

Министерство образования Российской Федерации  
Владимирский государственный университет

В. И. Данченко Д. Я. Данченко  
В. А. Склярёнок

# АППРОКСИМАЦИЯ МНОГЧЛЕНАМИ ФУНКЦИЙ И ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Владимир 2004

ВВК ?  
УДК ?

Рецензенты:

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Владимирского государственного университета

**В. И. Данченко Д. Я. Данченко В. А. Скляренко**

В 15 Аппроксимация многочленами функций и векторных полей / Владимир. гос. ун-т. Владимир. 38 с.

Издание соответствует программе университетского курса „Дополнительные главы теории функций и функционального анализа“. Содержатся необходимые теоретические сведения и список задач для самостоятельного решения.

Издание может использоваться студентами потоков с углубленным изучением математики.

Ил. 14. Библиогр. 9 назв.  
ISBN ?

УДК ?

## Предисловие

Пособие содержит краткий теоретический материал и задачи по аппроксимации многочленами действительных функций и плоских векторных полей.

Пособие состоит из двух частей. В первой части приводится постановка классической задачи аппроксимации Чебышёва непрерывных функций многочленами в равномерной метрике на отрезке. В терминах чебышёвского альтернанса формулируется критерий наилучшего приближения и описывается алгоритм Ремеза построения многочлена наилучшего приближения непрерывной функции. Приводится пример поэтапной реализации алгоритма.

Здесь же рассматриваются аппроксимативные свойства частичных сумм рядов Фурье по ортонормированным системам в евклидовом пространстве. На примере разбирается важный случай аппроксимации ортонормированными системами многочленов с весом.

Во второй части пособия рассматриваются простейшие модели плоского установившегося течения жидкости и связь гидродинамики с теорией функций комплексного переменного. Предлагается метод полиномиальной аппроксимации соленоидальных векторных полей на кривых. Метод демонстрируется на примере построения течения с постоянной завихренностью, обтекающего заданную кривую.

Пособие рассчитано на студентов старших курсов технических и физико-математических специальностей вузов. Для самостоятельной работы предлагается 4 задачи (60 вариантов каждой), которые могут быть взяты за основу курсовых или дипломных работ по соответствующим темам.

Для выполнения заданий предполагается знание основ теории функций, функционального анализа, теории функций комплексного переменного. При проведении вычислений могут использоваться такие системы численных расчетов как Maple, Mathematica, MathCAD, MatLAB и другие.

# I. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

## 1. Приближение функций многочленами в пространстве $L_2$

Среди задач математики одной из важнейших является приближение в том или ином смысле одних объектов другими объектами, имеющими более простую природу. Наиболее просто и полно решается эта задача в случае приближения векторов *евклидова пространства* — линейного пространства со скалярным произведением. В таком пространстве справедлива теорема об *элементе наилучшего приближения* (см. [1, с. 141]).

**Теорема.** Если  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  — ортонормированная система векторов евклидова пространства  $R$ , то для любого вектора  $f \in R$  и любого набора коэффициентов  $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$  справедливо соотношение

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\| \geq \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2}.$$

Из теоремы следует, что в *линейной оболочке*

$$L = \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \left\{ x \in R : x = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$$

существует и единственен *элемент наилучшего приближения*  $s_n$  для  $f$ , являющийся частичной суммой его *ряда Фурье* по ортонормированной системе  $\{\varphi_k\}$ :  $s_n = \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k$ .

При построении ортонормированной системы векторов в евклидовом пространстве используется *метод ортогонализации Грама — Шмидта* (см. [1, с. 139]).

**Теорема.** Пусть  $g_1, g_2, \dots, g_k, \dots$  — линейно независимая система элементов в евклидовом пространстве  $R$ . Тогда в  $R$  существует система элементов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots$ , удовлетворяющая условиям:

1. система  $\{\varphi_k\}$  ортогональна и нормированна;
2. каждый из элементов  $\varphi_k$  представим в виде

$$\varphi_k = a_{k1}g_1 + \dots + a_{kk}g_k, \quad \text{где } a_{kk} \neq 0;$$

3. каждый из элементов  $g_k$  представим в виде

$$g_k = b_{k1}\varphi_1 + \dots + b_{kk}\varphi_k, \quad \text{где } b_{kk} \neq 0.$$

Элементы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots$  определены с точностью до множителей  $\pm 1$ .

Элементы  $\varphi_k$  строятся последовательно:

$$\varphi_1 = a_{11}g_1, \quad a_{11} = \frac{1}{\sqrt{(g_1, g_1)}}; \quad (1)$$

если элементы  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$  уже построены, то

$$\varphi_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}, \quad \text{где } h_k = g_k - \sum_{i=1}^{k-1} (g_k, \varphi_i) \varphi_i. \quad (2)$$

Одним из наиболее важных в практическом плане случаев является приближение функций многочленами по метрике пространства  $L_2$  (см. [2]).

Приведем необходимые определения и обозначения.

Под *пространством суммируемых с квадратом на  $[a, b]$  с весом  $\rho(x)$  функций*  $L_2 = L_2(a, b, \rho)$  будем понимать совокупность измеримых на  $(a, b)$  функций  $f(x)$ , для которых  $\int_a^b f^2(x)\rho(x) dx < \infty$ , где интеграл понимается как интеграл Лебега, а *весовая функция*  $\rho(x)$  удовлетворяет условиям:  $\rho(x) > 0$ ,  $\int_a^b x^n \rho(x) dx < \infty$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Пространство  $L_2$  является евклидовым, со скалярным произведением  $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x) dx$ , полным по метрике

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_a^b f^2(x)\rho(x) dx \right)^{1/2},$$

то есть *гильбертовым пространством*.

Применяя процесс ортогонализации к последовательности степеней  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ , получим последовательность ортогональных многочленов  $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots\}$ . Для любой функции  $f(x) \in L_2$  можно определить ряд Фурье по системе  $\{\varphi_k(x)\}$

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) \rho(x) dx, \quad (3)$$

и его частичные суммы  $s_n(f, x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$  лучше любых других многочленов степени  $n$  приближают  $f(x)$  по метрике пространства  $L_2$ .

**Пример 1.** Получить с помощью процедуры Грама — Шмидта из функций  $g_k(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ , ортонормированную систему многочленов  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{10}$  на отрезке  $[0, 2]$  с весом  $\rho(x) = \frac{1}{x^2+x+2}$ .

Для функции  $f(x) = x + |5|x - 1| - 4/3|$  найти по полученной ортонормированной системе частичную сумму ряда Фурье  $s_{10}(f, x)$ .

Оценить нормы разности

$$\|f - s_{10}\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 2]} |f(x) - s_{10}(f, x)| \text{ — в равномерной метрике, и}$$

$$\|f - s_{10}\|_2 = \sqrt{\int_0^2 (f(x) - s_{10}(f, x))^2 \rho(x) dx} \text{ — в интегральной.}$$

Изобразить графики функций  $f(x)$ ,  $s_{10}(f, x)$  и  $f(x) - s_{10}(f, x)$ .

**Решение.** По формулам (1) и (2),

$$\varphi_k(x) = h_k(x) / \sqrt{\int_0^2 h_k^2(x) \rho(x) dx},$$

где

$$h_0(x) = 1, \quad h_k(x) = x^k - \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(x) \int_0^2 x^k \varphi_i(x) \rho(x) dx,$$

последовательно находим ортогональные многочлены:

$$\varphi_0(x) = 1.3529,$$

$$\varphi_1(x) = 2.4655x - 1.8953,$$

$$\varphi_2(x) = 4.7402x^2 - 8.5886x + 2.3738,$$

$$\varphi_3(x) = 9.3400x^3 - 26.321x^2 + 19.180x - 2.7643,$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(x) &= 18.529x^4 - 70.786x^3 + 85.604x^2 - 34.966x + 3.1054, \\ \varphi_5(x) &= 36.869x^5 - 177.75x^4 + 301.95x^3 - 213.67x^2 + 56.583x - 3.4123, \\ \varphi_6(x) &= 73.478x^6 - 427.77x^5 + 937.65x^4 - 957.02x^3 + \\ &\quad + 453.08x^2 - 84.605x + 3.6939, \\ \varphi_7(x) &= 146.58x^7 - 999.96x^6 + 2687.2x^5 - 3602.2x^4 + 2511.3x^3 - \\ &\quad - 859.01x^2 + 119.56x - 3.9554, \\ \varphi_8(x) &= 292.58x^8 - 2288.6x^7 + 7286.6x^6 - 12127.x^5 + 11266.x^4 - \\ &\quad - 5770.7x^3 + 1500.3x^2 - 161.93x + 4.2006, \\ \varphi_9(x) &= 584.25x^9 - 5154.4x^8 + 18975.x^7 - 37768.x^6 + 44029.x^5 - \\ &\quad - 30420.x^4 + 12009.x^3 - 2460.3x^2 + 212.18x - 4.4323, \\ \varphi_{10}(x) &= 1167.0x^{10} - 11463.x^9 + 47906.x^8 - 111060.x^7 + 156110.x^6 - \\ &\quad - 136590.x^5 + 73487.x^4 - 23131.x^3 + 3837.9x^2 - 270.75x + 4.6525. \end{aligned}$$

Построим графики функций  $y = \varphi_k(x)$  для  $k = 1, \dots, 5$  (рис. 1) и для  $k = 6, \dots, 10$  (рис. 2).

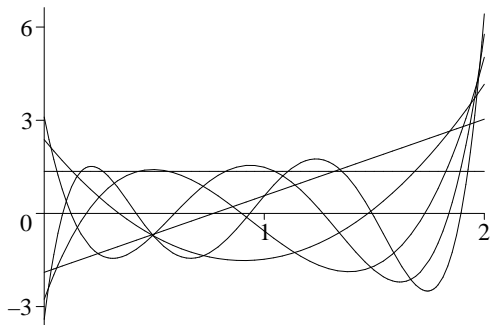


Рис. 1

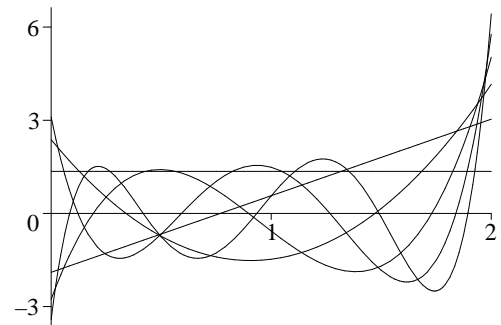


Рис. 2

Находим далее по формулам (3)  $c_k = \int_0^2 f(x)\varphi_k(x)\rho(x) dx$  — коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} c_0 &= 1.7467, & c_1 &= 0.14586, & c_2 &= 0.71994, \\ c_3 &= -0.010356, & c_4 &= 0.021517, & c_5 &= 0.042232, \\ c_6 &= -0.11109, & c_7 &= -0.043723, & c_8 &= 0.11677, \\ c_9 &= 0.036329, & c_{10} &= -0.097784. \end{aligned}$$

Составляем последовательность  $s_n(f, x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$ , частичных сумм ряда Фурье по системе  $\{\varphi_k(x)\}$ .

$$\begin{aligned}
 s_0(f, x) &= 2.3631, \\
 s_1(f, x) &= 0.35964x + 2.0866, \\
 s_2(f, x) &= 3.4126x^2 - 5.8236x + 3.7956, \\
 s_3(f, x) &= -0.096723x^3 + 3.6852x^2 - 6.0222x + 3.8243, \\
 s_4(f, x) &= 0.39869x^4 - 1.6198x^3 + 5.5272x^2 - 6.7746x + 3.8911, \\
 s_5(f, x) &= 1.5570x^5 - 7.1082x^4 + 11.132x^3 - 3.4966x^2 - 4.3850x + 3.7470, \\
 s_6(f, x) &= -8.1629x^6 + 49.079x^5 - 111.27x^4 + 117.45x^3 - \\
 &\quad -53.831x^2 + 5.0140x + 3.3366, \\
 s_7(f, x) &= -6.4089x^7 + 35.559x^6 - 68.412x^5 + 46.227x^4 + \\
 &\quad +7.6484x^3 - 16.272x^2 - 0.21341x + 3.5096, \\
 s_8(f, x) &= 34.165x^8 - 273.65x^7 + 886.42x^6 - 1484.5x^5 + \\
 &\quad +1361.8x^4 - 666.21x^3 + 158.92x^2 - 19.122x + 4.0001, \\
 s_9(f, x) &= 21.225x^9 - 153.09x^8 + 415.67x^7 - 485.66x^6 + \\
 &\quad +115.01x^5 + 256.67x^4 - 229.95x^3 + 69.537x^2 - 11.414x + 3.8391, \\
 s_{10}(f, x) &= -114.12x^{10} + 1142.1x^9 - 4837.5x^8 + 11275.x^7 - 15750.x^6 + \\
 &\quad +13471.x^5 - 6929.2x^4 + 2031.9x^3 - 305.75x^2 + 15.061x + 3.3841.
 \end{aligned}$$

Строим графики функций  $y = f(x)$  и  $y = s_k(f, x)$ ,  $k = 0, \dots, 5$  (рис. 3),  $y = f(x)$  и  $y = s_k(f, x)$ ,  $k = 6, \dots, 9$  (рис. 4), а также графики функций  $y = f(x)$  и  $y = s_{10}(f, x)$  (рис. 5) и разности  $y = f(x) - s_{10}(f, x)$  (рис. 6).

