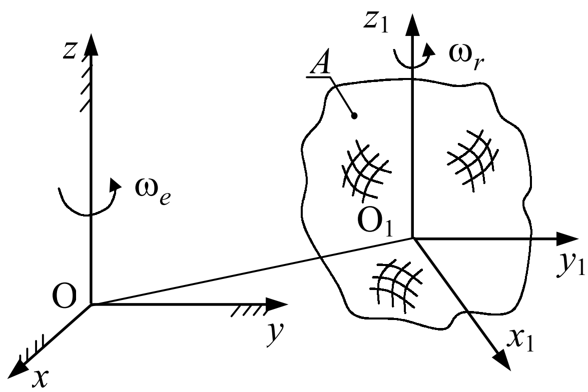


Рис. 13.7

При изложении этого вопроса воспользуемся аналогиями статики и кинематики:

- аналог силы – вектор угловой скорости $\vec{\omega}$;
- аналог пары сил – пара вращений ($\vec{\omega}$, -$\vec{\omega}$);
- аналог момента пары сил – момент пары вращений $\vec{m}(\vec{\omega},\ -\vec{\omega})$, эквивалентный скорости $\vec{V}$ поступательного движения твердого тела.

Рассмотрим следующие возможные случаи сложения вращательных движений твердого тела вокруг параллельных осей:

а) относительное и переносное вращения направлены в одну сторону. При этом векторы относительной угловой скорости $\vec{\omega}_r$ и переносной угловой скорости $\vec{\omega}_e$ направлены в одну сторону (рис.13.8).

По аналогии со сложением двух параллельных сил определим величину абсолютной угловой скорости как алгебраическую сумму угловых скоростей

$$\omega = \omega_r + \omega_e.$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен в сторону векторов $\vec{\omega}_r$ и $\vec{\omega}_e$ вдоль мгновенной оси абсолютного вращения, параллельной осям Oz и O_1z_1 и проходящей через точку, которая делит расстояние между осями Oz и O_1z_1 внутри отрезка OO_1 на части, обратно пропорциональные угловым скоростям переносного и относительного вращательных движений $\dfrac{OO_2}{O_1O_2}=\dfrac{\omega_r}{\omega_e}$.

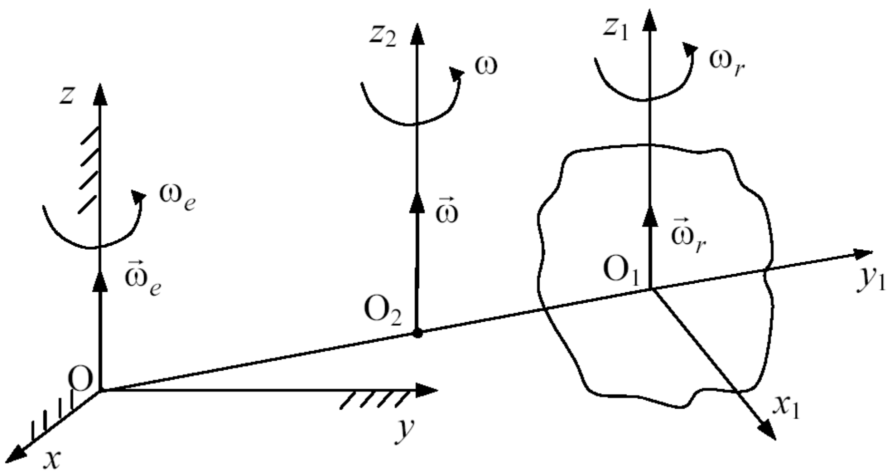


Рис. 13.8

б) относительное и переносное вращения направлены в разные стороны с разными угловыми скоростями $(\omega_r \neq \omega_e)$.

Пусть $\omega_r > \omega_e$ (рис.13.9). В этом случае абсолютная угловая скорость равна разности угловых скоростей

