Министерство образования и науки РФ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Владимирский государственный университет

Кафедра физики и прикладной математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ»

Составители:
О. Н. МЕДВЕДЕВА
А. О. КУЧЕРИК
Е. В. ЯНИНА

Владимир 2011

УДК 517.97
ББК 22.161.8
М54

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор,
зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики
Владимирского государственного гуманитарного университета
Ю.А. Алхутов

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

М54 **Методические** указания к практическим занятиям по дисциплине «Решение экстремальных задач» / Владим. гос. ун-т ; сост. : О. Н. Медведева, А. О. Кучерик, Е. В. Янина. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2011. – 84 с.

Приведены методы решения классических задач вариационного исчисления и неклассических задач оптимального управления.

В каждом разделе кратко изложены основные теоретические сведения, приведены решения типовых задач и примеры для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов пятого курса специальности 010501 – прикладная математика и информатика и третьего курса специальности 010503 – математическое обеспечение и администрирование информационных систем всех форм обучения, аспирантов и преподавателей.

Рекомендованы для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 4. Библиогр.: 9 назв.

УДК 517.97
ББК 22.161.8

Введение

Постановка и решение задач поиска максимальных и минимальных величин актуальны на протяжении всей истории развития человечества. Особенное значение они приобрели в XX веке, когда назрела необходимость в наиболее эффективном использовании природных и людских ресурсов, материальных и финансовых средств. Все эти потребности приводят к необходимости поиска лучшего, *оптимального* решения того или иного вопроса.

Первые задачи поиска максимума и минимума были поставлены и решены в глубокой древности, когда математика зарождалась как наука. Непосредственно основы теории экстремальных задач были заложены в XVII веке и активно развиваются по сей день. Вопросами отыскания экстремумов занимались ведущие математики: П. Ферма, И. Ньютон, Г. В. Лейбниц, Я. Бернулли, Ж. Л. Лагранж, У. Эйлер, Ж.А. Пуанкаре, Д. фон Нейман, Л. В. Канторович, Л. С. Понтрягин и многие другие. Невозможно представить себе современное полноценное математическое образование без знания теории решения экстремальных задач (вариационного исчисления).

При изучении данной дисциплины предполагается знание методов математического анализа и линейной алгебры, элементарных приемов дифференцирования и интегрирования функций, умение решать дифференциальные уравнения, а также выполнять матричные операции.

Настоящее издание содержит методические рекомендации по решению типовых задач курса теории экстремальных задач (вариационного исчисления). В первом разделе приведены теоретические сведения, а также примеры решения классических вариационных задач, а также задания для самостоятельной работы студентов; рассмотрены задачи поиска безусловного и условного экстремумов, случаи подвижных и неподвижных границ, изопериметрические задачи. Во втором разделе приведены теоретические сведения и разобраны примеры заданий по теории оптимального управления, рассмотрен принцип максимума Понтрягина, приведены примеры решения классических задач оптимального управления.

Издание будет полезно студентам, изучающим курсы теории экстремальных задач, вариационного исчисления, оптимизации, а также магистрантам и аспирантам, занимающимся проблемами оптимизации.

Раздел 1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1.1. Общая постановка задачи. Основные теоремы и определения

На практике существуют задачи оптимизации, в которых критерий качества зависит от функции, определить которую необходимо так, чтобы критерий принял оптимальное значение.

Вариационными задачами называются задачи о поиске экстремума функционалов.

Понятие функционала – это расширенное понятие функции в случае, когда область определения E есть множество объектов произвольной природы. Если каждому элементу f из E по некоторому правилу ставится в соответствие действительное число J, то говорят, что на множестве E определен функционал $J = J(f)$. Функционалы обычно задаются с помощью некоторых определенных интегралов.

Пример. На плоскости (x, y) заданы две точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), которые требуется соединить гладкой кривой, имеющей наименьшую длину (рис. 1.1).

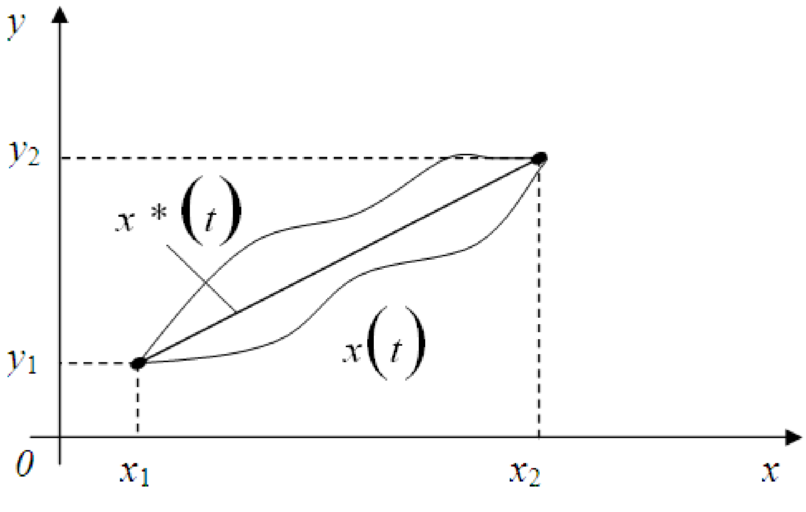

Рис. 1.1

◄ Длина кривой, соединяющей две заданные точки, находится по формуле

$$J\left[y(x)\right]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению такой непрерывной функции $y^*(x)$, имеющей на отрезке $[x_0, x_1]$ непрерывную производную и удовлетворяющей заданным граничным условиям $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, на котором критерий $J[y(x)]$ принимает минимальное значение. Критерий зависит от функции $y(x)$ и представляет собой функционал. Очевидно, что решением поставленной задачи является прямая $y^*(x)$, соединяющая две заданные точки. ➤

<u>Понятие о вариации функционала</u>

Пусть функционал $J[y(x)]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx$, где $F(x,y(x),y'(x))$ – некоторая функция трех переменных, определенная в классе C. Разность

$$\delta y(x)=\bar{y}(x)-y(x), \text{ при } \bar{y}(x), y(x)\in C,$$

называется *приращением* (или *вариацией*) *аргумента* y функционала $J[y(x)]$.

Разность

$$\Delta J=\Delta J(\delta y)\ =J(y+\delta y)-J(y)$$

называется *приращением функционала* $J(y)$, соответствующим приращению δy аргумента.

Пусть функция $F(x,y(x),y'(x))$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно. Тогда в приращении функционала $\Delta J(\delta y)$ можно выделить главную часть, линейную относительно вариации аргумента, которая называется *вариацией функционала* $J(y)$ и обозначается через δJ.

Представим вариацию аргумента y в виде $y(x) = \bar{y}(x) - \alpha\delta y(x)$, где $\delta y(x)$ – фиксированная функция, а α – числовой параметр.

Так как $J(y + \alpha\,\delta y(x))$ есть функция $\varphi(\alpha)$ числового параметра α, то, разложив эту функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $\alpha = 0$ по степеням α, найдем

$$\Delta J = J\left(y(x) + \alpha\,\delta y(x)\right) - J(y) = \alpha\,\delta J + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 J + \ldots,$$

где

$$\alpha J = \left.\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\frac{dJ\left(y(x) + \alpha\,\delta y(x)\right)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$$ – ***первая вариация функционала***;

$$\delta^2 J = \left.\frac{d^2 J\left(y(x) + \alpha\,\delta y(x)\right)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$$ – ***вторая вариация функционала***.

<u>Понятие об экстремуме функционала</u>

Рассмотрим простейшую вариационную задачу, которая заключается в минимизации функционала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx \tag{1.1}$$

на множестве допустимых функций

$Y = \left\{ y \in C_1[x_1, x_2] \mid y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2;\ \left(x, y(x), y'(x) \in D\ \forall x \in [x_1, x_2]\right)\right\}$,

$D \subset \Re^3$, на котором следует минимизировать целевой функционал.

Функционал $J(y)$ достигает в точке y_0 (или на кривой $y_0(x)$) локального минимума (максимума), если $\exists$ окрестность y_0 такая, что для $\forall$ y из этой окрестности выполнено неравенство

$$Y(y) \geq Y(y_0) \text{ (или } Y(y) \geq Y(y_0)\text{)}. \tag{1.2}$$

Если неравенство (1.2) справедливо для $\forall$ $y \in D$, то $Y(y)$ достигает в точке y_0 ***глобального минимума (максимума)***.

Теорема 1 (первое необходимое условие экстремума). Пусть точка y_0 – точка локального экстремума дифференцируется в области D функционала $J(y)$, тогда для $\forall h$, удовлетворяющих условиям $h \in C_1[x_1, x_2], h(x_1) = h(x_2) = 0$, первая вариация функционала $\delta J(h) \equiv 0$:

$$\delta J(h) = \int_{x_1}^{x_2} \left[F_y(x, y(x), y'(x)) h(x) + F_{y'}(x, y(x), y'(x)) h'(x) \right] dx = 0.$$

Таким образом, если функция $y \in Y$ реализует слабый локальный минимум (максимум) функционала (1.1), то она является решением дифференциального уравнения

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0, \qquad (1.3)$$

называемого ***уравнением Эйлера – Лагранжа***.

Теорема 2 (второе необходимое условие экстремума). Пусть $J(y)$ – дважды дифференцируемый в области D функционал. Пусть точка $y_0 \in D$ есть точка локального минимума (максимума) $J(y)$, тогда $\forall h$ будет выполнено:

$$\delta^2 J(y_0, h) \geq 0 \text{ (или } \delta^2 J(y_0, h) \leq 0 \text{ соответственно).}$$

Теорема 3 (достаточное условие экстремума). Пусть $J(y)$ – дважды дифференцируемый в области D функционал, $y_0 \in D$. Пусть выполняются условия:

1) $\delta J(y_0, h) \equiv 0$,

2) $\delta^2 J(y_0, h)$ – сильно положительна в точке y_0, т.е. $\exists\, k > 0$: $\forall h$: $\delta^2 J(y_0, h) \geq k\|h\|^2$, тогда y_0 – точка локального минимума; если ($\delta^2 J(y_0, h) \leq k\|h\|^2$, тогда y_0 – точка локального максимума.

Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера – Лагранжа

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения Эйлера – Лагранжа, в которых благодаря специальному виду подынтегральной функции F это уравнение можно упростить, в частности понизить его порядок.

1. Функция F не зависит от y', т.е. $F = F(x, y)$ при $(x, y, y') \in D$. В этом случае $F_{y'} = 0$ и дифференциальное уравнение

(1.3) превращается в функциональное уравнение (в котором отсутствуют производные):

$$F_y(x, y) = 0\,.$$

2. Функция F не зависит от y, т.е. $F = F(x, y')$ при $(x, y, y') \in D$. Тогда $F_y = 0$ и (1.3) принимает вид

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0\,,$$

откуда, интегрируя, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$F_{y'}(x, y') = C\,,$$

где C – некоторая постоянная.

3. Функция F не зависит от x, т.е. $F = F(y, y')$ при $(x, y, y') \in D$. Для упрощения уравнения (1.3) умножим обе его части на y', а затем прибавим и вычтем выражение $F_{y'}(y, y')y''$. Имеем

$$F_y(y, y')y'' + F_{y'}(y, y')y'' - F_{y'}(y, y')y'' - y' \frac{d}{dx} F_{y'}(y, y') = 0\,.$$

Полученное уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}[F(y, y') - y'F_{y'}(y, y')] = 0\,.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(y, y') - y' F_{y'}(y, y') = C\,,$$

где C – некоторая постоянная.

Теперь выясним, когда порядок дифференциального уравнения (1.3) можно понизить в общем случае $F = F(x, y, y')$. Для этого, предполагая функции F и y дважды непрерывно дифференцируемыми на множестве D и отрезке $[x_1, x_2]$ соответственно, выполним в (1.3) операцию дифференцирования по x (что возможно благодаря сделанным предположениям) и запишем выражение Эйлера – Лагранжа более подробно:

$$F_y(x,y,y')y'' - F_{xy'}(x,y,y') - F_{yy'}(x,y,y')y' - \\ - F_{y'y'}(x,y,y')y'' = 0. \tag{1.4}$$

Отсюда следует, что уравнение имеет первый порядок тогда и только тогда, когда равенство $F_{y'y'}(x,y,y') = 0$ верно для всех точек $(x,y,y') \in D$. Интегрируя последнее равенство, находим

$$F(x,y,y') = P(x,y) + Q(x,y)y',$$

где P и Q – некоторые функции двух переменных. Для этой функции F уравнение (1.4) принимает вид

$$P_y(x,y) - Q_x(x,y) = 0. \tag{1.5}$$

Здесь возможны два случая.

1. Равенство (1.5) является тождеством, т.е. возможно для всех точек $(x,y) \in D$. Тогда существует такая функция $u = u(x,y)$, что

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy, (x,y) \in D.$$

При этом область D предполагается односвязной (она является таковой в случае, например, если D – выпуклая область). Следовательно,

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} du(x,y) = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1)$$

для любой допустимой функции y. Это означает, что задача оптимизации бессодержательна: $J(y) = \text{const}$ для всех y.

2. Равенство (1.5) представляет собой функциональное уравнение относительно y. Если это уравнение – дифференцируемое решение и если для найденного решения выполнены краевые условия $y(x_i) = y_i$, $i = 1,\ 2,$ то оно является экстремалью. На практике рассчитывать на такое “стечение обстоятельств” не приходится.

Таким образом, *в общем случае* $F = F(x, y, y')$ *порядок дифференциального уравнения Эйлера – Лагранжа, как правило, не понижается.*

1.2. Вариационные задачи поиска безусловного экстремума

Метод вариации в задачах с неподвижными границами

Функционалы $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$*, зависящие от одной функции*

Постановка задачи

Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[x_0, x_1]$, где x_0 и x_1 заданы, т.е. $y(x) \in C^1[x_0, x_1]$;

б) функции $y(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y(x_1) = y_1,$$

где значения y_0 и y_1 заданы, т.е. кривые проходят через две закрепленные граничные точки.

На множестве M задан функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{1.6}$$

где подынтегральная функция $F(x, y(x), y'(x))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $y^*(x)$, на которой функционал (1.6) достигает экстремума, т.е.

$$J\left[y^*(x)\right] = \underset{y(x) \in M}{\text{extr}} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx. \tag{1.7}$$

Так как на кривых $y(x)$, образующих множество М, не наложено дополнительных условий, кроме граничных, задача (1.7) называется задачей поиска ***безусловного экстремума***.

Алгоритм поиска решения задачи

Стратегия поиска решения задачи (1.7) состоит в определении первой вариации δJ функционала $J[y(x)]$ и приравнивании ее к нулю согласно теореме о необходимом условии экстремума функционала. В результате получаются соотношения, позволяющие найти кривые, "подозрительные" на наличие экстремума функционала.

Последовательность действий для решения поставленной задачи:

1. Записать уравнение Эйлера – Лагранжа или использовать его частные случаи решения.

2. Найти общее решение уравнения Эйлера – Лагранжа $y = y(x, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

3. Определить постоянные C_1 и C_2 из граничных условий, решая систему

$$y(x_1, C_1, C_2) = y_1,$$
$$y(x_2, C_1, C_2) = y_2.$$

В результате получим экстремаль $y^*(x)$, на которой может достигаться экстремум функционала.

Примеры решения задач

1. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y) = \int\limits_0^1 y'^2(x)dx \to \text{extr}$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 1$; $y(1) = 0$.

◄ Запишем уравнение Эйлера – Лагранжа. Так как подынтегральная функция $F = y'^2(x)$ не зависит от y, то используя частный случай уравнения Эйлера – Лагранжа $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \text{const}$, получаем

$2y' = C_1$. Интегрируя, находим общее решение уравнения Эйлера – Лагранжа $y = C_1 x + C_2$.

Из граничных условий находим постоянные C_1 и C_2:

$$y(0) = C_2 = 1,$$

$$y(1) = C_1 + 1 = 0.$$

Отсюда $C_1 = -1,\ C_2 = 1$. В результате получаем экстремаль $y^*(x) = -x + 1$.➤

2. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y) = \int_0^1 (y - y'^2)dx \to \text{extr}$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = y(1) = 0$.

➤ Запишем уравнение Эйлера – Лагранжа. Так как подынтегральная функция $F = y - y'^2$, $F_y = 1$, $F_{y'} = -2y'$, $\frac{d}{dx}F_{y'} = -2y''$, получаем $2y'' + 1 = 0$.

Находим общее решение уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$2y'' + 1 = 0;$$

$$y' = -\frac{1}{2}x + C_1.$$

Общее решение уравнения имеет вид: $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2$.

Из граничных условий находим постоянные C_1 и C_2:

$$y(0) = C_2 = 0,$$

$$y(1) = -\frac{1}{4} + C_1 + C_2 = 0.$$

Отсюда $C_1 = \frac{1}{4},\ C_2 = 0$. В результате получаем экстремаль $y^*(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$.➤

3. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y)=\int\limits_{0}^{3/2}(y'^3+2y)dx\to\text{extr},$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0$, $y\left(\dfrac{3}{2}\right)=1$.

◀ Запишем уравнение Эйлера – Лагранжа. Так как $F=y'^3+2y$, $F_y=2$, $F_{y'}=3y'^2$, $\dfrac{d}{dx}F_{y'}=6y'y''$, получаем $2-6y'y''=0$ или $1-3y'y''=0$.

Находим общее решение уравнения Эйлера – Лагранжа. Приведем уравнение $1-3y'y''=0$ к виду $3y'\dfrac{dy'}{dx}=1$ и преобразуем к $\dfrac{d(y')^2}{dx}=\dfrac{1}{3}$. Решим полученное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y'^2=\frac{2}{3}x+C_1;\; y'=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x+C_1}\,.$$

$$y=\pm\int\sqrt{\frac{2}{3}x+C_1}\,dx=\pm\left(\frac{2}{3}x+C_1\right)^{3/2}+C_2.$$

Из граничных условий находим постоянные C_1 и C_2.

1. Рассмотрим уравнение

$$y=\left(\frac{2}{3}x+C_1\right)^{3/2}+C_2.$$

$$y(0)=C_1^{3/2}+C_2=0,$$

$$y(\frac{3}{2})=\left(1+C_1\right)^{3/2}+C_2=1.$$

Таким образом, $C_1=C_2=0$, экстремаль $y^*(x)=\left(\dfrac{2}{3}x\right)^{3/2}$.

2. В уравнении

$$y=-\left(\frac{2}{3}x+C_1\right)^{3/2}+C_2$$

нет таких постоянных C_1 и C_2, которые удовлетворяют граничным условиям.

Таким образом, получаем единственную экстремаль $y^*(x)=\left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$.➤

4. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y)=\int\limits_0^1 (y^2(x)+y'^2(x))\,dx \to \text{extr}$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0$, $y(1)=1$.

➤ Запишем уравнение Эйлера – Лагранжа. Так как $F=y^2+y'^2$, $F_y=2y$, $F_{y'}=2y'$, $\frac{d}{dx}\{F_{y'}\}=2y''$, получаем $2y-2y''=0$ или $y''-y=0$.

Найдем общее решение уравнения Эйлера – Лагранжа. Оно является однородным с постоянными коэффициентами, поэтому составим характеристическое уравнение $\lambda^2-1=0$. Его корни – $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ – действительные различные. Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

Из граничных условий находим постоянные C_1 и C_2:

$$y(0)=C_1+C_2=0,$$

$$y(1)=C_1e+\frac{C_2}{e}=1.$$

Отсюда $C_1=\frac{e}{e^2-1}$, $C_2=\frac{e}{1-e^2}$.

