

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

А. А. КУЗНЕЦОВ

Ф И З И К А

Механика

Молекулярная физика

Электричество и магнетизм

Электромагнитные колебания и волны

Оптика

Учебное пособие

Издание 2-е, исправленное и дополненное



Владимир 2013

УДК 530.1
ББК 22.2
К89

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой общей физики
Владимирского государственного педагогического университета
Е. К. Куркутова

Доктор технических наук, профессор
декан факультета радиоэлектроники и медицинской техники
Владимирского государственного университета
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
А. Г. Самойлов

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Кузнецов, А. А.

К89 Физика: Механика. Молекулярная физика. Электричество и магнетизм. Электромагнитные колебания и волны. Оптика : учеб. пособие / А. А. Кузнецов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Изд. 2-е, исправ. и доп. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2013. – 160 с.
ISBN 978-5-9984-0337-8

Написано в соответствии с программой курса «Общая физика» на основе лекций по физике, читаемых автором в первом и втором семестрах обучения на ФРЭМТ ВлГУ. Включает в себя материалы первых четырех частей курса общей физики.

Предназначено для студентов первого курса очной формы обучения специальностей 140400 – Электроэнергетика и электротехника, 200100 – Приборостроение, 210400 – Радиотехника, 201000 – Биотехнические системы и технологии, 211000 – Конструирование и технология электронных систем.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Табл. 4. Ил. 79. Библиогр.: 18 назв.

УДК 530.1
ББК 22.2
ISBN 978-5-9984-0337-8
© ВлГУ, 2013

Предисловие

При изучении курса физики надо иметь в виду модельный характер его построения. Модель составляется из образов наблюдаемых объектов, явлений, ситуаций и связей между ними, а также правил оперирования с ними. Количественные соотношения между физическими величинами выясняются в результате измерений, наблюдений и экспериментальных исследований и выражаются языком математики. Другого языка для построения физических теорий не существует.

Задача физики состоит в том, чтобы создать в сознании такую картину, которая наиболее полно отражает свойства внешнего мира и обеспечивает существующие соотношения между его элементами.

Материя, а значит и ее свойства (связи, взаимодействия между объектами, явлениями) неисчерпаемы, поэтому охватить все их многообразие невозможно принципиально. Поэтому при создании моделей принимаются во внимание только существенные для данного круга явлений свойства и связи. Ограниченность в этом смысле есть общее свойство моделей. Учет лишь существенных факторов сводится к абстрагированию от реальной ситуации и созданию модели только в рамках принятых абстракций. Вне этих пределов модель может стать неприменимой и даже бессмысленной, а один и тот же физический объект в различных ситуациях может быть представлен различными моделями.

На основе эксперимента и наблюдений создается цельное физическое представление – модель, в рамках которой делается предсказание о явлениях; в результате наблюдений модель уточняется, и делаются новые предсказания и т.п. Этот метод физики требует, чтобы представлениям, понятиям и другим элементам, составляющим физическую модель, было дано однозначное толкование.

Существенный прогресс в физике происходит в двух случаях: во-первых, когда предсказание моделей не подтверждается экспериментом; во-вторых, когда открывается новый круг физических явлений или объектов, для которых нет моделей совсем. В первом случае модель исправляется или заменяется. При этом, если ее замена связана с пересмотром основных представлений, говорят о революции в физике (например, ньютоновская модель пространства и времени – СТО). Во втором случае создается новый раздел физики (например, создание квантовой механики).

Чтобы определить физическую величину, надо указать: то различие, что делает эту физическую величину конкретной; то общее, что делает ее элементом всеобщей физической связи явлений. За основу определения физической величины берутся математические соотношения, существующие между физическими величинами.

Может быть, другой путь – операционный: мы указываем на физический объект, свойство которого принято считать за единичное, и определяем процедуру измерения, с помощью которой сравниваем свойства измеряемого объекта и единичного.

В результате почти столетнего обсуждения научная и техническая общественность стран мира пришла к заключению, что наиболее целесообразной является международная система единиц (СИ). Она принята РФ и оформлена правительственным постановлением. Основные единицы СИ: метр, секунда, килограмм, Ампер, Кельвин, кандела.

Часть 1. МЕХАНИКА

Кинематика поступательного и вращательного движений материальной точки и твердого тела

Предмет и объект изучения. Система отсчета. Кинематика описывает конкретные механические движения материальной точки, не интересуясь ни их причинами, ни вопросом осуществимости таких движений в природе. Для нее важны лишь физическая обоснованность и математическая строгость в рамках принятых моделей.

Материальная точка – физический объект в геометрическом смысле эквивалентный математической точке, но обладающий единственным признаком отличия – массой. При моделировании тел совокупностью материальных точек необходимо помнить, что последние не имеют ничего общего с реальными атомами и молекулами.

Система отсчета – совокупность точек пространства и материального тела, относительно которого определено положение точек пространства. Положение точек пространства в системе отсчета характеризуется

системой координат. Это означает, что положение в реальном геометрическом пространстве системы отсчета характеризуется максимум тремя независимыми параметрами. Какими именно, – зависит от системы координат, с помощью которой описывается положение точек пространства (прямоугольная, цилиндрическая, сферическая и т.п. системы координат). Абсолютно твердое тело – тело, расстояние между любыми точками которого неизменно. Применяется в качестве тела отсчета в системах отсчета.

Можно обойтись одним радиус-вектором, который описывает положение точек в бескоординатной форме. Радиус-вектор точки – вектор, начало которого совпадает с точкой начала отсчета системы координат, а конец – с рассматриваемой точкой (${}_0\vec{r}$).

При своем движении материальная точка проходит непрерывную последовательность точек системы отсчета, называемую *траекторией* движения. Вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ численно равен расстоянию между конечной и начальной точками, направлен от начальной к конечной и соединяет точки траектории, в которых материальная точка находилась в моменты t и $t + \Delta t$.

Скорость и ускорение. Вектор средней скорости $\vec{v}_{\text{ср}}$ при перемещении между двумя точками определяется как вектор, совпадающий по направлению с перемещением и равный по модулю вектору перемещения (рис. 1), деленному на время перемещения:

$$\vec{v}_{\text{ср}}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1)$$

При неограниченном уменьшении времени Δt средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется *мгновенной скоростью*:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2)$$

Очевидно, что вектор мгновенной скорости всегда направлен по касательной к траектории.

В декартовой системе координат $r(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$, и

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}. \quad (3)$$

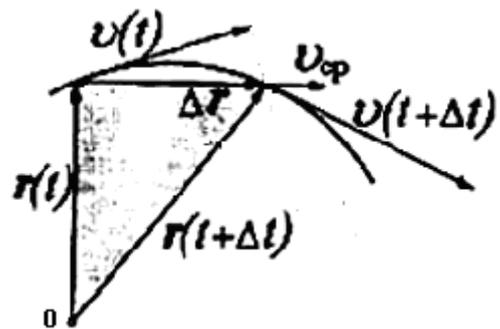


Рис. 1. К понятиям перемещения, скорости и ускорения

Следовательно, проекции скорости даются формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Произведение массы материальной точки на ее вектор скорости называется импульсом материальной точки: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Ускорением называется скорость изменения скорости (рис. 2). Пусть в моменты t и $t + \Delta t$ скорости равны соответственно $\vec{v}(t)$ и $\vec{v}(t + \Delta t)$. Значит в течении промежутка времени Δt скорость изменилась на $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$. Среднее ускорение за Δt равно

$$\vec{a}_{cp}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

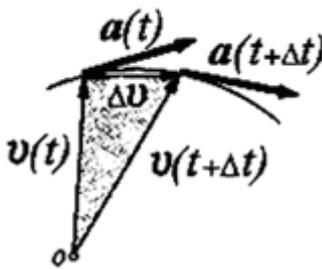


Рис. 2. Годограф скоростей

Ускорение: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Годограф скоростей – это кривая, которую описывает конец радиус-вектора скорости. Вектор ускорения направлен по касательной к годографу скоростей. Это означает, что он может быть направлен под

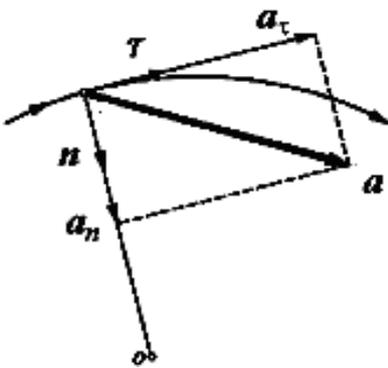


Рис. 3. Разложение вектора полного ускорения \vec{a} на тангенциальное \vec{a}_t и нормальное \vec{a}_n ускорения. Точка O – центр кривизны траектории; $\vec{\tau}$, \vec{n} – единичные касательный и нормальный векторы

любым углом к касательной к траектории движения.

Полное ускорение $\vec{a} = \vec{n} \frac{v^2}{R} + \vec{\tau} \frac{dv}{dt}$ состоит из двух взаимно перпендикулярных векторов (рис. 3):

тангенциального ускорения: $\vec{\tau} \frac{dv}{dt} = \vec{a}_t$, направленного вдоль траектории движения, и ускорения

$\vec{n} \frac{v^2}{R} = \vec{a}_n$, направленного перпендикулярно траектории по главной нормали, т.е. к центру кривизны и называемого *нормальным*, или при движении точки по окружности – *центростремительным*.

Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Для прямой траектории $R \rightarrow \infty$, $\frac{v^2}{R} \rightarrow 0$ и $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$.

Кинематика твердого тела. Чтобы описать движение материальной точки, необходимо задать три функции, характеризующие зависимость ее координат от времени. Тогда для описания системы N материальных точек, движущихся независимо друг от друга, необходимо задать $3N$ таких функций. *Число независимых функций (или параметров), которыми описывается движение системы материальных точек, называется числом ее степеней свободы.* Материальная точка имеет три степени свободы, а система из двух независимых материальных точек имеет шесть степеней свободы. Твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Поступательным движением твердого тела называется такое, при котором все его точки движутся по одинаковым траекториям. Это означает, что скорости всех точек тела в любой момент времени одинаковы. Любая прямая, проведенная между какими-либо точками тела, перемещается параллельно самой себе.

Плоским движением называется движение, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях. Движение тела в этом случае полностью определяется движением одного из его сечений в какой-либо из параллельных плоскостей, а положение этого сечения – положением двух его точек.

Вращательное движение – движение, при котором две точки тела остаются неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки, называется осью вращения. Все точки твердого тела, лежащие на оси вращения, неподвижны. Вращательное движение твердого тела является плоским.

Рассмотрим движение по окружности произвольной точки твердого тела (рис. 4.). Длина дуги (путь) и значение скорости определяются:

$$S = R\varphi, v = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}.$$

Скорость изменения угла $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ называется *угловой скоростью*. Если эта скорость постоянна, то она называется *круговой частотой* ω вращения твердого тела вокруг оси:

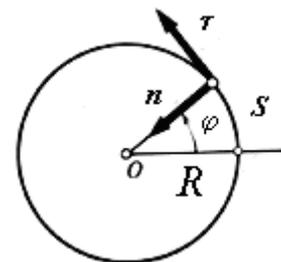


Рис. 4. Движение точки по окружности

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T – период вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения направлен по оси вращения так, чтобы линейная скорость точек твердого тела выражалась формулой: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (прил. 1).

Модули линейной скорости, нормального и тангенциального ускорения точек твердого тела равны соответственно:

$$v = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega; a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R; a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}.$$

Поэтому полное ускорение точек $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}$,

где $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение.

Произвольное движение твердого тела определяется движением некоторой точки и вращением тела с мгновенной угловой скоростью, проходящей через эту точку.

Принцип относительности Галилея. Осталось ответить на вопрос: протекают ли одинаково механические явления в разных движущихся системах координат? Ответ был дан Галилеем: во всех системах координат, движущихся равномерно поступательно и прямолинейно относительно сферы неподвижных звезд (и друг относительно друга), все механические явления протекают одинаково. Иными словами, механические явления протекают одинаково во всех *инерциальных* системах координат. *Физические законы в инерциальных системах координат – одинаковы.* Но законы описывают взаимосвязи между физическими величинами. А как себя ведут сами величины при смене координат или при переходе из одной системы в другую? Величины, значения которых не изменяются при преобразовании координат, называются *инвариантами преобразований*. Инвариантами преобразований Галилея являются: длина, интервал времени, ускорение.

Динамика поступательного движения

К понятию силы. Измерение силы. Приведем несколько исторически разнесенных представлений о термине «сила взаимодействия»:

1. *Аристотель* (384 – 322 до н.э.): сила пропорциональна скорости тела. Сила передается телу из окружающей среды.

2. *Николай Кузанский* (1401 – 1461): сила передается телу в момент толчка, а далее она находится в нем, обеспечивая существование скорости.

3. *Галилей* (1564 – 1642): сила связана не со скоростью, а с ее изменением – ускорением. Сохранение же телом имеющейся у него скорости происходит по закону инерции, согласно которому тело стремится сохранить состояние своего равномерно-прямолинейного движения. Это утверждение, согласно Галилею, следует рассматривать как первоначальный основной закон, который не может быть сведен к чему-либо более простому. Причиной изменения скорости является сила. Силы не являются самостоятельными сущностями, независимыми от материальных тел, а создаются ими. Поэтому можно сказать, что посредством сил материальные тела действуют друг на друга, или взаимодействуют. Сила при этом выступает как векторная количественная мера интенсивности взаимодействий.

Силы не только изменяют скорость движения материальных тел, но и вызывают деформацию, поэтому удобно пользоваться деформацией в качестве эталона силы, т.е. измерять силу независимо от ускорения.

Законы Ньютона. Системы отсчета делят на два класса. К одному классу относят те, в которых существует единое время и геометрия евклидова; к другому – те, в которых единого времени нет и геометрия неевклидова. К первому из указанных классов относят системы отсчета, в которых отсутствуют силы тяготения и справедлив первый закон Ньютона – закон инерции. Поэтому эти системы отсчета называются *инерциальными*. В системах отсчета, в которых имеются силы тяготения и не выполняется первый закон Ньютона – *неинерциальные*.

Первый закон Ньютона является независимым законом, выражающим критерий пригодности системы отсчета (ее инерциальность) для рассмотрения движений. Этот закон является первым в порядковом смысле, т.к. только после него можно говорить о точно определенном физическом смысле и содержании второго и третьего законов.

Тело (материальная точка), не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равно-

мерно. Такое тело называется свободным, а его движение – свободным движением, или движением по инерции.

Система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на соответствующим образом выбранные звезды, является инерциальной гелиоцентрической системой отсчета. Любая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы прямолинейно и равномерно, является инерциальной. Очевидно, что система отсчета, связанная с земной поверхностью, не является инерциальной, но ускорение ее настолько мало, что практически ее можно считать инерциальной.

Второй закон Ньютона – это не количественное определение силы, а математически выраженная физическая идея о характере связи внешних условий и динамических переменных движения материальной точки. Под силой в механике понимают любую причину, изменяющую вектор импульса движущегося тела.

$$\text{Для материальной точки} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (4)$$

где \vec{p} – вектор импульса материальной точки, $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ внеш – равнодействующий вектор внешних сил. Уравнение (4) – уравнение движения.

Система материальных точек – это конечная совокупность точек системы, на которые действуют силы двоякого происхождения: во-первых, силы, источники которых лежат вне системы (внешние силы) и, во-вторых, силы со стороны других точек системы (внутренние силы). Для системы материальных точек в равенстве (4) $\vec{p} = \sum_{j=1}^m \vec{p}_j$ – равнодействующий вектор импульса всех материальных точек, составляющих систему.

Физическое содержание этого закона состоит не в том, что сила имеет конкретное выражение, а в том, что сила определяет вторые производные координат по времени ($d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$). Из инвариантности ускорения относительно преобразований Галилей следует инвариантность силы.

Третий закон Ньютона говорит о том, что во взаимодействии двух тел каждое из тел действует на другое тело с одинаковой по значению, но противоположной по направлению силой. По своей природе “действие” и “противодействие” не отличаются. Обычно принимается, что внутренние

силы удовлетворяют третьему закону Ньютона, а потому не участвуют в формировании равнодействующего вектора сил (см. формулу (4)).

Рассмотрим замкнутую систему двух материальных точек. Замкнутая система – это система тел, взаимодействующих только между собой. В этом случае справедлив закон сохранения импульса (см. далее): $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$. Дифференцируя это соотношение по времени, получаем $\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$, или на основании второго закона Ньютона (4) $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Тогда третий закон можно сформулировать как требование сохранения суммы импульсов взаимодействующих тел, если нет внешних сил.

Об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Проверкой инерциальности системы отсчета является установление факта, что движение относительно сферы неподвижных звезд происходит без ускорения и вращения. Неинерциальной системой отсчета называется система, движущаяся ускоренно относительно инерциальной.

Простейшими неинерциальными системами отсчета являются системы, движущиеся ускоренно прямолинейно, и вращающиеся системы. При построении теории движения в неинерциальных системах отсчета можно было бы принять, что ускорения тел вызываются не только силами, но и другими факторами. Но исторически был выбран иной путь – эти другие факторы были признаны силами. Получилось, что наряду с «обычными» силами взаимодействия существуют силы иной природы (факторы), названные *силами инерции*. Силы инерции подбираются по величине такими, чтобы обеспечить в неинерциальной системе отсчета фактические ускорения, но обычными силами взаимодействия объясняются лишь частично. Тогда $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}$, или $\vec{F}_{in} = m(\vec{a}' - \vec{a})$, где \vec{a}' – ускорение в неинерциальной системе отсчета, называемое относительным, \vec{a} – ускорение относительно инерциальной системы отсчета, называемое абсолютным.

Центробежная и кориолисова силы инерции. Силу инерции, возникающую во вращающейся по отношению к инерциальным системам системе отсчета, называют *центробежной силой инерции*. Эта сила действует на тело во вращающейся системе отсчета независимо от того, покоится тело в этой системе или движется относительно нее со скоростью \vec{v}' . Если положение тела во вращающейся системе отсчета характеризовать радиусом-вектором \vec{r}' , то центробежную силу инерции можно представить в виде двойного векторного произведения:

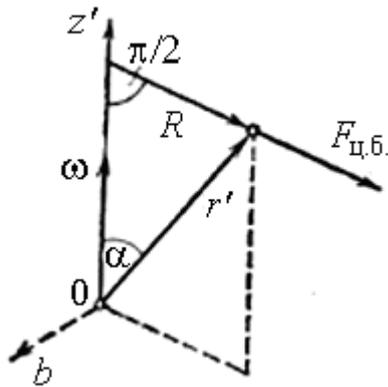


Рис. 5. К определению вектора центробежной силы (уравнение (5))

По определению вектор $\vec{b} = \vec{r}' \times \vec{\omega}$ направлен перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и \vec{r}' «на нас» (рис. 5), (см. прил. 1) и равен по модулю $\omega r' \sin \alpha = \omega R$. Векторное произведение взаимно перпендикулярных векторов $m\vec{\omega}$ и \vec{b} совпадает по направлению с $\vec{F}_{\text{ц.б.}}$ и имеет модуль $m\omega b = m\omega^2 R = \vec{F}_{\text{ц.б.}}$

$$\vec{F}_{\text{ц.б.}} = m\vec{\omega} \times \vec{r}' \times \vec{\omega} \quad (5)$$

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы инерции, проявляется еще одна сила, называемая *силой Кориолиса*, или кориолисовой силой инерции. Если сила $\vec{F}_{\text{ц.б.}}$ не зависит от \vec{v}' , действуя одинаково как на покоящееся, так и на движущееся тело, то сила Кориолиса при $\vec{v}' = 0$ отсутствует. Кориолисову силу инерции \vec{F}_K представляют в виде

$$\vec{F}_K = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}, \quad (6)$$

где ускорение $\vec{a}_K = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ называется *кориолисовым ускорением*. Ясно, что \vec{F}_K лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 6, а, б).

Сила Кориолиса, действующая на тело, движущееся вдоль земного меридиана в любом направлении, направлена по отношению к направлению движения вправо в северном полушарии и влево в южном. При качаниях маятника Фуко траектория движения груза имеет вид «розетки». Плоскость качаний поворачивается относительно Земли в направлении часовой стрелки, совершая за сутки один оборот.

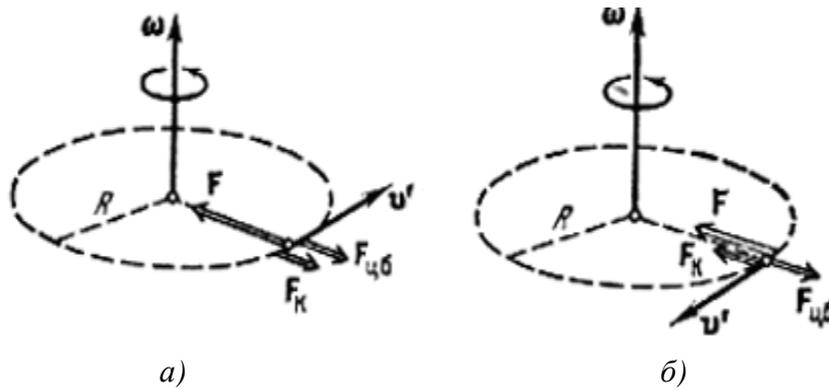


Рис. 6. К определению кориолисовой силы (уравнение (6))

Уравнение моментов. Моментом силы, действующей на материальную точку, относительно точки O (рис. 7), называется вектор

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (7)$$

где \vec{F} – равнодействующий вектор всех сил.

Моментом импульса материальной точки относительно точки O называется вектор

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (8)$$

Вектор момента импульса перпендикулярен плоскости, в которой лежат радиус-вектор и импульс точки, а вектор момента силы перпендикулярен плоскости, в которой расположены радиус-вектор и сила (см. рис. 7).

Продифференцируем равенство (8):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (9)$$

Так как $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, а $\vec{v} \parallel \vec{p}$, то $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = |\sin 0 = 0| = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$ и

уравнение (9) превращается в уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (10)$$

Для системы материальных точек:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i; \quad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i; \quad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i,$$

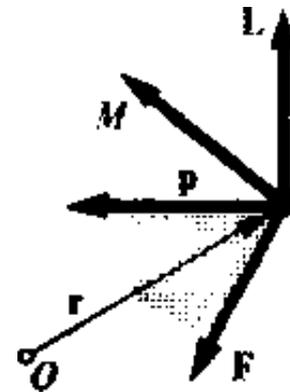


Рис. 7. К определению понятий момента импульса и момента сил. Точка O – начало отсчета радиусов-векторов

где $\vec{F}_i = \vec{F}'_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$, \vec{F}'_i – внешняя сила, действующая на i -ю точку из их совокупности; $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ – внутренняя сила, действующая на точку в результате взаимодействия с другими точками.

Исходя из третьего закона Ньютона, из всей суммы внутренних сил всегда найдутся взаимно компенсирующие пары, т.е. $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$. Поэтому сила, действующая на систему материальных точек, есть сумма внешних сил, а момент внешних сил $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$.

Механика твердого тела

Уравнения движения твердого тела. Твердое тело – это система материальных точек и, следовательно, все утверждения и уравнения в системе материальных точек применимы и для твердого тела. Для твердого тела уравнения $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ полностью описывают характер его движения (говорят: уравнения замыкают систему), т.к. число степеней свободы твердого тела – шесть, и число проецированных этих двух уравнений тоже шесть. Необходимо только знать начальные условия.

Центр масс. При движении с малыми скоростями (нерелятивистский случай) можно ввести понятие центра масс. Для этого случая рассмотрим выражение для импульса системы точек:

$$\vec{p} = \sum_i m_{oi} \vec{v}_i = \sum_i m_{oi} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_{oi} \vec{r}_i = m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \sum m_{oi} \vec{r}_i \right),$$

где под $m = \sum_i m_{oi}$ понимается масса системы, как сумма масс покоя составляющих ее точек. Радиус-вектор: $\vec{R} = \frac{1}{m} \sum_i m_{oi} \vec{r}_i$ определяет воображаемую точку, которая называется *центром масс*. Тогда $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ – вектор

скорости ее движения и $\vec{p} = m \frac{d\vec{R}}{dt} = m\vec{V}$, т.е. представляется как произведение массы системы на скорость ее центра масс, что совершенно аналогично импульсу материальной точки, и за движением центра масс можно

следить так же, как за движением материальной точки. С учетом трех последних соотношений уравнение движения системы приобретает вид: $m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$ и эквивалентно уравнению движения материальной точки, вся масса которой сосредоточена в центре масс, а внешние силы, действующие на точки системы, приложены к ее центру масс.

Вращение тела вокруг неподвижной оси. Пусть есть твердое тело с неподвижной осью вращения (рис. 8). Для i -й материальной частицы $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$.

Так как $\vec{r} \perp \vec{v}$, то модуль $L_i = m_i r_i \omega R_i$.

Очевидно, что для всех частиц твердого тела $(\vec{L}_i; \vec{\omega}) < 90^\circ$. Поэтому проекции их на ось имеют одинаковые знаки. Итак, $L_{zi} = m_i R_i^2 \omega$, так как $L_{zi} = L_i \cos \alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos \alpha_i = m_i r_i \cos \alpha_i R_i \omega$.

Проецируем по всем i -м частицам:

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \omega \sum_i m_i R_i^2,$$

где величина $I = \sum_i m_i R_i^2$ как сумма произведений элементарных масс на квадраты их расстояний от некоторой оси называется *моментом инерции тела* относительно данной оси. Формула $\vec{L}_z = I \vec{\omega}_z$ по информативности аналогична формуле $\vec{p}_z = m \vec{v}_z$.

Уравнение моментов как основное уравнение динамики вращательного движения может быть записано в виде $\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$.

Для тел с постоянной осью вращения и неизменным распределением масс около этой оси

$$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}; \quad \vec{M} = I \vec{\epsilon}. \quad (11)$$

Формула Штейнера. Зная момент инерции I_0 тела относительно некоторой оси OZ , проходящей через центр масс, можно легко вычислить момент инерции относительно любой другой параллельной оси: $I = I_0 + ma^2$, где a – кратчайшее расстояние между этими осями, а $I_{z0} = I_{z\min}$.

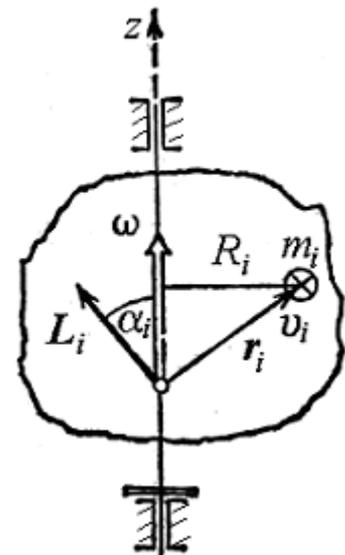


Рис. 8. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Законы сохранения

Законы сохранения обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени – однородностью и изотропностью пространства и времени и отвечают на вопрос: что в последовательности физических ситуаций, описываемых уравнениями движения, остается неизменным.

Однородность времени есть одинаковость развития и изменение данной физической ситуации независимо от того, в какой момент времени эта ситуация сложилась.

Однородность пространства – свойство неизменности характеристик пространства при переходе от одной его точки к другой, т.е. если имеется некоторая изолированная физическая система, то развитие событий в ней не зависит от того, в точках какой области пространства эта система локализована.

Изотропность пространства – эквивалентность различных направлений в пространстве, т.е. если имеется некоторая изолированная физическая система, то развитие событий в ней не зависит от того, как она ориентирована в пространстве.

Закон сохранения импульса. Система материальных точек или материальная точка называется *изолированной*, если отсутствуют внешние силы. Для таких систем: $\vec{F} = 0$ и уравнение движения: $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ или $\vec{p} = \text{const}$, или в проекциях на оси координат $p_x = \text{const}$, $p_y = \text{const}$, $p_z = \text{const}$. Импульс изолированной системы не изменяется при любых процессах, происходящих внутри системы: для материальной точки – в отсутствии внешних сил (она движется с постоянной скоростью по прямой линии); для системы материальных точек – ее центр масс при этом движется равномерно и прямолинейно.

Закон сохранения момента импульса. Для изолированной системы $\vec{M} = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда $\vec{L} = \text{const}$, или в проекциях $L_x = \text{const}$, $L_y = \text{const}$, $L_z = \text{const}$. Момент импульса изолированной системы не изменяется при любых процессах, происходящих внутри системы.

Примечание. Закон сохранения \vec{p} и \vec{L} можно применять не только к изолированным системам, но и к частично изолированным, т.к. часто встречаются случаи, когда только одна или две проекции рассматриваемых векторов (\vec{p} или \vec{L}) постоянны. Тогда говорят, что система изолирована относительно указанной проекции вектора.

Работа, мощность, энергия. Элементарной работой силы \vec{F} на перемещение $d\vec{r}$ называется проекция F_l этой силы на направление перемещения, умноженное на само перемещение: $dA = F_l dr = F dr \cos \alpha$, где α – угол между \vec{F} и $d\vec{r}$.

В общем случае, когда материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, проходит путь конечной длины: $A = \int_L (\vec{F} d\vec{r})$ называется

криволинейным интегралом вектора \vec{F} вдоль траектории L . Этот интеграл вектора \vec{F} вдоль L по определению и дает работу силы \vec{F} вдоль кривой L (рис. 9).

Элементарная работа результирующих двух или нескольких сил равна сумме элементарных работ этих сил: $dA = dA_1 + dA_2 + \dots$. Очевидно, то же утверждение справедливо и для работ на конечных перемещениях. Единица работы 1 Дж в СИ.

Так как $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ и $d\vec{r} = \vec{v} dt$, то $A = \int \vec{v} d\vec{p}$.

Мощность – работа отнесенная к единице времени: $P = \frac{dA}{dt}$. Единица измерения P 1 Вт в СИ.

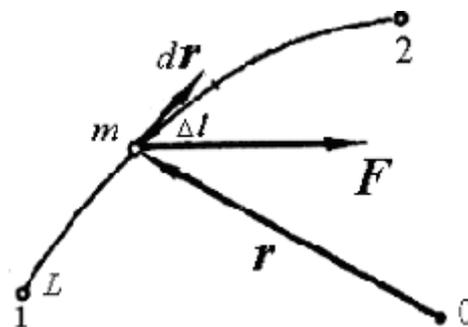


Рис. 9. К определению понятия работы силы \vec{F}

Так как $\vec{p} = m\vec{v}$, а в нерелятивистской механике масса не зависит от скорости, то $\vec{v} d\vec{p} = m\vec{v} d\vec{v}$. Здесь $\vec{v} d\vec{v} = v dv$, что справедливо для любых векторов, поэтому: $A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$, где v_2 – конечная скорость точки. Величина $K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ называется *кинетической энергией* материальной точки.

Работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки

$$A_{12} = K_2 - K_1. \quad (12)$$

Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий составляющих ее материальных точек или частей, на которые ее можно разделить. Тогда работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.

Консервативные и неконсервативные силы. Все силы, встречающиеся в макроскопической механике, принято разделять на консервативные и неконсервативные.

Если силы взаимодействия зависят только от конфигурации материальных точек системы (т.е. от их координат) и работа этих сил при перемещении системы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение не зависит от пути перехода, а определяется только начальной или конечной конфигурацией системы, то такие силы называются консервативными. Как следствие – работа консервативных сил по любому замкнутому контуру равна нулю.

Поле, в котором взаимодействие между телами осуществляется только центральными силами, называется полем центральных сил и является консервативной системой. При этом сила называется центральной, если она направлена к одной и той же точке (или от ...) и зависит только от расстояния до этой точки. Эта точка называется *центром сил* или силовым центром. Работа центральных сил не зависит от способа (или «пути») перехода системы из начальной конфигурации в конечную.

Все остальные силы – неконсервативные. К ним относят диссипативные силы (трения, сопротивления и т.п.), зависящие не только от расположения тел, но и от их скоростей относительно среды и направленные против вектора скорости. Поэтому полная работа диссипативных сил при любых движениях в замкнутой системе отрицательна. К неконсервативным силам относят и гироскопические силы, которые также зависят от скорости материальной точки, но действуют перпендикулярно вектору скорости.

Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии. Если на систему действуют только консервативные и гироскопические силы, то для нее вводят понятие потенциальной энергии. При этом любое произвольное (удобное для решения задачи) положение системы, характеризующееся заданием координат ее материальных точек, условно принимают за нулевое. Работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое, называется *потенциальной энергией системы в первом положении*.

Потенциальная энергия системы U – функция только ее координат, так как работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а только

от начальных и конечных координат. Если в заданном положении потенциальную энергию считать нулевой нельзя, то необходимо говорить о разности потенциальных энергий в двух положениях.

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы $A_{12} = U_1 - U_2$. Та же работа A_{12} определена приращением кинетической энергии (формула (12)). Тогда $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$ и $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$.

Сумма кинетической и потенциальной энергии системы называется полной механической энергией: $E = K + U = \text{const}$. В системе только с консервативными и гироскопическими силами происходят лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии системы не изменяется. Это положение называется *законом сохранения энергии* в механике.

Примеры. 1. Работа в однородном поле тяжести по равномерному перемещению тела вертикально на высоту h равна $A = mgh$, и при $h_0 = 0$, $U = mgh$.

2. Упругие силы, возникающие при растяжении или сжатии пружины, являются центральными, поэтому при переходе из деформированного состояния в недеформированное сила совершает работу

$$A = - \int_x^0 F dx = k \int_0^x x dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

Если считать энергию пружины в деформированном состоянии равной 0, то $U = \frac{1}{2} kx^2$.

3. При перемещении массы m из бесконечности гравитационные силы совершают работу $A = \int_{\infty}^r G \frac{Mm}{r^2} dr = G \frac{Mm}{r}$, где r – расстояние между мас-

сами M и m в конечном состоянии. Эта работа равна убыли потенциальной энергии: $A = U(\infty) - U(r)$, принимают обычно $U_{\infty} = 0$ и при таком со-

глашении: $U = -G \frac{Mm}{r}$ потенциальная (запасенная) энергия максимальна в

∞ , а так как мы принимаем $U_{\infty} = 0$, то при $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия будет убывать (поэтому получается знак минус).

Внутренняя энергия. Макроскопическая механика учитывает только кинетическую энергию макроскопического движения. При ударе, трении и иных потерях кинетическая энергия видимого движения не пропадает, а переходит в кинетическую энергию микроскопического беспорядочного движения атомов и молекул вещества, а также в потенциальную энергию их взаимодействия. Эта часть энергии тела называется *внутренней*.

Связь между потенциальной энергией и силой. Взаимодействие тел можно описать либо с помощью сил, либо с помощью потенциальной энергии. В макроскопической механике применимы оба способа. Первый обладает большей областью, т.к. он применим к таким силам (сила трения), для которых нельзя ввести потенциальную энергию. Второй – применим только в случае консервативных систем (микромир квантовой механики).

Рассмотрим материальную точку, находящуюся в силовом поле неподвижных тел. Если силы консервативные, то можно рассматривать потенциальную энергию материальной точки в этом поле. Величина U будет функцией \vec{r} этой точки или ее координат x, y, z . Пусть точка претерпела произвольное б/м перемещение $d\vec{r}$ под действием силы \vec{F} . Работа силы при таком перемещении будет равной убыли потенциальной энергии: $\vec{F}d\vec{r} = -dU$ или $F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU$ (полный дифференциал).

Если координатные оси выбраны так, что одна из них (X) совпадает с перемещением \vec{r} , то $F_x dx = -(dU)_{y,z}$. Индексы y, z означают, что при дифференцировании они должны быть постоянными. Получающиеся величины называются частными производными функции U и обозначаются

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Эти три формулы можно объединить в одну и записать

$$\vec{F} = -\text{grad}U, \quad (13)$$

где $\text{grad}U \equiv \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей.

Чаще применяется другая форма записи: $\vec{F} = -\nabla U$, где ∇ – «набла» называется оператором Гамильтона:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

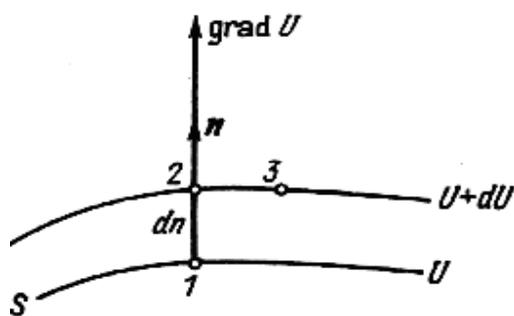


Рис. 10. К определению понятия градиента скалярной величины U

Представим поверхность (рис. 10) как геометрическое место точек с одинаковой потенциальной энергией. Одну из координатных осей совместим с \vec{n} , тогда $\text{grad}U = \frac{dU}{dn} \vec{n}$, а вектор силы \vec{F} будет направлен в противоположную сторону.

Механика жидкости и газа

Элементы механики сплошных сред. Механика сплошной среды – большая часть механики, посвященная движению деформируемых материальных тел, заполняющих пространство непрерывно-сплошным образом.

В отличие от твердых тел жидкости и газы в состоянии равновесия не обладают *упругостью формы*, но обладают *объемной упругостью*. Жидкости и газы – это такие среды, в которых в состоянии равновесия напряжение всегда нормально к площадке, на которую оно действует, т.е. касательные напряжения существовать не могут. Для равновесия жидкости необходимо, чтобы сплошное поле, в котором она находится, было консервативным. При движении жидкости наряду с нормальным напряжением в ней могут возникать и касательные силы, которые определяются не самими деформациями (сдвигами), а их скоростями. Поэтому они относятся к классу сил трения или вязкости и называются *сдвиговыми вязкими силами*.

Каждой жидкости свойственен собственный объем, незначительно меняющийся с изменением внешнего давления. Поэтому часто пользуются понятием абсолютно несжимаемой жидкости. Газы обладают способностью к неограниченному расширению: газ полностью заполняет объем сосуда, в котором заключен.

Идеальная жидкость – жидкость, в которой при любых движениях не возникают силы вязкости как касательные, так и нормальные. Это жидкость, в которой могут присутствовать только силы нормального давления. Идеальная жидкость – абстракция, которой можно пользоваться, когда скорость изменения деформаций в жидкости невелика.

Основные уравнения равновесия и движения жидкостей. Силы, действующие в сплошной среде, обычно разделяют на силы массовые (объемные) и силы поверхностные. Массовая сила обозначается $\vec{f}dV$, где \vec{f} – объемная плотность массовых сил. Например, объемная плотность массовых сил в поле тяжести $\vec{f} = \rho\vec{g}$.

Поверхностные силы – силы, которым подвергается объем жидкости благодаря нормальным и касательным напряжениям, действующим на его поверхности со стороны соседних частей жидкости. Для идеальной жидкости понятие $\nabla p = \frac{dp}{dx} \vec{i} + \frac{dp}{dy} \vec{j} + \frac{dp}{dz} \vec{k}$ (градиент скаляра p) справедливо, если поле давлений определяется консервативным полем сил. В состоянии равновесия действие внешней силы в единице объема уравнивается массовой силой \vec{f} . Получаем основное уравнение гидростатики (равновесия):

$$\text{grad}p = \vec{f}, \text{ или } \vec{f} - \text{grad}p = 0. \quad (14)$$

При равновесии элементарного объема плотность силы \vec{f} определяется операцией градиент над однозначной скалярной функцией. А это есть необходимое и достаточное условие того, чтобы \vec{f} была бы объемной плотностью консервативной силы.

При движении элементарного объема идеальной жидкости со скоростью \vec{v} получаем *основное уравнение гидродинамики* (уравнение Эйлера):

$$\vec{f} - \nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (15)$$

Гидростатика несжимаемой жидкости. В случае отсутствия массовых сил, когда $\vec{f} = 0$, получаем $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0$ и при равновесии давления во всех точках одинаковы (закон Паскаля (1623 – 1662)). В противном случае возникает движение жидкости.

Следствие. При отсутствии массовых сил одинаковое давление на поверхности жидкости возбуждает такое же давление во всех точках внутри жидкости.

Пример. Пусть жидкость находится в поле тяжести: $\vec{f} = \rho \vec{g}$. Направим ось Z вертикально вверх. В этом случае основные уравнения равновесия (14) примут вид

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} = 0; \quad \frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (16)$$

Пусть для малых значений z величина g не меняется. Пусть плотность жидкости неизменна и жидкость однородна. Интегрируя уравнение (16), получим: $p = p_0 - \rho g z$, где p_0 – давление жидкости на высоте $z = 0$. Эта формула определяет также давление жидкости на дне и стенках сосуда, а также на поверхности всякого тела, погруженного в жидкость.

Кинематическое описание движения жидкости. Для описания движения жидкости можно поступить двояко: 1. Проследить за движением каждой индивидуальной частицы жидкости, т.е. указать движение и скорость этой частицы в каждый момент времени. Этим будут определены и траектории всех частиц; 2. Проследить, что происходит с течением времени в каждой точке пространства, указывая вектора скоростей различных частиц жидкости, которые в разные моменты времени проходят через данную точку пространства. Совокупность точек пространства в фиксированное время даст поле скоростей.

Линия тока – линия, касательная к которой указывает направление скорости частицы жидкости, проходящей в данный момент времени через точку касания.

При *стационарном* (установившемся) движении поле скоростей, а следовательно, и линии тока остаются постоянными с течением времени: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$. Траектории частиц всегда совпадают с линией тока.

При *нестационарном* (неустановившемся) движении поле скоростей меняется с течением времени: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$. Линии тока, вообще говоря, не совпадают с траекториями.

Возьмем в объеме стационарного течения жидкости произвольный замкнутый контур и через каждую точку его в один и тот же момент времени проведем линии тока. Они организуют трубчатую поверхность, называемую *трубка тока*. Так как векторы \vec{v} направлены по касательной к линиям тока, то при течении жидкость не может пересекать боковую поверхность трубки тока. В этом смысле она ведет себя подобно боковой поверхности жесткой трубки. Если сечение трубки бесконечно малое, то скорость можно считать постоянной в трубке и направленной вдоль оси трубки тока.

К теореме о неразрывности струи. Масса жидкости, протекающая за время dt через S : $dm = \rho v S dt$, где S – площадь нормального (поперечного) сечения трубки. В случае стационарного течения, dm будет одной и той же для всех сечений трубки тока, и $(\rho v S)_1 = (\rho v S)_2 = \dots$. Если жидкость

несжимаема, то $\rho_1 = \rho_2$ и $\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}$. Для несжимаемой жидкости величина

$S_i v_i$ в любом i -м сечении одной и той же трубки тока должна быть одинакова. Отсюда следует, что скорость жидкости в трубке тока тем больше, чем уже поперечное сечение трубки, и при переменном сечении трубки тока частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением.

Уравнение Бернулли. Пренебрегаем некоторыми свойствами жидкости: 1) силой вязкости, рассматривая случай идеальной жидкости: единственные поверхностные силы – это силы нормального давления p , а само давление p однозначно определяется плотностью и температурой; 2) несжимаемостью; 3) стационарностью движения; 4) теплообменом между частями жидкости и внешней средой.

Рассмотрим стационарное течение жидкости в бесконечно узкой трубке в консервативном поле сил (рис. 11). Применим к этому течению закон сохранения энергии. Пусть объем $MNDC$ переместится в бесконечно близкое положение $M_1N_1D_1C_1$.

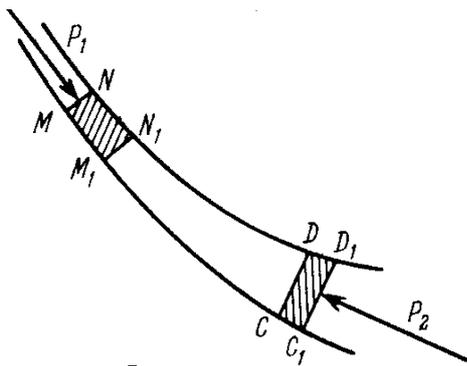


Рис. 11. К выводу формулы Бернулли

Вычислим работу A , совершаемую при этом силами давления. По определению трубки тока, давление, действующее на боковую поверхность трубки тока, перпендикулярно к перемещению и работы не совершает. При перемещении границы MN в положение M_1N_1 совершается работа $A_1 = p_1 S_1 l_1$, где $l_1 = MM_1$, $S_1 l_1 = \Delta V_1 = \frac{\Delta m_1}{\rho_1}$.