$$\omega = \omega_r - \omega_e.$$

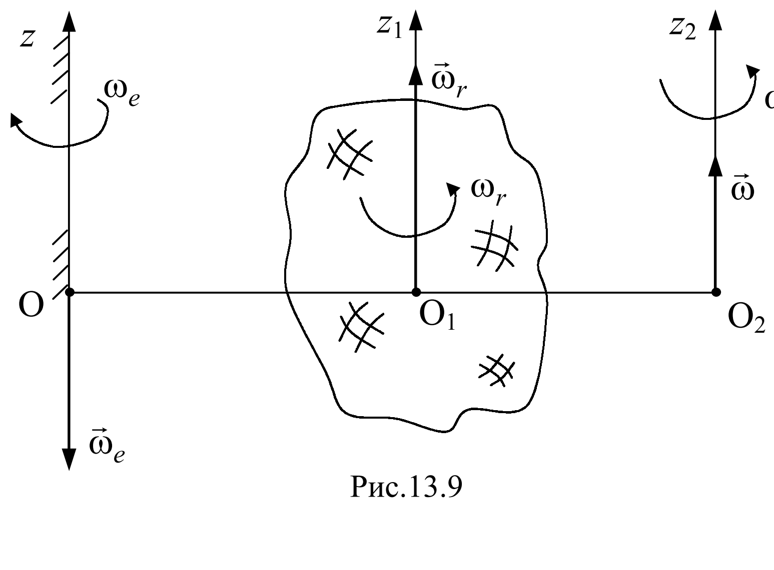


Рис.13.9

Вектор $\vec{\omega}$ направлен в сторону большей по величине угловой скорости вдоль мгновенной оси вращения, параллельной осям Оz и O_1z_1, проходящей через точку, которая делит расстояние между осями Оz и O_1z_1 вне отрезка OO_1 на части, обратно пропорциональные угловым скоростям переносного и относительного вращений $\frac{OO_2}{O_1O_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e}$.

в) относительное и переносное вращения направлены в разные стороны с одинаковыми угловыми скоростями $\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_e$ (см. рис. 13.10).

В данном случае векторы $\vec{\omega}_r$ и $\vec{\omega}_e$ образуют пару вращений. Аналогично моменту пары сил можно определить момент пары вращений

$$\vec{m}(\vec{\omega}_r, -\vec{\omega}_e) = \vec{\omega}_r \times \overline{OO_1} = \vec{\omega}_e \times \overline{O_1O} = \vec{V}. \qquad (13.2)$$

Согласно (13.2) вектор момента пары вращений эквивалентен скорости любой точки, поэтому можно сделать вывод:

пара вращений эквивалентна поступательному движению твердого тела, скорость которого равна вектору момента этой пары.

По величине скорость тела равна $V = \omega_r \cdot OO_1 = \omega_e \cdot OO_1$. Вектор скорости направлен перпендикулярно к плоскости пары $\vec{\omega}_r = -\vec{\omega}_e$ (рис. 13.10).

Примером пары вращений является движение велосипедной педали, которая за время движения остается параллельной своему первоначальному положению, т.е. совершает поступательное движение.

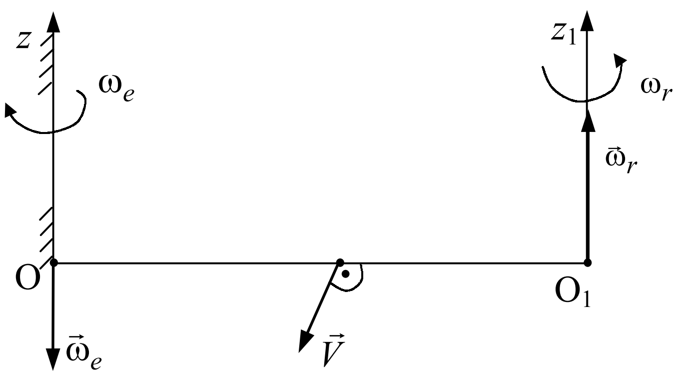


Рис. 13.10

Пример. Кривошип O_1O_2 вращается вокруг неподвижной оси O_1 с угловой скоростью ω_e. На палец кривошипа O_2 свободно насажена шестерня радиусом r_2, сцепленная с неподвижным зубчатым колесом радиусом r_1. Найти абсолютную и относительную угловые скорости шестерни (рис. 13.11).