В результате получаем экстремаль

$$y^*(x)=\frac{e}{e^2-1}e^x+\frac{e}{1-e^2}e^{-x}.➤$$

5. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y(x))=\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{x}dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=3+\sqrt{3}$, $y(2)=3$.

⮜ Запишем уравнение Эйлера – Лагранжа. Подынтегральная функция $F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$ не зависит от y явно, и, следовательно, уравнение Эйлера – Лагранжа примет вид

$$F_{y'}=\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=C_1=\frac{1}{C}.$$

Найдем общее решение уравнения Эйлера – Лагранжа: $\frac{y'C}{\sqrt{1+y'^2}}=x$. Сделаем подстановку $y'=\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\tau$: $x=\frac{\operatorname{ctg}\tau}{\frac{1}{\cos\tau}}=C\sin\tau$.

Найдем дифференциал: $dx=C\cos\tau\,d\tau$. С учетом равенства $dy=\operatorname{tg}\tau\,dx$ получаем $dy=\operatorname{tg}\tau\,C\cos\tau\,d\tau=C\sin\tau\,d\tau$. Интегрируя, имеем $y(x)=-C\cos\tau+C_2$.

Из системы

$$x=C\sin\tau,\ y(x)-C_2=-C\cos\tau,$$

возводя в квадрат каждое уравнение и складывая, находим общий интеграл уравнения Эйлера – Лагранжа $x^2+(y(x)-C_2)^2=C^2$.

Определим постоянные C и C_2 из граничных условий:

$$y(1)=3+\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 1+\left(3+\sqrt{3}-C_2\right)^2=C^2,$$

$$y(2)=3 \quad \Leftrightarrow \quad 4+(3-C_2)^2=C^2.$$

Отсюда $C_2=3$, $C^2=4$. В результате получаем экстремаль $x^2+\left(y^*(x)-3\right)^2=4$. Так как $y(1)=3+\sqrt{3}$, экстремум может достигаться только на кривой $y^*(x)=3+\sqrt{4-x^2}$; $x\in[1,\ 2]$.⮞

Задачи для самостоятельного решения

Необходимо найти экстремали следующих функционалов при заданных граничных условиях:

а) $J(y(x))=\int\limits_0^1\left[4y(x)-y'^2(x)+12xy'(x)\right]dx\to\text{extr},\qquad y(0)=1,$ $y(1)=4$;

б) $J(y(x))=\int\limits_0^1\left[y^2(x)-y'^2(x)+2y(x)e^x\right]dx\to\text{extr},\qquad y(0)=0,$ $y(1)=0$;

в) $J(y)=\int\limits_0^1(\dot{y}'^2+xy)\,dx\to\text{extr},\quad y(0)=y(1)=0$;

г) $J(y(x))=\int\limits_0^2\left[y^2(x)+xy'(x)\right]dx$, $y(0)=0$, $y(2)=1$;

д) Необходимо найти семейство экстремалей функционала $J(y(x))=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y(x)}dx$.

Функционалы $\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,y_1(x),\ \ldots,y_n(x),y_1'(x),\ \ldots,y_n'(x)\right)dx$, *зависящие от нескольких функций*

Постановка задачи

Рассмотрим множество M допустимых вектор-функций $y(x)=\left(y_1(x),\ \ldots,y_n(x)\right)^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[x_1,x_2]$, где x_1, x_2 – заданы, т.е. $y_i(x)\in C^1([x_1,x_2])$, $i=\overline{1,n}$;

б) функции $y_i(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$y_i(x_1)=y_{i1},\ y_i(x_2)=y_{i2},\ i=\overline{1,n}, \tag{1.8}$$

где y_{i1}, y_{i2}, $i=\overline{1,n}$ – заданы, т.е. каждая из кривых $y_i(x)$ проходит через две закреплённые граничные точки.

На множестве М задан функционал

$$J\left[y_1(x),\ ...,y_n(x)\right]=\int_{x_1}^{x_2} F\left(x,y_1(x),\ ...,y_n(x),y_1'(x),\ ...,y_n'(x)\right)dx, \quad (1.9)$$

где подынтегральная функция $F\left(x,y_1(x),\ ...,y_n(x),y_1'(x),\ ...,y_n'(x)\right)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор-функций $y(x)$, принадлежащих множеству М, требуется найти вектор-функцию $y^*(x)=\left(y_1^*(x),\ ...,y_n^*(x)\right)^T$, на которой функционал (1.9) достигает экстремума, т.е.

$$J\left[y_1^*(x),\ ...,y_n^*(x)\right] = \underset{y(x)\in M}{extr}\int_{x_1}^{x_1} F\left(x,y_1(x),\ ...,y_n(x),y_1'(x),\ ...,y_n'(x)\right)dx. \quad (1.10)$$

Алгоритм поиска решения задачи

Стратегия поиска решения задачи (1.1.10) опирается на теорему 1 о необходимом условии экстремума функционала: $\delta J=0$ на экстремали $y^*(x)$. Поскольку эта проблема сформулирована для скалярной функции $y(x)$, применим её к функционалу (1.9), варьируя лишь функцию $y_k(x)$, а остальные оставляя неизменными $y_k(x)$.

Пусть $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ – компоненты вектор-функции $y^*(x)$, на которой достигается экстремум функционала в задаче (1.10). Тогда, полагая $\delta y_i(x)\equiv 0$, $i=1,\ ...,k-1,\ k+1,\ ...,n$, имеем

$$y_i(x)=y_i^*(x),\ i=1,\ ...,k-1,\ k+1,\ ...,n,\ y_k(x)=y_k^*(x)+\alpha\delta y_k(x),$$

где $\delta y_k(x)\in C^1([x_1,x_2])$ – фиксированная вариация, удовлетворяющая условиям $\delta y_k(x_1)=\delta y_k(x_2)=0$.

Подставляя $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ в функционал, имеем

$$J=\int\limits_{x_1}^{x_2} F\begin{pmatrix} x, y_1^*(x),\ ..., y_k^*(x)+\alpha\delta y_k(x),\ ..., y_n^*(x), \\ (y_1^*)'(x),\ ...,(y_k^*)'(x)+\alpha\delta y_k'(x),\ ...,(y_n^*)'(x) \end{pmatrix} dx .$$

Отсюда получаем формулу для первой вариации:

$$\delta_k J=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[F_{y_k}\delta y_k(x)+F_{y_k'}\delta y_k'(x)\right]dx .$$

Интегрируя по частям, применяя необходимое условие экстремума и основную лемму вариационного исчисления, получаем уравнение Эйлера – Лагранжа:

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y_k'}=0 .$$

Так как в качестве варьируемой компоненты $y_k(x)$ может быть взята любая из компонент $y_i(x),\ i=\overline{1,n}$, то искомая вектор-функция $y^*(x)=\left(y_1^*(x),\ ..., y_n^*(x)\right)^T$ должна удовлетворять системе уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0,\ i=\overline{1,n} . \tag{1.11}$$

Общее решение этой системы $y_i=y_i\left(x,C_1,\ ...,C_{2n}\right), i=\overline{1,n}$ содержит $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из $2n$ граничных условий $y_i(x_1)=y_{i1}$, $y_i(x_2)=y_{i2}$, $i=\overline{1,n}$.

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо выполнить следующие действия:

1. Составить систему уравнений Эйлера – Лагранжа (1.11).
2. Найти общее решение системы уравнений Эйлера – Лагранжа: $y_i=y_i\left(x,C_1,\ ...,C_{2n}\right)$, $i=\overline{1,n}$.
3. Определить постоянные $C_1,\ ...,C_{2n}$ из граничных условий (1.8); записать выражения для компонент $y_1^*(x),\ ..., y_n^*(x)$ экстремали $y^*(x)=\left(y_1^*(x),\ ..., y_n^*(x)\right)^T$.

Примеры решения задачи

Необходимо найти экстремаль функционала $J(y_1(x), y_2(x)) = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(y_1')^2(x) - y_2'^2(x) + 2y_1(x) \cdot y_2(x) \right] dx \to \text{extr}$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\frac{\pi}{2}) = 1$, $y_2(\frac{\pi}{2}) = -1$.

➤ Подынтегральная функция выглядит следующим образом:

$$F = (y_1')^2(x) - (y_2')^2(x) + 2y_1(x) \cdot y_2(x).$$

Система уравнений Эйлера – Лагранжа имеет вид:

$$\begin{cases} F_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F_{y_1'} = 2y_2 - 2y_1'' = 0, \\ F_{y_2} - \dfrac{d}{dx} F_{y_2'} = 2y_1 - 2y_2'' = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_1'' = y_2, \\ y_2'' = y_1. \end{cases}$$

Систему уравнений сводим к однородному относительно y_1 уравнению, получаем $y_1^{(IV)} - y_1 = 0$.

Найдем решение данного уравнения:

$$(\lambda^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Так как характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$, то общее решение полученного однородного уравнения записывается в следующей форме:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Тогда $y_2 = y_1'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$.

Определяем постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 из граничных условий:

$$y_1(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

$$y_2(0) = C_1 + C_2 - C_3 = 0,$$

$$y_1(\frac{\pi}{2}) = C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} + C_4 = 1,$$

$$y_2(\frac{\pi}{2}) = C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} - C_4 = -1.$$

После решения системы уравнений получим:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0\,,\ C_4 = 1\,.$$

Запишем полученную экстремаль: $y^*(t) = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\sin x \end{pmatrix}$. ➤

Задачи для самостоятельного решения

Необходимо найти:

а) экстремаль функционала

$J(y_1(x), y_2(x)) = \int\limits_0^{\pi/2} [y_1'(x)y_2'(x) - y_1(x)\cdot y_2(x)]dx \to \text{extr}$, удовлетворяющую граничным условиям

$y_1(0) = y_2(0) = 0$; $y_1(\frac{\pi}{2}) = y_2(\frac{\pi}{2}) = 1$;

б) экстремаль функционала

$$J(y_1(x), y_2(x), y_3(x)) = \int\limits_1^2 \begin{bmatrix} 12xy_1(x) + (y_1')^2(x) + (y_2')^2(x) + \\ + 2y_2(x)\cdot y_3'(x) + (y_3')^2(x) + 2y_3(x)y_2'(x) \end{bmatrix} dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y_1(1) = 0$, $y_2(1) = 2$, $y_3(1) = 0$, $y_1(2) = 6$, $y_2(2) = 3$, $y_3(2) = 2$.

Функционалы $\int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m)}(x)\right)dx$*, зависящие от производных высшего порядка одной функции*

Постановка задачи

Рассмотрим множество M кривых $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ определены и m раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[x_0, x_1]$, где x_0 и x_1 заданы, т.е. $y(x) \in C^m([x_0, x_1])$;

б) функции $y(x)$ удовлетворяют граничным условиям

$$y(x_0) = y_0\,,\ y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}\,,\ i = 1,\ \ldots, m-1\,, \qquad (1.12)$$

$$y(x_1) = y_1\,,\ y^{(i)}(x_1) = y_1^{(i)}\,,\ i = 1,\ \ldots, m-1\,,$$

где y_0, $y_0^{(i)}$, y_1, $y_1^{(i)}$ заданы.

На множестве М задан функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x), \ ..., y^{(m)}(x)\right) dx, \qquad (1.13)$$

где функция $F\left(x, y(x), y'(x), \ ..., y^{(m)}(x)\right)$ дифференцируема $(m+2)$ раза по всем аргументам.

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству М, требуется найти кривую $y^*(x)$, на которой функционал (1.13) достигает экстремума, т.е.

$$J\left[y^*(x)\right] = \operatorname*{extr}_{y(x)\in \mathrm{M}} \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x), \ ..., y^{(m)}(x)\right) dx. \qquad (1.14)$$

Теорема (необходимые условия экстремума). Если на функции $y^*(x) \in C^m([x_0, x_1])$, удовлетворяющей граничным условиям $y^*(x_0) = y_0$, $y^*(x_1) = y_1$, $y^{*(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$, $y^{*(i)}(x_1) = y_1^{(i)}$, $i = 1, \ ..., m-1$ функционал (1.13) достигает экстремума, то функция $y^*(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера – Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + ... + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{y^{(m)}} = 0. \qquad (1.15)$$

Алгоритм поиска решения задачи

1. Записать уравнение Эйлера – Пуассона (1.15).
2. Найти общее решение уравнения $y = y\left(x, C_1, C_2, \ ..., \ C_{2m}\right)$.
3. Определить постоянные $C_1, C_2, \ ..., \ C_{2m}$ из граничных условий и записать выражение для экстремали $y^*(x)$.

Пример решения задачи

1. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y(x)) = \int_0^1 (y'')^2(x) dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = y'(0) = y'(1) = 0$, $y(1) = 1$.

◀ Запишем уравнение Эйлера – Пуассона. Так как $F = y''^2$, $F_y = 0$, $F_{y'} = 0$, $F_{y''} = 2y''$, $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, $\frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 2y^{(4)}$, то

$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 2y^{(4)} = 0$.

Решаем полученное уравнение: $y'''(x) = C_1$, $y''(x) = C_1x + C_2$, $y'(x) = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$, $y(x) = \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4$ – общее решение.

Используя граничные условия, определяем постоянные C_1, C_2, C_3, C_4:

$$y(0) = C_4 = 0,\ y'(0) = C_3 = 0,$$

$$y(1) = \frac{C_1}{6} + \frac{C_2}{2} + C_3 + C_4 = 1,\ y'(1) = \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = 0.$$

Отсюда получим $C_1 = -12$, $C_2 = 6$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$ и запишем уравнение экстремали $y^{(*)}(x) = -2x^3 + 3x^2$.▶

2. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y(x)) = \int_0^1 \left[(y'')^2(x) - 48y(x)\right]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$, $y(1) = y'(1) = 0$.

◀ Запишем уравнение Эйлера-Пуассона. Так как $F = y''^2 - 48y$, $F_y = -48$, $F_{y'} = 0$, $F_{y''} = 2y''$, $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, $\frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 2y^{(4)}$, то

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = -48 + 2y^{(4)} = 0.$$

Решаем полученное уравнение: $y'''(x) = 24x + C_1$, $y''(x) = 12x^2 + C_1x + C_2$, $y'(x) = 4x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$; общее решение – $y(x) = x^4 + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4$.

Теперь определяем постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, используя граничные условия: $C_1 = -24$, $C_2 = 12$, $C_3 = -4$, $C_4 = 1$. Запишем уравнение экстремали: $y^*(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. ➤

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Необходимо найти:

а) семейство экстремалей функционала

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{T} \left[(y''')^2(x) + 4(y'')^2(x) + 120xy(x) + 64y(x) + xe^{-2x}\right]dx\,;$$

б) экстремаль функционала

$J(y(x)) = \int_0^1 \left[(y')^2(x) + 4y^2(x) + 2y(x)e^{2x}\right]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 0$, $y(1) = 0$;

в) экстремаль функционала

$J(y_1, y_2) = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2}\,dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -2$, $y_1(3) = 7$, $y_2(3) = 1$;

г) экстремаль функционала

$J(y(x)) = \int_0^1 \left[(x+1)^3 y_1''^2(x) + y_2'''^2(x)\right]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_1(1) = \frac{1}{2}$, $y_2(1) = 1$, $y_1'(0) = -1$, $y_2'(0) = 0$, $y_1'(1) = -\frac{1}{4}$, $y_2'(1) = 3$, $y_2''(0) = 0$, $y_2''(1) = 6$;

д) семейство экстремалей функционала

$$J(y_1, y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \left[(y_1')^2 - (y_2')^2 - 2y_1^2 + 2y_1y_2 - 2y_2e^x\right]dx\,;$$

е) семейство экстремалей функционала

$$J(y_1, y_2, y_3, y_4) = \int_{x_1}^{x_2} \left[y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 - y_4'^2 + y_2^2 - 2y_3^2 + 2y_3y_4\right]dx.$$

Метод вариации в задачах с подвижными границами

Функционалы $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$ *, зависящие от одной функции.*

Случай гладких экстремалей

Постановка задачи

Рассмотрим множество М допустимых функций (кривых) $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y(x)$ непрерывно дифференцируемые, т.е. $y(x) \in C^1(\Delta)$, где Δ – некоторый конечный отрезок, внутренними точками которого являются значения x_0 и x_1, которые заранее не заданы;

б) значения x_0, $y_0 = y(x_0)$ и x_1, $y_1 = y(x_1)$, определяющие концы допустимых кривых, удовлетворяют граничным условиям

$$\psi(x_0, y_0) = 0, \; \varphi(x_1, y_1) = 0, \tag{1.16}$$

где $\psi(x,y)$, $\varphi(x,y)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

На множестве М задан функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx, \tag{1.17}$$

где функция $F(x, y(x), y'(x))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству М, требуется найти кривую $y^*(x)$, на которой функционал (1.17) достигает экстремума, т.е.

$$J\left[y^*(x)\right] = \underset{y(x)\in M}{\operatorname{extr}} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx. \tag{1.18}$$

Условия (1.16) определяют подвижные границы (рис. 1.2).

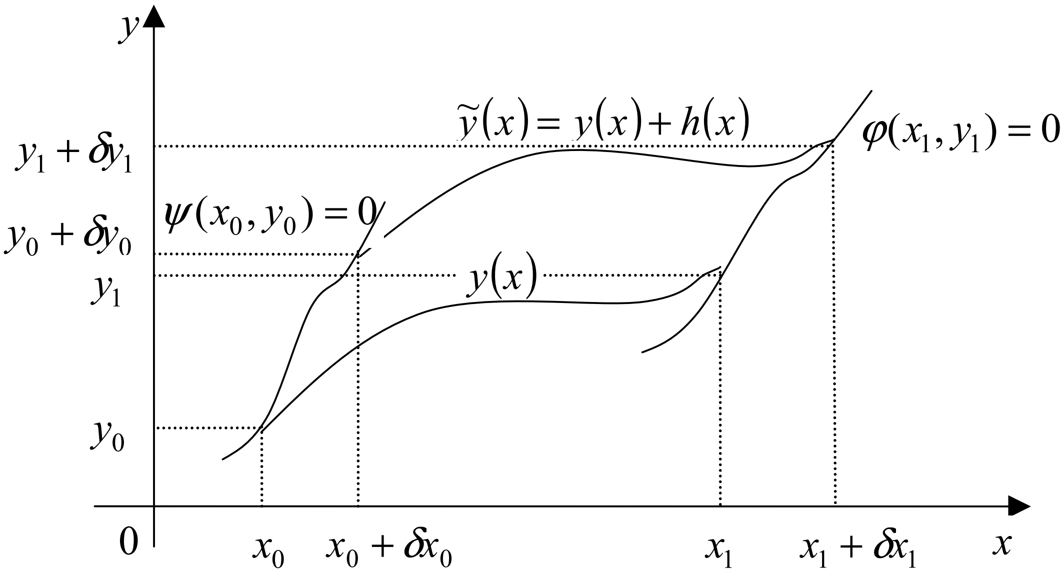

Рис. 1.2

Таким образом, экстремум в поставленной задаче ищется в классе гладких кривых, концы которых скользят по двум заданным линиям, описываемым уравнениями $\psi(x_0, y_0) = 0$ (для левого конца) и $\varphi(x_1, y_1) = 0$ (для правого конца).

Можно выделить следующие частные случаи общей постановки задачи.

А. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным вертикальным прямым, описываемым уравнениями $x = x_0$, $x = x_1$.