Работа при перемещении границы CD в C_1D_1 : $A_2 = p_2 \frac{\Delta m_2}{\rho_2}$. При стационарном движении $\Delta m = \text{const}$, тогда $A = A_1 - A_2 = \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) \Delta m$ – приращение полной энергии жидкости. Но энергия жидкости в объеме $M_1N_1D_1C_1$ не изменилась, поэтому ΔE равна разности энергий массы жидкости Δm в положениях: CDD_1C_1 и MNN_1M_1 .

Обозначим полную энергию, приходящуюся на единицу массы жидкости ε . Тогда $\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \Delta m$. Приравнявая эту величину к работе A и сокращая на Δm , получим $\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2}$, откуда получаем уравнение в

форме уравнения Бернулли: $\varepsilon + \frac{p}{\rho} = B$, где постоянная Бернулли $B = \text{const}$

вдоль одной линии тока при стационарном течении идеальной жидкости.

Пример. В поле тяжести Земли: $\varepsilon = \frac{v^2}{2} + gh$, тогда для единицы массы жидкости: $\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = B' = \text{const}$.

Вязкость. В реальных жидкостях, кроме сил нормального давления, на границах движущихся элементов жидкости действуют еще касательные силы вязкости. Давление в жидкости падает в направлении ее течения. Для стационарности течения на концах трубы необходимо поддерживать постоянную разность давления, уравнивающую силы вязкости.

Эксперимент Ньютона. Представим две бесконечно длинные параллельные пластины (рис. 12) с площадью S : нижняя – AB – покоится, верхняя – CD – движется с постоянной скоростью \vec{v}_0 . Для поддержания равномерного движения пластины CD к ней должна быть приложена постоянная сила \vec{F} , направленная в сторону движения. На пластину

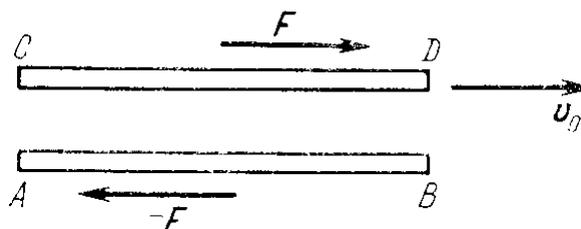


Рис. 12. К эксперименту Ньютона

AB должна действовать такая же, но противоположно направленная сила, удерживающая эту пластину в покое. Величина этой силы пропорциональна скорости и площади пластины, но обратно пропорциональна расстоянию h между пластинами.

Пусть теперь движутся обе пластины равномерно и параллельно друг другу: пластина AB – со скоростью v_1 , пластина CD – со скоростью v_2 . Тогда сила вязкости определится как $F = \eta S \frac{v_2 - v_1}{h}$, где η – постоянная, называемая *вязкостью жидкости*. Она не зависит от материала пластин, но определяется внутренним состоянием жидкости и, поэтому зависит от температуры.

Таким образом, под вязкостью понимают как явление, так и коэффициент, характеризующий свойства текущей жидкости. Иногда пользуются величиной $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, называемой *кинематической вязкостью*, тогда величину η , отличая ее от ν , называют *динамической вязкостью*.

Биологические жидкости (кровь), состоящие из сложных и крупных молекул и образующие устойчивые пространственные структуры, являются неньютоновскими. Их вязкость (при прочих равных условиях) намного превосходит вязкость ньютоновских жидкостей, потому что при течении этих жидкостей работа внешней силы затрачивается не только на преодоление истинной, ньютоновской, вязкости, но и на разрушение структуры.

Стационарное движение жидкости в прямолинейной трубе. Формула Пуазейля. Вязкая несжимаемая жидкость течет вдоль прямолинейной цилиндрической трубы радиусом R . Линии тока параллельны оси трубы. Если выделить бесконечно узкую трубку (рис. 13), то из условия несжимаемости последует, что скорость течения \vec{v} вдоль трубки тока будет одна и та же. Конечно, скорость изменяется по радиусу трубы $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$.

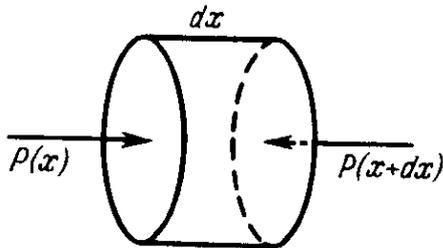


Рис. 13. К выводу формулы Пуазейля

Примем за ось трубы ось X , направленную в сторону течения жидкости. Выделим в трубе произвольный цилиндрический элемент длиной dx и радиуса r . На его боковую поверхность в направлении движения действует касательная сила вязкости

$$dF = 2\pi r\eta \frac{dv}{dr} dx.$$

В том же направлении на основания этого цилиндра действует сила разности давлений $dF_1 = \pi r^2 [p(x) - p(x + dx)] = -\pi r^2 \frac{dp}{dx} dx$.

При течении стационарном сумма этих двух сил должна быть равна нулю, поэтому $2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dp}{dx}$.

Ясно, что Δp по оси X подбирается постоянным и таким, чтобы $v(r)$ и, следовательно, и $\frac{dv}{dr}$ не менялись с изменением X .

Тогда $\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{l}$, где p_1, p_2 — давление на входе и выходе трубы, соответственно. Приходим к следующей форме уравнения: $\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r$.

Интегрируя его, получаем $v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C$.

Постоянная C определяется из краевых условий: на стенке трубы при $r = R$ скорость должна обращаться в ноль. Это дает
$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

Получаем промежуточный результат: v_{\max} – на оси трубы ($r = 0$), а при удалении от оси $v(r)$ спадает по параболическому закону.

Определим расход жидкости: количество жидкости, ежесекундно протекающее через поперечное сечение трубы. В общем случае $dQ = 2\pi r dr \cdot \rho v$ – масса жидкости, ежесекундно протекающая через кольцо с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$. Подставим выражение скорости и проинтегрируем по r :
$$Q = \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr,$$
 получая формулу

Пуазейля:
$$Q = \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4.$$
 Расход жидкости пропорционален разности давлений, четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален длине трубы и вязкости текущей жидкости.

В более общем виде для случая прямолинейных труб произвольного поперечного сечения формула Пуазейля имеет вид:
$$Q = C \frac{P_1 - P_2}{\eta l} \rho S^2,$$
 где C – эмпирическая постоянная формы поперечного сечения.

Элементы теории гидродинамического подобия. Пусть имеется произвольный изотермический поток жидкости. Интуитивно понятно, что можно данное течение с той или иной точностью повторить, т.е. создать подобие системы. При этом надо повторить основные параметры данной системы: $\vec{v}; v_0; \vec{r}; l; \rho; \eta; c; g; \tau$, где \vec{r} и \vec{v} – радиус-вектор и скорость жидкости в подобно расположенных точках, l – характерный размер, v_0 – характерная скорость потока, ρ – плотность жидкости, η – вязкость, c – скорость звука в рассматриваемой жидкости, g – ускорение свободного падения, τ – характерное время качественного изменения течения.

Чтобы системы были подобны, удобнее пользоваться функциональными, безразмерными коэффициентами, несущими качественную информацию о системе (табл. 1).

Таблица 1. Основные критерии подобия

Символ и формула критерия	Критерий	Физический смысл
$\frac{\bar{v}}{v_0}$	Подобия поля скоростей	Характеризует поле скоростей, являясь отношением скорости течения в каждой данной точке к характерной для этого течения скорости
$\frac{\bar{r}}{l}$	Геометрического подобия	Характеризует масштабное расположение элементов жидкости относительно и по отношению к характерному размеру
$Re = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}$	Режима движения. Число Рейнольдса	Характеризует режим движения при вынужденной конвекции, являясь отношением сил инерции и сил вязкости
$F = \frac{v_0^2}{l \cdot g}$	Гравитационного подобия. Число Фруда	Характеризует соотношение сил тяжести и сил инерции в потоке
$M = \frac{v_0}{c}$	Сжимаемости жидкости. Число Маха	Характеризует сжимаемость жидкости при увеличении ее характерной скорости
$S = \frac{v_0 \tau}{l}$	Гидродинамической гомохронности. Число Струхаля	Характеризует меру отношения переносного (конвективного) ускорения к ускорению в данной точке

Представим шесть основных безразмерных комбинаций этих параметров: 1. $\frac{\bar{v}}{v_0}$; 2. $\frac{\bar{r}}{l}$; 3. Число Рейнольдса: $Re = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}$; 4. Число Фруда: $F = \frac{v_0^2}{l \cdot g}$; 5. Число Маха: $M = \frac{v_0}{c}$; 6. Число Струхаля: $S = \frac{v_0 \tau}{l}$. Безразмерные отношения и числа, являясь безразмерными коэффициентами в уравнении движения вязкой жидкости, выступают в качестве критериев гидродинамического подобия (см. табл. 1).

По правилу размерности каждая комбинация является функцией остальных, например: $\frac{\bar{v}}{v_0} = f\left(\frac{\bar{r}}{l}; Re; F; M; S\right)$. Если для двух течений совпадают пять, то совпадают и шестые. Это – общий закон подобия течений, а такие течения называют механически или гидродинамически подобными.

Пример: а) для стационарных течений τ , а следовательно и S обращаются в ∞ ; б) для несжимаемых жидкостей $M = 0$. Таким образом, для условий а) + б): $\bar{v} = v_0 f\left(\frac{\bar{r}}{l}; Re; F\right)$, т.е. течения подобны, если они имеют одинаковые Re и F .

Ввиду особой важности двух критериев Re и F дадим им толкование, дополнительное к табличному. По порядку величины число Рейнольдса есть отношение кинетической энергии жидкости к потере ее, обусловленной работой сил вязкости на характерной длине. По порядку величины число Фруда определяет отношение кинетической энергии жидкости к приращению ее, обусловленному работой силы тяжести на пути, равному характерной длине.

При достаточно больших скоростях ($\bar{v} > \bar{v}_{кр}$ или $Re > Re_{кр}$) ламинарное течение оказывается неустойчивым и переходит в турбулентное течение, гидродинамические характеристики которого (v ; p , а для газов ρ и T) быстро и нерегулярно изменяются во времени (флуктуируют). Этим нерегулярным колебаниям и вращениям (пульсациям) свойственны определенные интервалы времени. В гидродинамически подобных течениях переход от ламинарного к турбулентному течению должен происходить при одних и тех же значениях числа Re (закон Рейнольдса).

Характер течения жидкости по трубе зависит от свойств жидкости, скорости ее течения, размеров трубы и определяется числом Рейнольдса.

Потенциальные и вихревые движения. Рассмотрим поле скоростей жидкости $\bar{v}(\bar{r})$ в фиксированный момент времени. Выделим в жидкости произвольный замкнутый контур L и на нем установим положительное направление обхода (рис. 14).

Интеграл $\Gamma = \oint_L v_{\tau} dl = \oint_L (\bar{v} dl)$ называется циркуляцией вектора скорости по контуру L . Если Γ по любому замкнутому контуру обращается в ноль, то движение жидкости называется *потенциальным*, если $\Gamma \neq 0$ – *вихревым*.

Всякое течение идеальной жидкости, возникшее из состояния покоя под действием консервативных сил, является потенциальным, например: течение жидкости вдоль параллельных прямых линий с постоянной скоростью.

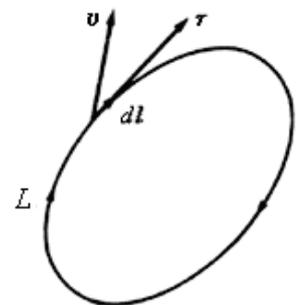


Рис. 14. К понятию циркуляции вектора \bar{v} : $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной, dl – элемент длины

Примером вихревого движения может служить плоское течение жидкости, когда частицы последней вращаются по concentрическим окружностям с одной и той же угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 15). В этом случае для окружности с r : $\Gamma = 2\pi r v$, или $\Gamma = 2\pi r^2 \omega$.

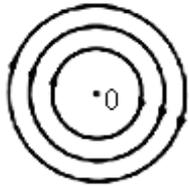


Рис. 15. Плоское течение жидкости

Отношение к площади контура $\frac{\Gamma}{\pi r^2} = 2\omega$ не зависит от

r . Предел $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\pi r^2} = |\text{rot} \vec{v}| = 2\omega$ называют модулем *вихря* или

ротора скорости \vec{v} , или, точнее проекцией вектора ротора на направление, перпендикулярное к плоскости контура:

$$\text{rot}_n \vec{v} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\Delta S}, \text{ где } n \text{ – индекс нормали.}$$

Теорема Жуковского. Рассмотрим движение жидкости относительно тела в форме крыла (совокупности крыльев) при следующих условиях:

- а) длина крыла бесконечно большая;
- б) крыло несимметрично или несимметрично расположено относительно горизонтальной плоскости, в которой оно движется;
- в) крыло движется в идеальной жидкости (безвязкостной);
- г) вокруг крыла установилась циркуляция скорости постоянной величины;
- д) невозмущенный поток горизонтален.

Пусть X направлена вдоль потока, ось Y – нормально потоку (рис. 16). Проведем прямоугольный контур $ABCD$, горизонтальные стороны которого проходят посередине между соседними крыльями. За время dt жидкость из $ABCD$ переместится в объем $A'B'C'D'$. Вертикальная скорость \vec{v}' – обусловлена циркуляцией.

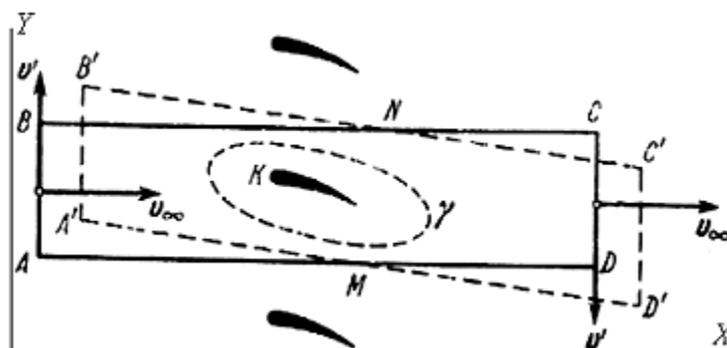


Рис. 16. К выводу формулы Жуковского – Кутта

Искомое приращение импульса $d\vec{p}$ найдется, если из импульса в объеме $CC'D'D$ вычесть импульс в объеме $AA'B'B$. Каждый из этих объемов равен $lv_\infty dt$, где $l = AB = CD$, v_∞ скорость невозмущенного течения \vec{v}_∞ постоянна, а вертикальные скорости \vec{v}' вдоль AB и CD равны по модулю. Поэтому приращение получает только вертикальная составляющая импульса, и оно равно $dp_y = -2lv_\infty \rho v' dt$. Но $2lv' = \Gamma$ и есть циркуляция скорости \vec{v}' по контуру $ABCD$. Тогда: $dp_y = -\Gamma \rho v_\infty dt$.

Применяя второй закон Ньютона, получаем формулу Жуковского – Кутта $F_y = \Gamma \rho v_\infty$.

Подъемная сила. Рассмотрим тонкую пластинку, поставленную на пути потока идеальной жидкости. Если пластинка ориентирована вдоль потока, то критические точки, в которых скорость жидкости обращается в нуль, находятся на краях A и B (рис. 17, *a*).

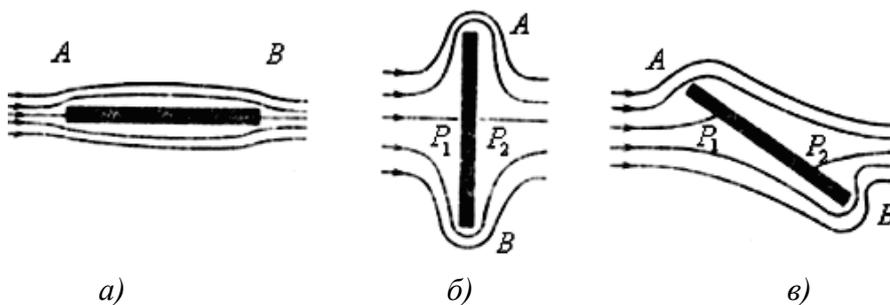


Рис. 17. Тонкая пластинка в потоке идеальной жидкости

Если пластинка поставлена перпендикулярно к потоку, то обе критические точки смещаются к центру пластинки, а скорость течения достигает максимума на краях пластинки A и B (рис. 17, *б*). Если же пластинка поставлена наклонно к потоку (рис. 17, *в*), то критические точки P , занимают промежуточные положения между центром пластинки и ее краями. Скорость течения по-прежнему максимальна на краях пластинки. В окрестности критической точки P_1 она больше снизу, чем сверху, так как нижний поток расположен значительно ближе к краю B пластинки, чем верхний к краю A . Такая же картина течения образуется в начальный момент и при течении вязкой жидкости.

В случае с крылом самолета поток воздуха под крылом в начале движения огибает заднюю кромку крыла и встречается вдоль линии PD с потоком, огибающим крыло сверху. Здесь образуется поверхность раздела, свертывающаяся в вихрь с вращением против часовой стрелки (рис. 18, *a, б*).

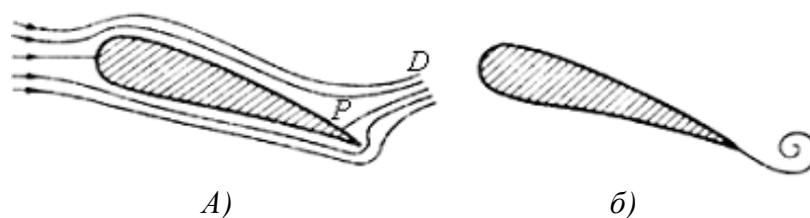


Рис. 18. Профиль крыла в потоке воздуха: *a* – линии тока, *б* – вихрь на кромке крыла

Допустим, что в результате отрыва какая-то малая масса воздуха, ранее находившаяся в пограничном слое снизу от крыла, унесена потоком в виде одного или нескольких вихрей. Обладая вращением, эта масса унесет и связанный с ней момент импульса. Но общий момент импульса воздуха не может измениться. Если при этом сверху от крыла отрыв пограничного слоя не произошел, то для сохранения момента импульса воздух во внешнем потоке должен начать вращаться вокруг крыла по часовой стрелке. Скорость потока под крылом уменьшится, а над ним – увеличится. К внешнему потоку применимо уравнение Бернулли. Из него следует, что в результате циркуляции давление под крылом возрастет, а над ним – уменьшится. Возникшая разность давлений проявляется в подъемной силе, направленной вверх. Если унесенные вихри образовались из частиц пограничного слоя сверху крыла, то возникнет циркуляция против часовой стрелки, а подъемная сила будет направлена вниз.

Подъемная сила крыла самолета создается не от ударов частичек воздуха о наклонную поверхность крыла, преграждающую путь воздуху, а благодаря различию в скоростях воздушного течения под и над крылом. Несимметрия крыла формирует локальные обратные течения, которые вырождаются в вихри. Циркуляционное течение вокруг профиля крыла образуется как реакция на «начальный вихрь», который отделяется от задней кромки крыла в начало движения и относится течением. Таким образом, вихри возникают парами – равные по интенсивности, но с противоположными направлениями вращения.

Эффект Магнуса. Если неподвижный круглый цилиндр обтекается равномерным потоком воздуха, перпендикулярным к его оси, то вследствие симметрии возникает только лобовое сопротивление, но никакой подъемной силы не появляется. Однако, если цилиндр привести во вращение, то появляется подъемная сила, перпендикулярная к направлению внешнего потока, и цилиндр отклоняется в сторону. Это явление называется

эффектом Магнуса (1802 – 1870). Допустим, что вращающийся цилиндр обдувается равномерным потоком воздуха слева направо (рис. 19). Сверху цилиндра направление потока совпадает с направлением вращения цилиндра, а снизу – противоположно ему. Частицы в пограничном слое сверху цилиндра ускоряются потоком, что препятствует отрыву пограничного слоя. Наоборот, снизу поток тормозит движение в пограничном слое и способствует его отрыву. Отрывающиеся части пограничного слоя уносятся потоком в виде вихрей, в которых направление вращения происходит против часовой стрелки. Вследствие этого вокруг цилиндра возникает циркуляция скорости в противоположном направлении, т.е. в том же направлении, в каком вращается цилиндр. Вместе с циркуляцией появляется и подъемная сила, направленная вверх. При изменении направления вращения цилиндра на противоположное подъемная сила также меняет направление на противоположное. И в этом случае (для бесконечно длинного цилиндра) величина подъемной силы определяется формулой Жуковского – Кутта.

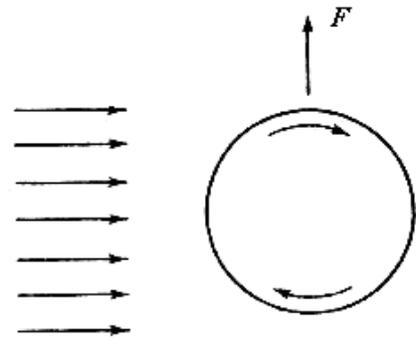


Рис. 19. К объяснению эффекта Магнуса

Когда поступательное движение тела в воздушной среде сочетается с вращательным, на тело действует сила, направленная перпендикулярно поступательному движению воздуха.

Об упругих деформациях и напряжениях

Упругими называются деформации, исчезающие после прекращения действия сил. *Малыми* называют упругие деформации, подчиняющиеся закону Гука. Различные части деформированного тела взаимодействуют между собой на поверхностях, вдоль которых они граничат друг с другом. Сила, отнесенная к единице площади такой поверхности dF/dS , называется *напряжением*, действующим в соответствующей точке на границе раздела.

Растяжение и сжатие стержней. Закон Гука. Деформация стержня связана с возникновением упругих сил, с которыми каждая часть стержня действует на другую, с которой она граничит. Если стержень растянут, то напряжение называют *натяжением*: $T = F/S$. Если стержень сжат, то напряжение называют *давлением*: $p = F/S$. Ясно, что $T = -p$.

Для малых деформаций $T = E \frac{\Delta l}{l_0}$ или $p = -E \frac{\Delta l}{l_0}$, где E – модуль Юнга (функция материала и его физического состояния): $E = \frac{\Delta l}{l_0}$, где Δl – абсолютное удлинение стержня. Для малых деформаций выполняется принцип их суперпозиции.

Под действием растягивающей или сжимающей силы F изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня. Величина $-\frac{\Delta a}{a_0} \approx -\frac{\Delta a}{a}$ называется *относительным поперечным сжатием* стержня. Здесь $\Delta a = a - a_0$, a_0 – толщина до деформации, a – толщина после деформации. Отношение относительного поперечного сжатия к соответствующему относительному продольному удлинению называется коэффициентом Пуассона: $\mu = -\frac{\Delta a}{a} : \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta a l}{\Delta l a}$, где μ – функция только материала тела. Упругие постоянные E и μ полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через E и μ .

Часть 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Основные положения. Наиболее простой моделью системы многих частиц является *идеальный газ*. Это газ, по определению, состоящий из точечных материальных частиц с конечной массой, между которыми отсутствуют силы, действующие на расстоянии, и которые сталкиваются между собой по законам соударения шаров. Соударения происходят по законам абсолютно упругого удара. Других способов взаимодействия нет. В реальных системах это справедливо, когда энергией взаимодействия можно пренебречь по сравнению с энергией самих частиц.

Размер частиц идеального газа, как твердых правильных сфер, намного меньше среднего расстояния между ними, именно поэтому интервал времени между столкновениями много больше времени самого столкновения, значит, можно считать, что частицы движутся равномерно и прямолинейно подавляющую долю времени наблюдения.

Частицы выделенной группы наблюдения после столкновений рассеиваются в пространстве, занимая весь предоставленный объем, ограниченный стенками. При равновесии стенки можно заменить выделенной в самом газе замкнутой виртуальной границей, через которую происходит лишь обмен молекул, эквивалентный упругому отражению молекул от стенок. Если стенки материальны, то частицы будут отражаться от них по законам упругого удара, передавая стенке суммарный импульс силы. Следствием этого является давление газа на стенку.

Частицы обмениваются энергией, изменяя свои скорости и координаты внутри объема. При неизменных внешних параметрах, в газе устанавливается равновесное состояние. Любое отклонение от этого состояния сглаживается благодаря непрерывному хаотическому движению и столкновениям частиц, и за короткое время (время релаксации) газ снова приходит в равновесное состояние по любому макропараметру. Поэтому при постоянных внешних параметрах за интервалы времени, большие времени релаксации, можно считать состояние газа равновесным.

Столкновения частиц приводят не только к установлению в газе одинаковой плотности, но и к равномерному распределению в пространстве направлений движения частиц: сколько частиц движется в одном направлении, столько же в среднем движется в любом другом. В результате давление в идеальном газе оказывается изотропным. Отсутствие направленного потока в газе при равновесии указывает, что средние скорости и число частиц, движущихся в разных направлениях, оказывается одинаковым.

Известны три метода как три принципиальных подхода к изучению систем многих частиц: *динамический*, *статистический* и *термодинамический*.

Динамический метод. Поведение системы, состоящей из сравнительно небольшого числа частиц, можно описать механически. Так, если в некоторый момент времени известны координаты и скорости всех частиц системы и известен закон их взаимодействия, то решая уравнения классической механики, можно найти эти координаты и скорости в любой последующий момент времени, полностью определяя состояние системы. Метод исследования, однозначно определяющий последующее состояние системы по предыдущему, называется *динамическим*.

При нормальных условиях (н.у.) в 1 см^3 воздуха содержится примерно $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул. Это значит, что для записи в некоторый момент времени положений и скоростей всех молекул потребовалось бы зафиксиро-

ровать $6 \cdot 2,7 \cdot 10^{19}$ чисел. При скорости фиксации 1 млн чисел в секунду потребуется около 5 млн лет. Поэтому для макроскопических систем, состоящих из очень большого числа частиц, такой путь построения теории невозможен. Вся получаемая информация становится необозримой для мысленного восприятия, и даже простая ее фиксация превосходит возможности технических средств, не говоря уже о технической неосуществимости ее обработки.

Информация об отдельных частицах в своей непосредственной форме непригодна для теоретического анализа и бесполезна с практической точки зрения. Это обусловлено тем, что каждая молекула при н.у. испытывает примерно 10^9 столкновений в секунду. Поэтому, если лишь слегка изменить только направление скорости и только одной молекулы, то через $N \cdot 10^{-9}$ с, изменятся скорости у 2^N других молекул, а следовательно изменится и их положение. С другой стороны, ясно, что если даже у одного миллиарда частиц изменить направление скорости, то эти изменения будут столь же несущественны для системы частиц в целом, сколь несущественно, например, для человечества в целом возникновение острой зубной боли у одного из людей.

Очевидно, что динамический метод может быть эффективен только в применении к системам с небольшим числом степеней свободы.

Статистический метод. Если информация относится к совокупности больших количеств частиц, то она должна иметь обобщенный характер. Большое число частиц в системе определяет появление статистических понятий и закономерностей для внутренней динамики этих систем.

Случайная величина как число не может быть предсказана (предопределена), но совокупность (массив) случайных величин подчиняется закономерностям, которые изучает *теория вероятности*. Как набрать эту совокупность изучает *математическая статистика*.

Статистическим методом исследования называют метод, при котором предыдущее состояние системы определяет последующее не адекватно, а лишь с некоторой вероятностью. Величина вероятности становится количественной оценкой прогноза последующего состояния.

Термодинамический метод. Модель идеального газа определяется параметрами, характеризующими систему в целом без анализа внутренней структуры. Связи между этими параметрами определяются с помощью общих положений, например, закона сохранения энергии.

Статистический метод

Основные понятия теории вероятности. Величина вероятности является количественной оценкой прогноза последующего состояния и определяется в форме $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$, где N_A – число опытов с результатом A ; N – число опытов, испытаний; $P(A)$ – вероятность результата A .

Любая физическая система объектов характеризуется объемом, поэтому вводится понятие плотности вероятности:

$$f(x, y, z) = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{P(V_i)}{V_i} = \lim_{\substack{V_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{N_i}{NV_i},$$

где x, y, z – координаты исследуемой точки координатного пространства, в которую стягивается бесконечно малый объем.

Тогда связь между вероятностью $P(V_i)$ частице i находиться и быть обнаруженной в объеме V_i и плотностью вероятности $f(x, y, z)$ данной частице иметь координаты (x, y, z) в этом объеме определяется в виде

$$P(V_i) = \frac{N(V_i)}{N} = \int_{V_i} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Если $V_i \rightarrow \infty$, то ясно, что указанная i -я молекула будет определена с надежностью 100%. Тогда условие $\int_{V_i \rightarrow \infty} f(x, y, z) dx dy dz = 1$, или $\sum_{i=1} P_i = 1$ называется *условием нормировки вероятностей*.

Среднее значение дискретной величины: $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. Среди x_i могут быть и одинаковые по величине. Перегруппируем правую часть так, чтобы в нее входили разные x_j и получим: $\langle x \rangle = \sum_j \left(\frac{N_j}{N} \right) x_j$, где $N = \sum_j N_j$, а N_j – число одинаковых (j) членов в сумме i -х членов.

Так как $N_j/N = P_j$ определяет вероятность того, что x принимает значение x_j , то $\langle x \rangle = \sum_j P_j x_j$ и называется *математическим ожиданием* случайной величины с учетом вероятности.

Для непрерывно меняющейся величины x : $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.

Средний квадрат отклонения от среднего $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ определяет дисперсию («разброс») величины x около ее среднего значения $\langle x \rangle$, а $\sqrt{\sigma^2}$ называют *стандартным, среднеквадратичным отклонением* от среднего.

Определенные (рассчитанные) вероятности разных состояний системы выстраивают в возрастающем порядке и получают статистический ряд, определяющий функцию распределения вероятностей $F(x)$. Тогда вероятность того, что случайная величина x принимает значения меньше заданного числа x_0 , т.е. $x < x_0$ задается формулой: $P(x < x_0) = F(x_0) = \sum_{x_j < x_0} P_j$, где

$F(x_0)$ – функция распределения вероятностей:

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx; \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Вероятность того, что случайная величина x принимает значение, лежащее в интервале $x_1 < x < x_2$, выражается формулой:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} dF(x) = F(x_2) - F(x_1).$$

Задача сводится к идентификации функции распределения вероятностей по известной классификации распределений.

Макроскопическое и микроскопическое состояние системы. Система, как совокупность физических объектов исследования, заключенных в конечной области пространства, характеризуется собственными свойствами и особенностями границы. Граница системы может быть материальной и виртуальной, неподвижной или движущейся, проницаемой или непроницаемой для вещества и энергии.

Макроскопическое состояние – состояние газа, характеризуемое макроскопическими параметрами, т.е. давлением, температурой и объемом. Стационарное макроскопическое состояние газа, находящегося в изолированном от внешней среды объеме V , называется равновесным: p , V , T – не зависят от времени (постоянны) и постоянны во всех частях объема.

Микроскопические состояния системы – состояние газа, характеризуемое положениями и скоростями всех его частиц, т.е. $6N$ числами: $3N$ координатами (x_i, y_i, z_i) всех N -частиц и $3N$ проекциями их скоростей (v_x, v_y, v_z) . При применении статистического метода эти числа случайные.

Фазовое пространство. Фазовая точка. Фазовая ячейка. Микроскопическое состояние изображают в виде *фазовой точки* в $6N$ -мерном пространстве ($3N$ координат и $3N$ проекций импульсов частиц).

Пусть известны размеры атомов и молекул: $d \approx 10^{-10}$ м, тогда объем частицы $V \sim d^3$ по порядку величины составит около 10^{-30} м³. Здесь понятие объема частицы означает, что ни его, ни его части никакая другая частица занимать не может. В таком случае объем газа может быть разбит на ячейки объемом d^3 , которые могут быть заняты отдельными частицами, и в каждой ячейке частица пребывает время d/v . Тогда микросостояние по пространству характеризуется тем, что все частицы распределены определенным образом по ячейкам, на которые разбит объем газа. Их количество в 1 м³: $N \approx 1/d^3 = 10^{30}$, но частиц при н.у. в 1 м³: $N_L = 2,7 \cdot 10^{25}$ и на одну частицу приходится $\sim 4 \cdot 10^4$ ячеек. Основная же их часть – «пустая».

Объем ячеек, который может занимать одна частица, определяется не в пространстве координат, а в пространстве координат-импульсов – *фазовом пространстве*. Объем *фазовой ячейки* одной частицы определяется в виде: $(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)_0 (\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z) = h^3$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

Постулат равновероятности. Если от начального момента прошло достаточно много времени и все системы ансамбля «забыли» свои начальные состояния, то ячейка, в которой очутилась конкретная частица в данной системе, является случайной. Отсутствие алгоритма памяти приводит к отсутствию алгоритма выбора – все ячейки становятся равноценными. Для рассматриваемой частицы нет предпочтительных оснований находиться в какой-то конкретной ячейке по сравнению с другой. Все местоположения частицы равновозможны. А значит и все распределения частиц по ячейкам (микросостояния системы) также равновероятны.

Вероятности разных макросостояний резко отличаются друг от друга. Система «не знает» какое макросостояние является наиболее вероятным. Она переходит из одного микросостояния в другое, не отдавая предпочтения. Подавляющее число переходов осуществляется в направлении равновесного состояния потому, что число таких возможностей подавляюще велико в сравнении с другими возможностями. В результате хаотичные переходы из одного микросостояния в другое создают упорядоченное закономерное движение системы в направлении равновесного состояния. Поэтому равновесное состояние изолированной системы, предоставленной самой себе, является состоянием максимальной свободы выбора и

наиболее вероятным состоянием. Однако, придя в него, система пребывает в постоянном изменении, совершая переходы из одного микросостояния в другое. В равновесном состоянии система на любом уровне имеет максимальный набор нереализованных возможностей – степеней свободы. Она их все время «пробует», проверяя действителен ли каждый переход на данный момент и в данном месте. При этом изменяются и макроскопические параметры, характеризующие систему, т.к. равновесное состояние характеризуется их средними значениями, а в каждый момент времени и в каждой точке области пространства системы они могут изменяться. Изменения происходят около среднего, поэтому их называют колебаниями. Когда колебания этих величин около средних малы, то их классифицируют термином – *флуктуации*, подразумевая случайные отклонения. Относительная роль флуктуаций возрастает с уменьшением области, в которой эти флуктуации рассматриваются, и убывает с ростом числа частиц в системе. Мерой флуктуаций является дисперсия $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$.

Закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Число степеней свободы – число независимых переменных, которыми определяется состояние системы. Для характеристики энергетического состояния материальной точки в некоторый момент времени необходимо задать три компоненты скорости для определения кинетической энергии и три координаты для определения потенциальной энергии. В идеальном газе полевым взаимодействием частиц в системе пренебрегают, поэтому степени свободы, как носители потенциальной энергии, отвечают за взаимодействие системы частиц с внешними потенциальными полями.

В условиях статистического равновесия на каждую степень свободы системы приходится одинаковая средняя энергия. Средняя кинетическая энергия характеризуется физической величиной, называемой температурой. Их связь определяется в виде:

$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kT$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К –

постоянная Больцмана. Поэтому говорят о постоянстве температуры или изменении температуры, а не о средней энергии. Температура T является термодинамической температурой, связанной с температурой Цельсия: $T = t + 273,15$. В идеальном газе средняя кинетическая энергия молекул:

$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3kT}{2}$, а т.к. $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ и, используя постулат равновероятно-

сти при $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, выполняется $\left\langle \frac{mv_x^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{mv_y^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{mv_z^2}{2} \right\rangle = \frac{kT}{2}$ для

любой молекулы. Если потенциальная энергия взаимодействия атомов является квадратичной функцией расстояния (при малых колебаниях), то на нее также приходится $1/2 kT$.

В конкретный момент времени значение энергии, связанной с данной степенью свободы, может сильно отличаться от энергий, связанных с другими степенями. Только средние энергии за достаточно большие промежутки времени, связанные с разными степенями свободы, равны между собой. Это справедливо и для смеси газов.

Пример: Шесть степеней свободы 2- атомной молекулы состоят из 3 степеней свободы центра масс: $3/2 kT$, а оставшиеся $3/2 kT$ приходится на 2 вращательные степени свободы и одну колебательную.

Распределение Максвелла. Распределение молекул в пространстве скоростей (1860 г.) установлено Джеймсом Клерком Максвеллом (1831–1879).

В смеси газов, заключенных в изолированном объеме, разные сорта молекул имеют одинаковые средние кинетические энергии. Поэтому макроскопическим параметром, характеризующим распределение молекул по скоростям, является средняя кинетическая энергия.

Выравнивание происходит по энергиям к состоянию системы, называемым термодинамическим равновесием. Термодинамическое равновесие устанавливается в результате громадного числа столкновений между молекулами. Изменение скорости молекулы рассмотрим как ее изменение в пространстве скоростей (рис. 20). Пусть $\Delta v_{xi}; \Delta v_{yi}; \Delta v_{zi}$ – изменения проекций скорости молекулы при ее i -м столкновении. После большого числа столкновений проекции ее скорости:

$$v_x = \sum_i \Delta v_{xi}, \quad v_y = \sum_i \Delta v_{yi}, \quad v_z = \sum_i \Delta v_{zi}.$$

Каждая из проекций является суммой большого числа случайных величин, то и скорость молекулы газа можно рассматривать как случайную величину.

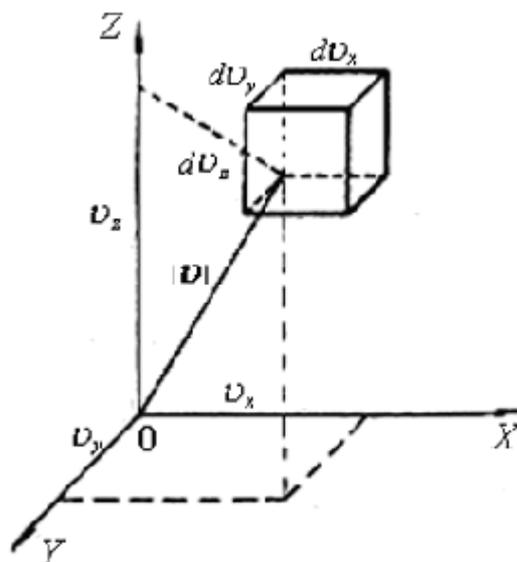


Рис. 20. Элемент объема в пространстве скоростей

Для молекулы не существует какого-то избранного направления движения, и любое направление движения равновероятно. Поэтому вследствие принятой изотропности движения можно искать либо распределение скоростей молекул вдоль некоторого направления, либо распределение молекул по абсолютной величине скорости. Выбираем второй путь.

При равновесном состоянии максимального выбора нет запрещенных значений скорости. Значит должна существовать непрерывная функция распределения скоростей $f(v^2)$. Для стационарного состояния термодинамического равновесия газа эта функция распределения не зависит от времени. Для получения ее вида перейдем к пространству случайной величины скорости одной молекулы. На трех независимых осях OX , OY , OZ отложим проекции скорости молекулы v_x, v_y, v_z (см. рис. 20). Вероятность того, что молекула имеет проекцию скорости на ось OX в интервале от v_x до $v_x + dv_x$, определяется $dP(v_x) = \varphi(v_x^2) dv_x$. Функция распределения должна зависеть от v_x^2 , так как от изменения направления оси OX на обратное, вероятность определенной проекции скорости не изменится. Поэтому функция распределения $\varphi(v_x^2)$ зависит только от величины проекции скорости.

Аналогично вводятся в рассмотрение функции $\varphi(v_y^2)$ и $\varphi(v_z^2)$. Все три функции из-за эквивалентности всех направлений формально идентичны.

Гипотеза Максвелла. Вероятность того, что у молекулы будет одновременно три проекции скорости v_x, v_y, v_z в соответствующих интервалах dv_x, dv_y, dv_z , определяется произведением трех вероятностей, если проекции скоростей молекулы рассматривать как независимые случайные величины:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \varphi(v_x^2) \cdot \varphi(v_y^2) \cdot \varphi(v_z^2) dv_x dv_y dv_z. \quad (17)$$

Это равенство определяет вероятность того, что скорость молекулы (точка, совпадающая с концом вектора скорости) находится в элементарном объеме пространства скоростей $dv_x dv_y dv_z$ (см. рис.20).

С другой стороны, наличие у молекулы трех проекций скорости v_x, v_y, v_z определяет направление движения и модуль скорости, которые

также являются случайными величинами. Направление движения является произвольным, а значит и распределение скоростей вдоль этого направления $f(v^2)$ должно иметь такой же вид, как и вдоль любой из осей с точностью до нормировочной постоянной.

Теперь вероятность обнаружения скорости молекулы в элементарном объеме пространства скоростей $dv = dv_x dv_y dv_z$ с помощью функции $f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ означает определение вероятности определенного значения скорости молекулы:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dv_x dv_y dv_z \quad (18)$$

или, сравнивая (17) и (18), получаем

$$\varphi(v_x^2) \varphi(v_y^2) \varphi(v_z^2) = f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (19)$$

Используя свойства непрерывности и положительности функций, составляющих уравнение (19), и далее определяем вид функции распределения скоростей $f(v^2)$. Для этого последовательно прологарифмируем обе части уравнения (19) $\ln \varphi(v_x^2) + \ln \varphi(v_y^2) + \ln \varphi(v_z^2) = \ln [f(v^2)]$, а затем продифференцируем полученное равенство:

$$\frac{\varphi'(v_x^2)}{\varphi(v_x^2)} d(v_x^2) + \frac{\varphi'(v_y^2)}{\varphi(v_y^2)} d(v_y^2) + \frac{\varphi'(v_z^2)}{\varphi(v_z^2)} d(v_z^2) = \frac{f'(v^2)}{f(v^2)} d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Раскрыв скобки в правой части, получаем

$$\left[\frac{\varphi'(v_x^2)}{\varphi(v_x^2)} - \frac{f'(v^2)}{f(v^2)} \right] dv_x^2 + \left[\frac{\varphi'(v_y^2)}{\varphi(v_y^2)} - \frac{f'(v^2)}{f(v^2)} \right] dv_y^2 + \left[\frac{\varphi'(v_z^2)}{\varphi(v_z^2)} - \frac{f'(v^2)}{f(v^2)} \right] dv_z^2 = 0.$$

Отсюда, ввиду независимости дифференциалов, следует равенство нулю выражений в квадратных скобках и далее: $\frac{\varphi'(v_x^2)}{\varphi(v_x^2)} = \frac{\varphi'(v_y^2)}{\varphi(v_y^2)} = \frac{\varphi'(v_z^2)}{\varphi(v_z^2)}$.

А это, в свою очередь, возможно из-за независимости v_x, v_y, v_z только в том случае, когда эти выражения равны одной и той же постоянной, т.е.

$$\frac{\varphi'(v_x^2)}{\varphi(v_x^2)} = \frac{\varphi'(v_y^2)}{\varphi(v_y^2)} = \frac{\varphi'(v_z^2)}{\varphi(v_z^2)} = \pm \alpha.$$

На примере одной из проекций приведем последовательно операции интегрирования и потенцирования:

$$\frac{d[\varphi(v_x^2)]}{\varphi(v_x^2)} = -\alpha dv_x^2; \ln \varphi(v_x^2) = -\alpha v_x^2 + c_1; \varphi(v_x^2) = e^{-\alpha v_x^2 + c_1}; \varphi(v_x^2) = e^{c_1} e^{-\alpha v_x^2},$$

где множители $e^{c_1} \equiv A$ и α для всех трех проекций одинаковы, т.к. оси координат эквивалентны, а случайные величины v_x, v_y, v_z независимы.

Функция со знаком плюс в экспоненте не подходит в качестве решения, поскольку он определяет случай безграничного увеличения плотности вероятности при удалении от центра «мишени», что невозможно. С другой стороны условие нормировки выполняется (интеграл сходится) только при отрицательном показателе. Поэтому, принимая неопределенный параметр $\alpha > 0$, подставляем его в степень со знаком «минус».

$$\text{Окончательно: } \varphi(v_x^2) = A e^{-\alpha v_x^2}; \varphi(v_y^2) = A e^{-\alpha v_y^2}; \varphi(v_z^2) = A e^{-\alpha v_z^2}$$

называется *распределением Гаусса*.