Вычислим  $N_k = \sqrt{\int_0^2 (f(x) - s_k(f, x))^2 \rho(x) dx}$  — нормы разности  $f - s_k$  в пространстве  $L_2$ :

$$\begin{aligned}
 N_0 &= 0.76802, & N_1 &= 0.75405, & N_2 &= 0.22423, \\
 N_3 &= 0.22399, & N_4 &= 0.22295, & N_5 &= 0.21892, \\
 N_6 &= 0.18863, & N_7 &= 0.18350, & N_8 &= 0.14155, \\
 N_9 &= 0.13681, & N_{10} &= 0.095677.
 \end{aligned}$$



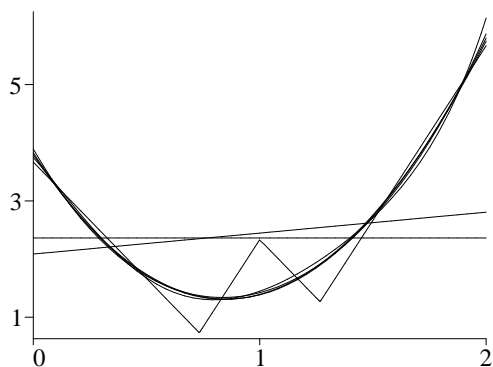


Рис. 3

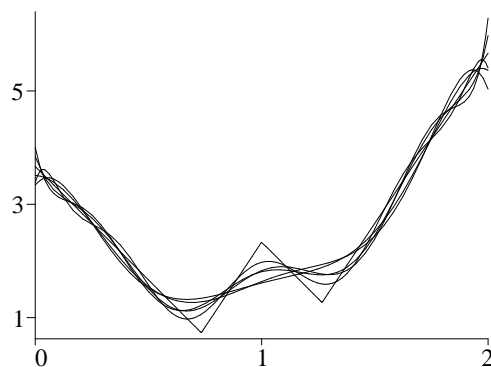


Рис. 4

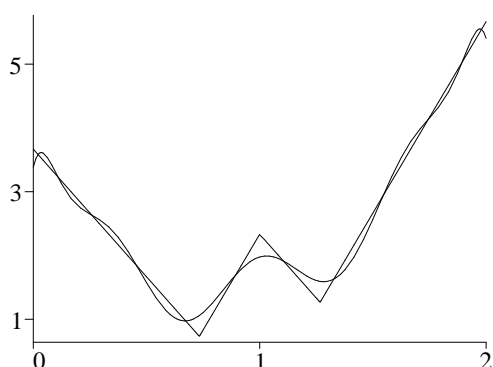


Рис. 5

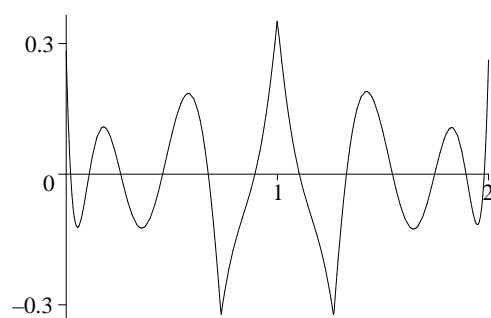


Рис. 6

Норма разности  $f - s_k$  в равномерной метрике,

$$\|f - s_{10}\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 2]} |f(x) - s_{10}(f, x)| = 0.35624.$$

Вычисления велись с точностью до 30 значащих цифр. На печать выводились 5 значащих цифр.

## 2. Приближение функций многочленами в пространстве $C[a, b]$

Более сложной, хотя в некотором смысле более естественной, чем приближение в  $L_2$ , является задача приближения непрерывной функции многочленами в *равномерной метрике*  $\|f - g\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ .

Многочлен  $P_n^*(x)$  называется *многочленом наилучшего приближения* для заданной непрерывной функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  в равномерной метрике или *многочленом, наименее уклоняющимся от  $f(x)$  на  $[a, b]$* , если  $\|f - P_n^*\|_\infty = \inf \|f - P_n\|_\infty$ , где нижняя грань берется по всем многочленам степени не выше  $n$ , а ее значение  $E_n(f)$  — *величина наилучшего приближения*. Для любой непрерывной функции  $f(x)$  многочлен ее наилучшего приближения существует. При этом, однако, за исключением отдельных специальных случаев, задача о точном построении многочлена наилучшего приближения неразрешима.

Следующий основополагающий результат теории приближений принадлежит Л. П. Чебышёву (см. [3, с. 12]).

**Теорема.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  задана непрерывная функция  $f(x)$ . Тогда для того, чтобы некоторый многочлен  $P_n^*(x)$  степени не выше  $n$  был многочленом, наименее уклоняющимся от  $f(x)$ , необходимо и достаточно, чтобы на  $[a, b]$  нашлась по крайней мере одна система из  $n + 2$  точек  $x_j$ ,  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$ , в которых разность  $r_n(x) = f(x) - P_n^*(x)$

1. поочередно принимает значения разных знаков,
2. достигает по модулю наибольшего на  $[a, b]$  значения, то есть в точках  $x_j$  должны выполняться условия:

$$r_n(x_1) = -r_n(x_2) = r_n(x_3) = \dots = (-1)^{n+1} r_n(x_{n+2}) = \pm \|r_n(x)\|_\infty.$$

Систему точек  $\{x_j\}_{j=1}^{n+2}$ , в которых имеют место эти равенства, называют *чебышёвским альтернансом*.

Из теоремы Чебышёва, в частности, следует, что многочлен наилучшего приближения  $P_n^*(x)$  для функции  $f(x) \in C[a, b]$  единственен.

Среди приближенных методов построения многочленов наилучшего приближения в равномерной метрике наибольшую практическую ценность представляет алгоритм, предложенный в 1957 г. Е. Я. Ремезом (см. [3, с. 74]).

Опишем этот алгоритм.

**1-й шаг.** Возьмем на  $[a, b]$  последовательность из  $n + 2$  точек  $\{x_j^{(1)}\}$ :

$$a \leq x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < \dots < x_{n+2}^{(1)} \leq b.$$

Начальная последовательность  $\{x_j^{(1)}\}$  может быть, вообще говоря, любой, но для ускорения сходимости разумно взять, например, последовательность

$$x_j^{(1)} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{n+2-j}{n+1}\pi\right), \quad j = 1, 2, \dots, n+2. \quad (4)$$

**2-й шаг.** По последовательности  $\{x_j^{(1)}\}$  строим многочлен  $P_n^{(1)}(x)$  степени не выше  $n$ , наилучшим образом приближающий функцию  $f(x)$  на множестве точек  $\{x_j^{(1)}\}$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы разность  $r_n^{(1)}(x) = f(x) - P_n^{(1)}(x)$  принимала в точках  $\{x_j^{(1)}\}$  значения равные по величине, но чередующиеся по знаку:

$$r_n^{(1)}(x_j^{(1)}) = f(x_j^{(1)}) - P_n^{(1)}(x_j^{(1)}) = \pm(-1)^j \underline{E}_n^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n+2,$$

где  $\underline{E}_n^{(1)}$  — значение отклонения  $P_n^{(1)}(x)$  от  $f(x)$  в точках  $\{x_j^{(1)}\}$ . В качестве  $P_n^{(1)}(x)$  можно взять

$$P_n^{(1)}(x) = \sum_{j=2}^{n+2} (f(x_j^{(1)}) + (-1)^j L_1) l_j^{(1)}(x),$$

где

$$l_j^{(1)}(x) = \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^{n+2} \frac{x - x_i^{(1)}}{x_i^{(1)} - x_j^{(1)}}, \quad j = 2, \dots, n+2, \quad \text{а} \quad L_1 = \frac{f(x_1^{(1)}) - \sum_{j=2}^{n+2} f(x_j^{(1)}) l_j^{(1)}(x_1^{(1)})}{\sum_{j=2}^{n+2} (-1)^j l_j^{(1)}(x_1^{(1)}) - 1}.$$

Каждый из многочленов  $l_j^{(1)}(x)$  равен нулю при  $x = x_i^{(1)}$ ,  $i \neq 1$ ,  $i \neq j$ , и единице при  $x = x_j^{(1)}$ . Поэтому при любом значении  $L_1$  разность  $f(x) - P_n^{(1)}(x)$  в точках  $x_i^{(1)}$ ,  $i \neq 1$  по величине равна  $L_1$  и чередуется по знаку. Значение  $L_1$  подобрано так, чтобы эти свойства выполнялись и для  $i = 1$ .

Несложно показать, что из теоремы Валле-Пуссена [3, с. 33] следует выполнение неравенства  $\underline{E}_n^{(1)} \leq E_n(f)$ , где  $E_n(f) = \|f - P_n^*\|_\infty$  — величина наилучшего приближения. Кроме того, очевидным образом выполняется неравенство  $E_n(f) \leq \bar{E}_n^{(1)}$ , где  $\bar{E}_n^{(1)} = \|f - P_n^{(1)}\|_\infty$ . При этом по теореме Чебышёва, если  $E_n(f) = \bar{E}_n^{(1)}$ , то выполняется

равенство  $P_n^{(1)}(x) = P_n^*(x)$  и построение завершено, поэтому будем считать, что  $E_n(f) < \bar{E}_n^{(1)}$ .

**3-й шаг.** Теперь по многочлену  $P_n^{(1)}(x)$  и последовательности  $\{x_j^{(1)}\}$  конструируем новую последовательность  $\{x_j^{(2)}\}$

$$\{x_j^{(2)}\}, \quad a \leq x_1^{(2)} < x_2^{(2)} < \dots < x_{n+2}^{(2)} \leq b,$$

так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} r_n^{(1)}(x_{j+1}^{(2)}) &= -\operatorname{sgn} r_n^{(1)}(x_j^{(2)}), \\ |r_n^{(1)}(x_j^{(2)})| &\geq \underline{E}_n^{(1)}, \quad \max_j |r_n^{(1)}(x_j^{(2)})| = \bar{E}_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Хотя для того, чтобы удовлетворить этим условиям, достаточно заменить только одну из  $\{x_j^{(1)}\}$  на  $\bar{x}$ , точку, в которой реализуется

$$\max_{x \in [a,b]} |r_n^{(1)}(x)| = \|f - P_n^{(1)}\|_\infty = \bar{E}_n^{(1)},$$

для ускорения сходимости желательно как можно больше точек из  $\{x_j^{(1)}\}$  заменить новыми так, чтобы  $|r_n^{(1)}(x_{j+1}^{(2)})|$  были возможно большими.

Можно воспользоваться конструкцией (см. [4, с. 227]), срабатывающей в большинстве случаев: в качестве  $x_1^{(2)}$  берется точка, в которой  $\operatorname{sgn} L_1 \cdot r_n^{(1)}(x)$  принимает наименьшее значение на отрезке  $[a, x_2^{(1)}]$ ,  $x_2^{(2)}$  — точка отрезка  $[x_1^{(2)}, x_3^{(2)}]$ , в которой  $\operatorname{sgn} L_1 \cdot r_n^{(1)}(x)$  принимает наибольшее значение и т. д. Точка  $x_{n+2}^{(2)}$  — точка отрезка  $[x_{n+2}^{(2)}, b]$ , в которой  $\operatorname{sgn} L_1 \cdot r_n^{(1)}(x)$  принимает наибольшее значение при четном и наименьшее значение при нечетном  $n$ .