Необходимое условие экстремума в задаче (1.17) – равенство первой вариации нулю. Определим первую вариацию функционала, для чего найдем приращение

$$\Delta J(y,h) = J(y+h) - J(y) = \int\limits_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+h, y'+h')dx - \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} [F(x, y+h, y'+h') - F(x,y,y')]dx + \int\limits_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+h, y'+h')dx -$$

$$- \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F(x, y+h, y'+h')dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\delta F}{\delta y} h + \frac{\delta F}{\delta y'} h' \right] dx + F\Big|_{x=x_1} \delta x_1 -$$

$$- F\Big|_{x=x_0} \delta x_0 + \bar{o}(\rho(y+h, y)),$$

где $\rho(y,\tilde{y}) = \max\limits_{[x_0, x_1+\delta x_1]} |y(x) - \tilde{y}(x)| + \max\limits_{[x_0, x_1+\delta x_1]} |y'(x) - \tilde{y}'(x)| +$

$+\rho\big((x_0, y_0),\ (x_0+\delta x_0, y_0+\delta y_0)\big) + \rho\big((x_1, y_1), (x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)\big)$.

При этом условие

$$\delta J(y,h) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\delta F}{\delta y} h - \frac{d}{dx} \frac{\delta F}{\delta y'} h \right] dx + \frac{\delta F}{\delta y'} h \Bigg|_{x_0}^{x_1} + F \delta x \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$$

справедливо с точностью до бесконечно малых. После упрощения и с учетом соотношений $h(x_0) \approx \delta y_0 - y'(x_0)\delta x_0$, $h(x_1) \approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1$ получим выражение для первой вариации функционала:

$$\delta J(y,h) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\delta F}{\delta y} - \frac{d}{dx} \frac{\delta F}{\delta y'} \right] h dx + \left(F - y' \frac{\delta F}{\delta y'} \right) \Bigg|_{x=x_1} \delta x_1 +$$
$$+ \frac{\delta F}{\delta y'} \Bigg|_{x=x_1} \delta y_1 - \left(F - y' \frac{\delta F}{\delta y'} \right) \Bigg|_{x=x_0} \delta x_0 - \frac{\delta F}{\delta y'} \Bigg|_{x=x_0} \delta y_0 = 0. \qquad (1.19)$$

Б. Концы допустимых кривых скользят по двум заданным кривым, описываемым уравнениями $y = \psi(x)$, $y = \varphi(x)$.

В данном случае получается, что приращение определяется совокупностью значений $(h, \delta x_0, \delta x_1)$, а $\delta y_0, \delta y_1$ – зависимые от нее величины; таким образом, с точностью до бесконечно малых справедливы соотношения $\delta y_0 \approx \varphi'(x_0)\delta x_0$, $\delta y_1 \approx \psi'(x_1)\delta x_1$, с учетом которых выражение (1.19) примет вид:

$$\delta J(y,h) = \left(\frac{\delta F}{\delta y'} \psi' + F - y' \frac{\delta F}{\delta y'} \right) \Bigg|_{x=x_1} \delta x_1 - \left(\frac{\delta F}{\delta y'} \varphi' + F - y' \frac{\delta F}{\delta y'} \right) \Bigg|_{x=x_0} \delta x_0 = 0.$$

С учетом независимости приращений $\delta x_0, \delta x_1$ получим:

$$\begin{cases} F + \dfrac{\delta F}{\delta y'} (\psi' - y') \Bigg|_{x=x_1} = 0, \\ F + \dfrac{\delta F}{\delta y'} (\varphi' - y') \Bigg|_{x=x_0} = 0. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Система (1.20) называется *условием трансверсальности*.

В поставленной задаче наряду с поиском кривой $y^*(x)$ фактически производится выбор значений x_0^* и x_1^*, т.е. ищется тройка $\left(y^*(x), x_0^*, x_1^*\right)$. При этом её ε – окрестность первого порядка $(\varepsilon > 0)$ – образуется тройками $\left(y(x), x_0, x_1\right)$, удовлетворяющими условию

$$\left\|y(x) - y^*(x)\right\|_{C^1(\Delta)} < \varepsilon\,,\ \left\|x_0 - x_0^*\right\| < \varepsilon\,,\ \left\|x_1 - x_1^*\right\| < \varepsilon\,.$$

Функционал (1.1.17) точнее записывается в форме

$$J\left[y(x), x_0, x_1\right] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx\,.$$

Функционал достигает на тройке $\left(y^*(x),\ x_0^*,\ x_1^*\right)$ слабого минимума, если $J\left[y(x), x_0, x_1\right] \geq J\left[y^*(x), x_0^*, x_1^*\right]$ в ε (окрестности первого порядка).

Алгоритм поиска решения задачи

1. Записать уравнение Эйлера – Лагранжа или использовать его частные случаи решения.

2. Найти общее решение уравнения Эйлера – Лагранжа $y = y(x, C_1, C_2)$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

3. Записать условие трансверсальности для случая *Б* или использовать выражение для первой вариации для случая *А* и граничные условия.

4. Определить постоянные C_1, C_2, x_0^*, x_1^* и получить уравнение экстремали $y^*(x)$, на которой может достигаться экстремум функционала.

Примеры решения задач

1. Необходимо найти кривую, на которой функционал $J(y) = \int_0^1 \left[y'^2 + y\right]dx \to \text{extr}$ может достигать экстремума, если правый конец ее фиксирован $y(1) = 0$.

◀ Из условий задачи следует, что приращения $\partial y_1 = 0$, $\partial x_0 = \partial x_1 = 0$.

Запишем уравнение Эйлера – Лагранжа. Так как $F = y'^2 + y$, $F_y = 1$, $F_{y'} = 2y'$, $\dfrac{d}{dx}F_{y'} = 2y''$, уравнение примет вид $2y'' = 1$. Последовательно интегрируя, найдем общее решение уравнения:

$$y'' = \frac{1}{2},\ y' = \frac{1}{2}x + C_1,\ \ y = \frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2.$$

Используя выражение (1.19) и граничные условия на правом конце, получим:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=0} = 2y'\Big|_{x=0} = 2\left.\left(\frac{x}{2} + C_1\right)\right|_{x=0} = 0\text{, отсюда } C_1 = 0.$$

$$y(1) = \frac{1}{4} + C_2 = 0\text{, отсюда } C_2 = -\frac{1}{4}.$$

В результате получаем экстремаль $y^*(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4}$.▶

2. Необходимо найти кривую, на которой функционал $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y - y'^2 \right] dx \to \text{extr}$ может достигать экстремума, если правый конец ее фиксирован $y(0) = 0$.

◀ Из условий задачи следует, что приращения $\partial y_0 = 0$, $\partial x_0 = \partial x_1 = 0$.

Запишем уравнение Эйлера – Лагранжа. Так как $F = y - y'^2$, $F_y = 1$, $F_{y'} = -2y'$, $\dfrac{d}{dx}F_{y'} = -2y''$, уравнение примет вид $2y'' = -1$. Последовательно интегрируя, найдем общее решение уравнения:

$$y'' = -\frac{1}{2},\ y' = -\frac{1}{2}x + C_1,\ \ y = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2.$$

Используя выражение (1.19) и граничные условия на правом конце, получим:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1} = -2y'\Big|_{x=1} = -2\left(-\frac{x}{2}+C_1\right)\Big|_{x=1} = 0 \text{, отсюда } C_1 = \frac{1}{2}.$$

$y(0) = C_2 = 0$, отсюда $C_2 = 0$.

В результате получаем экстремаль $y^*(x) = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2}$.➤

3. Необходимо найти кривую, на которой функционал $J(y) = \int\limits_0^1 \left[y'^2 + y\right] dx \to \text{extr}$ может достигать экстремума, если правый конец ее фиксирован $y(x_1) = x_1$.

➤ Из условий задачи следует, что приращения $\partial x_0 = \partial x_1 = 0$, $\partial x_1 \neq 0$, $\partial y_0 \neq 0$.

Запишем уравнение Эйлера – Лагранжа. Так как $F = y'^2 + y$, $F_y = 1$, $F_{y'} = 2y'$, $\dfrac{d}{dx}F_{y'} = 2y''$, уравнение примет вид $2y'' = 1$. Последовательно интегрируя, найдем общее решение уравнения:

$$y'' = \frac{1}{2},\ y' = \frac{1}{2}x + C_1,\ \ y = \frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2.$$

Используя выражение (1.19) и граничные условия на правом конце, получим:

$$\left.\left(F - y'\frac{\delta F}{\delta y'}\right)\right|_{x=x_1} \delta x_1 - \left.\frac{\delta F}{\delta y'}\right|_{x=x_0} \delta y_0 = 0.$$

В связи с тем, что приращения ∂x_1 и ∂y_0 независимы, данное выражение можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases} \left.F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{x=x_1} = \left(y - y'^2\right)\Big|_{x=x_1} = C_2 = 0, \\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=x_0} = 2y'\big|_{x=0} = \left(\dfrac{x}{2} + C_1\right)\Big|_{x=0} = C_1 = 0. \end{cases}$$

В результате получаем экстремаль $y^*(x) = \dfrac{x^2}{4}$ и $x_1^* = 4$.➤

4. Необходимо найти кривую, на которой функционал $J(y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx$ может достигать экстремума, если левый конец ее фиксирован $y(0)=0$, $y(x_1)=-x_1+2$.

➤ После решения уравнения Эйлера – Лагранжа получаем экстремаль

$$(y-C_2)^2+x^2=\frac{1}{C_1^2}.$$

Найдём C_1 и C_2: $y(0)=0\Rightarrow C_1^2=\frac{1}{C_2^2}$. Получим экстремаль

$$(y-C_2)^2+x^2=C_2^2. \qquad (1.21)$$

Продифференцировав уравнение (1.21), получим

$$2y'(y-C_2)+2x=0.$$

Далее из полученного уравнения выразим первую производную функции $y'=-\frac{x}{y-C_2}$.

Запишем условие трансверсальности для правой границы, где $\varphi(x)=-x+2$:

$$y'(x)=-\frac{x}{y-C_2}=-\frac{1}{\varphi'}=1.$$

С одной стороны, используя граничное условие $y(0)=0$, получим соотношение $y-C_2+x=0$.

С другой стороны, используя правое граничное условие, получим $C_2=2$ и $C_1=\pm\frac{1}{2}$, экстремаль $(y-2)^2+x^2=4$.➤

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Необходимо найти экстремали функционалов, удовлетворяющие граничным условиям:

а) $J(y)=\int\limits_0^{x_1}y'^2dx$, $y(0)=0$, $x_1+y(x_1)+1=0$;

б) $J(y)=\int\limits_0^{x_1} y'^3 dx$, $x_1+y(x_1)=1$, $y(0)=0$;

в) $J(y)=\int\limits_0^{x_1}\left(y'^2+y\right)dx$, $y(0)=0$, $y(x_1)=\xi$;

г) $J(y)=\int\limits_0^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $y(0)=0$, $x_1^2 y(x_1)=1$;

д) $J(y)=\int\limits_0^{2}(2xy+yy'+y'^2)dx$, $y(0)=0$;

е) $J(y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $y(x_0)=x_0^2$, $y(x_1)=x_1-5$;

ж) $J(y)=\int\limits_0^{T}(y'^2-y^2)\,dx$, $y(0)=1$, $Ty(T)=1$;

з) $J(y)=\int\limits_0^{T/4}(y'^2-y^2)\,dx$, $y(0)=1$;

и) $J(y)=\int\limits_0^{T}(y'^2+y+2)\,dx$, $y(0)=0$, $3T^2 y(T)=1$;

к) $J(y)=\int\limits_0^{\pi/4}\left[y'^2-y^2\right]dx$, $y(0)=1$;

л) $J(y)=\int\limits_0^{2}\left[x\cdot y'+y'^2\right]dx$, $y(0)=5$;

м) $J(y)=\int\limits_0^{1}\left[y'\left[y'-x\right]\right]dx$.

Функционалы $\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,y(x),y'(x)\right)dx$ *, зависящие от одной функции.*

Случай негладких экстремалей

<u>Постановка задачи</u>

Рассмотрим множество М допустимых функций (кривых) $y(x)$, удовлетворяющих следующим условиям (рис. 1.3):

а) функции $y(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[x_0, x_1]$, где x_0 и x_1 заданы;

б) функции удовлетворяют граничным условиям:

$y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$,

где x_0, x_1 заданы, т. е. проходят две закреплённые граничные точки A и B;

в) функции $y(x)$ являются кусочно-гладкими, причём непрерывность производной может нарушаться в некоторой заранее неизвестной точке x_r (**точке излома**). Функции $y(x)$ образуются двумя гладкими функциями $y_{AC}(x)$ и $y_{CB}(x)$, имеющими общую точку C, т.е. $y_{AC}(x) \in C^1([x_0, x_r))$ и $y_{CB}(x) \in C^1((x_r, x_1])$.

На множестве M задан функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\, dx\,, \tag{1.22}$$

где функция $F(x, y, y'(x))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

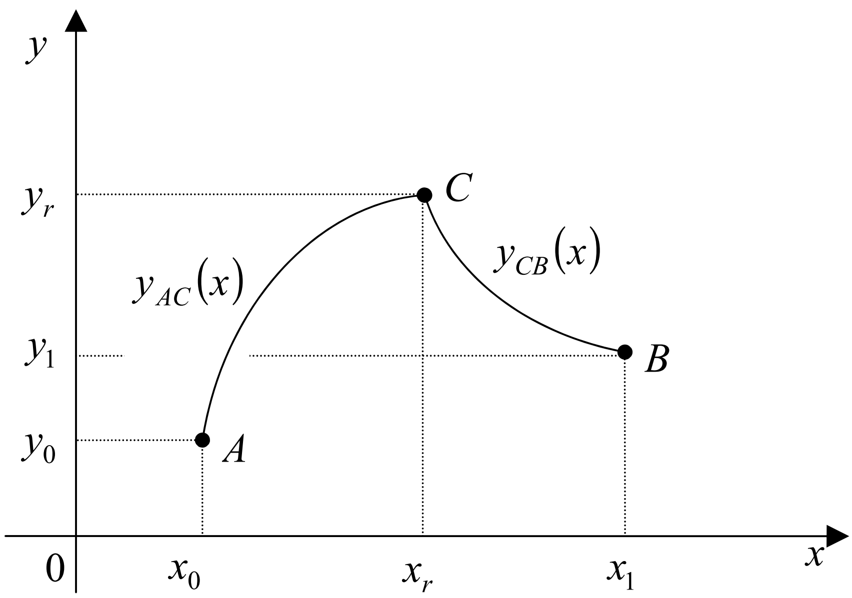

Рис. 1.3

Среди допустимых кривых $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти кривую $y^*(x)$, на которой функционал (1.22) достигает экстремума, т.е.

$$J\left[y^*(x)\right] = \underset{y(x)\in M}{\mathrm{extr}} \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x)\right) dx . \qquad (1.23)$$

В данном случае можно рассматривать задачи, в которых несколько точек излома. Во многих практических задачах требование непрерывности производной неестественно, так как решение достигается на экстремалях, имеющих точки излома, поэтому рассматриваемая задача актуальна.

Для поиска решения задачи (1.23) на семействе негладких допустимых кривых, имеющих одну точку излома при $x = x_r$, представляем функционал (1.22) в виде суммы:

$$J[y(x)] = J_1 + J_2 = \int_{x_0}^{x_r} F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx + \int_{x_r}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x)\right)dx . \quad (1.24)$$

Запись (1.24) позволяет видеть, что задача (1.23) распадается на две:

1) поиск кривых AC и CB (см. рис. 1.3), составляющих искомую кривую AB;

2) определение значения x_r.

Для решения обеих задач запишем первую вариацию функционала (1.24), учитывая:

1) что значение x_r не задано;

2) правый конец кривой AC и левый конец кривой CB подвижны;

3) левый конец кривой AC и правый конец кривой CB закреплены (вариации $\delta y_0 = \delta y_1 = 0$, $\delta x_0 = \delta x_1 = 0$).

Применяя необходимое условие экстремума, т.е. равенство нулю первой вариации функционала, получаем:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_r} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \delta y dx + F_{y'} \Big|_{x = x_r - 0} \cdot \delta x_r +$$

$$+ \left[F - y' F_{y'} \right] \Big|_{x = x_r - 0} \cdot \delta x_r + \int_{x_r}^{x_1} \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \delta y dx -$$

$$- F_{y'} \Big|_{x = x_r + 0} \cdot \delta y_r - \left[F - y' F_{y'} \right] \Big|_{x = x_r + 0} \cdot \delta x_r = 0.$$

Так как вариации δy, δy_r, δx_r произвольны, то по основной лемме вариационного исчисления получаем

$$\begin{aligned} &F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,\ x \in [x_0, x_r), \\ &F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,\ x \in (x_r, x_1]; \end{aligned} \qquad (1.25)$$

$$\begin{aligned} &F_{y'} \Big|_{x = x_r - 0} = F_{y'} \Big|_{x = x_r + 0}, \\ &\left[F - y' F_{y'} \right] \Big|_{x = x_r - 0} = \left[F - y' F_{y'} \right] \Big|_{x = x_r + 0}. \end{aligned} \qquad (1.26)$$

Таким образом, кривые AC и CB – это интегральные кривые уравнения Эйлера – Лагранжа (1.25), т.е. экстремали. Условия (1.26) называются **условиями Вейерштрасса – Эрдмана.** Решения уравнений Эйлера (1.25) зависят от четырёх произвольных постоянных:

$$y_{AC}(x) = y_{AC}(x, C_1, C_2),\ y_{CB}(x) = y_{CB}(x, C_3, C_4).$$

Алгоритм поиска решения задачи

1. Выписать условия Вейерштрасса – Эрдмана. Если из них следует условие непрерывности первой производной $y'(x_r - 0) = y'(x_r + 0)$, воспользоваться алгоритмом нахождения гладких экстремалей.

2. Записать уравнение Эйлера – Лагранжа и найти его общее решение на промежутках $[x_0, x_r)$ и $(x_r, x_1]$: $y_{AC}(x) = y_{AC}(x, C_1, C_2)$, $y_{CB}(x) = y_{CB}(x, C_3, C_4)$.

3. Определить C_1, C_2, C_3, C_4, x_r из граничных условий, условия непрерывности и условий Вейерштрасса – Эрдмана. В результате получить экстремаль $y^*(x)$.

Пример решения задачи

Необходимо найти экстремаль функционала $J(y)=\int\limits_0^4 y'^2[y'-2]^2\,dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0$, $y(4)=4$.

◀ Запишем условия Вейерштрасса – Эрдмана:

$$F_{y'}\Big|_{x=x_r-0} = 2y'(y'-2)(2y'-2)\Big|_{x=x_r-0} =$$
$$= 2y'(y'-2)(2y'-2)\Big|_{x=x_r+0} = F_{y'}\Big|_{x=x_r+0};$$
$$F - y'F_{y'}\Big|_{x=x_r-0} = y'^2(y'-2)(2-3y')\Big|_{x=x_r-0} =$$
$$= y'^2(y'-2)(2-3y')\Big|_{x=x_r+0} = F - y'F_{y'}\Big|_{x=x_r+0}.$$

Возникают варианты одновременного выполнения записанных условий:

а) $y'(x_r-0)=y'(x_r+0)$;

б) $y'(x_r-0)=0$, $y'(x_r+0)=2$;

в) $y'(x_r-0)=2$, $y'(x_r+0)=0$.

Вариант «а» соответствует случаю поиска гладких экстремалей. Общее решение уравнения Эйлера – Лагранжа имеет вид $y(x)=C_1x+C_2$, так как подынтегральная функция не зависит от y и x явно. Из граничных условий $y(0)=C_2=0$, $y(4)=4C_1+C_2=4$ находим $C_1=1$, $C_2=0$ и экстремаль $y^*(x)=x$.