Вероятность того, что проекция скорости на ось OX заключена в интервале $[v_x, v_x + dv_x]$: $dP(v_x) = \varphi(v_x^2) dv_x = A e^{-\alpha v_x^2} dv_x$. Аналогия справедлива и для других проекций скорости. Тогда

$$dP(v_x) dP(v_y) dP(v_z) = dP(v_x, v_y, v_z) = A^3 e^{-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z. \quad (20)$$

Совместная вероятность флуктуации проекций скоростей получена перемножением вероятностей флуктуаций проекций скоростей по каждой из оси (флуктуации проекций скоростей – величины независимые).

Постоянная A находится из условия нормировки с учетом того, что запрещенных значений абсолютных скоростей нет, а значит для любой ячейки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dP(v_x; v_y; v_z) = 1.$$

$$\text{Значение интеграла Пуассона известно: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Проводя замену переменной $x = \sqrt{\alpha} v_x$, просто определить значение интеграла данного вида:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (21)$$

Тогда из условия нормировки $A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$, определяем $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$.

Вычислим среднее значение кинетической энергии:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle &= \left(\frac{m}{2} \right) \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \left(\frac{m}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dP(v_x, v_y, v_z) = \\ &= \left(\frac{m}{2} \right) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \exp \left[-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] dv_x dv_y dv_z \end{aligned}$$

Распишем правую часть равенства как сумму тройных интегралов и получим:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle &= \left(\frac{m}{2} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_z^2} dv_z + \right. \\ &+ \left. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} v_y^2 e^{-\alpha v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_z^2} dv_z + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} v_z^2 e^{-\alpha v_z^2} dv_z \right] \end{aligned}$$

В квадратной скобке имеется девять интегралов, шесть из которых вида (21), а значит, имеют известное значение $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Оставшиеся три формально идентичны и определяются методом дифференцирования.

$$\text{Например: } \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = -\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = -\frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2} \alpha^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}.$$

Подставляем известные значения интегралов и с учетом множителя перед квадратной скобкой получаем выражение: $\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3m}{4\alpha}$.

Но так как в равновесном состоянии $\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kT$, то определяется вторая постоянная: $\alpha = \frac{m}{2kT}$.

Перейдем от декартовой к сферической системе координат скоростей, определяемой радиусом v и телесным углом Ω (прил.2).

Так как $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, то объем тонкого сферического слоя толщиной dv и радиуса v составит $dv_x dv_y dv_z = v^2 d\Omega dv$. (прил. 2). Проинтегрируем первые два сомножителя в правой части по всему телесному углу: $\int_{\Omega=4\pi} v^2 d\Omega = v^2 \int_{\Omega=4\pi} d\Omega = 4\pi v^2$.

Тогда формула (17), с учетом $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ и $\alpha = \frac{m}{2kT}$ в сферических координатах переписывается в виде:

$$dP(v) = 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT} \right] v^2 dv, \quad (22)$$

как вероятность того, что частица массой m находится в тонком сферическом слое толщиной dv пространства скоростей.

Перепишем уравнение (22) в виде:

$$f(v) = \frac{dP(v)}{dv} = 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT} \right] v^2. \quad (23)$$

Функция в форме (23) называется *распределением Максвелла*, и является плотностью вероятности обладания молекулой модулем скорости v .

Формулы (22) и (23) позволяют найти относительное число молекул, скорости которых заключены в заданном интервале. Так как молекулы движутся независимо и случайно, то число $dN(v)$ частиц имеют вероятность $dP(v)$ быть обнаруженными в интервале $[v, v + dv]$ и $dN(v) = NdP(v)$. Здесь N - полное число молекул в системе. Относительное число молекул в указанном интервале $\frac{dN(v)}{N} = dP(v) = f(v)dv$, или

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv} = 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT} \right] v^2. \quad (24)$$

Стационарное равновесное состояние характеризуется постоянством числа молекул в заданном интервале их скоростей.

Характерные скорости распределения Максвелла. Вид функций распределения Максвелла (формулы (23) и (24)) показан на рис. 21. По

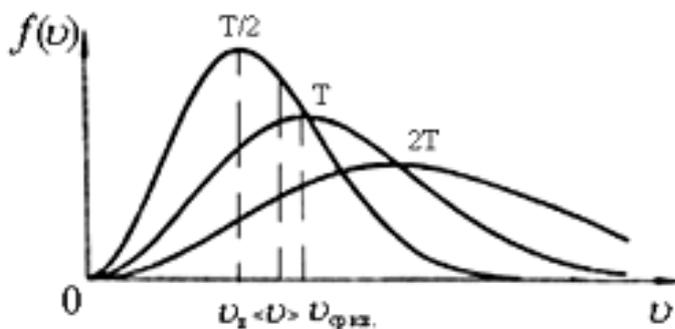


Рис. 21. Качественный вид функций Максвелла для разных температур: $T_1 = T/2$; $T_2 = T$; $T_3 = 2T$

графику распределения видно, что с увеличением температуры максимум распределения смещается в сторону больших скоростей, а высота кривой в максимуме снижается. Однако условие нормировки обязует равенство площадей, ограниченных каждой

кривой и осью скоростей независимо от значения температуры. Вследствие этого с увеличением температуры число молекул с большими скоростями увеличивается, а число медленных молекул обязано уменьшаться соответственно условию нормировки.

Среднее значение функций $f(v)$, зависящих от модуля скорости, вычисляется по формуле для среднего: $\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv$, $\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$. Соответственно получаем среднеарифметическую и среднеквадратичную скорости $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ и $v_{ср.кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ (прил. 3). Скорость v_{ϵ} , соответствующая максимуму кривой распределения, называется *наивероятнейшей*. Она находится из условия экстремума (максимума) функции Максвелла: $\frac{df(v)}{dv} = 0$. В результате (см. прил. 3) получаем определяющее равенство $v_{\epsilon} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

Наибольшая часть всех молекул имеет скорости в сравнительно небольшом интервале около наивероятнейшей. С повышением температуры скорости молекул растут как \sqrt{T} .

Частота ударов молекул о стенку. Направим ось X перпендикулярно стенке (рис. 22). Поток частиц J_X в направлении единичной площадки ΔS стенки за единицу времени Δt равен $J_{X^+} = \frac{N_{X^+}}{\Delta S_n \Delta t}$. Индекс (+) касается только молекул, движущихся к стенке, т.е. половины общего их числа. Количество молекул N_{X^+} , пришедших на

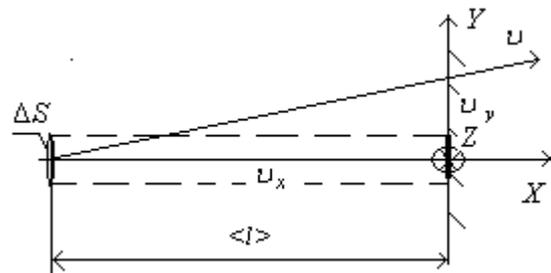


Рис. 22. К вычислению числа ударов молекул о стенку

единичную площадку за единицу времени, равно частоте ν их ударов о стенку. Эти молекулы приходят на стенку из малого объема с границами, выделенными на рис. 22 штриховой линией. Тогда

$$J_{X^+} = \frac{N_{X^+}}{\Delta S_n \Delta t} \cdot \frac{\langle l \rangle}{\langle l \rangle} = \frac{N_{X^+}}{\Delta V} \cdot \langle v_x^+ \rangle. \text{ Обозначим } n_0 \text{ концентрацию молекул.}$$

Частота ударов молекул на единичной площадке ΔS будет определяться в виде:

$$\begin{aligned} v &= n_0 \langle v_x^+ \rangle = n_0 \int v_x^+ f(v_x^+, v_y, v_z) dv = \\ &= n_0 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_y^2} dv_y \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_z^2} dv_z \cdot \int_0^{\infty} v_x^+ e^{-\alpha (v_x^+)^2} dv_x^+ = n_0 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \cdot \frac{1}{2\alpha}. \end{aligned}$$

При решении третьего интеграла в равенстве проведена замена переменной. Так как $\alpha = 1/v_g^2$, то новую переменную представим $a = (v_x^+)^2 / v_g^2$.

$$\text{Тогда } \int_0^{\infty} v_x^+ e^{-\alpha (v_x^+)^2} dv_x^+ = \int_0^{\infty} v_g a^{1/2} e^{-a} \cdot (1/2) v_g a^{-1/2} da = \frac{v_g^2}{2} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Перепишем полученный результат и подставим форму $\alpha = m / 2kT$:

$$v = n_0 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{\pi}{\alpha} \right) \cdot \frac{1}{2\alpha} = n_0 \left(\frac{1}{\alpha\pi} \right)^{1/2} = n_0 \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2} = \frac{1}{4} n_0 \langle v \rangle.$$

$$\text{Здесь учтено, что } \langle v \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2}.$$

Давление газа на стенку. Давление возникает в результате ударов молекул о стенки сосуда. При упругом ударе молекулы о стенку нормальная (к стенке) составляющая количества движения $m v_x^{(+)}$ изменится на обратную ($-m v_x^{(+)}$), а параллельные стенке составляющие $m v_y$ и $m v_z$ останутся без изменения (см. рис. 22). Тангенциальные составляющие импульсов компенсируются, а нормальные должны обуславливать возникновение давления. Поэтому изменение количества движения молекулы при ударе о стенку равно $2m v_x^{(+)}$ и называется импульсом силы, действующим нормально на молекулу со стороны стенки. При этом на стенку действует импульс такой же величины. Происходит передача импульса. Причем, если ось Ox перпендикулярна касательной к стенке в точке удара, то предельный импульс равен $2 m v_x^{(+)}$.

Из определений давления и теоремы импульсов следует, что давление определено суммарным импульсом, передаваемым стенке площадью 1 м^2 молекулами в результате их столкновений со стенкой за 1 с. Поэтому давление определяет удвоенный поток импульса молекул, нормальный к поверхности стенки (см. рис. 22).

Поток молекул в направлении стенки:

$$J_{N_x^+} = \int_0^{\infty} n_0 f(v_x^{(+)}, v_y, v_z) v_x^{(+)} dv_x^{(+)} dv_y dv_z .$$

Поток импульса по направлению к стенке:

$$J_{p_x^+} = \int_0^{\infty} m v_x^{(+)} n_0 f(v_x^{(+)}, v_y, v_z) v_x^{(+)} dv_x^{(+)} dv_y dv_z .$$

Тогда давление газа на стенку $p_x = 2J_{p_x^+}$

$$p_x = 2n_0 m \int_0^{\infty} f(v_x^{(+)}, v_y, v_z) (v_x^{(+)})^2 dv_x^{(+)} dv_y dv_z = \frac{2n_0 m}{4\alpha} = n_0 kT .$$

Для p_y и p_z рассуждения аналогичны, поэтому: $p_x = p_y = p_z = n_0 kT$.

Так как давление газа изотропно, то давление в данной точке в разных направлениях одинаково и его можно обозначить p без указания направления.

Так как $v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, то $p = \frac{2}{3} n_0 \langle \frac{mv^2}{2} \rangle$. Это уравнение – *основное уравнение кинетической теории идеальных газов*.

Пусть N – общее число молекул газа в объеме V . Тогда $n_0 = \frac{N}{V}$ и $PV = NkT$. Так как $N = \nu N_A$, где ν – количество молей, то получаем *уравнение состояния Клапейрона-Менделеева*: $pV = \nu RT$, где молярная газовая постоянная $R = kN_A = 8,314$ Дж/моль·К.

Распределение Больцмана. Пусть дан объем газа в условии термодинамического равновесия во внешнем потенциальном поле. Поле, войдя в систему, перераспределит частицы внутри системы. Распределение частиц сдвинется по градиенту поля. На каждую молекулу в потенциальном поле действует сила $\vec{F} = -\nabla U$, где U – потенциальная энергия молекулы. Этот «сдвиг» не может продолжаться бесконечно, тормозясь силами давления. Поэтому система стремится к равновесию.

Рассмотрим баланс сил вдоль оси Ox . На молекулы действует потенциальная сила $dF_{1x} = -n_0 dydz dx \frac{dU}{dx}$, где n_0 – концентрация, $dydz dx$ – элементарный объем. Сила разности давлений $dF_{2x} = -\left(\frac{dp}{dx}\right) dx dy dz$ в выбран-

ном направлении обусловлена $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx$. В момент установления стационарного состояния эти силы уравновесятся: $dF_{1x} + dF_{2x} = 0$ или $\left(\frac{dp}{dx}\right)dx = -n_0\left(\frac{dU}{dx}\right)dx$.

Относительно других координат эти равенства также справедливы. Поэтому можно сложить левые и правые части этих равенств:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(\frac{dp}{dz}\right)dz = -n_0\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)dx + \left(\frac{dU}{dy}\right)dy + \left(\frac{dU}{dz}\right)dz\right] = -n_0dU$$

Так как $p = n_0kT$, а $T = \text{const}$, то определяем $dp = kTdn_0$ и, следовательно, $\frac{dn_0}{n_0} = -\frac{dU}{kT}$. Интегрируем это уравнение между точками (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) по произвольному пути и получаем распределение Больцмана:

$$n_0(x, y, z) = n_0(x_0, y_0, z_0) \exp\left\{-\frac{U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)}{kT}\right\}.$$

Если отсчет потенциальной энергии делать от $U(x_0, y_0, z_0) = 0$ (т.е. нормировать U в точке (x_0, y_0, z_0) на ноль), то $n_0 = n_{00}e^{-\frac{U}{kT}}$, где $n_0 = n_0(x, y, z)$, $n_{00} = n_0(x_0, y_0, z_0)$.

При наложении внешнего потенциального поля на физическую систему из частиц при термодинамическом ее равновесии, температура в разных точках системы остается неизменной, а изменяется распределение концентрации молекул.

Барометрическая формула. Для изотермической атмосферы распределение давления с высотой дается для каждой компоненты (сорта молекул) газа (воздуха) так: $p_i(h) = n_{0i}(h)kT$.

Используя формулу распределения Больцмана для системы частиц в вертикальном поле тяготения, получаем *барометрическую* формулу

$$p_i(h) = p_i(0) \exp\left[-\frac{m_i gh}{kT}\right].$$

Воздух состоит в основном из молекул O_2 и N_2 , тогда:

$$p(h) = p_1(h) + p_2(h) = p_1(0) \exp\left[-\frac{m_1 gh}{kT}\right] + p_2(0) \exp\left[-\frac{m_2 gh}{kT}\right].$$

Из формулы ясно, что, вообще говоря, для смеси газов соотношение компонент газа и парциальных давлений меняются с высотой. Однако,

для воздуха $m_{O_2} \cong m_{N_2} = m$ и $p(h) = p_0 \exp\left[-\frac{mgh}{kT}\right]$, где m – масса псевдо-молекул воздуха.

Можно записать барометрическую формулу иначе. Так как $\frac{m}{kT} = \frac{\rho_0}{p_0}$, где ρ_0, p_0 – плотность и давление воздуха при $h = 0$, то $p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 gh}{p_0}\right)$.

Распределение Максвелла – Больцмана. Подсчет микросостояний зависит от того, обладают ли частицы какими-то признаками, которые позволяют различать их. Если частицы считаются различными, то микросостояние считается другим, если какие-либо две частицы поменялись местами. В случае неразличимости частиц микросостояние одно и то же. Подсчет числа микросостояний в предложении различимости частиц приводит к распределению Максвелла – Больцмана, которое является основным распределением классической статистической физики:

$$dN(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = Ae^{-\left[\frac{mv^2}{2} + U\right] \frac{1}{kT}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

Распределения Максвелла и Больцмана являются составными частями распределения Гиббса (Гиббс Джозайя Уиллард, 1839 – 1903).

Модели, в которых частицы рассматриваются как неразличимые, называются распределениями Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака.

Термодинамический метод

Определения термодинамики равновесных состояний. Термодинамика – наука, изучающая наиболее общие законы взаимопревращения видов энергии в системе, имеет в своем основании три начала (закона). Первое – является применением закона сохранения энергии; второе – характеризует направление развития процессов и эффективность преобразования энергии в работу; третье – накладывает ограничения на процессы, утверждая невозможность процессов, приводящих к достижению термодинамического нуля температуры.

Законы термодинамики имеют универсальный характер и выполняются независимо от того, где происходит процесс – в живой или неживой материи. В качестве модели вещества, на котором будет иллюстрироваться содержание и применение термодинамического метода, берется модель идеального газа

Термодинамическая система – часть пространства с материальным содержанием, ограниченная оболочкой и изучаемая термодинамическими методами. Область вне оболочки определена как окружающая, внешняя среда. В зависимости от того, как термодинамическая система связана с окружающей средой, выделяют четыре типа систем: изолированные, замкнутые, открытые и полукоткрытые. Тип исследуемой системы определяется характерными свойствами границы системы, или оболочки.

Изолированной термодинамической системе запрещено обмениваться с внешней средой веществом и энергией. *Замкнутой* (закрытой) системе разрешен обмен энергией с внешней средой, но запрещен обмен веществом.

Открытая термодинамическая система обменивается с внешней средой и энергией, и веществом. *Полукоткрытая* система обменивается с внешней средой и веществом, и энергией избирательно (оболочка системы обладает свойствами селективного отбора).

Состояния термодинамической системы описываются с помощью *макропараметров* – макроскопических величин, описывающих всю систему в целом. Охарактеризованное таким способом состояние называется *макросостоянием*. Макропараметры условно (в зависимости от содержания задачи) подразделяют на внешние и внутренние: внешние – фиксируют внешние условия для системы; внутренние – устанавливаются в системе в результате фиксации внешних условий.

Внутренние макропараметры разделяют на *экстенсивные* (масса m , объем V), определяемые общим количеством вещества в системе, и *интенсивные* (давление p , температура T , молярная концентрация n), не зависящие от массы системы.

Термодинамический процесс – переход системы из одного равновесного состояния в другое: от одних значений макропараметров p_1, V_1, T_1 к другим p_2, V_2, T_2 .

Если переходить в состояние с другим объемом и делать это не очень медленно, то постоянство давления и температуры по объему нарушится. Некоторое время невозможно будет говорить о каких-либо определенных значениях давления и температуры, так как они во всех точках объема будут различными и нестационарными. Более того, распределение давления и температуры по объему определяется не только начальным и конечным объемами, но и способом, которым этот переход осуществляется. Состояние системы не может быть охарактеризовано какими-либо

определенными значениями p и T , и процесс не может быть изображен в виде линии, как в случае равновесных обратимых процессов. Промежуточные состояния системы при таком процессе являются *неравновесными*. И сам процесс называется *неравновесным*.

Можно осуществить переход другим способом – бесконечно медленно: после каждого бесконечно малого изменения параметров, следующее изменение не производить до тех пор, пока система не придет в равновесное состояние, т.е. когда все макроскопические параметры примут во всей системе постоянные значения, делается следующий шаг. В этом случае весь процесс состоит из последовательности равновесных состояний, а процесс называется *равновесным*. Иными словами, равновесное состояние осуществляется посредством флуктуаций через неравновесные состояния. Поэтому, если «почти равновесные состояния» при переходе отличаются от равновесных меньше, чем флуктуационные, их следует рассматривать как равновесные состояния.

Если возможен обратный переход из конечного состояния в начальное через те же промежуточные состояния, что и в прямом, но в обратной последовательности, то процесс называется *обратимым*. Если нет такой возможности, то процесс – *необратимый*. Ясно, что неравновесный процесс всегда необратим. Равновесный процесс является всегда обратимым.

Примечание. Не следует думать, что понятие обратимого процесса равнозначно понятию бесконечно медленного процесса, например, пластическая деформация – это бесконечно медленный необратимый процесс.

Первое начало термодинамики. Основная задача термодинамики состоит в том, чтобы найти такие величины, которые бы однозначно определяли изменение состояния термодинамической системы при переходе. Такой параметр был определен и назван *внутренней энергией* U системы. Внутренняя энергия является функцией состояния системы и определяется другими термодинамическими параметрами: m , p , T , V . Ее изменение не зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое. Внутренняя энергия – это кинетическая и потенциальная энергии всех атомов и молекул в системе (суммарная энергия, аккумулированная системой, за вычетом кинетической энергии движения центра масс системы и потенциальной энергии системы во внешних полях), включая и энергию частиц, составляющих сложные частицы. Ее бесконечно малое изменение обозначается dU и принимается положительным, если U возрастает.

Для циклических процессов в изолированных системах $\oint dU = 0$.

Макроскопическая работа. Пусть дана простая термодинамическая система с двумя степенями свободы, т.е. ее внутреннее состояние определяется двумя параметрами, например p и V . Например, пусть дан газ, заключенный в цилиндрический объем с поршнем. Сила, создаваемая давлением p газа на поршень площади S , равна pS , а работа по перемещению поршня на расстояние dx : $\delta A = pSdx$, или $\delta A = pdV$. Принято считать, что если работа совершается над системой, то знак δA должен быть отрицательным.

Чтобы от элементарной работы δA перейти к работе для конечного процесса, надо вычислить интеграл $A = \int pdV$. Такое вычисление возможно тогда, когда давление является определенной функцией объема V . Между тем, согласно уравнению состояния, p зависит не только от V , но и от T . Меняя в ходе процесса различным образом температуру системы, можно квазистатически перевести систему из начального состояния в конечное бесчисленным множеством способов. Каждому из этих способов соответствует своя функция $p = p(V)$ и свое значение интеграла в формуле. Таким образом, работа A не определяется заданием начального и конечного состояний системы. Ее величина зависит также от способа или «пути» перехода системы из начального состояния в конечное. Про величины такого рода говорят, что они *не являются функциями состояния*. Напротив, величины, имеющие вполне определенные значения в каждом состоянии системы, называются *функциями состояния*. Такова, например, температура системы в состоянии термодинамического равновесия.

Неравновесные состояния и неравновесные процессы невозможно представить графически точками и кривыми на плоскости, так как для задания неравновесного состояния двух параметров недостаточно. Неравновесные состояния характеризуются, вообще говоря, бесконечным множеством параметров. В этом случае полная работа представляется как аддитивная величина, определяемая суммой элементарных работ изменений каждого макропараметра.

Становится ясно, что нельзя говорить о совершении работы, если системе сообщить или отобрать у нее энергию без посредства изменения ее макроскопических параметров, или если макроскопические параметры системы меняются вследствие передачи ей теплоты.

Иными словами, характерной особенностью термодинамических процессов является то, что системе сообщается или забирается энергия только путем изменения некоторых макроскопических параметров.

Количество теплоты. Если система помещена в адиабатическую оболочку, то единственным способом изменить ее внутреннюю энергию является производство над ней макроскопической работы, что достигается путем изменения внешних параметров. (К числу внешних параметров относятся и силовые поля, в которые помещена система.) Однако если адиабатической изоляции нет, то изменение внутренней энергии возможно и без производства макроскопической работы. Так, при соприкосновении горячего и холодного тел внутренняя энергия переходит от горячего тела к холодному, хотя при этом макроскопическая работа и не совершается.

Процесс обмена внутренними энергиями соприкасающихся тел, не сопровождающийся производством макроскопической работы, называется теплообменом. Энергия, переданная телу окружающей средой в результате теплообмена, называется количеством теплоты, или просто теплотой, полученной телом в таком процессе.

В этом смысле под теплотой понимают не особую форму энергии, как в случае с потенциальной, кинетической, электрической или магнитной, но только лишь как особый вид перехода энергии из одного количества вещества в другое. Этот переход обусловлен только разностью температур и исключением любых иных вспомогательных средств.

В особом случае теплота обозначает кинетическую часть внутренней энергии и может служить энергетической мерой интенсивности хаотического движения частиц. В этом случае количество теплоты называют «тепловой энергией». Бесконечно малая энергия δQ положительна, если теплота сообщается системе, и отрицательна, – если забирается от нее.

В замкнутой системе изменение внутренней энергии можно определить, измеряя поглощенную (или выделившуюся) теплоту и выполненную работу. Экспериментально установлено, что

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - A, \quad (25)$$

и какими бы путями переход из состояния 1 в состояние 2 не осуществлялся и как бы не варьировали по величине Q и A , величина этой разности неизменна: $\Delta U = \text{const}$.

Разность ΔU зависит только от начального и конечного состояния системы, а работа A зависит еще и от пути перехода. Получается, что ко-

личество теплоты также зависит от пути перехода, т.е. от способа, каким система была приведена в конечное состояние. Это означает, что Q не является функцией состояния.

Полный запас энергии изолированной термодинамической системы есть величина постоянная: $U = \text{const}$; $\Delta U = 0$. При этом возможны превращения одного вида энергии в другой в эквивалентных соотношениях.

В дифференциальной форме первый закон термодинамики запишется в виде

$$dU = \delta Q - \delta A, \text{ или } \delta Q = dU + \delta A. \quad (26)$$

Первое начало термодинамики является выражением закона сохранения энергии для процессов с участием теплоты. Работа связана с передачей энергии посредством изменения макроскопических параметров, а передача теплоты осуществляется переходом энергии молекулярного движения. Возникающие при этом изменения макроскопических параметров являются следствием изменений энергетических условий на молекулярном уровне.

Первое начало термодинамики не предсказывает направление течения процесса, но позволяет указывать, как изменяются величины, если этот процесс происходит. Если какой-либо процесс происходит, он должен удовлетворять первому началу.

Примечание. Обозначения δ и d указывают, что все три слагаемых являются бесконечно малыми приращениями, но dU – является полным дифференциалом, а δQ и δA – нет и не могут им быть. Так как dU – полный дифференциал, то U – функция состояния. А так как p, V, T – функции состояния, то и они являются полными дифференциалами.

О равновесных и неравновесных состояниях. В механике равновесие представляет собой любое состояние, в котором как скорости, так и ускорения всех материальных точек равны нулю. Результирующая сила, действующая на каждую точку в любой момент времени, равна нулю. При термодинамическом равновесии входящие в систему молекулы подвержены действию несбалансированных сил и движутся во всевозможных направлениях, но различные части системы между собой термодинамически неразличимы, поэтому понятие равновесия применимо только к коллективным характеристикам системы в целом (температура, давление или концентрация).

Система находится в термодинамическом равновесии, если ответственные за обмены характеристики имеют одинаковые значения и в системе, и во внешней среде. Равновесие является автоматически стационарным состоянием. Условие равновесия формулируется в виде равенства нулю алгебраической суммы потоков в систему и из системы.

Неравновесные состояния связаны с неисчезающими потоками между системой и внешней средой. Различия некоторых переменных могут мгновенно возникнуть, благодаря начальному условию и релаксировать в направлении равновесия между системой и внешней средой, или могут быть постоянными, если создать и поддерживать соответствующие условия – *ограничения*. В обоих случаях детальное равновесие отсутствует, а значит появляется *конкуренция* между состояниями отдельных частей системы, и в результате режим неравновесного состояния приобретает способность к изменениям: небольшие локальные изменения не обязательно компенсируются возникающим противодействием, а наоборот, – могут быть усвоены или даже усилены системой, становясь тем самым источником новообразований и разнообразия.

Теплоемкость. При сообщении системе теплоты δQ ее температура изменяется на dT . Величина $C = \delta Q/dT$ называется теплоемкостью и является количественной оценкой способности системы аккумулировать тепловую энергию при заданном характере процесса. Теплоемкость измеряется количеством теплоты, затрачиваемым для повышения температуры тела на 1 градус.

Теплоемкость зависит от массы тела и, чтобы убрать ее зависимость от количества вещества, обычно используют понятие *удельной теплоемкости* $c_m = C/m$ или *молярной теплоемкости* $c_\mu = C/\nu$.

Теплоемкость сильно зависит от характера процесса и является характеристикой как тела, так и условий, при которых происходит изменение температуры тела. Поэтому в общем случае она не имеет определенного числового значения и может сильно меняться от отрицательных до положительных значений. Однако, если зафиксировать условия изменения температуры тела, то теплоемкость становится характеристикой свойств тела, приобретая определенное числовое значение. Важнейшие из них – теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении.

При постоянном объеме ($V = \text{const}$):

$$C_V = (\delta Q / dT)_V = dU / dT + (pdV / dT)_V.$$

При заданном условии $dV = 0$ получаем $(\delta Q / dT)_V = dU / dT$, а это означает, что δQ при $V = \text{const}$ есть полный дифференциал. Исходная формула принимает вид $C_V = dU / dT$, где C_V – теплоемкость при постоянном объеме является функцией состояния.

При постоянном давлении ($p = \text{const}$) уравнение (26) переписывается в виде: $(\delta Q)_P = dU + (pdV)_P = d(U + pV)$. Это означает, что $(\delta Q)_P$ – полный дифференциал, а $C_P = (\delta Q / dT)_P$, где C_P – теплоемкость при постоянном давлении является функцией состояния.

Функция $H = U + pV$ называется *энтальпией* системы, тогда $C_P = (dH / dT)_P$. Энтальпию называют полным теплосодержанием системы. В дифференциальной форме (при $p = \text{const}$):

$$dH = dU + p dV. \quad (27)$$

Соотношение между теплоемкостями идеального газа. Формула Майера. Пусть термодинамическая система характеризуется тремя макропараметрами: p, V, T . Эти параметры не независимы. Между ними существует соотношение, называемое уравнением состояния. Для идеального газа уравнение состояния задается равенством $pV_m = RT$. Для произвольного случая точный вид зависимости между этими величинами неизвестен. Поэтому можно записать лишь то, что эти величины находятся между собой в функциональных связях, например $p = p(T, V)$, или $T = T(p, V)$, или $V = V(p, T)$ в зависимости от того, какие переменные выбираются за независимые.

Выберем за независимые переменные V, T . Тогда внутренняя энергия системы будет ими определяться: $U = U(T, V)$. Подставляем выражение для полного дифференциала $dU = (\partial U / \partial T)_V dT + (\partial U / \partial V)_T dV$ в (26), находим

$$\delta Q = (\partial U / \partial T)_V dT + [p + (\partial U / \partial V)_T] dV. \quad (28)$$

Тогда формула для теплоемкости может быть записана в виде

$$C = (\partial U / \partial T)_V + [p + (\partial U / \partial V)_T] dV / dT, \quad (29)$$

где dV / dT в правой части определяется характером процесса. Так, при $V = \text{const}$ эта величина равна нулю; при $p = \text{const}$ формула (29) превращается в выражение теплоемкости при постоянном давлении:

$$\begin{aligned}
C_p &= (\partial U / \partial T)_V + [p + (\partial U / \partial V)_T] (\partial V / \partial T)_p = \\
&= C_v + [p + (\partial U / \partial V)_T] (\partial V / \partial T)_p.
\end{aligned}
\tag{30}$$

Идеальный газ, по определению, состоит из частиц, сталкивающихся друг с другом по законам абсолютно упругого удара. Размеры частиц при этом считаются бесконечно малыми, а силы взаимодействия на расстоянии между ними отсутствуют. Однако сами по себе частицы идеального газа могут быть сложными. Энергия сложной частицы складывается из кинетической энергии ее центра масс, кинетических энергий вращения и колебаний. На каждую из степеней свободы приходится энергия $\frac{1}{2} kT$, определяемая только температурой. Поэтому внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры и не зависит от объема газа.

Учитывая, что у идеального газа $U = U(T)$, а уравнение состояния для одного моля может быть записано в виде: $V = RT/p$, находим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = R/p.
\tag{31}$$

Подставляя (31) в (30) получаем:

$$C_p = C_v + R.
\tag{32}$$

Соотношение (32) для молярных теплоемкостей C_p и C_v в идеальном газе называется *уравнением Майера*. Разделив обе части уравнения (32) на молярную массу M газа, получим: $c_p = c_v + R_0$, где $c_p = C_p/M$, $c_v = C_v/M$ – удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме; $R_0 = R/M$ – удельная газовая постоянная.

Теплоемкость идеального газа. Если частица идеального газа простая, то она имеет три степени свободы поступательного движения, и ее энергия равна $\frac{3}{2} kT$. Если же частица идеального газа сложная, то она обладает большим числом степеней свободы и большей энергией. Например, если точечная частица состоит из двух точечных частиц, то имеются две возможности: если точечные частицы между собой жестко связаны и ведут себя подобно твердой гантели, то сложная частица имеет пять степеней свободы – три поступательные и две вращательные (вращение вокруг оси, проходящей через точечные частицы невозможно), и энергия сложной частицы равна $\frac{5}{2} kT$; если точечные частицы между собой не жестко связаны и могут совершать колебательное движение вдоль соединяющей их линии, то добавляются еще две степени свободы – кинетическая энергия $\frac{1}{2} kT$ и потенциальная энергия $\frac{1}{2} kT$ колебаний, и на одну сложную частицу приходится энергия $\frac{7}{2} kT$.

Если сложная частица имеет i степеней свободы, то ее энергия $(i/2)kT$. В моле имеется N_A частиц и, следовательно, внутренняя энергия моля идеального газа равна $U = \left(\frac{i}{2}\right)N_A kT = \left(\frac{i}{2}\right)RT$.

Тогда из определения теплоемкости при постоянном объеме, используя формулу Майера, получаем $C_V = \left(\frac{i}{2}\right)R$, $C_P = \left(\frac{i+2}{2}\right)R$.

Однако у теории теплоемкостей идеального газа есть и расхождения с экспериментом: 1. У двухатомного газа хлора Cl_2 теплоемкость равна примерно $6/2 kT$, что невозможно объяснить в рамках теории теплоемкостей идеального газа. У трехатомных газов наблюдается систематическое отклонение от предсказаний теории (рис. 23).

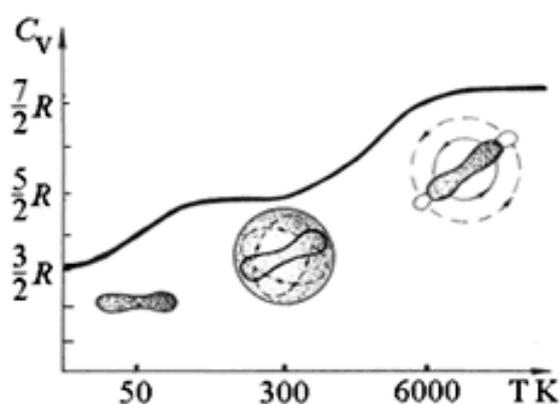


Рис. 23. Экспериментальная зависимость C_V молекулярного водорода от T

2. Достаточно разреженный водородный газ близок к идеальному и является удобным объектом для проверки теории. Теоретически для двухатомного газа C_V равна либо $5/2 R$, либо $7/2 R$ и от температуры не зависит.

В действительности теплоемкость молекулярного водорода зависит от температуры. Молекула водорода ведет себя при низкой температуре (около 50 К) как точечная частица, у которой внутренние движения отсутствуют ($C_V = 3/2 R$); при нормальной температуре – как жесткая гантель ($C_V = 5/2 R$); при высокой температуре (более 6000 К) – как гантель с нежесткой связью ($C_V = 7/2 R$). При изменении температуры включаются (или выключаются) в определенном порядке разные степени свободы. Переход от одного режима движения к другому происходит не скачком, а постепенно в некотором интервале температур. Это объясняется тем, что при определенной температуре возникает лишь возможность перехода молекул в другой режим движения, но эта возможность не реализуется сразу всеми молекулами.

Процессы в идеальных газах. Процесс, в котором теплоемкость является постоянной величиной, называется *политропным*. Из требования постоянства теплоемкости C в процессе, следует, что первое начало тер-

модинамики должно иметь вид $CdT = C_vdT + pdV$. Разделим это уравнение на C_vT и после простых преобразований получим

$$dT/T + \left[\frac{C_p - C_v}{C_v - C} \right] dV/V = 0, \quad (33)$$

где $\frac{C_p - C_v}{C_v - C} = n - 1$, или $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$, n – показатель политропы.

Интегрируя (33), получаем уравнение политропы в переменных T, V : $TV^{n-1} = \text{const}$; а исключая из него T с помощью равенства $T = pV/R$, получаем уравнение политропы в переменных p, V : $pV^n = \text{const}$.

Изобарный, изохорный, изотермический и адиабатный процессы являются частными случаями политропного процесса (табл. 2).

Изобарный процесс – это процесс происходящий при постоянном давлении. Температуры в точках (p_1, V_1) и (p_1, V_2) определяются уравнением состояния соответственно: $T_1 = p_1V_1/R$, $T_2 = p_1V_2/R$. При этом процессе с увеличением объема к системе необходимо подводить теплоту, для того чтобы обеспечить постоянство давления. Работа в процессе определяется интегралом $A = \int_1^2 p_1 dV = p_1(V_2 - V_1)$.

Работа в координатах p, V равна площади между кривой, изображающей процесс, осью V и вертикалями, проходящими через начальную и конечную абсциссы. В координатах p, T процесс также изображается прямой линией. Выражение работы в этих переменных имеет вид

$$A = \int_1^2 p_1 dV = \int_1^2 p_1 \frac{R}{P_1} dT = R(T_2 - T_1).$$

Оба представления равноценны. От одного к другому совершается формальный переход с помощью уравнения состояния.

Таблица 2. Изопроцессы

$C = \text{const}$	n	Процесс	Уравнение	Кривая
$C = 0$	$n = C_p/C_v = \gamma$	<i>Адиабатный</i>	$pV^\gamma = \text{const}$	<i>адиабата</i>
$C = \infty$	$n = 1$	<i>Изотермический</i>	$pV = \text{const}$	<i>изотерма</i>
$C = C_p$	$n = 0$	<i>Изобарный</i>	$V/T = \text{const}$	<i>изобара</i>
$C = C_v$	$n = \pm\infty$	<i>Изохорный</i>	$p/T = \text{const}$	<i>изохора</i>

Изохорный процесс – это процесс, осуществляемый при постоянном объеме. Работа в этом процессе равна нулю: $A = \int_1^2 pdV = 0$.

Изотермический процесс – это процесс, осуществляемый при постоянной температуре. Работа в этом процессе равна

$$A = \int_1^2 p dV = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Внутренняя энергия идеального газа не изменяется, так как $T = \text{const}$ и, следовательно, $dU = 0$. Поэтому $\delta Q = \delta A$, что означает, что в изотермическом процессе все количество теплоты, подводимое извне, идет на совершение работы.

Адиабатный процесс – это процесс, при котором отсутствует теплообмен с окружающей средой ($\Delta Q = 0$). Поэтому первое начало термодинамики для этого процесса записывается в виде $C_V dT + p dV = 0$.

Откуда ясно, что $dT < 0$ при $dV > 0$, и работа, совершаемая газом при расширении в этом процессе, происходит за счет его внутренней энергии; $dT > 0$ при $dV < 0$, поэтому работа, совершаемая над газом, приводит к увеличению его внутренней энергии.

По общей формуле для работы

$$A = \int_1^2 p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}) = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

где $p_1 V_1 = RT_1$. Принимая во внимание, что $(V_1/V_2)^{\gamma-1} = T_2/T_1$, формулу для работы можно преобразовать к виду $A = \frac{R(T_1 - T_2)}{(\gamma - 1)}$.

При расширении газа из состояния p_1, V_1 до некоторого другого объема V_2 работа при адиабатном процессе меньше, чем при изотермическом. Это объясняется тем, что при адиабатном процессе происходит охлаждение газа, в то время как в изотермическом процессе температура поддерживается постоянной за счет притока теплоты из термостата. Поэтому при изотермическом расширении давление газа уменьшается только за счет уменьшения плотности газа, а при адиабатном – за счет уменьшения плотности и средней кинетической энергии (температуры).

Энтропия идеального газа (в трактовке Р. Клаузиуса). Запишем формулу (26) первого начала термодинамики в виде

$$\frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV.$$

Используя уравнение состояния для одного моля: $p/T = R/V$, и учитывая, что $dT/T = d \ln T$, $dV/V = d \ln V$, получаем

$$\delta Q/T = d(C_v \ln T + R \ln V), \quad (34)$$

или
$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (35)$$

Так как правая часть равенства (34) является полным дифференциалом, то $\delta Q/T$ – также полный дифференциал функции состояния, названной *энтропией* S (от греч.- "изменение", "превращение").

В изолированной термодинамической системе изменение энтропии

$$dS \geq 0, \quad (36)$$

где знак (=) соответствует идеализированным обратимым процессам, а знак (>) – реальным необратимым процессам. Для необратимых процессов в закрытых системах неравенство можно представить в виде

$$dS = \frac{\partial Q_e}{T} + \frac{\partial Q_i}{T}, \quad (37)$$

где ∂Q_i – теплота, рожденная в системе необратимыми процессами.

Уравнения (35) – (37) представляют математическую запись второго закона термодинамики: *в изолированной системе энтропия сохраняет постоянное значение для обратимых процессов ($S = \text{const}$), возрастает при необратимых процессах и достигает максимального значения при термодинамическом равновесии ($S \rightarrow \text{max}$).*

Необратимые процессы всегда протекают в направлении возрастания энтропии, а сама она является количественным показателем способности системы к самопроизвольным изменениям.

Энтропия идеального газа (в трактовке Л. Больцмана). Людвиг Больцман дал физическую трактовку энтропии исходя из понятий статистической физики: *энтропия является мерой молекулярного хаоса, а закон ее неубывания отражает возрастающую дезорганизацию системы.* Это удалось доказать предположив, что энтропия каждого макроскопического состояния связана с вероятностью реализации этого состояния. Одно и то же макросостояние реализуется огромным числом микросостояний. Это число микросостояний называется термодинамической вероятностью Γ . При этом необходимо, чтобы все микросостояния данной системы были

равновероятны. Только в этом случае термодинамическая вероятность оказывается пропорциональной вероятности (классической) макросостояния.

Для термодинамической вероятности справедливо:

$$\Gamma = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots N_i!}, \quad (38)$$

где $N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_i$ - число молекул в системе; N_i - число молекул в i -м фазовом объеме (рис. 25).

Термодинамическая вероятность Γ - это число способов, которыми N молекул можно расположить в i ячейках системы. Больцман связал энтропию с термодинамической вероятностью:

$$S = k \ln \Gamma, \quad (39)$$

где k - постоянная Больцмана ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$, Дж/К).

Формула Больцмана позволяет дать энтропии наглядное толкование: чем более сильно упорядочена система, тем меньше число микросостояний, которыми осуществляется макросостояние.

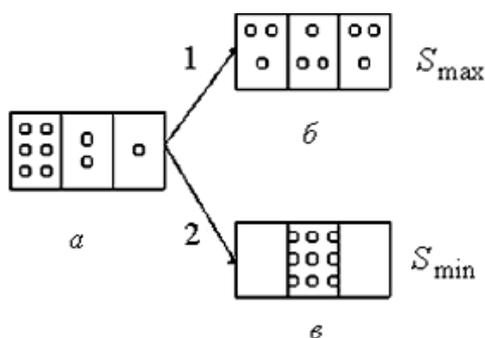


Рис. 24. Распределение молекул между тремя отсеками: *a* - начальное состояние системы, *б* - равновесное состояние системы с максимальной энтропией, *в* - неравновесное состояние системы с минимальной энтропией; 1 - самопроизвольный процесс, 2 - не самопроизвольный процесс

Рассмотрим идеальный газ в сосуде, разделенном на три отсека (рис. 24). Пусть в начальном состоянии молекулы газа распределены по отсекам различно. Можно подсчитать согласно уравнениям (38) и (39) термодинамическую вероятность $\Gamma_0 = 9!/6!2!1! = 252$ и энтропию начального состояния.

Переход системы 1 в равновесное состояние будет самопроизвольным и наиболее вероятным (термодинамическая вероятность максимальна) процессом.

Наименее вероятен самопроизвольный переход в наиболее упорядоченное состояние 2. Термодинамические вероятности для этих двух ситуаций: $\Gamma_1 = 9!/3!3!3! = 1680$; $\Gamma_2 = 9!/0!9!0! = 1$.