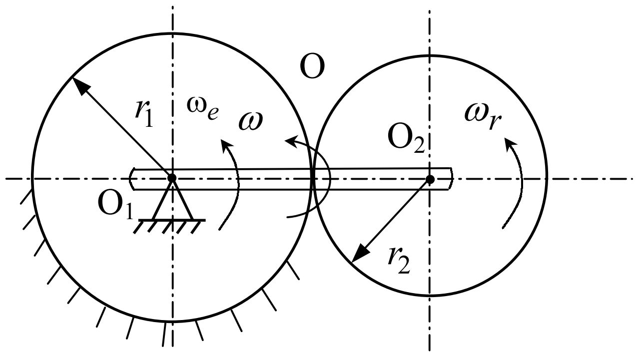


Рис. 13.11

Так как шестерня одновременно вращается вокруг двух параллельных осей, проходящих через точки O_1 и O_2 перпендикулярно плоскости чертежа, и сцеплена с неподвижным колесом, то абсолютная скорость точки зацепления O равна нулю. При этом абсолютным движением шестерни будет вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O параллельно заданным осям. Отсюда следует:

$$\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{\omega_r}{\omega_e}.$$

Так как $O_1O = r_1$, $O_2O = r_2$, то $\dfrac{\omega_r}{\omega_e} = \dfrac{r_1}{r_2}$, откуда $\omega_r = \omega_e \dfrac{r_1}{r_2}$.

Так как мгновенная ось вращения делит расстояние между осями внутри отрезка O_1O_2 то переносное и относительное вращения происходят в одну сторону и абсолютная угловая скорость определится как

$$\omega = \omega_e + \omega_r = \omega_e + \omega_e \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\omega_e.$$

Пример. В планетарном механизме (рис.13.12) рукоятка O_1A вращается против часовой стрелки вокруг оси O_1 неподвижного колеса 1 радиусом r_1 с угловой скоростью ω_0. Она соединена с осями трех шестерен 2, 3, 4 радиусами r_2, r_3, r_4. Определить абсолютную угловую скорость шестерни 4.

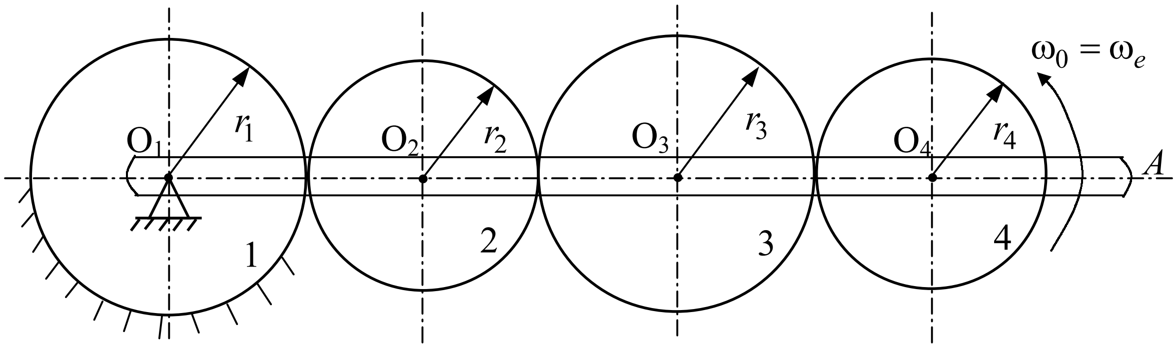


Рис.13.12

Шестерня 4 одновременно вращается вокруг неподвижной оси O$_1$ с переносной угловой скоростью $\omega_e = \omega_0$ и вокруг оси O$_4$ с относительной угловой скоростью ω_{4r},, которую определим, используя метод Виллиса. Остановим рукоятку O$_1A$, а неподвижное колесо 1 заставим вращаться с угловой скоростью ω_0 рукоятки в противоположную сторону. При этом шестерни 2, 3, 4 будут вращаться вокруг своих осей с относительными угловыми скоростями $\omega_{2r}, \omega_{3r}, \omega_{4r}$ в направлениях, указанных на рис.13.13.