Решение уравнения Эйлера – Лагранжа на промежутках $[0,x_r)$, $(x_r,4]$ имеет вид $y_{AC}(x)=C_1x+C_2$, $y_{CB}(x)=C_3x+C_4$.

Далее определим C_1, C_2, C_3, C_4, x_r из граничных условий $y_{AC}(0)=C_2=0$, $y_{CB}(4)=4C_3+C_4=4$, из условий непрерывности $y_{AC}(x_r)=C_1x_r+C_2=C_3x_r+C_4=y_{CB}(x_r)$ и из условий Вейерштрасса – Эрдмана.

Для варианта «б» соответствуют условия: $y'(x_r-0)=y'_{AC}(x_r-0)=C_1=0$, $y'(x_r+0)=y'_{CB}(x_r+0)=C_3=2$.

Тогда получаем $C_1=0,\ C_2=0,\ C_3=2,\ C_4=-4,\ x_r=2$. В результате получена экстремаль $y^*_{AC}(x)\equiv 0$ (при $x\in[0,2)$), $y^*_{CB}(x)=2x-4$ (при $x\in(2,4]$).

Варианту «в» соответствуют условия: $y'(x_r-0)=y'_{AC}(x_r-0)=C_1=2$, $y'(x_r+0)=y'_{CB}(x_r+0)=C_3=0$.

Тогда получаем $C_1=2,\ C_2=0,\ C_3=0,\ C_4=4,\ x_r=2$. В результате получена экстремаль $y^*_{AC}(x)\equiv 2x$ (при $x\in[0,2)$), $y^*_{CB}(x)=4$ (при $x\in(2,4]$).

Таким образом, в поставленной задаче имеются три экстремали: одна гладкая и две негладких. На негладких экстремалях $J\left(y^*(x)\right)=0$, а на гладкой $J\left(y^*(x)\right)=4$ (очевидно, на ней минимум не достигается). ➤

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Необходимо найти:

а) экстремаль функционала $J(y)=\int\limits_0^2 y'^2[y'-1]^2\,dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0$, $y(2)=1$;

б) экстремаль функционала $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2}\left[y'^2-y^2\right]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=1$, $y(\pi/2)=0$.

Функционалы $\int\limits_{x_0}^{x_1} F\left(x,y_1(x),\ \ldots,y_n(x),y_1'(x),\ \ldots,y_n'(x)\right)dx$, *зависящие от нескольких функций*

Постановка задачи

Рассмотрим множество M допустимых функций (кривых) $y(x)=\left(y_1(x),\ ...,y_n(x)\right)^T$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) функции $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ непрерывно дифференцируемы, т.е. $y_i(x)\in C^1([x_0,x_1])$.

б) значения x_0, $y_1(x_0)$, ..., $y_n(x_0)$ и x_1, $y_1(x_1)$, ..., $y_n(x_1)$ удовлетворяют граничным условиям:

$$\psi_j\left(x_0,y_1(x_0),\ ...,y_n(x_0)\right)=0,\ j=\overline{1,m},\ m\le n+1,$$

(1.27)

$$\varphi_j\left(x_1,y_1(x_1),\ ...,y_n(x_1)\right)=0,\ j=\overline{1,p},\ p\le n+1, \qquad ,$$

где $\psi_j\left(x_0,y_1(x_0),\ ...,y_n(x_0)\right)$, $\varphi_j\left(x_1,y_1(x_1),\ ...,y_n(x_1)\right)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

На множестве M задан функционал

$$J\left[y_1(x),...,y_n(x)\right]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F\left(x,y_1(x),\ ...,y_n(x),y_1'(x),\ ...,y_n'(x)\right)dx, \quad (1.28)$$

где функция $F\left(x,y_1(x),\ ...,y_n(x),y_1'(x),\ ...,y_n'(x)\right)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным.

Среди допустимых вектор-функций $y(x)$, принадлежащих множеству M, требуется найти вектор-функцию $y^*(x)$, на которой функционал (1.28) достигает экстремума.

Алгоритм поиска решения задачи

1. Записать систему уравнений Эйлера – Лагранжа:

$$F_{y_i}-\frac{d}{dt}F_{y_i'}=0,\ i=\overline{1,n}.$$

2. Найти общее решение системы

$$y_i(x)=y_i\left(x,C_1,C_2,\ ...,C_{2n}\right),\ i=\overline{1,n}.$$

3. Записать условия трансверсальности (в зависимости от вида граничных условий) и граничные условия.

Условия трансверсальности:

а) вариации δx_0, $\delta y_i(x_0)$ не связаны с вариациями δx_1, $\delta y_i(x_1)$:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\Big|_{x=x_1} \delta y_i(x_1) + \left[F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right]\Bigg|_{x=x_1} \delta x_1 = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} F_{y_i'}\Big|_{x=x_0} \delta y_i(x_0) + \left[F - \sum_{i=1}^{n} y_i' F_{y_i'}\right]\Bigg|_{x=x_0} \delta x_0 = 0. \qquad (1.29)$$

б) вариации δx_0, $\delta y_i(x_0)$ связаны с вариациями δx_1, $\delta y_i(x_1)$ в силу наличия граничных условий:

$$\delta\psi_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial x}\Bigg|_{x_0,\, y(x_0)} \delta x_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\Bigg|_{x_0,\, y(x_0)} \delta y_i(x_0) = 0, \quad j = \overline{1,m},$$
$$\delta\varphi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\Bigg|_{x_1,\, y(x_1)} \delta x_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}\Bigg|_{x_1,\, y(x_1)} \delta y_i(x_1) = 0, \quad j = \overline{1,p}. \qquad (1.30)$$

4. Определить $C_1, C_2, ..., C_{2n}$, x_0^*, x_1^* и записать экстремаль $y^*(x)$.

<u>Примеры решения задач</u>

1. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int_0^1 (y_1' y_2' + 6xy_1 + 12xy_2)dx$, удовлетворяющую граничным условиям: $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(1) + y_2(1) = 4$.

➤ Записываем систему уравнений Эйлера. Так как $F = y_1' y_2' + 6xy_1 + 12xy_2$, $F_{y_1} = 6x$, $\frac{d}{dx} F_{y_1'} = y_2''$, $F_{y_2} = 12x$, $\frac{d}{dx} F_{y_2'} = y_1''$, то

$$F_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{y_1'} = 6x - y_2'' = 0,$$

$$F_{y_2} - \frac{d}{dx} F_{y_2'} = 12x - y_1'' = 0.$$

Общее решение системы получим после интегрирования каждого из уравнений в системе:

$y_1 = 2x^3 + C_1 x + C_2$, $y_2 = x^3 + C_3 x + C_4$.

Условие трансверсальности (1.29) записывается только на правом конце, т.к. левый конец допустимых вектор-функций закреплён:

$$F_{y_1'} \cdot \delta y_1(x_1) + F_{y_2'} \cdot \delta y_2(x_1)\Big|_{x_1=1} = 0 ,$$

или

$$y_2'(x_1)\delta y_1(x_1) + y_1'(x_1)\delta y_2(x_1) = 0 .$$

Приведем граничное условие $y_1(x_1) + y_2(x_1) = 4$ к виду (1.27): $\varphi(x_1, y_1(x_1), y_2(x_1)) = y_1(x_1) + y_2(x_1) - 4 = 0$.

Условие (1.30) запишем в виде $1\,\delta y_1(x_1) + 1 \cdot \delta y_2(x_1) = 0$.

Отсюда

$$\delta y_1(x_1) = -\delta y_2(x_1) ,$$

$$-y_2'(x_1)\delta y_2(x_1) + y_1'(x_1)\delta y_2(x_1) = \left(y_1'(x_1) - y_2'(x_1)\right) = 0 .$$

Поскольку вариация $\delta y_2(x_1)$ произвольная, то

$$y_1'(x_1) = y_2'(x_1) .$$

Кроме соотношений, следующих из условий трансверсальности, используем граничные условия:

$6x_1^2 + C_1 = 3x_1^2 + C_3$, $6x_1^2 + C_1 - C_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; C_3 - C_1 = 3$,

$y_1(0) = C_2 = 0$, $y_2(0) = C_4 = 0$, $C_3 + C_1 = 1$.

Таким образом, $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 2$, $C_4 = 0$. В результате получаем экстремаль $y^*(x) = \left(2x - x,\ x^3 + 2x\right)^T$. ➤

2. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{x_1} (y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2)dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(x_1) + y_2(x_1) = 0$.

➤ Записываем систему уравнений Эйлера – Лагранжа. Так как $F = y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2$, $F_{y_1} = 6x$, $\dfrac{d}{dx} F_{y_1'} = y_2''$, $F_{y_2} = 12x^2$, $\dfrac{d}{dx} F_{y_2'} = y_1''$, то

$$F_{y_1} - \frac{d}{dx} F_{y_1'} = 6x - y_2'' = 0\,,$$

$$F_{y_2} - \frac{d}{dx} F_{y_2'} = 12x^2 - y_1'' = 0\,.$$

Общее решение системы получим после интегрирования каждого из уравнений в системе:

$$y_1 = x^4 + C_1 x + C_2\,,\; y_2 = x^3 + C_3 x + C_4\,.$$

Условие трансверсальности записывается только на правом конце, т.к. левый конец вектор-функций закреплён. Перепишем граничное условие $y_1(x_1) + y_2(x_1) = 0$ в форме $\psi_1(x_1, y_1(x_1), y_2(x_1)) = y_1(x_1) + y_2(x_1) = 0$. Из условий (1.1.29) имеем:

$$F_{y_1'}\ \delta y_1(x_1) + F_{y_2'} \delta y_2(x_1) + \left[F - y_1' F_{y_1'} - y_2' F_{y_2'} \right] dx_1 \Big|_{x = x_1} = y_2'\ \delta y_1(x_1) +$$

$$+ y_1'\ \delta y_2(x_1) + \left[y_1' y_2' + 6x y_1 + 12x^2 y_2 - y_1' y_2' - y_2' y_1' \right]\ \delta x_1 \Big|_{x = x_1} = 0\,.$$

Из условия (1.30) и $\psi_1(x_1, y_1(x_1), y_2(x_1)) = 0$ получаем $1\delta y_1(x_1) + 1\ \delta y_2(x_1) = 0$ или $\delta y_1(x_1) = -\delta y_2(x_1)$.

Перепишем условия трансверсальности:

$$[y_1'(x_1) - y_2'(x_1)]\delta y_2(x_1) + \left[- y_1'(x_1) y_2'(x_1) + 6x_1 y_1(x_1) + 12x_1^2 y_2(x_1)\right]\delta x_1 = 0.$$

Так как $\delta y_2(x_1)$ и δx_1 произвольны, то

$$y_1'(x_1) = y_2'(x_1)\,,$$

$$6x_1 y_1(x_1) + 12x_1^2 y_2(x_1) - y_1'(x_1) y_2'(x_1) = 0\,.$$

В соответствии с граничными условиями

$$y_1(0) = C_2 = 0\,,$$

$$y_2(0) = C_4 = 0\,,$$

$$y_1(x_1) + y_2(x_1) = x_1^4 + C_1 x_1 + x_1^3 + C_3 x_1 = 0\,.$$

Далее определим C_1, C_2, C_3, C_4, x_1. Имеем систему из трёх уравнений:

$$y_1'(x_1) = 4x_1^3 + C_1 = y_2'(x_1) = 3x_1^2 + C_3\,,$$

$$6x_1\left(x_1^4 + C_1 x_1\right) + 12x_1^2\left(x_1^3 + C_3 x_1\right) - \left(4x_1^3 + C_1\right)\left(3x_1^2 + C_3\right) = 0\,,$$

$$x_1^3 + x_1^2 + C_1 + C_3 = 0 .$$

После преобразований получим:

$$C_1 = x_1^2 - \frac{5}{2} x_1^3 ,$$

$$C_3 = -2x_1^2 - \frac{3}{2} x_1^3 .$$

Подставляя выражения для C_1, C_3 во второе уравнение системы, получим:

$$6x_1\left(x_1^4 + x_1^3 - \frac{5}{2} x_1^4 \right) + 12x_1^2\left(x_1^3 - 2x_1^3 + \frac{3}{2} x_1^4 \right) -$$

$$-\left(4x_1^3 + x_1^2 - \frac{5}{2} x_1^3 \right)\left(3x_1^2 - 2x_1^2 - \frac{3}{2} x_1^3 \right) = 0$$

или

$$\frac{63}{4} x_1^2 - 24x_1^2 + 5 = 0 .$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим его корни:

$x_1^{*(1)} \approx 1{,}275$	$x_1^{*(2)} \approx 0{,}25 .$

Для каждого корня вычисляем константы и записываем две полученные экстремали:

$C_1 \approx -3{,}56$, $C_3 \approx -0{,}14$,	$C_1 \approx -0{,}023$, $C_3 \approx -0{,}1$,
$y_1^*(x) = x^4 - 3{,}56x$,	$y_1^*(x) = x^4 - 0{,}023x$,
$y_2^*(x) = x^3 - 0{,}14x$.	$y_2^*(x) = x^3 - 0{,}1x$. ➤

<u>Задача для самостоятельного решения</u>

Найти экстремали функционала $J(y_1, y_2) = \int_0^{x_1} [y_1' y_2'] dx$, удовлетворяющие граничным условиям $y_1(0) = -3$, $y_2(0) = 2$, $y_1(x_1) = x_1^2 + 1$, $y_2(x_1) = -2$.

1.3. Вариационные задачи поиска условного экстремума

Задачи Лагранжа с голономными связями

Постановка задачи

Рассмотрим задачу поиска экстремума функционала

$$J(y_1,\, y_2,\, ...,y_n)=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y_1,\, ...,y_n,y_1',\, ...,y_n'\,)dx \to \text{extr}\,, \tag{1.31}$$

когда кроме граничных условий:

$$\begin{aligned} &y_1(x_0)=A_1,\, ...,y_n(x_0)=A_n,\\ &y_1(x_1)=B_1,\, ...,y_n(x_1)=B_n \end{aligned} \tag{1.32}$$

присутствуют ещё некоторые ограничения:

$$g_j(x,y_1,\, ...,y_n)=g_j(x,y)=0,\;\; j=\overline{1,k},\;\; k<n\,. \tag{1.33}$$

Соотношения (1.33) независимые, т.е.

$$rang\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_n} \end{pmatrix}=k\,,$$

их связи согласованы с граничными условиями (1.32).

Задача (1.31) – (1.33) называется задачей Лагранжа с голономными связями.

Алгоритм поиска решения задачи

1. Составить функцию Лагранжа:

$$F^*(x,y,y')=F\bigl(x,y,y'\bigr)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(x)g_j(x,y)\,,$$

где функции $\lambda_j(x)$, $j=\overline{1,k}$ – множители Лагранжа.

2. Записать систему уравнений Эйлера – Лагранжа и условия связи:

$$\begin{cases} F^*_{y_i}-\dfrac{d}{dx}F^*_{y_i'}=0, & i=\overline{1,n},\\ g_j(x,y)=0, & j=\overline{1,k}. \end{cases}$$

3. Найти общее решение системы

$$y_i(x) = y_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \quad i = \overline{1,n}$$

и выражения для множителей Лагранжа $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_k(x)$.

4. Определить постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ из граничных условий (1.32) и выписать выражение для экстремали $y^*(x) = \left(y_1^*(x), \ldots, y_n^*(x)\right)^T$.

Примеры решения задач

1. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = 1, y_2(0) = -1$, $y_1(\frac{\pi}{2}) = y_2(\frac{\pi}{2}) = 1$ и уравнению связи $y_1 - y_2 - 2\cos x = 0$.

◄ Составим функцию Лагранжа. Так как $F = y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2$, $g_1(x, y) = y_1 - y_2 - 2\cos x$, $k = 1$, то

$F^* = y_1^2 + y_2^2 - y_1'^2 - y_2'^2 + \lambda_1(x) \cdot [y_1 - y_2 - 2\cos x]$.

Система уравнений Эйлера и уравнения связи имеет вид

$$\begin{cases} 2y_1 + \lambda_1(x) + 2y_1'' = 0, \\ 2y_2 - \lambda_1(x) + 2y_2'' = 0, \\ y_1 - y_2 - 2\cos x = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы, сведя ее к уравнению:

$$2(y_1'' + y_2'') + 2(y_1 + y_2) = 0.$$

После выполнения замены $y_1 + y_2 = y$ переходим к решению уравнения $y'' + y = 0$, общее решение которого имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x = y_1 + y_2.$$

Складывая полученное уравнение и уравнение связи, получим $y_1 = \frac{C_1}{2}\cos x + \frac{C_2}{2}\sin x + \cos x$, $y_2 = \frac{C_1}{2}\cos x + \frac{C_2}{2}\sin x - \cos x$, $\lambda_1(x) = 2y_2 + 2y_2''$.

Определим произвольные постоянные из граничных условий:

$$y_1(0)=\frac{C_1}{2}+1=1\Rightarrow C_1=0,$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{C_2}{2}=1\Rightarrow C_2=2.$$

Таким образом, в задаче найдена экстремаль

$$y^*(x)=\begin{pmatrix} y_1^*(x) \\ y_2^*(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin x+\cos x \\ \sin x-\cos x \end{pmatrix},\text{ при } \lambda_1(x)=0.$$ ➤

2. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y_1,y_2)=\int\limits_0^1\left[y_1'^2+2y_1y_2+y_2'^2\right]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0)=y_2(0)=1$, $y_1(1)=e$, $y_2(1)=\dfrac{1}{e}$ и уравнению связи $y_1-y_2-e^x+e^{-x}=0$.

➤ Запишем функцию Лагранжа:

$$F^*=y_1'^2+2y_1y_2+y_2'^2+\lambda_1(x)\cdot[y_1-y_2-e^x+e^{-x}].$$

Система уравнений Эйлера и уравнения связи имеет вид

$$\begin{cases} F^*_{y_1}-\dfrac{d}{dx}F^*_{y_1'}=2y_2+\lambda_1(x)-2y_1''=0, \\ F^*_{y_2}-\dfrac{d}{dx}F^*_{y_2'}=2y_1-\lambda_1(x)-2y_2''=0, \\ y_1-y_2-e^x+e^{-x}=0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы, сведя ее к уравнению:

$$2(y_1''+y_2'')-2(y_1+y_2)=0.$$

После выполнения замены $y_1+y_2=y$ переходим к решению уравнения $y''-y=0$, общее решение которого имеет вид

$$y=C_1e^x+C_2e^x=y_1+y_2.$$

Далее, используя полученное уравнение и уравнение связи, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1+y_2=C_1e^x+C_2e^x, \\ y_1-y_2=e^x-e^{-x}, \end{cases}$$

решая которую получим:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{C_1+1}{2}e^x + \dfrac{C_2-1}{2}e^{-x}, \\ y_2 = \dfrac{C_1-1}{2}e^x + \dfrac{C_2+1}{2}e^{-x}. \end{cases}$$

$\lambda_1(x) = 2y_1 - 2y_2''$.

Определим произвольные постоянные из граничных условий:

$y_1(0) = \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{2} = 1,$

$y_1(1) = \dfrac{C_1-1}{2}e + \dfrac{C_2-1}{2}\cdot\dfrac{1}{e} = e,$

откуда $C_1 = 1,\ C_2 = 1$.