Энтропия, в трактовке Больцмана, является *мерой неупорядоченности системы*. В результате самопроизвольных процессов изолированная система переходит в состояние термодинамического равновесия, которое характеризуется максимальной энтропией. При равновесии происходят флуктуации, которые вызывают локальное уменьшение энтропии $dS < 0$, но в системе возникают такие изменения, которые возвращают ее в равновесное состояние с S_{\max} . Следовательно, *стремление энтропии к S_{\max} является главным эволюционным принципом изолированной термодинамической системы* и называется законом неубывания энтропии и содержанием 2-го начала термодинамики.

Равновесное состояние – наиболее вероятное состояние, совместимое с фиксированными внешними условиями. Внешние условия определяют те микросостояния, которые доступны системе, а значит и их число. В результате, значение энтропии следует за изменением внешних условий, достигая максимального значения, совместимого с ними.

Циклические процессы. Циклическим называется процесс, в результате которого система возвращается в исходное состояние.

Если обе части равенства $\delta Q = dU + p dV$, проинтегрировать по рассматриваемому циклу, то получим $\oint \delta Q = \oint dU + \oint p dV$. Интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю: $\oint dU = U_1 - U_1 = 0$. Поэтому вся работа, совершенная за цикл, получается за счет количества теплоты, поступившей в систему:

$$\oint \delta Q = \oint p dV = A. \quad (40)$$

Если работа совершается над системой ($\delta A < 0$), то система преобразует работу в теплоту: в одной части цикла в систему поступает теплота, а в другой – вытекает больше теплоты, чем входит. Сама же система после завершения цикла возвращается в прежнее состояние.

Формулировки Кельвина и Клаузиуса второго начала термодинамики:

1. Принцип Кельвина (В. Томпсон, 1851г.): *невозможен циклический процесс, единственным результатом которого является производство работы и обмен теплоты с одним тепловым резервуаром, имеющим во всех частях одинаковую температуру* (рис. 25, а).

Превращение теплоты в работу должно сопровождаться передачей ее части холодильнику.

2. Формулировка Р. Клаузиуса (1850 г.): *невозможен циклический процесс, единственным результатом которого была бы передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому* (рис. 25, б).

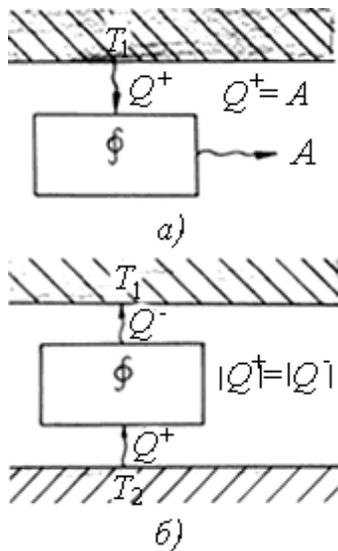


Рис. 25. Схематическая иллюстрация второго начала термодинамики в формулировках: а – Кельвина, б – Клаузиуса; $T_1 > T_2$.

Указанный на рисунке процесс невозможен

денной машиной работы A за один цикл к количеству теплоты Q^+ , полученному машиной от термостатов:

$$\eta = A/Q^+. \quad (41)$$

В этой формуле работа A может быть измерена графически площадью, ограниченной замкнутой кривой, изображающей цикл на диаграмме процессов (рис. 26), и задается формулой (40); Q^+ – количество теплоты, которое вошло в систему от термостатов ($Q^+ > 0$).

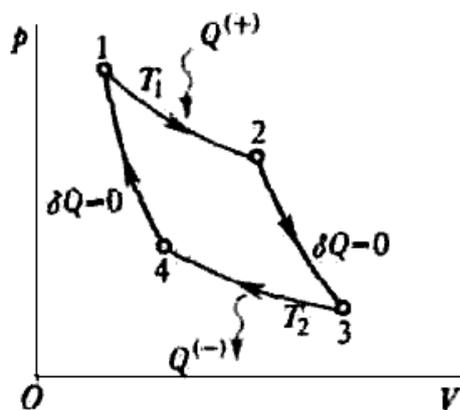


Рис. 26. Цикл Карно

поскольку Q^- отрицательна.

Утверждение, содержащееся в формулировке Кельвина, следует из утверждения формулировки Клаузиуса. Очевидно, что работа может быть полностью превращена в тепло, например посредством трения. Поэтому, если превратить (с помощью процесса, запрещенного формулировкой Кельвина) тепло, отнятое от какого-нибудь тела, полностью в работу, а затем ее превратить при посредстве трения в тепло, сообщаемое другому телу с более высокой температурой, то в результате получаем процесс, запрещенный формулировкой Клаузиуса.

Коэффициент полезного действия. По своему значению система, выполняющая циклический процесс, является машиной, которая производит работу за счет количества теплоты, поступающего в нее из термостата. Чем больше количества теплоты, поступившего из термостата, превращается в работу, тем более эффективна машина. Эффективность машины характеризуется коэффициентом полезного действия η , определяемым как отношение произведенной машиной работы A за один цикл к количеству теплоты Q^+ , полученному машиной от термостатов:

Формулу (41) перепишем в виде

$$\eta = \frac{(Q^+ + Q^-)}{Q^+} = 1 + \frac{Q^-}{Q^+}. \quad (42)$$

Эта величина всегда меньше единицы,

Вычисление КПД цикла Карно с помощью энтропии. Наиболее простым по содержанию является цикл Карно. Он состоит из двух изотерм при температурах T_1 и T_2 между состояниями 1, 2 и 3, 4 и двух адиабат ($\delta Q = 0$) между состояниями 2, 3 и 4, 1.

Направление цикла указывают стрелками на диаграмме процессов (рис. 27). При выполнении цикла Карно необходимы два термостата: термостат с более высокой температурой T_1 – теплоотдатчик; термостат с более низкой температурой T_2 – теплоприемник.

Представим цикл Карно в координатах T, S . Чередующиеся изотермы и адиабаты организуют в координатной сетке прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

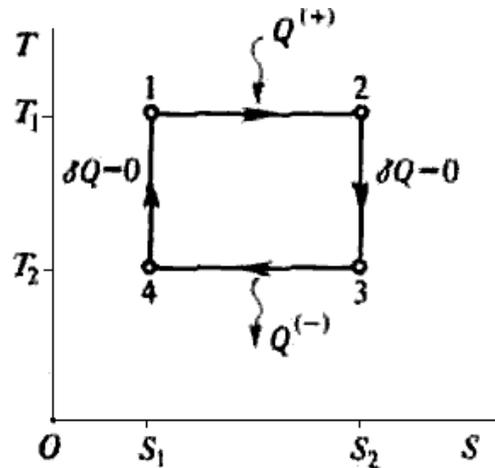


Рис. 27. Схема цикла Карно в переменных T, S

Из определения энтропии $\delta Q = T dS$, поэтому

$$Q^+ = \int_1^2 \delta Q = T_1 \int_1^2 dS = T_1(S_2 - S_1),$$

$$Q^- = \int_3^4 \delta Q = T_2 \int_3^4 dS = T_2(S_4 - S_3).$$

Учитывая, что в адиабатном обратимом процессе энтропия не изменяется, получаем $S_2 = S_3$, $S_1 = S_4$, и формула (42) принимает вид

$$\eta = 1 + [T_2(S_4 - S_3)]/[T_1(S_2 - S_1)] = 1 - T_2/T_1. \quad (43)$$

При выводе формулы (43) не делалось никаких предположений о свойствах рабочего вещества и устройстве тепловой машины.

Термодинамические потенциалы. Подход И. Р. Пригожина. Объединим первый и второй законы термодинамики:

$$TdS = dU + \delta A, \text{ или } TdS = dU + \delta A_p + \delta A_0, \text{ где } \delta A_p = p dV.$$

Тогда полезная работа $-\delta A_0 = dU + pdV - TdS$.

1. Если процессы осуществляются при постоянной температуре ($T = \text{const}$) и постоянном объеме ($V = \text{const}$), то максимальная полезная работа в системе выполняется за счет изменения *свободной энергии Гельмгольца* F (изохорно-изотермический потенциал). В этом случае $pdV = 0$ и $-\delta A_0 = dU - TdS = d(U - TS) = dF$, где $F = U - TS$; TS – *связанная энергия*: это

та часть внутренней энергии, которая не может быть преобразована в работу в изотермических условиях. Термин «связанная энергия» несет в себе оттенок обесцененной энергии, и она тем выше, чем больше величина S . Поэтому энтропию и называют мерой обесцененности энергии: чем выше S , тем ниже «качество» энергии, и наоборот.

В дифференциальной форме изменение свободной энергии Гельмгольца запишется как $dF = dU - T dS$.

2. Если процессы осуществляются при постоянных температуре и давлении, то максимальная полезная работа выполняется за счет изменения свободной энергии Гиббса G (изобарно-изотермический потенциал): $-\delta A_0 = dU + p dV - T dS = dH - T dS = d(H - TS) = dG$,

где $G = H - TS$. В дифференциальной форме: $dG = dH - T dS$.

Все функции состояния, используемые в термодинамике, называются термодинамическими потенциалами. Каждому набору независимых макропараметров соответствует термодинамический потенциал (табл. 3). Изменения потенциалов, происходящие в ходе процессов, определяют либо совершаемую системой работу, либо получаемое системой тепло.

Таблица 3. Характеристики устойчивого состояния системы

Характеристика системы	$V = \text{const}$ $S = \text{const}$	$p = \text{const}$ $S = \text{const}$	$V = \text{const}$ $T = \text{const}$	$T = \text{const}$ $p = \text{const}$
Критерий устойчивости	$dU < 0$	$dH < 0$	$dF < 0$	$dG < 0$
Термодинамический потенциал, обеспечивающий устойчивое состояние системы в заданных условиях	U_{min}	H_{min}	F_{min}	G_{min}

Энтропия и энергия (в трактовке Л. Бриллюэна). Второй закон термодинамики указывает, что не все виды энергии эквивалентны. Энергиям, наиболее эффективно превращающимся в другие виды энергии, соответствует наименьшее значение энтропии. Л.Бриллюэн разделил все виды энергии по качеству и связал их с величиной энтропии. Энергии «высшего качества» (класс А): гравитационная, ядерная, световая, электрическая энергии; химическая энергия «среднего качества» (класс В); энергией "низкого качества" с максимальной энтропией является тепловая энергия (класс С). Согласно трактовке Бриллюэна, второй закон термодинамики для изолированной системы означает *постоянную деградацию энергии «высшего качества» в энергию «низкого качества»*.

Выводы: 1. Пока энергетические превращения в системе сопровождаются переходами разных видов энергии друг в друга без их переходов в тепло, все эти процессы обратимы. Для обратимых процессов рассеивание энергии отсутствует и $TdS = 0$.

2. Выполнение полезной работы при осуществлении необратимых процессов сопровождается рассеиванием энергии, величину которой определяет TdS . Чем больше эта величина, тем более необратим процесс.

3. Процессы, протекающие с уменьшением термодинамических потенциалов ($dF < 0$ или $dG < 0$) проходят с выделением энергии и являются самопроизвольными. Процессы, протекающие с увеличением термодинамических потенциалов ($dF > 0$ или $dG > 0$), требуют поглощения дополнительной энергии из внешней среды и являются не самопроизвольными.

4. При достижении равновесия термодинамические потенциалы стремятся к минимальным значениям: $F \rightarrow \min, dF = 0$; $G \rightarrow \min, dG = 0$.

5. В отличие от энергии, которая подчиняется закону сохранения, энтропия подобного закона не знает. Она сохраняется только в обратимых процессах, представляющих высшую стадию идеализации.

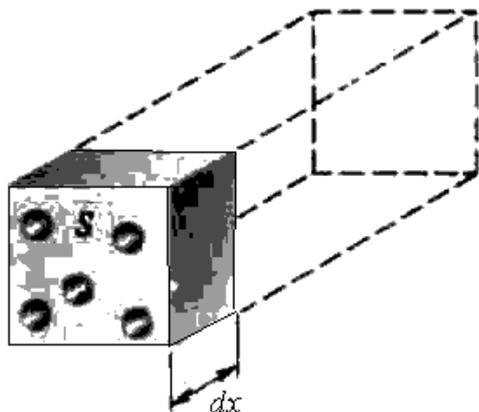
6. Эволюция изолированной системы допускает флуктуации с убыванием энтропии на малом интервале времени. В неизолированных системах энтропия может и возрастать, и убывать, и оставаться неизменной в зависимости от характера процесса (см. уравнение (37)).

Элементы физической кинетики

Элементы теории столкновений. Центры двух одинаковых молекул не могут сблизиться на расстояние, меньшее, чем их диаметр $d = 2r$. Если считать, что молекулы движутся относительно друг друга, то столкновение может произойти всякий раз, когда центр движущейся молекулы (точечная частица) при своем движении пересечет площадку $\sigma = \pi d^2$ вокруг центра другой молекулы. Эта площадь – *поперечное сечение* является количественной характеристикой вероятности определенного процесса, так как оно численно равно вероятности столкновения пары на единице площади.

Вероятность столкновений определяется вероятностью события – конкретного результата (изменения направления движения, поляризации или захвата нейтрона ядром урана и т.п.) и описывается с помощью поперечного сечения.

Рассмотрим газ, разреженный настолько, чтобы происходили только двойные столкновения. Положим молекулы твердыми шарами радиуса r с упругими столкновениями между собой. Падающую частицу считаем



точечной, а остальные частицы, с которыми она может столкнуться, – неподвижными мишенями с такими пространственными размерами, что максимальная площадь их поперечного сечения плоскостью, перпендикулярной направлению движения падающей частицы, равна σ (рис. 28). Эта воображаемая площадь подбирается такой, что-

Рис. 28. К определению площади поперечного сечения бы вероятность рассматриваемого результата столкновения была равна вероятности того, что падающая частица, двигаясь прямолинейно, без взаимодействия попадает на площадку σ .

Пусть падающая частица падает на площадь S объема V . В слое толщины dx находится $n_0 S dx$ частиц-мишеней, где n_0 – концентрация частиц-мишеней. Сумма их поперечных сечений закрывает часть площади S и равна $dS = \sigma n_0 dx S$. Тогда вероятность того, что падающая частица сталкивается хотя бы с одной частицей-мишенью в слое dx : $dP = \frac{dS}{S} = \sigma n_0 dx$. От-

куда и определяется поперечное сечение σ рассматриваемого процесса. Величины σ и n_0 не зависят от x . Поэтому вероятность события (столкновения) растет пропорционально пройденному падающей частицей пути.

Длина пути $\langle l \rangle$, при которой эта вероятность равна единице, называется *средней длиной свободного пробега*: $1 = \sigma n_0 \langle l \rangle$; $\langle l \rangle = \frac{1}{\sigma n_0}$ – это путь, который в среднем проходит падающей частицей в веществе мишеней, прежде чем наступает событие (столкновение).

При заранее заданном направлении вдоль оси перпендикулярной площадке средний пробег молекул после последнего столкновения перед пересечением площадки составляет лишь $\frac{2}{3} \langle l \rangle$.

В случае реальных молекул, не имеющих жестких границ, а имеющих поле сил взаимодействия, вместо поперечного сечения используется понятие *эффективное сечение*, определяемое через вероятность того или иного процесса.

Особенностью неравновесных состояний системы является стремление системы к равновесному состоянию. Как только условия, приводящие систему к неравновесному состоянию, исчезают, система самопроизвольно возвращается в равновесное состояние, которое оказывается наиболее вероятным. Это самопроизвольное возвращение к равновесию называют *релаксацией* к равновесному состоянию.

Значит, основным отличием неравновесных процессов является зависимость термодинамических параметров от времени. Время, в течение которого система переходит из неравновесного состояния в равновесное состояние, называется *временем релаксации*. Например, время, в течение которого распределение станет максвелловским, называется временем релаксации к распределению Максвелла, или временем термализации.

Если имеется смесь двух сортов молекул, распределение которых отлочно от максвелловского, то представленные сами себе оба сорта молекул достигнут распределения Максвелла по скоростям, но в течение, вообще говоря, различных промежутков времени, т.е. их времена релаксаций различны. Если распределение плотности газа в пространстве неоднородно, то оно стремится стать однородным. Время достижения однородной плотности характеризуется своим временем релаксации и оно, конечно, не равно, например, времени релаксации к распределению Максвелла. Итак, при отклонении от положения равновесия система переходит к нему с различными временами релаксации по различным параметрам.

Общее уравнение переноса. Процессы перехода к равновесному состоянию в газах за время релаксации называются *процессами переноса*:

1. Выравнивание температуры во всех частях системы и связанный с этим перенос теплоты – *теплопроводность*.

2. Выравнивание плотности (концентраций) каждой из компонент системы во всех ее частях и связанный с этим перенос вещества компонентов, составляющих фазу вещества – *диффузия*.

3. Выравнивание поля относительных скоростей в системе за счет сил торможения или вязкости, и связанный с этим обмен импульсами упорядоченного движения различными слоями газа или жидкости – *внутреннее трение*.

Рассмотрим перенос во времени и в пространстве системы произвольного единичного признака отличия, отнесенного к каждой отдельной частице в выделенной группе частиц. Этим признаком может быть счетная (меченая) частица, масса, энергия, импульс, электрический заряд и даже запах, т.е. любой потенциально переносимый частицей признак. Условия в системе, при которых происходит такое рассмотрение, равновесные.

Обозначим исследуемый единичный признак G . Пусть в одной области системы концентрация этого признака немного выше, чем во второй – соседней. В этом случае говорят о наличии градиента концентрации, направленного в сторону первой области. Признак G смещается в направлении уменьшения его проявления, и система релаксирует по этому признаку к равновесному состоянию.

Для простоты и удобства рассмотрения потребуем для системы изотропность по данному признаку. Это означает, что все направления по развитию (изменению) этого признака эквивалентны. Например, это может быть геометрическая расходимость признака G от единой точки (центра) – его источника (стока). В этом случае любое произвольное направление можно обозначить осью X и выбрать как исследуемое.

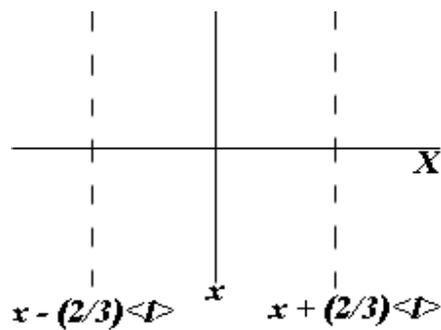


Рис. 29. К выводу общего уравнения процессов переноса

Направим ось X вдоль градиента G (рис. 29). Среднее расстояние, пробегаемое молекулами, пересекающими dS после последнего столкновения $\frac{2}{3} \langle l \rangle$. Эта величина

обычно очень мала, поэтому на расстоянии

$$\frac{2}{3} \langle l \rangle \text{ от площадки: } G\left(x \pm \frac{2}{3} \langle l \rangle\right) = G(x) \pm \frac{2}{3} \langle l \rangle \frac{dG(x)}{dx},$$

т.е. ограничившись первым членом разложения в ряду Тейлора в точке x . Поток числа молекул в направлении оси X равен $\frac{1}{4}n_0v_0$. Поток J призна G , транспортируемого молекулами сквозь площадку dS в направлении отрицательных значений оси X :

$$J_G^{(-)} = -\frac{1}{4}n_0 \langle v \rangle \left\{ G(x) + \frac{2}{3} \langle l \rangle \frac{dG(x)}{dx} \right\},$$

а в направлении положительных X :

$$J_G^{(+)} = \frac{1}{4}n_0 \langle v \rangle \left\{ G(x) - \frac{2}{3} \langle l \rangle \frac{dG(x)}{dx} \right\}.$$

Суммарный поток

$$J_G = J_G^{(+)} + J_G^{(-)} = -\frac{1}{3}n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{dG}{dx}. \quad (44)$$

Уравнение (44) является *общим уравнением процессов переноса* количества G .

Теплопроводимость. Пусть G – средняя энергия теплового движения, приходящая на одну молекулу.

Из теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы имеем

$$G = \frac{i}{2}kT = \frac{i}{2} \frac{kN_A}{N_A} T = \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{C_V}{N_A} T, \quad (45)$$

где C_V – молярная теплоемкость.

Подставляя (45) в уравнение (44), получаем *уравнение Фурье* для теплопроводности (закон Фурье):

$$J_Q = -\frac{1}{3}n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{C_V}{N_A} \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{dT}{dx},$$

где J_Q – поток теплоты; λ – теплопроводимость, $\rho = n_0m$ – плотность,

$c_V = \frac{C_V}{N_A m}$ – удельная теплоемкость газа при $V = \text{const}$. Тогда

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle C_V.$$

Количество теплоты, перенесенное за время dt : $dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} dS dt$.

При фиксированной n_0 , главные различия определяются разными $\langle v \rangle$ и, значит, легкие газы обладают большей теплопроводимостью, чем тяжелые.

Так как $n_0 \langle l \rangle = 1/\sigma$ и не зависит от p , а $\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$ и также не зависит от p , то теплопроводимость не зависит от давления и увеличивается приблизительно прямо пропорционально \sqrt{T} .

Вязкость. Внутреннее трение в газах обусловлено переносом импульса молекул поперек направления движения газа. В результате теплового движения молекулы перетекают из одного слоя газа в другой, перенося при этом свои импульсы $m\vec{u}$. Быстрее движущийся слой тормозится, а медленнее движущийся – ускоряется. Это и есть механизм внутреннего трения между слоями газа.

$$\text{Здесь } G = m\vec{u}; \quad I_{mU} = -\frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle m \frac{du}{dx} = -\eta \frac{du}{dx};$$

где динамическая вязкость: $\eta = n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{m}{3} = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$.

$$\text{Сила внутреннего трения: } dF = -\eta \frac{du}{dx} dS.$$

Так как $n_0 \langle l \rangle = 1/\sigma$, и $\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$, то динамическая вязкость не зависит от давления и растет как \sqrt{T} . Кинематическая вязкость: $\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$.

Самодиффузия. Пусть молекулы одинаковые по всем параметрам, отличаются по одному индивидуальному признаку G , не оказывающему влияние на их взаимодействие. Значит, переноситься должен этот признак отличия. Примем обозначения концентрации $n_1(x), G = \frac{n_1}{n_0}$, где n_0 - равновесная концентрация.

Суммарный поток признака определяет форму, известную как *уравнение Фика*:

$$J_{N_1} = -\frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{d}{dx} \left(\frac{n_1}{n_0} \right); \quad J_{N_1} = -D \frac{dn_1}{dx},$$

где коэффициент диффузии: $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$.

$$\text{Масса } M, \text{ перенесенная за время } dt \text{ при диффузии: } dM = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt,$$

где ρ – плотность вещества.

Ясно, что с одной стороны $D \propto \frac{1}{\rho}$, и при фиксированной температуре $\langle v \rangle = \text{const}$, $\langle l \rangle \propto \frac{1}{\rho}$; с другой – при фиксированном давлении

$\langle l \rangle \propto T$, $\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$. Следовательно, при $\rho = \text{const}$: $D \propto T^{\frac{3}{2}}$.

Связь между коэффициентами, характеризующими процессы переноса: $\lambda = \frac{\eta C_V}{m N_A} = \eta c_V$; $D = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\lambda}{c_V \rho}$.

Наличие этой связи обусловлено одинаковостью физической природы процессов переноса (одинаковой формой уравнений).

О взаимодиффузии и термодиффузии. При *взаимодиффузии* в газе из смеси различных молекул, различающихся динамическими свойствами и характером взаимодействия, большие значения приобретают гидродинамические потоки, существующие наряду с диффузными. Они возникают для компенсации неоднородности давления, образующегося из-за различной скорости диффузии компонентов газа.

Если в объеме V , занимаемом смесью газов, создать градиент температуры, то равномерное распределение газа по объему нарушается. В большинстве случаев в более теплых областях объема увеличивается концентрация легких компонентов смеси, а в более холодных – тяжелых. Это явление – *термическая диффузия*.

Реальные газы

Реальные газы – газы с межмолекулярным взаимодействием. Результат взаимодействия определяется соотношением между средними кинетической и потенциальной энергиями взаимодействия молекул.

Системы молекул. Жидкое и газообразное состояние. Агрегатное состояние веществ определяется соотношением между средней кинетической $\langle K \rangle$ и средней потенциальной $\langle U \rangle$ энергиями взаимодействия молекул: у газов $\langle K \rangle \gg |\langle U \rangle|$; у жидкостей $\langle K \rangle \approx |\langle U \rangle|$; у твердых тел $\langle K \rangle \ll |\langle U \rangle|$. (Модуль потенциальной энергии берется, т.к. принято считать, что U притяжения отрицательна.)

Если сумма кинетической и потенциальной энергий рассматриваемой системы молекул положительна, то молекулы, предоставленные самим себе, стремятся разойтись на бесконечно большое расстояние. Это соответствует желанию системы аккумулировать минимальную плотность энергии и стремлению газа к расширению. При сжатии газа (с ростом давления) его плотность увеличивается, и $\langle l \rangle$ молекул уменьшается. При этом падает и потенциальная энергия, т.к. она пропорциональна расстоянию между молекулами. Если средняя кинетическая энергия не слишком велика, то может наступить такой момент, когда сумма кинетической и по-

тенциальной энергии станет отрицательной. Такая система уже не может самопроизвольно рассеяться в большом объеме, поскольку после рассеяния, ее энергия состояла бы лишь из кинетической, т.е. была бы положительной, что оказывается невозможным, т.к. полная система энергии уже отрицательна: т.е. существует ситуация связанного состояния. Молекулы не могут разойтись на бесконечно большое расстояние и удерживаются в конечном объеме. Такое состояние будет либо жидким, либо твердым.

В жидкостях молекулы не связаны между собой стационарными устойчивыми связями, но их упаковка плотнее, чем в газах, и в течение продолжительных промежутков времени группы молекул могут образовывать агрегаты молекул. Эти агрегаты (кластеры) молекул по своим структурным свойствам напоминают твердое тело. При установившихся внешних условиях среднее количество кластеров в жидкости неизменно. Они все время распадаются и реорганизуются в новые за счет сил Ван-дер-Ваальса. Неустойчивость кластеров объясняется зависимостью сил взаимодействия от расстояния между частицами: $F(r) \propto r^{-7}$. Столкновение с молекулой может увеличить расстояние между соседними молекулами в кластере, одна или несколько молекул покинут кластер, и он распадется. Возможен и обратный результат, все зависит с какой молекулой из распределения Максвелла взаимодействует кластер: если скорость молекулы мала – он ее захватит, если велика – он может развалиться.

Изотермы реального газа и жидкости. Типичный вид изотерм реального газа, наблюдаемый в экспериментах при сжатии показан на рис. 30.

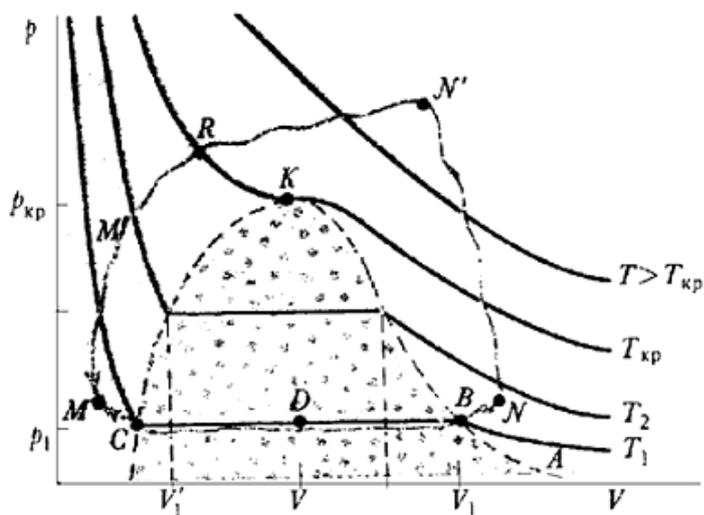


Рис. 30. Изотермы реального газа и жидкости

При сжатии газа при температуре T до объема V_1 его давление повышается до p . При дальнейшем уменьшении объема часть газа превращается в жидкость, но давление при этом остается равным p . Значит на участке изотермы от B до C в сосуде одновременно имеются и жидкость, и газ, разделенные границей, являющейся поверхностью жидкости. Физические одно-

родные части, на которые распалась система, называются *фазами*.

В точке B весь объем заполнен газообразной фазой, при движении от B к C доля объема, заполненная газообразной фазой, уменьшается, а заполненная жидкой фазой – увеличивается. На участке CB система состоит из жидкой и газообразной фаз. В точке C весь объем заполнен жидкой фазой. При дальнейшем уменьшении объема производится сжатие жидкости. Жидкость оказывает очень большое сопротивление сжатию, поэтому даже при небольшом уменьшении объема давление увеличивается значительно. При увеличении температуры участок изотермы, соответствующий двухфазной системе, уменьшается. При $T_{кр}$ участок изотермы превращается в точку (точка K на контуре штриховой линии). В этой точке исчезает разница между жидкостью и газом, или жидкость и газ имеют одинаковые физические свойства. Такое состояние называется критическим, а величины $P_{кр}$, $V_{кр}$, $T_{кр}$, его характеризующие, критическими. Выше этой критической температуры газ не может быть превращен в жидкость ни при каком состоянии и давлении.

Выше давления $p_{кр}$ изотерма $T_{кр}$ разделяет газообразное и жидкое состояния так, что в точках этой изотермы свойства фаз одинаковы.

Область двухфазных состояний выделена штриховой кривой $СКВА$. Смена фазы возможна через область двухфазных состояний или минуя ее. Например, переход из газообразного состояния N в жидкое M можно осуществить либо по пути $NBCM$, либо по пути $NN'RM'M$. Во втором случае в точке R будет совершен переход в жидкое состояние, минуя двухфазную систему. В этой точке свойства жидкого и газообразного состояний совпадают. Однако в соседних точках, по разные стороны изотермы эти свойства различны: с одной стороны изотермы вещество является газом и стремится расширяться, с другой – жидкостью и стремится сохранить свой объем.

В критическом состоянии теряется различие между жидким и газообразным состоянием. Равновесие между жидкостью и насыщенным паром осуществляется путем постоянного обмена веществом между фазами. Это означает, что вещество не оказывает сопротивления изменению объема, но и не стремится увеличить свой объем. Оно становится как бы безразличным к изменению своей плотности. Это состояние является благоприятным для развития больших флуктуаций плотности.

Свойства вещества в критическом состоянии. В точке K изотерма имеет горизонтальное направление. Значит $(\partial p / \partial V)_T = 0$, т.е. давление

(плотность) не зависит от объема. Иными словами, если в некоторой области плотность частиц увеличилась, то не возникает сил давления, которые стремились бы эту плотность уменьшить, и, наоборот, уменьшение плотности (давления) не приводит к возникновению факторов, стремящихся восстановить прежнее равновесное состояние. В результате этого в критическом состоянии флуктуации плотности допускаются самим веществом, а значит, реализуются в нем очень большими.

Критическая опалесценция. Если в прозрачном сосуде сжимать газ и просвечивать сосуд лучом света, то на экране проходящий свет дает изображение сосуда. Ввиду различия в коэффициентах поглощения жидкости и насыщенного пара на экране видны жидкая и газообразная фазы и граница между ними. При нагревании двухфазной системы граница между фазами является неподвижной, т.к. доли объемов, занимаемых жидкостью и газообразной фазой, не изменяются. При приближении к критической температуре граница становится менее резкой. При критической температуре различие между жидкой и газообразной фазами пропадает, и следует ожидать исчезновения границы, но вместо этого в момент, когда граница должна исчезнуть, весь объем сосуда становится непрозрачным для света. Это явление называется *критической опалесценцией*. Через небольшой промежуток времени при повышении температуры прозрачность восстанавливается, но в сосуде находится только газообразная фаза.

Критическая опалесценция объясняется тем, что в критическом состоянии велики флуктуации плотности. Благодаря этому от точки к точке очень сильно изменяется показатель преломления и поглощения среды. В результате свет сильно рассеивается и поглощается в среде.

Теплота фазового превращения. В двухфазной системе жидкость и пар при данной температуре имеют вполне определенные средние плотности и давления. Пар называется насыщенным потому, что его нельзя «уплотнить» при той же температуре. При попытке «уплотнения» часть насыщенного пара превращается в жидкость. Именно этот процесс и происходит в двухфазной системе при изменении ее объема.

При увеличении объема часть жидкости переходит в пар (насыщенный), но при этом для поддержания температуры постоянной, системе извне необходимо сообщать соответствующее количество теплоты, называемой *теплотой фазового превращения*, или *скрытой теплотой перехода*. Она идет на преодоление сил притяжения или, иначе говоря, на компенса-

цию отрицательной потенциальной энергии притяжения между молекулами. Иными словами, она идет на изменение фазового состояния вещества. При критической температуре, очевидно, она равна нулю. Фазовые переходы с поглощением или выделением скрытой теплоты перехода называются *фазовыми переходами первого рода*.

Уравнение Ван-дер-Ваальса. В широком диапазоне давлений pV не является постоянным при $T = \text{const}$, как это должно быть по модели идеального газа. Произведение pV изменяется с давлением так, как будто при малых давлениях газ сжимается более охотно, чем идеальный, а при больших давлениях он сопротивляется сжатию сильнее, чем идеальный. Другими словами, *при малых плотностях газа в нем действуют дополнительные силы притяжения, а при больших плотностях – силы отталкивания*.

Уравнение состояния зависит от закона взаимодействия между молекулами. Поэтому, строго говоря, *каждый сорт молекул имеет свое уравнение состояния. Никакого универсального уравнения состояния для газов с межмолекулярным взаимодействием и для жидкостей не существует*. Наиболее широкую известность среди приближенных уравнений состояния получило уравнение Ван-дер-Ваальса. Оно позволяет учитывать взаимодействие между молекулами.

Действия отталкивания сводятся к тому, что молекула не допускает проникновения других молекул в занимаемый ею объем. Поэтому, силы отталкивания характеризуются эффективным объемом молекулы, и доступным для изменения является не весь объем V , а лишь его часть $(V - mb')$, где mb' – суммарный эффективный объем молекулы.

Наличие сил притяжения приводит к появлению дополнительного внутреннего давления на газ, что приводит к уменьшению внешнего давления, удерживающего газ в заданном объеме. Дополнительное внутреннее давление на газ пропорционально n_0^2 или $\frac{V^2}{m^2}$.

С учетом этих поправок и учитывая постоянные Ван-дер-Ваальса как коэффициенты пропорциональности $\left(p + \frac{m^2 a'}{V^2}\right)(V - mb') = \frac{m}{M} RT$, где постоянные Ван-дер-Ваальса a' и b' имеют разные значения для разных газов.

Это уравнение Ван-дер-Ваальса может быть записано в других видах:

1. С учетом удельного объема $\nu = \frac{V}{m}$ и $R_0 = \frac{R}{m}$, получаем

$$\left(P + \frac{a'}{\nu^2} \right) (\nu - b') = R_0 T .$$

2. Часто вместо постоянных a' и b' используют $a = a'M^2$ и $b = b'M$. Тогда с учетом того, что $\nu = m/M$, уравнение принимает вид:

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT .$$

3. Учитывая, что $V_m = \frac{V}{\nu}$, предыдущую форму перепишем в виде:

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT .$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса качественно правильно передает поведение плотных газов; как количественное соотношение для них не годится.

Часть 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Электростатика

Предмет изучения. В электростатике изучаются электрические поля неподвижных зарядов в предположении, что эти заряды удерживаются в разных точках пространства силами неэлектрического происхождения.

Однако не существует такой конфигурации зарядов, которая была бы устойчива, если нет других сил, кроме сил кулоновского взаимодействия между зарядами системы (теорема Ирншоу). Ясно, что неподвижных элементарных зарядов не существует, и потому не существует постоянных полей. Но в большинстве явлений наблюдается не поле отдельного заряда, а суперпозиция полей многих зарядов. Вклад в это поле каждого элементарного заряда очень мал. Напряженность электрического поля при этом определяется как средняя величина по некоторому физическому объему и физически малому отрезку времени. Флуктуации среднего значения

напряженности поля малы. Поэтому существенным становится не факт неподвижности зарядов, а постоянство во времени электрического поля.

Закон Кулона. Формула для вектора напряженности \vec{E} электрического поля от отдельного точечного заряда имеет вид

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{e}_r}{r^2} + \frac{r}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_r \right]. \quad (46)$$

Первый член: $\vec{E} = -\frac{q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ – закон Кулона, где \vec{e}_r – единичный век-

тор, направленный от точки наблюдения P , где измеряется поле \vec{E} (этим объясняется знак "минус"), r – расстояние от P до q . Любое воздействие не может распространяться быстрее скорости света, поэтому на поле в данный момент времени влияет только поведение заряда в прошлом. Время запаздывания равно $\frac{r}{c}$, поэтому первое слагаемое, пропорциональное второй степени расстояния, определяет запаздывающий закон Кулона, а второе – дает поправку на запаздывание для первого члена. Величина третьего слагаемого в формуле (46) падает обратно пропорционально расстоянию и доминирует на больших расстояниях, выражая закон излучения.

Работа в электрическом поле. При перемещении точечного заряда q в электрическом поле на $d\vec{l}$ (рис. 31) совершается работа $dA = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l}$.

Удельная работа $dA' = \frac{dA}{q} = \vec{E}d\vec{l}$, и $A' = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l}$ определяется криво-

линейным интегралом $A' = \int_L \vec{E}d\vec{l}$ вдоль L .

Потенциальность кулоновского поля. Ротор вектора. Поле сил называется *потенциальным*, если работа при перемещении в этом поле зависит от начальной и конечной точек пути и не зависит от траектории.

Из потенциальности поля точечного заряда и на основании принципа суперпозиции следует потенциальность произвольного электростатического поля. В таком поле сил работа равна нулю при перемещении по любому замкнутому пути. Чтобы проверить потенциальность поля надо исследовать бесконечное число замкнутых пу-

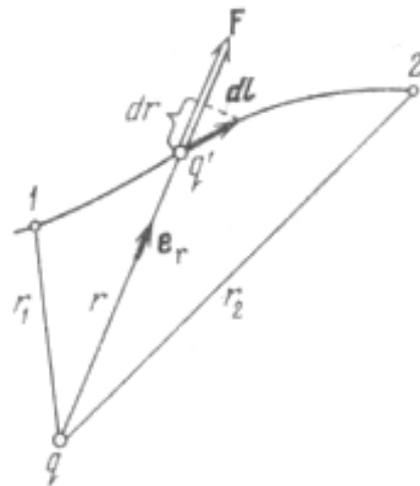


Рис. 31. К определению работы A в электрическом поле

тей, что в общем случае невозможно. Поэтому желательно найти другой, менее трудоемкий, критерий потенциальности.

Пусть имеем произвольный вектор \vec{E} . Выберем некоторое направление и зададим его единичной нормалью \vec{n} к площади ΔS , которая ограничена малым замкнутым контуром L .

Ротором называется вектор, проекция которого на направление \vec{n} определяется формулой $\text{rot}_n \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{l}}{\Delta S}$. Направление положительного обхода определяется правилом правого винта.

Тогда дифференциальная формулировка потенциальности электростатического поля

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (47)$$

что является достаточным условием консервативности поля. В потенциальном поле силовые линии не замкнуты. *Силовая линия* электростатического поля - линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором \vec{E} .

Градиент потенциальной функции. Электростатическое поле можно описать градиентом некоторой скалярной функции точки $\varphi(x, y, z)$.

Градиентом φ называется вектор $\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{d\varphi}{dx} + \vec{j} \frac{d\varphi}{dy} + \vec{k} \frac{d\varphi}{dz}$.

Для выяснения смысла этого вектора вычислим полный дифференциал функции φ при перемещении

$$d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz, \quad d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = \text{grad } \varphi d\vec{r}. \quad (48)$$

Раскрывая скалярное произведение векторов (48), получаем, что при значениях угла $\alpha = 90^\circ$ между векторами $\nabla \varphi$ и $d\vec{r}$, значения $\cos \alpha = 0$ и $d\varphi = 0$. Ясно, что вектор $\text{grad } \varphi$ направлен перпендикулярно поверхности с $\varphi = \text{const}$ (*эквипотенциальной поверхности*). По модулю он равен производной по пути в направлении, перпендикулярном поверхности $\varphi = \text{const}$.

Скалярный потенциал. Работа по перемещению заряда в потенциальном поле не зависит от траектории, поэтому ее можно выразить через координаты концов траектории с помощью потенциала. Можно убедиться, что $\text{rot}(\text{grad } \varphi) = 0$, поэтому уравнение (47) будет удовлетворено, если $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$. Знак «минус» показывает, что вектор \vec{E} направлен в сторону убывания. Скалярная функция φ , связанная так с напряженностью \vec{E} поля, называется *скалярным потенциалом* электрического поля.

Так как напряженность не может быть бесконечной, то и производные по координатам от потенциала должны быть конечными. А это означает, что потенциал является непрерывной функцией.

Если напряженность можно измерить экспериментально, то потенциал φ не имеет определенного числового значения. Из формулы (48) видно, что если к φ прибавить любую постоянную, то описываемое потенциалом поле не изменится, так как производные по координатам от постоянной величины равны нулю. Поэтому потенциал φ определен с точностью до аддитивной постоянной. Он приобретает вполне определенные значения во всех других точках, если ему приписать любое значение в одной точке. Придание однозначности потенциалу называется *нормировкой*.

Если заряд перемещается между точками 1 и 2 (см. рис. 31), то удельная работа: $A' = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{(1)}^{(2)} \text{grad}\varphi d\vec{r}$, где $d\vec{l} = d\vec{r}$. Физический смысл имеет не сам потенциал, а разность потенциалов между разными точками.

Электрическое поле в диэлектриках

Диэлектрики. При рассмотрении электрического поля при наличии в нем диэлектриков электрические заряды различают на свободные и связанные. Под *свободными* зарядами понимают электрические заряды, которые под влиянием электрического поля могут перемещаться на макроскопические расстояния (электроны в металлах и вакууме, ионы в газах и электролитах и т.п.), и заряды, нанесенные извне на поверхность диэлектриков и нарушающие их нейтральность. *Связанными* называют заряды, входящие в состав нейтральных молекул диэлектриков, ионы, закрепленные в твердых диэлектриках вблизи определенных положений равновесия.

Диэлектрики – вещества, в которых заряды под действием электрического поля сдвигаются на микроскопические расстояния.

Внешнее электрическое поле стремится сдвинуть положительные заряды в своем направлении, а отрицательные – в противоположном. Поэтому в направлении вектора напряженности в диэлектрике образуется избыток положительного заряда, а в противоположном – недостаток. Диэлектрик приобретает *дипольный момент*. Процесс называется *поляризацией*.

Степень поляризации диэлектрика характеризуется *поляризованностью*, или *вектором поляризации*, определяемым отношением дипольного момента $\Delta\vec{p}$ элемента диэлектрика к его объему: $\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V}$, или $\vec{P} = \frac{\sum \Delta\vec{p}_i}{\Delta V}$.

Примечание. Диполь – совокупность двух одинаковых по величине, но разных по знаку точечных зарядов, находящихся на малом расстоянии один от другого. Вектор \vec{l} , проведенный от отрицательного заряда к положительному, называется *плечом диполя*. Вектор $\vec{p} = q\vec{l}$ называется моментом диполя.

Механизмы поляризации. Диэлектрик состоит из атомов и молекул, и любой его малый физический элемент объема является электрически нейтральным. Если в атоме при отсутствии внешнего электрического поля электронное облачко распределено сферически симметрично относительно ядра, то атом не обладает электрическим дипольным моментом. И в молекулах положительные и отрицательные заряды могут обладать такой симметрией распределения, когда у них не возникает дипольный момент. Такие молекулы и атомы называются неполярными (H_2 , N_2 , O_2 , ..., CO_2 и др.). При отсутствии внешнего поля такой диэлектрик не поляризован.

Молекулы и атомы, обладающие электрическим дипольным моментом при отсутствии внешнего поля, называются полярными (CO , N_2O , др.).

Во внешнем электрическом поле положительные заряды стремятся сместиться по направлению напряженности поля, а отрицательные – противоположно. Неполярные молекулы приобретают дипольный момент, и диэлектрик поляризуется (*ионная* и *электронная* поляризация).