Построив последовательность  $\{x_j^{(2)}\}$ , конструируем по ней и по функции  $r_n^{(1)}(x)$ , повторяя 2-й шаг, многочлен  $\pi_n^{(2)}(x)$ , наилучшим образом приближающий  $r_n^{(1)}(x)$  на  $\{x_j^{(2)}\}$ , а затем полагаем

$$\begin{aligned} P_n^{(2)}(x) &= P_n^{(1)}(x) + \pi_n^{(2)}(x), \quad r_n^{(2)}(x) = f(x) - P_n^{(2)}(x), \\ \underline{E}_n^{(2)} &= |L_2|, \quad \bar{E}_n^{(2)} = \max_{x \in [a,b]} |r_n^{(2)}(x)|. \end{aligned}$$

**4-й шаг,** как и все последующие, повторяет 3-й шаг.

При этом, как доказал Е. Я. Ремез [3, с. 76],

$$\bar{E}_n^{(k)} - E_n(f) = \|f - P_n^{(k)}\|_\infty - E_n(f) \leq Aq^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $A > 0$  и  $0 < q < 1$  — некоторые постоянные. Другими словами, алгоритм Ремеза сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Итерации останавливают при выполнении неравенства  $\bar{E}_n^{(k)} - \underline{E}_n^{(k)} \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  заранее задано.

**Пример 2.** Используя алгоритм Ремеза, на отрезке  $[0, 2]$  построить приближенно многочлен  $P_7^*(x)$  наилучшего приближения в равномерной метрике степени не выше 7 для функции  $f(x) = x + |5|x - 1| - 4/3|$  с погрешностью  $\bar{E}_n^{(k)} - \underline{E}_n^{(k)} \leq 10^{-10}$ .

Изобразить графики  $f(x)$ ,  $P_7^*(x)$  и  $f(x) - P_7^*(x)$ .

Указать точки альтернанса.

Оценить норму разности  $\|f - P_7^*\|_\infty = \max_{x \in [0, 2]} |f(x) - P_7^*(x)|$  в равномерной метрике.

Сравнить с результатом предыдущей задачи.

**Решение.** В качестве начального приближения последовательности точек альтернанса возьмем (4)

$$x_j^{(1)} = 1 + \cos\left(\frac{9-j}{8}\pi\right), \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

$$\{x_j^{(1)}\} = \{0., 0.076120, 0.29289, 0.61732, 1., 1.3827, 1.7071, 1.9239, 2.\}.$$

Применяя алгоритм Ремеза, получим на первом шаге

$$P_7^{(1)}(x) = -11.948x^6 + 71.688x^5 - 160.11x^4 + 162.51x^3 - 69.373x^2 + 5.8989x + 3.4577.$$

На рис. 7, 8 изображены графики функций  $y = f(x)$ ,  $y = P_7^{(1)}(x)$  и  $y = f(x) - P_7^{(1)}(x)$  соответственно,  $\underline{E}_7^{(1)} = 0.20901$ ,  $\bar{E}_7^{(1)} = 0.86406$ .

Повторяя итерации, последовательно находим

$$\{x_j^{(2)}\} = \{0., 0.12585, 0.46223, 0.73333, 1., 1.2667, 1.5378, 1.8741, 2.\},$$

$$\underline{E}_7^{(2)} = 0.50359, \quad \bar{E}_7^{(2)} = 0.56018,$$

$$P_7^{(2)}(x) = -18.339x^6 + 110.04x^5 - 248.00x^4 + 258.42x^3 - 118.95x^2 + 15.505x + 3.1631;$$

$$\{x_j^{(3)}\} = \{0., 0.12814, 0.46257, 0.73333, 1., 1.2667, 1.5374, 1.8719, 2.\},$$

$$\underline{E}_7^{(3)} = 0.51637, \quad \bar{E}_7^{(3)} = 0.51659,$$

$$P_7^{(3)}(x) = -17.828x^6 + 106.97x^5 - 241.25x^4 + 251.92x^3 - 116.46x^2 + 15.328x + 3.1503;$$

$$\{x_j^{(4)}\} = \{0., 0.12814, 0.46255, 0.73333, 1., 1.2667, 1.5374, 1.8719, 2.\},$$

$$\underline{E}_7^{(4)} = 0.51639, \quad \overline{E}_7^{(4)} = 0.51639,$$

$$P_7^{(4)}(x) = -17.825x^6 + 106.95x^5 - 241.23x^4 + 251.89x^3 - 116.45x^2 + 15.324x + 3.1503;$$

$$\{x_j^{(5)}\} = \{0., 0.12814, 0.46255, 0.73333, 1., 1.2667, 1.5374, 1.8719, 2.\},$$

$$\underline{E}_7^{(5)} = 0.51639, \quad \overline{E}_7^{(5)} = 0.51639,$$

$$P_7^{(5)}(x) = -17.825x^6 + 106.95x^5 - 241.23x^4 + 251.89x^3 - 116.45x^2 + 15.324x + 3.1503.$$

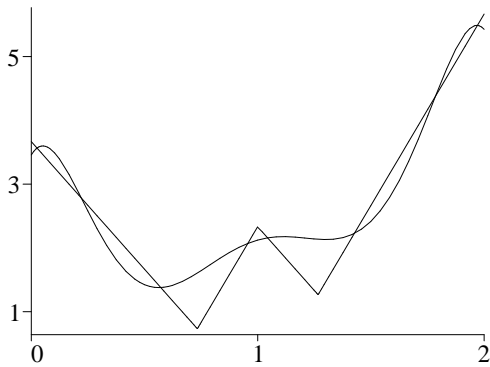


Рис. 7

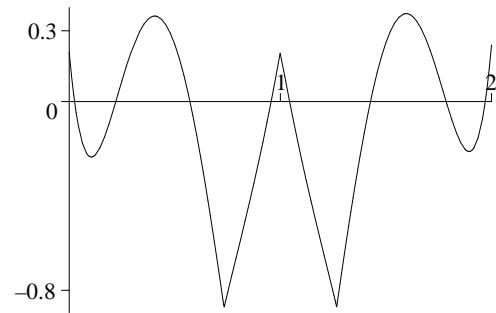


Рис. 8

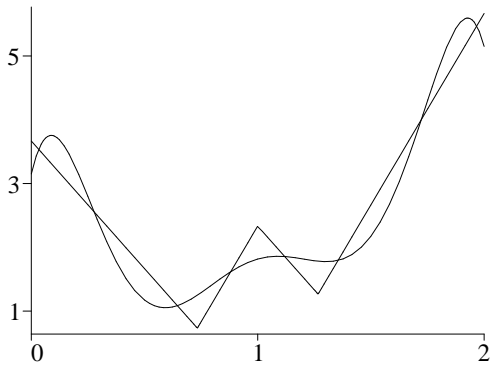


Рис. 9

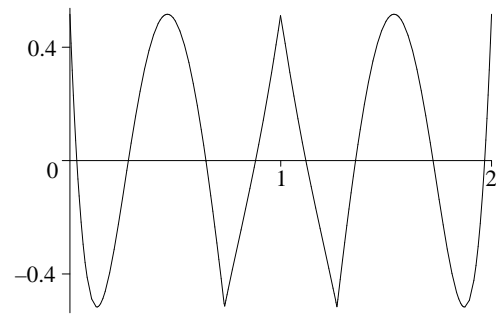


Рис. 10

Уже  $\overline{E}_7^{(5)} - \underline{E}_7^{(5)} = 0.926551008934 \times 10^{-18}$ , приближенные значения точек альтернанса для пятого и четвертого шага отличаются на величины порядка  $10^{-10}$ , поэтому в качестве многочлена наилучшего приближения берем

$$P_7^*(x) = -17.825x^6 + 106.95x^5 - 241.23x^4 + 251.89x^3 - 116.45x^2 + 15.324x + 3.1503,$$

а точек альтернанса — последовательность

$$\{x_j\} = \{0., 0.12814, 0.46255, 0.73333, 1., 1.2667, 1.5374, 1.8719, 2.\}.$$

Норма разности  $\|f - P_7^*\|_\infty = 0.51639$ . Эта величина превышает значение  $\|f - s_{10}\|_\infty = 0.35624$ , полученное при решении предыдущего примера.

На рис. 9 и 10 изображены соответствующие графики.

### 3. Задания

I. Получить на отрезке  $[-1.5, 2.5]$  с помощью процедуры Грама — Шмидта из функций  $g_k(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ , ортонормированную систему многочленов  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{10}$  с весом  $\rho(x)$ .

Для функции  $f(x)$  найти по полученной ортонормированной системе частичную сумму ряда Фурье  $s_{10}(f, x)$ .

Оценить нормы разности

$$\|f - s_{10}\|_\infty = \max_{x \in [-1.5, 2.5]} |f(x) - s_{10}(f, x)| \text{ — в равномерной метрике, и}$$

$$\|f - s_{10}\|_2 = \sqrt{\int_{-1.5}^{2.5} (f(x) - s_{10}(f, x))^2 \rho(x) dx} \text{ — в интегральной.}$$

Изобразить графики функций  $f(x)$ ,  $s_{10}(f, x)$  и  $f(x) - s_{10}(f, x)$ .

II. Используя алгоритм Ремеза, на отрезке  $[-1.5, 2.5]$  построить приближенно многочлен наилучшего приближения в равномерной метрике  $P_7^*(x)$  степени  $n = 7$  для функции  $f(x)$  с погрешностью  $\overline{E}_n^k - \underline{E}_n^k \leq 10^{-10}$ .

Изобразить графики функций  $f(x)$ ,  $P_n^*(x)$  и  $f(x) - P_n^*(x)$ .

Указать точки альтернанса.

Оценить норму разности  $\|f - P_n^*\|_\infty = \max_{x \in [-1.5, 2.5]} |f(x) - P_n^*(x)|$  в равномерной метрике.

Сравнить с результатом предыдущей задачи.

$$1. \quad \rho(x) = \frac{2x+6}{x^2+2x+3}, \quad f(x) = 2|x-1| - |x-1.5| + 2|x-2|.$$

$$2. \quad \rho(x) = \frac{x+3}{x^2-2x+2}, \quad f(x) = 0.5x + 2|x-0.5| - 2|x-1.5| + |x-2|.$$

$$3. \quad \rho(x) = \frac{2x+6}{x^2-2x+3}, \quad f(x) = |x-0.5| - |x-1| + |x-2|.$$

4.  $\rho(x) = \frac{2x+6}{2x^2+4x+3}, \quad f(x) = 2|x - 0.5| - 2|x - 1| + 2|x - 1.5|.$
5.  $\rho(x) = \frac{2x+6}{x^2+2x+2}, \quad f(x) = |x| - |x - 1.5| + 2|x - 2|.$
6.  $\rho(x) = \frac{2x+6}{2x^2-4x+3}, \quad f(x) = 0.5x + 2|x| - 2|x - 1| + 2|x - 2|.$
7.  $\rho(x) = \frac{2x+6}{x^2-2x+2}, \quad f(x) = 0.5x + 2|x| - |x - 1| + |x - 1.5|.$
8.  $\rho(x) = \frac{x+4}{2x^2+4x+4}, \quad f(x) = 0.5x + |x| - |x - 0.5| + |x - 2|.$
9.  $\rho(x) = \frac{x+4}{x^2+2x+3}, \quad f(x) = -0.5x + 2|x| - |x - 0.5| + |x - 1.5|.$
10.  $\rho(x) = \frac{x+4}{2x^2-4x+4}, \quad f(x) = 2|x| - 2|x - 0.5| + 2|x - 1|.$
11.  $\rho(x) = \frac{x+4}{x^2-2x+3}, \quad f(x) = 2|x + 0.5| - 2|x - 1.5| + |x - 2|.$
12.  $\rho(x) = \frac{x+4}{2x^2+4x+3}, \quad f(x) = 0.5x + 2|x + 0.5| - 2|x - 1| + 2|x - 2|.$
13.  $\rho(x) = \frac{x+4}{x^2+2x+2}, \quad f(x) = 2|x + 0.5| - |x - 1| + |x - 1.5|.$
14.  $\rho(x) = \frac{x+4}{2x^2-4x+3}, \quad f(x) = |x + 0.5| - |x - 0.5| + 2|x - 2|.$
15.  $\rho(x) = \frac{x+4}{x^2-2x+2}, \quad f(x) = -0.5x + 2|x + 0.5| - |x - 0.5| + |x - 1.5|.$
16.  $\rho(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}, \quad f(x) = |x + 0.5| - 2|x - 0.5| + 2|x - 1|.$
17.  $\rho(x) = \frac{2}{x^2+2x+3}, \quad f(x) = 0.5x + |x + 0.5| - 2|x| + 2|x - 2|.$
18.  $\rho(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}, \quad f(x) = -0.5x + 2|x + 0.5| - |x| + 2|x - 1.5|.$
19.  $\rho(x) = \frac{2}{x^2-2x+3}, \quad f(x) = 2|x + 0.5| - 2|x| + 2|x - 1|.$
20.  $\rho(x) = \frac{2}{2x^2+4x+3}, \quad f(x) = 0.5x + 2|x + 0.5| - 2|x| + |x - 0.5|.$
21.  $\rho(x) = \frac{2}{x^2+2x+2}, \quad f(x) = -0.5x + 2|x + 1| - |x - 1.5| + |x - 2|.$
22.  $\rho(x) = \frac{2}{2x^2-4x+3}, \quad f(x) = -0.5x + |x + 1| - |x - 1| + 2|x - 2|.$
23.  $\rho(x) = \frac{2}{x^2-2x+2}, \quad f(x) = 0.5x + 2|x + 1| - 2|x - 1| + 2|x - 1.5|.$
24.  $\rho(x) = \frac{2x+5}{2x^2+4x+4}, \quad f(x) = |x + 1| - |x - 0.5| + 2|x - 2|.$