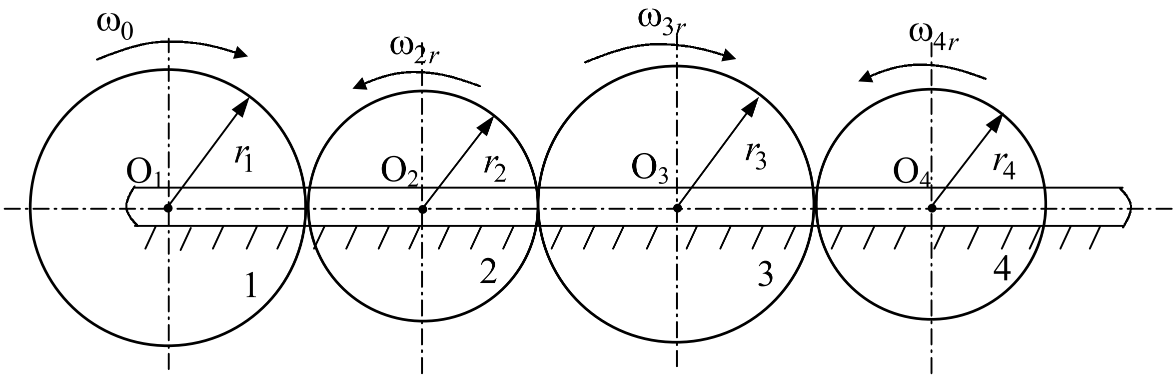


Рис. 13.13

Так как относительные угловые скорости вращений шестерен обратно пропорциональны их радиусам, то $\dfrac{\omega_0}{\omega_{2r}} = \dfrac{r_2}{r_1}$, откуда $\omega_{2r} = \omega_0 \dfrac{r_1}{r_2}$.

Определяя таким образом последовательно относительные угловые скорости всех шестерен, найдем $\omega_{4r} = \omega_0 \frac{r_1}{r_4}$.

Направление относительной угловой скорости ω_{4r} указано на рис.13.13 и совпадает с направлением переносной угловой скорости $\omega_e = \omega_0$. Поэтому абсолютную угловую скорость вращения шестерен 4 определим по формуле

$$\omega = \omega_r + \omega_e = \omega_0 \frac{r_1}{r_4} + \omega_0 = (1 + \frac{r_1}{r_4})\omega_0 .$$

13.5. Сложение поступательного и вращательного движений

Если переносное движение тела – поступательное со скоростью $\vec{V}_e$, а относительное – вращательное с угловой скоростью $\vec{\omega}_r$, то в зависимости от взаимного расположения $\vec{V}_e$ и $\vec{\omega}_r$ в пространстве возможны случаи:

1. Вектор скорости поступательного движения перпендикулярен оси вращательного движения тела ($\vec{V}_e \perp \vec{\omega}_r$) (рис.13.14, а).

Абсолютным движением тела является мгновенно вращательное с угловой скоростью, равной угловой скорости относительного вращения $\vec{\omega}_r$, вокруг оси, параллельной заданной и отстоящей от нее на расстоянии $OK = \frac{V_e}{\omega_r}$. Нетрудно заметить, что в данном случае *тело совершает плоское движение.*

2. Вектор скорости поступательного движения параллелен оси вращательного движения ($\vec{V}_e \| \vec{\omega}_r$). При этом *абсолютным движением тела является винтовое движение.* Ось винта $\Omega_в$ совпадает с осью вращения тела Ω_r (рис. 13.14.б).

3. Вектор скорости поступательного движения направлен под углом к вектору угловой скорости вращательного движения (рис.13.14,в). В этом случае тело совершает *мгновенно винтовое движение.* Ось винта $\Omega_в$ смещена от заданной оси вращения Ω_r на расстояние ОС

$$\text{OC} = \frac{V_e \sin(\vec{V}_e \stackrel{\wedge}{,} \vec{\omega}_r)}{\omega_r}.$$

Поскольку точки мгновенной винтовой оси тела не участвуют во вращательном движении, их скорости геометрически равны $\vec{V}_e$ (см. рис. 13.14, б) или $\vec{V}_e'$ (см. рис. 13.14, в).

Таким образом, *мгновенная винтовая ось тела* - геометрическое место точек, скорости которых равны по модулю и направлены вдоль этой оси.