Таким образом, в задаче найдена экстремаль

$$y^*(x) = \begin{pmatrix} y_1^*(x) \\ y_2^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}, \text{ при } \lambda_1(x) = 2e^x - 2e^{-x}. ➤$$

3. Необходимо найти кратчайшее расстояние между точками $A(0,\ -1,\ 1)$ и $B(1,\ 0,\ -1)$, лежащими на плоскости с уравнением $x + y_1 + y_2 = 0$.

➤ Приведем математическую формализацию задачи: требуется найти экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}\,dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$, $y_1(1) = 0$, $y_2(1) = -1$ и уравнению связи $x + y_1 + y_2 = 0$.

Запишем функцию Лагранжа:

$F^* = \sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2} + \lambda_1(x)\cdot[x + y_1 + y_2]$.

Система уравнений Эйлера и уравнения связи имеет вид

$$\begin{cases} F^*_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y_1'} = \lambda_1(x) - \dfrac{d}{dx} \dfrac{y_1'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} = 0, \\ F^*_{y_2} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y_2'} = \lambda_1(x) - \dfrac{d}{dx} \dfrac{y_2'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} = 0, \\ x + y_1 + y_2 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы, сведя ее к уравнению:

$$\frac{d}{dx} \frac{y_1' - y_2'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} = 0\,.$$

Далее, используя полученное уравнение и уравнение связи, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{y_1' - y_2'}{\sqrt{1 + y_1'^2 + y_2'^2}} = C, \\ y_1' = -y_2' - 1. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим:

$$(-2y_2' - 1)^2 = C^2[1 + (-1 - y_2')^2 + y_2'^2]$$

или

$$(4 - 2C^2)y_2'^2 + (4 - 2C^2)y_2' + (1 - 2C^2) = 0\,.$$

Очевидно, что

$$y_2' = C_1\,,$$

$$y_2 = C_1 x + C_2\,,$$

$$y_1 = -y_2 - x = -C_1 x - C_2 - x.$$

Определим произвольные постоянные из граничных условий:

$$y_2(0) = C_2 = 1\,,$$

$$y_2(1) = C_1 + C_2 = -1 \Rightarrow C_1 = -2\,.$$

Таким образом, в задаче найдена экстремаль

$$y^*(x) = (y_1^*(x), y_2^*(x))^T = \begin{pmatrix} y_1^*(x) = x - 1, \\ y_2^*(x) = -2x + 1 \end{pmatrix}, \text{ при } \lambda_1(x) = 0.$$

При этом кратчайшее расстояние от точки A до B

$$J(y^*) = \int_0^1 \sqrt{1+(x-1)^2+(-2x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{5x^2-6x-3}\,dx = \sqrt{6}\,. \blacktriangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Необходимо найти

а) экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int_0^1 \sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}\,dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0)=1$, $y_2(0)=2$, $y_1(1)=2$, $y_2(1)=1$ и уравнению связи $2y_1 - y_2 - 3x = 0$;

б) экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int_0^1 [y_1'^2 + y_2'^2]\,dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0)=-1$, $y_2(0)=0$, $y_1(1)=-1$, $y_2(1)=1$ и уравнению связи $y_1 + y_2 - 2x^2 + x + 1 = 0$;

в) экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int_0^1 [y_1'^2 + y_2'^2 + 1]\,dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0$, $y_1(1) = 2$ и уравнению связи $y_1 + y_2 - 2x^2 = 0$;

г) экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int_0^1 [y_1'^2 + y_2'^2 + x^3]\,dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0)=y_2(1)=2$, $y_1(1) = y_2(0) = 1$ и уравнению связи $y_1 - 2y_2 + 3x = 0$.

Задачи Лагранжа с неголономными связями

Постановка задачи

Рассмотрим задачу поиска экстремума функционала

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dx, \tag{1.34}$$

когда кроме граничных условий

$$y_i(x_0) = A_i, \;\; y_i(x_1) = B_i, \;\; i = \overline{1,n} \tag{1.35}$$

присутствуют ещё некоторые ограничения:

$$g_j(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0\,,\ \ j = \overline{1,k}\,,\ \ k < n\,, \qquad (1.36)$$

где функции $g_j(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным.

Предполагается, что соотношения (1.36) независимы, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1'} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial y_1'} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_n'} \end{pmatrix} = k\,,$$

а функция $F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Задача (1.34) – (1.36) называется задачей Лагранжа с неголономными связями.

<u>Алгоритм поиска решения задачи</u>

1. Составить функцию Лагранжа:

$$F^*(x, y, y') = F\left(x, y, y'\right) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x) g_j(x, y, y')\,,$$

где функции $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1,k}$ – множители Лагранжа.

2. Записать систему уравнений Эйлера – Лагранжа и условия связи:

$$\begin{cases} F^*_{y_i} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y_i'} = 0, & i = \overline{1,n}, \\ g_j(x, y, y') = 0, & j = \overline{1,k}. \end{cases}$$

3. Найти общее решение системы

$$y_i\left(x\right) = y_i\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}\right), \quad i = \overline{1,n}$$

и выражения для множителей Лагранжа $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_k(x)$.

4. Определить постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ из граничных условий и выписать выражение для экстремали $y^*(x) = \left(y_1^*(x), \ldots, y_n^*(x)\right)^T$.

Примеры решения задач

1. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left[y_1'^2 + y_2'^2\right] dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$, $y_1(1) = 2\,\mathrm{ch}1$, $y_2(1) = 2\,\mathrm{sh}1$ и уравнению связи $y_1' - y_2 = 0$.

◄ Составим функцию Лагранжа. Так как $F(x, y, y') = y_1'^2 + y_2'^2$, $g_1(x, y, y') = y_1' - y_2$, $k = 1$, то $F^*(x, y, y') = y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda_1(x)[y_1' - y_2]$.

Составим систему уравнений Эйлера и уравнения связи:

$$\begin{cases} F^*_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y_1'} = -2y_1'' - \lambda_1'(x) = 0, \\ F^*_{y_2} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y_2'} = -\lambda_1(x) - 2y_2' = 0, \\ y_1' - y_2 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы, выполнив следующие действия: $\lambda_1(x) = -2y_2''$, $\lambda_1'(x) = -2y_2'''$, $2y_1'' = 2y_2'''$; из уравнения связи $y_1' = y_2$ следует, что $y_1'' = y_2'$.

Получим уравнение $y_2''' - y_2' = 0$.

Для решения дифференциального уравнения составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид: $y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3$ и $y_1 = \int (C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3)\, dx = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 + C_4$, тогда $\lambda_1(x) = -2y_2'' = -2(C_1 e^x + C_2 e^{-x})$.

Определим константы $C_1, \ldots, C_4$ из граничных условий:

$$y_1(0) = C_1 - C_2 + C_4 = 2,$$

$$y_2(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

$$y_1(1) = C_1 e - C_2 e^{-1} + C_3 + C_4 = 2\frac{e + e^{-1}}{2},$$

$$y_2(1) = C_1 e + C_2 e^{-1} + C_3 = e - e^{-1}.$$

Решая полученную систему, находим константы:

$$C_1 = 1,\ C_2 = -1,\ C_3 = C_4 = 0.$$

В результате получаем экстремаль

$y^*(x) = (e^x + e^{-x},\ e^x - e^{-x})^T$, при $\lambda_1(x) = -2e^x + 2e^{-x}$. ➤

2. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int_0^1 \left[y_1^2(x) + 2y_1'^2 + y_2'^2 \right] dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_1(1) = e + e^{-1}$, $y_2(1) = 2e - e^{-1}$ и уравнению связи $y_1' - y_2 = 0$.

➤ Составим функцию Лагранжа. Так как $F(x, y, y') = y_1^2 + 2y_1'^2 + y_2'^2$, $g_1(x, y, y') = y_1' - y_2$, то $F^*(x, y, y') = y_1^2 + 2y_1'^2 + y_2'^2 + \lambda_1(x)[y_1' - y_2]$.

Система уравнений Эйлера и уравнения связи имеет вид

$$\begin{cases} F^*_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y_1'} = 2y_1 - 4y_1'' - \lambda_1'(x) = 0, \\ F^*_{y_2} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y_2'} = -\lambda_1(x) - 2y_2'' = 0, \\ y_1' - y_2 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы, сведя ее к уравнению

$$y_1^{(IV)} - 2y_1'' + y_1' = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0,$$

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_{3,4} = -1.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y_1 = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 + C_4 x)e^{-x},$$

$$y_2 = y_1' = (C_1 + C_2 x + C_2)e^x + (C_4 - C_3 - C_4 x)e^{-x}.$$

Определим произвольные постоянные из граничных условий:

$$y_1(0) = C_1 + C_3 = 1,$$

$$y_2(0) = C_1 + C_2 + C_4 - C_3 = 0,$$

$$y_1(1) = (C_1 + C_2)e + (C_3 + C_4)e^{-1} = e + e^{-1},$$

$$y_2(1) = (C_1 + 2C_2)e - C_3 e^{-1} = 2e - e^{-1};$$

следовательно $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$.

Таким образом, в задаче найдена экстремаль

$$y^*(x) = (xe^x + e^{-x},\ (x+1)e^x - e^{-x})^T,$$

при $\lambda_1(x) = -2y_2'' = -2(x+3)e^x + 2e^{-x}$. ➤

Задачи для самостоятельного решения

Необходимо найти:

а) экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [y_1'^2 + y_2'^2 + 2y_1 y_2]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$, $y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1$, $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1$ и уравнению связи $y_1' + y_2' - 4x = 0$.

б) экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 [y_1'^2 + y_2^2]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = y_2(1) = 0$, $y_2(0) = y_1(1) = 1$ и уравнению связи $y_1' - y_2 = 0$;

в) экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{\pi} \left[y_1'^2 + y_2'^2\right]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0$, $y_2(\pi) = \frac{\pi}{2}$ и уравнению связи $y_1' - y_2 - x\cos x = 0$;

г) экстремаль функционала $J(y_1, y_2) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[y_1'^2 - y_2'^2\right]dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$, $y_2(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$ и уравнению связи $y_1' - y_2 - \sin x = 0$.

Изопериметрические задачи

Постановка задачи

Рассмотрим задачу поиска экстремума функционала

$$J(y_1, y_2, ..., y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')dx, \qquad (1.37)$$

когда кроме граничных условий

$$y_i(x_0) = A, \; y_i(x_1) = B, \; i = \overline{1,n} \qquad (1.38)$$

присутствуют ещё интегральные ограничения:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_j(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')dx = l_j, \; j = \overline{1,k}. \qquad (1.39)$$

При этом функции $f_j(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')$ непрерывно дифференцируемы по всем переменным, l_j – заданные числа. Количество интегральных ограничений может быть меньше, равно или больше n.

Функция $F(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем параметрам.

Соотношения (1.37) – (1.39) – постановка изопериметрической задачи.

Примером является вторая задача Дидоны.

Алгоритм поиска решения задачи

1. Составить функцию Лагранжа:

$$F^*(x, y, y') = F(x, y, y') + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j(x, y, y'),$$

где функции λ_j, $j = \overline{1,k}$ – множители Лагранжа (постоянные).

2. Записать систему уравнений Эйлера-Лагранжа и уравнения связи:

$$\begin{cases} F^*_{y_i} - \dfrac{d}{dx} F^*_{y_i'} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} f_j(x, y_1, \ ..., y_n, y_1', ..., y_n') dx = l_j, \quad j = \overline{1,k}. \end{cases}$$

3. Найти общее решение системы

$$y_i(x) = y_i(x, C_1, C_2, \ ..., C_{2n}), \quad i = \overline{1,n}$$

и значения множителей Лагранжа $\lambda_1, \ ..., \lambda_k$.

4. Определить постоянные $C_1, C_2, \ ..., C_{2n}$ из граничных условий (1.38) и выписать выражение для экстремали $y^*(x) = \left(y_1^*(x), \ ..., y_n^*(x)\right)^T$.

<u>Примеры решения задач</u>

1. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y) = \int\limits_0^1 y'^2(x) dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 1$ $y(1) = 6$ и интегральной связи $\int\limits_0^1 y dx = 3$.

➤ Составим функцию Лагранжа:

$$F^*(x, y, y') = y'^2 + \lambda y \ .$$

Запишем уравнение Эйлера:

$$F^*_y - \frac{d}{dx} F^*_{y'} = \lambda - 2y'' = 0 \text{ или } y'' = \frac{\lambda}{2}.$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения: дважды интегрируя левую и правую части уравнения, получим

$$y' = \frac{\lambda}{2} x + C_1, \ y = \frac{\lambda x^2}{4} + C_1 x + C_2 \ .$$

Из уравнения связи имеем

$$\int_0^1 \left[\frac{\lambda x^2}{4} + C_1 x + C_2\right] dx = \left[\frac{\lambda x^3}{12} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3.$$

Далее определим C_1, C_2, λ из граничных условий и уравнения связи: $y(0) = C_2 = 1$, $y(1) = \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6$, $\frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3$. Отсюда $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, $\lambda = 12$.

В результате расчетов получаем экстремаль $y^*(x) = 3x^2 + 2x + 1$. ➤

2. Необходимо найти экстремаль функционала $J(y) = \int_0^{\pi} y \sin x dx$, удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = \pi$ и интегральной связи $\int_0^{\pi} y'^2 dx = \frac{3\pi}{2}$.

➤ Составим функцию Лагранжа:

$$F^* = y \sin x = \lambda y'^2.$$

Запишем уравнение Эйлера:

$$F_y^* - \frac{d}{dt} F_{y'}^* = \sin x - 2\lambda y'' = 0, \text{ или } y'' = \frac{\sin x}{2\lambda}.$$

Найдем общее решение дифференциального уравнения: дважды интегрируя левую и правую части уравнения, получим

$$y' = -\frac{\cos x}{2\lambda} + C_1, \ y = -\frac{\sin x}{2\lambda} + C_1 x + C_2.$$

Из уравнения связи имеем:

$$\int_0^{\pi} \left(C_1^2 - \frac{C_1 \cos x}{\lambda} + \frac{\cos^2 x}{4\lambda^2} \right) dx = \int_0^{\pi} \left(C_1^2 - \frac{C_1 \cos x}{\lambda} + \frac{1}{8\lambda^2} + \frac{\cos 2x}{8\lambda^2} \right) dx =$$

$$= \left(C_1^2 x - \frac{C_1 \sin x}{\lambda} + \frac{1}{8\lambda^2} x + \frac{\sin 2x}{8\lambda^2} \right)\Bigg|_0^{\pi} = C_1^2 \pi + \frac{\pi}{8\lambda^2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Далее определим C_1, C_2, λ из граничных условий и уравнения связи: $y(0) = C_2 = 0$, $y(\pi) = C_1\pi = \pi$, $C_1^2 + \frac{1}{8\lambda^2} = \frac{3}{2}$.

Отсюда $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

В результате получаем две экстремали: $y_1^* = -\sin x + x$, $y_2^* = \sin x + x$. ➤

Задачи для самостоятельного решения

Необходимо найти экстремали функционалов:

а) $J(y) = \int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 5$, $\int_0^1 xydx = 1$;

б) $J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} [y'^2 - 9y^2]dx$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{6}) = 0$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2ydx = 1$;

в) $J(y) = \int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $\int_0^1 ydx = 1$, $\int_0^1 xydx = 0$;

г) $J(y) = \int_0^{\pi} y'^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$, $\int_0^{\pi} y\cos xdx = \frac{\pi}{2}$;

д) $J(y) = \int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $\int_0^1 xydx = 0$;

е) $J(y) = \int_0^{\pi} y'^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $\int_0^{\pi} y\sin xdx = 0$;

ж) $J(y) = \int_0^1 \left[y'^2 + y^2\right]dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = e^{-1}$, $\int_0^1 e^{-x}ydx = \frac{1}{4}\left(1 - 3e^{-2}\right)$;

з) $J(y) = \int_0^{\pi} y\sin xdx$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$, $\int_0^{\pi} y'^2 dx = \frac{\pi}{2}$;

и) $J(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $\int_0^1 xy'dx = 2$;

к) $J(y)=\int_0^1 y'^2 dx$, $y(0)=y(1)=0$, $\int_0^1 y dx=-1$;

л) $J(y_1,y_2)=\int_0^1 y_1' y_2' dx$, $y_1(0)=y_2(0)=y_1(1)=0$, $y_2(1)=1$; $\int_0^1 x y_1 dx=0,$

$\int_0^1 x y_2 dx=0$;

м) $J(y_1,y_2)=\int_0^1 x[y_1-y_2]dx$, $y_1(0)=y_2(0)=y_1(1)=0$, $y_2(1)=2$,

$\int_0^1 y_1' y_2' dx=-\dfrac{4}{5}$;

н) $J(y)=\int_e^{e^2} y'[1+xy']dx$, $y(e)=2$, $y(e^2)=0$, $\int_e^{e^2}\left[y'-\dfrac{1}{x}\right]dx=1$.

Раздел 2. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В середине прошлого века развитие прикладных дисциплин (технических, экономических и ряда других) способствовало постановке и рассмотрению нового класса экстремальных задач, получивших название *задачи оптимального управления*. В первую очередь это было вызвано необходимостью исследования задач технического содержания. Разделение фазовых переменных и управления и их связь при помощи дифференциального уравнения – обычная модель для процесса, развивающегося по законам природы, но испытывающего влияние человека, управляющего этим процессом в соответствии со своими целями и стремящегося в этом плане сделать его в каком-то смысле оптимальным. Выделившаяся таким образом новая ветвь в теории экстремальных задач быстро завоевала популярность среди специалистов по прикладным задачам, поскольку позволяла расширить область применения имеющихся знаний, а также по-новому взглянуть на классическую теорию.

Необходимое условие для задач этого класса – «принцип максимума», – сформулированное Л.С. Понтрягиным в 1956 году, впоследствии было доказано им, его учениками и сотрудниками. Важно то, что это условие имеет существенно иную форму в сравнении с классическими уравнениями Эйлера и Лагранжа: в качестве обязательного условия решения задачи оптимального управления рассматривается решение вспомогательной задачи на максимум (отсюда возникло и название).

В отличие от задачи Лагранжа в задаче оптимального управления вводится *управление* и появляется дополнительное ограничение включения на управление $u \in U$. Множество U определяет возможности человека влиять на происходящий процесс. Это условие отражает также возможные ограничения по управлению системами со стороны человека – ограниченность диапазона поворота рычагов (руля) управляемого аппарата.

Еще одна особенность – отсутствие ограничений на непрерывность управления. В основном это связано с тем, что в классе непрерывных управлений данная задача часто не имеет решений (в большинстве задач, где U дискретно).

2.1. Основные теоремы и определения

Принцип максимума Понтрягина (в общем случае)

Задачей оптимального управления будем называть задачу:

$$\begin{aligned} &\mathrm{B}_0(\xi) \to min; \quad B_i(\xi) \le 0, \quad i = 1, \dots, m', \\ &B_i(\xi) = 0, \quad i = m'+1, \dots, m, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$y(x) - \varphi\big(x, y(x), u(x)\big) = 0 \quad \forall x \in T, \tag{2.2}$$

$$u(x) \in U \quad \forall x \in \Delta, \tag{2.3}$$

где $\xi = (y(\cdot), u(\cdot), x_0, x_1)$, $x \in PC^1\left(\Delta, R^n\right)$, $u \in PC\left(\Delta, R^r\right)$, $x_0, x_1 \in \Delta$, $x_0 < x_1$, Δ – заданный конечный отрезок, $U \subset R^r$ – произвольное множество, $T \subset \Delta$ – множество точек непрерывности управления u:

$$B_i(\xi) = \int_{t_0}^{t_1} f_i\big(x, y(x), u(x)\big)dx + \psi_i\big(x_0, y(x_0), x_1, y(x_1)\big), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

$PC\left(\Delta, R^n\right)$ – пространство кусочно-непрерывных на отрезке Δ вектор-функции, соответственно $PC^1\left(\Delta, R^n\right)$ – пространство непрерывных вектор-функций, имеющих кусочно-непрерывную производную.