25.  $\rho(x) = \frac{2x+5}{x^2+2x+3}$ ,  $f(x) = 0.5x + 2|x + 1| - |x - 0.5| + |x - 1.5|$ .
26.  $\rho(x) = \frac{2x+5}{2x^2-4x+4}$ ,  $f(x) = 0.5x + 2|x + 1| - |x - 0.5| + |x - 1|$ .
27.  $\rho(x) = \frac{2x+5}{x^2-2x+3}$ ,  $f(x) = 0.5x + 2|x + 1| - 2|x| + 2|x - 2|$ .
28.  $\rho(x) = \frac{2x+5}{2x^2+4x+3}$ ,  $f(x) = 2|x + 1| - 2|x| + 2|x - 1.5|$ .
29.  $\rho(x) = \frac{2x+5}{x^2+2x+2}$ ,  $f(x) = 0.5x + |x + 1| - 2|x| + 2|x - 1|$ .
30.  $\rho(x) = \frac{2x+5}{2x^2-4x+3}$ ,  $f(x) = -0.5x + |x + 1| - 2|x| + 2|x - 0.5|$ .
31.  $\rho(x) = \frac{2x+5}{x^2-2x+2}$ ,  $f(x) = 0.5x + |x + 1| - |x + 0.5| + |x - 2|$ .
32.  $\rho(x) = \frac{x+3}{2x^2+4x+4}$ ,  $f(x) = -0.5x + |x + 1| - 2|x + 0.5| + 2|x - 1.5|$ .
33.  $\rho(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+3}$ ,  $f(x) = 0.5x + |x + 1| - 2|x + 0.5| + |x - 1|$ .
34.  $\rho(x) = \frac{x+3}{2x^2-4x+4}$ ,  $f(x) = 2|x + 1| - 2|x + 0.5| + |x - 0.5|$ .
35.  $\rho(x) = \frac{x+3}{x^2-2x+3}$ ,  $f(x) = 2|x + 1| - |x + 0.5| + 2|x|$ .
36.  $\rho(x) = \frac{x+3}{2x^2+4x+3}$ ,  $f(x) = -0.5x + |x - 1| - |x - 1.5| + |x - 2|$ .
37.  $\rho(x) = \frac{x+3}{x^2+2x+2}$ ,  $f(x) = -0.5x + 2|x - 0.5| - |x - 1.5| + |x - 2|$ .
38.  $\rho(x) = \frac{x+3}{2x^2-4x+3}$ ,  $f(x) = 2|x - 0.5| - |x - 1| + 2|x - 2|$ .
39.  $\rho(x) = \frac{x+3}{x^2-2x+2}$ ,  $f(x) = 0.5x + |x - 0.5| - |x - 1| + |x - 1.5|$ .
40.  $\rho(x) = \frac{1}{2x^2+4x+4}$ ,  $f(x) = 0.5x + |x| - 2|x - 1.5| + 2|x - 2|$ .
41.  $\rho(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}$ ,  $f(x) = -0.5x + 2|x| - 2|x - 1| + |x - 2|$ .
42.  $\rho(x) = \frac{1}{2x^2-4x+4}$ ,  $f(x) = |x| - |x - 1| + |x - 1.5|$ .
43.  $\rho(x) = \frac{1}{x^2-2x+3}$ ,  $f(x) = |x| - |x - 0.5| + 2|x - 2|$ .
44.  $\rho(x) = \frac{1}{2x^2+4x+3}$ ,  $f(x) = -0.5x + 2|x| - 2|x - 0.5| + |x - 1.5|$ .
45.  $\rho(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$ ,  $f(x) = -0.5x + |x| - 2|x - 0.5| + 2|x - 1|$ .

46.  $\rho(x) = \frac{1}{2x^2-4x+3}$ ,  $f(x) = 0.5x + 2|x + 0.5| - |x - 1.5| + 2|x - 2|$ .
47.  $\rho(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$ ,  $f(x) = 0.5x + 2|x + 0.5| - 2|x - 1| + 2|x - 2|$ .
48.  $\rho(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+2}$ ,  $f(x) = 0.5x + |x + 0.5| - 2|x - 1| + 2|x - 1.5|$ .
49.  $\rho(x) = \frac{2x+4}{x^2+2x+3}$ ,  $f(x) = -0.5x + |x + 0.5| - 2|x - 0.5| + |x - 2|$ .
50.  $\rho(x) = \frac{x+2}{x^2-2x+2}$ ,  $f(x) = 0.5x + 2|x + 0.5| - 2|x - 0.5| + |x - 1.5|$ .
51.  $\rho(x) = \frac{2x+4}{x^2-2x+3}$ ,  $f(x) = 0.5x + |x + 0.5| - 2|x - 0.5| + |x - 1|$ .
52.  $\rho(x) = \frac{2x+4}{2x^2+4x+3}$ ,  $f(x) = -0.5x + 2|x + 0.5| - |x| + 2|x - 2|$ .
53.  $\rho(x) = \frac{2x+4}{x^2+2x+2}$ ,  $f(x) = |x + 0.5| - 2|x| + |x - 1.5|$ .
54.  $\rho(x) = \frac{2x+4}{2x^2-4x+3}$ ,  $f(x) = 2|x + 0.5| - |x| + 2|x - 1|$ .
55.  $\rho(x) = \frac{2x+4}{x^2-2x+2}$ ,  $f(x) = -0.5x + |x + 0.5| - 2|x| + 2|x - 0.5|$ .
56.  $\rho(x) = \frac{x+2}{2x^2+4x+4}$ ,  $f(x) = -0.5x + 2|x + 1| - 2|x - 1.5| + 2|x - 2|$ .
57.  $\rho(x) = \frac{x+2}{x^2+2x+3}$ ,  $f(x) = 2|x + 1| - 2|x - 1| + 2|x - 2|$ .
58.  $\rho(x) = \frac{x+2}{2x^2-4x+4}$ ,  $f(x) = 2|x + 1| - 2|x - 1| + |x - 1.5|$ .
59.  $\rho(x) = \frac{x+2}{x^2-2x+3}$ ,  $f(x) = -0.5x + |x + 1| - 2|x - 0.5| + 2|x - 2|$ .
60.  $\rho(x) = \frac{x+2}{2x^2+4x+3}$ ,  $f(x) = -0.5x + |x + 1| - 2|x - 0.5| + |x - 1.5|$ .

## II. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

### 4. Уравнения гидродинамики

Плоское установившееся (не зависящее от времени) течение *вязкой несжимаемой* жидкости без учета так называемой объемной силы определяется векторным полем  $\mathbf{w} = (u, v) = (u(x, y), v(x, y))$  скоростей частиц жидкости, которое удовлетворяет системе уравнений Навье — Стокса [6, 7]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (5)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $p = p(x, y)$  — давление в жидкости,  $\rho$  — плотность жидкости (постоянная величина),  $\mu = \mu_0/\rho$  — отношение коэффициента динамической вязкости к плотности (постоянная величина). Если  $\mu = 0$ , то жидкость называют идеальной; в этом случае (5–7) называется системой уравнений Эйлера.

В краевых задачах течения дополнительно задаются область  $G$  течения и условия на вектор  $\mathbf{w}$  на ее границе  $\Gamma = \partial G$ . При  $\mu \neq 0$  это условие прилипания вязкой жидкости к границе  $\Gamma$ , то есть обращения граничной скорости  $\mathbf{w}|_{\Gamma}$  в нуль, а при  $\mu = 0$  — условие обращения в нуль нормальной составляющей скорости  $\mathbf{w}$  (условие обтекания кривой  $\Gamma$ ), которое можно записать в виде

$$(\mathbf{w}, \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0 \iff -v(x, y) dx + u(x, y) dy|_{\Gamma} = 0,$$

где  $\mathbf{n} = (dy/ds, -dx/ds)$  — единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ .

Пусть  $\gamma$  — кусочно гладкий замкнутый контур. В гидромеханике величину

$$\Pi(\gamma) = \oint_{\gamma} (\mathbf{w}, \mathbf{n}) ds = \oint_{\gamma} (-v dx + u dy)$$

называют потоком поля  $\mathbf{w}$  через контур  $\gamma$  [5–9]. Поток равен количеству жидкости, вытекающей за единицу времени из области  $g(\gamma)$ , ограниченной контуром  $\gamma$ . Очевидно, для жидкости, обтекающей контур  $\gamma$ , поток  $\Pi(\gamma)$  равен нулю. При выполнении (7) в некоторой односвязной области  $G$  поток  $\Pi(\gamma)$  равен нулю для любого контура  $\gamma \subset G$ . Это следует из формулы Грина

$$\Pi(\gamma) = \iint_{g(\gamma)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Удовлетворяющее уравнению (7) в области  $G$  векторное поле  $\mathbf{w} = (u, v)$  называется соленоидальным (а также неразрывным, несжимаемым) в этой области. Физический смысл соленоидальности состоит в том, что в течении отсутствуют *источники* и *стоки*. Если равенство (7) нарушается в некоторых изолированных точках  $z_k = (x_k, y_k)$  области  $G$ , то в этих точках могут возникать источники и стоки (см. ниже).

Для соленоидального векторного поля выражение  $-v dx + u dy$  имеет первообразную  $\psi(x, y)$ , называемую в гидромеханике функцией тока. Функция тока удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad (8)$$

и находится из нее по формуле

$$\psi(x, y) = C + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -v dx + u dy.$$

Величина

$$\text{rot } \mathbf{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (9)$$

(в данном случае скалярная) называется завихренностью плоского течения  $\mathbf{w}$  и определяет угловую скорость вращения элементарной площадки жидкости. Векторное поле  $\mathbf{w}$  (и само течение), для которого  $\text{rot } \mathbf{w} = 0$  всюду в рассматриваемой области  $G$ , называется потенциальным (безвихревым). Для такого течения существует потенциал  $\varphi$ , удовлетворяющий уравнениям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v. \quad (10)$$

Отсюда и из равенства (7) следует, что потенциал  $\varphi$  является гармонической функцией, то есть удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\varphi = 0$ . При этом функция тока  $\psi(x, y)$  также является гармонической функцией (см. [5–9]).