Полярные молекулы также приобретают индуцированный внешним полем дипольный момент и благодаря этому также поляризуются, но этот механизм – второстепенный. Главный механизм поляризации для них другой – *ориентационный*: во внешнем электрическом поле на постоянные дипольные моменты молекул действуют моменты сил, стремящиеся переориентировать дипольные моменты в направлении напряженности поля (рис. 32). Поляризованность за счет переориентации молекул значительно больше, чем в случае дипольных моментов, индуцированных внешним полем. Поляризованность $|\vec{P}|$ – количественная характеристика поляризации.

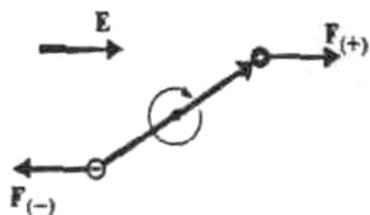


Рис. 32. Ориентационная поляризация

Очевидно, что $|\vec{P}|$ пропорционально $|\vec{E}|$. Если свойства диэлектрика по всем направлениям одинаковы, то диэлектрик называется *линейным изотропным*. У него диэлектрические свойства характеризуются скалярной величиной – *диэлектрической восприимчивостью* $\kappa > 0$ и $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$.

Влияние поляризации на электрическое поле. Дипольный момент $d\vec{p} = \vec{P}dV = \kappa \epsilon_0 \vec{E}dV$ элемента объема dV совпадает по направлению с \vec{E} (рис. 33). Поэтому напряженность поля самого дипольного момента направлена противоположно напряженности внешнего поля и ослабляет его. Роль поляризации сводится лишь к разделению разноименных зарядов, в результате чего в объеме диэлектрика, как и на его поверхности, образуются *поляризационные*, или *связанные* заряды. Наличие диэлектрика в электрическом поле учитывается тем, что принимается во внимание локальное электрическое поле, создаваемое связанными зарядами, возникающими в результате поляризации. Поэтому необходимо найти выражение связанных зарядов.

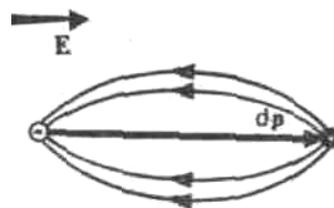


Рис. 33. Механизм ослабления поля при поляризации

Электростатическая теорема Гаусса. Пусть точечный заряд q находится внутри объема V , ограниченного поверхностью S (рис. 34). Поток Φ напряженности \vec{E} сквозь эту поверхность будет: $\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S}$. Теорема Гаусса устанавливает математическую связь между потоком векторов напряженности сквозь замкнутую поверхность S и зарядом q , находящимся в объеме V , стягиваемом этой поверхностью.

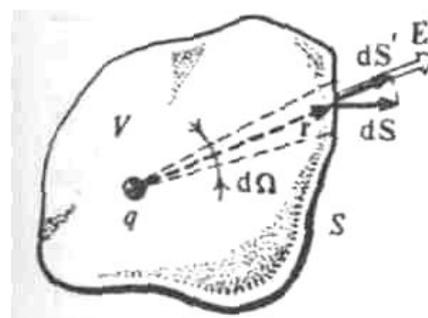


Рис. 34. Вычисление потока вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность в случае нахождения точечного заряда внутри объема V , ограниченного поверхностью S

Примечание. Скалярный поток частиц. Единичный поток частиц $J = \frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t}$, т.е. это количество частиц, прошедших через нормальную единицу поверхности за единицу времени. Иными словами, это своего рода канал через который «капают» частицы. Если умножить J на Δt , то с ростом Δt канал стремится стать «слитным» и выразится «струйкой» частиц и при достаточно большом Δt можно $\frac{\Delta N}{\Delta S}$ представить как вектор.

Скалярный поток векторного поля. Заменяем $\frac{\Delta N}{\Delta S}$ на вектор \vec{E} . Имея поверхность S произвольной формы, получим суммарный поток (как количество векторов, пересекающих эту поверхность) $\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i = \int_S \vec{E} d\vec{S}$, или $\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}$.

Для замкнутых поверхностей в качестве положительного направления выбирается направление в сторону внешней нормали, поэтому элемент поверхности $d\vec{S}$ направлен во внешнюю сторону от объема (см. рис. 34).

Под знаком интеграла имеем скалярное произведение векторов. Значит надо договориться, какой поток считать положительным, а какой отрицательным. Скалярное произведение $\vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \alpha$ и ясно, что знак потока определен знаком косинуса. При $\alpha < \pi/2$ поток векторов, выходящий из объема сквозь поверхность S , положителен.

По закону Кулона $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, значит,

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) d\vec{S}. \quad (49)$$

Учтем $\frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = \left(\frac{r}{r} \right) dS \cos \left(\frac{\wedge}{\vec{r}, d\vec{S}} \right) = dS'$, так как $d\vec{S} = dS \vec{n}$, где dS' – проекция элемента dS на плоскость, перпендикулярную радиус-вектору \vec{r} . Известно, что $d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$, где $d\Omega$ – телесный угол, под которым элемент площади dS' виден из начала отсчета радиус-векторов (местонахождение точечного заряда q). Тогда $\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega$. Полный телесный угол, под кото-

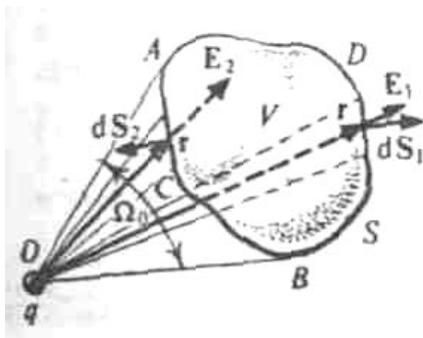


Рис. 35. Вычисление потока вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность в случае нахождения точечного заряда вне объема

рым видна замкнутая поверхность из точек внутри ограничиваемого его объема, равен $\int_S d\Omega = 4\pi$.

Тогда

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (50)$$

Если точечный заряд находится вне объема V , то поток векторов \vec{E} также определяется формулой (49). Теперь через поверхность ADB (рис. 35) поток положителен, а через ACB – отрицателен, поэтому подынтегральное выражение содержит положитель-

ные и отрицательные значения. Поверхности ADB и ACB из точки O видны под одним углом, поэтому

$$\oint \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) d\vec{S} = \int_{ADB} d\Omega - \int_{ACB} d\Omega = \Omega_0 - \Omega_0 = 0. \quad (51)$$

Объединяя результаты (50) и (51), имеем $\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ - когда q находится внутри объема, ограниченного S ; $\Phi_E = 0$ - когда q находится вне объема, ограниченного S .

Для системы точечных зарядов $Q = \int_V \rho dV$ обобщением теоремы Гаусса с учетом принципа суперпозиции полей ($\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$) является

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = \frac{1}{\epsilon_0} Q = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (52)$$

где ρ - объемная плотность зарядов.

Дивергенция векторного поля. Для описания процессов, связанных с положением и сохранением физических величин вводится математическое понятие *дивергенции* как локальное свойство векторного поля.

Пусть имеется произвольный вектор $\vec{A}(x, y, z)$, определенный во всех точках пространства. Рассмотрим поверхность S . Интеграл $\Phi_A = \int_S \vec{A} d\vec{S}$ называется *поток вектора \vec{A}* через поверхность и характеризует интенсивность порождения (положительный поток) или уничтожения (поток отрицательный). Можно сказать, что интеграл характеризует суммарную мощность источников вектора \vec{A} внутри объема.

Точечный источник генерирует силовые линии \vec{A} . Дивергенция (англ. *divergence* - расходящийся) вектора \vec{A} характеризует интенсивность такой генерации, или мощность точечных источников и определяется

формулой $\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} d\vec{S}}{\Delta V}$, поэтому иногда операцию div называют объемной плотностью источника.

Суммирование мощностей источников по объему, в котором они заключены, $\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta V_i} (\text{div } \vec{A})_i \Delta V_i = \int_V \text{div } \vec{A} dV$, или

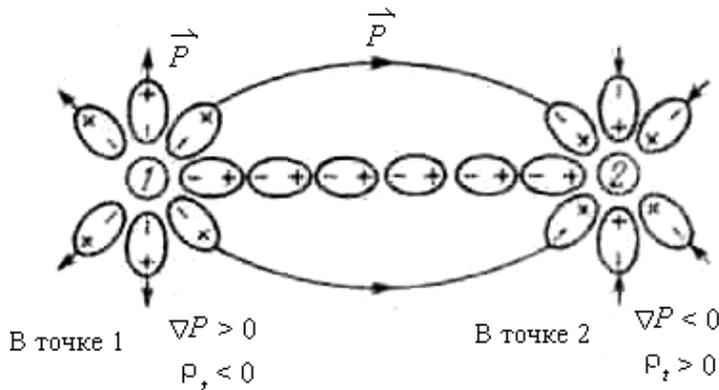
$$\int_V \text{div } \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{S} \quad (53)$$

называется формулой Гаусса и связывает интеграл по объему от дивергенции вектора с потоком этого вектора сквозь ограничивающую объем замкнутую поверхность.

Связанные заряды. Вернемся к связанным зарядам. По определению $\int_V \rho_t dV = Q$, а из определения дипольного момента и вектора поляризации $dQ = \vec{P} d\vec{S}$, тогда получаем $\int_V \rho_t dV = -\int_S \vec{P} d\vec{S}$. Знак «минус» показывает, что в объеме возникает заряд противоположный по знаку заряду, вытекающему через ограниченную объемом поверхность (рис. 36). С учетом (53) получаем объемную плотность связанных зарядов $\int_V (\rho_t + \text{div } \vec{P}) dV = 0$,

$$\rho_t = -\text{div } \vec{P}. \quad (54)$$

Ясно, что объемные связанные заряды возникают лишь в том случае,



когда вектор поляризации \vec{P} изменяется непрерывно от точки к точке.

При одинаковом векторе напряженности \vec{E} граничная поверхность двух диэлектриков с различной поляризованностью пересекается разным числом поляризованных поверхностных зарядов со стороны каждого диэлектрика.

Рис. 36. Графическая интерпретация формулы (54) В результате, вблизи границы сосредоточивается связанный заряд с поверхностной плотностью σ_t .

Интегрируя по объему (54) и используя (53), получаем

$$\int_V \rho_t dV = -\int_V \text{div } \vec{P} dV, \quad \int_V \rho_t dV = \sigma_t \Delta S,$$

$$\int_V \text{div } \vec{P} dV = \int_S \vec{P} d\vec{S} = \int_{S_2} P_2 dS_2 + \int_{S_1} P_1 dS_1 = P_{2n} \Delta S - P_{1n} \Delta S, \text{ или } \sigma_t = -(P_{2n} - P_{1n}).$$

Если $P_{2n} = 0$ (один из пары диэлектриков – вакуум), то $\sigma_t = P_n$, где P_n – нормальная компонента вектора поляризации диэлектрика на границе с вакуумом.

Формула Пуассона и условие Лапласа. Применим формулу Остроградского – Гаусса для вектора \vec{E} : $\int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{E} dV$, $\int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$, тогда электростатическая теорема Гаусса запишется в виде

$$\int_V \left(\text{div } E - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0 \quad \text{и} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Подставим $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ в $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ и получим: $\text{divgrad}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Учтем, что $\text{divgrad}\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \nabla^2\varphi$, где $\Delta \equiv \nabla^2$ – оператор

Лапласа. Окончательно получаем формулу Пуассона $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Для областей пространства без зарядов $\nabla^2\varphi = 0$ (условие Лапласа).

Диэлектрическое смещение. С учетом связанных зарядов формула Пуассона запишется в виде $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_f}{\varepsilon_0}$. А с учетом (8) получаем

$$\text{div}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho_f, \quad \text{или} \quad \text{div}\vec{D} = \rho_f. \quad (55)$$

Вектор $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ называется *вектором смещения*. Он не является чисто полевым вектором, т.к. учитывает поляризацию среды. Из (55) видно, что единственным источником \vec{D} являются сторонние свободные заряды, на которых этот вектор начинается и заканчивается.

Так как $\vec{P} = \kappa\varepsilon_0\vec{E}$, то $\vec{D} = (\varepsilon_0 + \kappa\varepsilon_0)\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$, где $\varepsilon = (1 + \kappa)\varepsilon_0$ – *диэлектрическая проницаемость*, характеризующая способность вещества не пропускать сквозь себя электрическое поле.

Умножим обе части (55) на dV и интегрируя по объему V , получаем в конечной форме запись электростатической теоремы Гаусса при наличии диэлектриков:

$$\int_V \text{div}\vec{D}dV = \int_V \rho dV; \quad \int_V \text{div}\vec{D}dV = \int_S \vec{D}d\vec{S}; \quad \int_V \rho dV = Q; \quad \int_S \vec{D}d\vec{S} = Q. \quad (56)$$

Условия на границе двух диэлектриков. *Граничными условиями* называется связь между векторами поля по разные стороны поверхности, разграничивающей две области. Рассмотрим границу между двумя диэлектриками с проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 37). Выберем на плоскости раздела диэлектриков произвольно направленную ось x . Возьмем небольшой прямоугольный контур длины a и ширины b , захватывающий и первый, и второй диэлектрики, но так, что ось x проходит через середину b .

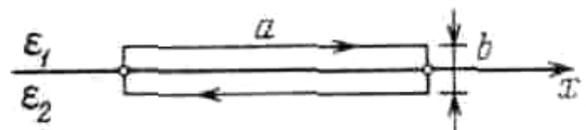


Рис. 37. Прямоугольный контур с границей раздела диэлектриков

Пусть в диэлектриках создано поле с напряженностью \vec{E}_1 в первом диэлектрике и \vec{E}_2 – во втором. Вследствие того, что $\text{rot } \vec{E} = 0$, циркуляция этого вектора по выбранному контуру должна быть равна нулю. Тогда при выбранном направлении обхода

$$\oint E_l dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b \rangle 2b = 0,$$

$$(E_{2x} - E_{1x})a = \langle E_b \rangle 2b.$$

Здесь $\langle E_b \rangle$ – среднее значение E_l на перпендикулярных к границе участках контура. В пределе, при стремящейся к нулю ширине контура b , получается, что $E_{1x} = E_{2x}$. При этом значения проекций векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 на ось x берутся в непосредственной близости к границе диэлектриков. Тогда ясно, что если выбрать направление оси такое, что $E_{1x} = 0$, то проекция E_{2x} также будет нулевой. Это означает, что векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 в двух близких точках, но по разные стороны от границы, лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела и каждый из них можно представить в виде суммы нормальной и тангенциальной компонент:

$$\vec{E}_1 = E_{1n}\vec{n} + E_{1\tau}\vec{\tau}; \quad \vec{E}_2 = E_{2n}\vec{n} + E_{2\tau}\vec{\tau}.$$

Тогда в новых обозначениях

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (57)$$

Здесь $E_{i\tau}$ – проекция вектора \vec{E}_i на направление τ вдоль линии пересечения плоскости раздела диэлектриков плоскостью векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 .

Согласно формуле $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ получаем: $D_{1\tau}/\epsilon_0\epsilon_1 = D_{2\tau}/\epsilon_0\epsilon_2$, или

$$D_{1\tau}/D_{2\tau} = \epsilon_1/\epsilon_2. \quad (58)$$

Возьмем на границе диэлектриков воображаемую цилиндрическую поверхность высоты h (рис. 38) с малыми одинаковыми основаниями S_1 и S_2 , расположенными, соответственно, в первом и втором диэлектриках.

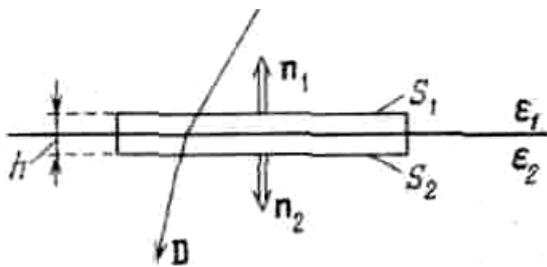


Рис. 38. Цилиндрическая поверхность с границей раздела диэлектриков

Основания $S_1 = S_2 = S$ настолько малы, что поле в пределах них можно считать однородным. Применим к этой поверхности теорему Гаусса и, если сторонних зарядов на границе между диэлектриками нет ($Q_f = 0$), то правая

часть формулы (52) равна нулю, и $\Phi_D = 0$. Поток вектора \vec{D} через всю цилиндрическую поверхность можно представить в виде $\Phi_D = D_{1n}S + D_{2n}S + \langle D_n \rangle S_{\text{бок}} = 0$. Здесь D_{1n} и D_{2n} – проекции вектора \vec{D} , соответственно в первом диэлектрике на нормаль \vec{n}_1 и во втором диэлектрике на нормаль

\vec{n}_2 ; $D_{1n}S$ и $D_{2n}S$ – потоки через соответствующие основания S_1 и S_2 ; $\langle D_n \rangle$ – значение D_n , усредненное по всей боковой поверхности $S_{\text{бок}}$; $\langle D_n \rangle S_{\text{бок}}$ – поток через боковую поверхность.

Если устремить высоту цилиндра h к нулю, $S_{\text{бок}}$ также будет стремиться к нулю и в пределе получится $D_{1n} = -D_{2n}$. Здесь D_{in} – проекция на n_i вектора \vec{D} в i -том диэлектрике в непосредственной близости к его границе с другим диэлектриком. Знаки проекций оказались разными вследствие того, что нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 к основаниям цилиндра имеют противоположные направления. Если же проецировать \vec{D}_1 и \vec{D}_2 на одну и ту же нормаль, то получится условие

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (59)$$

Заменив проекции \vec{D} соответствующими проекциями вектора \vec{E} , умноженными на $\epsilon_0\epsilon$, получим соотношение $\epsilon_0\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0\epsilon_2 E_{2n}$, из которого следует, что

$$E_{1n} / E_{2n} = \epsilon_2 / \epsilon_1. \quad (60)$$

Соотношения (57) – (60) определяют условия, которым должны удовлетворять векторы \vec{E} и \vec{D} на границе двух диэлектриков в том случае, если на ней нет сторонних зарядов (на границе диэлектрика с вакуумом одну из диэлектрических проницаемостей нужно приравнять к единице). Эти результаты означают, что при переходе через границу раздела двух диэлектриков нормальная составляющая вектора \vec{D} и тангенциальная составляющая вектора \vec{E} изменяются непрерывно; тангенциальная составляющая вектора \vec{D} и нормальная составляющая вектора \vec{E} при переходе через эту же границу раздела претерпевают разрыв. Эти соотношения получены для электростатического поля, однако они справедливы и для полей, изменяющихся со временем.

На границе диэлектриков линии смещения терпят излом (преломляются), вследствие чего угол α между нормалью к поверхности раздела и линией \vec{D} изменяется. Из рис. 39 следует, что

$$\text{tg } \alpha_1 / \text{tg } \alpha_2 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} / \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}, \text{ откуда с учетом формул}$$

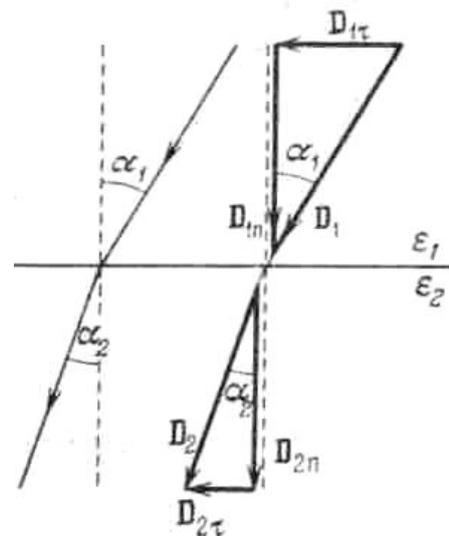


Рис. 39. Преломление линий электрического смещения на границе раздела диэлектриков

(58) и (59) получается закон преломления линий электрического смещения:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

При переходе в диэлектрик с меньшей ϵ угол, образуемый линиями смещения с нормалью, уменьшается, следовательно, линии располагаются реже; и, наоборот, при переходе в диэлектрик с большей ϵ линии смещения сгущаются.

Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса. 1. *Поле бесконечно однородно заряженной плоскости.* Вектор напряженности поля в любой точке нормален плоскости. В симметричных относительно плоскости точках векторы напряженности поля совпадают по модулю и противоположны по направлению.

Пусть внутри мысленной цилиндрической поверхности с образующими, перпендикулярными плоскости, заключен заряд $Q = \sigma \Delta S$ (рис. 40).

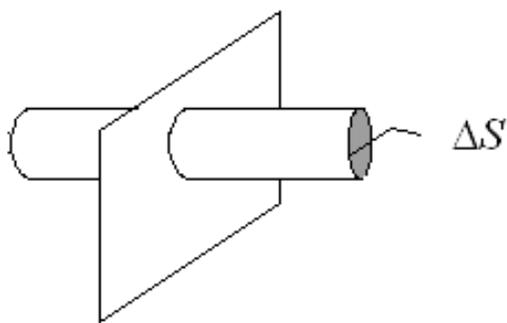


Рис. 40. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

Поток вектора \vec{E} через боковую поверхность цилиндрической поверхности будет отсутствовать. Для оснований цилиндра векторы $E_n \vec{n}$ совпадают с векторами \vec{E} . Тогда суммарный скалярный поток векторного поля \vec{E} через основания цилиндра: $\Phi_E = 2E\Delta S$.

Тогда согласно теореме Гаусса:

$$2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}; \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Данный результат независим от длины цилиндра, а значит на любых расстояниях от плоскости $\vec{E} = \text{const}$.



Рис. 41. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

2. *Поле двух разноименно заряженных плоскостей.* Для простоты и удобства рассмотрим случай (рис. 41) $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \sigma$. Поле определяется как суперпозиция полей от каждой плоскости в отдельности.

В случае двух разноименно заряженных плоскостей поле оказывается сосредоточенным между плоскостями с

одинаковой напряженностью во всех точках. Для плоскостей конечных размеров отклонения поля от однородности наблюдаются вблизи краев. Поле внутри плоского конденсатора при условии, если расстояние d между пластинами много меньше их линейных размеров (S) и без учета краевых эффектов $E = \sigma/\epsilon_0$. С учетом равенств $E = U/d$, $\sigma = Q/\Delta S$, $C = Q/U$ и с учетом диэлектрика с ϵ между пластинами получаем формулу плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon \Delta S}{d}$.

3. Поле бесконечного однородно заряженного цилиндра радиуса R . При постоянстве поверхностной плотности σ и из соображений симметрии следует, что вектор напряженности \vec{E} в любой точке должен быть направлен вдоль радиальной прямой, нормальной к оси цилиндра, а потому ее величина может зависеть только от расстояния r от оси цилиндра. Поэтому и через основания цилиндра поток векторов \vec{E} отсутствует.

Пусть дана (рис. 42) коаксиальная данной бесконечная цилиндрическая поверхность радиуса r . Поток вектора \vec{E} через боковую поверхность ΔS_2 равен $E(r) \Delta S_2$.

При $r > R$ внутрь объема, стягиваемого этой поверхностью, попадает заряд $Q = \sigma \Delta S_1$, где ΔS_1 – площадь боковой поверхности рассматриваемого заряженного цилиндра. Используем теорему Гаусса и получаем

$$E(r) \Delta S_2 = \frac{\sigma \Delta S_1}{\epsilon_0}, \quad E(r) 2\pi r = \frac{\sigma 2\pi R}{\epsilon_0}, \quad E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

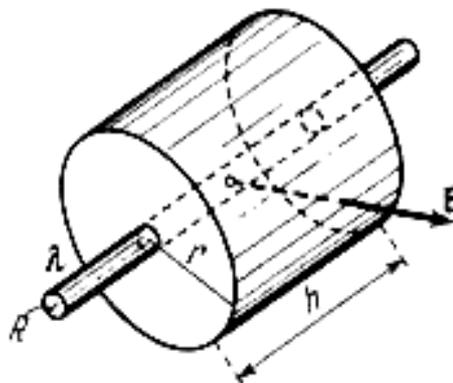


Рис. 42. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

Если $r < R$, то стягиваемый объем не содержит зарядов, и $E(r) = 0$.

При $r \approx R$ в непосредственной близости от поверхности заряженного цилиндра напряженность испытывает скачок $E(r = R) = \sigma/\epsilon_0$.

Поле отрицательно заряженного цилиндра отличается от поля положительно заряженного цилиндра только направлением вектора \vec{E} .

Пример. Два бесконечных тонкостенных коаксиальных цилиндра радиусов R и $2R$ (рис. 43) равномерно заряжены до значений поверхностных плотностей: $\sigma_1 = 3\sigma$ и $\sigma_2 = -\sigma$. Определим напряженность E поля в областях I, II и III.

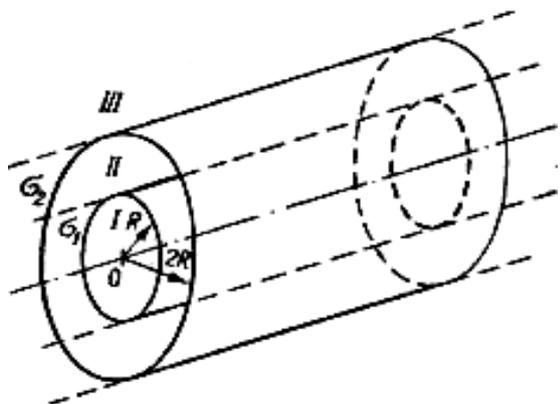


Рис. 43. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

Суммарная напряженность на расстояниях $r < R$ от оси равно нулю. Суммарное поле на расстояниях $r \approx R$ составляет $E(R) = \sigma_1/\epsilon_0$; на расстояниях $R < r < 2R$ $E(r) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \frac{R}{r}$.

Суммарное поле на расстояниях $r > 2R$ в вакууме определяется следующим образом:

$$E(r > 2R) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \frac{R}{r} + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \frac{2R}{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R}{r} (3\sigma - 2\sigma) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{r}.$$

4. Поле сферической однородно заряженной поверхности радиуса R_1 .

Вектор напряженности \vec{E} в любой точке должен быть направлен вдоль радиальной прямой и проходить через центр сферы (рис. 44).

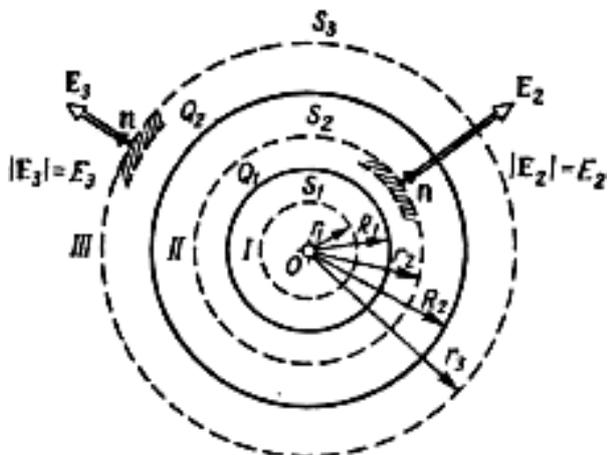


Рис. 44. К вычислению полей с помощью теоремы Гаусса

Вообразим концентрическую заданной сфере с σ и радиусом R_2 и исследуем характерные области I, II и III:

Для всех $r < R_1$, $E_1 = 0$;

Для всех $r \approx R_1$:

$$E(R_1)4\pi R_1^2 = Q/\epsilon_0, \text{ или } E(R_1) = \sigma/\epsilon_0;$$

Для всех $R_1 < r < R_2$:

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0}; \quad E_2 = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \left(\frac{R_1}{r} \right)^2;$$

Для всех $r \approx R_2$:

$$E(R_1)4\pi R_2^2 + E(R_2)4\pi R_2^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0} \text{ и } E_\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0 R_2^2} [\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2];$$

$$\text{Для всех } r > R_2: \quad E_3 = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} [\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2].$$

5. Поле объемно заряженного шара. Для поля вне шара ($r > R$) результат будет такой же, как для сферы.

$$\text{Для всех } r < R: \quad E(r)4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3; \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r.$$

Внутри шара напряженность поля растет линейно с увеличением расстояния r от центра шара. Вне шара напряженность поля убывает по такому же закону, как и у поля точечного заряда.

Электрическое поле проводников

Заряженный проводник. Гладкая поверхность заряженного проводника непременно является поверхностью постоянного потенциала. Это следует из самого определения потенциала, как характеристики потенциальной энергии системы зарядов. Очевидно, что избыточные заряды расходятся по поверхности гладкого проводника с одной σ , а раз так, то потенциальная энергия любой произвольной области на поверхности проводника будет постоянной. Электрическое поле, характеризуемое $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, должно быть перпендикулярным к поверхности в каждой ее точке. Разности потенциалов между полюсами нет, а следовательно внутри поле отсутствует. На поверхности – скачок потенциала.

Проводник во внешнем электрическом поле. Положительные ионы увлекаются полем в одном направлении, а отрицательные – в противоположном направлении. Заряды не могут уйти дальше поверхности. Скопившись около нее, они начинают сами создавать внутри тела электрическое поле, которое будет стремиться уничтожить первоначальное поле. Движение зарядов будет продолжаться, пока не произойдет полная компенсация поля внутри проводника. Так как этот эффект характерен для всех проводников (происходит «автоматически»), то мы должны рассматривать только поверхность проводника, когда имеем дело с внешним полем.

Полый проводник во внешнем поле. Если в пространстве внутри полого проводника любой формы нет зарядов, то электрическое поле в нем равно нулю. Это теорема электростатики и ее содержание вытекает из условия Лапласа и формулы Пуассона.

Прикладное применение этого утверждения – основа для электрозащиты. Это свойство проводников держать (аккумулировать) энергию поля на своей поверхности и около нее используется в виде системы про-

водников (от двух и более), расположенных на небольшом расстоянии друг от друга. Такие системы получили название конденсаторов (по аналогии – конденсация, выделение зарядов из объема), количественной оценкой способности которых аккумулировать электрическую энергию служит емкость, определяющаяся как $C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$ и являющаяся постоянной величиной для фиксированной системы проводников.

Постоянный электрический ток

Сила тока. Электрическим током называют упорядоченное движение электрических зарядов. Положительные заряды перемещаются по полю, отрицательные – против. Такой ток (под действием электрического поля и в проводнике) называется *током проводимости*.

Если в пространстве перемещается заряженное макроскопическое тело, то возникает тоже ток, но этот ток называется *конвекционным*.

За положительное направление тока условно принимают движение положительных зарядов. Количественной мерой электрического тока служит скалярная физическая величина $I = \frac{dQ}{dt}$. Ток, сила и направление которого не изменяются во времени, называют постоянным: $I = \frac{Q}{t}$.

Плотность тока. Заряды в произвольном объеме ΔV движутся с различными скоростями, но само движение приводит к переносу самого заряда в направлении скорости. Интенсивность этого переноса характеризуется плотностью тока $\vec{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum e_i \vec{v}_i$. Положительные и отрицательные заряды создают каждый свою плотность $\vec{j} = \vec{j}^{(+)} + \vec{j}^{(-)}$.

За время dt через поперечное сечение проводника переносится заряд $dQ = n|e| \langle v \rangle S dt$, где e – заряд электрона; n – концентрация носителей тока; $\langle v \rangle$ – средняя упорядоченная скорость носителей тока. Тогда: $I = n|e| \langle v \rangle S$, а плотность тока: $\vec{j} = n|e| \langle \vec{v} \rangle$. Направление вектора \vec{j} определяется $\langle \vec{v} \rangle$. Обычно эти формы представляются в виде $\vec{j} = \rho \vec{v}$, где ρ и \vec{v} – объемная плотность и скорость зарядов с учетом знаков.

Сила тока $dI = \vec{j}d\vec{S}$ определяется потоком вектора \vec{j} сквозь произвольную поверхность $d\vec{S} = dS\vec{n}$, \vec{n} – единичный вектор нормали к площадке dS , а $d\vec{S}$ – ориентированная в пространстве площадка.

Дифференциальная форма закона Ома. Проводниками называются материальные тела, в которых при наличии электрического поля возникает движение зарядов, т.е. электрический ток.

Экспериментальный закон, связывающий силу тока с разностью потенциалов на концах проводника, был открыт Омом в 1827 г.: $I = \frac{U}{R}$.

В дифференциальной форме закон Ома записывается для плотности тока. В проводнике выделим малый элемент Δl . Сопротивление току этого элемента: $R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$, где γ – удельная электрическая проводимость вещества, величина, обратная удельному электрическому сопротивлению.

В направлении τ рассматриваемого элемента

$$I_\tau = j_\tau \Delta S; \quad \Delta\varphi = j_\tau \Delta S \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}.$$

Так как $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = E_\tau$ – компонента напряженности электрического поля в направлении рассматриваемого элемента, то $j_\tau = \gamma E_\tau$. Это соотношение справедливо при любой ориентировки элемента, поэтому: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

При наличии тока $\vec{j} \neq 0$, и следовательно $\vec{E} \neq 0$, т.е. внутри проводника с током имеется электрическое поле.

Механизм существования постоянного тока. Источник тока называется источником сторонних ЭДС. По результатам своего действия он представляет собой процесс или устройство, разделяющее положительные и отрицательные заряды (против кулоновских сил). После разделения заряды перемещаются на электроды и по закону Кулона действуют на заряды проводника вблизи электродов, которые, в свою очередь действуют на другие заряды и т.д. В результате этих коллективных взаимодействий в цепи на поверхности проводников возникает такое распределение зарядов, которое обеспечивает существование внутри проводника соответствующего электрического поля. Таким образом, роль зарядов на полюсах источника ЭДС состоит не в том, чтобы создавать во всех проводниках непосредственно электрическое поле, а в том, чтобы обеспечивать такое

распределение поверхностных зарядов на проводниках, которое создает нужное электрическое поле внутри них. Это и обеспечивает постоянный ток.

Дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца. Известно, что $dA = dQU$ и $\frac{dQ}{dt} = I$, откуда $dA = IUdt$, а развиваемая током на участке цепи мощность $P = \frac{dA}{dt}$ и $P = IU$, или с учетом закона Ома $P = I^2R$. Это и есть известный закон Джоуля - Ленца в интегральной форме.

В иной форме $\Delta P = (j\Delta S)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$, и так как $\Delta S \Delta l = \Delta V$, то $\frac{\Delta P}{\Delta V} = P_V$, где P_V – объемная плотность тепловой мощности, выделяемой в проводнике.

Используем закон Ома в дифференциальной форме:

$$P_V = \frac{\Delta P}{\Delta S \Delta l} = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma E^2 = \vec{j} \vec{E}.$$

Любое из этих равенств, когда в левой части стоит P_V , является записью закона Джоуля – Ленца в дифференциальной форме.

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Задача разветвленных цепей решаются с помощью двух правил Кирхгофа (1824 – 1887).

Правило 1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна 0.

$$\sum_i I_i = 0$$

Любая точка разветвленной цепи, в которой сходятся не менее трех проводников с током, называется *узлом*. Ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла – отрицательным.

Первое правило вытекает из закона сохранения электрического заряда (нигде не должны накапливаться электрические заряды, иначе токи не могут оставаться постоянными).

Правило 2. Получается из общего закона Ома для разветвленных цепей. В любом замкнутом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков контура равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \varepsilon_k.$$

При использовании этих правил необходимо выбрать направление обхода контура и направление токов на всех участках цепи.

Сегнетоэлектрики. Сегнетоэлектриками называют полярные диэлектрики, которые в определенном интервале температур спонтанно поляризованы, т.е. обладают поляризованностью при отсутствии электрического поля. На границах указанного интервала температур сегнетоэлектрик в результате фазового перехода превращается в полярный диэлектрик. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon \approx 10^4$ зависит и от напряженности поля, и от того, как изменялась напряженность до достижения данного значения. Иногда их называют ферроэлектриками из-за формальной аналогии между их свойствами и свойствами ферромагнетиков.

Точка фазового перехода из состояния сегнетоэлектрика в состояние полярного диэлектрика называется точкой Кюри, а соответствующая температура T_K – температурой Кюри. Иногда имеются две точки Кюри: сегнетоэлектрические свойства исчезают также и при понижении температуры ($t_{K-B} = 24^{\circ}C$; $t_{K-H} = -18^{\circ}C$ у сегнетовой соли). Таких немного, основная масса имеет только одну верхнюю точку Кюри.

Магнитное поле в вакууме

Магнитная сила. Взаимодействие точечных неподвижных зарядов полностью описывается законом Кулона. Однако закон Кулона не достаточен для анализа взаимодействия движущихся зарядов.

Полевая траектория взаимодействия для магнитной силы формулируется аналогично полевой трактовке электрического взаимодействия: движущийся заряд создает в окружающем его пространстве магнитное поле; на движущийся заряд со стороны магнитного поля действует сила.

Магнитное взаимодействие сравнимо с электрическим лишь при достаточно больших скоростях заряженных частиц. Тем не менее, оно может проявляться и при очень малых скоростях, если кулоновское взаимодействие по каким-то причинам отсутствует.

Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Представим, что заряды движутся в тонкой цилиндрической проволоке, которая в целом электрически нейтральна и вне проволоки действует лишь магнитная сила. Значит, вокруг проводника с током проявляется действие

магнитной силы на движущиеся заряды, которые образуют электрический ток. При этом возникает магнитное взаимодействие токов (рис. 45):

$$dF_m = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl,$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ – магнитная постоянная. Из формулы видно, что на длину

l_2 проводника приходится сила

$$F_{ml} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l_2. \quad (61)$$

Знак «минус» показывает, что при одинаковых направлениях I_1, I_2 между проводниками действует сила притяжения. Если направления I_1 и I_2 различны, то возникает сила отталкивания.

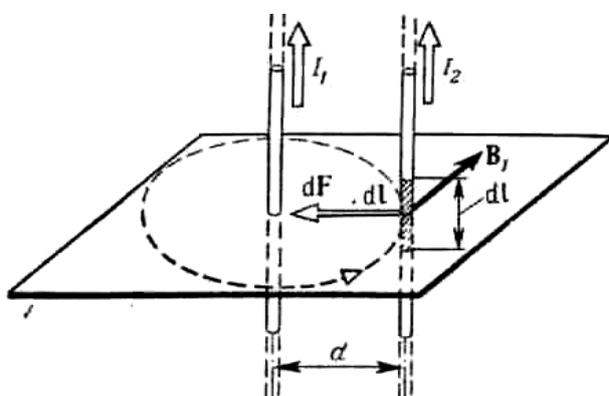


Рис. 45. К магнитному взаимодействию токов

Ампер есть сила постоянного тока, который будучи поддерживаемым в двух параллельных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого круглого сечения, расположенных на расстоянии 1 м в вакууме, вызывает между этими проводниками возникновение силы, равной $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Если подставить в формулу (61) значения $I_1 = I_2 = 1\text{ А}$, $d = 1\text{ м}$, $l_2 = 1\text{ м}$, $F_{ml} = 2 \cdot 10^{-7}\text{ Н}$, то $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ Н/А}^2$.

Сила Лоренца. Сила Лоренца представляется в общем виде: $\vec{F}_L = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{u} \times \vec{B}$. Первое слагаемое в правой части характеризует составляющую вектора силы со стороны электрического поля, а второе – со стороны магнитного. Здесь \vec{u} – вектор скорости частицы; \vec{B} – вектор магнитной индукции.

Поскольку сила, действующая со стороны магнитного поля на движущийся заряд, описывается вектором \vec{B} , то естественно назвать этот вектор напряженностью магнитного поля. Исторически название *напряженности магнитного поля* закрепилось за другим вектором, обозначаемым \vec{H} . Этот вектор не является полевой характеристикой магнитного поля, он учитывает свойства материальной среды, в котором само поле существует.

В частности, при заданном \vec{H} вектор \vec{B} , а следовательно, и сила, действующая на движущийся заряд, могут иметь разные значения. За вектором \vec{B} установилось название *индукции магнитного поля*.

Сила Ампера. Пусть имеется совокупность точечных зарядов, концентрация которых равна n . Тогда в элементе объема dV имеется ndV зарядов. Если они все движутся со скоростью \vec{u} и на каждый из них действует магнитная сила, определяемая вторым слагаемым в уравнении Лоренца, то на заряды в элементе объема dV действует сила $d\vec{F}_m = nq dV \vec{u} \times \vec{B}$. Учитывая $nq = \rho$, $nq\vec{u} = \rho\vec{u} = \vec{j}$, где ρ и \vec{j} – плотность зарядов и вектор плотности тока. Перепишем $d\vec{F}_m$ в виде $d\vec{F}_m = \rho\vec{u} \times \vec{B} dV$, или $d\vec{F}_A = \vec{j} \times \vec{B} dV$. Последняя формула Ампера определяет силу, действующую на элемент электрического тока плотностью \vec{j} , заключенного в объеме dV .

Для линейных токов: $\vec{j}dV = \vec{j}S_0 dl = I d\vec{l}$ и формула Ампера

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (62)$$

Из формул (61) и (62) заключаем, что ток, текущий по прямолинейному бесконечному проводнику, создает магнитное поле, силовые линии которого являются окружностями, концентрическими току и лежащими в плоскостях, перпендикулярных току (рис. 46).

Из принципа суперпозиции для напряженности электрического поля следует справедливость принципа суперпозиции для индукции магнитного поля.

Закон Био – Савара. В полной аналогии с электростатикой, взаимодействие элементов тока представляется двумя стадиями: элемент тока $I_1 d\vec{l}_1$ в точке нахождения элемента тока $I_2 d\vec{l}_2$ создает магнитное поле, взаимодействие с которым элемента $I_2 d\vec{l}_2$ приводит к возникновению силы $d\vec{F}_{12}$. Действие магнитного поля с индукцией \vec{B} на $I d\vec{l}$ описывается формулой (62). С ее учетом две стадии взаимодействия описываются так:

1. Закон Био - Савара. Элемент тока $I_1 d\vec{l}_1$ создает в точке нахождения элемента тока магнитное поле с индукцией

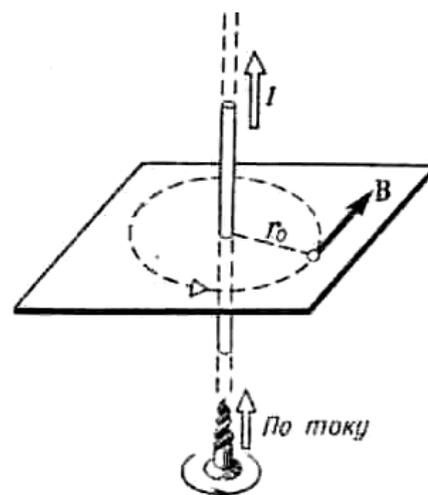


Рис. 46. К определению направления вектора магнитной индукции \vec{B} в точке (правило правого винта)

$$d\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}.$$

2. На элемент тока $I_2 d\vec{l}_2$, находящийся в точке с магнитной индукцией

ей $d\vec{B}_{12}$, действует сила $d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_{12}$ (см. рис. 45).

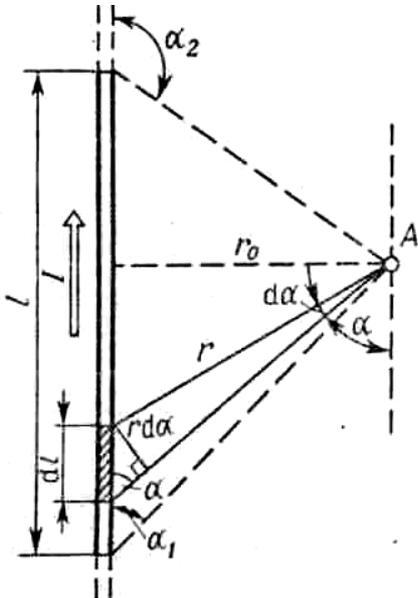


Рис. 47. К примеру

Пример. Элемент Idl в произвольной точке А создает поле с $d\vec{B}$, направленное перпендикулярно плоскости чертежа от нас (рис. 47), а по модулю равное
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}.$$

Индукция магнитного поля в точке А, создаваемого прямолинейным током I , текущим по бесконечному проводнику

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl = \dots = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (63)$$

Закон полного тока. Линии индукции магнитного поля, порождаемые прямолинейным бесконечно-длинным током, являются концентрическими окружностями, центр которых лежит на линии тока. Значение индукции дается формулой (63).