Вектор-функция $y = (y_1, \dots, y_n)$ называется фазовой переменной, вектор-функция $u = (u_1, \dots, u_r)$ – управлением. Ограничение (2.2), являющееся дифференциальным уравнением, называется *дифференциальным ограничением*. Оно должно выполняться во всех точках непрерывности управления u. В отличие от задачи Лагранжа имеется ограничение (2.2) типа включения, которое должно выполняться во всех точках $x \in \Delta$, а фазовая переменная $y = (y_1, \dots, y_n)$ может иметь меньшую гладкость. Частным случаем задачи (2.1) является задача, в которой один или даже оба конца – закрепленные.

Элемент ξ, для которого выполнены все указанные условия и ограничения задачи, называется *допустимым* (или *допустимым управляемым процессом.*

Допустимый управляемый процесс $\hat{\xi} = \left(\hat{y}(\cdot), \hat{u}(\cdot), \hat{x}_0, \hat{x}_1 \right)$ называется (локально) о*птимальным* (оптимальным в сильном смысле процессом), если существует $\delta > 0$ такое, что $B_0(\xi) \geq B_0(\hat{\xi})$ для любого допустимого управляемого процесса $\xi = \left(y(\cdot),\ u(\cdot), x_0, x_1 \right)$, для которого

$$\|y(\cdot) - \hat{y}(\cdot)\|_{C(\Delta)} < \delta, \quad |x_0 - \hat{x}_0| < \delta, \quad |x_1 - \hat{x}_1| < \delta.$$

Теорема. Пусть $\hat{\xi} = \left(\hat{y}(\cdot),\ \hat{u}(\cdot), \hat{x}_0, \hat{x}_1 \right)$ – оптимальный (в сильном смысле) процесс в задаче управления (2.1); функции $f_i, i = 0,\ 1,\ ...,\ m$, φ и их частные производные по x непрерывны в некоторой окрестности множества $\left\{ \left(x, \hat{y}(x) \right) \middle| x \in \Delta \right\}$, декартово умноженного на U, а функции $\psi_i, i = 0,\ 1,\ ...,\ m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(\hat{x}_0, \hat{y}(\hat{x}_0), \hat{x}_1, \hat{y}(\hat{x}_1))$ (условие гладкости).

Тогда найдутся множители Лагранжа

$$\Lambda = \int_{x_0}^{x_1} \left(f(x, y, u) + p(x)(y' - \varphi(x, y, u)) \right) dx + l(x_0, y(x_0), x_1, y(x_1)),$$

где $f(x, y, u) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x, y, u), \quad l = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(x_0, y(x_0), x_1, y(x_1))$ – терминант и выполнены условия слудующие:

а) стационарность по y – уравнение Эйлера для лагранжиана $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \dot{\mathrm{y}}, \mathrm{u}) = f(x, y, u) + p(\dot{y} - \varphi(x, y, u))$.

$$-\frac{d}{dx} \hat{L}_{\dot{y}}(x) + \hat{L}_y(x) = 0 \quad \forall x \in T \Leftrightarrow -\dot{p}(x) + \hat{f}_y(x) - p(x) \hat{\varphi}_y(x) = 0;$$

б) трансверсальность по *y:*

$$\hat{L}_{\dot{y}}(\hat{x}_0) = \hat{l}_{y(x_0)} \Leftrightarrow p(\hat{x}_0) = \hat{l}_{y(x_0)},$$

$$\hat{L}_{\dot{y}}(\hat{x}_1) = -\hat{l}_{y(x_1)} \Leftrightarrow p(\hat{x}_1) = -\hat{l}_{y(x_1)};$$

в) оптимальность по u:

$$\min_{u\in U} L\left(x,\hat{y}(x),\dot{\hat{y}}(x),u\right)=L\left(x,\hat{y}(x),\dot{\hat{y}}(x),\hat{u}(x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\min_{u\in U}\left\{f(x,\hat{y}(x),u)-p(x)\varphi(x,\hat{y}(x),u)\right\}=\hat{f}(x)-p(x)\hat{\varphi}(x) \quad \forall x\in T;$$

г) стационарность по подвижным концам (выписывается только для подвижных концов отрезка интегрирования):

$$\hat{\Lambda}_{t_0}(\hat{x}_0)=0\Leftrightarrow -\hat{f}(\hat{x}_0)+\hat{l}_{x_0}+\hat{l}_{y(x_0)}\dot{\hat{y}}(\hat{x}_0)=0,$$

$$\hat{\Lambda}_{x_1}(\hat{x}_1)=0\Leftrightarrow \hat{f}(\hat{x}_1)+\hat{l}_{x_1}+\hat{l}_{y(x_1)}\dot{\hat{y}}(\hat{x}_1)=0;$$

д) дополняющая нежесткость:

$$\lambda_i B_i\left(\hat{\xi}\right)=0, \quad i=1,\ ...,m';$$

е) неотрицательность

$$\lambda_i\ge 0, \quad i=0,\ 1,\ ...,\ m'.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы введем понятие игольчатых вариаций и пакета иголок, а также докажем ряд вспомогательных лемм и теорем.

1. Проварьируем процесс $\hat{\xi}$, включив его в конечно-параметрическое семейство, определяемое пакетом иголок (набором игольчатых вариаций управления $\hat{u}$). Для этого фиксируем натуральное число N, наборы точек $\tau=(\tau_1,\ ...,\tau_N)$, $\tau_1\le\tau_2\le...\le\tau_N$, уравнений $v=(v_1,\ ...,v_N)$, длин $\alpha=(\alpha_1,\ ...,\alpha_N)$, ($\tau_i\in T$, $v_i\in U$, $\alpha_i\ge 0$, $i=1,\ ...,N$).

Управление

$$u_\alpha=\begin{cases}\hat{u}(x), & x\in\Delta\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{N}\Delta_i,\\ v_i, & x\in\Delta_i,\end{cases}$$

где $\Delta_i=\left(\tau_i-(N-i)|\alpha|-\alpha_i,\ \tau_i-(N-i)|\alpha|\right)$, $|\alpha|=\sqrt{\alpha_1^2+...+\alpha_N^2}$ назовем игольчатой вариацией управления $\hat{u}$, определяемой пакетом иголок (τ,v,α). Некоторые точки τ_i могут совпадать. Однако полуинтервалы Δ_i, имеющие длины α_i, устроены так, что они не пересекаются и при малом $|\alpha|$ лежат во множестве T.

Функция $y(x, x_0 y_0, \alpha)$, являющаяся решением уравнения

$$\dot{y} = \varphi(x, y, u_\alpha), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.4}$$

называется игольчатой вариацией функции $\hat{y}$, определяемой точкой (x_0, y_0) и фиксированным пакетом иголок (τ, v). Ниже будет показано, что если точка (x_0, y_0) находится в окрестности точки $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ (обозначение $\hat{y}_0 = \hat{y}(\hat{x}_0)$), то при малом $|\alpha|$ решение дифференциального уравнения действительно существует и определено на всем отрезке Δ.

2. *Теорема существования.* Предположим, что задача Коши

$$\dot{y} = F(x, y), \ y(x_0) = y_0 \ (x_0 \in \operatorname{int} \Delta)$$

имеет решение $\hat{y} \in PC^1(\Delta, \mathrm{R}^n)$ на конечном отрезке Δ, при этом F – функция непрерывная и непрерывно дифференцируемая по y в некоторой окрестности G-траектории $\Gamma_{\hat{y}} = \{(x, \hat{y}(x)) | x \in \Delta\}$.

Тогда найдется $G' \subset G$ – окрестность траектории $\Gamma_{\hat{y}}$ – такая, что для любой точки $(x_0, y_0) \in G'$ будет существовать единственное решение $y(\cdot, x_0, y_0)$ задачи Коши, определенное на Δ, при этом функция $y(x, x_0, y_0)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\Delta \times G'$ и

$$y_{y_0}(x, x_0, y_0)\big|_{y_0 = \hat{y}(x_0)} = \Omega(x, x_0),$$

$$y_{x_0}(x, x_0, y_0)\big|_{y_0 = \hat{y}(x_0)} = -\Omega(x, x_0) F(x_0, \hat{y}(x_0)),$$

где $\Omega(x, x_0)$ – фундаментальная система решений уравнения $\dot{\Omega}(x, x_0) = F_y(x, \hat{y}(x)) \Omega(x, x_0), \quad \Omega(x, x_0) = I$ (единичная матрица).

Это классическая теорема о существовании и непрерывно дифференцируемой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных.

Лемма об игольчатой вариации. Пусть наборы τ и v в пакете иголок (τ, v, α) фиксированы. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $0 < |\alpha| < \varepsilon$, $|y_0 - \hat{y}_0| < \varepsilon$, $|x_0 - \hat{x}_0| < \varepsilon$, то $\Delta_i \subset T$ и, кроме того, функция $y(x, x_0, y_0, \alpha)$ – решение уравнения (2.4) – определена на отрезке Δ, непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(\hat{x}_1, \hat{x}_0, \hat{y}_0, 0)$, при этом $\left\| y(\cdot, x_0, y_0, \alpha) - \hat{y}(\cdot) \right\|_{C\left(\Delta, R^n\right)} \to 0$ при $(x_0, y_0, \alpha) \to (\hat{x}_0, \hat{y}_0, 0)$ и

$$y_{y_0}(x, \hat{x}_0, \hat{y}_0, 0) = \Omega(x), \tag{2.5}$$

$$y_{x_0}(x, \hat{x}_0, \hat{y}_0, 0) = -\Omega(x)\hat{\varphi}(\hat{x}_0), \tag{2.6}$$

где $\Omega(x) = \Omega(x, \hat{x}_0)$ – фундаментальная система решений уравнения

$$\dot{\Omega}(x) = \hat{\varphi}_y(x)\Omega(x), \quad \Omega(\hat{x}_0) = I .$$

Наметим путь доказательства леммы. Если управление $\hat{u}$ – непрерывная функция, то утверждение леммы сразу вытекает из теоремы о существовании непрерывно дифференцируемой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных. Если же $\hat{u}$ – кусочно-непрерывна, то нужно применить теорему несколько раз на каждом участке непрерывности.

3. *Редукция к конечномерной задаче.* Снова фиксируем N, наборы τ и v. Обозначим $z := (x_1, x_0, y_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in R^{2+n+N}$,

$$\overline{B}_i(y) := B_i\left(y(\cdot, x_0, y_0, \alpha), u_\alpha, x_0, x_1\right) =$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} f_i\left(x, y(x, x_0, y_0, \alpha), u_\alpha(x)\right) dx + \psi_i\left(x_0, y_0, x_1, y(x_1, x_0, y_0, \alpha)\right)$$

и рассмотрим конечномерную задачу с ограничениями типа равенств и типа неравенств:

$$\tilde{B}_0(z) \to \min; \quad \tilde{B}_i(z) \le 0, i = 1, \ldots, m', \ \tilde{B}_i(z) = 0, \ i = m'+1, \ldots, m, \tag{2.7}$$
$$\alpha_j \ge 0, \ j = 1, \ldots, N .$$

В силу леммы об игольчатой вариации функции $\widetilde{B}_i$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки

$\hat{z} = (\hat{x}_1, \hat{x}_0, \hat{y}_0, 0)$ и элемент $(y(\cdot; x_0, y_0, \alpha), x_0, x_1) \to (\hat{y}(\cdot), \hat{x}_0, \hat{x}_1)$ в метрике пространства $C(\Delta, R^n) \times R^2$ при $z \to \hat{z}$. А так как элемент ξ доставляет локальный минимум в задаче (2.1), то точка $\hat{z} \in \mathrm{locmin} P_{\tau, v}$. Значит, к задаче (2.7) применим принцип Лагранжа для конечномерных задач с равенствами и неравенствами. Согласно ему найдутся множители Лагранжа $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$, $\mu_1, \ldots, \mu_N$, не все равные нулю $(\lambda_i = \lambda_i(\tau, \nu), \mu_j = \mu_j(\tau, \nu))$, такие, что для функции Лагранжа задачи (2.7):

$$\tilde{\Lambda} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \tilde{B}_i(z) - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \alpha_j =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x, x_0, y_0, \alpha), u_\alpha(x))\, dx + l(x_0, y_0, x_1, y(x_1, x_0, y_0, \alpha)) - \sum_{j=1}^{N} \mu_j \alpha_j,$$

где $l(x_0, y_0, x_1, y_1) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(x_0, y_0, x_1, y_1)$ и выполнены условия:

а) стационарности: $\tilde{\Lambda}_z = 0$;

б) дополняющей нежесткости:

$$\lambda_i \tilde{B}_i(z) = 0 \left(\Leftrightarrow \lambda_i B_i(\hat{\xi}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m' \Leftrightarrow e)\right) \mu_j \alpha_j = 0,\ j = 1, \ldots, N;$$

в) неотрицательности:

$$\lambda_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, m' (\Leftrightarrow f)), \mu_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, N.$$

4. *Преобразование необходимых условий конечномерной задачи.* Обозначим p – решение дифференциального уравнения:

$$p' + p\hat{\varphi}_x = \hat{f}_x, \tag{2.8}$$

$$p(\hat{t}_1) = -\hat{l}_{x_1}. \tag{2.9}$$

Существование и единственность решения уравнения (2.8) с краевым условием (2.9) следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем. Из определений функций p и определения функции Ω следует, что

$$\frac{d}{dx}\left(p\Omega\right)=p'\Omega+p\Omega'=\hat{f}_y\Omega-p\hat{\varphi}_y\Omega+p\hat{\varphi}_y\Omega=\hat{f}_y\Omega\,.$$

Отсюда, используя формулу (2.9):

$$\int\limits_{x_0}^{x_1}\hat{f}_y\Omega dx=\int\limits_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}(p\Omega)dx=p(\hat{x}_1)\Omega(\hat{x}_1)-p(\hat{x}_0)\Omega(\hat{x}_1)=-\hat{l}_{y_1}\Omega(\hat{x}_1)-p(\hat{x}_0)\,. \quad (2.10)$$

Распишем условия стационарности функции Лагранжа $\widetilde{\Lambda}$ в точке $\hat{z}$, учитывая лемму о приращении функционала и формулу из леммы об игольчатой вариации:

$$\begin{gathered}\tilde{\Lambda}_{\alpha_j}(\hat{z})=f\left(\tau_j,\hat{y}\left(\tau_j\right),v_j\right)-\hat{f}\left(\tau_j\right)-\\ -p\left(\tau_j\right)\left(\varphi\left(\tau_j,\hat{y}\left(\tau_j\right),v_j\right)-\hat{\varphi}\left(\tau_j\right)\right)-\mu_j=0;\\ f\left(\tau_j,\hat{y}\left(\tau_j\right),v_j\right)-\hat{f}\left(\tau_j\right)-p\left(\tau_j\right)\left(\varphi\left(\tau_j,\hat{y}\left(\tau_j\right),v_j\right)-\hat{\varphi}\left(\tau_j\right)\right)=\mu_j\geq 0,\\ j=1,\ ...,\ N.\end{gathered} \quad (2.11)$$

Преобразуем, используя соотношения (2.5) и (2.10):

$$\begin{gathered}\tilde{\Lambda}_{y_0}(\hat{z})=\int\limits_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1}\hat{f}_y(x)\,y_{y_0}(x,\hat{x}_0,\hat{y}_0,0)\,dx+\hat{l}_{y_0}+\hat{l}_{y_1}y_{y_0}(\hat{x}_1,\hat{x}_0,\hat{y}_0,0)=\\ =\int\limits_{x_0}^{x_1}\hat{f}_y\Omega dx+\hat{l}_{y_0}+\hat{l}_{y_1}\Omega(\hat{x}_1)=-\hat{l}_{y_1}\Omega(\hat{x}_1)-p(\hat{x}_0)+\hat{l}_{y_0}+\hat{l}_{y_1}\Omega(\hat{x}_1)= \quad (2.12)\\ =-p(\hat{x}_0)+\hat{l}_{y_0}=0.\end{gathered}$$

Далее, используя соотношения (2.6) и (2.10), получим:

$$\begin{gathered}\tilde{\Lambda}_{e_0}(\hat{z})=-\hat{f}(\hat{x}_0)+\int\limits_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1}\hat{f}_y(x)y_{x_0}(x,\hat{x}_0,\hat{y}_0,0)\,dx+\hat{l}_{x_0}+\\ +\hat{l}_{y_1}y_{x_0}(\hat{x}_1,\hat{x}_0,\hat{y}_0,0)=\\ =-\hat{f}(\hat{x}_0)-\int\limits_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1}\hat{f}_y(x)\Omega(x)\hat{\varphi}(\hat{x}_0)\,dx+\hat{l}_{x_0}-\hat{l}_{y_1}\Omega(\hat{x}_1)\hat{\varphi}(\hat{x}_0)=\\ =-\hat{f}(\hat{x}_0)+\hat{l}_{y_1}\Omega(\hat{x}_1)\hat{\varphi}(\hat{x}_0)+p(\hat{x}_0)\hat{\varphi}(\hat{x}_0)+\hat{l}_{x_0}-\hat{l}_{y_1}\Omega(\hat{x}_1)\hat{\varphi}(\hat{x}_0)=\\ =-\hat{f}(\hat{x}_0)+p(\hat{x}_0)\hat{y}'(\hat{x}_0)+\hat{l}_{x_0}=-\hat{f}(\hat{x}_0)+\hat{l}_{y_0}\hat{y}'(\hat{x}_0)+\hat{l}_{x_0}=0. \quad (2.13)\end{gathered}$$

$$\widetilde{\Lambda}_{t_1}(\hat{z}) = \hat{f}(\hat{x}_1) + \hat{l}_{x_1} + \hat{l}_{y_1}\hat{y}'(\hat{x}_1) = 0. \qquad (2.14)$$

Очевидно, что $\lambda \neq 0$, иначе из определений функций f, l и p следовало бы, что $\mathrm{p} \equiv 0$, а из соотношений (2.11) следовало бы, что μ = 0, а множитель Лагранжа $(\lambda, \mu) \neq 0$. Умножением на положительную константу нормируем вектор λ так, чтобы $|\lambda| = 1$.

Итак, для точек $\tau_1, ..., \tau_N \in T$, управлений $\nu_1, ..., \nu_N \in U$ существует вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$, $|\lambda| = 1$ (такой, что выполняются соотношения «а» – «е») принципа максимума Понтрягина с условием оптимальности для конечного числа точек τ_i и управлений ν_i).

5. *Окончание доказательства.* Рассмотрим в пространстве R^{m+1} подмножества $K(\tau, \nu)$, $\tau \in T$, $\nu \in U$, сферы $K = \{\lambda \in R^{m+1} \,|\, |\lambda| = 1\}$, состоящие из тех векторов λ, для которых выполняются утверждения «а» – «е» теоремы о принципе максимума Понтрягина, причем в пункте «в» взято $x = \tau$, $u = \nu$. Сфера K является компактом, множества $K(\tau, \nu) \subset K$ замкнуты, конечное пересечение $\bigcap\limits_{j=1, ..., N} K_{\tau_j, \nu_j} \neq \varnothing$.