## 5. Комплексный потенциал

Для соленоидальных потенциальных течений в области  $G$  выполнены равенства Коши — Римана (см. (8), (10))

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

и тем самым  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , является аналитической в  $G$  функцией (вообще говоря, неоднозначной, если  $G$  многосвязна). Функция  $f$  называется *комплексным потенциалом* поля  $\mathbf{w} = (u, v)$  и определяет его по формуле [5]

$$u + iv = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}. \quad (11)$$

Отметим, что соленоидальные потенциальные поля  $\mathbf{w}$  удовлетворяют всем уравнениям (5–7) с некоторым  $p = p(x, y)$ . Другими словами, любая пара функций  $u, v$ , для которой функция  $u - iv$  аналитична, удовлетворяет уравнениям (5–7) с некоторым  $p$  (поскольку из условий Коши — Римана  $u'_x = -v'_y$ ,  $u'_y = v'_x$  и из уравнений (5–6) следует равенство смешанных производных  $p''_{xy} = p''_{yx}$ , гарантирующее существование соответствующей функции  $p$ , см. формулу (15)).

Если известен комплексный потенциал  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , то задачу (5–7) можно считать решенной полностью. Течения, имеющие комплексные потенциалы, изучаются методами теории функций комплексного переменного. Приведем некоторые полезные факты и формулы (см. [5, 8, 9]).

Уравнение линий тока жидкости имеет вид  $-v dx + u dy = 0$ . С учетом (8) его можно переписать так:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = 0 \iff \psi(x, y) = \text{const}, \quad (12)$$

то есть линии тока рассматриваемой жидкости совпадают с линиями уровня функции тока  $\psi(x, y)$ . Важной характеристикой течения являются также *эквипотенциальные* линии, уравнение которых  $\varphi(x, y) = \text{const}$ . Семейства линий тока и эквипотенциальных линий взаимно ортогональны. Сетка, составленная из таких линий дает ясную геометрическую иллюстрацию течения жидкости.

Пусть  $\gamma$  — кусочно гладкая кривая в  $G$ . Тогда поток вектора  $\mathbf{w}$  через кривую  $\gamma$  находится по формуле

$$\Pi(\gamma) = \int_{\gamma} (\mathbf{w}, \mathbf{n}) ds = \int_{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \int_{\gamma} d\psi.$$

Таким образом, поток вектора через кривую равен приращению функции тока  $\psi(x, y)$  на этой кривой. Пусть  $\gamma$  — замкнутый контур. Величина

$$C(\gamma) = \oint_{\gamma} (\mathbf{w}, \mathbf{s}) ds = \oint_{\gamma} u dx + v dy = \oint_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \oint_{\gamma} d\varphi,$$

где  $\mathbf{s}$  — единичный вектор, касательный к контуру, называется циркуляцией вектора  $\mathbf{w}$  вдоль контура  $\gamma$ . Если  $f'(z)$  имеет лишь конечное число изолированных особых точек  $z_k$ , лежащих внутри замкнутого контура  $\gamma$ , то величины  $\Pi(\gamma)$ ,  $C(\gamma)$  вычисляются по теореме о вычетах:

$$C(\gamma) + i\Pi(\gamma) = \oint_{\gamma} d\varphi + i d\psi = \oint_{\gamma} df = \oint_{\gamma} f'(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}_{z=z_k} f'(z).$$

Если внутри замкнутого контура  $\gamma$  попадает только одна особая точка  $z_k$  и при этом  $C(\gamma) + i\Pi(\gamma) \neq 0$ , то говорят, что в точке  $z_k$  имеется источник с *интенсивностью вихря*  $C_0(z_k) = C(\gamma)$  и *обильностью*  $\Pi_0(z_k) = \Pi(\gamma)$ . Итак,

$$C_0(z_k) = \text{Re} \left( 2\pi i \text{Res}_{z=z_k} f'(z) \right), \quad \Pi_0(z_k) = \text{Im} \left( 2\pi i \text{Res}_{z=z_k} f'(z) \right). \quad (13)$$

Источник с отрицательной обильностью обычно называют *стоком*. Если, в частности,  $z_0$  является полюсом функции  $f'(z)$  не выше второго порядка и имеет место разложение в ряд Лорана вида

$$f'(z) = \frac{a}{(z - z_0)^2} + \frac{b}{z - z_0} + c + d(z - z_0) + \dots,$$

то  $z_0$  является источником, интенсивность и обильность которого вычисляются по формулам

$$C_0(z_0) = \operatorname{Re}(2\pi i b), \quad \Pi_0(z_0) = \operatorname{Im}(2\pi i b).$$

Если  $a \neq 0$ , то говорят, что в точке  $z_0$  имеется *диполь* с моментом  $M(z_0) = -2\pi a$ . Комплексное число  $M(z_0) = \alpha + i\beta$  задает *ось диполя* — прямую, проходящую через точку  $z_0$  с направляющим вектором  $(\alpha, \beta)$ . В достаточно малой окрестности диполя линии тока представляют собой семейство слегка искаженных окружностей

$$\gamma_C : \quad \operatorname{Im} \left( \frac{\alpha + i\beta}{z - z_0} \right) = C, \quad -\infty < C < \infty,$$

соприкасающихся с осью диполя в точке  $z_0$  и стягивающихся при  $C \rightarrow 0$  к  $z_0$  (см. (12)).

Важной характеристикой поля  $\mathbf{w}$  являются точки  $\xi_k$ , в которых скорость  $\mathbf{w}$  течения равна нулю, т.е.  $f'(\xi_k) = 0$ . Такие точки называются критическими, (см. также примечание 3 в п. 9).

В общем случае исследование соленоидальных, но не потенциальных течений чрезвычайно сложно, это обусловлено нелинейностью левых частей уравнений (5–6) (см. [6, 9]).

## 6. Течения с постоянной завихренностью

Будем искать решение уравнений (5–7) в виде

$$u = U(x, y) + t(y), \quad v = -V(x, y) + r(x),$$

где  $U$  и  $V$  — заданные сопряженные гармонические функции, то есть функции для которых  $U'_x = V'_y$  и  $U'_y = -V'_x$ . Очевидно, что пара функций  $u, v$  удовлетворяет условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = u'_x + v'_y = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{w} = v'_x - u'_y = r'(x) - t'(y).$$

Положим

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \Delta u - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \Delta v - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Для определения  $r$  и  $t$  запишем условие  $\delta(x, y) = 0$  равенства смешанных производных функции  $p$  (см. (5–6)). Подставив  $u = U(x, y) + t(y)$ ,  $v = -V(x, y) + r(x)$  в выражение  $\delta(x, y)$ , проведя дифференцирования и замены  $U'_x$  на  $V'_y$  и  $U'_y$  на  $-V'_x$ , получим уравнение

$$\delta(x, y) = Ur''(x) + Vt''(y) + t(y)r''(x) - r(x)t''(y) + \mu(t'''(y) - r'''(x)) = 0. \quad (14)$$

При  $r(x) = Rx + A$ ,  $t(y) = Ty + B$  равенство (14) выполняется. Поэтому

$$u = U(x, y) + Ty + B, \quad v = -V(x, y) + Rx + A \quad (15)$$

является решением задачи (5–7) для любой пары сопряженных гармонических функций  $U, V$ . Из (9) следует, что

$$\text{rot } \mathbf{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = R - T,$$

то есть поле  $\mathbf{w}$  имеет постоянную завихренность  $\text{rot } \mathbf{w}$ . Таким образом, пара гармонических функций  $(u, v)$  вида (15) дает решение задачи течения с постоянной завихренностью. При нулевой завихренности функции  $u$  и  $-v$  являются сопряженными гармоническими функциями. Можно показать, что других плоских соленоидальных полей с постоянной завихренностью нет.

При известных  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  можно найти давление в жидкости  $p(x, y)$ . Действительно, из (5–6) получается система уравнений для определения  $p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \alpha(x, y), \quad \text{где } \alpha(x, y) = -\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \beta(x, y), \quad \text{где } \beta(x, y) = -\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

причем функции  $\alpha$  и  $\beta$  известны. Эта система решается стандартными методами, например, можно применить формулу

$$\begin{aligned} p(x_1, y_1) &= C + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \alpha(x, y) dx + \beta(x, y) dy = \\ &= C + \int_{x_0}^{x_1} \alpha(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} \beta(x_1, y) dy, \quad (16) \end{aligned}$$



где криволинейный интеграл не зависит от формы кривой интегрирования.

Для потенциального поля  $\mathbf{w}$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{w} = 0$ , давление  $p$  можно найти более просто. Действительно, из условия потенциальности  $v'_x = u'_y$  и из уравнений (5–6) для абсолютного значения скорости  $|\mathbf{w}| = \sqrt{u^2 + v^2}$  находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|\mathbf{w}|^2)'_x &= uu'_x + vv'_x = uu'_x + vu'_y = - \left( \frac{p}{\rho} \right)'_x, \\ \frac{1}{2} (|\mathbf{w}|^2)'_y &= uu'_y + vv'_y = uv'_x + vv'_y = - \left( \frac{p}{\rho} \right)'_y. \end{aligned}$$

Интегрируя эти равенства, получаем известную формулу Бернулли [6]:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const} - \frac{1}{2} |\mathbf{w}|^2, \quad p = \text{const} - \frac{\rho}{2} |\mathbf{w}|^2.$$

## 7. Другие примеры решений

Приведем несколько примеров, показывающих, что структура полей  $\mathbf{w}$  может значительно отличаться от указанных в (15).

Пусть  $U = x$ ,  $V = y$ ,  $r(x) = A = \text{const}$ . Тогда уравнение (14) принимает вид

$$(y - A) t''(y) + \mu t'''(y) = 0,$$

решая которое находим

$$t(y) = B + C \left( (y - A) \int_0^{y-A} e^{-\frac{t^2}{2\mu}} dt + \mu e^{-\frac{(y-A)^2}{2\mu}} \right).$$

Получено решение задачи (5–7) в виде

$$u = x + B + C \left( (y - A) \int_0^{y-A} e^{-\frac{t^2}{2\mu}} dt + \mu e^{-\frac{(y-A)^2}{2\mu}} \right), \quad v = -y + A.$$

Следующие примеры решений получены методом неопределенных

коэффициентов.

$$\begin{aligned} u &= -6 \frac{\mu}{x}, & v &= Ax^2 - 6 \frac{\mu y}{x^2} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3}; \\ u &= Ay^2 - 6 \frac{\mu x}{y^2} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y^3}, & v &= -6 \frac{\mu}{y}. \end{aligned}$$

При  $\mu = 0$  решением задачи (5–7) является пара

$$\begin{aligned} u &= mA \sin(my) \cos(nx) + nB \cos(mx) \sin(ny) + \\ &+ mD \sin(my) \sin(nx) + nC \cos(mx) \cos(ny); \\ v &= -nA \cos(my) \sin(nx) - mB \sin(mx) \cos(ny) + \\ &+ nD \cos(my) \cos(nx) + mC \sin(mx) \sin(ny). \end{aligned}$$

Через  $m, n, A, B, C, D$  обозначены произвольные действительные числа.

## 8. Задача обтекания границы плоской области

Пусть на расширенной комплексной плоскости задана односвязная область  $G$ , содержащая бесконечно удаленную точку и имеющая кусочно гладкую границу  $\Gamma$ . Одна из важнейших задач гидродинамики — задача обтекания — состоит в нахождении течения идеальной жидкости в области  $G$ , соприкасающегося с кривой  $\Gamma$  во всех точках ее гладкости. Решение такой задачи можно свести к построению конформного однолистного отображения  $\zeta = f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$  области  $G$  на внешность отрезка  $[-1, 1]$ . Функция  $f(z)$  является комплексным потенциалом искомого течения и по формуле (11) задает поле скорости  $\mathbf{w} = (u, v)$ . При этом линии тока жидкости находятся как линии уровня  $\psi(z) = \text{const}$  функции тока  $\psi(z) = \text{Im} f(z)$  (см. (12)).

Однако построение таких отображений удается лишь для очень специальных областей, и часто приходится применять другие методы. Мы рассмотрим один приближенный метод решения задачи обтекания, используя наиболее простой и удобный для анализа вектор скоростей  $\mathbf{w} = (u, v)$ , имеющий вид полинома. Его можно получить с учетом (15) так:

$$u(x, y) = \text{Re} Q(z) + U_0 + Ty, \quad v(x, y) = -\text{Im} Q(z) + V_0 + Rx, \quad (17)$$

где  $Q(z) = \sum_{k=1}^n c_k z^k$  — некоторый *производящий* многочлен с произвольными комплексными коэффициентами  $c_k = a_k + i a_{k+n}$ ,  $z = x + iy$ , многочлены  $u$  и  $v$  имеют вещественные коэффициенты, выражающиеся через  $a_s$ ,  $s = 1, \dots, 2n$ , числа  $T, R$  вещественны произвольны и определяют величину  $\text{rot } \mathbf{w} = R - T$ ,  $(U_0, V_0)$  — скорость течения в начале координат. Возникает задача об определении коэффициентов  $a_s$  так, чтобы соответствующее поле  $\mathbf{w}$  как можно точнее аппроксимировало поле касательных к кривой  $\Gamma$ .