Вычислим циркуляцию вектора \vec{B} по замкнутому вокруг тока I контуру L (рис. 48, а). Так как линии \vec{B} лежат в плоскостях, перпендикулярных линии I , контур L следует выбрать соответственно $\vec{B}d\vec{l} = Bdl \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = Bdl_{\perp}$, где

$$d\alpha = \frac{dl_{\perp}}{r_0} \quad (\text{рис. 48, б}).$$

Принимая во внимание формулу (63), перепишем
$$\vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} dl_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha.$$

В общем случае сила тока I есть сумма всех токов, охватываемых контуром $I = \sum_i I_i$,

$$\text{поэтому: } \oint_L \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_{\Omega} d\alpha = \mu_0 I.$$

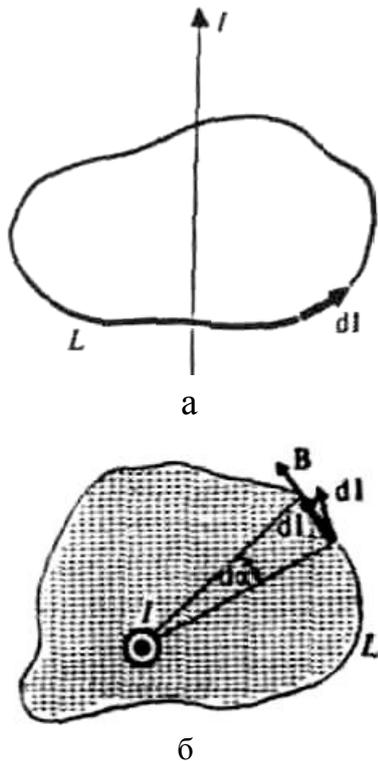


Рис. 48. Вычисление циркуляции вектора \vec{B} по замкнутому контуру L

Магнитное поле в веществе

Магнетики. *Магнетиками* называются вещества, которые при внесении во внешнее поле сами становятся источниками дополнительного магнитного поля. При этом полная индукция магнитного поля равна сумме индукций внешнего магнитного поля и поля, порождаемого магнетиком.

В соответствии с различными механизмами намагничивания магнетики разделяют на диа-, пара-, ферро- и ферримагнетики. Антиферромагнетики также относят к магнетикам, хотя они и не создают магнитного поля.

Диамагнетики. При внесении во внешнее магнитное поле в молекулах и атомах движение электронов изменяется так, что образуется определенным образом ориентированный суммарный круговой ток, который характеризуется магнитным моментом. Можно сказать, что молекулы при внесении в магнитное поле приобретают индуктивный магнитный момент. Благодаря чему они остаются источниками дополнительного поля, т.е. вещество намагничивается.

Парамагнетики. Движение электронов и молекул может быть такое, что молекулы будут обладать магнитным моментом и при отсутствии магнитного поля, т.е. молекулы обладают постоянным магнитным моментом и каждая молекула является источником магнитного поля. Эти поля без внешнего поля ориентированы беспорядочно, и суммарная индукция поля, создаваемого ими, равна нулю. При внесении такого магнетика во внешнее поле постоянные магнитные моменты отдельных молекул переориентируются в направлении индукции поля. Образуется преимущественное направление ориентации магнитных моментов, и магнетик намагничивается.

Ферро - и ферримагнетики. Намагничивание ферро - и ферримагнетиков связано с тем, что электроны обладают магнитным моментом, находящимся в определенном соотношении с их механическим моментом. Намагничивание такого класса магнетиков связано с определенной ориентировкой спинов и поэтому называется спиновым.

Намагниченность. *Намагниченность* определяется отношением магнитного момента элементарного физического объема к объему:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_{mi},$$
 где ΔV – элементарный объем, \vec{p}_{mi} – магнитные моменты

молекул. Суммирование распространяется на все молекулы в объеме ΔV . Намагниченность – объемная плотность магнитного момента магнетика.

Напряженность магнитного поля. Напряженность магнитного поля не является чисто полевой величиной среды и определяется в форме

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}. \quad (64)$$

Поэтому по своему значению вектор \vec{H} играет в теории магнитного поля такую же роль, как вектор \vec{D} в теории электрического поля, и его не следовало бы называть напряженностью. Тем не менее, такое название закрепилось за ним исторически. По этим же причинам было принято считать, что источником намагничивания является не \vec{B} , а \vec{H} . Поэтому зависимость $\vec{J}(\vec{H})$ представлена $\vec{J} = \chi \vec{H}$, где χ – магнитная восприимчивость.

Зависимость \vec{B} от \vec{H} принято записывать $\vec{B} = \mu \vec{H}$ где μ – магнитная проницаемость среды. Величины χ и μ для диа- и парамагнетиков не зависят ни от \vec{B} , ни от \vec{H} . Подставим их в выражение (64) и сократим на \vec{H} . При этом получим $1 = \frac{\mu}{\mu_0} - \chi$ или $\chi = \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu_0} = \mu_r - 1$, где μ_r – относительная магнитная проницаемость.

У диамагнетиков вектор намагниченности \vec{J} направлен против вектора напряженности \vec{H} и $\chi < 0$, тогда $\mu < \mu_0$ и $\mu_r < 1$. Это значит, что порождаемое диамагнетиком поле направлено против первоначального внешнего поля и диамагнетик ослабляет внешнее поле. Величина $|\chi| \sim 10^{-5}$ не зависит от температуры.

Диамагнетизм имеется у всех веществ.

У парамагнетиков \vec{J} совпадает по направлению с \vec{H} . Для них $\chi_n > 0, \mu > \mu_0, \mu_r > 1$. Парамагнетик усиливает магнитное поле, парамагнитная восприимчивость χ_n зависит от температуры: $\chi_n = \frac{C}{T}$ – закон Кюри, C – постоянная Кюри. При комнатной температуре парамагнитная восприимчивость веществ в твердом состоянии имеет порядок $\sim 10^{-3}$, т.е. примерно на два порядка больше диамагнитной восприимчивости. Поэтому у парамагнетиков роль диамагнитной восприимчивости относительно мала и ею часто пренебрегают.

У ферромагнетиков \vec{J} совпадает по направлению с \vec{H} , а $|\vec{J}|$ является очень большой. Для них $\chi \gg 1$, $\mu \gg \mu_0$. Значения χ и μ зависят от поля и от предыстории намагничивания. Благодаря этому у них имеется остаточная намагниченность, т.е. намагниченность образца в целом сохраняется и после того, как внешнее поле стало равным нулю.

Магнитная восприимчивость ферромагнетиков - функция напряженности внешнего поля. График функции $J(H)$ имеет предел, называемый *намагниченностью насыщения*.

Для всякого ферромагнетика существует температура, при переходе через которую он испытывает фазовый переход (второго рода) и превращается в парамагнетик. Температура, при которой происходит этот процесс, называется *температурой Кюри*.

Условия на границе двух магнетиков. Вблизи поверхности раздела двух магнетиков (рис. 49, 50) векторы \vec{B} и \vec{H} должны удовлетворять определенным ограниченным условиям, определяемым соотношениями

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}.$$

Поток вектора \vec{B} через эту цилиндрическую поверхность $\Phi = B_{1n}S + B_{2n}S + \langle B_n \rangle S_{\text{бок}}$.

Так как $\nabla \vec{B} = 0$, то и $\Phi_B = 0$ и при $h \rightarrow 0$ имеем $B_{1n} = -B_{2n}$, а при проецировании \vec{B}_1 и \vec{B}_2 на одну и ту же нормаль, имеем $B_{1n} = B_{2n}$. Так как $\mu_0 \mu_1 H_{1n} = \mu_0 \mu_2 H_{2n}$, то $\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Теперь возьмем на границе магнетиков прямоугольный контур (рис. 50). Вычислим для него циркуляцию \vec{H} . При малых размерах контура циркуляцию можно представить $\oint \vec{H} d\vec{l} = H_{1\tau}a - H_{2\tau}a + \langle H_L \rangle 2b$, где $\langle H_L \rangle$ - среднее значение H_L на перпендикулярных к границе участках контура.

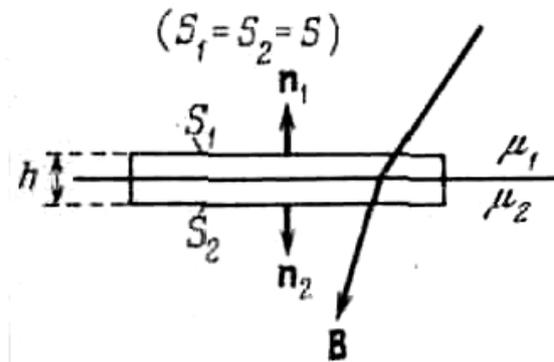


Рис. 49. Цилиндрическая поверхность с границей раздела магнетиков

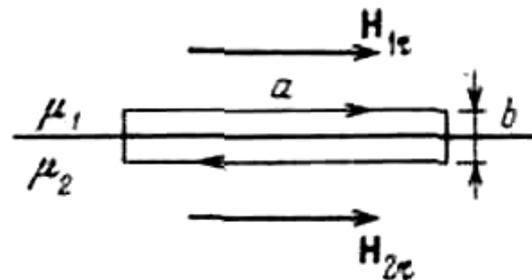


Рис. 50. Прямоугольный контур с границей раздела магнетиков

Если на границе раздела не текут макроскопические токи, то в пределах контура $\text{rot } \vec{H} = 0$. А значит и циркуляция равна нулю.

При $b \rightarrow 0$ приходим к $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, тогда $\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

При переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора \vec{B} и тангенциальная составляющая вектора \vec{H} изменяются непрерывно. Вектор \vec{B} ведет себя аналогично \vec{D} , а вектор \vec{H} — аналогично \vec{E} .

Электромагнитная индукция

Индукция токов. Закон электромагнитной индукции. При движении проводника в магнитном поле его свободные электроны под действием силы Лоренца приводятся в движение относительно проводника, и в проводнике возникает электрический ток. Это явление называется *индукцией токов в движущихся проводниках*. На заряды в движущемся проводнике действует сила Лоренца $\vec{F}_{Lm} = q\vec{u} \times \vec{B}$. Наличие этой силы эквивалентно тому, что в проводнике на заряды действует эффективное электрическое поле $\vec{E}_{\text{эф}} = \vec{F} / q = \vec{u} \times \vec{B}$ с ЭДС индукции между точками 1, 2 проводника (рис. 51)

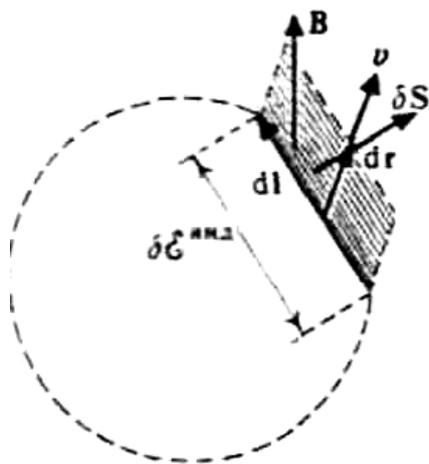


Рис. 51. К описанию индукции токов в движущихся проводниках

$$(\Delta \varepsilon^{\text{инд}})_{21} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{эф}} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}. \quad (65)$$

Пусть элемент длины замкнутого проводника $d\vec{l}$ движется со скоростью $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (см. рис. 51.). На этой длине, в соответствии с формулой (65), создается электродвижущая сила:

$$d\varepsilon^{\text{инд}} = \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{dt} (d\vec{r} \vec{B} \times d\vec{l}).$$

Смешанное произведение преобразуется:

$d\vec{r} \times \vec{B} d\vec{l} = d\vec{l} \times d\vec{r} \vec{B} = -d\vec{r} \times d\vec{l} \vec{B} = -d\vec{S} \vec{B} = -\delta \Phi$, где $\delta \Phi$ — поток магнитной индукции сквозь элемент поверхности $d\vec{S} = d\vec{r} \times d\vec{l}$, образованный элементом длины $d\vec{l}$ при его движении. Подставляя полученное равенство в (65), имеем

$d\varepsilon^{\text{инд}} = -\frac{\delta \Phi}{dt}$. Для нахождения полной электродвижущей силы индукции в

замкнутом контуре просуммируем ЭДС индукции по всем элементам dl этого контура

$$\varepsilon^{\text{инд}} = \int d\varepsilon^{\text{инд}} = -\frac{1}{dt} \int \delta\Phi = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ где } \int \delta\Phi = d\Phi.$$

При движении замкнутого проводника во внешнем магнитном поле в его контуре возникает электродвижущая сила индукции, равная скорости изменения потока индукции внешнего магнитного поля сквозь поверхность, натянутую на замкнутый контур. Утверждение справедливо при произвольных движениях и деформациях замкнутого контура.

Примечание 1. Положительной нормалью к поверхности, в которой лежит контур, является вектор \vec{n} правинтовой системы. 2. Вся работа, совершаемая током, индуцированным в движущемся проводнике, осуществляется за счет работы сил, приводящих проводник в движение.

Явление самоиндукции. Правило Ленца. Запишем закон электромагнитной индукции в ином виде: $\int_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}d\vec{S}$, где L – контур, S – поверхность, натянутая на контур L , $\varepsilon^{\text{инд}} = \int_L \vec{E}d\vec{l}$, $\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}$. Отсюда видно,

что ЭДС индукции возникает при любых изменениях потока Φ , охватываемого контуром тока. В частности, сам линейный замкнутый ток создает поток магнитной индукции сквозь поверхность, которую он ограничивает. Следовательно, при изменении силы тока в контуре возникает ЭДС. Это явление называется *самоиндукцией*.

Поскольку ток создает вокруг себя магнитное поле по правилу правого винта, а ЭДС в контуре связана с изменением потока по правилу левого винта (рис. 52), то становится ясно, что ЭДС самоиндукции направлена так, что препятствует изменению силы тока, которая ее вызывает (правило Ленца). Величина ЭДС не зависит от величины силы тока и определяется скоростью его изменения. Сила тока в контуре связана с охватываемым им собственным потоком магнитной индукции $\Phi = LI$, где L – индуктивность контура. Поэтому

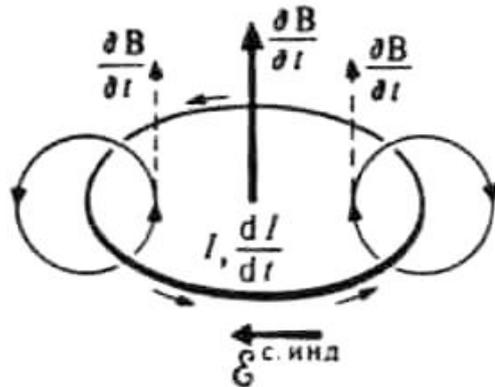


Рис. 52. Возникновение самоиндукции. Правило Ленца

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Например, при выключении тока в цепи при $t = 0$ и $I = I_0$ электродвижущая сила процесса самоиндукции $\varepsilon_{si} = IR$. Тогда $IR = -L \frac{dI}{dt}$ или

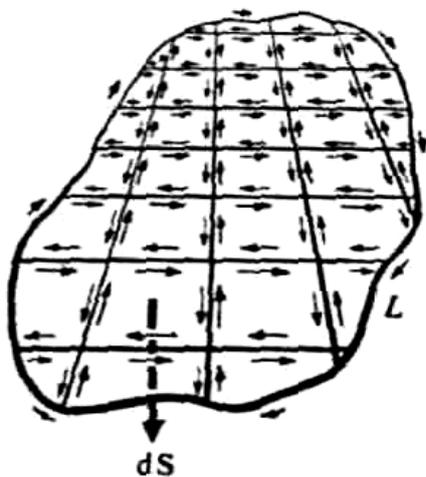
$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \text{ с интегральным решением } I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Работа источника сторонних сил против ЭДС самоиндукции $dA = -\varepsilon_{si} Idt = \left(\frac{d\Phi}{dt} \right) Idt = Id\Phi$. При этом изменение энергии $dW = dA$ магнитного поля тока в контуре связано с изменением потока $dW = Id\Phi$, или в интегральной форме $W = LI^2 / 2$.

Уравнения Максвелла

Ротор векторной функции. Формула Стокса. Рассмотрим линейный интеграл некоторого векторного поля $\vec{F}(x, y, z)$, взятый по замкнутому пути (по кривой L). В общем случае кривая L может быть не плоской и ее можно рассматривать как границу некоторой стягивающей ее поверхности S . Этот линейный интеграл, взятый по замкнутому пути, является циркуляцией вектора F и может быть записан в форме $\Gamma = \int_L \vec{F} d\vec{l}$.

Пересечем поверхность, образовав две смежные петли L_1 и L_2 , в каждую из которых входит путь по пересекающей перегородке. С учетом выбранного направления обхода сумма двух циркуляций Γ_1 и Γ_2 будет



равна первоначальной циркуляции вдоль петли L . Это объясняется тем, что путь по перегородке проходится при интегрировании в противоположных направлениях, поэтому вклад в интеграл дают лишь те части петли, которые в сумме составляют первоначальную петлю L . Дальнейшее разделение на большее количество петель (рис. 53) L_1, L_2, \dots, L_N , не меняет величины суммы интегралов:

Рис. 53. К доказательству формулы Стокса $\int_L \vec{F} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l}$, или $\Gamma = \sum_i \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l}$.

Умножим и разделим правую часть выражения на S_i :

$$\Gamma = \int_L \vec{F} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N S_i \left[\frac{\Gamma_i}{S_i} \right]. \quad (66)$$

Продолжая деление, чтобы в пределе получить локальную количественную характеристику поля \vec{F} , и увеличивая число петель, получаем петли с меньшей циркуляцией, но и с меньшей площадью. Естественно рассмотреть отношение циркуляции на петле к площади петли. Петля L произвольна и не связана с конкретной стягиваемой поверхностью, поэтому и малые петли, полученные при ее разделении, могут иметь любую ориентацию. Площадь S_i элемента поверхности, стягиваемой малой петлей L_i , оказывается вектором, так как несет информацию о своей ориентации в пространстве. Отношение скалярной функции Γ к векторной \vec{S}_i не имеет смысла. Поэтому ничего не остается, как заранее выбрать и фиксировать ориентацию вектора \vec{n} к S_i .

Выберем определенную ориентацию для элемента поверхности в одной из последних стадий разбиения. Единичный вектор \vec{n} обозначает нормаль к этому элементу; стягивая петлю вокруг точки выхода \vec{n} , нельзя разрушить его постоянство. Это можно сделать, задавая с самого начала точку стягивания как точку выхода вектора \vec{n} . Тогда при выбранном направлении обхода \vec{n} будет определен заданным рельефом в малой окрестности выбранной точки стягивания и направлением обхода l_i по правилу правого винта. Предел отношения циркуляции к площади участка

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} \quad \text{или} \quad \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l}$$

представляет собой скалярную величину, связанную в векторном поле \vec{F} с точкой выхода и направлением \vec{n} . Можно сказать, что предел, полученный для определенного направления \vec{n} , является величиной проекции $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{F}$ на это направление.

Таким образом, можно выбрать три независимых направления, например $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, и получить три различных скалярных величины. А уже они являются компонентами вектора, называемым ротором \vec{F} .

Запишем полученный результат в виде уравнения

$$(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l},$$

или $(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l}$ и функция слева является первообразной.

$$\text{Получаем } \int_{S_i} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \int_{l_i} \vec{F} d\vec{l}. \quad (67)$$

Выражение (67) для i -го контура с учетом (66) для всего контура длиной L , стягивающего поверхность S приводит к соотношению, являющемуся математической теоремой Стокса: $\int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{F} d\vec{S}$, которая по структуре напоминает формулу Гаусса (теорему дивергенции). Теорема Стокса связывает линейный интеграл от вектора с поверхностным интегралом от ротора этого вектора.

В общем случае вектор $\text{rot } \vec{F}$ меняется от точки к точке и является векторной функцией координат. Его направление в любой точке нормально к той плоскости, содержащей эту точку, для которой величина циркуляции максимальна. Если стягивать поверхность около иной точки, то отношение циркуляции к площади может иметь иное значение, определяемое характером векторной функции \vec{F} . Тогда величина ротора является предельным значением циркуляции, приходящейся в этой плоскости на единицу площади, вокруг выбранной точки.

Наглядное представление о роторе вектора скорости можно получить, представив небольшую легкую крыльчатку, помещенную в малую окрестность заданной точки текущей жидкости. В тех местах, где ротор отличен от нуля, крыльчатка будет вращаться, причем с тем большей скоростью, чем больше по величине проекция ротора на ось крыльчатки.

Первое уравнение Максвелла. Имея форму записи закона электромагнитной индукции $\int_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}$, перепишем левую часть с учетом формулы Стокса для вектора \vec{E} в виде: $\int_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S}$.

$$\text{Объединяя обе формы записи, получаем: } \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}.$$

$$\text{Окончательно: } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (68)$$

Закон сохранения заряда. Ток I , протекающий через поверхность S , равен поверхностному интегралу $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$. Поскольку $\int_S \vec{j} d\vec{S}$ есть мгновен-

ная скорость, с которой заряды покидают замкнутый объем, а $\int_V \rho dV$ – полный заряд внутри объема в любой момент времени, то

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (69)$$

Предположим, что ток нестационарный и \vec{j} является функцией как x, y, z , так и t . И пусть рассматриваемый объем стягивается вокруг произвольной точки (x, y, z) ; тогда уравнение (69) (с учетом формулы Гаусса) переходит в зависящее от времени распределение зарядов:

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV; \quad \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \quad \operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (70)$$

Примечание. Объемный интеграл следует брать в определенный момент времени: его производная по времени определяется разностью объемных интегралов при t и $(t + \Delta t)$. А единственное различие между ними связано с изменением ρ , так как граница объема остается на месте. Производная по времени от плотности заряда ρ написана в виде частной производной, поскольку обычно ρ зависит как от времени, так и от пространственных координат.

Уравнения (69) и (70) выражают закон сохранения заряда: заряд не вытекает из области V , если в ней не происходит уменьшение заряда.

Для стационарных токов плотность должна удовлетворять уравнению непрерывности или условию сохранения заряда: $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Связь между магнитным полем и движущимися зарядами. Из закона полного тока имеем для стационарного тока:

$$\int_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad \text{или} \quad \int_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (71)$$

Сравним это выражение по формуле записи с теоремой Стокса для произвольного векторного поля \vec{F} : $\int_L \vec{F} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{S}$. Очевидно, что уравнение (71) выполнится при условии $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. (72)

Однако уравнение (72) недостаточно для определения $\vec{B}(x, y, z)$ при заданном векторе \vec{j} , так как различные векторные поля могут иметь одинаковый ротор. Поэтому дополним полученную связь условием, не распространяемым на поля, создаваемые любым распределением токов:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (73)$$

Уравнения (72) и (73) однозначно определяют \vec{B} , если дано \vec{j} .

Для случая нестационарных токов $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, откуда следует $\operatorname{div} \vec{j} \neq 0$.

Подставляя в (72) получим противоречие:

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) \equiv 0, \quad (74)$$

так как дивергенция ротора любой векторной функции тождественно равна нулю. Значит уравнение (72) не может быть временным для системы, в которой плотность заряда изменяется во времени. Напишем вместо уравнения (72): $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + (?) = 0$, но тогда $\operatorname{div} \mu_0 \vec{j} = -\operatorname{div}(?)$, что возможно, исходя из уравнения непрерывности (70). Очевидно, что в общем случае имеются в виду сторонние – свободные заряды. Имея уравнение $\nabla(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$, или $\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f$, и продифференцировав его по времени, получаем $\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{D}) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$.

Переменим порядок дифференцирования по времени и по пространственным координатам: $\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$. Тогда подстановкой получаем

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}, \quad \text{или} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}. \quad (75)$$

Система уравнений Максвелла. Для полей в вакууме при наличии электрического заряда и электрического тока, вызванных движением зарядов уравнения Максвелла разбиты на две пары. В первую пару входят только основные характеристики поля \vec{E} и \vec{B} :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{– закон электромагнитной индукции;}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{– отсутствие магнитных зарядов (монополей).}$$

Во вторую пару входят вспомогательные характеристики \vec{D} и \vec{H} :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{– связь между токами проводимости и смещения и по-$$

рождаемым ими магнитным полем;

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f \quad \text{– источником } \vec{D} \text{ являются сторонние заряды.}$$

Уравнения Максвелла в интегральной форме и в соответствующем порядке получаются путем интегрирования с использованием формул Стокса и Гаусса:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} &= 0; \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{S}; \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \int_V \rho_f dV. \end{aligned}$$

Ток смещения. Термин «ток смещения» является условным: по существу – это изменяющееся во времени электрическое поле. Основанием для того чтобы назвать «током» величину $j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t}$, служит лишь то, что размерность этой величины совпадает с размерностью плотности тока. Из всех физических свойств, присущих действительному току, ток смещения обладает лишь одним – способностью создавать магнитное поле.

Из уравнения (75) Максвелла $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}$. Правую часть уравнения – векторную сумму плотности токов проводимости и смещения – называют вектором плотности полного тока.

Введение тока смещения «уравняло в правах» электрическое и магнитное поля. Из явления электромагнитной индукции следует, что изменяющееся магнитное поле порождает электрическое. Из уравнения (75) следует, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное.

Ток смещения имеется везде, где есть изменяющееся со временем электрическое поле; в частности, он существует и внутри проводников, по которым течет переменный ток. Однако внутри проводов ток смещения обычно пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости.

Часть 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Электромагнитные колебания

Электромагнитные колебания в RLC -контуре. Физическая система определена электромагнитным полем, локализованным телами (проводниками, катушками индуктивности, конденсаторами).

Основная задача в теории электромагнитных колебаний заключается в нахождении закона изменения во времени какой-либо электрической или магнитной величины. Рассмотрим контур из соединенных последовательно проводников сопротивлением R , катушки с индуктивностью L , конденсатора с электроемкостью C .

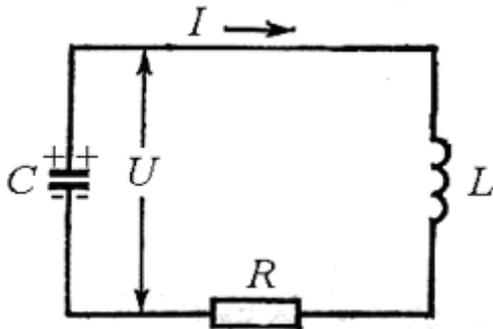


Рис. 54. Контур с последовательным соединением R , L и C . Положительное направление тока показано стрелкой

Примем за положительное напряжение U такое напряжение, когда верхняя пластинка конденсатора заряжена положительно (рис. 54). При разрядке конденсатора в цепи RLC -контра возникает ток, определяемый скоростью убыли заряда на конденсаторе $I = -\frac{dQ}{dt}$.

Противодействуют токовому процессу разрядки конденсатора через контур два независимых процесса: омическое сопротивление току и процесс самоиндукции. Оба процесса ограничены напряжением на конденсаторе $U = L \frac{dI}{dt} + RI$.

Связь между зарядом и напряжением на конденсаторе определена его электроемкостью $C = \frac{Q}{U}$.

Скорость убыли заряда непостоянна во времени, поэтому все три скалярные величины $Q(t)$, $I(t)$ и $U(t)$ являются переменными. Объединим первое уравнение с третьим и подставим полученное $I = -C \frac{dU}{dt}$ во второе уравнение

$$U = -LC \frac{d^2U}{dt^2} - RC \frac{dU}{dt}, \text{ или } \frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} U = 0. \quad (76)$$

Аналогичный вид однородного дифференциального уравнения второго порядка с теми же постоянными коэффициентами получается для выбранных переменных I и Q :

$$\begin{aligned} \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q &= 0; \\ \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I &= 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Эти уравнения получаются на основе трех исходных соотношений. При выводе второго уравнения (77) добавляется операция дифференцирования во времени t .

Однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка по любой переменной описывает динамику процесса в контуре.

Переходим к анализу вариантов решения уравнений (76), (77). Эти уравнения формально одинаковы и имеют одно и то же характеристическое уравнение $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$. Чтобы не путаться в обозначениях переменных (Q, I, U) во время анализа, введем их общее обозначение y .

Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (78)$$

Рассмотрим три возможных случая для корней p_1 и p_2 .

1. Корни p_1 и p_2 – действительные и различные числа. Из (78) видно, что они могут быть только отрицательными. Для реализации этого случая необходимым и достаточным условием является выполнение

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0, \text{ или } R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (79)$$

Общее решение дифференциального уравнения $y = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям. Так как $p_1 < 0$ и $p_2 < 0$ и $p_1 \neq p_2$, то оба частных решения графически определены обратными экспонентами разной крутизны. Физически этот случай описывает релаксационный процесс уменьшения y во времени.

Если $LC \gg 1$, или $\frac{1}{LC} \rightarrow 0$, то характеристическое уравнение имеет один отрицательный действительный корень, а второй корень равен нулю. Общее решение $y = C_1 e^{p_1 t}$.

2. Корни характеристического уравнения действительные и $p_1 = p_2$.

Если условие (79) выполняется в форме равенства $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, то оба корня характеристического уравнения (78) одинаковые, отрицательные и равны $-\frac{R}{2L}$.

Общее решение уравнений (76), (77) имеет вид $y = (C_1 + C_2 t)e^{p_1 t}$.

Первое частное решение описывает релаксационный процесс уменьшения y во времени, а второе – процесс импульсного типа.

3. Корни характеристического уравнения – комплексные сопряженные числа $p_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Для реализации этого случая необходимым и достаточным условием является выполнение неравенства

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0, \text{ или } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (80)$$

Из уравнения (78) видно, что корни могут быть только сопряженными.

Общее решение уравнений (76), (77) можно записать в виде

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t},$$

где C_1 и C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) = e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t;$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) = e^{\alpha t} \cos \beta t - i e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Чтобы получить решение в действительной форме, воспользуемся правилом: *если дифференциальное уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексное решение $y = u(t) + i v(t)$, то каждая из функций $u(t), v(t)$ является решением этого уравнения.* Правило проверяется подстановкой комплексного решения в дифференциальное уравнение.

В силу этого правила функции $e^{\alpha t} \cos \beta t$, $e^{\alpha t} \sin \beta t$ являются решениями дифференциального уравнения. Зная частные решения, строим общее решение $y = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$, где C_1 и C_2 – уже действительные постоянные.

Возьмем функцию $U = A e^{-\alpha t} \cos \omega t$ в качестве решения уравнения (76). Здесь A , α , ω – постоянные величины.

Возьмем производные от этой функции:

$$\frac{dU}{dt} = A e^{-\alpha t} (-\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t),$$

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = -A e^{-\alpha t} [(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha \omega \sin \omega t].$$

Подставим в уравнение (76) и сократив на множитель $A e^{-\alpha t}$, получим $(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha \omega \sin \omega t - \frac{R}{L} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{LC} \cos \omega t = 0$.

Это выражение будет справедливо для всех t тогда и только тогда, когда коэффициенты при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ равны 0, т.е. должны выполняться условия $2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0$, $\alpha^2 - \omega^2 - \frac{\alpha R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$.

Первое условие дает $\alpha = \frac{R}{2L}$, тогда из второго следует

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{\alpha R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}.$$

Так как ω представляет собой действительное число, то ω^2 может иметь только положительное значение, поэтому функция $U = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$ будет решением уравнения (76) только при $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, или $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Это совпадает с условием (80). График решения показан на рис. 55.

С таким же успехом и при тех же полученных α и ω можно взять в качестве решения уравнения (76) функцию $Be^{-\alpha t} \sin \omega t$.

Пусть напряжение U описывается затухающей косинусоидой. Тогда ток будет зависеть от времени:

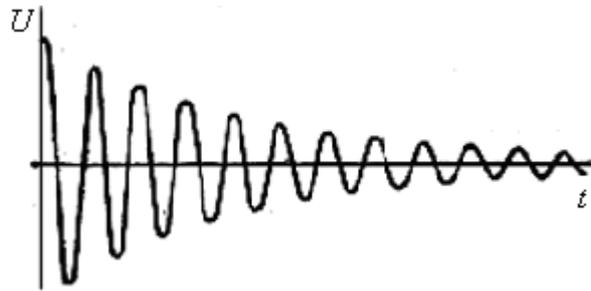


Рис. 55. График функции $U = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$

$$I = -C \frac{dU}{dt} = AC\omega \left[\sin \omega t + \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \cos \omega t \right] e^{-\alpha t}.$$

Здесь отношение $\frac{\alpha}{\omega}$ является мерой затухания. Если значение $\frac{\alpha}{\omega}$ велико, то член с косинусом тоже будет мал и его наличие приводит к сдвигу фазы колебания на угол $\arctg\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)$. Поэтому колебания тока отстают по фазе от колебания напряжения почти точно на четверть периода. Эти колебания сводятся к переходу энергии от конденсатора к индуктивности, т.е. от электрического поля к магнитному и обратно, и сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

Относительное затухание осциллятора выражается величиной, обозначаемой Q и характеризующей «добротность» контура: $Q = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\omega L}{R}$.

Добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успевают совершиться прежде, чем амплитуда уменьшится в e раз.

При слабом затухании добротность колебательной системы с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в системе в данный момент, к убыли этой энергии за один период колебаний.

Идеальный колебательный контур (контур Томсона, 1853 г.). Если условие (80) сделать идеально выполнимым и пренебречь величиной сопротивления ($R = 0$), то полученный LC -контур будет осциллятором без затухания с собственной частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Ясно, что вторые слагаемые в дифференциальных уравнениях (76), (77) становятся равными нулю и уравнения переписываются в виде

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{LC}U = 0, \quad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0, \quad \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0. \quad (81)$$

Решением уравнения (81) является уравнение гармонических колебаний $Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, α_0 — начальная фаза.

Переменный ток. Наличие в цепи конденсатора исключает возможность протекания по ней постоянного тока. В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсатора, на которых располагаются соответствующие заряды, полностью компенсирует действие сторонней ЭДС.

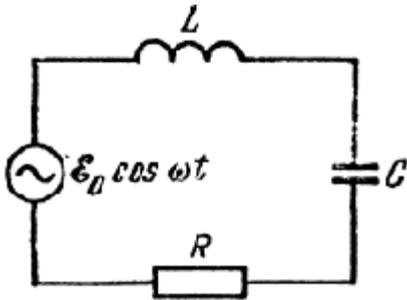


Рис. 56. RLC -контур, возбуждаемый синусоидальной ЭДС

Однако переменный ток в цепи при наличии конденсатора протекать может, поскольку в этом случае заряд на обкладках конденсатора переменен, а разность потенциалов не компенсирует действия сторонней ЭДС. При введении в RLC -контур генератора переменного напряжения U (рис. 56) выполняется равенство

$$IR = U - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}.$$

Дифференцируем обе части по времени t и получаем

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d}{dt}U. \quad (82)$$

Принимая во внимание, что $I = \frac{dQ}{dt}$, запишем уравнение (82) в виде

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = U; \quad (83)$$

$$\ddot{Q} + \left(\frac{R}{L}\right) \dot{Q} + \left(\frac{1}{LC}\right) Q = \frac{U}{L}.$$

Примечание. Запишем уравнение для вынужденных механических колебаний:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}, \text{ где } x \text{ – отклонение точки от положения; } m \text{ – масса, } F \text{ – внешняя сила;}$$

$\alpha = \frac{b}{2m}$ – декремент затухания; b – коэффициент трения. Сравним с этим уравнением

уравнение (83). Получается, что роль отклонения в электромагнитном контуре играет заряд на пластинах конденсатора, роль массы – индуктивность L , роль силы – электродвижущая сила U ; роль коэффициента трения – омическое сопротивление R . Сила тока

$I = \frac{dQ}{dt}$ играет роль скорости.

Продолжая и имея в виду, что $U_c = \frac{Q}{C}$, перепишем (83) в форме

$$\ddot{U}_c + 2\alpha\dot{U}_c + \omega_0^2 U_c = \omega_0^2 U, \text{ где } \alpha = \frac{R}{2L}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ – частота собственных колеба-}$$

ний. Колебания незатухающие. При наличии трения колебания становятся затухающими и время затухания равно $T = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R}$ Частота затухающих

колебаний: $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Логарифмический декремент затухания: $\Theta = \alpha T$,

где $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – период собственных колебаний.

Если сторонняя ЭДС изменится по закону $U = U_0 e^{i\omega t}$, то сила тока в уравнении (82) должна меняться со временем по закону $I = I_0 e^{i\omega t}$. Тогда

$$\frac{dU}{dt} = i\omega U, \text{ и уравнение (82) принимает вид } \left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right) I = i\omega U. \text{ Разде-}$$

лим обе части на $i\omega$, тогда уравнение примет вид закона Ома $IZ = U$, где

$$Z = R + i \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] \text{ называется импедансом. Он играет роль сопротивления,}$$

но, будучи комплексной величиной, позволяет учесть не только соотношение между амплитудами силы тока и напряжения, но и соотношение между их фазами.

Связь между их амплитудами определяется через модули величин

$$|I||Z| = |U|, \text{ где } |Z| = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}.$$

Зависимость амплитудного значения силы тока I_0 и разность фаз γ между током и внешним напряжением от частоты

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Сила тока I достигает максимума при частоте $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, которая называется *резонансной частотой* контура. При этом $I_0 = \frac{U_0}{R}$, а разность фаз $\gamma = 0$, т.е. в цепи как бы нет емкости и индуктивности. Это происходит потому, что при этой частоте ($\omega = \omega_0$) напряжения на емкости и индуктивности взаимокompенсируются, контур ведет себя как чисто активное сопротивление, и резонанс называют *резонансом напряжений* (рис. 57).

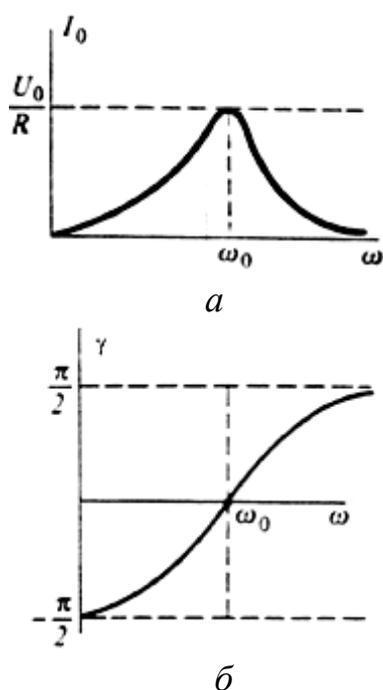


Рис. 57. Зависимость силы тока (а) и сдвига фаз (б) при резонансе напряжений

В достаточно добротном контуре амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе может быть во много раз больше амплитуды приложенного к контуру напряжения.

Если силы токов в емкости I_C и индуктивности I_L компенсируют друг друга, то резонанс называется *резонансом токов* и характеризуется очень большими значениями токов в контуре по сравнению с подводимыми токами.

Нестационарный случай (Пример Бореля). Вариации параметра могут не быть гармонической функцией из-за наличия даже сколь угодно малой величины возмущений λ . Напишем уравнение $m\ddot{x}^2 + kx^2 = \text{const} + \lambda t$. Его решениями являются синусоидальные функции. Изменим уравнение, взяв производную: $(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = \lambda$.

Тогда при $\lambda = 0$ – получим гармонические колебания, но если $\lambda > 0$ исключается всякая возможность равенства нулю

$\dot{x} = 0$, а значит и самого последовательного чередования значений: максимум, ноль, минимум и т.д., то есть самого представления гармонического колебания.

Электромагнитные волны

Изменяющееся магнитное поле порождает изменяющееся электрическое поле, которое порождает изменяющееся магнитное поле, которое, в свою очередь, порождает изменяющееся электрическое поле, и т.д. В результате образуется сцепленные между собой электрические и магнитные поля, составляющие электромагнитную волну. Способ существования электромагнитной волны делает невозможным ее неподвижность и постоянство напряженностей ее полей во времени, поэтому постоянные токи и движущиеся равномерно и прямолинейно заряды, не излучают.

Волновое уравнение. Основной характеристикой ее является энергия и плотность потока энергии. Величина $W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) dV$ характеризует электромагнитную энергию, заключенную в объеме V . Величина вектора Пойнтинга (1884 г.) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ является плотностью потока энергии сквозь поверхность, ограниченную (мысленно или реально) объемом V .

Уравнение вида $\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ называют *волновым уравнением* или однородным уравнением Даламбера, где Φ – формальное обозначение функции $\Phi(x, y, z, t)$. Если справа стоит ноль, то уравнение однородное. Возьмем одномерный случай $\Phi = \Phi(x)$, тогда: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$. Непосредственной проверкой (подстановкой) можно убедиться, что решениями этого уравнения является любая функция Φ от аргумента $t - \frac{x}{v}$ или $t + \frac{x}{v}$.
 Функции $\Phi\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и $\Phi\left(t + \frac{x}{v}\right)$ представляют волны, движущиеся в направлении положительных и отрицательных значений оси X соответственно, со скоростью v .

Общее выражение для бегущей плоской гармонической волны, распространяющейся в положительном направлении оси, имеет вид:

$\Phi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + B \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$. Для вакуума $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$, поэтому

$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ постулируется постоянной, исходя из диэлектрических и

магнитных свойств вакуума. Электромагнитную волну называют *плоской*, если вектор волны имеет одну и ту же величину во всех точках любой плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения.

Рассмотрим $\Phi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$, учитывая, что для плоской волны $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$, где $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число. Чтобы освободиться от системы координат, перепишем решение с помощью векторных обозначений. Пусть волновой вектор \vec{k} направлен параллельно оси X в сторону положительных значений. Тогда $\Phi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ при $\vec{k}\vec{r} = kx$. Направление, характеризуемое волновым вектором, называется *лучем*. Векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны \vec{k} , т.е. направлению распространения, а это означает, что электромагнитная волна является поперечной.

Шкала электромагнитных волн (табл. 4). Энергия кванта: $\varepsilon = \hbar\omega = h\nu$, где h – постоянная Планка, \hbar – новая постоянная Планка. Откуда следует, что случай $\nu = \infty$ невозможен, т.к. кванты бы обладали $\varepsilon = \infty$. В настоящее время нет свидетельств ограничения энергии фотона снизу.

Таблица 4. Диапазоны частоты электромагнитных волн

Диапазон волн	Границы диапазонов	
	по длинам (λ) волн (нм)	по энергии (ε) квантов (МэВ)
Гамма излучение	0,0012	1,0
Рентгеновское	0,0012 – 12	1,0 – 100 эВ
Ультрафиолетовое	12 – 380	3,2 – 100 эВ
Видимый свет	380 – 760	1,6 – 3,2 эВ
Инфракрасное	760 – 1000000	$1,2 \cdot 10^{-3}$ – 1,6 эВ
Радиоволны	1 мм	$1,2 \cdot 10^{-3}$ эВ

Электромагнитная природа света. Значение электромагнитной постоянной в уравнениях Максвелла $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3,1 \cdot 10^8$ м/с совпало со скоро-

стью света в вакууме, равной по измерениям Физо (1849 г.) $c = 3,15 \cdot 10^8$ м/с; поперечность электромагнитных волн следует из уравнений Максвелла, а из экспериментов поляризации света (Юнг, 1817 г.) следует поперечность световых волн.

Часть 5. ОПТИКА

Геометрическая оптика

Распространение света рассматривается как движение световой энергии по *лучам*. Плоскость, перпендикулярная лучам света называется *волновым фронтом*.

Приближение геометрической оптики, это переход от уравнений, описывающих волны к уравнениям, описывающим лучи.

В геометрической оптике не учитываются эффекты дифракции.

В геометрической оптике оптические длины всех путей, соединяющих точку предмета с точкой изображения, одинаковы. Это утверждение называется *принципом таутохронизма*.

Законы отражения и преломления. 1. Частота электромагнитной волны при отражении и преломлении не изменяется: $\omega_{\text{пад}} = \omega_{\text{от}} = \omega_{\text{пр}}$.

2. Волновые векторы (лучи) падающей, отраженной и преломленной волны лежат в одной плоскости. Если: $\vec{k}_{\text{пад}} \cdot \vec{r} = 0$, то $\vec{k}_{\text{от}} \cdot \vec{r} = \vec{k}_{\text{пр}} \cdot \vec{r} = 0$, где \vec{r} – вектор с началом отсчета в плоскости раздела сред, перпендикулярной вектору \vec{n} (рис. 58).