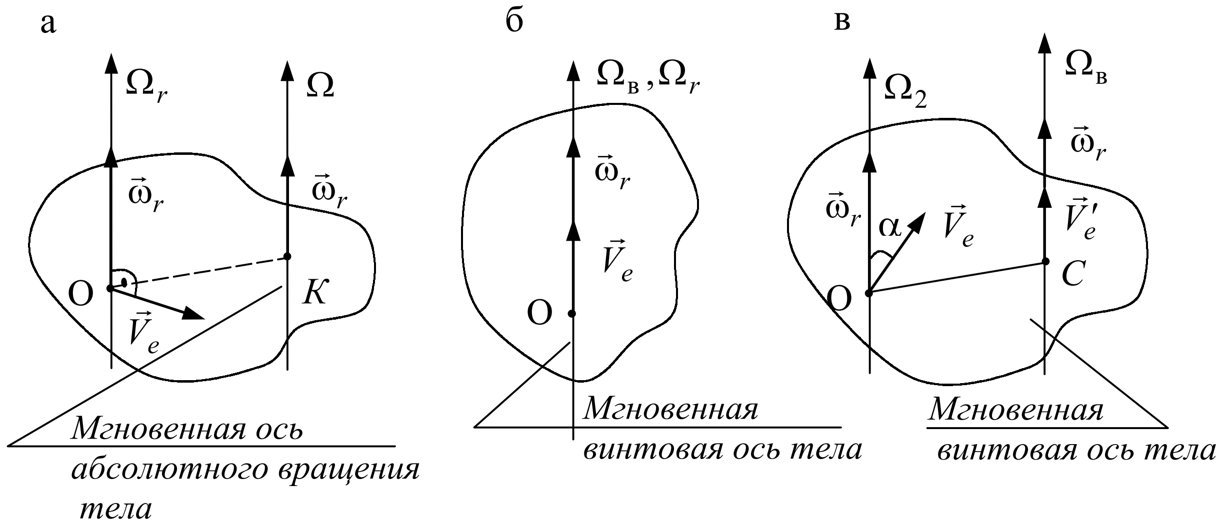


Рис. 13.14

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ К РАЗДЕЛУ "КИНЕМАТИКА"

8. Кинематика точки

1. Что изучает кинематика?
2. Какие основные задачи решаются в кинематике?
3. Какие существуют способы задания движения точки?
4. В чем заключается каждый из способов задания движения точки?
5. Как найти уравнение траектории точки в координатной форме?
6. Как определить скорость при векторном способе задания движения?
7. Как найти проекции вектора скорости на оси неподвижной декартовой системы координат?
8. Как найти модуль и направление вектора скорости точки по его проекциям на оси неподвижной декартовой системы координат?
9. Чему равна проекция вектора скорости точки на касательную ось к траектории?
10. Как определить ускорения точки при векторном способе задания движения?
11. Как найти проекции ускорения точки на оси неподвижной декартовой системы координат?
12. Как найти модуль и направление вектора ускорения точки по его проекциям на оси неподвижной декартовой системы координат?
13. Как определить проекции ускорения точки на главную нормаль и касательную ось к траектории?
14. Как найти модуль и направление вектора ускорения точки по его проекциям на главную нормаль и касательную ось к траектории?
15. В каких случаях касательное ускорение точки равно нулю?
16. В каких случаях нормальное ускорение точки равно нулю?

9. Простейшие виды движения твердого тела

1. Какое движение твердого тела называется поступательным?
2. Какими уравнениями задается поступательное движение тела?
3. В чем отличие между траекториями различных точек тела при поступательном движении?
4. Могут ли траектории точек тела при поступательном движении быть криволинейными?

5. Как распределяются скорости и ускорения точек тела при поступательном движении?
6. Какое движение твердого тела называется вращательным движением вокруг неподвижной оси?
7. Каким уравнением задается вращательное движение тела вокруг неподвижной оси?
8. Как определить угловую скорость и угловое ускорение вращающегося тела по заданному закону движения?
9. Как направлены векторы угловой скорости и углового ускорения?
10. Как определить модуль и направление вектора скорости точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
11. Как распределяются скорости точек вращающегося тела относительно оси вращения?
12. Как определить модуль и направление вектора ускорения точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
13. Как распределяются ускорения точек вращающегося тела относительно оси вращения?

10. Плоскопараллельное движение твердого тела

1. Какое движение твердого тела называется плоским?
2. Какими уравнениями задается плоское движение тела?
3. Чему равна скорость произвольной точки плоской фигуры?
4. Как определить модуль и направление вращательной скорости точки плоской фигуры вокруг произвольного полюса?
5. Какая существует зависимость между проекциями скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки?
6. Что называется мгновенным центром скоростей плоской фигуры?
7. Какие существуют способы определения положения мгновенного центра скоростей?
8. Как распределяются скорости точек плоской фигуры относительно мгновенного центра скоростей?
9. Чему равно ускорение произвольной точки плоской фигуры?
10. Как определить направление вращательного ускорения точки плоской фигуры при ее вращении вокруг условно неподвижного полюса?
11. Как определить модуль и направление осестремительного ускорения точки плоской фигуры при ее вращении вокруг условно неподвижного полюса?