Пусть кривая  $\Gamma = \cup_m \gamma_m$  состоит из конечного числа гладких дуг  $\gamma_m$  и  $\gamma_m$  — одна из этих дуг, заданная неявным уравнением  $F_m(x, y) = 0$ , причем всюду на  $\gamma_m$  имеем

$$|\text{grad } F_m| = \sqrt{\left(\frac{\partial F_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_m}{\partial y}\right)^2} \neq 0.$$

Вектор

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(x, y) = \left(\frac{\partial F_m}{\partial x}, \frac{\partial F_m}{\partial y}\right)$$

перпендикулярен к  $\gamma_m$ , и уравнение обтекания дуги  $\gamma_m$  можно записать в виде

$$(\mathbf{w}, \boldsymbol{\eta}) = v \frac{\partial F_m}{\partial y}(x, y) + u \frac{\partial F_m}{\partial x}(x, y) = 0. \quad (18)$$

Выберем на  $\gamma_m$  некоторые узловые точки  $(x_k^{(m)}, y_k^{(m)})$ ,  $k = 1, \dots, N_m$ . Положим

$$g_k = \frac{1}{|\text{grad } F_m(x_k^{(m)}, y_k^{(m)})|^2},$$

и введем сумму

$$S_m(a_1, \dots, a_{2n}) = \sum_{k=1}^{N_m} g_k \left[ v(x_k^{(m)}, y_k^{(m)}) \frac{\partial F_m}{\partial y}(x_k^{(m)}, y_k^{(m)}) + u(x_k^{(m)}, y_k^{(m)}) \frac{\partial F_m}{\partial x}(x_k^{(m)}, y_k^{(m)}) \right]^2. \quad (19)$$

Весовые множители  $g_k$  нужны для балансировки слагаемых.

Применим метод наименьших квадратов. Положим  $S = \sum_m S_m$ . Подбором коэффициентов  $a_s$ ,  $s = 1, \dots, 2n$ , минимизируем сумму  $S$ , т.е. в

определенном смысле аппроксимируем уравнение (18). Коэффициенты  $a_s$  находятся из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial a_s} = 0, \quad s = 1, \dots, 2n. \quad (20)$$

После определения коэффициентов  $a_s = a_s(T, R, U_0, V_0)$  пару многочленов  $(u, v)$  можно считать приближенным решением задачи обтекания.

**Примечания.**

1. При решении предлагаемых ниже задач для лучшей аппроксимации уравнения обтекания следует выбирать узловые точки  $(x_k^{(m)}, y_k^{(m)})$  так, чтобы они сгущались к концевым точкам дуги  $\gamma_m$ . Кроме того, плотность распределения узловых точек на кривой  $\Gamma$  должна увеличиваться вместе с увеличением кривизны кривой; наименьшая плотность будет на прямолинейных участках. Из этих соображений выбирается число  $N_m$  узловых точек на каждой дуге  $\gamma_m$  (см. также пример ниже).

2. Для наглядности во всех задачах следует изобразить векторные линии (линии тока) рассматриваемого течения. Эти линии задаются уравнением

$$-v(x, y) dx + u(x, y) dy = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{u(x, y)} = \frac{dy}{v(x, y)}. \quad (21)$$

3. Численным методом (например, методом антиградиента) следует найти (неподвижные) критические точки  $(x_k, y_k)$  поля, т.е. решить систему уравнений

$$u(x, y) = 0, \quad v(x, y) = 0$$

(при определенных значениях параметров  $T, R, U_0, V_0$ , которые задаются в условии задачи). Следует указать тип критических точек, который определяется следующим образом.

Пусть  $(x_0, y_0)$  — критическая точка. Вычислим в этой точке частные производные  $a = u'_x, b = u'_y, c = v'_x, d = v'_y$  и составим характеристическое уравнение  $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ . Если его корни  $\lambda_{1,2}$  различные и одного знака, то критическая точка — „узел“. Если корни различные и разных знаков, то критическая точка — „седло“. Если корни комплексные с отличной от нуля вещественной частью, то критическая точка — „фокус“. Если корни чисто мнимые, то критическая точка — „центр“.

Проведенный анализ критических точек должен соответствовать рисунку векторных линий (21) при тех же значениях параметров.

Во всех предлагаемых задачах следует найти точки наибольшего и наименьшего давления  $p(x, y)$  в заданной ограниченной области  $g$  при  $\text{rot } \mathbf{w} = 0$ . Для этого можно использовать формулу Бернулли.

**Пример (построение течения, обтекающего „цифру 5“).** Рассмотрим многочлены девятой степени:

$$Q(z) = \sum_{k=1}^9 (a_k + ia_{k+9})(x + iy)^k,$$

$$u(x, y) = \text{Re } Q(z) + U_0, \quad v(x, y) = -\text{Im } Q(z) + V_0 + Rx.$$

Пусть также задана кривая  $\Gamma$ , состоящая из трех аналитических дуг  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , где

$$\gamma_1 = \{(x, y) : y - h_2 = 0, 0 \leq x \leq h_1\},$$

$$\gamma_2 = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq h_2\},$$

$$\gamma_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 + y h_3 = 0, -h_3 \leq y \leq 0, x \geq 0\},$$

а  $h_1, h_2, h_3$  некоторые положительные параметры, выбранные так, чтобы рисунок кривой  $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  напоминал цифру „5“. Положим, например,  $h_1 = 0.25, h_2 = 0.25, h_3 = 0.3$  и будем рассматривать течение в квадрате  $g = \{(x, y) : |x| < 0.3, |y| < 0.3\}$ .

Составляем три суммы вида (19) для каждой дуги  $\gamma_m, m = 1, 2, 3$ . Для этого прежде всего следует задать число узловых точек на каждой дуге  $\gamma_m$ . В данном примере мы положим  $n_1 = 10, n_2 = 10, n_3 = 45$ .

(I) Выберем на дуге  $\gamma_1$  точки  $z_k^{(1)} = (x_k^{(1)}, y_k^{(1)})$ ,  $k = 1, \dots, n_1$ , по формулам

$$x_k^{(1)} = \frac{h_1}{2} + \frac{h_1}{2} \cos \left( \frac{n_1 - k}{n_1 - 1} \pi \right), \quad y_k^{(1)} = h_2, \quad k = 1, \dots, n_1.$$

Таким образом, точки  $z_k^{(1)}$  сгущаются у конечных точек дуги  $\gamma_1$ . Вычисляем на  $\gamma_1$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = 0, \quad |\text{grad } F(x_k^{(1)}, y_k^{(1)})| = 1,$$

и находим соответствующую часть суммы из (19):

$$S^{(1)}(a_1, \dots, a_{18}) = \sum_{k=1}^{n_1} v^2(x_k^{(1)}, y_k^{(1)}).$$

(II) Выберем на дуге  $\gamma_2$  точки  $z_k^{(2)} = (x_k^{(2)}, y_k^{(2)})$ ,  $k = 1, \dots, n_2$ , по формулам

$$x_k^{(2)} = 0, \quad y_k^{(2)} = \frac{h_2}{2} + \frac{h_2}{2} \cos \left( \frac{n_2 - k}{n_2 - 1} \pi \right), \quad k = 1, \dots, n_2.$$

Точки  $z_k^{(2)}$  сгущаются у концевых точек дуги  $\gamma_2$ . Вычисляем

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = 1, \quad |\text{grad } F(x_k^{(2)}, y_k^{(2)})| = 1,$$

и находим соответствующую часть суммы из (19):

$$S^{(2)}(a_1, \dots, a_{18}) = \sum_{k=1}^{n_2} u^2(x_k^{(2)}, y_k^{(2)}).$$

(III) Выберем на дуге  $\gamma_3$  (полуокружности) точки  $z_k^{(3)} = (x_k^{(3)}, y_k^{(3)})$ ,  $k = 1, \dots, n_3$ , по формулам

$$\alpha_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \left( \frac{n_3 - k}{n_3 - 1} \pi \right),$$

$$y_k^{(3)} = -\frac{h_3}{2}(1 - \cos \alpha_k), \quad x_k^{(3)} = \sqrt{-y_k^{(3)} h_3 - (y_k^{(3)})^2}, \quad k = 1, \dots, n_3.$$

Точки  $z_k^{(3)}$  сгущаются у концевых точек полуокружности  $\gamma_3$ . Вычисляем

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_k^{(3)}, y_k^{(3)}) = 2y_k^{(3)} + h_3, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_k^{(3)}, y_k^{(3)}) = 2x_k^{(3)}, \quad |\text{grad } F(x_k^{(3)}, y_k^{(3)})| = h_3,$$

и находим соответствующую часть суммы из (19):

$$S^{(3)}(a_1, \dots, a_{18}) = \frac{1}{h_3^2} \sum_{k=1}^{n_3} \left( (2y_k^{(3)} + h_3)v(x_k^{(3)}, y_k^{(3)}) + (2x_k^{(3)})u(x_k^{(3)}, y_k^{(3)}) \right)^2.$$

Положим  $S = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)}$ . Для минимизации  $S = S(a_1, \dots, a_{18})$  вычислим частные производные  $S$  по  $a_s$ ,  $s = 1, \dots, 18$ . Приравняв их к нулю, получим систему линейных уравнений, откуда найдем коэффициенты  $a_s$ . При этом число  $R$ , характеризующее завихренность поля (см. (9)) и

скорость  $(U_0, V_0)$  в начале координат должны остаться неопределенными. Здесь приводится выражение найденного производящего многочлена с шестью значащими цифрами; расчеты проводились с 20 значащими цифрами.

$$\begin{aligned}
 Q(z) = & ((382127. - 625383.i)V_0 + (8076.4 - 45053.i)U_0 + (15056. - 2745.97i)R)z^9 \\
 & +((-494131. + 519559.i)V_0 + (-18607.7 - 29545.i)U_0 + (-16077.2 + 7960.99i)R)z^8 \\
 & +((351483. - 328782.i)V_0 + (15829.1 + 20966.7i)U_0 + (10694. - 4309.92i)R)z^7 \\
 & +((-177072. + 118628.i)V_0 + (-8608.91 - 20343.1i)U_0 + (-4986.67 + 2077.47i)R)z^6 \\
 & +((66412.4 - 32562.1i)V_0 + (3418.36 + 7739.15i)U_0 + (1708.63 - 388.646i)R)z^5 \\
 & +((-18462.4 + 4364.85i)V_0 + (-654.560 - 2978.28i)U_0 + (-476.128 + 46.0590i)R)z^4 \\
 & +((3864.33 + 14.7892i)V_0 + (117.786 + 682.076i)U_0 + (85.9977 + 16.3725i)R)z^3 \\
 & +((-503.265 - 185.333i)V_0 + (22.3442 - 126.545i)U_0 + (-12.2855 - 6.00867i)R)z^2 \\
 & +((36.0639 + 37.1015i)V_0 + (-5.50668 + 13.8178i)U_0 + (0.434958 + 1.04998i)R)z.
 \end{aligned}$$

Положим, для примера,  $U_0 = 0$ ,  $V_0 = 10$ ,  $R = 200$  и найдем критические точки  $z_k = x_k + iy_k$ , численным методом решив систему уравнений  $u(x, y) = 0$ ,  $v(x, y) = 0$ , то есть уравнение  $Q(z) = (10 + 200x)i$ ,  $z = x + iy$ . Укажем только две критические точки  $z_1 = 0.01876 + 0.01543i$  и  $z_2 = 0.09742 + 0.04817i$ . Используя указанный в п. 8 критерий, найдем, что  $z_1$  — „седло“, а  $z_2$  — „центр“.

Максимальное значение давления  $p$  при  $U_0 = 0$ ,  $V_0 = 10$ ,  $T = 0$ ,  $R = 0$  достигается в точке  $(0.0157; 0.0183)$ .