3. Угол падения равен углу отражения: $\theta_{\text{пад}} = \theta_{\text{от}}$.

Принцип Ферма (П. Ферма, 1657 г.).

Лучи от точки предмета идут по разным путям, но все они затрачивают одно и то же время на прохождение своего пути до встречи в точке изображения. Принцип Ферма как «принцип наименьшего времени» может быть высказан в форме утверждения, что лучом, соединяющим две точки, является тот луч, который делает стационарным время, затрачиваемое светом на его прохождение.

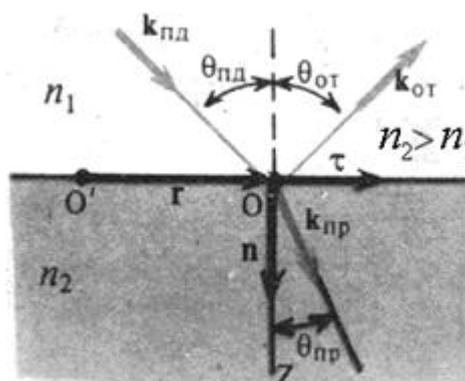


Рис. 58. Преломление света при $n_2 > n_1$

Пусть точки P_1 и P_2 находятся в однородных средах с показателями преломления n_1 и n_2 и разделенных плоской границей (рис. 59.).

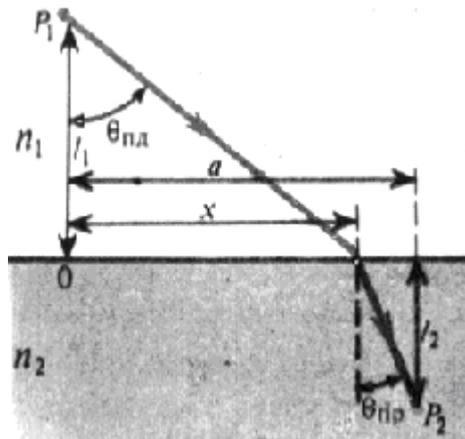


Рис. 59. К выводу закона преломления с помощью принципа Ферма

Время распространения света из P_1 в P_2 :

$$t = \left(\frac{n_1}{c}\right)\sqrt{l_1^2 + x^2} + \left(\frac{n_2}{c}\right)\sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}, \quad \text{где}$$

$v = c/n$ зависит от переменной x .

Условие стационарности $\frac{dt}{dx} = 0$ принимает вид

$$\frac{n_1 x}{c\sqrt{l_1^2 + x^2}} - \frac{n_2(a-x)}{c\sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}} = 0.$$

Учитывая, что

$$\frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} = \sin \theta_{n1}; \quad \frac{a-x}{\sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}} = \sin \theta_{n2},$$

лучаем $n_1 \sin \theta_{n1} = n_2 \sin \theta_{n2}$, что совпадает с

законом Снелла.

Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно показателю преломления среды с преломленным лучом относительно среды с падающим лучом. Показатель преломления n_{21} второй среды относительно первой называется относительным показателем преломления. Если одна из сред вакуум, то $n_1 = \frac{c}{v_1}$ и $n_2 = \frac{c}{v_2}$ – абсолютные показатели преломления сред 1 и 2, относительно вакуума.

Полное внутреннее отражение ($n_2 < n_1$). Видя, что при некотором значении, называемом предельным углом, угол преломления становится равен $\frac{\pi}{2}$, т.е. преломленный луч движется вдоль поверхности раздела и нет никакого преломленного луча во второй среде (рис. 60, а, б).

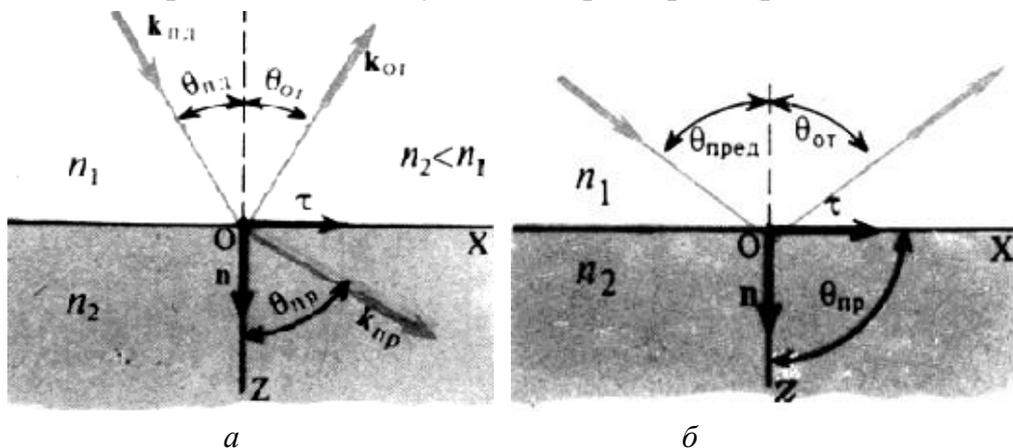


Рис. 60. Преломление света при $n_2 < n_1$ (а). При предельном угле падения (б) угол преломления становится равным $\pi/2$

Поляризация света

Закон Брюстера. При отражении света от границы со среды с большим показателем преломления ($n_2 > n_1$) фаза отраженной волны изменится на π , т.е. вектор напряженности электрического поля (магнитного поля) изменяет направление на обратное. При отражении света от границы со средой с меньшим показателем преломления не происходит изменения фазы вектора \vec{E} . Преломленная волна не претерпевает изменения фазы.

Плоскость, в которой лежит вектор падающей волны и нормаль к поверхности раздела в точке падения луча, называется *плоскостью падения*. Обозначим индексом \parallel компоненты векторов, лежащих в плоскости падения луча, а индексом \perp — в перпендикулярной

плоскости (рис. 61, 62). На основании принципа суперпозиции векторы падающей, отраженной и преломленной волн имеют вид:

$$\vec{E}_{n\partial} = \vec{E}_{n\partial\parallel} + \vec{E}_{n\partial\perp};$$

$$\vec{E}_{om} = \vec{E}_{om\parallel} + \vec{E}_{om\perp}; \quad \vec{E}_{np} = \vec{E}_{np\parallel} + \vec{E}_{np\perp}$$

Аналогично представляются и компоненты векторов индукции \vec{B} .

Кривые, приведенные на графиках (рис. 63), получаются графическим решением формул Френеля. У волны, электрический вектор которой лежит в плоскости падения (рис. 64) при угле падения θ_B , отраженная волна полно-

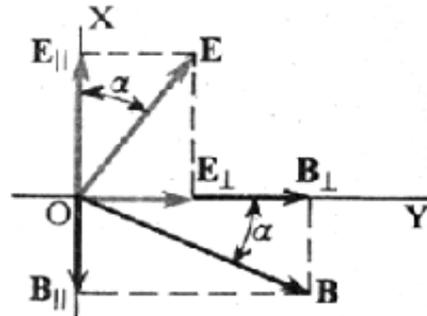


Рис. 61. Разложение плоской волны на две поляризованные волны

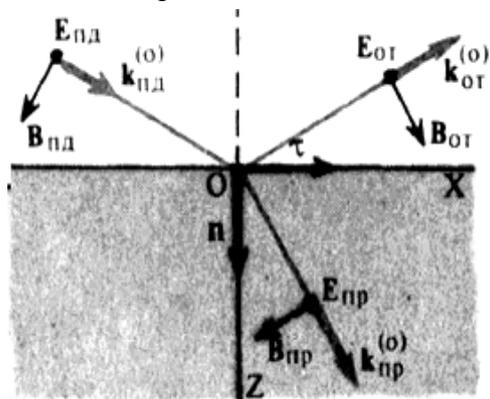


Рис. 62. Напряженность электрического поля падающей волны перпендикулярна плоскости падения

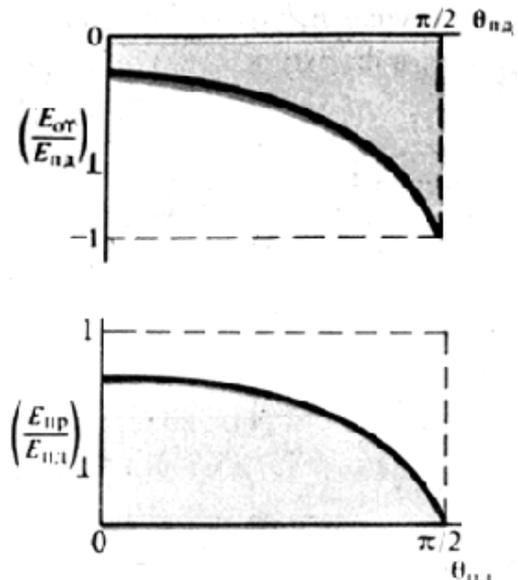


Рис. 63. Зависимости $(E_{от}/E_{пад})_{\perp}$ и $(E_{пр}/E_{пад})_{\perp}$ от угла падения ($n_1 < n_2$)

стью отсутствует (рис. 65). Это явление называется явлением Брюстера (1815 г.).

Угол θ_B находится из условия $\left(\frac{E_{от}}{E_{пд}}\right)_{//} = 0$ или из условия $\theta_B + \theta_{пр} = \frac{\pi}{2}$. На основании принципа Ферма $n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_{пр}$, при $n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_B\right) = n_2 \cos \theta_B$ получаем $tg \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$. Эта формула называется законом Брюстера, а θ_B – угол Брюстера.

На рис. 65 видно, что при $\theta_{пд} < \theta_B$ отношение $\left(\frac{E_{от}}{E_{пд}}\right)_{//}$ – положительно, а при $\theta_{пд} > \theta_B$ отрицательно. Это и означает, что при переходе через угол Брюстера фаза отраженной волны скачком изменяется на π .

Поскольку в падающей под углом Брюстера волне лежащая в плоскости падения компонент вектора $\vec{E}_{пд}$ не отражается, в отраженной волне имеется компонент напряженности электрического поля, перпендикулярная плоскости падения, т.е. отраженный свет полностью поляризован.

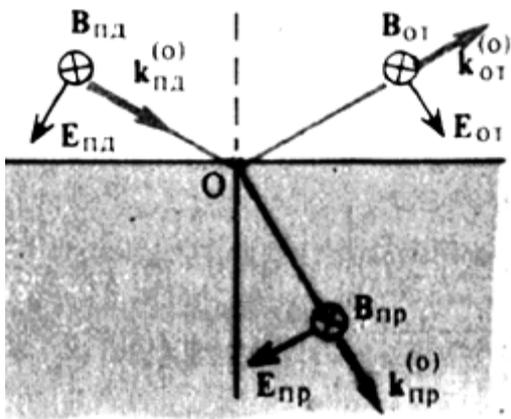


Рис. 64. Напряженность электрического поля падающей волны лежит в плоскости падения. $\theta_{пд} > \theta_B$

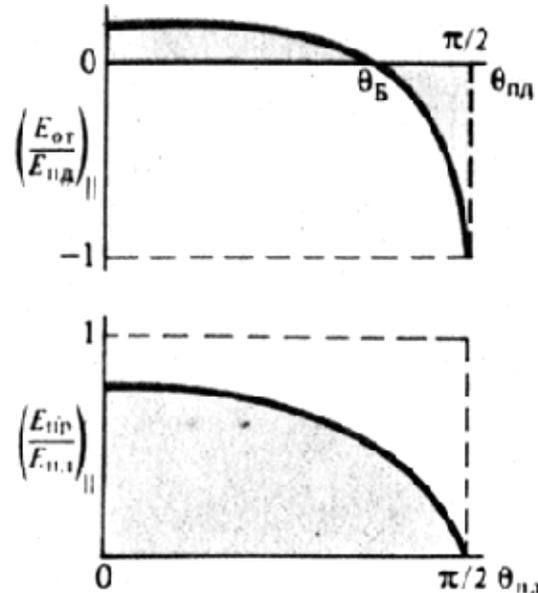


Рис. 65. Зависимости $(E_{от}/E_{пд})_{//}$ и $(E_{пр}/E_{пд})_{//}$ от угла падения при $n_1 < n_2$

Механизм поляризации света. Явление Брюстера обусловлено поперечностью электромагнитных волн. Входящая в диэлектрическую среду световая волна возбуждает колебание диполей, которые излучают вторич-

ную волну. Вторичная волна распространяется со средней скоростью, характерной для среды, а первичная волна после входа в среду продолжает распространяться с начальной скоростью. Первичная и вторичная волна складывается между собой. В момент излучения вторичная волна имеет ту же фазу колебаний, что и первичная, но вследствие неодинаковых фазовых скоростей распространения в среде между волнами образуется разность фаз, в результате чего вторичная волна гасит первичную. В итоге (на длине замещения) первичная волна замещается вторичной, которая распространяется со скоростью, характерной для среды. Линия колебаний электронов коллинеарна вектору \vec{E} волны. При угле Брюстера, когда угол между преломленной и отраженной волнами должен был бы составить 90° электроны среды, порождающие преломленную волну, колеблются вдоль линии, параллельной направлению, в котором должна распространяться отраженная волна. Вдоль линии своих колебаний (ось диполя) электромагнитная волна не излучается. Поэтому в этом случае отраженная волна отсутствует.

Примечание. Для продольных волн все направления, перпендикулярные линии распространения, эквивалентны. Для поперечных волн они не эквивалентны. Электромагнитные волны являются поперечными, и их свойства зависят от ориентировки векторов \vec{E} и \vec{B} , характеризующиеся понятием поляризации.

Монохроматические волны являются поляризованными. У хаотического света, представляющего собой суперпозицию волн со случайными фазами и амплитудами напряженности поля волн описывает в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн, нерегулярную, чрезвычайно хаотическую линию. Если эти колебания вектора напряженности не имеют никаких преимущественных направлений, то волна называется неполяризованной.

Интерференция света

Принцип суперпозиции при сложении световых волн. Две плоские монохроматические бегущие волны с одинаковой частотой, распространяющиеся в одном и том же направлении, в результате сложения дают плоскую монохроматическую волну той же частоты, распространяющуюся в том же направлении.

Если слагаемые волны имеют разные частоты или различные направления распространения, то в результате их сложения не будет получена плоская волна:

1. Разные частоты, направление распространения одинаково. Результат – *биения* с частотой $\Omega = \omega_0 - \omega_1$

2. Одинаковые частоты, направление распространения противоположное. Результат – *стоячие волны*.

Интенсивность при сложении световых волн. Интенсивность волны, являющейся результатом суперпозиции двух или нескольких волн, определяется соотношением их фаз и поляризованностей.

Интерференцией называется изменение средней плотности потока энергии, обусловленное суперпозицией электромагнитных волн.

Для монохроматической волны интенсивность

$$I = \frac{1}{2} E_0^2, \quad (84)$$

где E_0 – амплитуда световой волны.

Умножив (84) на ε , получим среднюю объемную плотность энергии; умножив (84) на $\upsilon\varepsilon$, получим плотность потока энергии (ε – диэлектрическая проницаемость среды, υ – скорость света в среде).

Если складываются волны с различными амплитудами, то

$$I = \frac{1}{2} (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos\delta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2} \cos\delta,$$

где $I_1 = \frac{1}{2} E_{01}^2, I_2 = \frac{1}{2} E_{02}^2$ – интенсивности слагаемых волн.

Ясно, что суммарная интенсивность изменяется от минимального значения: $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ при $\cos\delta = -1$ до максимального: $I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ при $\cos\delta = 1$.

При суперпозиции двух монохроматических волн с одинаковой амплитудой интенсивность определяется еще проще:

$$I = E_0^2 (1 + \cos\delta) = 2I_0 (1 + \cos\delta),$$

где $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$, а $I_0 = \frac{E_0^2}{2}$ – интенсивность каждой из световых волн, интерференцию которых и выражает вышеприведенная амплитуда.

Примечание. Величина $\cos\delta$ для каждой точки пространства постоянна.

Понятие когерентности. Время разрешения. Каждый прибор измеряет лишь некоторое среднее значение величины по малому промежутку времени, называемому *временем разрешения*.

Приборов, которые имели бы разрешение в один период световых колебаний (10^{-11} , с) нет, поэтому заключаем, что в течении многих десятков или даже сотен периодов колебаний волны величины напряженности прибором считаются постоянными, т.е. $\langle E \rangle = 0$. Поэтому экспериментально можно изучать не средние величины напряженности поля волны, а средние величины от квадрата напряженности, т.е. потоки энергии волн (рис. 66). Результат измерения потока энергии волн уже в общем случае не нулевой, но, очевидно, сильно продолжает зависеть от времени разрешения прибора.

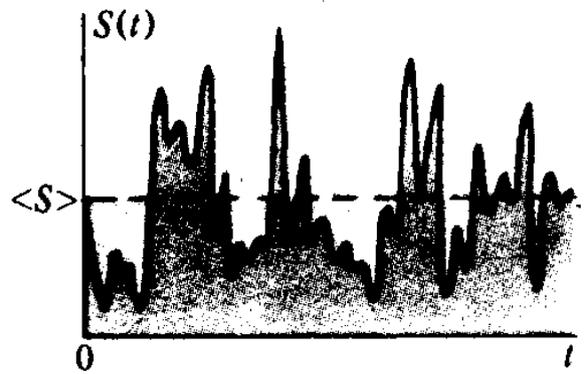


Рис. 66. Флуктуации плотности потока энергии при усреднении по промежуткам времени меньшим τ_k

При увеличении промежутка времени усреднения реальная кривая потока от времени сглаживается, высота пиков уменьшается, а резкие изменения ослабляются. При приближении времени усреднения к τ_0 , сплошная кривая приближается к пунктирной. При временах усреднения порядка τ_0 изменения плотности потока энергии волн полностью исчезают. Значит, все эти изменения происходят в промежутке времени меньше τ_0 , а τ_0 является масштабом флуктуаций. Дальнейшее увеличение промежутка времени усреднения не изменяет среднего значения. Таким образом, время τ_0 является характерным временем рассматриваемого процесса. Такие характерные времена называют *временами когерентности* τ_k . Путь, проходимый световым пучком за время когерентности, называется *длиной когерентности* l_k .

Способы получения когерентных лучей. Чтобы осуществить двухлучевую интерференцию, необходимо иметь две монохроматические волны одинаковой частоты. Такие волны по определению имеют бесконечную продолжительность по времени и ясно, что в природе они не существуют.

Можно получить волны, пригодные к интерференции, если они возникают в результате деления одной и той же волны на две. Обе части

волны в отношении изменений их фаз во времени являются копиями исходной. Но полной аналогии с интерференцией монохроматических волн не получится, т.к. каждая из волн имеет конечное время когерентности, в течение которого они могут интерферировать. Назовем два способа: делением амплитуды волны (на пластине); делением фронта волны (на щелях).

Интерференция в тонких пленках. Оптическая длина пути. При распространении света в среде его скорость уменьшается, что влечет за собой при постоянстве частоты, уменьшение длины волны. Тогда волновое число в среде связано с волновым числом в вакууме соотношением:

$$k_{\text{ср}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{ср}}} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi n}{cT} = \frac{n2\pi}{\lambda} = nk, \text{ где } v = \frac{c}{n} - \text{ скорость волны в среде, } n - \text{ абсолютный показатель преломления среды.}$$

Разность фаз, возникающая за счет прохождения геометрического расстояния Δ_r в среде, равна $\delta = k_{\text{ср}}\Delta_r = nk\Delta_r = k\Delta$; где $\Delta = n\Delta_r$ – оптическая длина пути.

Отражение от параллельных поверхностей. Пусть n_1 и n_2 показатели преломления среды и пленки толщиной d . Рассчитаем разность оптических путей лучей, отразившихся от нижней и верхней поверхностей пленки (рис. 67):

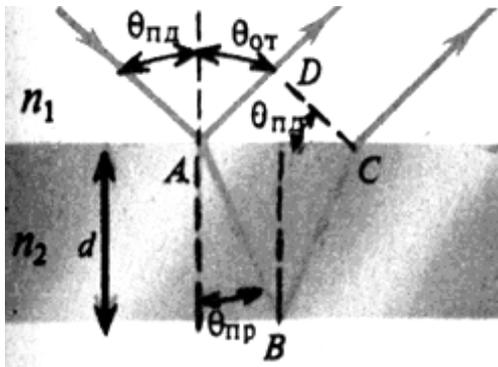


Рис. 67. К расчету оптической длины пути в тонких пленках

Рассчитаем разность оптических путей лучей, отразившихся от нижней и верхней поверхностей пленки (рис. 67):

$$\Delta = (|AB| + |BC|)n_2 - |AD|n_1;$$

$$|AB| + |BC| = 2d \frac{1}{\cos\theta_{\text{ПР}}};$$

$$|AD| = 2d \text{tg}\theta_{\text{ПР}} \sin\theta_{\text{ПД}}.$$

Принимая во внимание закон преломления:

$$\frac{\sin\theta_{\text{ПД}}}{\sin\theta_{\text{ПР}}} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ получим}$$

$$\Delta = 2d \left[n_2 \frac{1}{\cos\theta_{\text{ПР}}} - \text{tg}\theta_{\text{ПР}} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \sin\theta_{\text{ПР}} n_1 \right] = 2dn_2 \cos\theta_{\text{ПР}}. \quad (85)$$

Эта формула показывает, что лучи, падающие на пленку под одним и тем же углом, разделяются на два луча и после отражений от поверхностей имеют одно и то же направление распространения, будучи параллельны друг другу. Между лучами, отразившимися от разных поверхностей пленки, возникает разность хода, и они принципиально могут интерферировать между собой. Максимум интерференции наступает при условии

$$\Delta = m\lambda. \quad (86)$$

где λ – длина волны в вакууме.

Наблюдать такую интерференцию можно двумя способами: фокусировать лучи с помощью линзы, в результате чего в фокальной плоскости линзы возникнут полосы интерференции, либо увидеть их глазами, аккомодированными на бесконечность.

Линии равного наклона. Если на пластинку падает пучок непараллельных лучей, то в отраженном пучке будут присутствовать лучи разных направлений распространения с соответствующими (разными) углами преломления. Те из них, для которых удовлетворяется последнее условие (86), дают при интерференции максимум интенсивности. Значит, если с помощью линзы в ее фокальной плоскости образовать интерференционную картину, то интерференционная линия определенной интенсивности соответствует углу $\theta_{\text{ДР}}$ (85, 86) или, что то же самое, определенному углу падения или отражения. Иными словами, эта линия соответствует определенному углу наклона образующих ее лучей к поверхности пластины. Поэтому такие интерференционные линии называют *линиями равного наклона*. Они локализованы на бесконечности.

Если пучок света, падающий на пленку, аксиально симметричен, то линии равного наклона – окружности.

Дифракция света

Принцип Гюйгенса. Если в некоторый момент времени известен фронт световой волны, то для определения положения фронта волны через промежуток времени Δt надо каждую точку фронта рассматривать как источник сферической волны и построить около каждого такого источника сферу радиуса $c\Delta t$. Поверхность, огибающая вторичные сферы волны (рис. 68), представляет фронт волны через промежуток времени Δt .

Принцип Гюйгенса решает задачу о направлении распространения волнового фронта, но не затрагивает вопросы об амплитуде, а значит и об

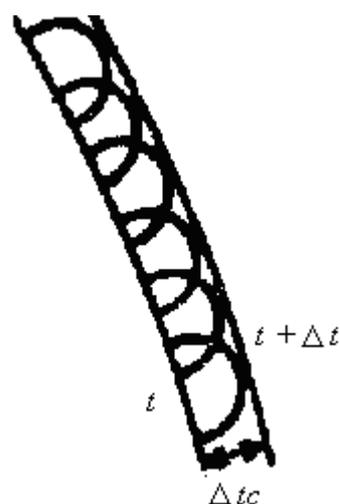


Рис. 68. Иллюстрация принципа Гюйгенса

интенсивности волн, распространяющихся по разным направлениям, не учитывая, таким образом, важнейшего свойства волнового движения – явление интерференции. При учете интерференции принцип получил название Гюйгенса – Френеля.

Принцип Гюйгенса – Френеля (1818 г.). Представление о том, что каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн, было дополнено Френелем в виде утверждения, что эти источники когерентны между собой, а испускаемые ими вторичные волны интерферируют. Таким образом, при анализе распространения волн необходимо принять во внимание их фазу и амплитуду, что позволяет рассматривать вопрос об интенсивности результирующей световой волны в любой точке пространства.

Ограничения Френеля. Сферическая (или плоская) волна падает на непрозрачный экран с отверстием (рис. 69, *a*). Требуется найти распределение интенсивности света за экраном. Для решения этой задачи с помощью принципа Гюйгенса-Френеля делаются два предположения: 1. Непрозрачные части экрана не являются источниками вторичных волн (обратные вторичные волны не возникают); 2. В отверстии точки волнового фронта являются такими же источниками вторичных волн, какими они были бы при отсутствии непроницаемых частей экрана.

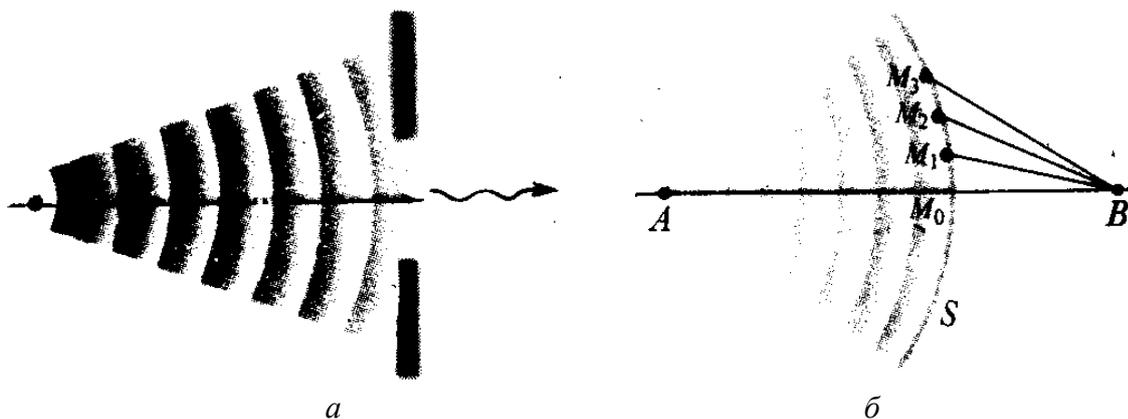


Рис. 69. Распространение света через отверстие конечных размеров (*a*). К определению зон Френеля (*б*)

Зоны Френеля. Пусть A – источник сферической волны, S – вспомогательный волновой фронт в некоторый момент времени. Найдем интенсивность волн в точке B с помощью принципа Гюйгенса - Френеля. Для решения разобьем поверхность S на кольцеобразные зоны такого размера,

чтобы расстояние от краев каждой последующей зоны до B отличались на $\frac{\lambda}{2}$ (рис. 69, б.). Обозначая $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$ – границы зон (рис. 69, б),

запишем это условие в виде:

$$\begin{aligned} M_1B - M_0B &= \frac{\lambda}{2}; \\ M_2B - M_1B &= \frac{\lambda}{2}; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ M_mB - M_{m-1}B &= \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Колебания от соседних зон проходят до точки B расстояния, отличающиеся на $\frac{\lambda}{2}$, поэтому в точку B они приходят в противоположной фазе и при наложении этих колебаний будут ослаблять друг друга. Поэтому амплитуда результирующего светового колебания в точке B :

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m, \quad (87)$$

где A_1, A_2, \dots, A_m – амплитуды колебаний от 1-й, 2-й, ..., m -й зон.

Для оценки амплитуд колебаний найдем площади зон Френеля (рис. 70). Радиусы зон находятся с помощью построения: r_m – радиусы зон; R – радиус кривизны кривой сферической волны; D – точка пересечения фронта с прямой AB ; d_m – расстояния от D до проекции границы соответствующей зоны на прямую AB . Центральная зона называется нулевой (r_m

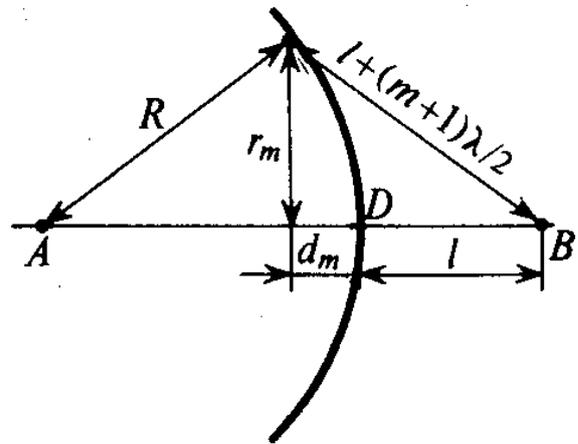


Рис. 70. К расчету радиусов и площадей зон Френеля

ется из $r_m^2 = R^2 - (R - d_m)^2 = \left[l + (m+1) \frac{\lambda}{2} \right]^2 - (l + d_m)^2,$

из которого с точностью до величины $(\lambda/2)^2$ следует

$$r_m^2 = \frac{Rl(m+1)\lambda}{R+l}; \quad d_m = \frac{l(m+1)\lambda}{(R+l)2}. \quad (88)$$

Тогда площадь нулевой зоны $S_0 = \pi r_0^2 = \frac{\pi Rl\lambda}{R+l}.$

Для суммарной площади нулевой и первой зоны получим: $S_{01} = \frac{\pi R l 2\lambda}{R+l}$, поэтому $S_1 = S_{01} - S_0 = \frac{\pi R l \lambda}{R+l}$, т.е. равна площади нулевой зоны. То же происходит и для других зон. Это означает, что при не слишком больших m , площади зон Френеля одинаковы.

При определении площадей зон: 1. Пренебрегают кривизной поверхности волнового фронта. 2. Площадь кольцевой зоны на сферической поверхности волнового фронта принимается равной площади ее проекции на плоскость перпендикулярную прямой AB . Эти два условия хорошо выполняются, если радиусы зон Френеля много меньше радиуса кривизны волнового фронта. А так как длина рассматриваемых волн – малая величина, то ясно, что эти условия хорошо выполняются для большего числа зон.

Таким образом, построение зон Френеля разбивает волновую поверхность сферической волны на равные по площади зоны. Согласно предложению Френеля, действие отдельных зон в точке B тем меньше, чем больше угол φ_m между нормалью \vec{n} к поверхности зоны и направлением на B , т.е. действие зон постепенно убывает от центральной к периферическим (до нуля). Кроме того, интенсивность излучения в направлении точки B уменьшается с ростом m и вследствие расстояния от зоны до точки B .

Учитывая оба этих фактора, можно записать: $A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > \dots$

Общее число N зон Френеля, уместяющихся на полусфере очень велико. Например, $N = \frac{2\pi R^2}{\pi R l \lambda} (R+l) = 8 \cdot 10^5$ при $R = l = 0,1$ м и $\lambda = 0,5$ мкм. Поэтому в качестве допустимого приближения будем считать, что амплитуда колебаний A_m от некоторой m -й зоны Френеля равна среднему арифметическому от амплитуд примыкающих к ней зон, т.е. $A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}$. Тогда выражение (87) можно записать в виде:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2}. \quad (89)$$

Выражения в скобках равны нулю, а оставшаяся часть амплитуды последней зоны $\pm \frac{A_m}{2}$ ничтожно мала.

Получилось, что амплитуда, создаваемая в произвольной точке B сферической волновой поверхности, равна половине амплитуды, создава-

емой одной центральной зоной. Это значит, что действие всей волновой поверхности сводится к действию ее малого участка, меньшего центральной зоны. Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда в точке B будет равна A_1 , т.е. в два раза превзойдет амплитуду A (см. (89)). Соответственно интенсивность света в точке B будет в этом случае в четыре раза больше, чем в отсутствие преград между точками A и B . Следовательно, распространение света от A к B происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень малого канала вдоль AB , т.е. прямолинейно. Таким образом, принцип Гюйгенса-Френеля позволяет объяснить прямолинейное распространение света в однородной среде.

Дифракция от круглого отверстия. Поставим на пути сферической или плоской световой волны непрозрачный экран с вырезанным в нем круглым отверстием радиуса r_0 . Расположим экран так, чтобы перпендикуляр, опущенный из источника света, попал в центр отверстия (рис. 71). На продолжении этого перпендикуляра возьмем точку P . При радиусе отверстия r_0 , значительно меньшем, чем длины a и b , длину a можно считать равной расстоянию от источника S до преграды, а длину b – расстоянию от преграды до точки P . Если расстояния a и b удовлетворяют соотношению $r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda$, где m – целое число, то отверстие оставит открытым ровно m первых зон Френеля, построенных для точки P (формула (89)).

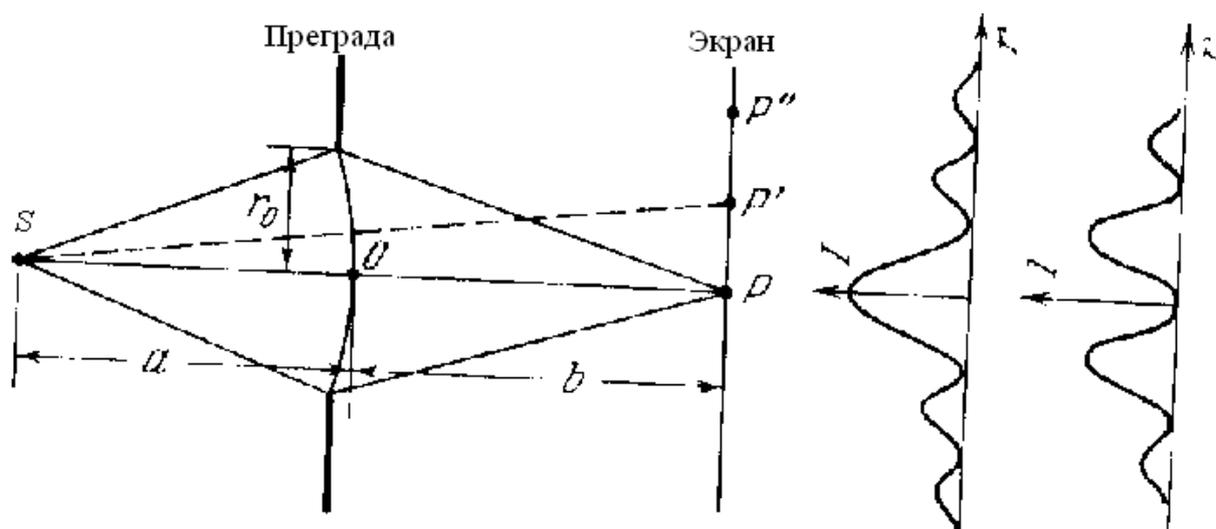


Рис. 71. Дифракция от круглого отверстия

Следовательно, число m открытых зон Френеля определится

$$m = \frac{r_0^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (90)$$

В соответствии с (87) амплитуда в точке P будет равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m. \quad (91)$$

Перед A_m берется знак плюс, если m нечетное, и минус, если m четное. Представим (91) в виде, аналогичном (89), и положив выражения в скобках равными нулю, приходим к формулам

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_m}{2} \quad (m - \text{нечетное}),$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m \quad (m - \text{четное}).$$

Амплитуды от двух соседних зон практически одинаковы. Поэтому $(A_{m-1}/2) - A_m$ можно заменить через $-A_m/2$. В результате получится $A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}$, где знак плюс берется для нечетных m и минус – для четных.

Для малых m амплитуда A_m мало отличается от A_1 . Следовательно, при нечетных m амплитуда в точке P будет приближенно равна A_1 , при четных m – нулю.

Если убрать преграду, амплитуда в точке P станет равной $A_1/2$ (см. (89)). Таким образом преграда с отверстием, открывающим небольшое нечетное число зон, не только не ослабляет освещенность в точке P , но, напротив, приводит к увеличению амплитуды почти в два раза, а интенсивности – почти в четыре раза.

Выясним характер дифракционной картины на экране за преградой (см. рис. 71). Вследствие симметричного расположения отверстия относительно прямой SP освещенность в разных точках экрана будет зависеть только от расстояния r от точки P . В самой этой точке интенсивность будет достигать максимума или минимума в зависимости от того, каким – четным или нечетным – будет число открытых зон Френеля. Пусть, например, это число равно трем. Тогда в центре дифракционной картины получится максимум интенсивности. Картина зон Френеля для точки P дана на рис. 72, а. Теперь сместимся по экрану в точку P' . Ограниченная краями отверстия картина зон Френеля для точки P' имеет вид, показанный на рис. 72, б. Края отверстия закроют часть третьей зоны, одновременно частично откроется четвертая зона. В итоге интенсивность света уменьшится и при некотором положении точки P' достигнет минимума.

Если сместиться по экрану в точку P'' , края отверстия частично закроют не только третью, но и вторую зону Френеля, одновременно откроется частично пятая зона (рис. 72, в). В итоге действия открытых участков нечетных зон перевесит действие открытых участков четных зон, и интенсивность достигнет максимума, но более слабого, чем максимум, наблюдавшийся в точке P' .

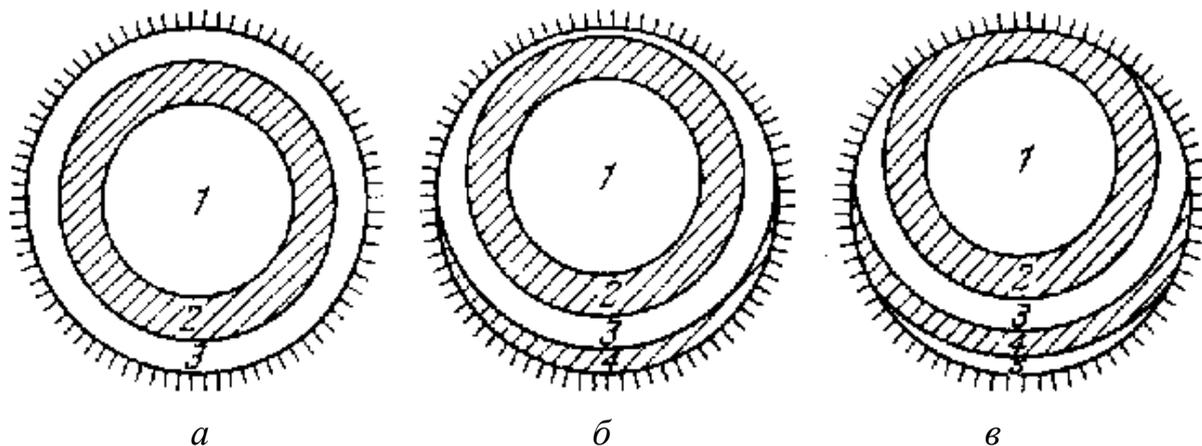
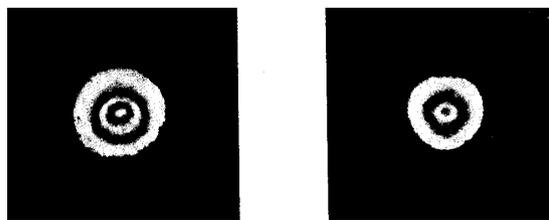


Рис. 72. Картина зон Френеля для точек P , P' и P'' по рис. 71

Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. В центре картины будет либо светлое (m – нечетное), либо темное (m – четное) пятно (рис. 73). Ход интенсивности I с расстоянием r от центра картины изображен на рис. 71, б (для нечетного m) и на рис. 72, в (для четного m). При перемещении экрана параллельно самому себе вдоль прямой SP картины, изображенные на рис. 73, будут сменять друг друга (согласно (90) при изменении b значение m становится то нечетным, то четным).



Нечетное m Четное m
Рис. 73. Дифракционная картина от круглого отверстия

Если отверстие открывает лишь часть центральной зоны Френеля, на экране получается размытое светлое пятно; чередования светлых и темных колец в этом случае не возникает. Если отверстие открывает большое число зон, чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в очень узкой области на границе геометрической тени; внутри этой области освещенность оказывается практически постоянной.

Дифракция от круглого диска. Поместим между источником света S и точкой наблюдения P непрозрачный круглый диск радиуса r_0 (рис. 74, a). Если диск закроет m первых зон Френеля амплитуда в точке P будет равна

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots$$

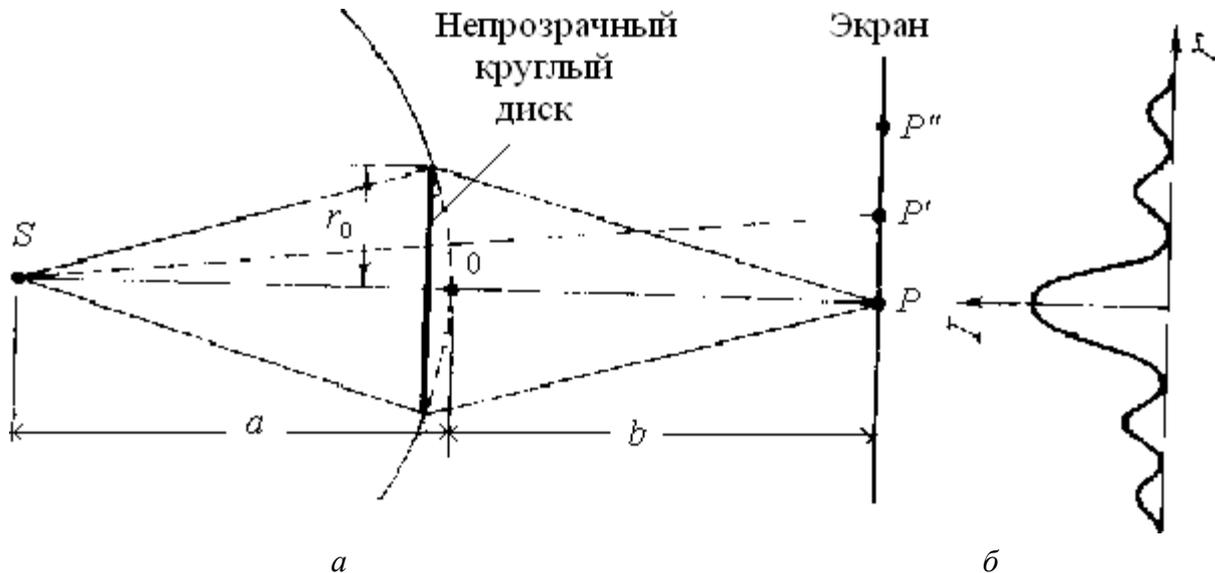


Рис. 74. Дифракция от круглого диска

Выражения, стоящие в скобках, можно положить равными нулю, значит $A = \frac{A_{m+1}}{2}$.

Очевидно, что освещенность может зависеть только от расстояния r до точки P (см. рис 74.). При небольшом числе закрытых зон амплитуда A_{m+1} мало отличается от A_1 . Поэтому интенсивность в точке P будет почти такая же, как при отсутствии преграды между источником S и точкой P (см. (89)). Для точки P' , смещенной относительно точки P в любом радиальном направлении, диск будет перекрывать часть $(m + 1)$ -й зоны Френеля, одновременно откроется часть m -й зоны. Это вызовет уменьшение интенсивности. При некотором положении точки P' интенсивность достигнет минимума. Если сместиться из центра картины еще дальше, диск перекроет дополнительно часть $(m + 2)$ -й зоны, одновременно откроется часть $(m - 1)$ -й зоны. В результате интенсивность возрастет и в точке P'' достигнет максимума.

Таким образом, в случае непрозрачного круглого диска дифракционная картина имеет вид чередующихся светлых и темных концентриче-

ских колец. В центре картины помещается светлое пятно (рис. 75). Изменение интенсивности света I с расстоянием r от точки P изображено на рис. 74, б.

Если диск закрывает небольшую часть центральной зоны Френеля, он совсем не отбрасывает тени – освещенность экрана всюду остается такой же, как при отсутствии преград. Если диск закрывает много зон Френеля, чередование светлых и темных колец наблюдается только в узкой области на границе геометрической тени. В этом случае $A_{m+1} \ll A_1$, так что светлое пятно в центре отсутствует и освещенность в области геометрической тени практически всюду равна нулю.