12. Что называется мгновенным центром ускорений?
13. Какие существуют способы определения положения мгновенного центра ускорений?
14. Как распределяются ускорения точек плоской фигуры относительно мгновенного центра ускорений?

11. Сферическое движение тела

1. Какое движение твердого тела называется сферическим?
2. Какими независимыми параметрами можно задавать сферическое движение тела?
3. Как направлен вектор угловой скорости тела при сферическом движении?
4. Как определить модуль и направление вектора скорости точки тела при его сферическом движении?
5. Как определить абсолютное ускорение произвольной точки тела при его сферическом движении?
6. Как определить модуль и направление вектора вращательного ускорения произвольной точки тела при его сферическом движении?
7. Как определить модуль и направление вектора осестремительного ускорения произвольной точки тела при его сферическом движении?

12. Сложное движение точки

1. Какое движение точки называется сложным?
2. Какое движение точки называется относительным?
3. Какое движение называется переносным?
4. Как определить модуль и направление вектора абсолютной скорости точки при ее сложном движении?
5. Как определить модуль и направление вектора абсолютного ускорения точки при ее сложном движении?
6. Как определить модуль ускорения Кориолиса?
7. В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?
8. Как определить направление вектора ускорения Кориолиса?

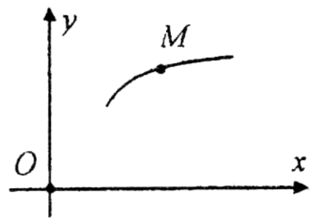
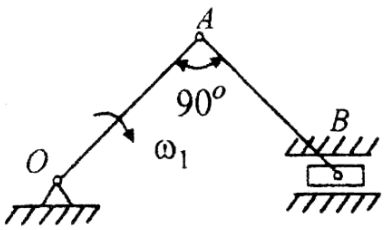
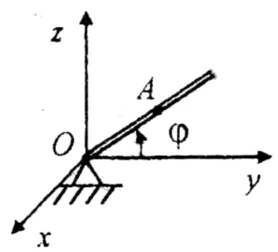
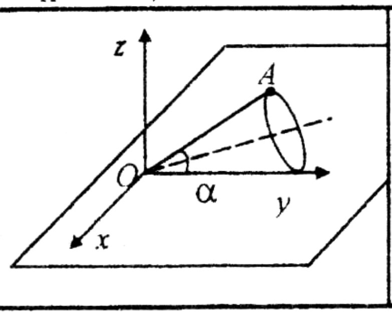
13. Сложное движение твердого тела

1. Какое движение твердого тела называется сложным?
2. Каким будет абсолютное движение тела, при сложении поступательных движений?
3. Как определить абсолютную скорость произвольной точки тела при сложении поступательных движений?

4. Каким будет абсолютное движение тела при сложении вращений вокруг пересекающихся осей?
5. Как определить абсолютную угловую скорость тела при сложении вращений вокруг пересекающихся осей?
6. Как определить абсолютную скорость произвольной точки тела при сложении вокруг пересекающихся осей?
7. Какие возможны случаи абсолютного движения тела при сложении вращений вокруг параллельных осей?
8. Как определить абсолютную угловую скорость тела при сложении вращений вокруг параллельных осей в каждом из возможных случаев?
9. Какому движению эквивалентна пара вращений?
10. Какие возможны случаи абсолютного движения тела при сложении поступательного и вращательного движений?
11. Что называется мгновенной винтовой осью тела?

ТЕСТ К РАЗДЕЛУ «КИНЕМАТИКА»

К каждому заданию даны три ответа, один из которых верный

К1	По заданным уравнениям движения точки $x = 2t^2$ *м*, $y = (10 + 3t + t^2)$*м* определить её ускорение			
		1 6	2 $\sqrt{20}$	3 4
К2	Определить угловую скорсть шатуна AB в положении, показанном на схеме, если известны $OA = AB,\ \omega_1 = 0{,}5c^{-1}$			
		1 4	2 0,5	3 $\sqrt{2}$
К3	Определить абсолютное ускорение точки A. $\varphi = 2t,\ OA = 3t^3,\ t = 0{,}5c$			
		1 $\sqrt{140{,}5}$	2 $\sqrt{27}$	3 $\sqrt{137{,}25}$
К4	Определить абсолютную угловую скорость конуса. $W_A^n = 4\,м/c^2,\ OA = 18м,\ \alpha = 30^o$			
		1 0	2 2/3	3 4/5

Ответы приведены на странице 147

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с учебными планами большинства технических специальностей теоретическая механика изучается за два семестра, в первом из которых традиционно рассматриваются разделы “Статика” и “Кинематика”. По типам решаемых задач эти разделы почти не связаны между собой, поэтому нет принципиальной разницы, с какого из них начинать изложение курса.