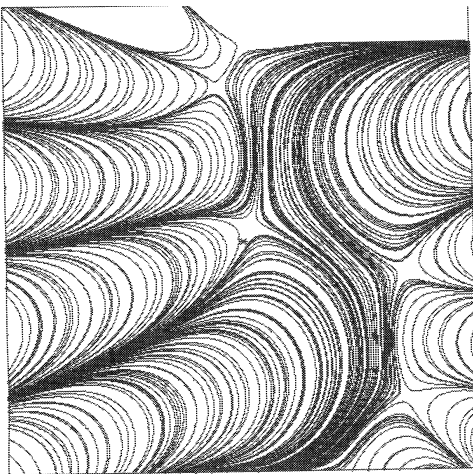


Рис. 11

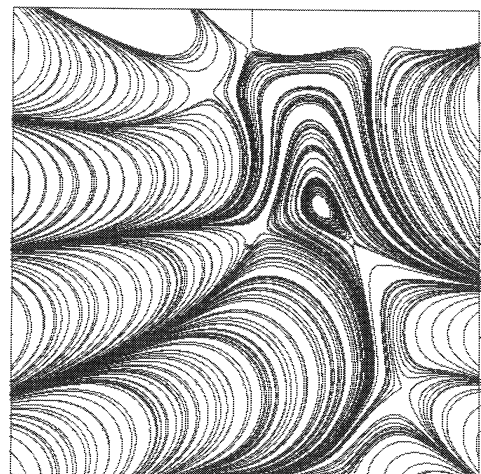


Рис. 12

На рис. 11 и 12 изображены линии тока в квадрате  $g$  при  $U_0 = 10$ ,  $V_0 = 0$ ,  $R = 0$  и при  $U_0 = 0$ ,  $V_0 = 0$ ,  $R = 200$  соответственно.

## 9. Течение с заданным комплексным потенциалом

Рассмотрим комплексный потенциал вида

$$f(z) = c_1 \ln(z - z_1) - \frac{c_2}{z - z_1} - \frac{c_3}{z - z_2} + c_1 \ln(z - z_3), \quad (22)$$

представляющий собой многозначную аналитическую функцию.

Требуется:

- найти критические (неподвижные) точки течения, указать их тип („седло“, „кратное седло“);
- провести анализ особых точек  $z_k$ : указать источники, стоки, найти их интенсивность и обильность; найти моменты диполей;
- вычислить поток поля через заданную кривую  $\gamma$ ;
- нарисовать линии тока.

Для решения находим (однозначную) производную потенциала

$$f'(z) = \frac{c_1}{z - z_1} + \frac{c_2}{(z - z_1)^2} + \frac{c_3}{(z - z_2)^2} + \frac{c_1}{z - z_3}.$$

По формуле (12) находим вектор  $\mathbf{w}$ :

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f'(z), \quad v(x, y) = -\operatorname{Im} f'(z).$$

Численным методом определяем критические (неподвижные) точки  $\xi_k = x_k + i y_k$  течения. Если  $f'(\xi_k) \neq 0$ , то критическая точка — „седло“, если  $f'(\xi_k) = 0$ , то — „кратное седло“.

Далее, анализируем особые точки  $z_k$ : находим их параметры по формуле (13) и соответствующим определениям из п. 6. Определяем поток через кривую  $\gamma$  как сумму обильностей  $\Pi_0(z_k)$  по всем точкам  $z_k$ , попавшим внутрь  $\gamma$ . Используя (21), рисуем векторные линии.

**Пример (течения с заданным комплексным потенциалом).**

Пусть производная комплексного потенциала имеет вид

$$f'(z) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i}{(z+i)^2} + \frac{-\frac{73}{50} - \frac{39}{50}i}{z+i} + \frac{-1+i}{(z+1)^2} + \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i}{z+1} + \frac{\frac{24}{25} + \frac{132}{25}i}{z+2},$$



а  $\gamma$  — граница квадрата  $\{(x, y) : -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}\}$ . Требуется провести исследование по указанной схеме.

Преобразования дают

$$f'(z) = \frac{z^2(z-1)(z-i)}{(z+i)^2(z+1)^2(z+2)}.$$

Отсюда находим критические точки:  $\xi_1 = 0$  — „седло второго порядка“,  $\xi_2 = 1$ ,  $\xi_3 = i$  — „седло“.

Далее, находим характеристики особых точек  $z_1 = -i$ ,  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = -2$ . По формуле (13) вычисляем обильности

$$\Pi_0(z_1) = -\frac{73}{25}\pi, \quad \Pi_0(z_2) = 3\pi, \quad \Pi_0(z_3) = \frac{48}{25}\pi$$

(в точках  $z_2, z_3$  находятся источники, а в точке  $z_1$  — сток), и интенсивности вихрей

$$C_0(z_1) = \frac{39}{25}\pi, \quad C_0(z_2) = 9\pi, \quad C_0(z_3) = -\frac{264}{25}\pi.$$

Находим моменты диполей

$$M(z_1) = -\frac{2}{5}\pi(1+3i), \quad M(z_2) = 2\pi(1-i).$$

Вычисляем поток через  $\gamma$ :  $\Pi(\gamma) = \Pi_0(z_1) + \Pi_0(z_2) = \frac{2}{25}\pi$ .

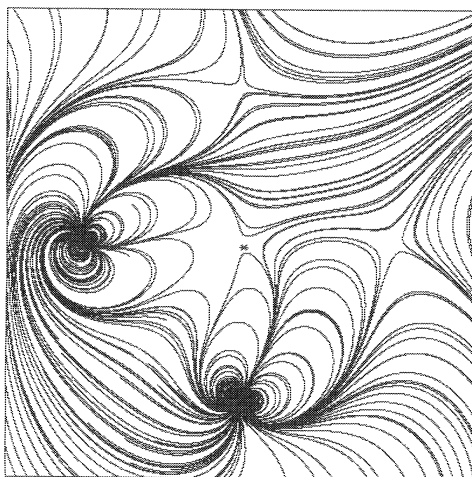


Рис. 13

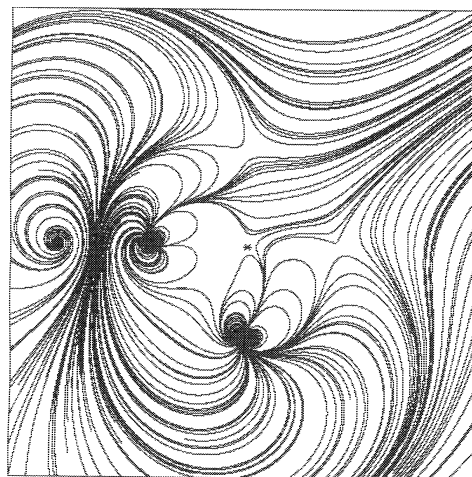


Рис. 14

Приведем рисунки линий тока. На рис. 13 линии тока изображены в квадрате  $|x| \leq \frac{3}{2}$ ,  $|y| \leq \frac{3}{2}$ , а на рис. 14 — в квадрате  $|x| \leq \frac{5}{2}$ ,  $|y| \leq \frac{5}{2}$

## 10. Задания

- 1а). В вариантах  $Var = 1, \dots, 9$  решить задачу обтекания кривой  $\Gamma$ , лежащей в квадрате  $g = \{(x, y) : |x| < 0.3, |y| < 0.3\}$  и имеющей вид ЦИФРЫ числа  $Var$ ; в вариантах  $Var \geq 10$  решить задачу обтекания кривой  $\Gamma$ , имеющей вид соответствующей латинской БУКВЫ из списка: А, В, D, E, F, H, J, K, L, M, N, P, R, T, V, W, X, Z. Если кривая разбивает плоскость на несколько областей, то течение рассматривать только в области, содержащей бесконечно удаленную точку. При решении задачи обтекания производящий многочлен должен иметь степень не ниже 9-й. Указать вид решения  $\mathbf{w} = (u, v)$ , имеющего значение  $(U_0, V_0)$  в начале координат и постоянную завихренность  $R$  (или указать производящий многочлен  $Q(z)$ ). Найти точки наибольшего и наименьшего давления  $p(x, y)$  в области  $G$  при  $\text{rot } \mathbf{w} = 0$ .
- 1б). Найти неподвижные (критические) точки течения в  $g$  и указать их тип („седло“, „фокус“, ...).
- 1с). В квадрате  $g$  нарисовать удобные для сравнения между собой линии тока для различных значений  $R = \text{rot } \mathbf{w}$ .
- 2а). Задан комплексный потенциал вида (22). Параметры  $z_1, z_2, z_3, c_1, c_2, c_3, c_4$  приведены в таблице; в первой строке каждого варианта в таблице указаны точки  $z_1, z_2, z_3$ , во второй — коэффициенты  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . Требуется исследовать соответствующее течение  $\mathbf{w}$  по указанной в п. 10 схеме. В качестве  $\gamma$  взять границу квадрата  $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ . Расчеты проводить с точностью  $10^{-10}$ .
- 2б). Нарисовать линии тока полученного течения.

var= 1 -1.5205-3.1372 <i>i</i>	-.62 <i>i</i> -.90713e- 1+1.0522 <i>i</i>	-.62 .99645-3.2365 <i>i</i>	-.40788+.18497 <i>i</i> 2.5202+3.1372 <i>i</i>
var= 2 -1.4555-3.0472 <i>i</i>	-.64 <i>i</i> -.10241+1.0421 <i>i</i>	-.64 .96125-3.2413 <i>i</i>	-.42221+.18841 <i>i</i> 2.4556+3.0470 <i>i</i>
var= 3 -1.3956-2.9642 <i>i</i>	-.66 <i>i</i> -.11381+1.0328 <i>i</i>	-.66 .92760-3.2477 <i>i</i>	-.43655+.19175 <i>i</i> 2.3958+2.9640 <i>i</i>
var= 4 -1.3401-2.8868 <i>i</i>	-.68 <i>i</i> -.12494+1.0243 <i>i</i>	-.68 .89530-3.2553 <i>i</i>	-.45088+.19503 <i>i</i> 2.3402+2.8870 <i>i</i>
var= 5 -1.2886-2.8156 <i>i</i>	-.70 <i>i</i> -.13584+1.0167 <i>i</i>	-.70 .86435-3.2644 <i>i</i>	-.46523+.19823 <i>i</i> 2.2888+2.8156 <i>i</i>