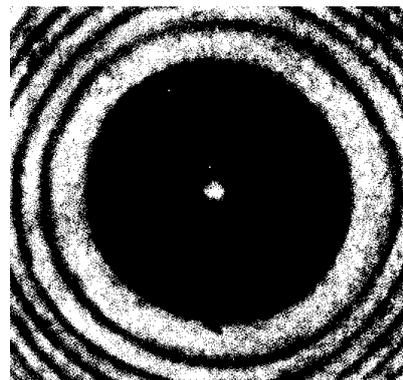


Рис. 75. Пятно Пуассона

Пятно Пуассона. Если на пути световой волны стоит непрозрачный круглый экран (см. рис. 75), то за экраном в его тени на оси возникает световое пятно, называемое *пятном Пуассона*. Необходимость его возникновения очевидна из принципа Гюйгенса – Френеля и метода зон Френеля. Экран закрывает некоторое число зон Френеля начиная с нулевой. Однако следующие зоны после последней из закрытых, создают в точке B освещенность. Волна, как бы «огинает» непрозрачный экран (проникает в область геометрической тени). Явление огибания волнами препятствий называется *дифракцией*. В более широком смысле, дифракция – это любое отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики.

При больших размерах непрозрачного экрана интенсивность пятна Пуассона слабая. Поэтому для наблюдения дифракции надо брать достаточно малые экраны. Кроме этого, необходимо, чтобы свет обладал большой степенью когерентности, потому что в противном случае не будет происходить интерференция лучей от различных участков зон.

Недостатки метода зон Френеля. Метод зон Френеля хорошо работает при ситуации, когда размер экрана много больше длины волны, но он имеет свои недостатки: 1. Не может объяснить, почему амплитуда вторичных волн спадает по определенному закону в зависимости от направления. 2. Вычисленная по методу Френеля фаза волны отличается от фактической фазы волны на $\pi/2$.

Объяснения этому удалось дать лишь в более строгой теории дифракции, основанной на интеграле Кирхгофа. Эта теория дифракции содержит две большие части: 1. Приближение Френеля (или дифракция Френеля) – осуществляется в ближней зоне, т.е. l – относительно мала; 2) приближение Фраунгофера – осуществляется в дальней волновой зоне, т.е. l – велика, вплоть до бесконечности (см. рис. 70).

Дисперсия света

В диэлектрике скорость распространения электромагнитных волн зависит от частоты. Это явление называется *дисперсией*. Влияние дисперсии проявляется лишь в распространении некогерентных волн, поскольку различные частоты, составляющие волну, распространяются с различной скоростью. Дисперсия является следствием зависимости поляризованности атомов от частоты: $\epsilon_{r\omega} = \epsilon_{\omega}(\omega)$, где $\epsilon_{r\omega}$ – относительная диэлектрическая проницаемость, зависящая от частоты. Коэффициент преломления $n_{\omega} = \sqrt{\epsilon_{r\omega}}$, то следовательно и скорость распространения электромагнитных волн зависит от частоты. Этим обстоятельством и объясняется механизм возникновения дисперсии. Графическая зависимость n_{ω} от частоты ω называется дисперсионной кривой. Если n_{ω} растет при росте ω , то дисперсия называется *нормальной* (рис. 76). Вблизи резонансной частоты показатель преломления с увеличением частоты уменьшается. Это явление называется *аномальной дисперсией* (рис. 77).

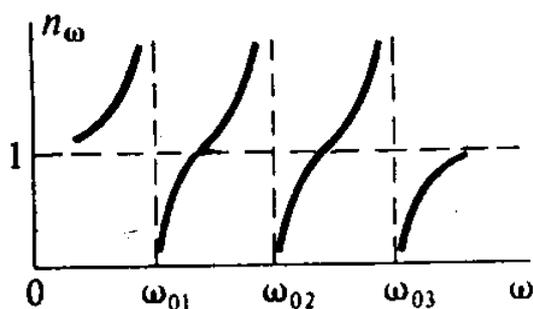


Рис. 76. Нормальная дисперсия

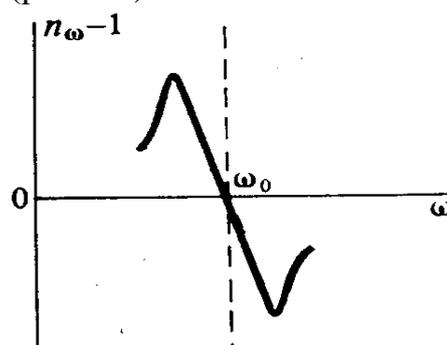


Рис. 77. Аномальная дисперсия

При нормальной дисперсии для больших частот $\omega \gg \omega_{01}$ показатель преломления сместится к 1, оставаясь меньше ее. Поэтому, для коротковолнового излучения диэлектрик является оптически менее плотной сре-

дой, чем вакуум. В частности, в этом случае от поверхности диэлектрика может наблюдаться полное отражение. Нормальная дисперсия наблюдается во всей прозрачной области; аномальная – только в области поглощения. Форма импульса электромагнитного сигнала в дисперсионной среде изменяется. Передний фронт импульса в дисперсионной среде движется со скоростью света в вакууме, а последующие части движутся со скоростью, характерной для среды.

Наличие резонансных частот обуславливает возникновение окраски тел в результате селективного поглощения вблизи резонансных частот ω_{0i} . Это может происходить как в толще вещества, так и в поверхностном слое. Приведем три правила:

1. Если частота ω_{0i} находится в ультрафиолетовой области, то в видимой части спектра нет селективного поглощения света, и вещество является почти бесцветным и прозрачным (стекло).

2. Когда собственные частоты ω_{0i} попадают в видимую часть спектра, соответствующие видимой части спектра поглощаются окрашенным в дополнительный цвет.

3. При отражении света от поверхности наиболее интенсивно отражаются те участки спектра, которые при прохождении толщины вещества наиболее сильно поглощаются. Поэтому цвет вещества, возникающий за счет селективного отражения, является дополнительным к цвету того же вещества, возникающего в результате селективного поглощения.

Фурье-преобразование

История вопроса. Музыкальные звуки. Говорят, что Пифагор первым обнаружил тот факт, что одновременное звучание двух одинаковых струн различной длины приятнее для слуха, если длины этих струн относятся друг к другу как небольшие целые числа. Если длины струн относятся как 1:2, то это музыкальная октава; если они относятся как 2:3, то это соответствует интервалу между нотами до и соль, и называется квинтой. Такие интервалы считаются «приятно» звучащими аккордами.

Среди звуков есть иной сорт, называемый шумом. Ему соответствуют нерегулярные колебания барабанной перепонки уха (рис. 78, а), вызванные нерегулярными колебаниями находящихся поблизости объектов.

Музыкальный звук характеризуется наличием длительных тонов, или музыкальных нот, которые могут длиться недолго или неопределенно долго, и отличается от шума тем, что график периодичен (рис.78, б).

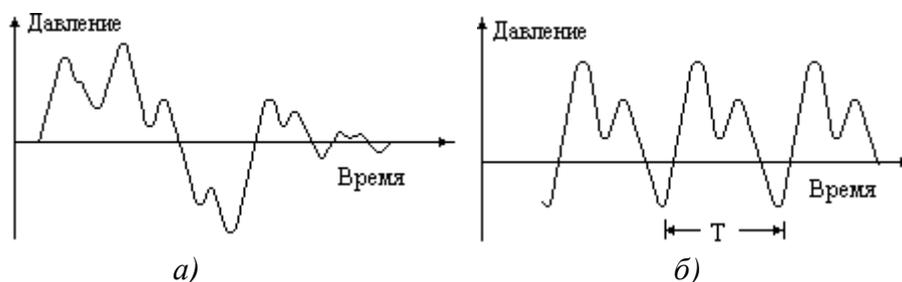


Рис. 79. Давление как функция времени: а – для шума; б – для музыкального звука

Три характеристики тона – громкость, высота и качество. *Громкость* определяется величиной изменения давления. *Высоте* тона соответствует период времени повторения основной формы давления. Под *качеством* тона понимается разница, которую можно уловить между двумя нотами одинаковой громкости и высоты, и определяемую структурой периодически повторяющейся формы.

Если оттянуть струну, а затем отпустить, то ее последующее движение будет определяться возбужденными волнами. Эти волны пойдут в обоих направлениях по струне, отражаясь от ее концов. Сколь бы сложны ни были эти волны, они будут повторяться периодически. Период этих повторений равен времени T , которое требуется волне, чтобы пробежать дважды всю длину струны.

Ряд Фурье. В струне возникают различные собственные гармоники и любое частотное колебание, которое только возможно получить из начальных условий, можно рассматривать как составленную в надлежащей пропорции комбинацию нескольких одновременно осциллирующих собственных гармоник. Для струны собственные гармоники имеют частоты $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$. Поэтому общее движение струны складывается из синусоидальных колебаний основной частоты ω_0 , второй гармоники $2\omega_0$, третьей гармоники $3\omega_0$ и т.д. Основная гармоника повторяется через каждый период $T_1 = 2\pi/\omega_0$; вторая гармоника – через период $T_2 = 2\pi/2\omega_0$, она повторяется также и через каждый период $T_1 = 2T_2$, т.е. после двух своих периодов. Точно таким же образом через период T_1 повторяется и третья гармоника. В этом временном отрезке укладываются три ее периода.

Таким образом на струне выстраивается сложная динамическая архитектура, характеризующая качество звука. Звук, представляющий дви-

жение воздуха, вызванное движением струны, должен состоять из тех же гармоник, хотя здесь уже нельзя говорить о собственных гармониках воздуха. Разные гармоники по-разному связаны с воздухом.

Если для музыкального тона функция $f(t)$ представляет давление воздуха в зависимости от времени (как на рис. 78, б), то можно ожидать, что $f(t)$ определяется суммой гармонических функций от времени. Если период колебаний равен T , то основная частота будет $\omega = 2\pi/T$, а следующие гармоники будут 2ω , 3ω и т.д.

Для каждой частоты начальные фазы необязательно равны. Поэтому нужно пользоваться функциями типа $\cos(\omega t + \varphi)$. Но, проще использовать для каждой частоты и синус, и косинус.

Напомним, что $\cos(\omega t + \varphi) = \cos\varphi \cos\omega t - \sin\varphi \sin\omega t$, а поскольку φ — постоянная, то любые синусоидальные колебания с частотой ω могут быть записаны в виде суммы членов, в один из которых входит $\sin\omega t$, а в другой — $\cos\omega t$. Любая периодическая функция $f(t)$ с периодом T математически может быть записана в виде:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots, \quad (92)$$

где $\omega=2\pi/T$, а a и b числовые постоянные, указывающие, с каким весом каждая компонента колебания входит в общее колебание $f(t)$. Член с нулевой частотой a_0 для музыкальных тонов обычно равен нулю. Это сдвиг средней величины звукового давления (т.е. сдвиг «нулевого» уровня). С

этим членом формула верна для любого случая. Уравнение (92) схематически показано на рис. 79. Амплитуды гармонических функций a_n и b_n выбираются по специальному правилу. На рис. 79 они показаны только схематически без соблюдения масштаба. Ряд (92) называется рядом Фурье для функций $f(t)$. Любую физическую периодическую функцию можно написать в таком виде.

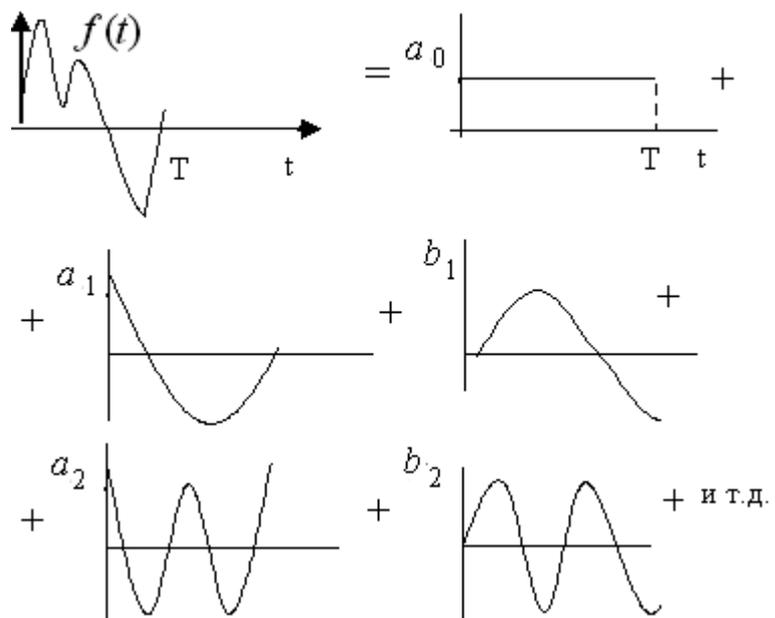


Рис. 79. Любая периодическая функция $f(t)$ равна сумме простых гармонических функций

Качество и гармония. Качество музыкального тона определяется относительным количеством различных гармоник, т.е. относительными величинами a и b . Тон, содержащий только первую гармонику, называется «чистым», а тон с несколькими сильными гармониками называется «богатым». Можно «изготовить» различные музыкальные тоны, если подсоединить к громкоговорителю несколько осцилляторов. Осциллятор дает приблизительно чистые простые гармонические колебания, а в качестве частот осцилляторов выберем ω , 2ω , 3ω и т.д. Приделав к каждому осциллятору регулятор громкости, можно смешивать гармоники в любой желаемой пропорции и тем самым создавать звуки различного качества. Ноты звучат гармонично, когда у них есть гармоники с одинаковой частотой.

Коэффициенты Фурье. Вернемся к утверждению о том, что каждую ноту, т.е. любое периодическое колебание, можно представить в виде надлежащей комбинации гармоник. Хотелось бы знать, как можно найти нужную долю каждой гармоники. Конечно, если даны все коэффициенты a и b , то пользуясь формулой (92), легко подсчитать функцию $f(t)$. Но вопрос состоит в том, как можно найти коэффициенты при различных гармониках, если нам задана функция $f(t)$?

Член a_0 равен среднему значению $f(t)$ на протяжении одного периода (от $t = 0$ до $t = T$). Среднее значение синуса или косинуса на протяжении одного периода равно нулю. На протяжении двух, или трех, или даже целого числа периодов оно тоже равно нулю. Таким образом, среднее значение всех членов с правой стороны (92), за исключением только a_0 равно нулю.

Далее, поскольку среднее значение суммы равно сумме средних, то среднее значение функции $f(t)$ равно просто среднему от a_0 . Но a_0 – постоянная, и ее среднее значение равно ей самой. Получаем

$$a_0 = 1/T \int_0^T f(t) dt. \quad (93)$$

Чтобы найти остальные коэффициенты, используем метод, предложенный Жаном Батистом Жозефом Фурье (1768 – 1830). Умножим обе стороны уравнения (92) на любую гармоническую функцию, скажем на $\cos 7\omega t$:

$$\begin{aligned}
f(t)\cos 7\omega t &= a_0 \cos 7\omega t + \\
&+ a_1 \cos \omega t \cos 7\omega t + b_1 \sin \omega t \cos 7\omega t + \\
&+ a_2 \cos 2\omega t \cos 7\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cos 7\omega t + \\
&+ \dots \qquad \qquad \qquad + \dots \\
&+ a_7 \cos 7\omega t \cos 7\omega t + b_7 \sin 7\omega t \cos 7\omega t + \\
&+ \dots \qquad \qquad \qquad + \dots
\end{aligned} \tag{94}$$

Усредним обе стороны равенства. Среднее от члена $a_0 \cos 7\omega t$ по периоду T пропорционально среднему от косинуса по семи его периодам. Последнее просто равно нулю. Среднее почти всех остальных членов тоже будет равно нулю. Действительно, давайте рассмотрим член с a_0 . Мы знаем, что в общем случае

$$\cos A \cos B = 1/2 \cos(A + B) + 1/2 \cos(A - B), \tag{95}$$

$$\text{так что член с } a_1 \text{ равен } 1/2 a_1 (\cos 8\omega t + \cos 6\omega t) \tag{96}$$

Получились два косинуса: один с восьмью полными периодами, а другой – с шестью; оба равны нулю. Среднее значение этого члена тоже равно нулю.

Для члена с a_2 получаем $\cos 9\omega t$ и $\cos 5\omega t$, каждый из которых при усреднении превратится в нуль. Для члена с a_9 получится $\cos 16\omega t$ и $\cos(-2\omega t)$. Но $\cos(-2\omega t)$ – это то же самое, что $\cos 2\omega t$, так что опять оба члена дадут при усреднении нуль. Ясно, что все слагаемые с косинусами, за исключением одного, дадут при усреднении нуль. Этим единственным слагаемым будет член с a_7 . Для него же мы получим

$$1/2 a_7 (\cos 14\omega t + \cos 0). \tag{97}$$

Косинус нуля равен единице, а среднее от него, разумеется, тоже равно единице. Итак, мы получили, что среднее от всех членов с косинусами уравнения (94) равно $1/2 a_7$.

Еще легче расправиться с синусами. Когда мы умножаем их на косинус типа $\cos n\omega t$, то таким методом можно показать, что все они при усреднении обращаются в нуль.

Видно, что предложенный Фурье способ действует как своеобразное сито (фильтр). Когда мы умножаем на $\cos 7\omega t$ и усредняем, то все члены, кроме a_7 , отсеиваются и в результате остается:

$$\text{среднее } [f(t)\cos 7\omega t] = a_7/2 \tag{98}$$

$$\text{или } a_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\cos 7\omega t \, dT. \tag{99}$$

Можно показать, что коэффициенты b_7 находятся с помощью умножения (92) на $\sin 7\omega t$ и усреднения обеих частей. Результат будет таков:

$$b_7 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin 7\omega t \, dt. \quad (100)$$

Но то, что верно для 7, очевидно верно и для другого целого числа. Поэтому запишем результат доказательства в более элегантной математической форме. Если m и n – целые отличные от нуля числа и $\omega = 2\pi/T$, то

$$\int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t \, dt = 0; \quad (101)$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t \, dt = 0, \quad \text{если } n \neq m, \quad (102)$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t \, dt = \frac{T}{2}, \quad \text{если } n = m$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \quad (103)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt; \quad (104)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt; \quad (105)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt. \quad (106)$$

Такая процедура разложения периодической волны на ее гармонические компоненты называется разложением на ряд Фурье, а отдельные члены называются фурье-компонентами.

Наложение частот. Частота $f_N = 1/2\Delta$ называется частотой Найквиста и является наивысшей частотой, которую можно обнаружить на данных, полученных с интервалом отсчета Δ . Так при $\Delta = 0,1$ с, частота Найквиста равна 5 Гц. Преобразование Фурье $S_i(f)$ дискретизованного сигнала на 4 Гц будет состоять из вкладов преобразования $S(f)$ на 4 Гц, на $10 + 4 = 14$ Гц, на $-10 + 4 = -6$ Гц, на $20 + 4 = 24$ Гц, на $-20 + 4 = -16$ Гц, и т.д. Все эти частоты, кроме первой, называются двойниками частоты 4 Гц, а их влияние на преобразование Фурье – явлением наложения частот (*aliasing*).

Следовательно, при дискретизации по времени непрерывных временных рядов нужен выбор достаточно высокой частоты отсчетов $f_N = 1/2\Delta$, чтобы избежать искажающего влияния наложения частот на $S_i(f)$.

Пример. Необходимо вычислить длину записи T и интервал отсчета Δ , необходимые для достижения некоторых целей. Предположим, что изучаемый сигнал содержит две синусоидальные компоненты на частотах 100 и 99 Гц. Тогда, чтобы различить эти пики в преобразовании Фурье, взятом от конечной записи, нужно взять $1/T$ порядка $100 - 99 = 1$ Гц, т. е. T должно быть порядка 1 с. Чтобы оценивать частоты порядка 100 Гц, величина $1/2\Delta$ должна быть по меньшей мере 100 Гц и, следовательно, $\Delta \leq 5$ мс. Для этого потребуется по крайней мере 200 точек.

Чтобы различить две частотные компоненты на 999 и 1000 Гц при той же длительности записи 1 с, однако интервал отсчета в этом случае нужно было бы взять 0,5 мс, и 2000 точек. Следовательно, длина записи T определяет степень различимости пиков в преобразовании Фурье, а интервал отсчета Δ определяет максимальную частоту, которую можно различать.

Заключение

Учебное пособие создано на базе ранее опубликованных конспектов лекций автора и полностью соответствует требованиям образовательного стандарта и программы курса «Общая физика» ВлГУ. Учебное пособие содержит теоретический материал двух первых семестров обучения по курсу общей физики (34 – 35 лекций) и предназначено для самостоятельной подготовки студентов первого курса к экзаменам.

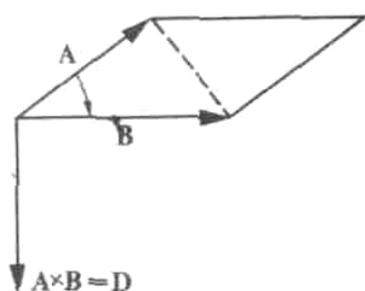
Библиографический список не претендует на полноту охвата вопросов и не содержит всех первоисточников, но приведенные в списке работы имеют обширную библиографию, используя которую можно найти необходимые первоисточники.

Автор благодарит членов методической комиссии кафедры «Общей и прикладной физики» за ценные замечания и рекомендации.

Приложения

Приложение 1

Векторное произведение. Векторным произведением $\vec{A} \times \vec{B}$ векторов \vec{A} и \vec{B} называется вектор $\vec{D} = \vec{A} \times \vec{B}$. Этот вектор (рисунок) перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы \vec{A} и \vec{B} , и направлен в ту сторону, в которую будет двигаться винт с правой нарезкой, если его головку вращать в том же направлении, в каком необходимо



К определению векторного произведения

поворачивать вектор \vec{A} для совпадения с вектором \vec{B} по кратчайшему пути (правило правого винта). Иначе говоря, векторы \vec{A} , \vec{B} и \vec{D} друг относительно друга ориентированы так же, как и положительные направления осей X , Y , Z правой системы координат. По модулю вектор \vec{D} равен произведению модулей векторов и синуса угла между ними:

$$|\vec{D}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\hat{\vec{A}, \vec{B}}).$$

Угол между векторами \vec{A} и \vec{B} отсчитывается от первого сомножителя ко второму *по кратчайшему расстоянию*, т. е. угол меньше или равен π , вследствие чего синус не может быть отрицательным. Как видно, модуль векторного произведения $|\vec{D}|$ равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах.

Приложение 2

Переход от декартовых координат к полярным. Переходим от прямоугольных координат к полярным координатам r и φ (рис. П1). Меняем элемент площади в обозначениях $dx dy$ на другие (r, φ) обозначения: $dx dy = r dr d\varphi$.

Значение модуля радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

За элемент площади в случае равномерного распределения при фиксированном r можно взять площадь $2\pi r dr$ кольца радиусом r и шириной dr .

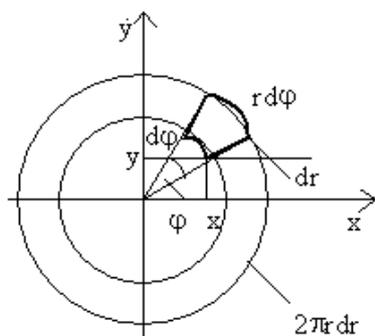


Рис. П1. К переходу от декартовых координат к полярным

Переход от декартовых координат к сферическим (рис. П2.). Если положение в пространстве характеризовать случайными величинами r , φ и θ , связанными с x , y , z формулами сферических координат, то: $x = r \sin\theta \cdot \cos\varphi$; $y = r \sin\theta \cdot \sin\varphi$; $z = r \cdot \cos\theta$.

Элемент объема, определяющий вероятность:

$$dxdydz = r^2 \times \sin\theta \, drd\varphi d\theta.$$

Если распределение в пространстве не зависит от углов φ и θ , проинтегрируем по углам:

$$dV(r) = r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 dr.$$

Этот же результат получится, если за элемент объема взять шаровой слой радиусом r и толщиной dr , т.е. $4\pi r^2 dr$. Таким образом, элемент пространства dr в случае изотропной величины можно заменить шаровым слоем $4\pi r^2 dr$. Тогда вероятность найти случайную величину в таком пространстве на расстоянии r от начала координат, несмотря на равномерное распределение по осям величин x, y, z будет квадратичной функцией r : $dP(r) = \text{const} \cdot 4\pi r^2 dr$.

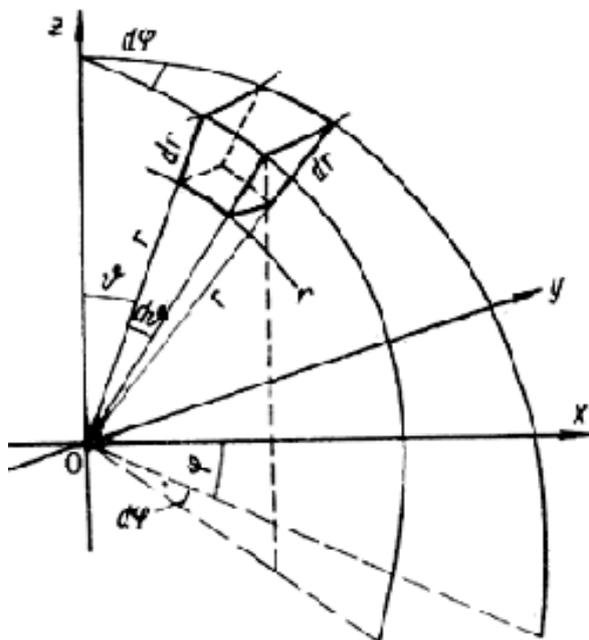


Рис. П2. К переходу от декартовых координат к сферическим

Приложение 3

Характерные скорости молекул при Максвелловском распределении. Для сравнения движения молекул газа в разных случаях вводятся некоторые характерные для распределения Максвелла скорости.

1. Самое большое число молекул $dN(v)$ приходится на скорость, соответствующую максимуму кривой $f(v)$. Поэтому соответствующая скорость называется *наивероятнейшей* (наиболее вероятной).

Чтобы найти ее значение, нужно определить при каком значении v кривая $f(v)$ проходит через максимум. Таким образом, необходимо найти

значения v экстремальных значений $f(v)$. Возьмем производную функции $f(v)$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{df(v)}{dv} = \frac{d}{dv} \left(4\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} v^2 e^{-\alpha v^2} \right) = 8\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} v e^{-\alpha v^2} - 8\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} v^3 \alpha e^{-\alpha v^2} = 0.$$

Уравнение имеет три корня: $v_1 = 0$; $v_2 = \infty$; $v_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Из графика видно, что максимуму соответствует только значение v_3 .

$$\text{Обозначим } v_g = v_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \text{ или } v_g = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Максвелловское распределение скоростей записывается одинаково для любых газов и любых температур при использовании относительной скорости $a = \frac{v}{v_g}$: $dN(a) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} a^2 e^{-a^2} da$, где $a = \frac{v}{v_g}$.

2. Средняя квадратичная скорость определяется как средний квадрат скорости по общей формуле $\langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(v^2) dv = \frac{3m}{4\alpha} : \frac{m}{2} = \frac{3}{2\alpha}$.

$$\text{И окончательно: } v_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

3. Средняя скорость максвелловского распределения находится по обычной формуле для среднего значения:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^3 dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_g^3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{v_g^2}} v^3 dv = \frac{2v_g}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} a e^{-a^2} da.$$

Интеграл $\int_0^{\infty} a e^{-a^2} da$ в указанных пределах стремится к единице, по-

$$\text{этому } \langle v \rangle = \frac{2v_g}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{4}{\pi\alpha}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Соотношение между характерными скоростями:

$$v_g : \langle v \rangle : \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 1 : 1,13 : 1,22.$$

Экзаменационные вопросы I семестра обучения

Вопрос 1. (Рейтинг 2. Коллоквиум № 1)

1. Кинематика. Системы отсчета. Связь между кинематическими параметрами. Поступательное и вращательное движения. Степени свободы.
2. Принцип относительности Галилея. Первый, второй, третий законы Ньютона. Центр масс.
3. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Центробежная и кориолисова силы инерции. Маятник Фуко.
4. Твердое тело. Система материальных точек. Момент силы. Момент импульса. Уравнение моментов. Уравнения движения.
5. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции. Теорема Штейнера.
6. Однородность и изотропность пространства. Однородность времени. Изолированная и замкнутая системы. Законы сохранения импульса и момента импульса.
7. Работа, мощность, энергия. Кинетическая энергия. Закон сохранения энергии в механике.
8. Консервативные и диссипативные силы и системы. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике.
9. Связь между потенциальной энергией и силой. Операция градиент.
10. Идеальная и вязкая жидкости. Основные уравнения равновесия и движения жидкостей. Гидростатика несжимаемой жидкости: закон Паскаля, жидкость в поле тяжести.
11. Кинематическое описание движения жидкости. Линия тока, трубка тока, стационарное и нестационарное движения. Уравнение неразрывности.
12. Уравнение Бернулли. Вязкость. Формула Ньютона.
13. Прямолинейное движение жидкостей по гладким трубам. Формула Пуазейля.

14. Основные параметры гидродинамической системы. Критерии подобия. Законы гидродинамического подобия.

15. Потенциальные и вихревые движения. Операции циркуляции и ротора.

16. Подъемная сила. Формула Жуковского - Кутта.

17. Твердое тело в стационарном потоке жидкости или газа. Подъемная сила. Сила Стокса. Эффект Магнуса.

Вопрос 2. (Рейтинг 3. Коллоквиум № 2)

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории вещества. Модель идеального газа. Методы изучения систем многих частиц.

2. Статистический метод. Метод ансамблей. Статистическое усреднение. Эргодическая гипотеза.

3. Основные понятия теории вероятности: вероятность, плотность вероятности, мат. ожидание, дисперсия, функция распределения вероятностей.

4. Макроскопическое и микроскопическое состояния системы. Изолированная, замкнутая, полуоткрытая и открытая системы. Микропереходы и флуктуации. Постулат равновероятности. Закон равнораспределения энергии. Пространственная ячейка. Фазовые точка, пространство, ячейка.

5. Гипотеза Максвелла. Распределение Гаусса.

6. Распределение молекул в пространстве скоростей. Функция Максвелла.

7. Физический смысл функции Максвелла. Характерные скорости молекул.

8. Поток молекул. Частота ударов молекул о стенку.

9. Давление газа на стенку. Уравнения равновесного состояния идеального газа.

10. Распределение Больцмана. Барометрическая формула.

11. Термодинамический процесс. Равновесные и неравновесные состояния. Обратимость и необратимость термодинамического процесса. Неравновесные состояния.

12. Первое начало термодинамики. Термодинамический процесс. Работа, теплота, внутренняя энергия. Равновесные и неравновесные состояния. Обратимость и необратимость термодинамического процесса.

13. Теплоемкость. Энтальпия. Формула Майера. Теплоемкость идеального газа. Недостаточность классической теории теплоемкостей.

14. Политропный процесс. Изопроеессы. Работа, совершаемая при изопроеессах.

15. Энтропия. Второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса. Циклический процесс. Второе начало термодинамики в формулировках Кельвина и Клаузиуса.

16. Второе начало термодинамики в формулировках Больцмана, Бриллюэна и Пригожина. Связанная энергия.

17. Термодинамические потенциалы. Критерии термодинамической устойчивости систем. Необратимые процессы.

18. Элементы теории столкновений. Эффективное сечение. Средняя длина свободного пробега. Время релаксации. Явления переноса.

19. Общее уравнение переноса. Теплопроводимость.

20. Общее уравнение переноса. Вязкость.

21. Общее уравнение переноса. Самодиффузия. Понятия взаимодиффузии и термодиффузии.

22. Реальные газы. Силы связи в молекулах. Системы молекул. Жидкое и газообразное состояния. Изотермы реального газа и жидкости. Силы Ван-дер-Ваальса.

Экзаменационные вопросы II семестра обучения

Вопрос 1. (Рейтинг 2. Коллоквиум № 1)

1. Электростатика. Предмет изучения. Теорема Ирншоу. Закон Кулона.

2. Работа в электрическом поле. Потенциальность кулоновского поля. Операция ротор вектора E . Скалярный потенциал. Потенциал поля точечного заряда.

3. Диэлектрики. Электрическое поле в диэлектриках. Вектор поляризации. Молекулярная картина поляризации. Механизмы поляризации. Влияние поляризации на электрическое поле.

4. Скалярный поток вектора. Электростатическая теорема Гаусса. Объемная плотность зарядов.

5. Операция дивергенция. Теорема Остроградского-Гаусса. Объемная плотность связанных зарядов.

6. Поверхностная плотность зарядов. Электрическое смещение. Электростатическая теорема Гаусса при наличии диэлектриков.

7. Применение теоремы Гаусса к вычислению электростатических полей: две заряженные плоскости, заряженные коаксиальные цилиндры.

8. Применение теоремы Гаусса к вычислению электростатических полей: две заряженные концентрические сферы, шар.

9. Условия на границе двух диэлектриков.

10. Электрическое поле проводников. Конденсаторы. Электроемкость. Постоянный электрический ток.

11. Дифференциальная форма закона Ома. Дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Понятие о сегнетоэлектриках.

12. Магнитное поле в вакууме. Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Сила Лоренца. Вектор магнитной индукции. Сила Ампера.

13. Закон Био – Савара. Закон полного тока. Магнитное поле бесконечно длинного прямолинейного проводника с током.

14. Закон Био – Савара. Закон полного тока. Магнитное поле замкнутого витка с током.

Вопрос 2. (Рейтинг 3. Коллоквиум № 2).

1. Магнитное поле в веществе. Магнетики. Диа-, пара-, ферромагнетики. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Магнитные проницаемость и восприимчивость.

2. Второе уравнение Максвелла. Условия на границе двух магнетиков.

3. Электромагнитная индукция. Явление самоиндукции. Правило Ленца.

4. Теорема Стокса. Первое уравнение Максвелла.

5. Закон сохранения заряда. Связь между магнитным полем и движущимися зарядами. Ток смещения. Третье уравнение Максвелла.

6. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах.
7. Электромагнитные колебания. Идеальный контур. Электромагнитные колебания в контуре Томпсона. Добротность контура.
8. Электромагнитные колебания в контуре RLC .
9. Переменный ток в RLC -контуре. Импеданс. Резонанс напряжений.
10. Электромагнитные волны. Энергия и плотность потока энергии. Вектор Пойтинга. Уравнение Д'Аламбера. Решения волнового уравнения. Волновой вектор. Электромагнитная природа света
11. Геометрическая оптика. Приближения геометрической оптики. Принцип Гюйгенса. Законы отражения и преломления. Принцип Ферма.
12. Поляризация электромагнитной волны. Явление Брюстера. Монохроматический и хаотический свет.
13. Интерференция света. Время разрешения. Когерентность.
14. Интерференция в тонких пленках. Оптическая длина пути. Линии равного наклона.
15. Дифракция света. Принцип Гюйгенса – Френеля. Ограничения Френеля. Зоны Френеля.
16. Дифракция от круглого отверстия.
17. Дифракция от круглого диска. Пятно Пуассона.
18. Дисперсия. Нормальная и аномальная дисперсия.
19. Фурье-преобразование

Библиографический список

1. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М. : Наука. ГРФМЛ, 1969. – 736 с.
2. Мандельштам, Л. И. Лекции по теории колебаний / Л. И. Мандельштам. – М. : Наука, 1972. – 470 с.
3. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности : учеб. пособие для физ. спец. вузов / А. Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1986. – 320 с.
4. Матвеев, А. Н. Молекулярная физика : учеб. пособие для физ. спец. вузов / А. Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1987. – 360 с.
5. Матвеев, А. Н. Электричество и магнетизм : учеб. пособие для физ. спец. вузов / А. Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1986. – 480 с.
6. Матвеев, А. Н. Оптика : учеб. пособие для физ. спец. вузов./ А. Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1985. – 351 с.

7. *Ноздрев, В. Ф.* Курс статистической физики : учеб. пособие./ В. Ф. Ноздрев, А. А. Сенкевич. – М. : Высш. шк., 1969. – 288 с.

8. *Парселл, Э.* Электричество и магнетизм : учеб. рук-во / Э. Парселл / пер. с англ. – М. : Наука. ГРФМЛ, 1983. – 416 с.

9. *Поль, Р. В.* Механика, акустика и учение о теплоте / Р. В. Поль / пер. с нем. – М. : Наука. ГРФМЛ, 1971. 480 с.

10. *Савельев, И. В.* Курс общей физики. Механика. Молекулярная физика : учеб. пособие / И. В. Савельев. – Т. 1. – М. : Наука. ГРФМЛ, 1982. – 432 с.

11. *Савельев, И. В.* Курс общей физики: учебное пособие. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика : учеб. пособие / И. В. Савельев. –Т. 2. – М. : Наука. ГРФМЛ, 1988. – 496 с.

12. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. Механика : учеб. пособие для вузов / Д. В. Сивухин. – Т. 1. – М. : Наука. ГРФМЛ, 1989. – 576 с.

13. *Сивухин, Д. В.* Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика: учеб. пособие для вузов / Д. В. Сивухин. – Т. 2. – М. : Наука. ГРФМЛ, 1990. – 592 с.

14. *Фейман, Р.* Феймановские лекции по физике. Современная наука о природе. Законы механики. Пространство. Время. Движение. / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс / пер. с англ. – Т. 1, 2. – М. : Мир, 1976. – 440 с.

15. *Фейман, Р.* Феймановские лекции по физике. Электричество и магнетизм. / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс / пер. с англ. – Т. 5. – М. : Мир, 1977. – 302 с.

16. *Фейман, Р.* Феймановские лекции по физике. Физика сплошных сред. / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс / пер. с англ. – Т. 7. – М. : Мир, 1977. – 288 с.

17. Теплотехника : учеб. для вузов / В. Н. Луканин, М. Г. Шатров, Г. М. Камфер [и др.] ; под ред. В. Н. Луканина. – М. : Высш. шк., 1999. – 671 с.

18. *Ремизов, А. Н.* Медицинская и биологическая физика : учеб. для мед. спец. вузов / А. Н. Ремизов. – М. : Высш. шк., 1996. – 608 с.

Оглавление

Предисловие	3
Часть 1. Механика	4
Кинематика поступательного и вращательного движений материальной точки и твердого тела.	4
Предмет и объект изучения. Система отсчета. Скорость и ускорение. Кинематика твердого тела. Принцип относительности Галилея.	
Динамика поступательного движения.	9
К понятию силы. Измерение силы. Законы Ньютона. Об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Центробежная и кориолисова силы инерции. Уравнение моментов.	
Механика твердого тела	14
Уравнения движения твердого тела. Центр масс. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Формула Штейнера.	
Законы сохранения	15
Закон сохранения импульса. Закон сохранения момента импульса. Работа, мощность, энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии. Внутренняя энергия. Связь между потенциальной энергией и силой.	
Механика жидкости и газа	21
Элементы механики сплошных сред. Основные уравнения равновесия и движения жидкостей. Гидростатика несжимаемой жидкости. Кинематическое описание движения жидкости. К теореме о неразрывности струи. Уравнение Бернулли. Вязкость. Стационарное движение жидкости в прямолинейной трубе. Формула Пуазейля. Элементы теории гидродинамического подобия. Потенциальные и вихревые движения. Теорема Жуковского. Подъемная сила. Эффект Магнуса.	
Об упругих деформациях и напряжениях	33
Растяжение и сжатие стержней. Закон Гука.	
Часть 2. Молекулярная физика	34
Основные положения. Динамический метод. Статистический метод. Термодинамический метод.	

Статистический метод	37
Основные понятия теории вероятности. Макроскопическое и микроскопическое состояние системы. Фазовое пространство. Фазовая точка. Фазовая ячейка. Постулат равновероятности. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Распределение Максвелла. Характерные скорости распределения Максвелла. Частота ударов молекул о стенку. Давление газа на стенку. Распределение Больцмана. Барометрическая формула. Распределение Максвелла – Больцмана.	
Термодинамический метод	51
Определения термодинамики равновесных состояний. Первое начало термодинамики. О равновесных и неравновесных состояниях. Теплоемкость. Соотношение между теплоемкостями идеального газа. Формула Майера. Теплоемкость идеального газа. Процессы в идеальных газах. Энтропия идеального газа. Циклические процессы. Формулировки Кельвина и Клаузиуса второго начала термодинамики. Коэффициент полезного действия. Вычисление КПД цикла Карно с помощью энтропии. Термодинамические потенциалы. Подход И.Р. Пригожина. Энтропия и энергия.	
Элементы физической кинетики	70
Элементы теории столкновений. Общее уравнение переноса. Теплопроводимость. Вязкость. Самодиффузия. О взаимодиффузии и термодиффузии.	
Реальные газы	75
Системы молекул. Жидкое и газообразное состояние. Изотермы реального газа и жидкости. Свойства вещества в критическом состоянии. Критическая опалесценция. Теплота фазового превращения. Уравнение Ван-дер-Ваальса.	
Часть 3. Электричество и магнетизм	81
Электростатика	81
Предмет изучения. Закон Кулона. Работа в электрическом поле. Потенциальность кулоновского поля. Ротор вектора. Градиент потенциальной функции. Скалярный потенциал.	
Электрическое поле в диэлектриках	84
Диэлектрики. Механизмы поляризации. Влияние поляризации на электрическое поле. Электростатическая теорема Гаусса. Скалярный поток частиц. Скалярный поток векторного поля. Дивергенция векторного поля. Связанные заряды. Формула Пуассона и условие Лапласа. Диэлектрическое смещение. Условия на границе двух диэлектриков. Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса.	

Электрическое поле проводников	95
Заряженный проводник. Проводник во внешнем электрическом поле. Полый проводник во внешнем поле.	
Постоянный электрический ток	96
Сила тока. Плотность тока. Дифференциальная форма закона Ома. Механизм существования постоянного тока. Дифференциальная форма закона Джоуля – Ленца. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Сегнетоэлектрики.	
Магнитное поле в вакууме	100
Магнитная сила. Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био – Савара. Закон полного тока.	
Магнитное поле в веществе	103
Магнетики. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Условия на границе двух магнетиков.	
Электромагнитная индукция	107
Индукция токов. Закон электромагнитной индукции. Явление самоиндукции. Правило Ленца.	
Уравнения Максвелла	109
Ротор векторной функции. Формула Стокса. Первое уравнение Максвелла. Закон сохранения заряда. Связь между магнитным полем и движущимися зарядами. Система уравнений Максвелла. Ток смещения.	
Часть 4. Электромагнитные колебания и волны	114
Электромагнитные колебания	114
Электромагнитные колебания в RLC-контуре. Идеальный колебательный контур. Переменный ток. Нестационарный случай.	
Электромагнитные волны	121
Волновое уравнение. Шкала электромагнитных волн. Электромагнитная природа света.	
Часть 5. Оптика	123
Геометрическая оптика	123
Законы отражения и преломления. Принцип Ферма. Полное внутреннее отражение.	
Поляризация света	125
Закон Брюстера. Механизм поляризации света.	

Интерференция света	128
Принцип суперпозиции при сложении световых волн. Интенсивность при сложении световых волн. Понятие когерентности. Время разрешения. Способы получения когерентных лучей. Интерференция в тонких пленках. Оптическая длина пути. Отражение от параллельных поверхностей. Линии равного наклона.	
Дифракция света	132
Принцип Гюйгенса. Принцип Гюйгенса – Френеля. Ограничения Френеля. Зоны Френеля. Дифракция от круглого отверстия. Дифракция от круглого диска. Пятно Пуассона. Недостатки метода зон Френеля.	
Дисперсия света	140
Фурье-преобразование	142
История вопроса. Музыкальные звуки. Ряд Фурье. Качество и гармония. Коэффициенты Фурье. Наложение частот.	
Заключение	148
Приложения	148
Библиографический список	155

Учебное издание

КУЗНЕЦОВ Артемий Артемьевич

ФИЗИКА

Механика. Молекулярная физика.

Электричество и магнетизм. Электромагнитные колебания и волны. Оптика

Учебное пособие

Подписано в печать 18.10.13.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 9,30. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.