Лемма о центрированной системе

Пусть K – компакт, $\{\mathrm{K}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – система замкнутых подмножеств K, любая конечная подсистема которой имеет непустое пересечение (центрированная система). Тогда пересечение всех множеств системы $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ непусто ($\bigcap\limits_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \varnothing$).

Доказательство. Обозначим O_α – дополнение к K_α в K; $O_\alpha = K \setminus K_\alpha$. Тогда O_α открыто в K. Если $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{K}_\alpha \neq \varnothing$, то $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} O_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} (\mathrm{K} \setminus \mathrm{K}_\alpha) = K \setminus \bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} K_\alpha = K$, т.е. $\{O_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ есть открытое покрытие компакта K. По определению компакта из любого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т.е. можно найти $\alpha_1, ..., \alpha_N$, такие, что $\bigcup_{j=1}^{N} O_{\alpha_j} = K$. Но тогда $\bigcap_{j=1}^{N} K_{\alpha_j} = \bigcap_{j=1}^{N} \left(K \setminus O_{\alpha_j}\right) = K \setminus \bigcup_{j=1}^{N} O_{\alpha_j} = \varnothing$ – противоречие с центрированностью системы. Значит, пересечение всех множеств системы $\bigcap_{\alpha \in A} K_{\alpha} \neq \varnothing$.

По лемме о центрированной системе все множества $K(\tau, \nu)$ имеют непустое пересечение. Значит, существуют ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_m)$ и функция $p \in PC^1(\Delta, R^n)$ такие, что выполняются утверждения теоремы «а» – «е» с условием оптимальности, выполняющимся для любых $\tau \in T$, $\nu \in U$. ■

Принцип максимума Понтрягина для задачи со свободным концом

Данная задача – частный случай задачи оптимального управления – задачи со свободным концом и закрепленным временем:

$$B\left(y(\cdot), u(\cdot)\right) = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x, y(x), u(x)\right) dx + \psi\left(y(x_1)\right) \to min, \qquad (2.15)$$

$$y'(x) - \varphi(x, y(x), u(x)) = 0 \;\; \forall x \in T, \;\; u(x) \in U, \;\; \forall x \in [x_0, x_1], \;\; y(x_0) = y_0,$$

где $U \subset R^r$ – произвольное множество, $T \subset [x_0, x_1]$ – множество точек непрерывности управления $u(\cdot)$.

Теорема. Пусть $\left(\hat{y}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\right)$ – оптимальный процесс в задаче оптимального управления (2.15). Функции f, φ и их частные производные по y непрерывны в некоторой окрестности множества $\{(x, \hat{y}(x)) | x \in [x_0, x_1]\}$, декартово умноженного на U, а функция ψ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $\hat{y}(x_1)$ (условие гладкости).

Тогда выполняется условие оптимальности по u:

$$f(x,\hat{y}(x),u)-p(x)\varphi(x,\hat{y}(x),u)\geq\hat{f}(x)-p(x)\hat{\varphi}(x),\quad \forall x\in T,\quad \forall u\in U \tag{2.16}$$

где p – единственное решение дифференциального уравнения

$$-p'(x)+\hat{f}_y(x)-p(x)\hat{\varphi}_y(x)=0 \qquad \forall x\in T \tag{2.17}$$

с краевым условием

$$p(x_1)=-\psi'(\hat{y}(x_1)). \tag{2.18}$$

Отметим, что принцип оптимальности (2.16) с условиями (2.17) и (2.18) может быть выведен из необходимых условий оптимальности в общей задаче оптимального управления, множитель Лагранжа λ_0 при функционале B оказывается равным единице, а условие трансверсальности по $y(x_0)$ не существенно.

Доказательство. Единственность решения уравнения (2.17) с краевым условием (2.18) следует из теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейных систем.

А. *Игольчатые вариации*. Зафиксируем точку $\tau\in T$, элемент $v\in U$ и такое малое число $\alpha\geq 0$, что отрезок $[\tau-\alpha,\tau]\subset T$.

Управление

$$u_\alpha(x)=\begin{cases}\hat{u}(x), & x\notin[\tau-\alpha,\tau),\\ v, & x\in[\tau-\alpha,\tau)\end{cases}$$

назовем *элементарной игольчатой вариацией* $\hat{u}$.

Пусть $y_\alpha(\cdot)$ – решение уравнения $y'(x)=\varphi(x,y(x),u_\alpha(x))$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$. По локальной теореме существования функция y_α определена при малых α в некоторой окрестности точки x_0, но из леммы 1(формулировка будет приведена ниже) следует, что на самом деле вектор-функция y_α определена единственным образом на всем отрезке $[x_0,x_1]$.

Функция y_α называется элементарной игольчатой вариацией функции $\hat{y}$, а пара (y_α,u_α) – элементарной игольчатой вариацией процесса $(\hat{y},\hat{u})$. Тройку (τ,ν,α), определяющую эту вариацию, будем называть *элементарной иголкой*.

Б. ***Лемма 1*** *(о свойствах игольчатой вариации)*. Пусть в элементарной иголке (τ,ν,α) точка $\tau\in T$ и управление $\nu\in U$ фиксированы. Тогда существует число $\varepsilon>0$ такое, что для любого $\alpha\in[0,\varepsilon]$ отрезок $[\tau-\alpha,\tau]\subset T$, а функция y_α – игольчатая вариация функции $\hat{y}$ определена на всем отрезке $[x_0,x_1]$; при этом при $\alpha\to+0$:

а) функция $y_\alpha(\cdot)\to\hat{y}(\cdot)$ в метрике пространства $C([x_0,x_1],R^n)$;

б) функция $\dfrac{y_\alpha(\cdot)-\hat{y}(\cdot)}{\alpha}\to g(\cdot)$ в метрике пространства $C([\tau,x_1],R^n)$, где функция g кусочно-дифференцируема на отрезке $[\tau,x_1]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$g'(x)=\hat{\varphi}_y(x)g(x)\qquad\forall x\in[\tau,x_1]\cap T \tag{2.19}$$

с начальным условием

$$g(\tau)=\varphi(\tau,\hat{y}(\tau),\nu)-\hat{\varphi}(\tau)\,. \tag{2.20}$$

Доказательство леммы 1 следует из двух основополагающих фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений: локальной теоремы существования и теоремы о непрерывной дифференцируемости решения по начальным данным.

В. ***Лемма 2*** *(о приращении функционала)*. Пусть в элементарной иголке (τ,ν,α) точка $\tau\in T$, управление $\nu\in U$ фиксированы, $B(\alpha):=B(y_\alpha(\cdot),u_\alpha(\cdot))$. Тогда функция B дифференцируема справа в нуле и $B'(+0)=f(\tau,\hat{y}(\tau),\nu)-\hat{f}(\tau)-p(\tau)(\varphi(\tau,\hat{y}(\tau),\nu)-\hat{\varphi}(\tau))$.

Используя теорему о среднем для определенных интегралов, правило перехода к пределу под знаком интеграла, дифференцируемость по Фреше и лемму 1, получим

$$B'(+0)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{B(\alpha)-B(0)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{B(y_\alpha,u_\alpha)-B(\hat{y},\hat{u})}{\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{\alpha}\left(\int_{x_0}^{x_1}\Big(f\big(x,y_\alpha(x),u_\alpha(x)\big)-\hat{f}(x)\Big)dx\right)+\lim_{\alpha\to+0}\frac{\psi\big(y_\alpha(x_1)\big)-\psi\big(\hat{y}(x_1)\big)}{\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{\alpha}\left(\int_{\tau-\alpha}^{\tau}\Big(f\big(x,y_\alpha(x),v\big)-\hat{f}(x)\Big)dx+\int_{\tau}^{x_1}\Big(f\big(x,y_\alpha(x),\hat{u}(x)\big)-\hat{f}(x)\Big)dx\right)+$$
$$+\lim_{\alpha\to+0}\frac{\psi'\big(\hat{y}(x_1)\big)\big[y_\alpha(x_1)-\hat{y}(x_1)\big]+o\big(y_\alpha(x_1)-\hat{y}(x_1)\big)}{\alpha}=$$
$$=\lim_{\alpha\to+0}\Big(f\big(x,y_\alpha(x),g\big)-\hat{f}(x)\Big)\Big|_{x\in[\tau-\alpha,\tau]}+\lim_{\alpha\to+0}\int_{\tau}^{x_1}\frac{\Big(f'\big|_{\hat{y}}[y_\alpha-\hat{y}]+o\big(y_\alpha-\hat{y}\big)\Big)(x)}{\alpha}+$$
$$+\psi'\big(\hat{y}(x_1)\big)g(x_1)=f\big(\tau,\hat{y}(\tau),v\big)-\hat{f}(\tau)+\int_{\tau}^{x_1}\hat{f}_y(x)g(x)dx-p(x_1)g(x_1).$$

Выражая $\hat{f}_y$ из уравнения (2.17), учитывая уравнение (2.19) и начальное условие (2.20) для $g(\tau)$, имеем

$$\int_{\tau}^{x_1}\hat{f}_y g dx=\int_{\tau}^{x_1}\left(p'+p\hat{\varphi}_y\right)g dx=\int_{\tau}^{x_1}(p'g+pg')dx=\int_{\tau}^{x_1}\frac{d}{dx}(pg)dx=$$
$$=p(x_1)g(x_1)-p(\tau)g(\tau)=p(x_1)g(x_1)-p(\tau)\big(\varphi(\tau,\hat{y}(\tau),v)-\hat{\varphi}(\tau)\big).$$

Подставляя найденное значение $\int_{\tau}^{x_1}\hat{f}_y g dx$ в выражение для $B'(+0)$, получим искомое представление. ■

Из леммы 1 следует, что если $\alpha\in[0,\varepsilon]$, то (y_α,u_α) – допустимый управляемый процесс и $y_\alpha(\cdot)$ равномерно стремится к $\hat{y}(\cdot)$. Поскольку $(\hat{y},\hat{u})$ – оптимальный процесс, то при малых $\alpha>0$ $B(y_\alpha,u_\alpha)\ge B(\hat{y},\hat{u})\Leftrightarrow B(\alpha)\ge B(0)$.

Отсюда по лемме 2 $B'(+0)\ge 0$. Из выражения для $B'(+0)$ вытекает, что

$$f(\tau,\hat{y}(\tau),v)-p(\tau)\varphi(\tau,\hat{y}(\tau),v)\ge\hat{f}(\tau)-p(\tau)\hat{\varphi}(\tau)\quad\forall\tau\in T,\quad\forall v\in U,$$

то есть выполняется соотношение (2.16).

Теорема полностью доказана. ■

2.2. Описание практических задач оптимального управления

Простейшая задача о быстродействии

Рассмотрим задачу о быстрейшей остановке лифта в шахте. Лифт управляется под действием внешней силы, которая может изменяться от –1 до +1. Требуется за кратчайшее время x остановить лифт ($\mathrm{y}'(\mathrm{x})=0$), для определенности в начале координат $y(x)=0$.

Формализуем задачу:

$$\mathrm{X}\to\min;\ |y''|\le 1,\ y(0)=\xi_1,\ \ y'(0)=\xi_2,\ \ y(x)=y'(x)=0\,.$$

Приведем задачу к виду задач оптимального управления, вводя вместо функции y вектор-функцию (y_1, y_2), управление u и обозначения $y_1=y, y_2=y',\ u=y''$:

$$X\to\min;\ y_1'=y_2,\ y_2'=u,\ \ u\in[-1,1],$$
$$y_1(0)=\xi_1,\ y_2(0)=\xi_2,\ \ y_1(x)=y_2(x)=0\,.$$

Функция Лагранжа:

$$\Lambda=\int\limits_0^{\mathrm{x}}\left(\mathrm{p}_1(x)(y_1'-y_2)+p_2(x)(y_2'-u)\right)dx+$$
$$+\lambda_0 x+\lambda_1(y_1(0)-\xi_1)+\lambda_2(y_2(0)-\xi_2)+\lambda_3 y_1(x)+\lambda_4 y_2(x).$$

Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера для лагранжиана $\mathrm{L}=\mathrm{p}_1(x)(y_1'-y_2)+p_2(x)(y_2'-u)$:

$$\begin{cases}-\dfrac{d}{dx}L_{y_1'}+L_{y_1}=0,\\ -\dfrac{d}{dx}L_{y_2'}+L_{y_2}=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-p_1'=0,\\ -p_2'-p_1=0,\end{cases}\Leftrightarrow p_2(x)=C_1x+C_2;$$

б) трансверсальность по y для терминанта $l=\lambda_0 x+\lambda_1(y_1(0)-\xi_1)+\lambda_2(y_2(0)-\xi_2)+\lambda_3 y_1(x)+\lambda_4 y_2(x)$:

$$\mathrm{L}_{\mathrm{y}_1'}(0)=l_{y_1(0)},\ \mathrm{L}_{\mathrm{y}_1'}(x)=-l_{y_1(x)}\Leftrightarrow p_1(0)=\lambda_1,\ p_1(x)=-\lambda_{3,},$$
$$\mathrm{L}_{\mathrm{y}_2'}(0)=l_{y_2(0)},\ \mathrm{L}_{\mathrm{y}_2'}(T)=-l_{y_2(x)}\Leftrightarrow p_2(0)=\lambda_2,\ p_2(x)=-\lambda_4;$$

в) оптимальность по u (не зависящие от u слагаемые не выписываем):

$$\min_{u\in[-1,\,1]}\{-p_2(x)u\}=-p_2(x),\hat{u}(x)\Rightarrow\ \hat{u}(x)=\begin{cases}sign\, p_2(x),\\ \text{любое из}[-1,\,1],\end{cases}$$
$p_2(x)\neq 0,$
$p_2(x)=0;$

г) стационарность по x:
$\Lambda_x(x)=0 \Leftrightarrow \lambda_0+\lambda_1 y_1'(x)+\lambda_4 y_2'(x)=0$;

д) неотрицательность $\lambda_0\geq 0$.

Учитывая то, что из начального условия следует $y_1'(x)=0$, а из «г» $\lambda_4=-p_2(x)$, получаем, что «г» равносильно условию $\lambda_0=p_2(x)\hat{u}(x)$.

Если $\lambda_0=0$, то $p_2(x)=0$ либо $\hat{u}(x)=0$, но тогда из «г» вновь $p_2(x)=0$. При этом p_2 не может быть тождественным нулем, иначе бы все множители Лагранжа были бы нулями. Значит, из «а» $p_2(x)=C(x_0-x)$, а из «г» следует, что $\hat{u}(x_0)\equiv 1$ или $\hat{u}(x_0)\equiv -1$. Множество начальных условий, соответствующих таким уравнениям, описывается уравнением

$$\xi_2=\varphi(\xi_1):=\begin{cases}-\sqrt{2\xi_1},\ \xi_1\geq 0,\\ \sqrt{-2\xi_1},\ \xi_1\leq 0.\end{cases}$$

Действительно, пусть $\hat{u}(x_0)\equiv 1 \ \Leftrightarrow\ \hat{y}_2'(x_0)\equiv 1 \overset{y_2(x)=0}{\Rightarrow}$ $y_2(x_0)=x_0-x \overset{y_1(x)=0}{\Rightarrow} y_1(x_0)=\dfrac{(x_0-x)^2}{2}\Rightarrow\ \xi_1=\dfrac{\xi_2^2}{2}\geq 0\Rightarrow\ \xi_2=-\sqrt{2\xi_1}$ (при извлечении квадратного корня берем знак минус, поскольку $\xi_2=y_2(0)=-x<0$, при этом минимальное время движения $y=-\xi_2>0$). В случае $\hat{u}(x)\equiv -1$ аналогично получаем, что $\xi_2=\sqrt{-2\xi_1}$, $\xi_1\leq 0$. Таким образом, в нашей задаче в этих случаях минимум достигается при $\lambda_0=0$.

Если же $\xi_2 \neq \varphi(\xi_1)$, то $\lambda_0 \neq 0$, и мы полагаем $\lambda_0 = 1$. Тогда из «г» вытекает, что $|p_2(x)| = 1$, т.е. имеются две возможности (рис. 2.1, *а*):

$$p_2^+(x_0) = C(x_0 - x) + 1, \quad p_2^-(x_0) = C(x_0 - x) - 1.$$

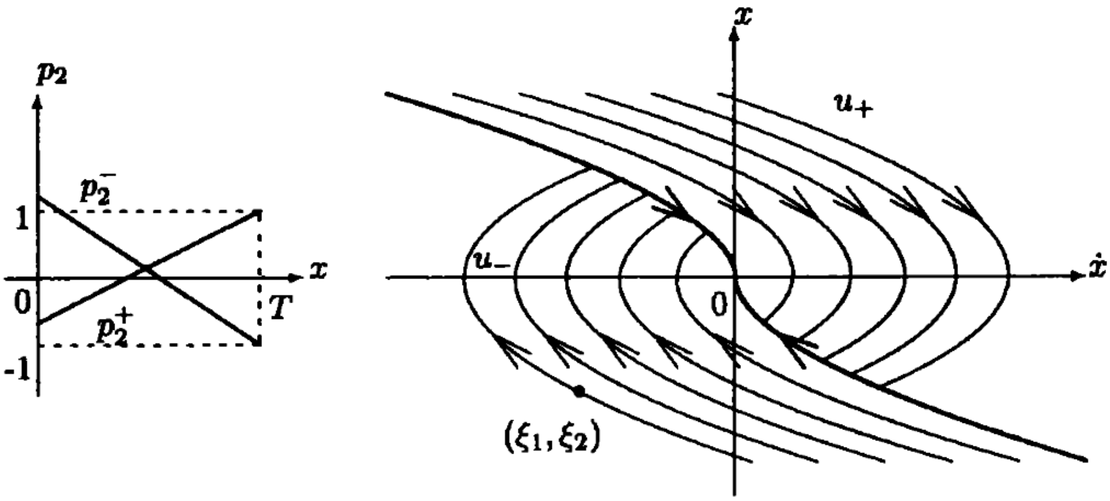

Рис. 2.1

Этим возможностям в силу «б» соответствуют такие управления:

$$u^+ = \begin{cases} -1, & 0 \le x_0 < \tau, \\ 1, & \tau < x_0 \le x; \end{cases} \qquad u^- = \begin{cases} 1, & 0 \le x_0 < \tau, \\ -1, & \tau < x_0 \le x. \end{cases}$$

Рассмотрим траектории, соответствующие оптимальным управлениям u^+ и u^- на плоскости (y_1, y_2), называемой фазовой (рис. 2.1, *б*).

Для тех значений t, для которых $u(x_0) = 1$, имеем

$$y_2' = 1 \Rightarrow y_1' = y_2 = x_0 + C' \Rightarrow y_1 = \frac{x_0^{\;2}}{2} + C'x_0 + C'' = \frac{y_2^2}{2} + C.$$

Таким образом, фазовая траектория, соответствующая этим значениям x_0, – кусок параболы $y_1 = \dfrac{y_2^2}{2} + C$. Направление движения по такой параболе определяется из условия возрастания y_2, так как в этом случае $y_2' = 1$. Аналогично получаем, что для тех значений t, для которых $u(x_0) = -1$, фазовая траектория – кусок параболы

$y_1 = -\frac{y_2^2}{2} + C$ в направлении движения из условия убывания y_2, так как $y_2' = -1$.

Укажем теперь то место на фазовой плоскости (y_1, y_2), где должно совершаться переключение управления. В искомую точку $(0,0)$ $(y_1(x) = y_2(x) = 0)$ мы должны попасть не более чем с одним переключением, двигаясь по фазовой траектории по разрешенному направлению. Совокупность начальных условий, соответствующих управлениям u^+ и u^-, описывается неравенствами $\xi_2 > \varphi(\xi_1)$ (для u^+) и $\xi_2 < \varphi(\xi_1)$ (для u^-). Переключения совершаются на кривой $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$. При этом нетрудно увидеть, что для каждого начального условия имеется единственная фазовая кривая, приводящая в точку $(0,0)$ (рис. 2.1).