var= 6 -1.2408-2.7490 <i>i</i>	-.72 <i>i</i> -.14651+1.0096 <i>i</i>	-.72 .83445-3.2745 <i>i</i>	-.47960+.20138 <i>i</i> 2.2406+2.7490 <i>i</i>
var= 7 -1.1962-2.6876 <i>i</i>	-.74 <i>i</i> -.15698+1.0033 <i>i</i>	-.74 .80570-3.2858 <i>i</i>	-.49392+.20444 <i>i</i> 2.1962+2.6874 <i>i</i>
var= 8 -1.1544-2.6294 <i>i</i>	-.76 <i>i</i> -.16726+.99746 <i>i</i>	-.76 .77790-3.2979 <i>i</i>	-.50828+.20747 <i>i</i> 2.1544+2.6294 <i>i</i>
var= 9 -1.1156-2.5756 <i>i</i>	-.78 <i>i</i> -.17737+.99222 <i>i</i>	-.78 .75105-3.3112 <i>i</i>	-.52262+.21043 <i>i</i> 2.1156+2.5756 <i>i</i>
var= 10 -1.0789-2.5248 <i>i</i>	-.80 <i>i</i> -.18731+.98745 <i>i</i>	-.80 .72500-3.3250 <i>i</i>	-.53694+.21331 <i>i</i> 2.0788+2.5248 <i>i</i>
var= 11 -1.0445-2.4772 <i>i</i>	-.82 <i>i</i> -.19711+.98308 <i>i</i>	-.82 .69975-3.3398 <i>i</i>	-.55128+.21617 <i>i</i> 2.0444+2.4772 <i>i</i>
var= 12 -1.0122-2.4326 <i>i</i>	-.84 <i>i</i> -.20677+.97918 <i>i</i>	-.84 .67525-3.3554 <i>i</i>	-.56561+.21899 <i>i</i> 2.0124+2.4328 <i>i</i>
var= 13 -.98170-2.3904 <i>i</i>	-.86 <i>i</i> -.21630+.97574 <i>i</i>	-.86 .65140-3.3714 <i>i</i>	-.57994+.22174 <i>i</i> 1.9816+2.3902 <i>i</i>
var= 14 -.95300-2.3508 <i>i</i>	-.88 <i>i</i> -.22571+.97258 <i>i</i>	-.88 .62820-3.3883 <i>i</i>	-.59424+.22445 <i>i</i> 1.9531+2.3508 <i>i</i>
var= 15 -.92574-2.3130 <i>i</i>	-.90 <i>i</i> -.23499+.96969 <i>i</i>	-.90 .60555-3.4056 <i>i</i>	-.60855+.22713 <i>i</i> 1.9256+2.3130 <i>i</i>
var= 16 -.96-2.2776 <i>i</i>	-.92 <i>i</i> -.24419+.96725 <i>i</i>	-.92 .58350-3.4236 <i>i</i>	-.62286+.22978 <i>i</i> 1.9003+2.2778 <i>i</i>
var= 17 -.87572-2.2440 <i>i</i>	-.94 <i>i</i> -.25326+.96498 <i>i</i>	-.94 .56190-3.4418 <i>i</i>	-.63715+.23237 <i>i</i> 1.8758+2.2438 <i>i</i>
var= 18 -.85254-2.2120 <i>i</i>	-.96 <i>i</i> -.26228+.96312 <i>i</i>	-.96 .54085-3.4610 <i>i</i>	-.65144+.23495 <i>i</i> 1.8525+2.2120 <i>i</i>
var= 19 -.83056-2.1816 <i>i</i>	-.98 <i>i</i> -.27118+.96141 <i>i</i>	-.98 .52020-3.4802 <i>i</i>	-.66573+.23749 <i>i</i> 1.8306+2.1818 <i>i</i>
var= 20 -.80960-2.1528 <i>i</i>	-1.0 <i>i</i> -.28+.96 <i>i</i>	-1.0 .50-3.5 <i>i</i>	-.68+.24 <i>i</i> 1.8096+2.1528 <i>i</i>
var= 21 -.78964-2.1254 <i>i</i>	-1.02 <i>i</i> -.28874+.95878 <i>i</i>	-1.02 .48020-3.5202 <i>i</i>	-.69427+.24248 <i>i</i> 1.7896+2.1254 <i>i</i>
var= 22 -.77072-2.0994 <i>i</i>	-1.04 <i>i</i> -.29743+.95784 <i>i</i>	-1.04 .46075-3.5408 <i>i</i>	-.70854+.24495 <i>i</i> 1.7708+2.0994 <i>i</i>
var= 23 -.75260-2.0742 <i>i</i>	-1.06 <i>i</i> -.30602+.957 <i>i</i>	-1.06 .44170-3.5617 <i>i</i>	-.72278+.24737 <i>i</i> 1.7525+2.0742 <i>i</i>
var= 24 -.73524-2.0504 <i>i</i>	-1.08 <i>i</i> -.31455+.95641 <i>i</i>	-1.08 .42295-3.5830 <i>i</i>	-.73702+.24978 <i>i</i> 1.7353+2.0504 <i>i</i>
var= 25 -.71862-2.0276 <i>i</i>	-1.1 <i>i</i> -.32302+.95601 <i>i</i>	-1.1 .40455-3.6046 <i>i</i>	-.75127+.25216 <i>i</i> 1.7187+2.0276 <i>i</i>
var= 26 -.70286-2.0058 <i>i</i>	-1.12 <i>i</i> -.33142+.95574 <i>i</i>	-1.12 .38645-3.6265 <i>i</i>	-.76550+.25452 <i>i</i> 1.7028+2.0056 <i>i</i>
var= 27 -.68774-1.9849 <i>i</i>	-1.14 <i>i</i> -.33978+.95565 <i>i</i>	-1.14 .36860-3.6486 <i>i</i>	-.77972+.25686 <i>i</i> 1.6877+1.9849 <i>i</i>
var= 28	-1.16 <i>i</i>	-1.16	-.79395+.25919 <i>i</i>

$-.67318-1.9648 i$	$-.34808+.95573 i$	$.35105-3.6711 i$	$1.6731+1.9647 i$
var= 29 $-.65920-1.9457 i$	$-1.18 i$ $-.35634+.95598 i$	$-1.18$ $.33375-3.6938 i$	$-.80816+.26150 i$ $1.6592+1.9456 i$
var= 30 $-.64586-1.9272 i$	$-1.2 i$ $-.36453+.95625 i$	$-1.2$ $.31665-3.7167 i$	$-.82236+.26379 i$ $1.6457+1.9272 i$
var= 31 $-.63290-1.9095 i$	$-1.22 i$ $-.37268+.95676 i$	$-1.22$ $.29985-3.7399 i$	$-.83655+.26606 i$ $1.6329+1.9095 i$
var= 32 $-.62058-1.8925 i$	$-1.24 i$ $-.38078+.95731 i$	$-1.24$ $.28320-3.7632 i$	$-.85076+.26831 i$ $1.6206+1.8926 i$
var= 33 $-.60862-1.8761 i$	$-1.26 i$ $-.38885+.95804 i$	$-1.26$ $.26680-3.7868 i$	$-.86494+.27054 i$ $1.6086+1.8762 i$
var= 34 $-.59716-1.8602 i$	$-1.28 i$ $-.39686+.95885 i$	$-1.28$ $.25065-3.8107 i$	$-.87910+.27279 i$ $1.5971+1.8602 i$
var= 35 $-.58612-1.8451 i$	$-1.3 i$ $-.40483+.95976 i$	$-1.3$ $.23460-3.8346 i$	$-.89330+.27502 i$ $1.5860+1.8451 i$
var= 36 $-.57552-1.8306 i$	$-1.32 i$ $-.41280+.96081 i$	$-1.32$ $.21880-3.8588 i$	$-.90748+.27725 i$ $1.5755+1.8306 i$
var= 37 $-.56512-1.8164 i$	$-1.34 i$ $-.42070+.96191 i$	$-1.34$ $.20315-3.8832 i$	$-.92167+.27944 i$ $1.5652+1.8165 i$
var= 38 $-.55528-1.8027 i$	$-1.36 i$ $-.42856+.96309 i$	$-1.36$ $.18765-3.9077 i$	$-.93584+.28163 i$ $1.5552+1.8028 i$
var= 39 $-.54568-1.7896 i$	$-1.38 i$ $-.43639+.96439 i$	$-1.38$ $.17235-3.9324 i$	$-.94992+.28376 i$ $1.5456+1.7897 i$
var= 40 $-.53646-1.7770 i$	$-1.4 i$ $-.44421+.96576 i$	$-1.4$ $.15715-3.9572 i$	$-.96410+.28595 i$ $1.5365+1.7769 i$
var= 41 $-.52754-1.7646 i$	$-1.42 i$ $-.45198+.96725 i$	$-1.42$ $.14215-3.9822 i$	$-.97823+.28810 i$ $1.5275+1.7646 i$
var= 42 $-.51890-1.7527 i$	$-1.44 i$ $-.45972+.96877 i$	$-1.44$ $.12720-4.0072 i$	$-.99239+.29026 i$ $1.5189+1.7527 i$
var= 43 $-.51048-1.7412 i$	$-1.46 i$ $-.46741+.97033 i$	$-1.46$ $.11245-4.0325 i$	$-1.0065+.29240 i$ $1.5105+1.7412 i$
var= 44 $-.50240-1.7302 i$	$-1.48 i$ $-.47513+.97209 i$	$-1.48$ $.97850e-1-4.0579 i$	$-1.0206+.29448 i$ $1.5025+1.7302 i$
var= 45 $-.49458-1.7193 i$	$-1.5 i$ $-.48277+.97379 i$	$-1.5$ $.83350e-1-4.0834 i$	$-1.0348+.29663 i$ $1.4946+1.7193 i$
var= 46 $-.48688-1.7088 i$	$-1.52 i$ $-.49039+.97559 i$	$-1.52$ $.68950e-1-4.1090 i$	$-1.0489+.29871 i$ $1.4869+1.7087 i$
var= 47 $-.47950-1.6985 i$	$-1.54 i$ $-.49800+.97745 i$	$-1.54$ $.54650e-1-4.1347 i$	$-1.0630+.30087 i$ $1.4795+1.6986 i$
var= 48 $-.47236-1.6888 i$	$-1.56 i$ $-.50559+.97942 i$	$-1.56$ $.40550e-1-4.1606 i$	$-1.0771+.30294 i$ $1.4724+1.6888 i$
var= 49 $-.46540-1.6791 i$	$-1.58 i$ $-.51314+.98139 i$	$-1.58$ $.26450e-1-4.1865 i$	$-1.0912+.30504 i$ $1.4654+1.6792 i$
var= 50 $-.45876-1.6699 i$	$-1.6 i$ $-.52068+.98339 i$	$-1.6$ $.12500e-1-4.2125 i$	$-1.1053+.30714 i$ $1.4587+1.6699 i$
var= 51	$-1.62 i$	$-1.62$	$-1.1194+.30924 i$

$-.45218-1.6608 i$	$-.52818+.98548 i$	$-.13500e-2-4.2387 i$	$1.4521+1.6608 i$
var= 52 $-.44582-1.6521 i$	$-1.64 i$ $-.53568+.98764 i$	$-1.64$ $-.15100e-1-4.2649 i$	$-1.1335+.31132 i$ $1.4458+1.6522 i$
var= 53 $-.43966-1.6436 i$	$-1.66 i$ $-.54316+.98981 i$	$-1.66$ $-.28800e-1-4.2912 i$	$-1.1477+.31338 i$ $1.4398+1.6437 i$
var= 54 $-.43362-1.6353 i$	$-1.68 i$ $-.55062+.99207 i$	$-1.68$ $-.42350e-1-4.3177 i$	$-1.1617+.31545 i$ $1.4336+1.6353 i$
var= 55 $-.42784-1.6273 i$	$-1.7 i$ $-.55803+.99434 i$	$-1.7$ $-.55850e-1-4.3442 i$	$-1.1758+.31750 i$ $1.4279+1.6273 i$
var= 56 $-.42212-1.6195 i$	$-1.72 i$ $-.56547+.99672 i$	$-1.72$ $-.69300e-1-4.3707 i$	$-1.1898+.31956 i$ $1.4221+1.6195 i$
var= 57 $-.41654-1.6118 i$	$-1.74 i$ $-.57284+.99907 i$	$-1.74$ $-.82650e-1-4.3974 i$	$-1.2040+.32163 i$ $1.4165+1.6119 i$
var= 58 $-.41116-1.6044 i$	$-1.76 i$ $-.58022+1.0014 i$	$-1.76$ $-.95900e-1-4.4241 i$	$-1.2180+.32367 i$ $1.4112+1.6044 i$
var= 59 $-.40590-1.5972 i$	$-1.78 i$ $-.58759+1.0039 i$	$-1.78$ $-.10910-4.4509 i$	$-1.2321+.32571 i$ $1.4059+1.5972 i$
var= 60 $-.40084-1.5901 i$	$-1.8 i$ $-.59494+1.0064 i$	$-1.8$ $-.12220-4.4778 i$	$-1.2462+.32777 i$ $1.4008+1.5901 i$

## Список литературы

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1972. 496 с.
2. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены, М.: Наука, 1979. 416 с.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М.: Наука, 1977. 512 с.
4. Ефимов А. В., Золотарев Ю. Г., Терпигорева В. М. Математический анализ (специальные разделы), ч. II, М.: Высшая школа, 1980. 296 с.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного., М: Наука, 1987. 688 с.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели., М: Наука, 1973. 416 с.
7. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики., М: Высшая школа, 1990. 607 с.
8. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной., М: Наука, 1979. 319 с.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т.3. Ч. II., М.: Наука, 1969. 672 с.

# Содержание

Предисловие . . . . .	3
I. Приближение функций на отрезке . . . . .	4
1. Приближение функций многочленами в пространстве $L_2$ . . . . .	4
2. Приближение функций многочленами в пространстве $C[a, b]$ . . . . .	9
3. Задания . . . . .	15
II. Построение моделей течения жидкости . . . . .	19
4. Уравнения гидродинамики . . . . .	19
5. Комплексный потенциал . . . . .	21
6. Течения с постоянной завихренностью . . . . .	23
7. Другие примеры решений . . . . .	25
8. Задача обтекания границы плоской области . . . . .	26
9. Течение с заданным комплексным потенциалом . . . . .	32
10. Задания . . . . .	34
Список литературы . . . . .	38