Рассмотренные в учебном пособии методы статики и кинематики в том или ином объеме используются студентами всех технических специальностей. Специфические особенности специальной подготовки инженеров по каждой специальности учитываются при соответствующем подборе курсовых работ, домашних заданий и задач на практических занятиях.

В связи с необходимостью изложения статики и кинематики за сравнительно короткое время отдельные вопросы, которые не нашли отражения в данном учебном пособии (распределенные силы, некоторые теоремы о парах, определение координат центров тяжести однородных тел, общий случай движения твердого тела), могут быть изучены студентами самостоятельно и закреплены на практических занятиях. Компактное изложение статики и кинематики впоследствии дает возможность уделить больше времени особенно ценным для теории и практики методам динамики, составляющим основной раздел курса теоретической механики, в котором изучается механическое движение материальных тел с учетом сил, вызывающих движение. Так как для решения задач динамики необходимо знание методов статики и кинематики, их следует рассматривать как введение в динамику. Вместе с тем статика и кинематика имеют важное самостоятельное значение для изучения целого ряда других технических дисциплин, таких как сопротивление материалов, строительная механика, детали машин, теория машин и механизмов.

Решение любой задачи механики складывается из двух этапов: этапа построения математической модели и этапа ее решения одним из математических методов. Поэтому при изучении теоретической механики исключительную роль играет математика, в частности такие ее разделы, как векторная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление.

Методами теоретической механики решается большой круг задач из различных областей науки и техники, причем диапазон исследований постоянно расширяется.

Формируя представления человека о природе, механика всегда находилась в центре интересов общества. Убедительным подтверждением этому может, например, служить письмо Александра Македонского своему учителю Аристотелю, опубликованное в сочинении древнегреческого философа Плутарха: ”Александр Аристотелю желает благополучия! Ты поступил неправильно, обнародовав учения, предназначенные только для устного преподавания. Чем же будем мы отличаться от остальных людей, если те самые учения, на которых мы были воспитаны, сделаются общим достоянием? Я хотел бы превосходить других не столько могуществом, сколько знанием о высших предметах. Будь здоров”.

Успокаивая уязвленное честолюбие Александра, Аристотель оправдывается, утверждая, что сочинение о природе предназначено для людей образованных и совсем не годиться для самостоятельного изучения.

Ответы к тесту по разделу ”Статика”

Номер задания	С1	С2	С3	С4
Номер ответа	2	3	2	2

Ответы к тесту по разделу ”Кинематика”

Номер задания	К1	К2	К3	К4
Номер ответа	2	2	3	2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Аппель П.** Теоретическая механика: В 2т. -М.: Физматгиз, 1960. -515с.
2. **Бать М.И., Джаналидзе Г.Ю., КельзонА.С.** Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3т. -М.: Наука, 1990. Т.1. -672с.
3. **Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.** Курс теоретической механики: В 2т . -М.: Наука, 1985 Т.1.-240с.
4. **Гернет М.М.** Курс теоретической механики. -М.: Высш. шк., 1987. -344с.
5. **Григорьян А.Т.** Механика от античности до наших дней. -М.: Наука, 1974. -479с.
6. **Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.** Курс теоретической механики: В 2т. -М.: Наука, 1982. Т.1.-352с.
7. **Маркеев А.П.** Теоретическая механика. -М.: Наука, 1990. -416с.
8. **Мещерский И.В.** Сборник задач по теоретической механике. -М.: Наука, 1986. -486с.
9. **Никитин Н.Н.** Курс теоретической механики. -М.: Высш. шк., !990. -607с.
10. **Сборник** заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов / А.А.Яблонский, С.С.Норейко, С.А.Вольфсон и др. -М.: Высш. шк., 1985. -367с.
11. **Суслов Г.К.** Теоретическая механика. -М.: Гостехиздат, 1946. -655с.
12. **Тарг С.М.** Краткий курс теоретической механики. -М.: Высш. шк., 1995. -416с.
13. **Яблонский А.А., Никифорова В.М.** Курс теоретической механики: В 2т. М.: Высш. шк., 1984. Т.1.-343.