Поскольку всегда $|y_2'| = 1$ на оптимальной траектории, то $y_2 = |x_0| + C$, и, значит, время движения $\hat{x} = Var y_2$ (вариация функции y_2). Однако проще находить оптимальное время $\hat{x}$, строя функцию $y(\cdot)$ класса $PC^2([t_0, t_1])$, удовлетворяющую необходимым условиям экстремума и начальным условиям.

Покажем, что оптимальная траектория, начинающаяся в точке $(\xi_1,\ \xi_2)$, является решением задачи. Пусть этой траектории соответствует управление $\hat{u}$ (для определенности $\hat{u}^-$), функция $\hat{y}$ и время $\hat{x}$. Предположим, что имеется некий другой допустимый управляемый процесс $(y,\ u,\ x)$, $x \le \hat{x}$. Доопределим функцию $y(\cdot)$ нулем на отрезке $[x, \hat{x}]$.

Воспользуемся следующей формулой восстановления функции по ее n-й производной:

$$y(\tau) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\tau} (\tau - s)^{n-1} y^{(n)}(s)\,ds + \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)}(0)\frac{\tau^k}{k!}.$$

По этой формуле при $n=2$ в силу условий на левом конце функции y и $\hat{y}$ в точке τ можно представить в виде

$$y(\tau)\int_0^{\tau}(\tau-s)y''(s)ds+\xi_2\tau+\xi_1 .$$

Поскольку $\hat{y}''(s)=1\ge y''(s)\ \ \forall s\in[0,\,\tau]$, то

$$\hat{y}(\tau)-y(\tau)=\int_0^{\tau}(\tau-s)(1-y''(s))ds\ge 0 ,$$

причем равенство здесь возможно только если во всех точках непрерывности $y''(s)\equiv 1$, а $y(x)=\hat{y}(x)\ \ \forall x\in[0,\tau]$.

Аналогично, с учетом условий на правом конце, функции y и $\hat{y}$ в точке τ можно представить в виде

$$y(\tau)=\int_{\tau}^{\hat{T}}(s-\tau)y''(s)ds .$$

Поскольку $\ddot{\hat{y}}(s)=-1\le \ddot{y}(s)\ \ \forall s\in[\tau,\,\hat{x}]$, то

$$\hat{y}(\tau)-y(\tau)=\int_{\tau}^{\hat{x}}(s-\tau)(-1-\ddot{y}(s))ds\le 0 ,$$

причем равенство и здесь возможно только если $y''(s)\equiv -1$, а тогда $y(x_0)=\hat{y}(x_0)\ \ \forall x_0\in[\tau,x_0]$.

Таким образом, $y(\tau)=\hat{y}(\tau).,\quad y(x)\equiv\hat{y}(x)\ \ \forall x\in[0,\hat{x}]$. Отсюда $x=\hat{x}$.

<u>Примеры решения задач</u>

1. $\displaystyle\int_0^{x_0} y\,dx\to \text{extr};\ |\hat{y}|\le 2,\quad y(0)=y'(0)=y'(2)=0 .$

◄ Эту задачу легко свести к задаче оптимального управления, вводя вместо функции y вектор-функцию $(y_1,\,y_2)$ и управление u, а также обозначения $y_1=y,\,y_2=y',\,y_3=y''$. Тогда наша задача сведется к задаче оптимального управления:

$$\int_0^2 y_1\,dx \to \text{extr}; \quad y_1' = y_2,\ y_2' = u,$$

$$u \in [-2, 2], \quad y_1(0) = y_2(0) = y_2(2) = 0.$$

Функция Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^2 \left(\lambda_0 y_1 + p_1(x)(y_1' - y_2) + p_2(x)(y_2' - u)\right)dx + \lambda_1 y_1(0) + \lambda_2 y_2(0) + \lambda_3 y_2(2).$$

Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера – Лагранжа для лагранжиана $L = \lambda_0 y_1 + p_1(x)(y_1' - y_2) + p_2(x)(y_2' - u)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}L_{y_1'} + L_{y_1} = 0, \\ -\dfrac{d}{dx}L_{y_2'} + L_{y_2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -p_1' + \lambda_0 = 0, \\ -p_2' - p_1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1(x) = \lambda_0 x + C, \\ p_2(x) = -\lambda_0 \dfrac{x^2}{2} - Cx + C'; \end{cases}$$

б) трансверсальность по y для терминанта $l = \lambda_1 y_1(0) + \lambda_2 y_2(0) + \lambda_3 y_2(2)$:

$$L_{y_1'}(0) = l_{y_1(0)}, \quad L_{y_1'}(2) = l_{y_1(2)} \Leftrightarrow p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(2) = 0,$$

$$L_{y_2'}(0) = l_{y_2(0)}, \quad L_{y_2'}(2) = l_{y_2(2)} \Leftrightarrow p_2(0) = \lambda_2, \quad p_2(2) = -\lambda_3.$$

в) оптимальность по u:

$$\min_{u\in[-2,\,2]} \{-p_2(x)u\} = -p_2(x)\hat{u}(x) \Rightarrow \hat{u}(x) = \begin{cases} 2\,sign\,p_2(x), & p_2(x) \neq 0, \\ \text{любое из } [-2, 2], & p_2(x) = 0; \end{cases}$$

г) неотрицательность:

- $\lambda_0 \geq 0$ в задаче на минимум;
- $\lambda_0 \leq 0$ в задаче на максимум.

Если $\lambda_0 = 0$, то из «а» следует, что $p_1 = C$, из «б» – $p_1 = 0$, поэтому из «а» $p_2 = C' \neq 0$, иначе все множители Лагранжа оказались бы нулями. Значит, из «в» $\hat{u} = 2$ или $\hat{u} = -2$, т.е. $y'' = 2$ или $y'' = -2$, откуда $y = x^2 + A_1 x + A_2$ или $y = -x^2 + B_1 x + B_2$. В обоих случаях не существует функции такого вида, удовлетворяющей условиям на концах $y(0) = y'(0) = y'(2) = 0$.

Полагаем $\lambda_0 = 1$ в задаче на минимум. Тогда из «а» $p_1(x) = x + C$ и из «б» $p_1(x) = x - 2$, далее из «а» следует, что $p_2(x) = -\frac{(x-2)^2}{2} + C''$. Получили, что $p_2(x)$ – парабола с ветвями, направленными вниз, и вершиной на оси $x = 2$, следовательно, $p_2(x)$ не меняет свой знак на отрезке $[0, 2]$ или меняет его с минуса на плюс в некоторой точке $\tau \in (0, 2)$. Значит, из «в» оптимальное управление $\hat{u}$ на всем отрезке тождественно равняется двум или минус двум или меняет свое значение с минус двух на плюс два в некоторой точке τ. Но, как мы уже выяснили в первых двух случаях, функции, удовлетворяющей начальным условиям, нет.

Осталось рассмотреть случай

$$\hat{u} = \hat{y}'' = \begin{cases} -2, & 0 \le x \le \tau, \\ 2, & \tau < x \le 2. \end{cases}$$

Интегрируя это равенство, находим, что

$$\hat{y}' = \begin{cases} -2x + C_1, & 0 \le x \le \tau, \\ 2x + C_2, & \tau < x \le 2. \end{cases}$$

Из условия на концах $y'(0) = y'(2) = 0$:

$$\hat{y}' = \begin{cases} -2x, & 0 \le x \le \tau, \\ 2x - 4, & \tau < x \le 2. \end{cases}$$

Поскольку функция должна быть непрерывной в точке τ, то $-2\tau = 2\tau - 4$, откуда $\tau = 1$. Интегрируя еще раз, получаем

$$\hat{y} = \begin{cases} -x^2 + C_1, & 0 \le x \le 1, \\ x^2 - 4x + 2, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Из начального условия $y(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$ и условия непрерывности в точке $\tau = 1$: $-1 = 1 - 4 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 2$ находим допустимую экстремаль:

$$\hat{y} = \begin{cases} -x^2, & 0 \le x \le 1, \\ x^2 - 4x + 2, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Докажем с помощью непосредственной проверки, что функция $\hat{y}$ доставляет абсолютный минимум в задаче. Возьмем функцию $h \in PC^2([0,2])$ такую, чтобы $\hat{y}+h$ была допустимой в задаче. Для этого необходимо взять функцию h, для которой $|\hat{y}''+h''| \le 2, \ \ h(0)=h'(0)=h'(2)=0$.

Для функционала $J(y(\cdot))=\int\limits_0^2 y dx$

$$J(\hat{y}+h)-J(\hat{y})=\int\limits_0^2 (\hat{y}+h)dx-\int\limits_0^2 \hat{y}dx=\int\limits_0^2 hdx=-\int\limits_0^2 p_2'' h\,dx=-\int\limits_0^2 hdp_2'.$$

Интегрируя по частям дважды с учетом условий $h(0)=h'(0)=h'(2)=0, \quad p_2'(2)=0$, получим

$$J(\hat{y}+h)-J(\hat{y})=\int\limits_0^2 h'p_2'dx-hp_2'\Big|_0^2=\int\limits_0^2 h'\,dp_2=h'p_2\Big|_0^2-\int\limits_0^2 h''p_2dx=$$

$$=-\int\limits_0^2 h''p_2dx.$$

Разбивая отрезок интегрирования на два и учитывая, что

$$\begin{cases} h''\ge 0, & 0\le x\le 1, \\ h''\le 0, & 0\le x\le 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_2\le 0, & 0\le x\le 1, \\ p_2\ge 0, & 1\le x\le 2, \end{cases}$$

имеем

$$J(\hat{y}+h)-J(\hat{y})=-\int\limits_0^1 h''p_2dx-\int\limits_1^2 h''p_2\ge 0.$$

Таким образом, $\hat{y}\in \operatorname{abs}\min$.

При этом

$$S_{\min}=J(\hat{y}(\cdot))=\int\limits_0^2 \hat{y}dx=\int\limits_0^1 -x^2dx+\int\limits_1^2 (x^2-4x+2)dx=-2.$$

Ясно, что при решении задачи на максимум $-\hat{y}\in abs\max$, $S_{\max}=2$, так как функционал $J(y)$ – нечетная функция относительно y, а множество допустимых функций симметрично относительно нуля. ➤

2. $T \to \min$, $-1 \le y'' \le 3$, $y(0)=1$, $y(x)=-1$, $y'(0)=y'(x)=0$.

◄ Приведем задачу к виду задач оптимального управления, вводя вместо функции y вектор-функцию (y_1, y_2) и управление u, а также обозначения $y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y''$:

$T \to \min, y_1' = y_2, y_2' = u, u \in [-1, 3]$, $\qquad y_1(0)=1$, $\qquad y_1(x)=-1$, $y_2(0)=y_2(x)=0$.

Функция Лагранжа:

$$\Lambda = \int_0^x (p_1(x)(y_2' - y_2) + p_2(x)(y_2' - u))dx + \lambda_0 x +$$
$$+ \lambda_1(y_1(0)-1) + \lambda_2 y_2(0) + \lambda_3(y_1(x)+1) + \lambda_4 y_2(x).$$

Необходимые условия:

а) система уравнений Эйлера для лагранжиана $L = p_1(x)(y_1' - y_2) + p_2(x)(y_2' - u)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx} L_{y_1'} + L_{y_1} = 0, \\ -\dfrac{d}{dx} L_{y_2'} + L_{y_2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -p_1' = 0, \\ -p_2' - p_1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1(x) = C, \\ p_2(x) = C_1 x + C_2 \end{cases};$$

б) трансверсальность по x для терминанта $l = \lambda_0 x + \lambda_1(y_1(0)-1) + \lambda_2 y_2(0) + \lambda_3(y_1(x)+1) + \lambda_4 y_2(x)$:

$$L_{y_1'}(0) = l_{y_1(0)}, \quad L_{y_1'}(2) = -l_{y_1(x)} \Leftrightarrow p_1(0) = \lambda_1, \quad p_1(2) = -\lambda_3,$$
$$L_{y_2'}(0) = l_{y_2(0)}, \quad L_{y_2'}(2) = -l_{y_2(x)} \Leftrightarrow p_2(0) = \lambda_2, \quad p_2(2) = -\lambda_4;$$

в) оптимальность по u:

$$\min_{u \in [-1, 3]} \{-p_2(x)u\} = -p_2(x)\hat{u}(x) \Rightarrow \hat{u}(x) = \begin{cases} -1, & p_2(x) < 0, \\ 3, & p_2(x) > 0, \\ \text{любое из } [-1, 3], & p_2(x) = 0; \end{cases}$$

г) стационарность по x:

$\Lambda_T(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_3 y_1'(x) + \lambda_4 y_2'(x = 0)$;

д) неотрицательность: $\lambda_0 \ge 0$.

Учитывая, что из начальных условий следует, что $y_1'(x)=0$, а из «б» $\lambda_4=-p_2(x)$, получаем, что «г» равносильно условию $\lambda_0=p_2(x)\hat{u}(x)$.

Если $\lambda_0=0$, то $p_2(x)=0$ либо $\hat{u}(x)=0$, но отсюда из «с» вновь $p_2(x)=0$. При этом p_2 не может быть тождественным нулем, ибо иначе все множители Лагранжа были бы нулями. Значит, из «а» $p_2(x)=C(x_0-x), C\neq 0$, тогда из «в» следует, что $\hat{u}(x)\equiv -1$ или $\hat{u}(x)\equiv 3$, т.е. $\hat{x}''=-1$ или $\hat{x}''=3$, откуда $y=-\dfrac{x^2}{2}+A_1x+A_2$ или $y=\dfrac{3x^2}{2}+B_1x+B_2$. В обоих случаях не существует функции такого вида, удовлетворяющей условиям на концах $y(0)=1, y(x)=-1,$ $y'(0)=y'(x)=0$. Таким образом, в случае $\lambda_0=0$ нет допустимых экстремалей.

Полагаем $\lambda_0=1$. В силу условий «а» p_2 – линейная функция, не тождественно равная нулю. Значит, p_2 может менять свой знак на отрезке $[0,x]$ не более одного раза. Причем, если функция p_2 не меняет свой знак на $[0,x]$, то $\hat{u}(x)\equiv -1$ или $\hat{u}(x)\equiv 3$. В обоих случаях мы проверили, что нет допустимых экстремалей.

Поэтому p_2 меняет знак на $[0,x]$ ровно один раз в некоторой точке $\tau\in(-1,3)$. Получаем две возможности:

$$\hat{u}=y''=\begin{cases}3, & 0\le x_0\le\tau,\\ -1, & \tau\le x_0\le x,\end{cases} \quad \text{или } \hat{u}=x''=\begin{cases}-1, & 0\le x_0\le\tau,\\ 3, & \tau\le x_0\le x.\end{cases}$$

Первый случай невозможен, так как тогда параболы с заданными условиями на концах не пересекаются. Интегрируя второе равенство, находим, что

$$\hat{y}'=\begin{cases}-x+C_1, & 0\le x_0\le\tau,\\ 3x+C_2, & \tau\le x_0\le x.\end{cases}$$

Из условий на концах $y'(0) = y'(x) = 0$ имеем

$$\hat{y}' = \begin{cases} -x, & 0 \le x_0 \le \tau, \\ 3(x_0 - x), & \tau \le x_0 \le x. \end{cases}$$

Поскольку $\hat{y} \in PC^2([0, x])$, то функция $\hat{y}'$ должна быть непрерывной в точке τ, поэтому $-\tau = 3(\tau - x)$, откуда $\tau = \dfrac{3x}{4}$. Отсюда

$$\hat{y} = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + C, & 0 \le x_0 \le \dfrac{3x}{4}, \\ \dfrac{3(x_0 - x)^2}{2} + D, & \dfrac{3x}{4} \le x_0 \le x. \end{cases}$$

Из начальных условий $y(0) = 1, \quad y(x) = -1$ следует, что $C = 1$, $D = -1$, а из условия непрерывности в точке $\tau = \dfrac{3x}{4}$: $-\dfrac{9x^2}{32} + 1 = \dfrac{3x^2}{32} - 1$. Находим, что $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Таким образом, имеется единственная допустимая экстремаль

$$\hat{y} = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 1, & 0 \le x \le \sqrt{3}, \\ \dfrac{3\left(x - 4/\sqrt{3}\right)^2}{2} - 1, & \sqrt{3} \le x \le \dfrac{4}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Несложно показать, что $\hat{y} \in \operatorname{abs\,min}$, т.е. найденное значение доставляет абсолютный минимум в задаче. ➤

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} y \sin x \, dx \to \text{extr}; \quad |y'| \le 1, \, y(-\pi) = y(\pi) = 0.$

Ответ:

$$\hat{y}=\begin{cases} \pi+x, & -\pi\le x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ -x, & \dfrac{-\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ x-\dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi, \end{cases} \in \quad \operatorname{abs} min,\, S_{min}=-4\,;$$

$-\hat{y}\in \operatorname{abs}\max, \quad S_{\max}=4.$

2. $\int\limits_0^2 y\,dx\to \text{extr}; |y''|\le 2,\, y(0)+y(2)=0, \quad y'(0)=0\,.$

Ответ:

$\hat{y}=x^2-2\in \operatorname{abs} min; \quad S_{min}=-\dfrac{4}{3}\,;$

$-\hat{y}\in \operatorname{abs}\max, \quad S_{\max}=\dfrac{4}{3}\,.$

3. $y\to \min; \quad |y''|\le 2,\ y(-1)=1,\ y(x)=-1,\ y'(-1)=y'(x)=0\,.$

Ответ:

$$\left(\hat{y}=\begin{cases} -x^2-2x, & -1\le x\le 0, \\ x^2-2x, & 0\le x\le 1; \end{cases} \quad \hat{x}=1\right)\in \operatorname{abs}\min; \quad S_{\min}=1\,.$$

Библиографический список

1. *Блисс, Г. А.* Лекции по вариационному исчислению / Г.А. Блисс. – Л. : Иностр. лит., 1950. – 347 с.

2. *Галеев, Э. М.* Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с. – ISBN 5-8360-0041-7.

3. *Гельфанд, И. М.* Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М. : Физматгиз, 1961. – 228 с.

4. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч.2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : ОНИКС 21 век : Мир и Образование, 2003. – 416 с. – ISBN 5-329-00327-Х (ОНИКС 21 век). – ISBN 5-49666-009-8 (Мир и образование).

5. *Иоффе, А. Д.* Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М. : Наука, 1974. – 478 с.

6. *Ногин, В. Д.* Основы теории оптимизации : учеб. пособие для студентов втузов / В. Д. Ногин, И. О. Протодьяконов, И. И. Евлампиев. – М. : Высш. шк., 1986. – 384 с.

7. Оптимальное управление / В. М. Тихомиров [и др.]. – М. : Наука, 1979. – 432 с.

8. *Пантелеев, А. В.* Вариационное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие /А. В. Пантелеев. – М. : Высш. шк., 2006. – 272 с. – ISBN 5-06-005327-Х.

9. *Поляк, Б. Т.* Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М. : Наука, 1983. – 384 с.

Оглавление

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ»

Составители:
МЕДВЕДЕВА Ольга Николаевна
КУЧЕРИК Алексей Олегович
ЯНИНА Елена Владимировна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор С.М. Аракелян

Подписано в печать 22.02.11.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 4,88. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.